UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA COGNITIVA

O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças

JULIANA FERREIRA GOMES DA SILVA

Dissertação de Mestrado

Recife
2010

JULIANA FERREIRA GOMES DA SILVA

O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de mestre em Psicologia.

Área de Concentração: Psicologia Cognitiva.
Orientadora: Dra. Alina Galvão Spinillo

Recife
2010

Dedicatória

Dedico a conclusão deste trabalho ao meu pai, José Gomes, que me acompanhou no início do Mestrado e hoje, sem dúvida, estaria vibrando de felicidade com mais essa conquista. Pelo amor incondicional e carinho de sempre.

Agradecimentos

Durante o curso de Mestrado, foram muitas as pessoas que me apoiaram e participaram direta ou indiretamente da construção deste trabalho. Venho, neste momento, agradecer com carinho a cada uma delas.

Agradeço à minha querida orientadora Alina, por todos os anos de convivência e aprendizagem. Posso dizer que ela é a grande responsável por minha formação profissional, pois foi com ela que há 6 anos, na iniciação científica, conheci o mundo da pesquisa, aprendi “como se faz uma pesquisa”. Obrigada pela oportunidade, pelo carinho de sempre, e por acreditar que eu conseguiria mesmo nos momentos mais difíceis.

A toda minha família (mãe, irmã, cunhado, avós, tios e primos), por estarem sempre presentes e, sobretudo, pelo apoio e compreensão em todos os momentos.

Agradeço, especialmente, ao meu namorado, Gliner, por estar ao meu lado sempre, pelo apoio e paciência infinita. Obrigada por me ajudar a realizar este sonho e por ser meu maior incentivador.

Aos membros do NUPPEM (Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática), por todas as discussões que tanto contribuíram para o amadurecimento e enriquecimento deste trabalho.

À Rosita Marina, por seu grande apoio amigo nas horas difíceis e pela colaboração na análise dos dados.

À Tatyane Veras pela disponibilidade e colaboração na análise dos dados.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, pelas discussões e contribuições de natureza teórica que auxiliaram na minha formação e construção desta dissertação.

Aos colegas de Mestrado, pelos momentos de aprendizagem compartilhados e pela ajuda mútua.

A Ivo Vanderley, pela ajuda no tratamento estatístico dos dados e pela imensa paciência e disponibilidade.

Aos funcionários do departamento, por resolveram todas as questões burocráticas ao longo desses dois anos.

À escola investigada e às crianças participantes da pesquisa, por permitirem a efetivação deste trabalho.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa de auxílio à pesquisa, o que permitiu o regime de dedicação exclusiva ao Mestrado.

Resumo

Estudos mostram que problemas de produto cartesiano são mais difíceis de serem resolvidos por crianças de 8-9 anos do que outros problemas multiplicativos, como os de isomorfismo de medidas. A dificuldade atribuída a esses problemas pode ser justificada pelo fato da correspondência um-para-muitos estar implícita, enquanto que em problemas de isomorfismo esta correspondência é mais evidente. Considerando a carência de estudos que examinem as relações que marcam a natureza dos problemas de produto cartesiano, a presente investigação examinou a possibilidade de que a explicitação da correspondência um-para-muitos pudesse auxiliar as crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório do tipo produto cartesiano. Para testar essa possibilidade, problemas deste tipo foram apresentados em situações que a correspondência um-para-muitos estava implícita ou explícita. Será que a explicitação da correspondência um-para-muitos teria algum efeito sobre o desempenho e as estratégias de resolução adotadas pelas crianças? Para responder tal questão, foram entrevistadas 40 crianças com média de idade de 8 anos e 2 meses, alunas do 3º ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade do Recife. As crianças foram solicitadas a resolver 12 problemas de produto cartesiano divididos em três situações: Situação 1, problemas em que a correspondência um-para-muitos estava implícita; Situação 2, problemas que explicitavam a correspondência acompanhados de representação gráfica; e Situação 3, problemas que explicitavam a correspondência acompanhados dos princípios invariantes do raciocínio combinatório. Em cada situação, dois tipos de problemas foram apresentados: problemas de trajes (combinar peças de vestuário) e problemas de percurso (combinar entradas e saídas). Os resultados mostraram que as crianças tiveram um desempenho significativamente melhor nos problemas em que as relações um-para-muitos estavam explícitas (Situação 2 e 3) do que quando implícitas (Situação 1), adotando inclusive estratégias mais elaboradas de resolução. Em vista deste resultado, foi realizado um segundo estudo em que as crianças resolviam primeiro os problemas nas situações explícitas (Situação 2 e 3) e depois na situação implícita (Situação 1). Os dados mostraram que a sequência explícito-implícito favoreceu consideravelmente o desempenho nos problemas da Situação 1, considerados difíceis no primeiro estudo. Conclui-se que a explicitação da correspondência um-para-muitos tem efeito na resolução de problemas de produto cartesiano, efeito este que se traduz tanto em um melhor desempenho como no uso de estratégias de resolução mais sofisticadas. O fato do presente estudo apontar que crianças pequenas podem mostrar o início do raciocínio combinatório faz com que se pense na possibilidade de ensinar esses problemas desde cedo nas escolas.

***Palavras-chave*:** raciocínio combinatório, correspondência um-para-muitos, crianças.

Abstract

Many studies show that Cartesian product problems are more difficult to be solved by children from 8-9 years old than the other multiplicative problems as isomorphism of measures. The difficult with these problems can be justified by the fact to the one-to-many match being implicit while in another kind of isomorphism problems this match is more evident.

Considering the lack of this kind of studies which examined the relations that mark the nature of the Cartesian problems, this paper examined the possibility that explicit of one-to-many match could help children in solving problems in combinatory reasoning in a Cartesian product. To test this possibility, many problems were presented in situations which one-to-many match was implicit or explicit. Was the explicit one-to-many match having any effect about the performance and resolution strategies adopted by children? To answer the question 40 children about 8 years old were interviewed. They were students for the 3° grade of elementary from a private school in Recife. Children were called to solve 12 problems of Cartesian product in three different situations: Situation 1: a problem that one-to-many match was implicit; situation 2: problems had shown the match with graphic representation; situation 3 had shown problems expliciting match with unalterable principles of the combinatory reasoning. In each situation two types of problems were presented: dressing problems (match clothes) and way problems (match entries and exits). The results demonstrated how the children had a better performance in problems involved explicit relations one-to-many (Situations 2 and 3) than they were implicit (Situation 1), adopting more elaborated strategies of resolution. As a result it was realized another search when children solve at first problems in explicit situations (Situations 2 and 3) and after that children solve problems in implicit situation (Situation 1). The data had shown explicit-implicit sequence favored the performance in the problems of Situation 1, considered difficult, previously. It is concluded that it has an effect in the Cartesian product in solving problems and this effect means as much as in a better performance as in strategy uses in a more sophisticated resolution. This paper aim and represents that small children can show the beginning of the match reasoning and it means that we should think in a possibility to teach these problems at schools so early.

***Keywords*:** combinatory reasoning, one-to-many match, children.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Possíveis combinações de saias e blusas.................................. 19
Figura 2. Possíveis combinações de pratos quentes, saladas e sobremesas.. 20
Figura 3. Entradas e saídas da escola... 68
Figura 4. Saias e blusas de Maria.. 69
Figura 5. Entradas e saídas do cinema.. 70
Figura 6. Chapéus e gravatas de Pipo.. 70
Figura 7. Participante 10 (8a 8m), Situação 1 (implícita)............................. 76
Figura 8. Participante 06 (8a), Situação 1 (implícita)................................... 77
Figura 9. Participante 19 (8a 1m), Situação 1 (implícita)............................. 77
Figura 10. Participante 28 (7a 11m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)... 78
Figura 11. Participante 07 (8a 2m), Situação 1 (implícita)........................... 79
Figura 12. Participante 56 (7a 7m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)... 82
Figura 13. Participante 12 (7a 9m), Situação 1 (implícita)........................... 83
Figura 14. Participante 12 (7a 9m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)... 84
Figura 15. Participante 32 (8a 2m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)... 85
Figura 16. Participante 47 (8a 2m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)... 86

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1. Os problemas e seus pares numéricos.................................... 34
Quadro 2. Resumo geral das estratégias identificadas no presente estudo.. 75

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Frequência e porcentagem (em parênteses) de acertos por tipo de problema em cada situação (máximo: 40 acertos)................................ 90
Tabela 2 - Níveis de significância obtidos através do Wilcoxon 92
Tabela 3 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos por tipo de problema em cada situação (máximo: 40 acertos)................................ 93
Tabela 4 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos obtidos em cada estudo nas três situações (máximo: 80 acertos)........................... 94
Tabela 5 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos obtidos em cada estudo nos dois tipos de problema (máximo: 120 acertos) 96
Tabela 6 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) dos tipos de estratégia em cada situação.. 97
Tabela 7 - Níveis de significância dos tipos de estratégia nas três situações.. 98
Tabela 8 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) das estratégias por tipo de problema em cada situação... 100
Tabela 9 - Níveis de significância das estratégias em cada tipo de problema nas três situações.. 101
Tabela 10 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) dos tipos de estratégia em cada situação.. 102
Tabela 11 - Níveis de significância dos tipos de estratégia nas três situações.. 103
Tabela 12 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) das estratégia por tipo de problema em cada situação... 104
Tabela 13 - Níveis de significância das estratégias em cada tipo de problema nas três situações.. 105

SUMÁRIO

Capítulo I: Considerações Teóricas.. 17

1.1 O raciocínio combinatório na perspectiva da Matemática...................... 17

1.1.1 Problemas de permutação, arranjo e combinação........................ 17

1.1.2 Problema de produto cartesiano.. 19

1.2 O raciocínio combinatório no âmbito da psicologia do desenvolvimento.. 23

1.2.1 As investigações de Piaget: a combinatória como um esquema operatório da lógica formal... 23

1.2.2 A perspectiva de Vergnaud: a teoria dos campos conceituais e os problemas de estrutura multiplicativa.. 27

1.3 A correspondência um-para-muitos... 33

1.4 Estudos com crianças: limites e possibilidades do pensamento infantil em relação ao pensamento combinatório.. 41

Capítulo II: Método.. 59

2.1 Objetivos e hipóteses.. 59

2.2 Participantes.. 60

2.3 Procedimento e planejamento experimental.. 62

2.3.1 Os problemas.. 63

2.3.2 As situações.. 65

2.4 Material... 73

Capítulo III: Sistema de análise das estratégias de resolução................. 74

3.1 Estratégias de resolução não combinatórias.. 75

3.2 Estratégias de resolução combinatória.. 80

Capítulo IV: Resultados.. 88

4.1 Resultados relativos ao desempenho.. 90

4.1.1 Desempenho no Estudo 1.. 90

4.1.2 Desempenho no Estudo 2.. 92

4.1.3 Comparando o desempenho nos dois estudos.............................. 94

4.2 Resultados relativos às estratégias de resolução 96

4.2.1 Estratégias no Estudo 1... 97

4.2.2 Estratégias no Estudo 2... 102

Capítulo V: Conclusões e discussão final.. 109
5.1 Principais resultados e conclusões.. 112
5.1.1 Considerações acerca do desempenho... 112
5.1.2 Considerações acerca das estratégias... 118
5.2 Contribuições do estudo, suas limitações e pesquisas futuras.............. 123
5.3 Implicações educacionais.. 126
Referências Bibliográficas.. 127

Apresentação

Muitas investigações foram realizadas sobre conceitos e relações que marcam a natureza das operações multiplicativas ensinadas nas séries iniciais do ensino fundamental, entretanto, poucas são as investigações que examinam o processo de compreensão de problemas envolvendo relações multiplicativas do tipo produto cartesiano. Os estudos conduzidos nesta direção indicam que problemas de produto cartesiano são mais complexos do que outros problemas multiplicativos (por exemplo, isomorfismo de medidas) visto que a correspondência um-para-muitos está implícita na situação, sendo esta correspondência considerada uma noção difícil de ser compreendida por crianças.

Tomando como fundamentação a teoria de Vergnaud (1991; 1998) a respeito da formação de conceitos matemáticos é possível pensar que a correspondência um-para-muitos é um dos invariantes da combinatória. Nota-se na literatura que as pesquisas têm se voltado mais para as situações e para as representações deste conceito do que para seus invariantes. Supondo, como trouxe Nunes e Bryant (1997), que a maior dificuldade dos problemas de produto cartesiano reside na relação um-para-muitos, então as pesquisas que visem facilitar a resolução de problemas deste tipo poderiam focalizar os invariantes mais do que as representações e as situações.

O presente estudo investigou a influência que a explicitação da correspondência um-para-muitos pode exercer na resolução de problemas de produto cartesiano. Para tal, 40 crianças do 3º ano do ensino fundamental foram individualmente entrevistadas, sendo solicitadas a resolver 12 problemas de produto cartesiano direto (multiplicação). Os problemas foram apresentados em três situações que se distinguiam pela explicitação ou não explicitação da correspondência um-para-muitos. As crianças foram divididas em dois grupos a fim de realizar dois estudos com objetivos distintos, porém relacionados. O Estudo 1, que envolvia as crianças do Grupo 1, procurou examinar se a explicitação das relações um-para-muitos exerceria algum efeito sobre o desempenho e as estratégias adotadas pelas crianças. O Estudo 2, que envolvia as crianças do Grupo 2, procurou examinar se haveria um efeito facilitador das situações em que as relações um-para-muitos eram explícitas sobre a situação implícita. Além das situações, foram investigados também problemas de diferentes tipos.

O presente estudo é formado por cinco capítulos.

O capítulo I apresenta o referencial teórico adotado, trazendo a perspectiva da matemática e da psicologia do desenvolvimento acerca dos problemas de combinatória, como também considerações teóricas sobre a correspondência um-para-muitos e uma revisão dos estudos realizados com crianças nesta área.

O capítulo II apresenta a hipótese e os objetivos do estudo, procurando descrever em detalhes os participantes, materiais utilizados, planejamento experimental e procedimentos adotados na coleta de dados. Neste segundo capítulo ainda há a descrição das situações e problemas empregados neste estudo.

O capítulo III apresenta o sistema de análise das estratégias de resolução adotadas pelas crianças. Cada estratégia é descrita e acompanhada de exemplos provenientes de respostas das crianças durante a entrevista.

O capítulo IV apresenta os resultados relativos ao desempenho e às estratégias de resolução em função das diferentes situações e dos tipos de problema, tanto para o Estudo 1 como para o Estudo 2.

O capítulo V apresenta as principais conclusões derivadas dos resultados obtidos, além das contribuições do presente estudo, seus limites, implicações educacionais e possíveis idéias para pesquisas futuras.

Capítulo I

Considerações teóricas

As considerações teóricas que fundamentam o presente estudo são apresentadas em quatro seções. Na primeira, são tratados os diferentes problemas de raciocínio combinatório a partir da perspectiva da Matemática. Na segunda seção, procura-se caracterizar o esquema de correspondência um-para-muitos, tecendo-se considerações a respeito da sua importância nos problemas de estrutura multiplicativa, especificamente nos problemas de combinatória. A terceira seção versa sobre a perspectiva da psicologia do desenvolvimento acerca do raciocínio combinatório, a partir da construção teórica de Piaget e da perspectiva de Vergnaud sobre os campos conceituais. Na quarta e última seção, são apresentados estudos conduzidos com crianças envolvendo a resolução de problemas de produto cartesiano.

1.1 O raciocínio combinatório na perspectiva da Matemática

1.1.1 Problemas de permutação, arranjo e combinação

Santos, Mello e Murari (1998) afirmam que a análise combinatória trata-se de uma técnica em que se é capaz de descobrir quantos elementos há em um conjunto sem ter que contá-los. As construções clássicas da análise combinatória são divididas em três grupos de problemas, a saber: permutação, combinação e arranjo.

Na permutação analisa-se de quantas maneiras diferentes podemos organizar um grupo de *n* elementos, usando *n* elementos. Neste tipo de problema não existe repetição de elementos, trabalha-se com a combinação de todo o grupo, e a ordem dos elementos é considerada. A permutação pode ser definida da seguinte maneira: "*Dado um conjunto formado por **n** elementos, chama-se permutação desses **n** elementos qualquer agrupamento ordenado de **n** elementos, no qual apareçam todos os elementos do conjunto*." (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 32).

No arranjo trabalha-se com a combinação de um subgrupo do grupo, diferentemente do que ocorre com a permutação que trabalha com a combinação do grupo todo. Não existe repetição de elementos, ou seja, cada elemento só pode ser contado apenas uma vez, e a ordem de agrupamento dos elementos é considerada no problema. O arranjo pode ser definido da seguinte maneira: "*Arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, onde **n** > 1 e **p** é um número natural tal que **p** < **n**, são todos os grupos de **p** elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos **p** elementos que compõe cada grupo.*" (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 42).

Na combinação, assim como nos problemas de arranjo, trabalha-se com um subgrupo do grupo, contudo na combinação a ordem dos elementos não é importante, basta que a combinação ocorra apenas uma vez. Possui como definição: "*A combinação de **n** elementos tomados **p** a **p**, a qualquer agrupamento não-ordenado dos **p** elementos distintos escolhidos dos **n** elementos existentes.*" (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p. 46).

Os problemas que envolvem o raciocínio combinatório descritos acima possuem uma estrutura complexa com algoritmos sofisticados, razão pela qual, geralmente, são introduzidos formalmente na escola durante o ensino médio. Cada um desses problemas possui uma fórmula matemática específica que auxilia na sua resolução.

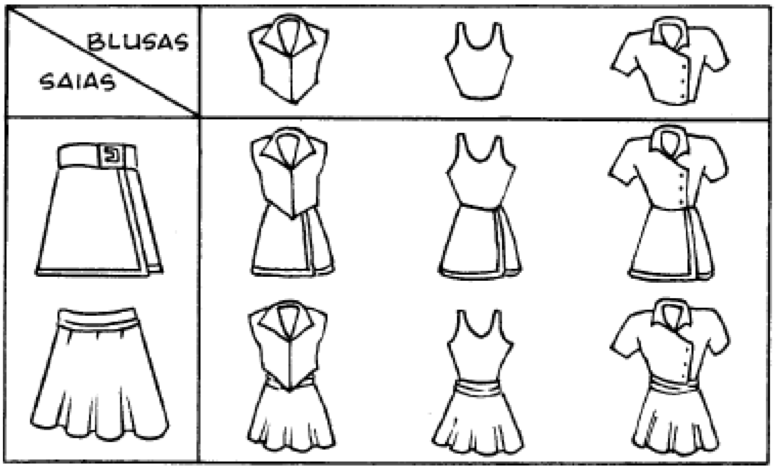
Esses problemas foram apresentados para configurar o campo da combinatória na Matemática. No entanto, o presente estudo irá focalizar um tipo diferente de problema que, embora envolva o raciocínio combinatório, é mais simples do que os problemas descritos acima, sendo denominado problema de produto cartesiano.

1.1.2 Problema de produto cartesiano

Os problemas de produto cartesiano comportam uma relação de combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos distintos; sua forma mais natural de representação é a tabela cartesiana. Vejamos um exemplo deste tipo de problema.

Exemplo 1: Maria vai sair com suas amigas e para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar?

Figura 1. Possíveis combinações de saias e blusas.

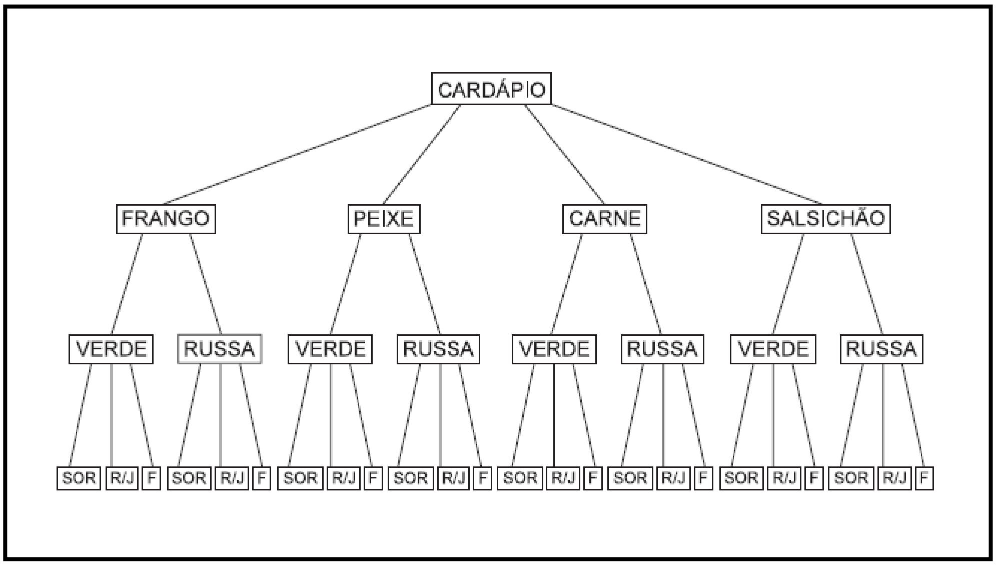


Como pode ser observado, o problema acima envolve dois conjuntos (saias e blusas) que devem ser combinados de modo a produzir um terceiro conjunto (trajes) que contenha todas as combinações possíveis. Em outras palavras, os problemas de produto cartesiano comportam uma relação ternária entre as medidas, em que uma delas é produto de duas outras tanto no plano numérico como no dimensional.

Os problemas de produto cartesiano podem ser representados graficamente por meio de uma "árvore de possibilidades", como ilustrado na Figura 2 relativa ao exemplo adiante:

<u>Exemplo 2</u>: Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada e salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

Figura 2. Possíveis combinações de pratos quentes, saladas e sobremesas.



Segundo Iezzi et al. (2004) a representação gráfica em “árvore de possibilidades” permite listar as possíveis opções de combinação entre os conjuntos, fornecendo uma visão mais clara do número de decisões que podem ser tomadas, além de possibilitar a organização dos elementos de modo a assegurar a correta contagem. Entretanto, quando se tem vários conjuntos ou muitos elementos em cada conjunto, a tarefa de contagem das combinações pode se tornar difícil. Nestes casos utiliza-se o princípio multiplicativo que permite calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las. O princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte forma: “*Se um evento A pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e, se para cada uma dessas **m** maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é **m** x **n”**.* (SANTOS; MELLO; MURARI, 1998, p.29). Este princípio pode ser generalizado para ações constituídas por mais de dois eventos sucessivos.

Desse modo, os problemas de produto cartesiano dos exemplos 1 e 2 podem ser resolvidos através do princípio multiplicativo. No exemplo 1 podemos tomar como evento ‘A’ a escolha da blusa (3 blusas diferentes) e como evento ‘B’ a escolha da saia (2 saias diferentes). Portanto, Maria dispõe de ***m*** x ***n***, ou seja, 3 x 2 = 6 possibilidades diferentes de se vestir. O exemplo 2 possui três eventos (pratos quentes, saladas e sobremesas), assim podemos tomar como evento ‘A’ a escolha do prato quente (4 opções diferentes), como evento ‘B’ a escolha da salada (2 opções diferentes) e como evento ‘C’ a escolha da sobremesa (3 opções diferentes). Usando o princípio multiplicativo concluímos que temos 4 x 2 x 3 = 24 opções de cardápio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental aconselham no que concerne ao ensino das estruturas multiplicativas a presença de diferentes situações relacionadas à multiplicação e à divisão, como por exemplo, situações associadas à idéia de combinatória expressas em problemas de produto cartesiano. Nota-se que as construções clássicas do raciocínio combinatório (permutação, combinação e arranjo) são ensinadas formalmente no ensino médio. Por outro lado, problemas de produto cartesiano que podem ser resolvidos por meio do princípio multiplicativo (o que não ocorre com os problemas de permutação, combinação e arranjo que envolvem algoritmos mais sofisticados) são indicados para crianças ainda no ensino fundamental.

A idéia de combinação presente nos problemas de produto cartesiano pode estar relacionada a situações resolvidas através da multiplicação, em que é dado à criança o valor das medidas elementares[1], sendo solicitado o valor da medida produto[2] (exemplo, tenho 2 saias, uma preta e uma branca; e tenho 3 blusas, uma rosa, uma azul e uma amarela; de quantas maneiras diferentes posso me vestir?); e situações resolvidas através da divisão, em que é dado à criança o valor da medida produto e de uma medida elementar, sendo solicitado o valor da segunda medida elementar (exemplo, numa festa foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 meninas e todos que estavam na festa dançaram, quantos eram os meninos?). Os problemas de produto cartesiano que requerem a multiplicação para sua resolução são chamados de problemas diretos, já os problemas que requerem a divisão são chamados de problemas inversos.

---

[1] Por medida elementar ou conjunto elementar entende-se o número de elementos de determinado conjunto (por exemplo, o conjunto saias).

[2] Por medida produto ou conjunto produto entende-se a combinação de duas ou mais medidas elementares. Ela pode ser expressa pela relação A x B, sendo A e B medidas elementares.

Para solucionar estes problemas de produto cartesiano, quer seja do tipo direto quer seja do tipo inverso, a criança precisa compreender que cada elemento do conjunto elementar pode aparecer em diversos pares do conjunto produto, o que caracteriza a correspondência um-para-muitos, tópico este tratado a seguir.

1.2 O raciocínio combinatório no âmbito da psicologia do desenvolvimento

1.2.1 As investigações de Piaget: a combinatória como um esquema operatório da lógica formal

Inhelder e Piaget (1976) trabalharam em parceria por um longo período, no qual realizaram diversos estudos com o objetivo de compreender a passagem da lógica da criança à lógica do adolescente. Em seus experimentos verificaram que por volta dos 11-12 anos até os 14-15 anos ocorria uma mudança com o surgimento do pensamento operatório ‘formal’, distinto do pensamento operatório ‘concreto’ que o antecede. Para os autores, as operações formais constituem o estado final de equilíbrio no desenvolvimento intelectual, tendo como principal característica a possibilidade de distinção entre o *real* e o *possível*. Ao contrário da criança que se encontra no período operacional concreto, o adolescente, ao lidar com um problema, tenta imaginar todas as possíveis relações que seriam válidas naquela situação; a seguir, por meio de uma combinação de procedimentos, experimentações e de análise lógica, ele tenta verificar quais destas relações possíveis são realmente verdadeiras. Agindo assim o adolescente deixa de se preocupar exclusivamente com aquilo que lhe chega diretamente aos sentidos (pensamento concreto) para desenvolver a capacidade de imaginar todas as coisas que poderiam estar presentes (pensamento formal).

O pensamento formal tem um caráter fundamentalmente hipotético-dedutivo. Para encontrar o real dentro do possível, uma vez que o real é um caso do possível, é preciso que se considere o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser testadas, para que assim, se obtenha sua confirmação ou rejeição. Portanto, o pensamento formal é um recurso para encontrar a realidade dentro do contexto das possibilidades. (INHELDER; PIAGET,1976). Por exemplo: existem três elementos (A, B, C) e eu desejo encontrar a relação (entre esses três elementos) que produz o elemento X. Para isso, é preciso verificar se somente A produz X, se a relação de A com B produz X, se a relação de A com B e com C produz X, e assim sucessivamente, ou seja, é preciso testar todas as possibilidades para verificar quais são válidas para a questão.

Outra característica do pensamento formal é que ele possibilita manipular e raciocinar sobre dados da realidade na medida em que transforma esses dados em afirmações/proposições, por isso, também é chamado de pensamento proposicional. O sujeito realiza operações concretas, mas também faz algo que as transcende; ele utiliza essas operações, transformando-as em proposições com as quais pode continuar a operar por meio de conexões lógicas. Piaget chamou este fenômeno de combinatória das proposições, por ser uma lógica das combinações possíveis de pensamento.

Inhelder e Piaget (1976) relacionam o pensamento operacional formal com a orientação para o possível e o hipotético. Segundo os autores, existe um método que garante que o possível seja investigado exaustivamente: o método da análise combinatória. Este método é frequentemente utilizado quando diante de um problema o indivíduo isola todas as variáveis envolvidas na situação e determina todas as possíveis relações (combinações) dessas variáveis. Dessa forma, pode se certificar de que todas as combinações possíveis foram investigadas. É interessante ressaltar que mesmo em casos em que se têm poucas variáveis o número de combinações possíveis pode ser elevado, o que torna esta atividade bastante complexa mesmo para os adolescentes.

Segundo os autores, o raciocínio hipotético dedutivo atua por meio das operações combinatórias que se caracterizam pela possibilidade de relacionar - de todas as maneiras possíveis - objetos, fatores e idéias entre si. Assim, o raciocínio combinatório não representa apenas um domínio específico da matemática, mas um esquema operacional, isto é, uma maneira de proceder ou um método, que pode ser adotado espontaneamente ou intencionalmente quando na presença de problemas cuja solução exige este tipo de pensamento. A combinatória é um pré-requisito estrutural importante para o desenvolvimento do pensamento lógico.

Inhelder e Piaget (1976) descreveram o desenvolvimento psicogenético das operações combinatórias a partir de observações e entrevistas realizadas com crianças nas quais foram propostas algumas tarefas combinatórias com uso de material concreto. Em seus experimentos observaram que crianças menores de 12 não tentam encontrar um método capaz de realizar as combinações de forma exaustiva, formando apenas alguns pares. Em outras palavras, essas crianças formavam pares de objetos entre si utilizando procedimentos elementares de cálculo como o ensaio e erro, mas não conseguiam fazer de forma completa, seguindo um método sistemático em que todos os pares fossem contemplados. Além disso, essas combinações eram mais bem realizadas quando o número de elementos a se combinar era pequeno, na medida em que se aumentavam os elementos o desempenho das crianças diminuía. Desse modo, segundo os autores, somente no estágio das operações formais a criança adquire a capacidade de usar procedimentos sistemáticos para realizar todas as variações e combinações possíveis de um determinado conjunto de elementos. Nesse momento ocorre a compreensão das operações combinatórias.

Ao investigar o aparecimento do pensamento formal que é condicionado, como anteriormente comentado, pela constituição de uma combinatória, Inhelder e Piaget (1976) levantaram questões a respeito de que se crianças que descobrem um sistema combinatório para as necessidades da experiência demonstrariam a independência dessa combinatória com relação à lógica das proposições, ou, ao contrário, se seria necessário esperar o estágio formal para ver a constituição dessa combinatória. A fim de examinar essas questões, algumas crianças foram submetidas a uma tarefa de combinação de corpos químicos coloridos e incolores com objetivo de encontrar combinações pré definidas. O resultado obtido por meio dessas experiências é que existem diferenças entre as abordagens dos sujeitos que se encontram no nível operacional concreto e dos sujeitos do nível das operações formais. As crianças mais novas que se encontram no nível das operações concretas apresentam um comportamento assistemático e desorganizado, não demandam uma hipótese acerca do problema, fazendo algumas associações causais entre os elementos sem perceber o que estas permitem provar. Por outro lado, os sujeitos do nível operacional formal pensam em termos de todas as combinações possíveis, além disso, demonstram possuir um método ordenado e sistemático para produzir tais combinações.

De modo geral, os autores concluíram com esse experimento que existe uma estreita correlação entre a construção das operações combinatórias e a estrutura das operações formais. Isto ocorre porque ao mesmo tempo em que o sujeito combina elementos num contexto experimental, relaciona também enunciados proposicionais que expressam os resultados de tais combinações no plano experimental. Assim, o sistema das operações proposicionais é, na realidade, uma combinatória, ou seja, uma orientação generalizada no sentido de organizar os dados, isolar e controlar variáveis, formular hipóteses e provar logicamente os fatos. Com a formação das operações combinatórias o indivíduo ganha uma poderosa ferramenta do pensamento que o possibilita ir além do presente concreto (real) e ingressar no domínio do abstrato e do possível.

1.2.2 A perspectiva de Vergnaud: a teoria dos campos conceituais e os problemas de estrutura multiplicativa

Para Vergnaud (1998), o conhecimento está organizado em campos conceituais. Os campos conceituais são definidos como um conjunto de situações, cujo domínio requer o manejo simultâneo de conceitos, procedimentos e representações de natureza distinta. A teoria dos campos conceituais considera a conceitualização o fator mais importante do desenvolvimento cognitivo, isto é, a evolução dos conceitos cotidianos para os conceitos científicos. A formação de um conceito envolve mais do que uma definição ou descrição de suas propriedades, requer estabelecer interrelações entre outros conceitos, pois os conceitos são formados progressivamente a partir de diferentes tipos de situações e representações (lingüísticas e simbólicas). Vergnaud define os conceitos a partir de três instâncias:

1. O conjunto das <u>situações</u> (S) que dão sentido funcional ao conceito, tornando-o significativo (referente).

2. Os <u>invariantes operatórios</u> (I) que representam as propriedades que se conservam, aquilo que se preserva nos conceitos apesar das transformações ocorridas e permitem que o conceito seja reconhecido em diferentes situações. Os invariantes representam o significado do conceito.

3. As <u>representações</u> (R) que permitem representar os invariantes e, portanto, representar os procedimentos de resolução em uma dada situação. É identificado como o significante do conceito.

Assim, um conceito só pode ser definido a partir de situações que estão relacionadas às representações simbólicas através do conjunto de invariantes operatórios. Observa-se, portanto, que essas três instâncias estão interrelacionadas.

O conceito de situação não é o de situação didática, mas sim o de tarefa. Distinguem-se duas classes de situações: a) aquelas em que o sujeito em dado momento do seu desenvolvimento dispõe das competências necessárias para o tratamento imediato da situação; b) aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração para obter o sucesso. Assim, na primeira situação o sujeito já possui o esquema necessário para resolvê-la e, na segunda, é necessário a testagem de vários esquemas até encontrar, ou não, o esquema apropriado. (VERGNAUD, 1993).

Desta forma, é coerente pensar que um conceito não está atrelado a uma única situação e nem pode ser amplamente contemplado em uma única situação, pois a relação entre situação e conceito é complexa. Por isso, é importante que a criança tenha oportunidade de se deparar com diversas situações para construir um conhecimento amplo e apropriado dos conceitos. Além disso, em uma mesma situação podem estar envolvidos diversos conceitos, o que configura a noção de rede de relações e forma a base da teoria dos campos conceituais.

Já os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) constituem a base conceitual implícita, as competências que os indivíduos têm ao resolver problemas em algumas situações, competências essas, que carecem de uma explicitação do conhecimento que é utilizado. (VERGNAUD, 1998). Segundo Franchi (2008), um conceito-em-ação não é um conceito, nem um teorema-em-ação é um teorema, uma vez que estes são necessariamente explícitos. Um conceito-em-ação é um conceito (objeto ou predicado) implicitamente tido por pertinente, e teorema-em-ação é uma proposição tida por verdadeira em um determinado domínio. O fato deste conhecimento ser implícito faz com que o sujeito tenha dificuldade em expressá-lo ou explicá-lo, mas isto não significa dizer que tal conhecimento não possa ser explicitado, visto que os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornarem-se conceitos e teoremas científicos, isto é, conhecimento explícito que pode ser comunicado a outros e discutido.

As instâncias anteriores privilegiam o aspecto da funcionalidade do conceito, ou seja, sua natureza operatória, contudo o papel da linguagem e de outros modos de representação simbólica é igualmente importante. Na teoria proposta por Vergnaud, esse papel é perpassado pela noção de representação. Por representação entendem-se todos os signos, ferramentas e materiais que podem ser usados durante a resolução do problema, tais como materiais concretos ou recursos gráficos (desenhos, diagramas, tabelas, etc.).

Diante disso, as relações entre o conhecimento, as situações e as representações vão definir campo conceitual como sendo um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.

Vergnaud (1991) propõe dois grandes campos conceituais: o campo das estruturas aditivas e o campo das estruturas multiplicativas. O primeiro é constituído de um conjunto de situações que envolvem a adição, a subtração, ou uma combinação destas operações, além dos conceitos e teoremas que fazem parte dessas situações matemáticas. O campo conceitual das estruturas multiplicativas é composto por um conjunto de situações que envolvem a divisão, a multiplicação, ou a combinação de ambas. Os conceitos de fração, proporção, combinação, entre outros, fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Segundo Nunes e Bryant (1997) o raciocínio aditivo está baseado na relação parte-todo e se refere a ações de unir ou separar objetos com uso do esquema de correspondência termo a termo. É comum pensar que a multiplicação é uma forma de resolver problemas através da adição repetida, este pensamento em parte está correto, no entanto a multiplicação não mantém uma relação conceitual com a adição, o cálculo multiplicativo pode ser feito através da adição repetida porque a multiplicação é distributiva em relação à adição. Quando se examina as relações conceituais entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo, percebe-se que a multiplicação não envolve ações de unir ou separar objetos, pois está relacionada a um novo conjunto de sentidos de número e de invariantes. O esquema de correspondência um-para-muitos, por exemplo, é uma estratégia de resolução própria aos problemas multiplicativos.

Vergnaud (1983; 1991) identificou três grandes classes de problemas do tipo multiplicativo: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas.

Os problemas de isomorfismo de medidas envolvem uma relação quaternária entre quatro medidas, em que duas medidas são de um tipo e duas medidas são de outro tipo (a x b = c x d), compreendendo uma proporção direta simples entre esses dois grupos de medidas. Inseridos nesta classe encontram-se os problemas de multiplicação simples, divisão partitiva, divisão por quotas e regra de três. Estes problemas podem ser resolvidos por diferentes procedimentos, usando diferentes propriedades, por isso variam quanto ao grau de dificuldade que apresentam.

Os problemas de produto de medidas comportam uma relação ternária entre três medidas, das quais uma delas é produto das outras duas (a x b = c), tanto no plano numérico como no plano dimensional. Sua forma mais natural de representação é a tabela cartesiana, a qual dá conta da dupla correspondência envolvida. Inseridos nesta classe encontram-se os problemas que envolvem volume, área e combinatória. Segundo Vergnaud, a estrutura de produto de medidas traz dificuldades específicas por conta de conceitos e relações funcionais complexas de difícil compreensão por crianças.

Os problemas de proporções múltiplas também comportam uma relação ternária entre as medidas, razão pela qual são confundidos com os problemas de produto de medidas. Entretanto, os problemas de proporções múltiplas não podem ser resolvidos apenas com o produto das outras duas medidas, pois envolvem a relação intrínseca dos significados, tornando-se mais complexos do que os problemas de produto de medidas. Problemas como esse, assim como os de produto de medidas, envolvem um modelo de função bilinear, ao contrário dos de isomorfismo de medidas que podem envolver um modelo de função linear. Inseridos nesta classe estão problemas que em geral trazem uma noção de tempo decorrido, por exemplo, “Uma família com 4 pessoas quer passar 10 dias viajando. O custo dessa viagem por pessoa é de 33 reais por dia. Quanto essa família gastará com essa viagem?"

Assim, o grau de dificuldade dos problemas é determinado, sobretudo, pela estrutura que o problema possui. Nesse sentido, os problemas de isomorfismo de medidas envolvem as relações mais fáceis de serem compreendidas, seguido dos problemas de produto de medidas que envolvem uma relação mais complexa e, por fim, dos problemas de proporções múltiplas, o mais difícil dos três problemas.

No presente estudo, serão investigados os problemas de produto de medidas. Vergnaud (1991) diferencia dos tipos: os de multiplicação, em que se deve encontrar uma medida produto, combinando-se duas ou mais medidas elementares; e os problemas resolvidos pela divisão, os de divisão, em que é dado o valor da medida produto e o valor de uma medida elementar, sendo solicitado o valor da outra medida elementar. Eis alguns exemplos:

Problema de multiplicação: Numa festa há 6 meninos e 4 meninas. Cada menina quer dançar com cada menino e cada menino quer dançar com cada menina. Quantos pares diferentes podem ser formados? Neste problema são dados os valores das medidas elementares (6 meninos e 4 meninas) e solicitado o valor da medida produto (combinações possíveis de casais = 24 pares).

Problema de divisão: Combinando as blusas e as saias, Maria pode formar 12 conjuntos diferentes. Se ela tem 4 blusas, quantas saias Maria tem? Neste problema foi dado o valor da medida produto (12 conjuntos) e o valor de uma medida elementar (4 blusas), solicitando-se o valor da outra medida elementar (3 saias).

Comparando os problemas de multiplicação e divisão, observa-se que os problemas de divisão são mais difíceis, pois envolvem relações inversas que precisam ser compreendidas pelas crianças.

Com suas investigações acerca do campo conceitual das estruturas multiplicativas, Vergnaud identificou que os problemas multiplicativos apresentam estruturas diferentes que podem esclarecer a maior ou menor dificuldade na resolução destes. Tendo por base algumas idéias de Piaget, Vergnaud traz contribuições importantes como a noção de campos conceituais e do tripé (situações, representações e invariantes) na formação dos conceitos. Contudo, diferentemente de Piaget, Vergnaud não investigou a resolução de problemas de combinatória por crianças.

1.3 A correspondência um-para-muitos

Piaget e Szeminska (1971) definem o esquema de correspondência como um instrumento que auxilia na decomposição de quantidades a serem comparadas entre si, tendo este, um papel fundamental na síntese do número. O esquema de correspondência não surge de maneira abrupta no pensamento das crianças, mas é gradativamente construído. Inicialmente, há o desenvolvimento da correspondência termo-a-termo geralmente utilizada ao se comparar objetos, quantidades ou conjuntos. Em diversas situações cotidianas se utiliza a correspondência termo-a-termo, por exemplo, no decorrer de uma brincadeira a criança observa que para cada boneca deve haver um vestido, ou que para cada copo que coloca na mesa deve haver um prato; nestas situações a criança é levada a perceber que cada objeto corresponde unicamente a outro. A correspondência termo-a-termo traz consigo o entendimento do princípio de equivalência; isto é, ao compreender a relação de um copo por prato pode-se inferir que se existirem seis copos o número de pratos para que haja correspondência termo-a-termo deve ser o mesmo, ou seja, seis pratos.

Piaget e Szeminska (1971), a partir de uma série de investigações, identificaram fases relativas à correspondência termo-a-termo, que podem ser assim caracterizadas: Fase I - ausência de correspondência termo-a-termo e de equivalência; Fase II – presença de correspondência termo-a-termo, mas ausência de equivalência durável; Fase III – presença de correspondência e equivalência durável. Essas fases demonstram a construção gradativa do esquema de correspondência, visto que cada fase supera a sua antecessora em termos qualitativos. Além do esquema de correspondência termo-a-termo, há outro esquema associado ao raciocínio multiplicativo: a correspondência um-para-muitos.

O esquema de correspondência um-para-muitos também é gradativamente construído pela criança, sendo caracterizado pela relação de um elemento com um conjunto de elementos. Seu desenvolvimento está intimamente relacionado às primeiras idéias multiplicativas, pois é preciso que se compreenda que um objeto pode se relacionar com vários e não apenas com um, como acontece na correspondência termo-a-termo.

Piaget e Szeminska (1971) realizaram algumas investigações com crianças de 5 e 6 anos com o objetivo de examinar o esquema de correspondência termo-a-termo e o esquema de correspondência um-para-muitos. Em uma tarefa sobre a correspondência termo-a-termo, as crianças foram solicitadas a colocar um ovo em cada um dos dez oveiros, em seguida os ovos foram removidos e colocados em uma vasilha, e as crianças foram solicitadas a colocar novamente outros dez ovos em cada oveiro. Posteriormente, esses dez ovos também foram retirados e agrupados em outra vasilha. Assim, as crianças sabiam que o número de ovos que estava na primeira vasilha era igual ao número de oveiros, bem como, que o número de ovos que estavam na segunda vasilha também era igual ao número de oveiros. Para concluir que os dois conjuntos de ovos eram iguais as crianças teriam que entender a correspondência termo-a-termo e o raciocínio de que se A=B e C=B, então A=C. Sendo 'A' o número de ovos da primeira vasilha, 'B' o número de oveiros e 'C' o número de ovos da segunda vasilha.

Em outra tarefa, os autores investigaram se as crianças entenderiam a correspondência um-para-muitos que pode ser expressa por: se A=2B e C=A, então C=2B. Para tal, as crianças foram solicitadas a colocar uma grande flor azul em cada um dos dez vasos, em seguida as flores foram retiradas e agrupadas em um buquê. Posteriormente, as crianças foram solicitadas a colocar uma pequena flor rosa em cada um dos dez vasos, em seguida as flores rosa também foram retiradas e agrupadas em um buquê. As crianças, então, foram indagadas sobre o que aconteceria se as flores azul e rosa voltassem aos dez vasos, distribuídas igualmente entre eles. Quantas flores (A) haveria nos vasos (B)? A criança deveria entender que o número de flores é igual ao dobro do número de vasos, isto é, que A=2B. Em outro momento, as flores foram retiradas do campo visual das crianças restando apenas os vasos. As crianças foram solicitadas a pegar de dentro de uma caixa o número certo de tubos de plásticos (C) de modo que as flores (azul e rosa) pudessem ser colocadas dentro dos tubos. Porém agora as crianças tinham um problema a enfrentar: os vasos eram largos e comportavam duas flores cada (uma azul e uma rosa), mas os tubos eram finos e só comportavam uma flor cada. Assim, as crianças precisavam entender que o número de tubos (C) deveria ser igual ao número de flores (A), ou seja, que A=C. Dessa forma entenderiam a necessidade de usar o dobro de tubos em relação ao número de vasos (C=2B).

A partir dessas investigações, Piaget observou que crianças de 5 e 6 anos já dominam a correspondência termo-a-termo e, além disso, compreendem alguns aspectos das relações multiplicativas como, por exemplo, as relações de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. É importante ressaltar que as tarefas descritas acima não exigiam da criança qualquer cálculo numérico sobre as quantidades dos conjuntos, os autores estavam investigando a compreensão acerca das *relações* de correspondência um-para-muitos. Piaget alegou, ainda, que estas relações são multiplicativas em vez de aditivas porque o valor de cada novo conjunto de flores estava sendo considerado em relação ao conjunto de vasos (1 x 2; 1 x 3).

Segundo Nunes e Bryant (1997), a correspondência um-para-muitos envolve o desenvolvimento de dois conceitos: proporção e fator escalar. A proporção pode ser expressa a partir de um par de números que se mantém invariável mesmo quando o tamanho do conjunto varia. Por exemplo, a correspondência “1-ano-para-12-meses”; cada vez que for acrescentado um elemento ao conjunto “ano”, deverão ser acrescentados doze elementos ao conjunto “meses” a fim de manter constante a relação entre os conjuntos. Isto significa dizer que mesmo que os conjuntos variem em relação à quantidade de elementos, a proporção que neste caso é expressa pelo par de números 1-para-12 continua a mesma. Já o conceito de fator escalar não se refere ao número de elementos dos conjuntos (ano; meses), mas ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos com o objetivo de manter a proporção constante. Assim, se houver cinco replicações, a relação entre ano e meses pode ser expressa por: 1 ano para 12 meses e 5 anos para 60 meses. Neste caso, a proporção permanece constante (1-ano-para-12-meses) pois o mesmo fator escalar foi aplicado em cada conjunto.

Entende-se, portanto, que a correspondência um-para-muitos não está vinculada a uma única situação, sendo necessário considerar que nas diversas situações multiplicativas existe a relação de correspondência um-para-muitos entre os conjuntos. Esta correspondência não está presente no raciocínio aditivo. Em situações multiplicativas a proporção mantém constante a correspondência acrescentando números diferentes de objetos a cada conjunto (exemplo, 1-ano-para-12-meses, se acrescentar 1 no conjunto "ano", deve acrescentar 12 no conjunto "meses") por outro lado, em situações aditivas o mesmo número de objetos deve ser acrescentado a cada conjunto para manter a relação constante (exemplo, Maria tem 3 chocolates e Pedro tem 5 chocolates, Pedro tem 2 chocolates a mais do que Maria. Sendo assim, se Maria ganhar 2 chocolates, Pedro também deve ganhar 2 chocolates para que a relação permaneça a mesma).

Assim como Piaget, Kornilaki (apud NUNES et al., 2001) também demonstrou interesse em investigar o uso da correspondência um-para-muitos em crianças. No seu estudo, crianças de 5 a 7 anos resolveram um problema em que se apresentava uma rua com três casas onde em cada casa moravam três coelhinhos e no final da rua havia um restaurante que servia comida para todos os coelhinhos. A criança era solicitada a retirar de uma caixa a quantidade exata de bolinhas de comida, representadas por fichas coloridas, de modo que cada coelho pudesse receber uma bolinha. A autora observou que desde cedo, por volta dos 5 anos, as crianças podem entender relações de correspondência um-para-muitos resolvendo corretamente problemas inseridos neste contexto. Cerca de dois terços (67%) das crianças de cinco anos resolveram com sucesso o problema apresentado acima.

Todas as crianças de 6 e 7 anos conseguiram solucionar o problema corretamente. Nota-se que neste estudo as crianças precisaram dar uma resposta numérica ao problema, diferentemente do estudo de Piaget. Resultados como estes indicam que mesmo antes de serem ensinadas acerca da multiplicação, as crianças conseguem compreender alguns princípios envolvidos neste tipo de situação, como a correspondência um-para-muitos. No que se refere às estratégias de resolução adotadas pelas crianças, Kornilaki observou duas formas diferentes de solucionar o problema. Algumas crianças retiravam da caixa de comida três bolinhas, colocando-as diante de cada casa, em seguida reuniam as bolinhas e colocavam no restaurante. Outras crianças usavam a contagem, isto é, contavam três bolinhas por casa e depois retiravam da caixa de comida as nove bolinhas (3 casas, 3 bolinhas por casa). Apesar de ambos os raciocínios evidenciarem a utilização da correspondência múltipla[3] na resolução do problema, não se pode assegurar que as crianças compreenderam a estrutura da correspondência um-para-muitos que é típica do raciocínio multiplicativo, ou seja, não é porque utilizaram a correspondência que necessariamente entenderam as relações, pois ao que parece a estratégia de resolução foi fortemente marcada pela contagem.

Nunes et al. (2001) fizeram uma adaptação do problema descrito acima (estudo de Kornilaki) para sala de aula. Porém, ao invés de utilizar material concreto, como ocorreu no estudo de Kornilaki, foram utilizados desenhos e instruções orais a fim de investigar como seria o desempenho das crianças quando elas não têm materiais que permitem a aplicação direta do esquema de ação. A amostra constou de crianças de 7 anos alunas de escolas públicas de São Paulo. Em uma folha de papel havia o desenho de três casas e a ilustração de um biscoito; logo abaixo dos

[3] Correspondência múltipla e correspondência um-para-muitos são sinônimos.

desenhos havia o seguinte enunciado: “Em cada casa moram quatro cachorros. Desenhe o número de biscoitos que precisamos ter para que cada cachorro ganhe um biscoito.” De modo geral, os resultados indicaram uma defasagem no percentual de respostas corretas quando o problema é apresentado com lápis e papel comparativamente ao problema do estudo de Kornilaki que utilizou material concreto. Apesar do menor desempenho, foi observado que as crianças utilizaram a correspondência um-para-muitos como estratégia na solução do problema. Segundo os autores, com estes estudos pode-se concluir que as crianças conseguem empregar o esquema de correspondência um-para-muitos e resolver problemas práticos de multiplicação antes do que era esperado, portanto, ao deixar o ensino da multiplicação e da divisão para o 3º e 4º ano deixa-se de aproveitar esse raciocínio quando já é possível desenvolvê-lo.

Os estudos ora relatados abordam o esquema de correspondência um-para-muitos em situações que envolvem a multiplicação, no entanto o esquema de correspondência múltipla também é utilizado em situações e problemas de divisão.

Correa (2004) observou que a correspondência um-para-muitos também é utilizada como estratégia de resolução nos problemas de divisão. Em seu estudo, crianças de 6, 7, 8 e 9 anos foram apresentadas a uma situação na qual certa quantidade de blocos (representando comida) deveria ser repartida entre um determinado número de ursinhos. A criança era solicitada a especificar o número de blocos que cada ursinho iria ganhar. A pesquisa realizada na Inglaterra adotou quatro valores de dividendo (4, 8, 12 e 24) e dois valores de divisores (2 e 4). Os resultados mostraram que as crianças obtiveram um melhor desempenho nas tarefas em que se usou um número menor para o dividendo e o divisor, além disso, pode-se observar um número maior de acertos com o aumento da idade/escolaridade. No que concerne a análise das estratégias de resolução, Correa identificou que as crianças que obtiveram sucesso na resolução dos problemas utilizaram a estratégia de colocar em correspondência o número de blocos e o número de ursinhos. Por exemplo, em uma tarefa o dividendo (número de blocos) era 12 e o divisor (número de ursinhos) era 4; a criança contava o número de vezes que a correspondência um-para-muitos entre os blocos e ursinhos ocorreria de forma a ter quatro blocos para o urso 'A', quatro blocos para o urso 'B', quatro blocos para o urso 'C' e quatro blocos para o urso 'D', ou seja, quatro correspondências. Observa-se, portanto, que mesmo em problemas mais complexos as crianças são capazes de identificar a correspondência múltipla como o esquema de ação utilizado para solução dos problemas.

Como demonstrado, o esquema de correspondência um-para-muitos está intimamente relacionado às estratégias de resolução adotadas em problemas de estrutura multiplicativa. As pesquisas evidenciam que crianças nas séries iniciais do ensino fundamental já são capazes de compreender as relações um-para-muitos e utilizá-las na solução de problemas, mesmo sem terem sido formalmente ensinadas acerca da multiplicação.

Entretanto, é importante ressaltar que os estudos descritos até o momento abordam problemas multiplicativos do tipo isomorfismo de medidas. Segundo Nunes e Bryant (1997) os problemas de produto cartesiano ou como são denominados por Vergnaud problemas de produto de medidas são mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas de isomorfismo, uma vez que nos problemas de produto cartesiano a correspondência um-para-muitos não está apresentada de forma clara na situação. Segundo nossa análise, o fato das relações um-para-muitos estarem implícitas nos problemas de produto cartesiano pode influenciar o desempenho das crianças, pois como aponta Eizenberg e Zaslavsky (2003) problemas de produto cartesiano provocam dúvidas em relação à forma de abordá-los por não apresentarem uma estratégia evidente (explícita) de solução.

A próxima seção apresenta os estudos conduzidos com crianças na resolução de problemas de produto cartesiano.

1.4 Estudos com crianças: limites e possibilidades do pensamento infantil em relação ao pensamento combinatório

Piaget foi quem estudou mais profundamente o desenvolvimento das operações combinatórias, observando em suas investigações que o raciocínio combinatório está estreitamente relacionado à construção das operações formais, fato este que contribuiu para que o tema fosse pouco investigado em crianças. No entanto, recentemente há pesquisas com crianças que tendem não só a apontar os limites, mas também algumas possibilidades.

Tradicionalmente, os estudos conduzidos sobre a resolução de problemas de produto cartesiano examinam as estratégias de resolução adotadas pelas crianças e o grau de dificuldade dos problemas, procurando identificar uma possível linha de desenvolvimento na construção desse conceito. Observa-se, entretanto, que há um maior interesse dos pesquisadores em investigar problemas que requerem a multiplicação para sua resolução em detrimento aos problemas que requerem a divisão, visto que os últimos são considerados ainda mais difíceis.

Nesher (1988 apud NUNES E BRYANT, 1997) apontou que os problemas de produto cartesiano são mais complexos do que outros problemas multiplicativos de isomorfismo por duas razões. Primeiro, o problema envolve dois conjuntos básicos (por exemplo, saias e blusas) e um terceiro conjunto produto (trajes). Os trajes são formados pela combinação de cada elemento de um conjunto básico (por exemplo, as saias) com cada elemento do outro conjunto básico (as blusas). Segundo, a correspondência um-para-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal, ou seja, a criança precisa descobrir que para cada saia há o valor do conjunto básico (blusas) de transformações possíveis.

Estudos sobre o raciocínio combinatório procuram investigar o conhecimento que crianças pequenas têm sobre esse conceito antes de serem ensinadas no contexto escolar (como os estudos de Pessoa e Borba discutidos a seguir); outros examinam o efeito da idade/escolaridade sobre o desempenho e as estratégias das crianças (e.g., MORO; SOARES, 2006a, 2006b); outros, ainda, comparam o desempenho e estratégias utilizadas por crianças em problemas de produto cartesiano e em outros problemas multiplicativos (SELVA e cols., 2008).

Pessoa e Borba (2007; 2008) examinaram o desempenho de 99 alunos do 2º ao 5º ano do ensino fundamental em diferentes tipos de problema de combinatória antes da sua introdução formal na escola. Cada aluno resolveu individualmente oito problemas de raciocínio combinatório, sendo dois problemas de produto cartesiano, dois problemas de arranjo, dois problemas de permutação e dois problemas de combinação. Desses oito problemas, quatro apresentavam pares numéricos baixos que geravam um número pequeno de combinações e quatro problemas apresentavam pares numéricos altos que geravam um número maior de combinações. Observou-se, de modo geral, que os alunos das séries mais avançadas apresentaram um desempenho melhor do que os alunos das séries iniciais. Os problemas do tipo produto cartesiano foram os que os alunos mais acertaram. Nestes problemas, o desempenho das crianças do 2º e 3º ano foi baixo, as crianças do 4º e 5º ano apresentaram um desempenho melhor apesar de neste grupo a maior porcentagem de acertos (5º ano: 50%) ainda ser pequena. No que se refere às formas de resolução foram listados quatro tipos: (1) A criança adiciona ou subtrai os valores apresentados no enunciado; (2) A criança percebe que o problema está relacionado a um produto; (3) A criança desenha ou escreve combinações sem que ocorra o esgotamento de todas as possibilidades, ou então, extrapola as possibilidades, repetindo as combinações; (4) A criança desenha ou escreve as combinações com o esgotamento de todas as possibilidades, esta estratégia leva à resposta correta. Os resultados revelam que as crianças desenvolvem compreensões sobre os problemas de raciocínio combinatório, ora influenciadas pela escola (problemas de produto cartesiano), ora como resultado de experiências extra escolares (permutação, arranjo e combinação). Vale ressaltar que os problemas de produto cartesiano, geralmente, são trabalhados no ensino fundamental, enquanto que os demais problemas de combinatória não são trabalhados.

Moro e Soares (2006a) descrevem níveis de raciocínio combinatório em crianças na solução de problemas de produto cartesiano. O estudo foi efetuado com 50 crianças alunas do 4º e 5º ano do ensino fundamental com idades entre 7 anos e 8 meses a 11 anos e 2 meses. Foram apresentados aos sujeitos quatro problemas de produto cartesiano cuja solução pedia um cálculo multiplicativo, ou seja, o objetivo era encontrar uma medida produto combinando-se duas ou mais medidas elementares. Os quatro problemas foram apresentados no formato de um teste escrito, sendo respondidos individualmente numa sessão coletiva (sala de aula). O primeiro problema trata da combinação de tipos de carros com tipos de rodas, com um total de 6 combinações possíveis (par numérico 3 e 2). Neste problema existiam também valores distractores. O segundo problema contempla a combinação de três variáveis: sabores de sorvete, coberturas de sorvete e tipos de casquinha, com um valor total de 1680 combinações possíveis (pares numéricos 28, 12 e 5). O terceiro problema também com três variáveis versa sobre a combinação de tipos de frios, tipos de queijo e tipos de pães para fazer sanduíches, apresenta um total de 24 combinações possíveis (pares numéricos 3, 2 e 4). O quarto problema trata da combinação de colares, pulseiras e anéis, com um total de 338560 combinações possíveis (pares numéricos 32, 92 e 115).

As autoras analisaram as estratégias empregadas nas soluções de cada problema, encontrando níveis e subníveis hierárquicos de raciocínio combinatório, a saber:

(1) <u>Nível 0 - Resposta alheia ao contexto</u>; a criança apresenta uma solução não numérica, sem relação com o que pede o problema, e sem referências às variáveis;

(2) <u>Nível I - Resposta contextualizada sem indício de combinação</u>; *Subnível IA* – soluções que contêm escolhas relativas a uma ou mais variáveis, sem qualquer combinação entre elas; *Subnível IB* – soluções com cálculo aditivo (mental ou não) de alguns ou de todos os valores envolvidos; *Subnível IC* – soluções com emprego de algoritmo escolar em contexto ao qual ele não se aplica;

(3) <u>Nível II – Primeiras aproximações à solução combinatória</u>; *Subnível IIA* – quando é representada uma, e somente uma possibilidade de combinação entre as variáveis; *Subnível IIB* - a criança representa alguns casos de combinação das variáveis, envolvendo um ou mais valores, com forte marca da correspondência termo a termo como organizador; *Subnível IIC* - as

soluções representam um número limitado de casos de combinação das variáveis, contudo sem o uso dos valores distractores. Há também forte marca do esquema de correspondência termo a termo como organizador;

(4) Nível III – Obtenção de algumas combinações; *Subnível IIIA* – a criança representa muitas combinações entre os valores das variáveis, porém com o uso dos valores distractores; *Subnível IIIB* – solução com muitas combinações obtidas mediante junções de cálculos entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas; *Subnível IIIC* – a criança consegue encontrar certo número de combinações entre os valores envolvidos, obtidas a partir de diferentes junções aditivo-multiplicativas na busca da resposta final;

(5) Nível IV – Presença de soluções combinatórias; a criança representa todos os casos possíveis de combinação entre os valores das variáveis, quer seja por representação em diagrama cartesiano, quer seja por cálculo multiplicativo.

Conforme observado, apenas nas soluções do nível IV as crianças refletem apropriadamente acerca das relações combinatórias, encontrando todas as combinações possíveis entre as variáveis do problema. De modo geral, os resultados indicam que a maioria das soluções encontram-se nos níveis I e II. Das 50 crianças que participaram do estudo, apenas quatro crianças da 5º ano expressaram soluções correspondentes ao nível IV, o mais adiantado da hierarquia. Assim, parece haver alguma relação entre os níveis de raciocínio combinatório expressos nas soluções analisadas e a série escolar. Quanto aos suportes de representação utilizados, as poucas soluções correspondentes ao nível mais avançado utilizaram o apoio da "árvore de possibilidades" como ferramenta para o cálculo multiplicativo. Apesar das autoras encontrarem níveis de construção inicial deste conceito com uma passagem do cálculo de caráter aditivo para o cálculo de caráter multiplicativo, bidimensional, há, nitidamente, uma dificuldade das crianças em lidar com este tipo de problema de natureza multiplicativa.

Diante das dificuldades apresentadas, as autoras comentam que o planejamento metodológico e o instrumento de coleta de dados tiveram algumas limitações. Apenas as soluções escritas dos sujeitos foram coletadas e analisadas, não houve nenhum dado, por exemplo, verbal, que permitisse uma interpretação e compreensão, em plano metacognitivo, das relações que regeriam as combinações.

Moro e Soares (2006b) replicaram o estudo relatado acima com 60 crianças do 6º e 7º ano do ensino fundamental com idades entre 10 e 15 anos. Os quatro problemas descritos no estudo anterior foram aplicados seguindo o mesmo planejamento metodológico. As estratégias de resolução empregadas pelas crianças foram classificadas em quatro níveis:

(1) Nível I – Ausência de solução combinatória; as crianças realizam cálculos aritméticos variados na tentativa de encontrar, de algum modo, resposta numérica para o problema;

(2) Nível II – Primeiros indícios de soluções combinatórias; as crianças fazem referência ao texto do problema com progressivo aparecimento de correspondência termo a termo entre os valores das variáveis;

(3) Nível III – Aproximação de soluções combinatórias; as crianças empregam diagramas e aparecem as primeiras relações de correspondência um-para-muitos com emprego da contagem das combinações. Há também

presença de cálculos (mental ou não) predominantemente multiplicativos com os valores de algumas variáveis;

(4) Nível IV – Presença de soluções combinatórias; as crianças se apoiaram em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas) para representar a relação um-para-muitos entre todos os valores de todas as variáveis dos problemas, sejam elas duas ou três.

Da mesma forma que ocorreu no trabalho descrito anteriormente com outra amostra de sujeitos (Moro e Soares, 2006a) foi possível constatar neste estudo uma hierarquia de soluções que destacam a transformação do esquema de correspondência um-para-um para a correspondência um-para-muitos, bem como do cálculo relacional aditivo para o cálculo multiplicativo. As autoras mencionam o interesse em fazer um trabalho subsequente com a comparação entre a hierarquia ora exposta com a obtida na amostra do 4º e 5º ano, visando assim obter uma hierarquia única que melhor valide os níveis e subníveis propostos.

Taxa-Amaro (2006) realizou um estudo com o objetivo de analisar as relações entre o desempenho escolar em matemática e as operações combinatórias subjacentes à construção da estrutura multiplicativa em alunos ingressantes no 4º ano do ensino fundamental. Os participantes foram divididos em dois grupos (A e B) com 16 crianças em cada um deles. No grupo A foram selecionados os alunos que apresentaram escores mais elevados na prova de matemática do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP/96) e no grupo B, aqueles que tiveram os menores escores na prova. As entrevistas de coleta de dados foram realizadas individualmente seguindo as orientações do método clínico piagetiano. As crianças do grupo A e B foram solicitadas a solucionar três problemas de produto cartesiano apresentados em uma folha de papel.

O primeiro problema versa sobre a combinação de camisas e bermudas com um total de 12 combinações possíveis (par numérico 3 e 4). O segundo problema trata da combinação de homens e mulheres para uma dança, apresentando o total de 9 combinações possíveis (par numérico 3 e 3). O terceiro problema não é descrito pela autora, mas recebe a denominação de ‘problema sala de aula’ com um total de 6 combinações possíveis (par numérico 2 e 3).

Os dados foram analisados em função do número de acertos e das estratégias de resolução adotadas pelas crianças. No que concerne ao número de acertos, os resultados mostraram que no primeiro problema (camisas e bermudas) três alunos (18,8%) do grupo A e dois alunos (12,5%) do grupo B fizeram todas as combinações possíveis entre as peças de vestuário. Tanto para o segundo problema (homens e mulheres) como para o terceiro problema (sala de aula), oito alunos (50%) do grupo A acertaram todas as combinações e apenas um sujeito (6,3%) do grupo B fez corretamente as combinações possíveis. Desse modo, Taxa-Amaro (2006) indica que há uma relação entre um melhor desempenho em matemática e um melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano.

A autora classificou as estratégias utilizadas pelos sujeitos com base no esquema de correspondência termo-a-termo e no esquema de correspondência um-para-muitos descritos por Piaget e Szeminska (1971). A análise das estratégias evidenciou desde soluções mais elementares até uma leitura dos dados mais sofisticada. As estratégias foram classificadas em três tipos:

(1) <u>Estratégias por correspondência termo-a-termo rígida</u>; as crianças realizam a representação gráfica primeiramente e, em seguida, fazem os pares ordenados por correspondência termo-a-termo entre os elementos

dos dois conjuntos do problema, não é admitido trocas entre os elementos dos conjuntos;

(2) Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória; as crianças tentaram solucionar os problemas empregando estratégias diferenciadas, por exemplo, utilizavam cálculos com algoritmos das operações aritméticas; realizavam combinações com base na idéia de que poderiam 'trocar' as peças indefinidamente sem controle da quantificação; realizavam repetições dos pares ordenados e tentavam controlar as combinações repetidas;

(3) Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial; as crianças ainda apresentam oscilação nas condutas, porém menos freqüente entre a ação realizada e a justificativa dada durante a elaboração das combinações, a dificuldade maior encontra-se no controle sistemático das combinações, embora haja a tentativa de fazê-lo.

Dentre os inúmeros dados obtidos, interessa, no contexto do presente estudo, discutir apenas aqueles relativos ao desempenho das crianças e o planejamento metodológico da pesquisa supracitada. Quanto ao desempenho, os resultados mostraram que os dois grupos de crianças apresentaram um baixo número de acertos nos três problemas de produto cartesiano, o que demonstra que mesmo o grupo A, constituído por crianças que apresentaram os escores mais elevados na prova do SARESP/96, tiveram grande dificuldade em encontrar uma solução combinatória. No que diz respeito aos problemas empregados no estudo, estes são caracterizados como problemas multiplicativos, visto que é dado à criança o valor de duas medidas elementares e solicitado o valor da medida produto (número de combinações). Os pares numéricos empregados nos problemas têm valores baixos, o maior deles é o par (3 e 4) apresentado no primeiro problema (bermudas e camisas) que produz um total de 12 combinações. Neste problema, apenas 5 (15,6%) das 32 crianças conseguiram encontrar todas as combinações.

Além dos estudos relatados que investigam o desenvolvimento do raciocínio combinatório em crianças, outros estudos se voltam para o exame de diferentes problemas de estrutura multiplicativa com objetivo de comparar o desempenho e as estratégias empregadas nestes problemas. Estes estudo serão apresentados e discutidos a seguir.

Batista (2002) examinou a influência de diferentes suportes de representação na resolução de quatro problemas inseridos no campo das estruturas multiplicativas. O primeiro problema envolvia a multiplicação para sua resolução e era do tipo isomorfismo, apresentava o par numérico 3 e 5. O segundo problema envolvia a multiplicação para sua resolução e era do tipo produto de medidas (produto cartesiano) com par numérico 4 e 3. O terceiro problema envolvia a divisão para sua resolução e era do tipo isomorfismo, com par numérico 18 e 6. O quarto problema envolvia a divisão para sua resolução e era do tipo produto de medidas (produto cartesiano), com par numérico 20 e 5.

Quarenta crianças alunas do 3º ano do ensino fundamental foram divididas em dois grupos (grupo 1 - material concreto definido e grupo 2 – material concreto indefinido). As crianças foram individualmente entrevistadas e solicitadas a resolver os problemas explicando, em seguida, os procedimentos adotados na resolução. No que concerne especificamente aos problemas de combinatória, foram classificadas as seguintes estratégias de solução:

(1) Estratégia inadequada; a criança realiza uma operação inadequada, em geral a adição ou a subtração, com os números contidos no enunciado do problema;

(2) Combinação por pares fixos; a criança oferece como resposta o menor número presente no enunciado do problema, porque pensa em termos de pares fixos, não aceitando que uma mesma saia/blusa possa combinar (fazer par) com mais de uma blusa/saia. Ou seja, uma vez formados os pares, esses não podem ser desfeitos.

(3) Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado; a criança oferece como resposta o maior número presente no enunciado do problema. Ela começa a pensar em termos de pares combinados, mas não aceita a idéia de poder formar mais conjuntos do que determina o maior número do enunciado.

(4) Combinação flexível dos pares; a criança pensa em termos de pares combinados e passa a aceitar que uma blusa pode combinar com mais de uma saia, representando todas as combinações possíveis.

Observou-se que o desempenho das crianças variava em função do tipo de problema, pois os problemas de isomorfismo (72,5% de acertos) eram muito mais fáceis do que os problemas de combinatória (6,7% de acertos). Por exemplo, enquanto no Grupo 1 (material concreto definido) 20 crianças acertaram o problema de multiplicação e 17 crianças acertaram o problema de divisão do tipo isomorfismo, somente uma criança acertou o problema de multiplicação e uma criança acertou o problema de divisão do tipo produto de medidas. Mais uma vez, encontram-se evidências da dificuldade por parte das crianças na resolução com sucesso de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Com estes resultados Batista concluiu que os problemas de isomorfismo e de produto de medidas exigem raciocínios diferentes, pois os problemas que envolvem o raciocínio combinatório são mais difíceis para as crianças.

Nessa concepção, Selva e cols. (2008) investigaram como crianças do 4º e 5º ano do ensino fundamental resolvem diferentes tipos de problema de estrutura multiplicativa. Cada estudante resolveu dez problemas, sendo 2 problemas de multiplicação, 2 problemas de divisão partitiva, 2 problemas de divisão por quotas, 2 problemas de produto cartesiano direto (multiplicação) e 2 problemas de produto cartesiano inverso (divisão). As 90 crianças participantes da pesquisa tiveram à disposição lápis e papel para resolver individualmente os problemas. Os resultados obtidos mostram que os problemas de multiplicação e divisão partitiva foram mais fáceis para os alunos do que os problemas de produto cartesiano, que foram mais difíceis, principalmente os inversos. Grande parte da dificuldade parece recair na falta de compreensão da estrutura multiplicativa envolvida nos problemas propostos, o que leva a criança a resolvê-los por meio da adição ou da subtração. Essa breve abordagem parece indicar que existem diferentes tipos de situações multiplicativas e que tais situações envolvem diferentes níveis de raciocínio multiplicativo.

Bryant e cols. (1992, apud NUNES E BRYANT, 1997) observaram crianças de 8 e 9 anos resolvendo quatro problemas de multiplicação, dois dos quais eram de correspondência um-para-muitos simples (isomorfismo) e os outros dois, problemas de produto cartesiano (produto de medidas). As crianças foram aleatoriamente distribuídas em dois grupos. O grupo I recebeu todo material concreto correspondente aos valores indicados no problema (por exemplo, 6 bermudas e 4 camisetas), no grupo II, as crianças tiveram apenas um subconjunto dos materiais (por exemplo, 2 bermudas e 4 camisetas). Ambos os grupos foram apresentados aos mesmos problemas. O grupo I poderia manipular os materiais e contar os trajes à medida que combinava as bermudas e as camisetas, o grupo II, que estava com material incompleto, poderia usar o subconjunto para criar um modelo e generalizar as combinações. A maioria das crianças de 8 e 9 anos foram capazes de resolver os problemas de correspondência um-para-muitos simples (isomorfismo) quando tinham o conjunto completo de materiais para apoiá-las, porém as crianças de 8 anos obtiveram menos da metade das respostas corretas quando tinham apenas uma amostra dos materiais. Nos problemas de produto cartesiano, nenhuma criança de 8 anos respondeu corretamente sem apoio de todos os materiais necessários para montar a solução. Estes problemas, mais complexos, eram ainda bastante difíceis para as crianças de 9 anos.

De modo geral, os estudos demonstram que as crianças não se preocupam em analisar as respostas encontradas e verificar a adequação ou não das mesmas. Na maioria das vezes, ao se deparar com as situações propostas, a criança recorre diretamente ao uso de algoritmos sem maior reflexão sobre as relações envolvidas no problema, agindo assim, muitas vezes escolhe a operação errada. Além disso, como afirmam Eizenberg e Zaslavsky (2002), os problemas que envolvem o raciocínio combinatório são mais difíceis por não apresentar uma estratégia evidente de solução e por provocarem dúvidas em relação as formas de abordá-los. Outra dificuldade refere-se à impossibilidade de conferir as respostas obtidas, já que formas distintas de solucionar o problema resultam em diferentes respostas visivelmente convincentes.

As investigações até o momento descritas apontam as dificuldades que crianças nas séries iniciais do ensino fundamental têm na resolução de problemas de produto cartesiano. No entanto, existem estudos que indicam possibilidades para o pensamento combinatório infantil.

Mekhmandarov (2000) realizou um estudo sobre a compreensão de problemas de produto cartesiano em crianças da educação infantil. Cada criança foi solicitada a resolver individualmente tarefas de manipulação para compor pares ordenados com blocos lógicos (“Lego”), tendo que formar dois conjuntos diferentes e dois conjuntos idênticos de elementos. Além disso, existia outra tarefa de classificação de elementos segundo uma tabela de dupla entrada (bidimensional). O autor descreve alguns princípios que empregou para analisar a compreensão das crianças acerca da estrutura cartesiana, a saber:

- Compreender que cada par é construído por um e apenas um elemento de cada um dos conjuntos;
- Compreender que cada par é um elemento no novo conjunto-produto;
- Aceitar que cada elemento do conjunto básico pode aparecer em diversos pares (correspondência um-para-muitos), diferentemente do que ocorre com a estrutura aditiva;
- Compreender que cada par deve aparecer apenas uma vez no conjunto-produto.

Os resultados mostram que construir pares ordenados de dois conjuntos idênticos é mais difícil, isto porque as crianças focalizam nas relações entre os elementos dentro dos pares, um obstáculo mais perceptual do que matemático. Com conjuntos diferentes, um terço das crianças foi capaz de analisar a estrutura bidimensional do produto. Ao analisar se as crianças haviam compreendido os princípios que embasam o produto cartesiano, o autor observou, por exemplo, que

98% das crianças sabiam que um elemento do conjunto básico pode aparecer em vários pares. Assim, os resultados indicam que a maioria das crianças foi capaz de construir elementos de um produto cartesiano ou aprender a fazê-lo no decurso da entrevista a partir de algumas orientações. O autor considera seus resultados surpreendentes, tendo em vista que crianças do 4º e 5º ano ainda têm dificuldades na construção de todas as possibilidades em problemas de combinatória. O autor sugere que tarefas que envolvam produto cartesiano sejam trabalhadas desde cedo nas escolas.

English (1991; 1992) realizou uma série de estudos com o objetivo de investigar as primeiras idéias combinatórias de crianças. Para isso, examinou 50 crianças divididas em seis grupos etários (4 anos, 5 anos, 6 anos, 7 anos, 8 anos e 9 anos) na resolução de sete problemas de combinatória do tipo produto cartesiano. De modo geral, os problemas consistiam em vestir ursos de brinquedo (feitos de madeira) com todos os trajes possíveis, cada traje era composto por uma camisa e uma calça. As peças de roupa eram feitas em material adesivo o que facilitava a colagem nos ursos de madeira. Os problemas combinavam duas variáveis (camisa e calça) com valores até três, podendo gerar um total máximo de nove (3 x 3) combinações possíveis. A criança deveria vestir os ursos com os diferentes trajes possíveis e depois colocá-los em um suporte de madeira de modo que pudesse ver claramente os trajes concluídos. Após a resolução do problema, o examinador perguntava se todos os diferentes trajes foram formados, ou se poderia ser formado mais algum traje. Em cada problema as crianças tinham uma quantidade de ursos e trajes maior que o necessário. Em seus resultados, English encontrou uma progressiva sofisticação das estratégias com o avanço da idade. As estratégias identificadas são descritas abaixo:

(1) Ausência de planejamento; a criança não faz qualquer tentativa de encontrar todos os possíveis trajes diferentes, ela simplesmente veste os ursos. Uma variação dessa estratégia é a seleção aleatória dos itens por tentativa e erro;

(2) Estratégia de transição; é mais eficiente do que estratégia anterior, mas não é tão eficiente quanto às estratégias algorítmicas sofisticadas. O que caracteriza esta estratégia é a presença de um padrão na seleção dos itens (por exemplo, camisa vermelha). Entretanto, esse padrão é perdido ou mudado ocasionalmente durante a solução do problema;

(3) Estratégia odométrica; é a mais eficiente. A criança escolhe um item (por exemplo, camisa vermelha) e o considera como 'constante' selecionando-o repetida vezes até que todas as combinações possíveis que incluam este item estejam formadas. Em seguida, um novo item 'constante' (por exemplo, camisa verde) é selecionado e o processo repetido até que ocorra o esgotamento de todos os itens.

Os dados mostraram que as crianças de 4 e 5 anos não planejavam estratégias de resolução para os problemas, elas simplesmente vestiam os ursos. As crianças de 6 anos começaram a utilizar a estratégia transitória, formando algumas combinações, mas só a partir dos 7 anos as crianças empregaram a estratégia odométrica na resolução dos problemas. A maior frequência de estratégia odométrica e, consequentemente, o maior percentual de acertos (46.7%) foi obtido pelo grupo de crianças de 9 anos. A autora conclui que o grupo etário mais jovem (4 e 5 anos) não progrediu além de procedimentos de tentativa e erro como previsto por Piaget para crianças na fase de pensamento pré operacional. Em contraste com as crianças mais novas, o grupo de 7 a 9 anos descobriu procedimentos sistemáticos para formar as combinações sem a intervenção do adulto. Os resultados indicam, portanto, que em condições adequadas as crianças operacionais concretas podem adquirir um método sistemático para formação das combinações. English ainda sugere implicações educacionais importantes como o trabalho com problemas de combinatória desde cedo nas escolas.

Em outro estudo, English (1993) examinou crianças de 7 a 12 anos com o objetivo de investigar se a familiarização com problemas manipulativos de produto cartesiano mais simples facilitaria a resolução de problemas manipulativos de produto cartesiano mais complexos. A autora investigou se as estratégias e procedimentos utilizados em um problema simples poderiam ser generalizadas para problemas mais complexos, ou se estas estratégias se modificavam conforme a dificuldade da tarefa. Os problemas mais simples se assemelhavam aos problemas descritos no estudo anterior (vestir ursos com diferentes trajes) e os problemas mais complexos também se assemelhavam, contudo ao invés de diferentes cores de camisas, as crianças tinham camisas de mesma cor, mas que diferiam pela quantidade de botões (um botão, dois botões, três botões). Com os resultados pode-se observar que as crianças mais novas variavam mais facilmente suas estratégias, enquanto que as crianças mais velhas apresentaram estratégias fixas de resolução aplicadas aos problemas independentemente do seu grau de dificuldade. Notou-se, portanto, que o nível de complexidade dos problemas não determina o uso de estratégias de resolução, pois estas são delineadas pelo caminho evolutivo da própria criança.

Diante dos estudos apresentados é possível perceber que os problemas de produto cartesiano são frequetemente considerados de difícil resolução principalmente quando comparados aos problemas de isomorfismo. Crianças de 9 e 10 anos ainda demonstram dificuldade em compreender as relações e resolver com sucesso problemas de produto cartesiano mesmo quando as variáveis apresentam valores baixos. Pesquisas como a de Batista (2002) evidenciam que nem o uso de material concreto é suficiente para garantir que as crianças estabeleçam as relações de combinação. Por outro lado, estudos como o de Mekhmandarov (2000) e English (1991; 1992) que focalizam mais as relações implícitas envolvidas neste tipo de problema, como os princípios apontados por Mekhmandarov, obtêm resultados que falam a favor de um pensamento de ordem combinatória em crianças pequenas com 7 e 8 anos. Estes estudos demonstram que a compreensão do esquema de correspondência um-para-muitos e dos princípios invariantes constituem um fator importante para o entendimento e resolução desses problemas por crianças. Segundo Nunes e Bryant (1997), os problemas de produto cartesiano são mais difíceis porque diferentemente de outros problemas multiplicativos a correspondência um-para-muitos esta implícita na situação.

Sendo assim, parece importante investigar o efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano. Pretende-se, no presente estudo, apresentar as crianças problemas de produto cartesiano em que as relações um-para-muitos e os princípios indicados por Mekhmandarov (2000) possam estar explícitos.

Capítulo II

Método

2.1 Objetivos e hipóteses

Como mencionado na fundamentação teórica, o esquema de correspondência um-para-muitos é essencial ao raciocínio combinatório, sendo fundamental no processo de resolução de problemas de produto cartesiano. Na revisão da literatura, ficou demonstrado que as crianças têm dificuldades em estabelecer este tipo de correspondência, visto que tais relações não são explícitas durante a apresentação e resolução do problema. O baixo desempenho das crianças em problemas de produto de medidas fica evidente quando se compara com o desempenho das crianças em outros problemas multiplicativos como, por exemplo, problemas de isomorfismo de medidas. Uma razão para isso, segundo Nunes e Bryant (1997), é que nos problemas de produto cartesiano, diferentemente dos outros problemas multiplicativos, a correspondência um-para-muitos está implícita na situação. Ainda, com base na revisão da literatura, observa-se que pesquisas como as de English (1991; 1992; 1993) e a de Mekhmandarok (2000) indicam que crianças conseguem com sucesso resolver, em determinadas situações, problemas de produto cartesiano. Partindo desta reflexão, é possível supor que a explicitação da correspondência um-para-muitos poderia ser um fator importante no raciocínio combinatório, sendo esta a hipótese examinada na presente investigação. Assim, este estudo teve por objetivo examinar se as crianças resolveriam problemas de produto cartesiano em uma situação em que a correspondência um-para-muitos fosse explicitamente apresentada. Será que nessas circunstâncias as crianças teriam um desempenho melhor que àquele geralmente observado quando resolvem problemas em situações nas quais a correspondência encontra-se de forma implícita (como usualmente ocorre nas pesquisas na área)?

Para examinar essa possibilidade, problemas de produto cartesiano foram apresentados em três diferentes situações as quais diferiam em função da explicitação e da não explicitação da correspondência um-para-muitos. Na Situação 1 as relações um-para-muitos eram implícitas, sendo os problemas apresentados de forma clássica como usualmente se observa nas pesquisas na área. Na Situação 2 e na Situação 3 a correspondência um-para-muitos estava explícita, porém de maneira distinta em cada uma das situações, como será detalhadamente descrito adiante.

Uma vez que a hipótese levantada nesta investigação é que a explicitação da correspondência um-para-muitos poderia favorecer o raciocínio combinatório; a predição, em vista disso, é que as crianças teriam um melhor desempenho na Situação 2 e na Situação 3 do que na Situação 1. É possível, também, que as crianças venham a adotar estratégias de resolução mais eficientes quando resolvendo problemas com explicitação (Situação 2 e 3) do que quando resolvendo problemas em que a correspondência um-para-muitos está implícita (Situação 1). Além das situações, foram investigados também problemas de diferentes tipos, como será descrito no planejamento experimental.

2.2 Participantes

Participaram deste estudo 40 crianças, de ambos os sexos, com média de idade de 98 meses (8 anos e 2 meses), alunas do 3º ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade do Recife[4]. Nenhuma criança havia sido instruída formalmente sobre a multiplicação no contexto escolar, visto que o ensino da multiplicação estava programado para o segundo semestre do ano letivo, e a coleta de dados ocorreu no primeiro semestre. Todas as crianças eram alunas de uma mesma escola, porém aleatoriamente extraídas de seis turmas diferentes (aproximadamente sete crianças de cada turma). Nenhuma das crianças era repetente ou apresentava dificuldades em matemática ou qualquer dificuldade de aprendizagem, segundo informações da escola.

Os participantes foram divididos em dois grupos:

Grupo 1: 20 crianças com idade média de 8 anos e 1 mês que primeiro resolveram os problemas da Situação 1 (correspondência implícita) e em seguida resolveram os problemas da Situação 2 (explicitação da correspondência um-para-muitos acompanhada de representação gráfica) e da Situação 3 (explicitação da correspondência um-para-muitos acompanhada dos princípios invariantes).

Grupo 2: 20 crianças com idade média de 8 anos e 2 meses que primeiro resolveram os problemas com explicitação da correspondência um-para-muitos, ou seja, a Situações 2 (explicitação da correspondência acompanhada de representação gráfica) e a Situação 3 (explicitação da correspondência acompanhada dos princípios invariantes) e em seguida resolveram do problemas da Situação 1 (correspondência implícita).

[4] A opção por crianças de classe média alunas de escola particular deve-se ao fato de que os estudos conduzidos no exterior investigam participantes que se assemelham em termos educacionais e sócio-econômicos a crianças de classe média no Brasil.

2.3 Procedimento e planejamento experimental

As crianças foram divididas em dois grupos para que dois estudos com objetivos distintos, porém relacionados, fossem realizados. O Estudo 1, que envolvia as crianças do Grupo 1, procurou examinar se o desempenho e o uso de estratégias na resolução de problemas de produto cartesiano variaria em função da natureza da situação em que esses problemas eram apresentados, acreditando-se que os problemas na Situação 2 e na Situação 3 seriam mais facilmente resolvidos do que os problemas na Situação 1. Em razão disto, no Estudo 1, os problemas em que as relações um-para-muitos estavam implícitas eram os primeiros a serem apresentados à criança, evitando uma possível influência dos demais problemas da Situação 2 e 3 sobre os problemas da Situação 1. Por sua vez, o Estudo 2, que envolvia as crianças do Grupo 2, procurou examinar se haveria um efeito facilitador das situações em que as relações um-para-muitos eram explícitas (Situação 2 e 3) sobre a situação implícita (Situação 1). Neste caso, essas crianças primeiro resolviam os problemas da Situação 2 e da Situação 3 e só depois resolviam os problemas da Situação 1.

A coleta de dados ocorreu na própria escola e foi conduzida num período de dois meses (maio e junho). A direção da escola disponibilizou uma sala onde o examinador pôde realizar todas as entrevistas sem que houvesse interrupções. Cada criança foi individualmente entrevistada em uma única sessão por um mesmo examinador, sendo solicitada a resolver doze problemas de produto cartesiano direto (multiplicação) distribuídos em três situações (quatro problemas em cada situação), apresentados um por vez. Cada problema era apresentado por escrito em uma cartela e lido em voz alta pelo examinador, juntamente com a criança. Posteriormente a leitura do problema, a cartela ficava disponível sobre a mesa, podendo ser consultada quantas vezes fossem necessárias. Em seguida, o examinador solicitava que a criança resolvesse o problema da maneira que desejasse e após sua resolução, através de uma entrevista clínica, solicitava que a criança fornecesse justificativas e explicações sobre o resultado apresentado e as ações realizadas. As perguntas e intervenções do examinador variavam em função das respostas e ações conduzidas pela criança. O tempo de resolução dos problemas era livre. As entrevistas eram gravadas em áudio e posteriormente transcritas em protocolos individuais, tendo duração média de trinta minutos cada.

2.3.1 Os problemas

A opção por examinar apenas problemas de produto cartesiano se deve ao fato dos demais problemas de combinatória (combinação, arranjo e permutação) envolverem um raciocínio mais complexo com uso de algoritmos sofisticados na sua resolução, sendo ensinados formalmente no ensino médio. Além disso, os parâmetros curriculares nacionais para o ensino fundamental (MEC, 1998) sugerem, no que concerne ao ensino da multiplicação e da divisão, o trabalho com diferentes problemas de estrutura multiplicativa, entre eles, problemas relacionados à idéia de combinação.

Os 12 problemas deste estudo são de produto cartesiano direto e envolvem o uso da operação de multiplicação para sua resolução. Em cada problema é dado à criança o valor de duas medidas elementares (por exemplo, o número de saias e o número de blusas) sendo solicitado que encontre o valor da medida produto (por exemplo, o número de trajes formados). De acordo com Vergnaud (1991; 1998), este tipo de problema comporta uma relação ternária entre as medidas, visto que uma medida é produto de outras duas tanto no plano numérico como no plano dimensional. A relação ternária presente nos referidos problemas se apoia no raciocínio combinatório e no esquema de correspondência um-para-muitos.

No que diz respeito aos pares numéricos dos problemas, isto é, o valor das medidas elementares, esses foram números pequenos (2, 3, 4, 5 e 6), havendo apenas duas medidas elementares em cada problema (blusas e saias, entradas e saídas, camisetas e calças). As combinações de medidas elementares adotadas para formação dos pares numéricos deste estudo poderiam gerar os seguintes valores de medida produto: 8, 10, 12 e 15. Para controle experimental os mesmos quatro pares numéricos foram utilizados nas três situações, variando a ordem em que aparecem no enunciado dos problemas (por exemplo, 4 e 2 ou 2 e 4), conforme mostrado no Quadro 1 exibido na próxima página.

Como mencionado, os 12 problemas foram divididos em três situações, cada situação com quatro problemas, dos quais dois eram de percurso e dois de traje. O termo “problema de percurso” foi empregado para designar os problemas de produto cartesiano que apresentavam como medida-produto diferentes combinações de percursos (ou caminhos). Exemplo: Um parque tem 2 entradas (A e B) e 3 saídas (1, 2 e 3). Combinando as entradas e saídas Mateus pode fazer caminhos para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair desse parque? Já o termo “problema de traje” foi empregado para os problemas de produto cartesiano que apresentavam como medida-produto diferentes combinações de conjuntos de roupas (ou trajes). Exemplo de problema: Eduarda tem 2 saias (rosa e verde) e 3 camisetas (preta, amarela e branca). Ela quer combinar as camisetas e as saias para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

A razão para se utilizar dois tipos de problema partiu da suposição de que problemas de percurso pudessem ser beneficiados quando a correspondência um-para-muitos era acompanhada de representação gráfica (Situação 2), uma vez que as crianças teriam o apoio da representação para formar e contabilizar os diferentes caminhos. Pensou-se que esta visualização não seria tão clara em relação aos problemas de trajes, pois estes estariam representados pelas camisetas e *shorts*, e a combinação destes itens não seria tão clara quanto nos problemas de percurso.

Quadro 1. Os problemas e seus pares numéricos.

Situação	**Tipos de problemas**	
	Traje	**Percurso**
Situação 1	Problema 1 (2 x 5) Problema 3 (3 x 5)	Problema 2 (6 x 2) Problema 4 (2 x 4)
Situação 2	Problema 6 (5 x 2) Problema 8 (5 x 3)	Problema 5 (2 x 6) Problema 7 (2 x 4)
Situação 3	Problema 9 (3 x 5) Problema 11 (5 x 2)	Problema 10 (4 x 2) Problema 12 (2 x 6)

A ordem de apresentação dos quatro problemas no interior de cada situação foi aleatória, definida por sorteio feito com cada criança antes da entrevista. A única restrição era que dois problemas de um mesmo tipo (percurso ou traje) não poderiam ser apresentados consecutivamente.

2.3.2 As situações

De acordo com Mekhmandarov (2000) os seguintes princípios estão implicados na resolução com sucesso de problemas de combinatória: (1) compreender que cada par é formado por um e apenas um elemento de cada um dos conjuntos elementares; (2) compreender que cada par é um elemento no novo conjunto produto; (3) compreender que cada elemento do conjunto elementar pode aparecer em diversos pares (correspondência um-para-muitos); e (4) compreender que cada par deve aparecer apenas uma vez no conjunto produto. Analisando os problemas usuais de combinatória adotados em pesquisas com crianças, foi possível perceber que estes princípios não são explicitados e nem inferidos a partir do enunciado dos problemas. Inclusive, muitos dos erros documentados na literatura refletem a não consideração desses princípios mesmo entre crianças de 9 e 10 anos que já iniciaram a instrução escolar acerca das estruturas multiplicativas.

Diante de tal quadro emergiu a questão do presente estudo: se fossem apresentados problemas de combinatória em que esses aspectos estivessem explicitamente tratados, será que a criança teria um melhor desempenho, sendo capaz de resolver corretamente problemas deste tipo adotando estratégias mais apropriadas?

A partir dessas considerações, foram investigadas três diferentes situações de resolução de problemas, sendo duas situações com explicitação da correspondência um-para-muitos (de modo distinto) e uma situação clássica (correspondência implícita). Essas situações são descritas a seguir.

Situação 1: problemas sem explicitação da correspondência um-para-muitos

Os quatro problemas apresentados nesta situação seguem o padrão usual de problemas de produto cartesiano encontrado nos livros pedagógicos e nas pesquisas com crianças. São problemas que não fornecem qualquer indicação a respeito de como se caracterizam os princípios que governam o raciocínio combinatório, dentre eles as relações típicas da correspondência um-para-muitos. Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas. O material disponibilizado durante o processo de resolução foi lápis e papel. Os problemas nesta situação foram:

Problema 1 (P1): Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

Problema 2 (P2): Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair do parque?

Problema 3 (P3): Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelha, laranja, preta, marrom e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

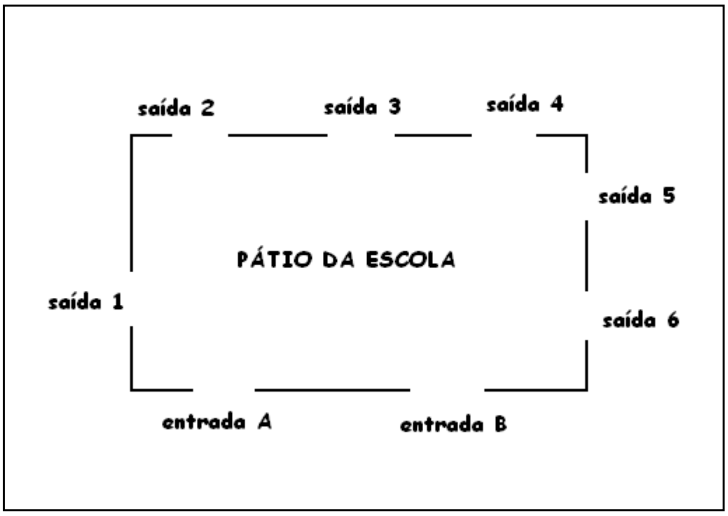
Problema 4 (P4): Um *shopping* tem 2 entradas (A, B) e 4 saídas (1, 2, 3, 4). Combinando as entradas e saídas André pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do *shopping*. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair desse *shopping*?

Situação 2: explicitação da correspondência um-para-muitos acompanhada de representação gráfica

Os quatro problemas que compõem esta situação eram apresentados de modo que através do enunciado a criança tivesse um exemplo de correspondência um-para-muitos para um dos termos do conjunto elementar, além disso, o problema era acompanhado de uma representação gráfica dos conjuntos elementares, fato este que poderia possibilitar o estabelecimento das combinações a serem feitas pela criança. Com esta estrutura, o problema tornou explícita a correspondência um-para-muitos. Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas. O material disponibilizado durante o processo de resolução foi lápis e papel. Os problemas apresentados nesta situação foram:

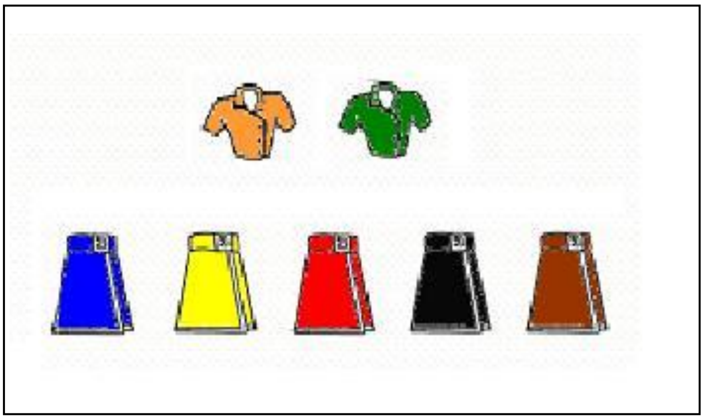
> Problema 5 (P5): Esse é o desenho do pátio da escola de João. Nesse pátio existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1, 2, 3, 4, 5, 6). Nesse pátio os alunos podem, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1, pela saída 2, pela saída 3, pela saída 4, pela saída 5 e pela saída 6. De quantas maneiras diferentes João pode entrar e sair desse pátio?

Figura 3. Entradas e saídas da escola.



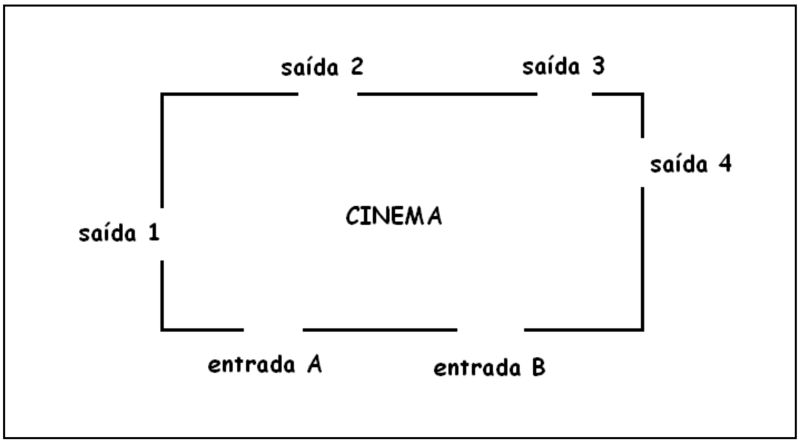
Problema 6 (P6): Essa é a figura que mostra as saias e as blusas que Maria tem. Ela tem 5 saias (azul, amarela, vermelha, preta e marrom) e 2 blusas (laranja e verde). Ela pode combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Ela pode vestir, por exemplo, a blusa verde com a saia azul, com a saia amarela, com a saia vermelha, com a saia preta e com a saia marrom. Quantos conjuntos diferentes Maria pode formar?

Figura 4. Saias e blusas de Maria.



Problema 7 (P7): Esse é o desenho da sala de cinema que Sandra foi. Nessa sala de cinema existem 2 entradas (A, B) e 4 saídas (1, 2, 3, 4). Nessa sala as pessoas podem, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1, pela saída 2, pela saída 3 e pela saída 4. De quantas maneiras diferentes Sandra pode entrar e sair dessa sala de cinema?

Figura 5. Entradas e saídas do cinema.



Problema 8 (P8): Essa é a figura que mostra os chapéus e as gravatas que o palhaço Pipo tem. Ele tem 5 chapéus (azul, preto, colorido, rosa e verde) e 3 gravatas (vermelha, colorida e preta). Ele pode combinar os chapéus e as gravatas para formar conjuntos. Ele pode usar, por exemplo, a gravata vermelha com o chapéu azul, com o chapéu preto, com o chapéu colorido, com o chapéu rosa e com o chapéu verde. Quantos conjuntos diferentes o palhaço Pipo pode formar?

Figura 6. Chapéus e gravatas de Pipo.

Situação 3: explicitação da correspondência um-para-muitos acompanhada dos princípios invariantes

Os quatro problemas desta situação apresentaram explicitamente em seu enunciado os princípios indicados por Mekhmandarov (2000). Por exemplo, o princípio de que não se pode repetir os conjuntos, de que usando uma mesma calça com diferentes camisas, têm-se diferentes conjuntos, entre outros. Desse modo, a criança era informada dos invariantes que normalmente estão implícitos nestes problemas. Os quatro problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas. O material disponibilizado durante o processo de resolução foi lápis e papel. Os problemas nesta situação foram:

> Problema 9 (P9): Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom, e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez, não é? Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?

> Problema 10 (P10): Paulo foi ao parque de diversão. Nesse parque existem 4 entradas (A, B, C, D) e 2 saídas (1, 2). Nesse parque, as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela

mesma porta. Paulo pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ele for novamente ao parque, ele pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Paulo quer ir ao parque de diversão muitas vezes, em dias diferentes. Mas ele não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ele quer fazer um caminho diferente a cada dia que ele for ao parque. Combinando todas as entradas com todas as saídas, de quantas maneiras diferentes Paulo pode entrar e sair desse parque?

Problema 11 (P11): Fátima vai viajar para casa de sua tia. Na mala ela colocou 5 saias (amarela, rosa, azul, preta e marrom) e 2 blusas (verde e vermelha). Ele pode combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as saias e todas as blusas de uma só vez; só usa uma saia e uma blusa de cada vez, não é? Combinando as saias com as blusas, ela pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Fátima quer usar uma roupa diferente a cada dia, ela não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ela pode usar a saia rosa com a blusa verde. No outro dia, ela pode usar a mesma saia rosa com a blusa vermelha, já seria uma roupa diferente, não é? Combinando todas as saias com todas as blusas, quantos conjuntos diferentes Fátima pode formar?

Problema 12 (P12): Bia foi ao *shopping*. Nesse *shopping* existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1, 2, 3, 4, 5, 6). Nesse *shopping* as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no *shopping*, ela pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao *shopping* muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia que ela for ao *shopping*. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse *shopping*?

2.4 Material

O material utilizado constou de 12 cartelas cada uma com um problema escrito, gravador de voz (MP4) para registro das entrevistas, folhas de papel, lápis e borracha.

É importante destacar que apesar de ter sido disponibilizado para todas as crianças lápis e papel, nem todas utilizaram este material. Como seu uso não era obrigatório, mas estava à disposição da criança para que ela usasse se assim desejasse, não houve uma análise específica deste registro escrito, visto que apenas 14 das 40 crianças utilizaram lápis e papel. Os registros feitos no papel foram utilizados como um auxílio à gravação com intuito de melhor compreender as estratégias utilizadas pela criança na resolução dos problemas.

Capítulo III

Sistema de análise das estratégias de resolução

No presente estudo, os dados foram analisados de duas maneiras: em função do número de acertos (desempenho) e em função das estratégias de resolução adotadas pelas crianças. O sistema de análise das estratégias de resolução foi fortemente baseado nas estratégias identificadas por Batista (2002) uma vez que a autora examinou crianças de mesma faixa etária em problemas semelhantes de produto cartesiano. Entretanto, algumas adaptações foram feitas com o objetivo de adequar o sistema de análise proposto pela autora com os dados obtidos na presente pesquisa. As adaptações decorreram do fato de que nos protocolos analisados foram identificadas três diferentes estratégias que levam a criança a encontrar uma solução de ordem combinatória, isto é, estratégias que possibilitam encontrar todos os pares combinados possíveis. Enquanto que no estudo realizado por Batista não há um refinamento maior acerca desta questão, visto que a autora descreve uma única estratégia que apresenta solução combinatória e esta possui um caráter mais generalista. Desse modo, as justificativas das crianças foram analisadas e agrupadas em categorias que variavam quanto a sofisticação que apresentavam, expressando níveis de maior ou menor elaboração.

As estratégias identificadas podem ser agrupadas em dois blocos: um relativo às estratégias que não são combinatórias, ou seja, estratégias que não dão conta de estabelecer todas as combinações exigidas pelo problema, o que leva a criança ao erro. E outro bloco, relativo às estratégias combinatórias que permitem à criança desenvolver a totalidade de pares combinados possíveis e acertar o problema (ver Quadro 2).

Quadro 2. Resumo geral das estratégias identificadas no presente estudo.

Estratégias não combinatórias	**Estratégias combinatórias**
Estratégia inadequada	Solução combinatória por contagem
Combinação por pares fixos	Solução combinatória por adição
Formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares	Solução combinatória por multiplicação

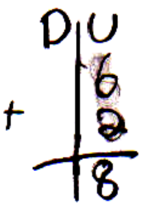
A classificação das estratégias foi feita por dois juízes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 91,46%. Os casos de discordância foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada definitiva. As estratégias são descritas e exemplificadas a seguir[5].

3.1 Estratégias de resolução não combinatórias

Estratégia inadequada: a criança realiza uma operação inadequada, em geral a adição ou subtração dos dois valores presentes no enunciado do problema. Observa-se muitas vezes que a criança realiza a operação automaticamente, perdendo de vista que o objetivo do problema é encontrar o número de combinações. Por isso, quando questionada sobre o que representa o resultado encontrado, frequentemente a criança não relaciona com o número de pares, dizendo apenas ser esta a resposta do problema. Esta estratégia foi também identificada por Batista (2002) e por Lautert (2000). Exemplos:

[5] Convenções adotadas: C – criança; E – examinador.

Figura 7. Participante 10 (8a 8m), Situação 1 (implícita)
Problema de percurso, P2: Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair desse parque?



C: 8.
E: Me explica como você fez.
C: Se 6 + 2 dá 8, eu acho que são 8.
E: Por que tu fez essa conta “6 + 2”?
C: Pra contar. Eu sei contando... 6 + 2 é 8.
E: Hum. Esse 6 aqui (aponta para o 6 que a criança escreveu no papel) é o que?
C: (a criança pensa) É o que mesmo?
E: Lembra que a gente leu aqui? (examinador aponta para a cartela com o problema)
C: (a criança relê o problema) São 6 entradas.
E: E esse 2 aqui? (examinador aponta para o 2 que a criança escreveu no papel)
C: São as saídas.
E: Hum. O problema tá perguntando quantos caminhos diferentes Daniela pode fazer...
C: 8.
E: Por que são 8 caminhos?
C: Por causa da conta. 6 + 2 é 8.

Figura 8. Participante 06 (8a), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P1: Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

C: 7.
E: Como você fez?
C: Eu pensei.
E: Me diz como você pensou.
C: Eu fiquei pensando nas operações e somei os números.
E: Você somou o que?
C: Aqui (aponta para o 2) e aqui (aponta para o 5).
E: Por que tu somou o 2 com o 5?
C: Pra saber os conjuntos.
E: Esse 2 é o que?
C: 2 saias.
E: E o 5?
C: 5 blusas.

Combinação por pares fixos: a criança oferece como resposta o menor valor presente no enunciado do problema. Para a criança não é possível formar mais combinações se o número de elementos de um dos grupos foi esgotado. Isto ocorre porque a criança pensa em termos de pares fixos, não aceitando, por exemplo, que uma saia possa combinar com mais de uma blusa. Assim, uma vez formado os pares, esses não poderão ser desfeitos. Esta estratégia foi também identificada por Batista (2002). Exemplos são apresentados a seguir.

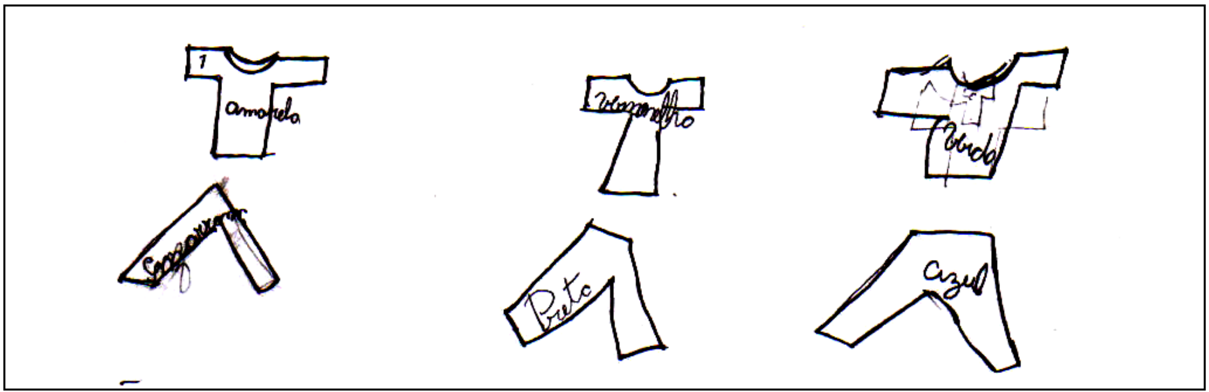
Figura 9. Participante 19 (8a 1m), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P3: Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelho, laranja, preto, marrom e branco). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

Pedro pode formar a amarela com a laranja e a verde com a vermelha e também tem a azul com a preta

A criança escreve no papel "Pedro pode formar a amarela com a laranja, a verde com a vermelha e também tem a azul com a preta".

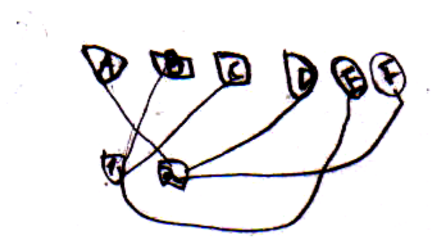
E: Ele pode formar quantos conjuntos?
C: 3.
E: Quais são?
C: (a criança lê o que escreveu no papel).
E: Pedro pode formar mais algum conjunto?
C: Não. Porque ele só tem três camisas.
E: E a bermuda marrom e a branca?
C: Sobrou.

Figura 10. Participante 28 (7a 11m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes).
Problema de traje, P1: Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez. Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa amarela. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa vermelha, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?



Formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares: a criança começa a realizar a correspondência um-para-muitos e passa a aceitar, por exemplo, que uma saia possa combinar com mais de uma blusa. Algumas crianças oferecem como resposta o maior número presente no enunciado do problema, outras crianças realizam algumas combinações sem seguir uma sistematização na formação dos pares, desse modo as combinações feitas não se limitam ao maior número do enunciado, entretanto, também não contemplam todos os pares possíveis. Esta estratégia foi também identificada por Batista (2002). Exemplos são apresentados a seguir.

Figura 11. Participante 07 (8a 2m), Situação 1 (implícita).
Problema de percurso, P2: Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair desse parque?



C: 6.
E: Por que você acha que são 6 caminhos?
C: Porque tem entrada e saída, eu contei.
E: Você contou como?
C: Porque ela entrou e saiu.
E: Você disse que ela fez 6 caminhos, quais foram esse caminhos? Você pode me dizer?
C: Entra na A e sai na 2, entra na B e sai na1, entra na C e sai na1, entra na De sai na 2, entra na E e sai 1, entra na F e sai na 2.

Participante 28 (7a 11m), Situação 2 (explicitação com representação).
Problema de traje, P2: Essa é a figura que mostra as saias e as blusas que Maria tem. Ela tem 5 saias (azul, amarela, vermelha, preta e marrom) e 2 blusas (laranja e verde). Ela pode combinar as saias com as blusas para formar conjuntos. Ela pode vestir, por exemplo, a blusa verde com a saia azul, com a saia amarela, com a saia, vermelha, com a saia preta e com a saia marrom. Quantos conjuntos diferentes Maria pode formar?

C: 5 conjuntos.
E: Como foi que você fez?

C: Eu fiz aqui na minha cabeça, dá pra fazer 5 conjuntos.
E: Você pode me dizer os conjuntos que você formou?
C: (saia) Amarela e (blusa) verde, (saia) vermelha e (blusa) laranja, (saia) marrom e (blusa) verde, (saia) preta e (blusa) laranja, (saia) azul e (blusa) verde.

Participante 14 (8a 2m), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P1: Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

C: Pode ser a (blusa) verde e a (blusa) vermelha com a (saia) marrom, e a (blusa) laranja e a (blusa) azul com a (saia) preta.
E: São esses os conjuntos? Quantos são?
C: também tem a (blusa) rosa que pode usar com a (saia) marrom e com a (saia) preta.
E: São quantos conjuntos?
C: 6 conjuntos.
E: Ele pode fazer mais algum?
C: Não. Só esses mesmo.

3.2 Estratégias de resolução combinatória

Observa-se nas estratégias deste segundo bloco uma sistematização na formação das combinações, na qual a criança escolhe um item (por exemplo, saia preta) e o considera como “constante”, selecionando-o repetidas vezes até que todas as combinações possíveis que incluam este item estejam formadas. Após a extinção deste item, um novo item “constante” é selecionado (por exemplo, saia marrom) e o processo repetido até que se esgotem os itens do conjunto elementar selecionado. Além disso, é possível perceber o uso do esquema de correspondência um-para-muitos na resolução dos problemas, com a diferenciação entre o número de combinações e o número de objetos a serem combinados. A criança encontra todos os casos possíveis de combinação entre os elementos do enunciado, aceitando que um item pode ser combinado com todos os itens do outro conjunto elementar, não se limitando, como ocorria nas estratégias anteriores, a aceitar o menor ou maior número presente no enunciado como sendo o número total de combinações.

As crianças do presente estudo obtiveram soluções combinatórias empregando estratégias diferenciadas, como a contagem simples, a adição repetida e o cálculo multiplicativo. Estas estratégias são descritas e exemplificadas a seguir.

Solução combinatória por contagem: a criança realiza a correspondência um-para-muitos com os elementos do problema e a cada novo par formado conta uma unidade, assim ao final da contagem descobre o resultado do problema (todas as possíveis combinações).

Participante 09 (8a 3m), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P3: Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelho, laranja, preto, marrom e branco). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

C: Ele tem as camisas azul, amarela e verde.
E: Isso mesmo!
C: Então ele pode combinar a azul com a vermelha, 1 combinação! Azul e laranja, 2 combinações! Azul e preta, 3 combinações! Azul e marrom, 4 combinações! Azul e branca, 5 combinações! Amarela e vermelha, 6 combinações! Amarela e laranja, 7 combinações! Amarela e preta, 8 combinações! Amarela e marrom, 9 combinações! Amarela e branca, 10 combinações! Verde e vermelha, 11 combinações! Verde e laranja, 12 combinações! Verde e preta, 13 combinações! Verde e marrom, 14 combinações! Verde e branca, 15! No total são 15 combinações.

Figura 12. Participante 56 (7a 7m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes)
Problema de percurso, P4: Bia foi ao *shopping*. Nesse *shopping* existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1,2, 3, 4, 5, 6). Nesse *shopping* as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta, elas só podem entrar pelas portas de entrada e sair pelas portas de saída. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no *shopping*, ela pode novamente entrar pela mesma

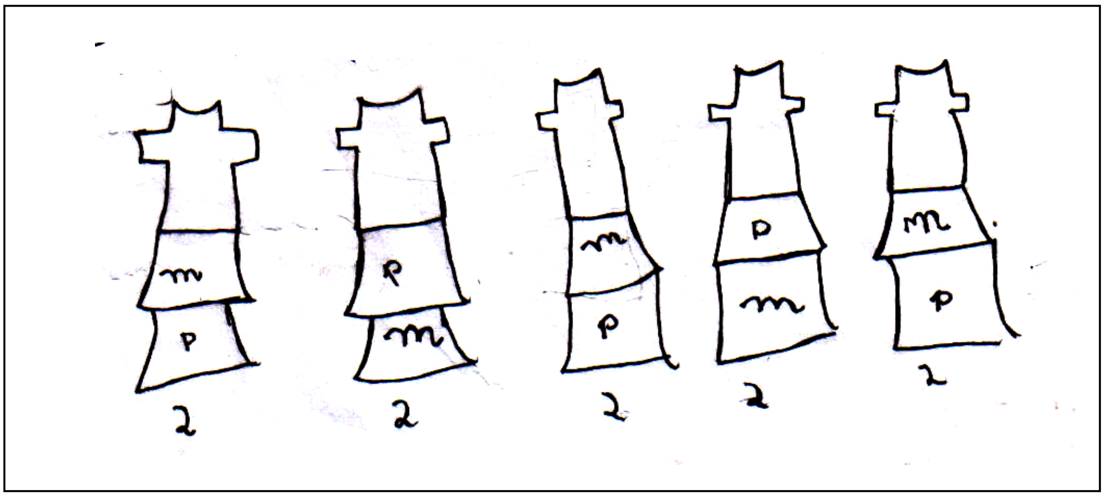
entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao *shopping* muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse *shopping*?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

C: Entra pela A e sai pela 1, 1. (escreve o número 1 no papel). Entra pela A e sai pela 2, 2. (escreve o número 2 no papel). Entra pela A e sai pela 3, 3. (escreve o número 3 no papel). Entra pela A e sai pela 4, 4. (escreve o número 4 no papel). Entra pela A e sai pela 5, 5. (escreve o número 5 no papel). Entra pela A e sai pela 6, 6. (escreve o número 6 no papel). Entra na B e sai pela 1, 7. (escreve o número 7 no papel). Entra na B e sai pela 2, 8. (escreve o número 8 no papel). Entra na B e sai pela 3, 9. (escreve o número 9 no papel). Entra na B e sai pela 4, 10. (escreve o número 10 no papel). Entra na B e sai pela 5, 11. (escreve o número 11 no papel). Entra na B e sai pela 6, 12. (escreve o número 12 no papel).

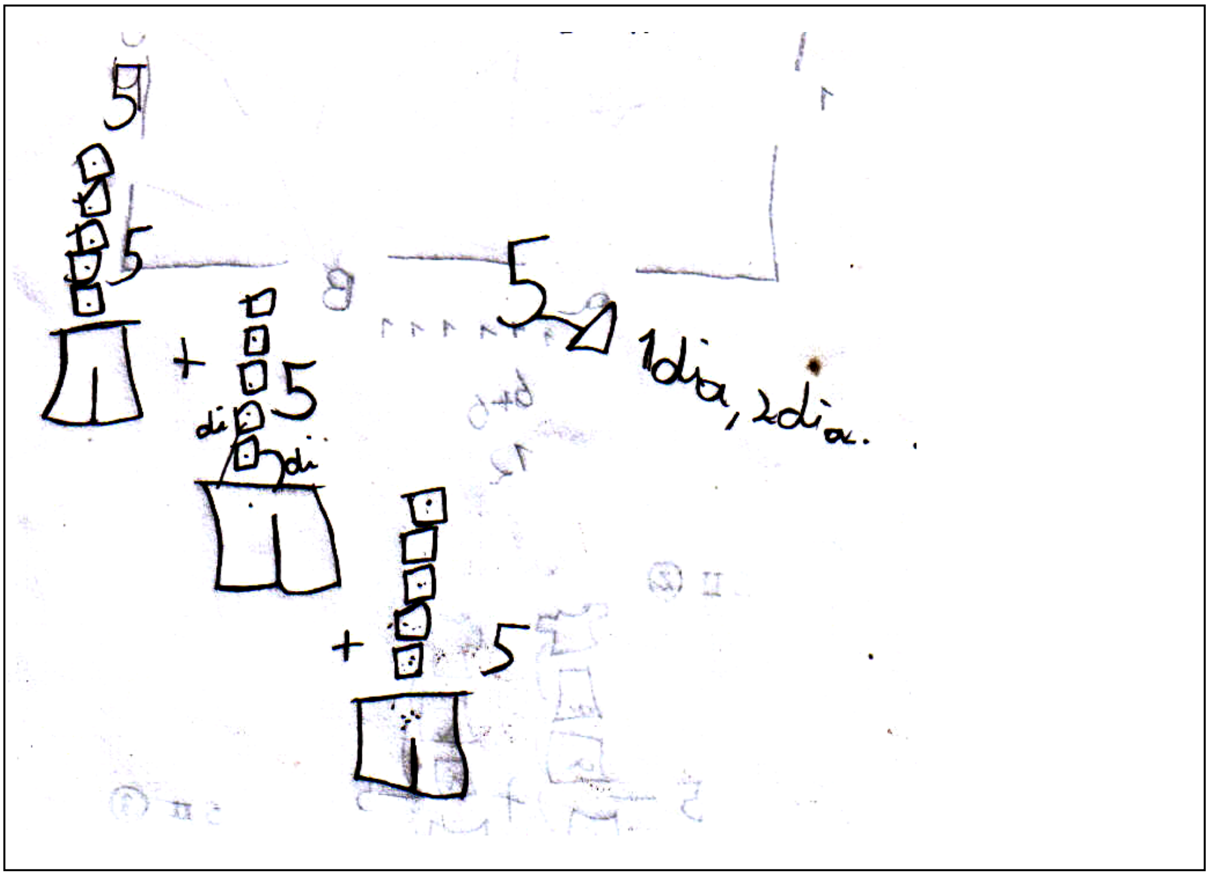
Solução combinatória por adição repetida: a criança encontra as combinações para um item do enunciado (exemplo, uma saia combina com 5 blusas, portanto pode formar 5 conjuntos) e adiciona sucessivamente essa quantidade de acordo com o número de elementos estipulado pelo enunciado do problema (exemplo, se são 3 saias, então é 5 + 5 + 5). Outra forma de expressar o mesmo raciocínio é através da contagem em múltiplos, na qual a criança realiza a contagem dos grupos de combinação formados com quantidades iguais, sem mencionar o sinal da operação que está sendo utilizada, até chegar ao valor total de combinações (exemplo, 3, 6, 9, 12, 15 ou 2, 4, 6, 8, 10 ou 5, 10, 15).

Figura 13. Participante 12 (7a 9m), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P1: Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?



C: (resolve) 10.
E: 10? Como foi que você fez?
C: Eu fiz as 5 blusas, depois coloquei uma saia para cada blusa, depois coloquei a outra saia.
E: Por que você colocou o número 2 embaixo de cada blusa?
C: Porque cada blusa pode combinar com a saia marrom e a saia preta, são 2 conjuntos.
E: Hum. E depois você fez o que?
C: Ficou 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Eu somei tudo e deu 10. 10 conjuntos.

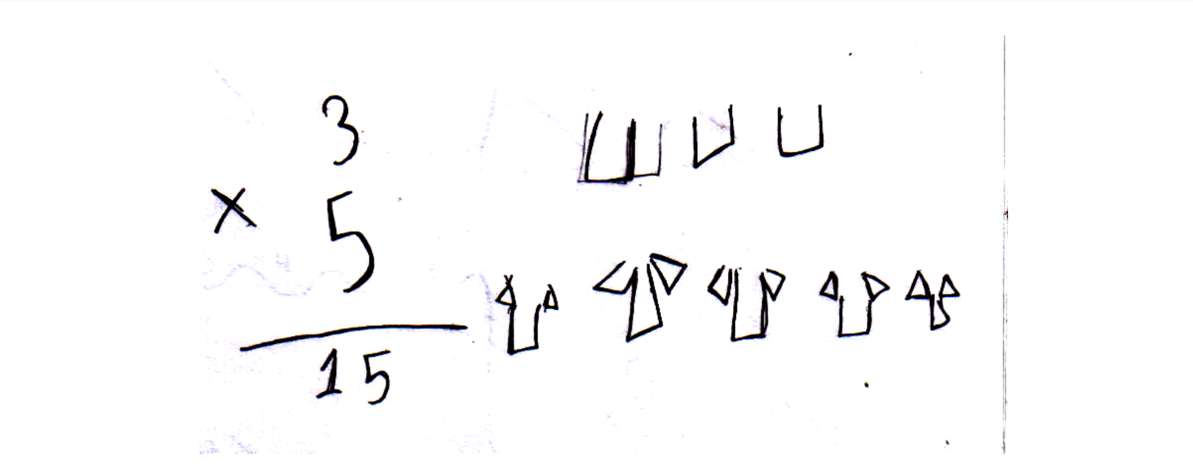
Figura 14. Participante 12 (7a 9m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes).
Problema de traje, P1: Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez. Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa amarela. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa vermelha, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?



C: 15 conjuntos.
E: Mostra como foi que você fez.
C: Eu fiz as 3 calças com as camisas. Deu 5.
E: O que é isso aqui (aponta para os quadrados do desenho)?
C: As camisas. Cada calça tem 5 camisas, olha o 5 aqui (aponta para o número “5” no desenho). São 5 dias né?
E: Como assim? Não entendi.
C: Ele usa essa calça com essa camisa em um dia (escreve “di” no desenho e liga o quadrado a calça), aí no outro dia ele usa essa calça com outra camisa (escreve “di” no próximo quadrado), então são 5 dias porque são 5 conjuntos (escreve 5 -> 1 dia, 2 dia...).
E: E como você descobriu que eram 15 conjuntos no total?
C: Eu fiz 5 + 5 + 5 (coloca o sinal de mais “+” entre os conjuntos).

Solução combinatória por multiplicação: A criança realiza o cálculo multiplicativo com os valores fornecidos pelo problema, encontrando o total de combinações possíveis.

Figura 15. Participante 32 (8a 2m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes).
Problema de traje, P1: Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez. Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa amarela. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa vermelha, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?



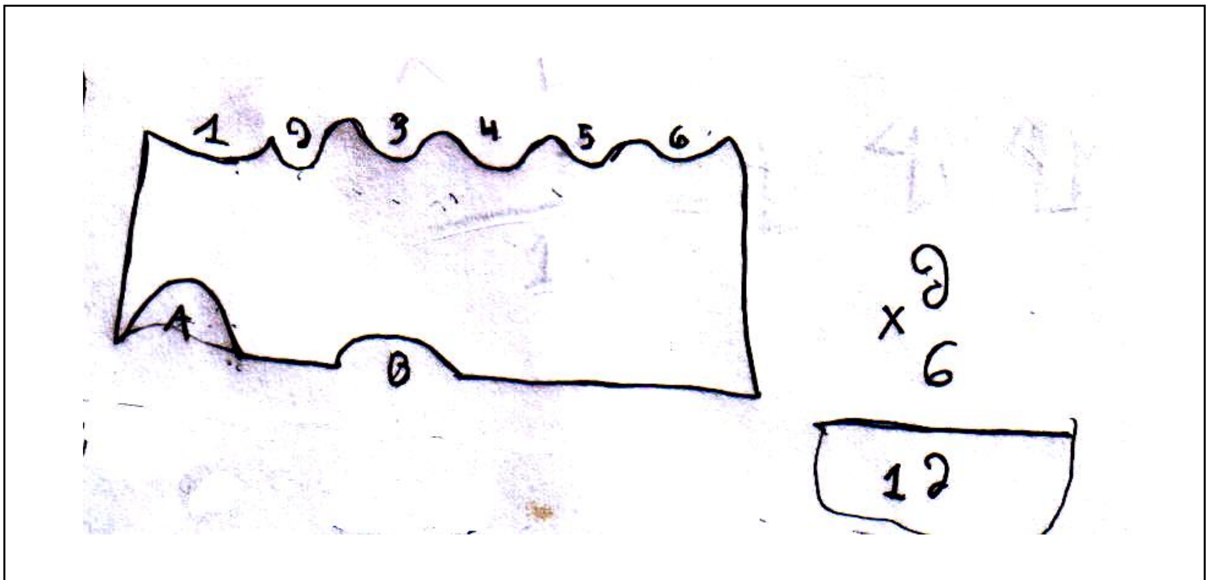
C: 15 conjuntos.
E: Agora me explica como você descobriu que eram 15.
C: Eu fiz assim.. 3 vezes 5 camisas.
E: Por que você fez 3 vezes 5?
C: Aqui tá dizendo que combinando as camisas com as calças ele pode ter conjuntos diferentes, como ele tem 3 calças e 5 camisas ele... o 5 vai ficar 3 vezes. É tipo o outro (problema). Posso fazer um desenho?
E: Pode.
C: (desenha as calças). Ele tem 3 calças, certo? (aponta para as calças) 1 calça, 2 calças, 3 calças. Eu não sei desenhar calça não... (apaga uma calça)
E: Tá bom assim. Eu tô entendendo.
C: (refaz a calça e desenha as camisas). E ele tinha 5 camisas, certo? (aponta para as camisas) 1.. 2.. 3.. 4.. 5, 5 camisas! Essa calça (aponta para a primeira calça) vai com 5 camisas, essa outra (aponta para a segunda calça) vai com 5 e essa outra (aponta para a terceira calça) vai com 5 também. Ai é 3 x 5 que é 15.

Participante 27 (8a 5m), Situação 1 (implícita).
Problema de traje, P3: Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelho, laranja, preto, marrom e branco). Ele quer combinar as

camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

C: 15. Ele tem 3 camisas e 5 bermudas, 3 vezes 5 é 15.
E: Por que tu acha que resolve esse problema fazendo essa continha 3 x 5?
C: Porque ele tem 3 camisas e 5 bermudas.
E: Por isso que você fez essa conta de multiplicação? Com esses números você poderia ter feito outra conta, uma conta de soma, 3 + 5 é 8.
C: Mas ai tava errado! Não dá 8.
E: Como você sabe?
C: Porque ele pode usar uma camisa com todas as bermudas, mais uma camisa com todas as bermudas, mais uma camisa com todas as bermudas. Aí dá 15. Se você fizer conta de soma tinha que ser 5 + 5 + 5.

Figura 16. Participante 47 (8a 2m), Situação 3 (explicitação com princípios invariantes).
Problema de percurso, P4: Bia foi ao *shopping*. Nesse *shopping* existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1,2, 3, 4, 5, 6). Nesse *shopping* as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta, elas só podem entrar pelas portas de entrada e sair pelas portas de saída. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no *shopping*, ela pode novamente entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao *shopping* muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse *shopping*?



C: 12. Bia tem que entrar por uma entrada e sair por uma saída, né?
E: É.

C: Então ela tem que entrar na A e sair na 1, por exemplo. Ela pode fazer A-2, A-3, A-4, A-5, A-6. Aí deu 6 aqui (aponta para entrada A). Com a (entrada) B é a mesma coisa. 2 x 6 dá 12.
E: Entendi. Você poderia resolver esse problema de outra forma, com outra continha?
C: Sim. Com a conta de mais. Se fosse a continha de mais tinha que ser 6 + 6, aí dava 12 caminhos também.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados referentes ao desempenho das crianças nas diferentes situações e tipos de problema, bem como os resultados relativos às estratégias de resolução adotadas.

Capítulo IV

Resultados

No presente estudo, dois tipos de problema de produto cartesiano foram considerados: problemas de percurso que apresentam como medida-produto caminhos ou trajetos que se derivam de combinações entre entradas e saídas, e problemas de trajes que apresentam como medida-produto trajes derivados de combinações entre peças de vestuário. Assim, tipo de problema foi um dos fatores examinados, desejando-se saber o papel por ele desempenhado sobre o número de acertos e sobre o uso das estratégias.

Esses problemas, por sua vez, foram apresentados às crianças em três situações: Situação 1 em que as relações um-para-muitos eram implícitas, correspondendo a problemas clássicos usualmente adotados na pesquisa na área; Situação 2 em que a correspondência um-para-muitos era explicitada a partir de um exemplo dado que era acompanhado de uma representação pictográfica dos conjuntos elementares referidos no problema; e a Situação 3 em que os princípios que governam o raciocínio combinatório eram explicitados verbalmente no enunciado do problema, sendo um desses princípios a correspondência um-para-muitos. Assim, as situações eram outro um fator, inclusive o mais importante na presente investigação, cujo papel sobre o número de acertos e sobre as estratégias de resolução se desejava investigar.

Como mencionado, neste trabalho foram realizados dois estudos com objetivos bem distintos. O Estudo 1 focaliza basicamente o papel das situações sobre a resolução de problemas de produto cartesiano; examinando a hipótese de que problemas com explicitação da correspondência um-para-muitos (Situação 2 e Situação 3) seriam mais fáceis de resolver do que problemas em que tais relações estão implícitas(Situação 1).

Com os resultados obtidos no primeiro estudo, originou-se uma nova questão de pesquisa relacionada ao efeito de ordem de apresentação das situações. Desse modo, o Estudo 2 teve por objetivo investigar o efeito das Situações 2 e 3 (com explicitação da correspondência um-para-muitos) sobre a Situação 1 (correspondência um-para-muitos implícita). Assim, com base nos objetivos propostos, os resultados obtidos foram analisados em função de dois aspectos distintos: o desempenho, considerado a partir do número de acertos, e as estratégias de resolução adotadas. As estratégias de resolução foram analisadas conforme descrito no capítulo anterior relativo ao sistema de análise.

Os dados foram submetidos a testes estatísticos apropriados com vistas a examinar as diferenças existentes em função das variáveis independentes consideradas. Os resultados serão apresentados em tabelas acompanhados de discussões descritivas e interpretativas.

A seguir, os resultados são apresentados em função do tipo de análise aplicada aos dados. Desse modo, em um primeiro momento apresenta-se os resultados relativos ao desempenho das crianças tanto no Estudo 1 como no Estudo 2. Em um segundo momento os resultados apresentados referem-se às estratégias das crianças em ambos os estudos. Os resultados são descritos e comentados, sobretudo, à luz de comparações entre as situações propostas neste estudo. Por fim, é feita uma comparação entre os dois estudos.

4.1 Resultados relativos ao desempenho

4.1.1 Desempenho no Estudo 1

A Tabela 1 apresenta a distribuição de acertos. O teste de Friedman revelou diferenças significativas entre as situações (p= 0,11).

Com o objetivo de examinar a direção destas diferenças, foi aplicado o teste de Wilcoxon que comparou as situações duas a duas, detectando diferenças significativas entre a Situação 1e a Situação 2 (Z= -2,232; p= 0,026), e entre a Situação 1e a Situação 3 (Z= -2,514; p= 0,012). Isso ocorreu porque o desempenho na Situação 1 (26.25%) foi consideravelmente mais baixo do que na Situação 2 (48.75%) e na Situação 3 (56.25%). Não foram encontradas diferenças significativas entre a Situação 2 e a Situação 3. Esse resultado indica que a explicitação da correspondência um-para-muitos, seja ela acompanhada de representação gráfica (pictográfica ou diagramática) ou dos princípios invariantes, auxilia a resolução de problemas de produto cartesiano.

Tabela 1 - Frequência e porcentagem (em parênteses) de acertos por tipo de problema em cada situação (máximo: 40 acertos).

Situações	**Tipo de problema**		
	Percurso	***Traje***	**Total**
Situação 1	11 (27.5)	10 (25)	21 (26.25)
Situação 2	18 (45)	21 (52.5)	39 (48.75)
Situação 3	25 (62.5)	20 (50)	45 (56.25)
Total	54 (45)	51 (42.5)	-

Nota: Situação 1 (correspondência implícita); Situação 2 (correspondência explícita acompanhada de representação gráfica); Situação 3 (correspondência explicita acompanhada dos princípios invariantes).

O desempenho nos tipos de problema não diferia significativamente, de acordo com o teste de Wilcoxon (Z= -1,134; p= 0,257), visto que o percentual de acertos nos problemas de percurso (45%) foi bastante próximo ao percentual de acertos nos problemas de conjunto (42.5%).

Com a finalidade de comparar o desempenho nos tipos de problema em cada situação, aplicou-se o teste Wilcoxon que não identificou qualquer diferença significativa (Situação 1: Z= -1,000; p= 0,317. Situação 2: Z= -1,732; p= 0,083. Situação 3: Z= -1,890; p= 0,059).

Ao que parece, quer no geral, quer no interior de cada situação, o tipo de problema investigado nesta pesquisa parece não ser fator capaz de influenciar o desempenho, pois este foi semelhante tanto em problemas de percurso como em problemas de trajes.

A opção por separar estes dois tipos de problema e comparar o desempenho entre eles surgiu, dentre outros motivos, pela hipótese de que os problemas de percurso pudessem ser beneficiados quando resolvidos na Situação 2 (explicitação acompanhada de representação gráfica), uma vez que a criança poderia visualizar as entradas e saídas, formando os caminhos. Porém, os resultados demonstraram não haver qualquer diferença entre os dois tipos de problema em qualquer das situações.

No entanto, diferenças entre as situações no interior de cada tipo de problema foram identificadas, como revelado pelo teste de Friedman (Percurso: p= 0,003; e Traje: p= 0,032). O teste de Wilcoxon comparou as situações duas a duas a fim de identificar a direção dessas diferenças, obtendo os níveis de significância que são indicados na Tabela 2, apontando que diferenças significativas no desempenho são encontradas entre as Situações 1 e 2 e as

Situações 1 e 3, tanto para os problemas de percurso como para os problemas de traje.

Tabela 2 - Níveis de significância obtidos através do Wilcoxon.

	S1 vs S2	**S1 vs S3**	**S2 vs S3**
Problema de percurso	Z= -2,070 p= 0,038	Z= -2,640 p= 0,008	Z= -1,823 p= 0,068
Problema de traje	Z= -2,333 p= 0,020	Z= -2,197 p= 0,028	Z= -0,276 p= 0,783

Como pode ser visto na Tabela 1, o percentual de acertos em ambos os problemas na Situação 1 foi significativamente mais baixo do que nas demais situações, indicando um mesmo padrão de resultados nos dois tipos de problema. Portanto, a situação, mais do que o tipo de problema é o fator determinante do desempenho das crianças; uma vez que as situações 2 e 3 favorecem igualmente os dois tipos de problema.

4.1.2 Desempenho no Estudo 2

Com os resultados do Estudo 1, foi possível constatar que o desempenho nos problemas de produto cartesiano varia em função da explicitação do esquema de correspondência um-para-muitos. Esta variação ocorreu no sentido em que há um melhor desempenho nas Situações 2 e 3, cuja correspondência se apresenta explicitamente, do que na Situação 1, na qual estas relações estão implícitas. Diante destes resultados, surge uma nova questão: qual seria o efeito das Situações 2 e 3 sobre a Situação 1, se essas fossem apresentadas primeiramente? Será que a Situação 1 poderia se beneficiar com esta ordem de apresentação das situações?

Com o objetivo de examinar tal questão, o Estudo 2 foi realizado com 20 crianças que resolveram os problemas na seguinte ordem de apresentação das situações: Situação 2, Situação 3 e Situação 1.

Como pode ser visto na Tabela 3, o desempenho no Estudo 2 apresenta resultados bem diferentes do observado no Estudo 1. Comparando-se o desempenho nas três situações, o teste Friedman não identificou diferenças significativas entre elas (p= 0,247), uma vez que o percentual de acertos é alto nas três situações propostas (Situação 1: 75%; Situação 2: 78.75%; Situação 3, 71.25%). Esse resultado contrasta com aquele observado no Estudo 1, em que o desempenho na Situação I era baixo em comparação ao desempenho nas demais situações.

Tabela 3 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos por tipo de problema em cada situação (máximo: 40 acertos).

Situações	**Tipo de problema**		
	Percurso	***Traje***	**Total**
Situação 1	30 (75)	30 (75)	60 (75)
Situação 2	33 (82.5)	30 (75)	63 (78.75)
Situação 3	29 (72.5)	28 (70)	57 (71.25)
Total	92 (76.7)	88 (73.3)	-

Nota: Situação 1 (correspondência implícita); Situação 2 (correspondência explícita acompanhada de representação gráfica); Situação 3 (correspondência explicita acompanhada dos princípios invariantes).

Diferenças entre os tipos de problema também não foram identificadas, como revelou o teste de Wilcoxon (Situação 1: Z= -0,000; p= 1,000; Situação 2:

Z= -1,089; p= 0,276; e Situação 3: Z= -0,447; p= 0,655). Considerando cada tipo de problema separadamente, o teste Friedman mostrou não haver diferenças significativas entre as situações tanto nos problemas de percurso como no de trajes (p=0,472).

Assim, de maneira geral, os dados mostram não haver qualquer diferença significativa entre as situações e os tipos de problema no Estudo 2. Isso ocorreu porque o percentual de acertos é semelhante em ambos os problemas e nas três situações propostas. Ao que parece, a ordem de aplicação do Estudo 2 em que situações de explicitação antecedem a situação implícita favorece o desempenho na situação implícita de maneira que o desempenho nesta situação se aproxima do desempenho nas demais situações.

4.1.3 Comparando o desempenho nos dois estudos

A tabela 4 permite uma visualização geral dos resultados obtidos em relação ao desempenho, facilitando a comparação entre os dois estudos, em função das três situações.

Tabela 4 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos obtidos em cada estudo nas três situações (máximo: 80 acertos).

	Situação 1	**Situação 2**	**Situação 3**
Estudo 1 (S1, S2, S3)	21 (26.25)	39 (48.75)	45 (56.25)
Estudo 2 (S2, S3, S1)	60 (75)	63 (78.75)	57 (71.25)

Nota: Situação 1 (correspondência implícita); Situação 2 (correspondência explícita acompanhada de representação gráfica); Situação 3 (correspondência explicita acompanhada dos princípios invariantes).

Comparando o desempenho dos dois estudos nas três situações propostas, o teste U Mann Whitney encontrou diferenças significativas na Situação 1 (p = 0,003) uma vez que o percentual de acertos no Estudo 1 (26.25%) foi muito baixo quando comparado ao percentual de acertos do Estudo 2 (75%). Também foram identificadas diferenças significativas na Situação 2 (p= 0,039), pois o percentual de acertos no Estudo 2 (78%) foi mais alto do que o percentual de acertos do Estudo 1 (48.75%). Na Situação 3 também observou-se diferenças significativas (p= 0,046), sendo o percentual de acertos no Estudo 2 (71,25%) maior do que no Estudo 1 (56,25%).

O que se pode concluir a partir desses dados é que a ordem de apresentação das situações foi fator que determinou diferenças no padrão de desempenho das crianças. A principal diferença observada foi em relação ao percentual de acertos obtidos na Situação 1 em cada estudo, visto que as crianças que resolveram os problemas usuais de produto cartesiano (Situação 1) antes de resolverem os problemas da Situação 2 e 3 tiveram um desempenho inferior (25%) àquelas que resolveram estes mesmo problemas após as Situações 2 e 3. Com estes dados, observa-se que além dos problemas que apresentam a correspondência um-para-muitos de forma explícita serem mais fáceis que os problemas em que a correspondência está implícita, como foi demonstrado pelo Estudo 1; quando os problemas da Situação 2 e 3 antecedem os problemas da Situação 1, essa ordem favorece o desempenho das crianças de modo geral e beneficia consideravelmente os problemas da Situação 1, cuja correspondência está implícita.

Com objetivo de examinar se havia diferenças no desempenho entre os dois estudos em cada tipo de problema, aplicou-se o teste U Mann Whitney que apontou diferenças significativas tanto nos problemas de percurso (p= 0,016) como nos problemas de trajes (p= 0,017), visto que o percentual de acertos no Estudo 1 é menor do que o percentual de acertos no Estudo 2 para ambos os tipos de problema, como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) de acertos obtidos em cada estudo nos dois tipos de problema (máximo: 120 acertos).

	Problema de percurso	**Problema de traje**
Estudo 1 (S1, S2, S3)	54 (45)	51 (42.5)
Estudo 2 (S2, S3, S1)	92 (76.7)	88 (73.3)

Nota: Situação 1 (correspondência implícita); Situação 2 (correspondência explícita acompanhada de representação gráfica); Situação 3 (correspondência explicita acompanhada dos princípios invariantes).

Mais uma vez, os dados mostram que o tipo de problema parece não ser fator que gere diferenças sobre o desempenho das crianças.

4.2 Resultados relativos às estratégias de resolução

Além da análise do desempenho foram identificadas estratégias de resolução através dos protocolos e das justificativas fornecidas pelas crianças. Estas estratégias foram analisadas conforme descrito no capítulo III relativo ao sistema de análise. Parece interessante examinar as relações entre as estratégias e as situações, bem como as relações entre as estratégias e os tipos de problema. Estes aspectos serão primeiramente apresentados para o Estudo 1 e em seguida para o Estudo 2.

4.2.1 Estratégias no Estudo 1

No Estudo 1 a ordem de apresentação das situações foi: Situação 1 (implícito), Situação 2 (explicitação acompanhada de representação gráfica) e Situação 3 (explicitação acompanhada dos princípios invariantes). A Tabela 6 mostra que nas três situações a maior freqüência encontra-se na estratégia Tipo 3 (formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares) e na estratégia Tipo 5 (solução combinatória por adição repetida).

Tabela 6 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) dos tipos de estratégia em cada situação.

Estratégia	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Total
Tipo 1	16 (20)	9 (11.25)	4 (5)	29 (12.1)
Tipo 2	11 (13.75)	10 (12.5)	9 (11.25)	30 (12.5)
Tipo 3	31 (38.75)	22 (27.5)	22 (27.5)	75 (31.25)
Tipo 4	3 (3.75)	10 (12.5)	13 (16.25)	25 (10.4)
Tipo 5	17 (21.25)	29 (36.25)	27 (33.75)	73 (30.4)
Tipo 6	2 (2.5)	0	5 (6.25)	7 (2.9)

Nota: Tipo 1: adição ou subtração dos números presentes no enunciado; Tipo 2: combinações limitadas ao menor número presente no enunciado; Tipo 3: formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares; Tipo 4: solução combinatória por contagem; Tipo 5: solução combinatória por adição repetida; Tipo 6: solução combinatória por multiplicação.

A estratégia Tipo 3 demonstra o início da compreensão da correspondência um-para-muitos, quando a criança deixa de pensar em termos de pares fixos e começa a utilizar um mesmo elemento na formação de pares diversos. Porém, a criança não chega a estabelecer a totalidade de combinações possíveis, pois, ao que parece, falta sistematização na formação dos pares. Por outro lado, a estratégia Tipo 5 possibilita que a criança através do cálculo aditivo encontre o valor do conjunto produto, levando-a ao acerto do problema. Dentre as estratégias que apresentam solução combinatória, a maior freqüência encontra-se na estratégia Tipo 5 e a menor freqüência foi a estratégia Tipo 6. Provavelmente isso ocorreu porque as crianças já haviam aprendido a adição na escola, no entanto, como anteriormente comentado na descrição dos participantes, essas crianças ainda não tinham sido formalmente ensinadas acerca da multiplicação. As crianças que utilizaram cálculo multiplicativo na resolução dos problemas, ao serem questionadas, afirmaram terem aprendido com os pais ou com um irmão mais velho.

Com o objetivo de analisar se havia diferenças entre as estratégias em cada situação separadamente, aplicou-se o Friedman que apontou diferenças significativas na Situação 1 (p= 0,032), na Situação 2 (p= 0,007) e na Situação 3 (p= 0,06). O teste de Wilcoxon comparou as estratégias duas a duas em cada situação identificando algumas diferenças significativas como mostra as Tabelas 7.

Tabela 7 - Níveis de significância dos tipos de estratégia nas três situações.

	Situação 1	**Situação 2**	**Situação 3**
Tipo 1 vs Tipo 3	-	-	Z= -2,162 p= 0,031
Tipo 1 vs Tipo 6	Z= -1,933 p= 0,053	-	-
Tipo 1 vs Tipo 5	-	-	Z= -2,295 p= 0,022
Tipo 3 vs Tipo 4	Z= -2,507 p= 0,012	-	-
Tipo 3 vs Tipo 6	Z= -2,668 p= 0,008	Z= -2,565 p= 0,01	Z= -2,030 p= 0,042
Tipo 4 vs Tipo 6	-	Z= -2,04 p= 0,041	-
Tipo 5 vs Tipo 6	Z= -2,060 p= 0,039	Z= -2,976 p= 0,003	Z= -2,316 p= 0,021

O Wilcoxon mostra que nas três situações, de maneira geral, as diferenças significativas residem entre a estratégia Tipo 6 (solução combinatória por multiplicação) e as estratégias Tipo 3 (formação de algumas combinações sem sistematização) e Tipo 5 (Solução combinatória por adição), uma vez que a estratégia Tipo 6 foi pouco utilizada nas três situações, enquanto que as estratégias Tipo 3 e Tipo 5 foram mais adotadas pelas crianças.

Na Situação 1, também foram identificadas diferenças entre a estratégia Tipo 3 e a estratégia Tipo 4 (solução combinatória por contagem), pois a última foi muito pouco adotada (3.75%). Observa-se que na Situação 1 grande parte das crianças (72.5%) adotam estratégias elementares de resolução que não possibilitam a formação de todas as combinações possíveis.

Na Situação 2, o Wilcoxon também apontou diferenças entre a Estratégia Tipo 4 (solução combinatória por contagem) e a estratégia Tipo 6 (solução combinatória por multiplicação), visto que a solução por contagem foi mais utilizada pelas crianças. Nesta situação houve um equilíbrio maior entre o uso de estratégias elementares (51.25%) e o uso de estratégias que levam a uma solução combinatória (48.75%).

Na Situação 3, diferenças significativas entre a estratégia Tipo 1 (adição ou subtração dos números presentes no enunciado) e as estratégias Tipo 5 e Tipo 6 foram encontradas pelo teste de Wilcoxon, uma vez que a estratégia Tipo 1 foi pouco adotada (5%) pelas crianças. É importante destacar que a maioria das crianças (56.25%) adota estratégias de solução combinatória quando resolvem os problemas na Situação 3.

Outra análise comparou cada estratégia nas três situações, com o objetivo de examinar se havia diferenças no uso da estratégia entre uma situação e outra. De acordo com o Wilcoxon, há diferenças significativas para a estratégia Tipo 1 (adição ou subtração dos números presentes no enunciado) entre as Situações 1 e 3 (Z= -2,264; p= 0,024), uma vez que a estratégia é mais adotada na Situação 1 (correspondência implícita) do que na Situação 3 (correspondência explícita acompanhada dos princípios invariantes). Também foram identificadas diferenças significativas para a estratégia tipo 4 (solução combinatória por contagem) entre as Situações 1 e 3 (Z= -2,271; p= 0,023), visto que a estratégia é mais adotada por crianças na Situação 3.

A tabela 8 apresenta a distribuição das estratégias nos problemas de percurso e traje em cada situação.

Tabela 8 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) das estratégias por tipo de problema em cada situação.

Estratégias	**Situação 1**		**Situação 2**		**Situação 3**	
	Percurso	**Traje**	**Percurso**	**Traje**	**Percurso**	**Traje**
Tipo 1	9 (22.5)	7 (17.5)	7 (17.5)	2 (5)	2 (5)	2 (5)
Tipo 2	4 (10)	7 (17.5)	3 (7.5)	7 (17.5)	2 (5)	7 (17.5)
Tipo 3	16 (40)	15 (37.5)	12 (30)	10 (25)	11 (27.5)	11 (27.5)
Tipo 4	2 (5)	1 (2.5)	5 (12.5)	5 (12.5)	9 (22.5)	4 (10)
Tipo 5	8 (20)	9 (22.5)	13 (32.5)	16 (40)	13 (32.5)	14 (35)
Tipo 6	1 (2.5)	1 (2.5)	0	0	3 (7.5)	2 (5)

Nota: Tipo 1: adição ou subtração dos números presentes no enunciado; Tipo 2: combinações limitadas ao menor número presente no enunciado; Tipo 3: formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares; Tipo 4: solução combinatória por contagem; Tipo 5: solução combinatória por adição repetida; Tipo 6: solução combinatória por multiplicação.

Comparando as estratégias em cada tipo de problema (percurso e traje) nas três situações, o teste Friedman apontou diferenças na Situação 1 (percurso: p= 0,049), na Situação 2 (percurso: p= 0,039; traje: p= 0,005) e na Situação 3 (percurso: p= 0,042). O teste de Wilcoxon comparou as estratégias duas a duas em cada tipo de problema identificando algumas diferenças, como mostra a tabela abaixo.

Tabela 9 - Níveis de significância das estratégias em cada tipo de problema nas três situações.

	Situação 1		**Situação 2**		**Situação 3**	
	Percurso	**Traje**	**Percurso**	**Traje**	**Percurso**	**Traje**
Tipo 1 vs Tipo 3	-	-	-	-	-	Z= -2,081 p= 0,037
Tipo 1 vs Tipo 5	-	-	-	-	Z= -1,964 p= 0,05	Z= -2,364 p= 0,018
Tipo 2 vs Tipo 3	-	-	-	-	Z= -2,121 p= 0,034	-
Tipo 2 vs Tipo 5	-	-	-	-	Z= -2,251 p= 0,024	-
Tipo 3 vs Tipo 4	Z= -2,333 p= 0,020	Z= -2,622 p= 0,009	-	-	-	-
Tipo 3 vs Tipo 6	Z= -2,758 p= 0,006	Z= -2,622 p= 0,009	Z= -2,460 p= 0,014	Z= -2,271 p= 0,023	-	-
Tipo 4 vs Tipo 5	-	Z= -2,070 p= 0,038	-	Z= -1,960 p= 0,05	-	Z= -2,200 p= 0,028
Tipo 5 vs Tipo 6	-	Z= -2,070 p= 0,038	Z= -2,598 p= 0,009	Z= -2,889 p= 0,004	-	Z= -2,060 p= 0,039

De modo geral, observa-se que as estratégias tendem a se concentrar no Tipo 3 (formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares) e no Tipo 5 (solução combinatória por adição), repetindo o mesmo padrão de resultados apresentado em relação às situações como um todo. Isso indica que os tipos de problema (percurso e traje) não foram fator que determinasse o tipo de estratégia.

Comparando as estratégias entre os problemas de percurso e traje nas três situações separadamente, o Wilcoxon revelou diferenças na Situação 3 para a estratégia tipo 2 (combinações limitadas ao menor número presente no enunciado), visto que esta estratégia é mais adotada quando as crianças resolvem problemas de traje (Z= -2,236; p= 0,025).

4.2.2 Estratégias no Estudo 2

No Estudo 2 a ordem de apresentação das situações foi: Situação 2 (explicitação acompanhada de representação gráfica), Situação 3 (explicitação acompanhada dos princípios invariantes) e Situação 1 (implícito). A Tabela 10 mostra a freqüência e a porcentagem das estratégias em cada situação.

Tabela 10 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) dos tipos de estratégia em cada situação.

Estratégia	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Total
Tipo 1	6 (7.5)	6 (7.5)	8 (10)	20 (8.3)
Tipo 2	8 (10)	1 (1.25)	6 (7.5)	15 (6.25)
Tipo 3	6 (7.5)	10 (12.5)	8 (10)	24 (10)
Tipo 4	9 (11.25)	20 (25)	8 (10)	37 (15.4)
Tipo 5	34 (42.5)	33 (41.25)	37 (46.25)	104 (43.3)
Tipo 6	17 (21.25)	10 (12.5)	13 (16.25)	40 (16.7)

Nota: Tipo 1: adição ou subtração dos números presentes no enunciado; Tipo 2: combinações limitadas ao menor número presente no enunciado; Tipo 3: formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares; Tipo 4: solução combinatória por contagem; Tipo 5: solução combinatória por adição repetida; Tipo 6: solução combinatória por multiplicação.

Pelo apresentado na Tabela 10, as estratégias que mais caracterizam a resolução dos problemas no Estudo 2 foi a Tipo 5 (solução combinatória por adição: 43.3%), seguida da Tipo 6 (solução combinatória por multiplicação: 16.7%) e da solução combinatória por contagem (15.4%). Nota-se, portanto, que as estratégias que apresentam solução combinatória de modo geral são as mais freqüentes nas três situações.

Com o objetivo de analisar se havia diferenças entre as estratégias em cada situação separadamente, aplicou-se o Friedman que apontou diferenças significativas na Situação 1 (p= 0,014), na Situação 2 (p= 0,000) e na Situação 3 (p= 0,004). O teste de Wilcoxon comparou as estratégias duas a duas em cada situação identificando algumas diferenças significativas como apresentado nas tabelas abaixo.

Tabela 11 - Níveis de significância dos tipos de estratégia nas três situações.

	Situação 1	**Situação 2**	**Situação 3**
Tipo 1 vs Tipo 5	Z= -2,278 p= 0,023	Z= -2,278 p= 0,023	Z= -2,022 p= 0,043
Tipo 2 vs Tipo 4	-	Z= -2,136 p= 0,033	-
Tipo 2 vs Tipo 5	Z= -2,136 p= 0,033	Z= -2,278 p= 0,023	Z= -2,423 p= 0,015
Tipo 3 vs Tipo 5	Z= -2,278 p= 0,023	Z= -2,137 p= 0,033	Z= -2,302 p= 0,021
Tipo 4 vs Tipo 5	Z= -2,137 p= 0,033	-	Z= -2,587 p= 0,010
Tipo 5 vs Tipo 6	-	Z= -2,261 p= 0,024	Z= -2,080 p= 0,038

Seguindo a tendência geral, nas três situações observam-se diferenças significativas entre a estratégia de solução combinatória por adição repetida (Tipo 5) que é a mais freqüentemente adotada pelas crianças, e as estratégias, sobretudo, que não apresentam solução combinatória (Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3). Ao que parece, a explicitação da correspondência um-para-muitos nas situações 2 e 3 que neste estudo são primeiramente apresentadas a criança, favorece a escolha de estratégias de resolução mais sofisticadas que se mantêm na Situação 1 (correspondência implícita). É possível que a compreensão dos princípios que regem as relações combinatórias tenha auxiliado na adoção de estratégias mais eficazes.

Além das situações, outro fator investigado neste estudo foram os tipos de problema. Assim, a Tabela 12 apresenta a distribuição das estratégias por tipo de problema em cada situação.

Tabela 12 - Freqüência e porcentagem (em parênteses) das estratégia por tipo de problema em cada situação.

Estratégias	**Situação 1**		**Situação 2**		**Situação 3**	
	Percurso	**Traje**	**Percurso**	**Traje**	**Percurso**	**Traje**
Tipo 1	4 (10)	2 (5)	3 (7.5)	3 (7.5)	4 (10)	4 (10)
Tipo 2	2 (5)	6 (15)	0	1 (4)	2 (5)	4 (10)
Tipo 3	4 (10)	2 (5)	4 (10)	6 (15)	4 (10)	4 (10)
Tipo 4	4 (10)	5 (12.5)	13 (32.5)	7 (17.5)	6 (15)	2 (5)
Tipo 5	18 (45)	16 (40)	16 (40)	17 (42.5)	18 (45)	19 (47.5)
Tipo 6	8 (20)	9 (22.5)	4 (10)	6 (15)	6 (15)	7 (17.5)

Nota: Tipo 1: adição ou subtração dos números presentes no enunciado; Tipo 2: combinações limitadas ao menor número presente no enunciado; Tipo 3: formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares; Tipo 4: solução combinatória por contagem; Tipo 5: solução combinatória por adição repetida; Tipo 6: solução combinatória por multiplicação.

Com a finalidade de examinar se havia diferenças entre as estratégias em cada tipo de problema, aplicou-se o teste Friedman em cada situação separadamente. A análise estatística revelou diferenças significativas para a Situação 1 (percurso: p= 0,023; traje: p= 0,009), a Situação 2 (percurso: p= 0,000; traje: p= 0,003) e a Situação 3 (percurso: p= 0,004; traje: p= 0,003). O Wilcoxon analisou as estratégias duas a duas e revelou algumas diferenças como apresentado na tabela a seguir.

Tabela 13 - Níveis de significância das estratégias em cada tipo de problema nas três situações.

	Situação 1		Situação 2		Situação 3	
	Percurso	**Traje**	**Percurso**	**Traje**	**Percurso**	**Traje**
Tipo 1 vs Tipo 5	Z= -2,111 p= 0,035	Z= -2,299 p= 0,022	Z= -2,345 p= 0,019	Z= -2,422 p= 0,015	Z= -2,003 p= 0,045	Z= -2,103 p= 0,035
Tipo 2 vs Tipo 4	-	-	Z= -2,919 p= 0,004	-	-	-
Tipo 2 vs Tipo 5	Z= -2,530 p= 0,011	-	Z= -3,176 p= 0,001	Z= -2,984 p= 0,003	Z= -2,484 p= 0,013	Z= -2,103 p= 0,035
Tipo 3 vs Tipo 5	Z= -2,111 p= 0,035	Z= -2,299 p= 0,022	-	-	Z= -2,003 p= 0,045	Z= -2,103 p= 0,035
Tipo 4 vs Tipo 5	Z= -2,111 p= 0,035	-	-	Z= -2,060 p= 0,039	Z= -2,107 p= 0,035	Z= -2,885 p= 0,004

De modo geral, observa-se que as estratégias tendem a se concentrar na Tipo 5 (solução combinatória por adição repetida), na Tipo 6 (solução combinatória por multiplicação) e na Tipo 4 (solução combinatória por contagem), repetindo o mesmo padrão de resultados apresentado em relação ás situações como um todo. Isso indica que o uso das estratégias não é determinado pelo tipo de problema.

Comparando as estratégias nos problemas de percurso e traje nas três situações, o Wilcoxon revelou diferenças na Situação 2 para a estratégia Tipo 4 (solução combinatória por contagem), visto que a estratégia é mais adotada quando as crianças resolvem problemas de percurso (Z= -2,646; p= 0,008). Como a Situação 2 oferece uma representação gráfica do problema, parece que os problemas de percurso se beneficiam mais com o uso da estratégia de contagem, uma vez que através da representação é possível contar os caminhos percorridos. Isso não é tão evidente quando os problemas são de trajes, pois que talvez sejam visualmente menos evidente dos que os caminhos.

Os resultados relativos ao desempenho e ás estratégias de resolução indicam, portanto, que no Estudo 1 o desempenho da Situação 1 foi consideravelmente mais baixo do que na Situação 2 e na Situação 3, que apresentaram índices de acertos semelhantes. Esse resultado confirma a hipótese inicial do presente estudo e indica que a explicitação da correspondência um-para-muitos, seja ela acompanhada de representação gráfica ou dos princípios invariantes, auxilia a resolução de problemas de produto cartesiano. Observou-se também, que a situação, mais do que o tipo de problema (percurso e traje) é o fator determinante do desempenho das crianças; uma vez que as situações 2 e 3 favorecem igualmente os dois tipos de problema. No que concerne às estratégias de resolução, a solução combinatória por adição repetida (Tipo 5) e a formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares (Tipo 3) foram os procedimentos mais adotados para resolver os problemas nas três situações. As estratégias mais elementares, àquelas que não permitem uma solução combinatória, foram mais frequentemente adotadas na Situação 1, cuja correspondência um-para-muitos está implícita nos problemas. O tipo de problema investigado nesta pesquisa parece não ser fator capaz de influenciar o uso de estratégias pelas crianças, pois as estratégias adotadas nos problemas de percurso são semelhantes às estratégias adotadas nos problemas de trajes.

Os dados mostram que, no Estudo 2, o percentual de acertos é alto em ambos os problemas e nas três situações propostas. Esse resultado contrasta com aquele observado no Estudo 1, em que o desempenho na Situação I era baixo em comparação ao desempenho nas demais situações. Ao que parece, a ordem de aplicação em que situações de explicitação antecedem a situação implícita favorece o desempenho na situação implícita, de maneira que o desempenho nesta situação se aproxima do desempenho nas demais situações. Ou seja, as crianças se beneficiam com a explicitação da correspondência um-para-muitos e conseguem generalizar essa compreensão para os problemas em que tais relações estão implícitas. Acompanhando os resultados de desempenho, no Estudo 2, as crianças adotam mais frequentemente estratégias sofisticadas de resolução como a solução combinatória por contagem (Tipo 4), a solução combinatória por adição repetida (Tipo 5) e a solução combinatória por multiplicação (Tipo 6). Mais uma vez nota-se que o tipo de problema (percurso e traje) não é fator determinante no uso das estratégias.

Em resumo, dois fatores se destacam em relação aos resultados obtidos. Primeiro, o efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução dos problemas de produto cartesiano, no sentido de que os problemas são mais facilmente resolvidos quando as relações estão explícitas. Esse efeito se traduz tanto no desempenho como nas estratégias adotadas pelas crianças. Segundo, o efeito da ordem de apresentação das situações, visto que apresentar as situações de explicitação antes da situação implícita favorece o desempenho como um todo, e mais acentuadamente o desempenho na situação implícita que passa a se assemelhar ao desempenho nas demais situações. Isso indica que além dos problemas que explicitam a correspondência um-para-muitos serem mais fáceis, eles podem beneficiar o desempenho das crianças em problemas mais difíceis se foram apresentados antes destes. O efeito da seqüência explícito-implícito também pode ser observado no uso de estratégias mais elaboradas que permitem a solução combinatória, ou seja, a sistematização de todos os pares possíveis de combinação.

Capítulo V

Conclusões e discussão final

Quando se revisa a literatura acerca da resolução de problemas de estrutura multiplicativa, em particular problemas de produto cartesiano, ou como são chamados por Vergnaud problemas de produto de medidas, observa-se um maior interesse dos pesquisadores em investigar adolescentes e adultos do que crianças, uma vez que este tipo de problema frequentemente aparece como mais difícil do que outros problemas multiplicativos.

A dificuldade atribuída aos problemas de produto cartesiano pode ser justificada por diferentes aspectos. Por exemplo, Vergnaud (1998) assinala que problemas de produto de medidas são considerados difíceis por comportarem uma relação que envolve tipicamente três variáveis, sendo a terceira variável um produto das duas primeiras. Eizenberg e Zaslavsky (2002) afirmam que problemas de produto cartesiano se diferem de outros problemas multiplicativos tais como problemas de isomorfismo de medidas, por não apresentarem estratégias evidentes de solução; além disso, é também considerado difícil verificar se a resposta do problema está, de fato, correta, pois existem diferentes modos de solução que resultam em diferentes respostas aparentemente convincentes. Além desses aspectos, Nunes e Bryant (1997) consideram outro fator também importante para a resolução desses problemas: a compreensão por parte da criança da necessidade de utilizar o esquema de correspondência um-para-muitos que, especificamente nesta situação, encontra-se implícito. Segundo Nunes e Bryant, diferentemente de outros problemas multiplicativos, nos problemas de produto cartesiano a correspondência um-para-muitos não está apresentada de forma clara, cabendo a própria criança construí-la para solucionar o problema.

Os estudos conduzidos com crianças têm investigado, de modo geral, o nível de dificuldade apresentado pelos problemas e as estratégias de resolução adotadas, fornecendo resultados interessantes sobre a compreensão progressiva das relações que marcam a estrutura dos problemas multiplicativos. Contudo, também é possível identificar questões mais específicas que têm sido alvo de interesse dos pesquisadores da área. Alguns estudos analisam as estratégias de resolução adotadas por crianças em função de diversos aspectos como idade, escolaridade, desempenho em matemática e conhecimento formal sobre combinatória (e.g. MORO; SOARES, 2006a; 2006b; PESSOA; BORBA 2007; 2008; TAXA AMARO, 2006); outros investigam a compreensão de crianças acerca dos princípios que embasam o produto cartesiano (e.g., MEKHMANDAROV, 2000); outros, ainda, comparam o desempenho das crianças em diversos problemas multiplicativos, entre eles, problemas de produto de medidas e problemas de isomorfismo de medidas (e.g. BRYANT e cols., 1992; PESSOA; BORBA 2007; 2008; SELVA e cols., 2008). Há estudos que voltam seu interesse para aspectos como o papel desempenhado pelos suportes de representação (BATISTA, 2002), e ainda, aqueles que utilizam material concreto como um recurso facilitador para resolução dos problemas (ENGLISH, 1991; 1992) ou que investigam se estratégias e procedimentos utilizados em problemas de produto cartesiano simples poderiam ser generalizados para problemas de produto cartesiano mais complexos (ENGLISH, 1993).

Observa-se, portanto, uma carência de estudos que examinem as relações que marcam a natureza dos problemas de produto cartesiano, assim como, dos esquemas organizadores da cognição que estão subjacentes à elaboração dessas relações, tais como o esquema de correspondência um-para-muitos. O trabalho desenvolvido por English (1991; 1992) parece ter sido o que melhor explorou as relações um-para-muitos, embora este não tenha sido o foco e o objetivo do estudo por ela conduzido. Segundo nossa interpretação, a situação de vestir ursos de brinquedo com diferentes combinações de *shorts* e camisetas, e em seguida, colocá-los em fileira questionando-se as combinações de trajes realizadas, favorece a compreensão da criança acerca das relações implícitas, uma vez que é possível visualizar as diversas correspondências feitas entre *shorts* e camisetas.

Tomando como fundamentação a teoria de Vergnaud (1991; 1998) a respeito da formação de conceitos matemáticos é possível pensar que a relação um-para-muitos é um dos invariantes da combinatória. Nota-se na literatura que as pesquisas têm se voltado mais para as situações e para as representações deste conceito do que para seus invariantes. Supondo, como trouxe Nunes e Bryant (1997), que a maior dificuldade dos problemas de produto cartesiano reside na relação um-para-muitos, então as pesquisas que visem facilitar a resolução de problemas deste tipo poderiam focalizar os invariantes mais do que as representações e as situações.

Em vista dessas considerações, o presente estudo teve por objetivo examinar o papel desempenhado pela explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano direto (multiplicação). Dois fatores foram considerados para exame e análise dos dados nesta pesquisa: tipos distintos de situação (correspondência implícita, correspondência explícita acompanhada de representação gráfica e correspondência explícita acompanhada dos princípios invariantes) e tipos de problema (percurso e traje). O efeito desses fatores foi analisado tanto em relação ao desempenho quanto em relação às estratégias que as crianças adotavam para resolver os problemas.

Este capítulo final discute os principais resultados obtidos considerando o desempenho e as estratégias de resolução. Apresentam-se, ainda, as contribuições e as implicações educacionais dos resultados obtidos, além dos limites do estudo. Por fim, serão feitas algumas sugestões para pesquisas futuras que poderão contribuir para este campo de investigação.

5.1 Principais resultados e conclusões

5.1.1 Considerações acerca do desempenho

Os dados mostraram uma melhor resolução por parte das crianças nos problemas em que as relações um-para-muitos estavam apresentadas de forma explícita, fosse acompanhada ou não de representações gráficas. Nos problemas usuais de produto cartesiano em que essas relações eram implícitas, as crianças tiveram baixo desempenho, conforme tradicionalmente se observa nos estudos na área. Esses dados indicam, portanto, que, de fato, a explicitação da correspondência um-para-muitos auxilia na resolução de problemas de produto cartesiano, sendo um fator importante no desempenho destes problemas.

Como mencionado, as idéias de Vergnaud a respeito da formação de conceitos matemáticos podem esclarecer melhor o que ocorre com o desempenho das crianças quando os problemas são apresentados com ou sem explicitação da correspondência um-para-muitos. Segundo Vergnaud (1998), três instâncias estão envolvidas na formação de um conceito, sendo uma delas os invariantes. Supondo que a correspondência um-para-muitos é um dos invariantes do conceito de combinatória, parece ser relevante tornar este princípio explícito para a criança em problemas que envolvem este conceito, como os de produto cartesiano. Torná-los explícitos, possibilita que a criança compreenda e estabeleça relações que até então não eram por ela consideradas.

É importante comentar que a capacidade da criança em compreender aspectos relativos à combinatória também foi investigada por Mekhmandarov (2000). Através de tarefas de manipulação, o autor observou que grande parte das crianças mostrou compreender ou ter compreendido (durante a tarefa) os princípios que embasam o produto cartesiano.

No presente estudo houve duas formas de explicitar as propriedades da combinatória: uma em que a correspondência um-para-muitos era acompanhada de uma representação gráfica dos referentes do problema; e outra em que a correspondência um-para-muitos era acompanhada de outros princípios invariantes do conceito. Quando se compara o desempenho nas duas situações em que a correspondência um-para-muitos era explicitamente apresentada, verifica-se que não há diferenças entre elas. Isto quer dizer que os problemas de combinatória são favorecidos pela explicitação das relações um-para-muitos, independentemente desta vir acompanhada de representação gráfica ou dos princípios invariantes. Parece que a explicitação da correspondência por si só já seria suficiente para que a criança compreendesse o raciocínio envolvido na resolução dos problemas. Como o presente estudo teve um caráter exploratório, não foi possível examinar esta questão de forma mais específica, podendo ser esse um tema para investigações futuras, como será discutido adiante.

Além das situações, outro fator examinado foi o desempenho das crianças em função do tipo de problema (percurso e traje). Os dados mostraram que o desempenho era semelhante nos dois tipos de problema (tanto no geral como em cada situação). A idéia inicial foi de que problemas de percurso pudessem ser beneficiados quando a relação um-para-muitos era acompanhada de representação gráfica, uma vez que as crianças teriam o apoio da representação para formar e contabilizar os diferentes caminhos. Pensou-se que esta visualização não seria tão clara em relação aos trajes, pois estes estariam representados pelas camisetas e *shorts,* e a combinação desses itens não seria tão clara quanto nos problemas de percurso. No entanto, como mencionado, a representação gráfica, fosse diagramática ou pictográfica, não influenciou o desempenho das crianças. O fator determinante foram as situações, ou seja, o fato das relações um-para-muitos estarem explícitas ou implícitas.

Diante do desempenho favorável das crianças ao resolverem situações que explicitam as relações um-para-muitos, o Estudo 2 examinou o efeito das situações explícitas sobre a situação implícita, encontrando resultados bastante interessantes.

Quando as crianças resolveram os problemas em que as relações um-para-muitos eram implícitas (Situação 1) depois de resolver problemas em situação em que tais relações eram explícitas (Situação 2 e 3), o desempenho das crianças se tornou equivalente nas três situações, pois a situação implícita (menos favorável ao desempenho) passou a ter um percentual de acertos alto. Isso indica que a explicitação da correspondência um-para-muitos permitiu que a criança compreendesse essas relações mesmo quando implícitas, como ocorre na Situação 1. Desse modo, observa-se um efeito das situações explícitas sobre a situação implícita. Este dado sugere implicações educacionais que serão abordadas ainda neste capítulo.

Comparando o desempenho nos dois estudos, nota-se que no Estudo 2 (explícito-implícito) o desempenho na Situação 1 foi bem mais expressivo do que no Estudo 1 (implícito-explícito) o que leva a crer que, de fato, a explicitação nas Situações 2 e 3 pode ser aplicada e generalizada para a Situação 1. Uma possível explicação para isso é que, ao compreender a relação um-para-muitos, a criança parece ser capaz de aplicar esta compreensão a problemas em que estas relações não são explicitadas. Os resultados relativos às estratégias de resolução adotadas permitem um esclarecimento maior a respeito desta questão.

Um aspecto importante em relação ao desempenho é o fato de se observar que crianças pequenas (7 e 8 anos) podem expressar o raciocínio combinatório, seguindo um método sistemático de combinação que contempla todos os pares. Verifica-se, portanto, que diferentemente do que pensava

Piaget, crianças menores podem encontrar um método capaz de realizar as combinações de forma exaustiva, especialmente quando se esclarece o esquema operacional envolvido na resolução desses problemas. Assim, tanto no presente estudo como nos estudos conduzidos por English foi possível constatar resultados mais otimistas a respeito do raciocínio combinatório em crianças.

Uma possível explicação para os resultados desfavoráveis obtidos por Piaget é que suas tarefas de combinação de corpos químicos eram bastante complexas, cuja resolução exigia pensamento sofisticado próprio das operações formais. Piaget não tinha o propósito de tornar essas situações de combinação mais fáceis para que crianças de 7-8 anos pudessem solucioná-las. Suas tarefas tinham por objetivo mapear ou descrever as diferentes formas de raciocinar dos indivíduos em diferentes momentos de seu desenvolvimento: formas mais simples ou equivocadas de raciocinar e formas mais sofisticadas. Por isso, suas tarefas eram, geralmente, tarefas complexas que poderiam ser satisfatoriamente resolvidas nas operações formais. Assim, nota-se uma diferença de ordem metodológica entre os estudos de Piaget, o presente estudo e o de English, que tiveram por objetivo explorar situações que facilitassem o desempenho. No presente estudo as situações facilitadoras eram aquelas que explicitavam os princípios envolvidos na resolução de problemas de produto cartesiano.

Já a tarefa proposta por English, bem como as tarefas do presente estudo, eram mais fáceis quando comparadas às tarefas de Piaget. A tarefa de English de vestir bonecos com diferentes trajes organizando-os em fileira deixava clara a relação um-para-muitos, embora sem ser proposital, uma vez que a criança visualizava as diferentes correspondências feitas entre *shorts* e camisetas. Entretanto, ao que parece, na tarefa proposta por English a relação um-para-muitos não está tão clara como nas situações 2 e 3 apresentadas neste estudo, que explicitam no enunciado do problema tal relação. Comparando os dois estudos, observa-se que a presente investigação, realizada com crianças de 7 e 8 anos, obteve um desempenho mais expressivo que o de English com crianças de 8 e 9 anos. Esse resultado é bem interessante e de certo modo surpreendente porque no estudo de English utilizou-se material concreto e no presente estudo apenas a explanação verbal ou verbal acompanhada de representação gráfica. Mesmo com idades inferiores e sem o material concreto, as crianças foram muito bem sucedidas quando as relações um-para-muitos eram explicitadas. Outro aspecto interessante é que English conseguiu bons resultados numa tarefa facilitadora, enquanto que neste estudo bons resultados foram obtidos tanto na situação facilitadora como na situação clássica.

Assim, os dados mostram que é possível ter ainda mais sucesso do que os obtidos por English quando se utiliza o papel da explicitação das relações e dos aspectos relevantes da combinatória e do desenvolvimento deste raciocínio. Tanto este estudo como o de English mostraram ser possível melhorar o desempenho das crianças em problemas de combinatória. Desse modo, parece que problemas de produto cartesiano podem ser ensinados desde cedo nas escolas, pois mais precocemente do que indicado nos estudos de Piaget (7 anos, por exemplo), as crianças são capazes de adquirir conhecimento conceitual de ordem combinatória.

5.1.2 Considerações acerca das estratégias

A partir do procedimento de resolução adotado pelas crianças foi possível identificar o uso de seis estratégias diferentes que se dividiam em dois grupos: o primeiro, composto por procedimentos menos elaborados que não conduziam à resposta correta do problema; e o segundo, formado por estratégias que apresentavam soluções combinatórias que levavam à resposta correta.

As estratégias do primeiro grupo, embora levem ao erro, indicam algum desenvolvimento. A “estratégia inadequada” demonstra uma falta de compreensão por parte da criança do objetivo e das relações envolvidas nos problemas de produto cartesiano. Nesta primeira estratégia, a criança não chega a estabelecer nenhuma combinação, ela simplesmente soma os valores presentes no enunciado e oferece este resultado como resposta. A segunda estratégia “combinação por pares fixos” revela um entendimento maior sobre o problema, visto que a criança compreende e constrói algumas combinações, porém acredita que os pares são fixos e não podem ser desfeitos para construção de um novo par. A terceira estratégia “combinação flexível dos pares” já se aproxima do raciocínio combinatório, pois expressa a formação de pares flexíveis, o que evidencia uma idéia inicial de correspondência um-para-muitos. Isso mostra que neste pensamento, mesmo não resultando na resposta correta, algumas propriedades invariantes já são entendidas e outras não, como a necessidade de um método sistemático para formação dos pares que não é considerado nesta estratégia.

As estratégias que levam ao acerto também variam na forma de contagem das combinações que vai desde contagem simples, adição repetida, até o uso da multiplicação. Este sistema indica uma progressão, um desenvolvimento na aquisição do raciocínio combinatório. As crianças que utilizam a "contagem simples" geralmente produzem todas as combinações possíveis, como em uma árvore de possibilidades, para assim contar os pares combinados. São casos que parecem caracterizar a presença do raciocínio combinatório no plano das operações concretas, pelo apoio marcante da árvore de possibilidades como ferramenta para resolução dos problemas. Com relação às estratégias de "adição repetida" e "multiplicação" é possível observar uma maior sofisticação, sobretudo quanto à multiplicação; visto que o raciocínio multiplicativo envolve um tipo de pensamento diferente do raciocínio aditivo, por isso, a multiplicação não pode ser comparada a uma forma mais rápida de fazer adições repetidas. (Kamii; Housman, 2002).

O desenvolvimento do raciocínio combinatório observado neste estudo também se assemelha à progressão apresentada por Moro e Soares (2006a; 2006b) e por English (1991; 1992), porém possui algumas diferenças.

Em relação a Moro e Soares (2006a; 2006b) nota-se semelhante progressão do raciocínio combinatório com procedimentos de resolução que vão desde soluções sem qualquer sinal de raciocínio combinatório, passando por estratégias transitórias com obtenção de algumas combinações, até soluções que trazem a presença desse raciocínio. No entanto, apesar de observar estratégias de resolução semelhantes àquelas do presente estudo, a investigação de Moro e Soares não traz uma diferenciação dos distintos raciocínios (por exemplo, aditivo e multiplicativo) presentes nas soluções dos problemas. As autoras descreveram uma única estratégia de solução combinatória e agruparam todos os casos nesta categoria. É interessante ressaltar que somente alunos do 5º ano expressaram soluções combinatórias e, mesmo assim, em número pequeno (quatro participantes), fato este que pode ter contribuído para o menor detalhamento do raciocínio empregado na estratégia de solução combinatória. A respeito desse aspecto, não se pode deixar de considerar o quanto diferenças entre as tarefas marcam os resultados, pois a tarefa proposta por Moro e Soares era mais complexa, contemplando duas ou três variáveis com valores altos e baixos e ainda, contendo valores distractores. Além disso, somente dados de solução escrita foram analisados e interpretados, diferentemente da presente pesquisa que teve o dado verbal da justificativa do sujeito, o que possibilitou a compreensão, em plano metacognitivo, do raciocínio subjacente às combinações produzidas.

De modo semelhante, English (1991; 1992) encontrou uma progressiva sofisticação das estratégias adotadas pelas crianças, observando que crianças mais novas (4 e 5 anos) buscavam resolver o problema por tentativa e erro, enquanto que crianças mais velhas (8 e 9 anos) demonstravam uma tendência maior para utilizar estratégias de solução combinatória. A autora também não esclarece que tipo de raciocínio (aditivo ou multiplicativo) é utilizado na estratégia mais sofisticada, entretanto, descreve esta estratégia como a escolha de um item constante que, selecionado repetidas vezes, forma todas as combinações possíveis, em seguida um novo item constante é selecionado e o processo é repetido até que todos os itens tenham se esgotado. Diante de tal descrição e considerando o método adotado, é possível pensar que as crianças que utilizaram essa estratégia solucionaram o problema através da contagem simples das combinações, realizada por meio da contagem dos ursos de brinquedo, estando o raciocínio multiplicativo pouco adotado na situação.

Nesse ponto, é importante destacar que, as crianças que solucionam problemas de combinatória através da contagem ou da adição repetida, embora tenham demonstrado raciocínio de ordem combinatória, por compreenderem as relações um-para-muitos, estão trabalhando no plano das operações concretas, necessitando muitas vezes do apoio do material manipulativo ou do diagrama cartesiano. Assim, a obtenção de soluções combinatórias por crianças pequenas com auxilio desses materiais (material concreto, árvore de possibilidades, diagrama cartesiano), parece não significar raciocínio combinatório em planos mais adiantados como aqueles descritos por Piaget e avaliados em suas tarefas. É preciso que as crianças compreendam o princípio multiplicativo por trás deste tipo de problema para que avancem para o plano formal das operações.

Os dados relativos às estratégias mostraram, ainda, que no presente estudo o uso de estratégias variava apenas em relação às situações, sendo observado que as estratégias que levavam ao acerto eram mais usadas nas situações em que as relações um-para-muitos eram explícitas do que na situação em que as relações eram implícitas (ver resultados do Estudo 1). Outro aspecto observado é que o uso de estratégias mais elaboradas só aparecia de forma mais expressiva na situação implícita quando esta era apresentada após as situações explícitas terem sido aplicadas (ver resultados do Estudo 2). Isso significa que quando se explicita as relações um-para-muitos, as crianças conseguem adotar procedimentos mais próximos do raciocínio combinatório, seja em situações explícitas, seja em situações implícitas, quando apresentadas após as explícitas.

Este sistema de análise mostra que apesar do cálculo multiplicativo ser o mais apropriado para resolução desses problemas, ele foi o menos utilizado. Isso porque, como mencionado, as crianças investigadas não haviam sido formalmente instruídas sobre a multiplicação, preferindo estratégias aditivas. Porém essas estratégias evidenciavam propriedades do raciocínio combinatório como a correspondência um-para-muitos. O uso da estratégia multiplicativa foi mais fortemente observado no Estudo 2 quando esta estratégia foi usada tanto nas situações explícitas como nas implícitas, justificando-se assim o maior número da estratégia 6 no Estudo 2 do que no Estudo 1. Como no Estudo 2 a situação 1 se beneficia do fato de ser realizada após a apresentação da situação 2 e da situação 3, observa-se maior adoção de estratégias elaboradas e menor uso de estratégias elementares. Os dados mostram, portanto, que a explicitação da correspondência um-para-muitos também favorece o uso de estratégias mais sofisticadas.

5.2 Contribuições do estudo, suas limitações e pesquisas futuras

O presente estudo traz algumas contribuições para esta área de conhecimento, apontando o papel importante desempenhado pela explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano. A explicitação da correspondência beneficia não apenas o desempenho como também favorece o uso de estratégias mais apropriadas. Outra contribuição refere-se ao fato de chamar atenção sobre a importância da sequência explícito-implícito na apresentação das situações. Embora os problemas nas situações explícitas sejam mais fáceis para as crianças, há diferenças de desempenho e uso de estratégias na situação implícita (Situação 1) quando esta é apresentada após as Situações 2 e 3. Isso sugere que a sequência de aplicação das situações seja considerada tanto por pesquisadores como por educadores. Como comentado anteriormente, não foram identificadas diferenças entre a Situação 2 e a Situação 3, porém, é preciso atentar que estas situações abordaram aspectos diferentes, pois na Situação 2 a correspondência um-para-muitos era acompanhada de uma representação dos referentes do problema e na Situação 3 a correspondência um-para-muitos era acompanhada dos demais princípios invariantes. Sendo assim, três aspectos estavam envolvidos nestas situações: a explicitação da correspondência um-para-muitos, a representação gráfica, e a indicação dos princípios que regem o raciocínio combinatório. Qual deles, de fato, foi responsável pela melhora no desempenho das crianças? Será que só a explicitação da correspondência um-para-muitos é suficiente para a resolução adequada dos problemas? Qual desses aspectos exerceria um beneficio maior sobre os problemas que apresentam as relações implícitas?

Com o arranjo metodológico do presente estudo não se pode responder a tais questões. Pesquisas futuras poderiam explorar mais especificamente o papel de uma situação explícita sobre a implícita, uma vez que o presente estudo não teve essa possibilidade. Parece interessante examinar o efeito de cada situação separadamente, para entender qual fator é mais determinante sobre o desempenho nos problemas de produto cartesiano. Poderia ser desenvolvido um estudo em que grupos diferentes de crianças resolveriam situações explícitas seguidas da situação implícita. Cada grupo teria na situação explícita um dos aspectos evidenciados, e assim, seria possível identificar qual dos aspectos mais contribui para o raciocínio combinatório nas crianças.

Como não foram investigadas crianças em diferentes faixas etárias, não foi possível verificar, por exemplo, se a explicitação das relações um-para-muitos seria algo importante na resolução de problemas como estes em crianças mais velhas que já apresentassem um maior domínio dos conceitos matemáticos investigados. Como esta pesquisa investigou crianças que não tinham conhecimento formal acerca da multiplicação, seria interessante examinar crianças mais velhas (4º e 5º ano) que pudessem ter um desempenho mais elaborado nesses problemas. Assim, um estudo poderia ser conduzido com problemas mais complexos envolvendo duas ou três variáveis, com valores mais altos que o deste estudo, a fim de examinar o efeito dessas situações em crianças mais velhas que tem maior conhecimento do raciocínio multiplicativo, porém, muitas vezes não reconhecem os problemas de produto cartesiano como um problema de estrutura multiplicativa. Um estudo assim seria importante para um melhor entendimento acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório em crianças.

Outro aspecto que merece ser comentado é que este estudo investigou apenas problemas de produto cartesiano direto (multiplicação). Problemas de produto cartesiano inverso (divisão) são considerados ainda mais difíceis de serem resolvidos por crianças do que os multiplicativos. Isto ocorre porque além das relações um-para-muitos estarem implícitas, nos problemas inversos é dado à criança o valor do conjunto produto e de um dos conjuntos elementares, cabendo a esta compreender a relação inversa envolvida na resolução do problema. Seria importante examinar se a explicitação das relações um-para-muitos teria o mesmo efeito sobre o desempenho e as estratégias nos problemas inversos, levando a criança a um melhor desempenho e uso de estratégias mais elaboradas.

Ainda, poderia ser desenvolvido um estudo de intervenção sobre problemas de produto de medidas em que combinasse diferentes situações facilitadoras, por exemplo, situações que enfocam a natureza prática do conceito (uso de material concreto, de várias representações, do diagrama cartesiano) e situações que enfocam a natureza teórica (explicitação dos princípios invariantes), a fim de estudar um meio de desenvolver uma proposta didática para o ensino de problemas de combinatória.

5.3 Implicações educacionais

Os livros e a sala de aula apresentam os problemas de produto de medidas como mais um problema de multiplicação ou de divisão, sem atentar para as características de raciocínio necessárias para resolver tais problemas e que diferem da forma de pensar nos problemas de isomorfismo de medidas, apesar de utilizarem as mesmas operações aritméticas para sua resolução. Os professores precisam saber que a correspondência um-para-muitos e os princípios que embasam o raciocínio combinatório são importantes ferramentas para compreensão e resolução deste tipo de problema. Como esse estudo mostrou, problemas que apresentam as relações um-para-muitos explícitas são mais facilmente resolvidos pelas crianças, e, ainda, que é possível pensar em termos de uma seqüência de apresentação desses problemas em diferentes situações, seguindo a ordem do mais fácil para o mais difícil. Portanto, os professores devem considerar estas questões em suas salas de aula. O fato do presente trabalho apontar que crianças pequenas podem mostrar o início do raciocínio combinatório faz com que se pense na possibilidade de ensinar esses problemas antes do 2º ano. Entretanto, como falado anteriormente, este ensino deve vir acompanhado de esclarecimentos acerca dos princípios e não focalizado no uso das operações.

Referências Bibliográficas

BATISTA, A. M. S. B. *A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas*. Dissertação de mestrado não publicada. Mestrado em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. Recife- PE, 2002.

BRYANT, P., MORGADO, L.; NUNES, T. Children's understanding of multiplication. Em: *Proceedings of the Annual Conference of the Psychology of Mathematics Education.* Tokyo, 1992.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de psicologia*, v.9, n.1, p.145-155, 2004.

EIZENBERG, M. M.; ZASLAVSKY, O. Undergraduate student's verification strategies of solutions to combinatorial problems. Em: *Proceedings of the 26th Annual Conference of the PME*. Norwich: PME, v.2, p. 321-328, 2002.

EIZENBERG, M. M.; ZASLAVSKY, O. Cooperative problem solving in combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 22, p. 389-403, 2003.

ENGLISH, L. Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, v.22, p.451-474, 1991.

ENGLISH, L. Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, n. 62, p. 203-216, 1992.

ENGLISH, L. D. Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*,

v. 24 n.3, p. 255-273, 1993.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. Em S. Machado (Org.), *Educação matemática: uma nova introdução*. pp. 189-232, São Paulo: EDUC, 2008.

IEZZI, G; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, R. *Coleção matemática: ciências e aplicações*, v.2, ensino médio. São Paulo: Atual, 2004.

INHLEDER, B.; PIAGET, J*. Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, 1976.

LAUTERT. S. A representação de operações e problemas de divisão em crianças: da linguagem oral para as outras formas de representação. Dissertação de mestrado, Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco. 2000.

MEC (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais, Vol 3. *Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental: Brasília.

MEKHMANDAROV, I. Analysis and Synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. Em: T. Nakahara e M. Koyama: *Proceedings of the 24th Annual Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: PME, v.3, p.295-301, 2000.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.8, n. 1, p. 99-124, 2006a.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. Em: *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, São Paulo, v.1, p. 1-18, 2006b.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. *Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas.* São Paulo: PROEM, 2001.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. Em: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática,* 2007.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. Como crianças de 1ª a 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório?. Em*: Anais do II Simpósio Internacional de Educação Matemática*, Recife – PE, 2008.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução a análise combinatória.* Campinas: editora da UNICAMP, 1998.

SELVA, A. C. V.; BORBA, R.; CAMPOS, T. e Cols. O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: o que compreendem? Que dificuldades apresentam? Em: *Anais do II Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Recife, v.1, p. 1-12, 2008.

TAXA-AMARO, F. O. S. Solução de problemas com operações combinatórias. Em M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar*, pp. 163-183. Campinas: Alínea, 2006.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. Em R. Lesh; M. Landau (Orgs.), Acquisition of mathematics concepts and processes, pp. 127-174. Academic Press.

VERGNAUD, G. *El nino, lãs matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de lãs matemáticas em la escuola primaria*. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro, p. 1-26, 1993.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. Em J. Hiebert; M. Behr (Orgs.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*, pp. 141-161. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998.