UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIDADANIA: UM OLHAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ALMIR CESAR FERREIRA CAVALCANTI

João Pessoa – PB
2010

ALMIR CESAR FERREIRA CAVALCANTI

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIDADANIA: UM OLHAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba (PPGE/UFPB) na linha de pesquisa **Políticas Públicas e Práticas Educativas,** como exigência institucional para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – PB
Julho de 2010

C376e Cavalcanti, Almir Cesar Ferreira.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIDADANIA: UM OLHAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / ALMIR CESAR FERREIRA CAVALCANTI. - - JOÃO PESSOA : [S.N.], 2010.

252 f.

Orientadora: Rogéria Gaudencio do Rêgo.
Tese (Doutorado) – UFPB /CE.

1.Educação. 2.Educação matemática. 3.Resolução de problemas. 4.Cidadania.

ALMIR CESAR FERREIRA CAVALCANTI

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIDADANIA: UM OLHAR ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Aprovado em 23/07/2010

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal da Paraíba (PPGE/UFPB) na linha de pesquisa **Políticas Públicas e Práticas Educativas,** como exigência institucional para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Rogéria Gaudencio do Rêgo (CCEN/UFPB)

____

Profª. Drª. Adelaide Alves Dias (CE/UFPB)

____

Profª. Drª. Ângela Maria Dias Fernandes (CCHLA/UFPB)

____

Prof. Dr. Charliton José dos Santos Machado (CE/UFPB)

____

Prof. Dr. Iraquitan de Oliveira Caminha (CCS/UFPB)

____

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (CCT/UEPB)

Adeus meus ais saídos
Dos dias doidos
Dias doídos adeus
Há dias só dias sadios
Há dias só dias sábios
Dias doídos adeus.

.

(Chico César)

Com a poesia do espanhol António Machado, dedico este trabalho aos professores e professoras Hilda Góes Cavalcanti (minha mãe), Almerindo Ferreira Cavalcanti (meu pai), Josefa Alves da Silva (dona Zefinha do cabelo branco), Geraldo Colombo, Cleider Fallani, Gustavo do Carmo da Costa Filho, Olga Nakagima, Antônio de Andrade e Silva, Edna Gusmão de Góes Brennand e Rogéria Gaudencio do Rêgo que, ao passarem pelos caminhos de minha formação deixaram as suas marcas.

E aos meus irmãos e irmãs, Almerindo Jr. Paulo Roberto, Anilda Rosângela, Aneide Maria e Ana Paula que, mesmo trilhando caminhos diferentes que os meus, sempre nos encontramos no mesmo porto seguro.

“Caminhante, são tuas pegadas
o caminho, e nada mas;
caminhante, não há caminho,
faz-se caminho ao andar.

Ao andar se faz o caminho
e ao olhar para traz
vê-se a senda que jamais
se há de voltar a pisar.

Caminhante, não há caminho,
somente rastros no mar...”

Adelmo,

"…. não tem nenhum engano nem mistério [...]
podermos ver o mundo juntos,
sermos dois e sermos muitos,
nos sabermos sós sem estarmos sós.
Abrirmos a cabeça
para que afinal floresça
o mais que humano em nós.
Então, tá tudo dito e é tão bonito
e eu acredito num claro futuro..."

AGRADECIMENTOS

Com este trabalho fecha-se mais um ciclo na formação de um ser inconcluso, inacabado e em construção, contudo, só possível com a contribuição de muitos. De alguns que de tão perto, pouco atrapalharam, de outros que mesmo ao longe, se fizeram presentes, e de muitos outros que, de perto ou ao longe, foram imprescindíveis à conclusão de nossa tese, entre eles:

1 A Professora Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo, pela maneira honesta que conduziu nossa orientação.

2 Os professore(a)s Afonso Celso C. Scoculglia, Adelaide Alves Dias, Ângela Maria Dias Fernandes, Edna Gusmão de Góes Brennand, Fredys Orlado Sorto, Janine Marta Coelho Rodrigues, José Francisco de Melo Neto, Luiz Pereira de Lima Junior, Roberto Jarry Richardison, Rogéria Gaudencia do Rêgo, Romero Tavares da Silva e Wilson Honorato Aragão, pelos conhecimentos compartilhados durante as disciplinas cursadas.

3 Os Professore(a)s Adelaide Alves Dias, Silvanio de Andrade, Iraquitan de O. Caminha, Ângela Maria D. Fernandes e Charliton José dos S. Machado pelas contribuições nos momentos de qualificação e defesa deste trabalho.

4 Os amigo(a)s e colegas Arisdélia, Daluz, Nádia, Leônidas, Ivete e Cida, pelo profícuo grupo de estudos. Nele, quando desprovidos de fatuidade, crescemos todos.

5 Os colegas e amigo(a)s da Turma 26, em especial aos caros Xavier, Zilma, Nazaré, Margarida, Shirley e Rose Mary que, através de pequenos gestos se fizeram grandes perante a mim.

6 A Professora Rogéria e as colegas Amanda, Betânia, Clotilde e Maria Azeredo pelas construtivas e colaborativas discussões em sala de aula.

7 Os técnico(a)s do PPGE Rosilene, Cleomar, Glória e Dona Graças. Obrigado!

8 A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa de estudo concedida.

9 A PROPG/UFMT, em especial a Adriana, pela maneira competente que nos atendeu durante o período de afastamento para a capacitação.

10 Os colegas e amigo(a)s da UFMT, Campus de Rondonópolis.

RESUMO

CAVALCANTI, Almir Cesar Ferreira. **Educação Matemática e Cidadania**: um olhar através da resolução de problemas. 2010. 252 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa-PB, 2010.

Ao retomar sua trajetória na construção da democracia, a sociedade brasileira deparou-se com um surto de exigências de cidadania, oriundo de diferentes grupos que lutam pelo direito de viverem à luz de suas próprias especificidades. E a educação matemática constitui uma dessas exigências, visto ser constante o elo entre educação e cidadania. Ambas caminham imbricadas e vêm se transformando no tempo e no espaço, em movimento cíclico, à medida que as sociedades também se transformam, exigindo assim uma população educada para nelas atuar. Por sua vez, a população requer dessa sociedade uma relação de igualdade com respeito aos direitos e deveres pertinentes ao *status* que essa educação lhe confere. Assim pensando, o objetivo deste estudo consiste em analisar os problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática, com vistas à formação e ao exercício da cidadania. A investigação teve como propósito responder a seguinte questão: De que maneira a Matemática, como integrante de uma das áreas do conhecimento que compõem a base nacional comum dos currículos do ensino médio, pode colaborar para a concretização de uma formação cidadã? Para tanto, após um olhar sobre as bases legais da educação brasileira, buscou-se compreender a Matemática enquanto construção humana visando à definição desta área do saber a partir das realizações do homem ao longo do seu processo de hominização. Tendo em vista uma formação cidadã, buscou-se, também, compreender a construção e a evolução do conceito de cidadania no decorrer do tempo, e em diferentes espaços. A opção por abordar essa formação partiu da possibilidade de se explorar os enunciados dos problemas matemáticos contidos nos livros didáticos. Para tanto, um olhar sobre os conceitos de problema e de resolução de problemas são imprescindíveis, assim como as influências por eles recebidas, e as consequências destas no currículo escolar. Visando compreender o objeto de estudo, utilizam-se as abordagens da pesquisa qualitativa e do método interpretativo para analisar o conteúdo dos enunciados das questões matemáticas – apresentadas no estudo das funções – contidas em dois livros didáticos de Matemática recomendados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), e adotados pela maioria das escolas públicas estaduais no município de João Pessoa-PB. Conclui-se que a Matemática apresentada nos livros didáticos, através de problemas, desde que seja trabalhada no processo educativo de forma contextualizada, valorizando-se a linguagem e o conteúdo matemáticos, e sendo articulada com outras áreas do conhecimento, tendo assim um caráter interdisciplinar, pode contribuir para a formação de cidadãos críticos e participativos. Argumenta-se ainda que esta forma de trabalhar a Matemática é, portanto, elemento fundamental para a formação matemática, bem como para a construção da cidadania do aluno (sujeito social, histórico e cultural). Neste sentido, o livro didático, assim como a forma didático/pedagógica de o professor trabalhar os problemas matemáticos contidos nesse livro, são elementos constituintes desse processo educativo de formação cidadã.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução de Problemas. Cidadania.

ABSTRACT

CAVALCANTI, Almir Cesar Ferreira. **Mathematical Education and Citizenship**: a survey through problem solution. 2010. 252 f. Thesis (Doctorate) – Program of Post-Graduation in Education, Federal University of Paraíba, João Pessoa - PB, 2010.

In the process of retaking its journey concerning democracy construction, the Brazilian society faced a real boom of citizenship requirements originated from different groups which struggle for the right to live up to their own specificities. The mathematical education constitutes, thus, one of these requirements once the bond between education and citizenship is constant. Both of these are overlapped and they have been undergoing changes regarding time and space, in a cyclical movement, in the same way that society also changes. So, this requires an educated population for acting in the mentioned society. On the other hand, the population demands from this society an equality relation with respect for the rights and duties pertaining to the status that such education confers. In this way, this research aims to analyze the problems presented in the Mathematics didactic books in regard to formation and the citizenship exercise. The investigation had the purpose to answer the following question: In which way can Mathematics, as an integrated subject of one of the knowledge areas which make up the common national basis of the high school teaching curricula, collaborate for the accomplishment of a citizen formation? For this reason, after taking into account the Brazilian education legal bases, this research focused on understanding Mathematics while human construction aiming to define such knowledge area having as starting point man's fulfillments during his or her humankind's process. Furthermore, by considering a citizen formation, the goal was also to understand the construction and evolution of the citizenship concept along time and in different spaces. The option for approaching this formation arose from the possibility of exploring the statements of the mathematical problems contained in the didactic books. So, a close view on the problem concepts and resolution is essential as well as the influences received by them, and the consequences of such influences in the school curriculum. With the intention to understand the study object, the qualitative research and the interpretative method were used as approaches in order to analyze the content of the statements of the mathematical questions – presented in the study of functions – contained in two Mathematics didactic books recommended by the National Program of the High School Teaching Book (PNLEM). Such books were adopted by the majority of the state public schools in the city of João Pessoa – PB. It can be concluded that Mathematics presented in the didactic books, by means of problems, and once such subject is taught in the educational process in a contextualized way, valuing the language and the mathematical content, and being connected to other knowledge areas, having thus an interdisciplinary character, can contribute for the formation of critical and participative citizens. It is still discussed that such Mathematics teaching is, however, a fundamental element for the mathematical formation as well as the construction of the student's citizenship (as social, historical and cultural subject). In this sense, the didactic book, and the didactic/pedagogic way that the teacher works with the mathematical problems in this book are constitutive elements of this educational process of citizen formation.

Keywords: Mathematical Education. Problem Solution. Citizenship.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SIGLAS

DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

INAF – Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC – Ministério da Educação

NCSM – *National Council of Supervisors of Mathematics*

NCTM – *National Concil of Teachers of Mathematics*

OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio

ONU – Organização das Nações Unidas

PCN+ – Parâmetros Curriculares Nacionais Mais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

PNDA – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios

PNLEM – Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio

SEEC/PB – Secretaria de Estado da Educação e Cultura da Paraíba

UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

ZDM – *Zentralblatt für Didaktik der Mathematic*

SUMÁRIO

1 INSERINDO A TEMÁTICA

Compreender questões relacionadas ao mundo da ciência e da vida, especificamente as inerentes ao conhecimento matemático, sobretudo quando abordadas na perspectiva da Educação Matemática[1], constitui um grande desafio para a maioria dos pesquisadores desta área do conhecimento, uma vez que tais questões levam-nos a inquirir, concomitantemente, o que é, em que consiste e para que serve fazer Matemática. Estas perguntas não devem se referir unicamente à Matemática Escolar[2], que segundo Moreira e David (2005, p. 20), designa o "conjunto de saberes 'validados', associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática", mas elas necessitam englobar todas as matemáticas[3] que existem em nossa sociedade e em todas as suas dimensões: histórica, política, social, cultural, entre outras.

Os esforços para encontrar explicações e maneiras de lidar e conviver com a realidade natural e sociocultural levaram o homem a desenvolver sua capacidade de pensar. De posse desta habilidade, ele começou a compreender e a transpor os obstáculos que lhe eram impostos, passando, desta forma, a resolver os mais variados tipos de problemas que encontrava diante de si.

Desde os tempos antigos, as medidas e os cálculos desempenham um papel importante na vida em sociedade. A necessidade de calcular a colheita, medir a capacidade de recipientes e as dimensões de parcelas da terra para cultivo, como também realizar os cômputos durante a construção de grandes obras e fazer distintos cálculos astronômicos, constitui apenas uma

[1] Vê nota 4, pág. 96.

[2] A Matemática Escolar inclui tanto os saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas e processo (MOREIRA e DAVID, 2005, p. 20).

[3] Matemáticas – além de se considerar a Matemática enquanto ciência dos padrões que surgem do mundo que nos cerca, das profundezas do espaço e do tempo e do funcionamento da mente e que dão origem a diferentes áreas tais como a álgebra, a geometria, a topologia, o cálculo, a lógica, a probabilidade, entre outras, passíveis de serem estudadas e trabalhadas no contexto escolar, considera-se também a matemática praticada em diversas culturas e diferentes contextos sociais. Neste sentido, trazemos a contribuição de Sebastiani (1999), segundo o qual "é necessário que chegue à escola a concepção de uma matemática construída pelo homem, imperfeita e sem verdades universais e que devemos mostrar aos professores-alunos que a crença na verdade universal dos conceitos matemáticos é fruto de uma visão da ciência, uma visão evolucionista e eurocentrista desta ciência. Não existe uma matemática, mas cada sociedade constrói a sua matemática. Como estamos mergulhados em uma sociedade que traz em sua bagagem toda ciência ocidental, com o dogma da verdade absoluta, somos levados a olhar a ciência do outro no máximo como uma fase de evolução para atingir o nosso saber" (SEBASTIANI, E. Como usar a história da matemática na construção de uma educação matemática com significado. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. Anais. p. 22-23).

pequena relação dos problemas que se buscou resolver em tempos remotos. Na atualidade, a conquista do espaço cósmico constitui um dos acontecimentos mais consideráveis. Desde o lançamento do Sputnik – o primeiro satélite artificial da Terra – pela extinta União Soviética, em outubro de 1957, a corrida pela conquista do espaço vem exigindo do homem a resolução de problemas cada vez mais complexos (KLINE, 1976; SHOENFELD, 1985). Consequentemente, esta demanda impulsiou o desenvolvimento da Matemática, como também influenciou o currículo da Matemática escolar, visando a atender à demanda de mentes brilhantes e capacitadas para lidar com os desafios de novas conquistas e com as novas tecnologias que estas lhes impõem.

Assim, a importância e a necessidade de resolver problemas em uma sociedade inserida e altamente influenciada por tecnologias que evoluem rapidamente; – tanto que o novo de hoje torna-se obsoleto amanhã; – ao mesmo tempo que diversos desafios envolvendo novas variáveis como as desigualdades sociais, as transformações do meio ambiente, o aumento demográfico – principalmente nas regiões mais pobres –, a dispersão na distribuição de renda, o desequilíbrio de oportunidades no campo do trabalho, a diversidade cultural, entre outros, vêm exigindo do homem contemporâneo não apenas a solução de problemas, mas que estes sejam resolvidos de forma criativa. Esse fato tem chamado a atenção de diversos pesquisadores em diferentes áreas do conhecimento, entre elas a Matemática.

Não obstante, é na Educação Matemática que a Resolução de Problemas tem recebido atenção especial. Stanik e Kilpatric (1990) mostram que os problemas têm uma longa história nos currículos de Matemática e ocuparam um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade, com registros nos currículos dos antigos egípcios, chineses e gregos. No entanto, a importância dada à Resolução de Problemas ainda é recente, e seu estudo está intimamente ligado a diferentes campos do saber, tais como à Psicologia, ao currículo e ao ensino da Matemática. Um breve olhar no ZDM – The International Journal on Mathematics Education, em seu volume 39 (2007), que traz o estado da arte das pesquisas realizadas em diversos países, entre eles o Brasil, abordando a temática Resolução de Problemas, vem corroborar tais afirmações.

O ensino da Matemática em nosso país, ao longo do tempo, vem recebendo influência de várias tendências pedagógicas. No início do século XX, segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 214), “o ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante”. Enfatizando e valorizando o encadeamento lógico do raciocínio matemático e as formas perfeitas e absolutas das idéias matemáticas, o ensino era acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo. Quanto à aprendizagem da Matemática, esta era privilégio de poucos e dos "bem dotados" intelectualmente. De acordo com Fiorentini (1995, p. 7), "a aprendizagem do aluno era considerada passiva e consistia na memorização e na reprodução (imitação/repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor e pelos livros". Posteriormente, enfatiza-se o ensino da Matemática com compreensão; nesta perspectiva, os alunos deviam entender o que faziam. Referindo-se a essa tendência Onuchic (1999, p. 201) nos diz que "o trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender algum conteúdo novo".

De acordo com Fiorentini (1994), até o final da década de 1950, os estudos sobre resolução de problemas indicavam que, para desenvolver a capacidade de resolver problemas, as crianças deveriam exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade deles. Até esse momento, as pesquisas enfatizavam os produtos das soluções em lugar de valorizar os processos da resolução. Nesse período, começou-se a falar em resolução de problemas como um meio de aprender Matemática, e o enfoque era o ensino de estratégias para resolver os problemas.

No início da década de 1960, o ensino da Matemática, no Brasil e em outros países do mundo, foi influenciado por um movimento internacional de reformulação e modernização do currículo escolar, que ficou conhecido como o Movimento da Matemática Moderna[4]. Este movimento abordava a Matemática numa perspectiva internalista, ou seja, a Matemática por ela mesma, autossuficiente, e enfatizava o uso preciso da linguagem matemática, o rigor, o formalismo e as justificativas das transformações algébricas através das propriedades estruturais.

No entanto, foi no período de declínio desse movimento, no princípio da década de 1970, que se deu início, de forma sistemática, às investigações sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares. Foi somente nessa década que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção. Neste sentido, Onuchic e Allevato (2004, p. 215) afirmam que

> A caracterização da Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a

[4] A Matemática Moderna foi um movimento desencadeado em âmbito internacional, com influência também no Brasil, que atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos. No que diz respeito a esse movimento, nos reportaremos a ele no terceiro capítulo deste trabalho.

> configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos ou como um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. No fim dos anos 70, a Resolução de Problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro.

Contudo, só após a elaboração da *Agenda for Action*, publicada pelo National Concil of Teachers of Mathematics – NCTM (1980), que traz em sua primeira recomendação a Resolução de Problemas como foco da Matemática escolar para os anos de 1980, pesquisas abordando essa temática ganharam impulso. A Resolução de Problemas se consagava como orientação e eixo central para o ensino da Matemática, com grande aquiescência entre professores e formadores de professores dessa época. Desde então, essa temática vem despertando interesse, bem como recebendo contribuições significativas de importantes pesquisadores, tais como Schoenfeld (2007), Lester (1983), Schroeder e Lester (1989), Chi e Glaser (1986), Ponte (2008), Polya (1997), Vila e Callejo (2006), Echeverría (1998), Steen (2004), D’Ambrósio (2007), Huete e Bravo (2006), entre outros.

Durante toda a década de 1980 permaneceu evidente a idéia de que Resolução de Problemas era um veículo forte e eficiente para a aprendizagem matemática, e muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula. Não obstante, divergências entre concepções sobre o significado de “Resolução de Problemas ser o foco da Matemática escolar” começavam a surgir. Em Schroeder e Lester (1989) encontramos três caminhos diferentes para se abordar a relação existente entre ensino e resolução de problemas, que podem nos ajudar a refletir sobre essas divergências, quais sejam: ensinar sobre resolução de problemas; ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Sobre eles, discorreremos de forma mais detalhada no capítulo três deste trabalho.

Chegando-se ao término da década de 1980, com todas as recomendações de ação propostas pelo NCTM, pesquisadores começaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. A partir de então, inicia-se uma discussão a respeito das perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas, e esta passa a ser pensada como uma metodologia de ensino. Assim, a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino torna-se lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas para os anos de 1990, recebendo contribuições significativas de pesquisadores como Schroeder e Lester (1989), Andrade (1998), Onuchic (1999), entre outros.

Aprender Matemática com compreensão surge como uma idéia unificadora em um novo documento publicado no ano 2000, intitulado *Principles and standards for school*

Mathematics (NCTM, 2000). Publicado com a finalidade de proporcionar “orientação” e uma “visão” global para a Matemática escolar nas primeiras décadas do século XXI, nele, o conceito de uma Matemática para todos ganha visibilidade: a equidade educacional é um elemento nuclear. Enquanto em propostas anteriores a ênfase estava centrada nos processos, ressaltando a resolução de problemas em detrimento dos conteúdos, neste novo documento isso já não acontece. Apesar de a Resolução de Problemas não ser mais apresentada como o foco principal da Matemática escolar, uma vez que processo e conteúdo não são mais vistos como domínios disjuntos, elas estão fortemente interrelacionadas e intrincadas, porquanto resolver problemas implica compreensão e utilização dos conteúdos matemáticos.

Na Educação Matemática, a Resolução de Problemas tem assumido diferentes perspectivas: uma delas centra-se na aprendizagem e procura investigar estratégias, modelos ou programas especiais que poderiam otimizá-la; outra enfoca o ensino e discute os aspectos didático-pedagógicos da resolução de problemas. (tem como foco central um ensino de Matemática via resolução de problemas e procura tratar/discutir os diferentes papéis pedagógicos atribuídos a estas); outra perspectiva concentra-se no estudo de habilidades e estratégias cognitivas apresentadas por sujeitos na resolução de problemas em diferentes contextos socioculturais.

No nosso trabalho, o **foco central** é a Resolução de Problemas no contexto da educação matemática, com vistas a uma formação cidadã, ou seja, uma formação que capacite o indivíduo a pensar qualitativa e criticamente e a lidar, efetivamente, com aspectos e situações quantitativos com os quais depara na vida cotidiana. Uma formação que possibilite aos alunos compreender melhor e adequadamente o mundo que os cerca, suas exigências e complexidade e, assim, torne-os cidadãos cônscios de uma possibilidade de ações coletivas, ou seja, conscientes de seus direitos e deveres e do exercício dos mesmos no relacionamento e realização social comunitários.

O interesse em centrar nossa pesquisa na Resolução de Problemas se deu por *insight*. A busca incessante e ainda não finalizada por um fenômeno, um foco, um argumento, uma tese, um método, coerência metodológica, consistência teórica, entre tantas outras exigências e necessidades para um trabalho desta natureza, como também a incerteza de ainda não tê-los encontrado, muitas vezes assustam e cegam os “migrantes das exatas”, que tentam compreender seu campo do saber através das lentes das ciências humanas. Todavia, os primeiros passos se deram a partir de uma experiência que relatamos a seguir.

Ao fazermos compras em um supermercado que já frequentávamos há algum tempo, deparamo-nos com algumas ocorrências as quais nunca havíamos antes observado com atenção: as famosas promoções “Leve três, pague dois”. Ao procurar, nas prateleiras do supermercado, um lustramóveis de determinada marca, encontramos duas situações de oferta: a primeira delas, um frasco do referido produto com o preço unitário de R$ 2,57 e, ao lado, uma embalagem contendo três frascos desse mesmo produto, da mesma marca e em promoção, com a famosa frase. O preço do produto em promoção, que de fato deveria ser vendido por R$ 5,14 – o preço de dois frascos –, estava sendo vendido por R$ 5,30, ou seja, dezesseis centavos mais caro. Percebemos, então, que vários produtos oferecidos com a promoção “Leve X, pague Y” naquele estabelecimento estavam com preço maior que o prometido. Diante disso, procuramos o gerente do supermercado, apontamos todos os produtos que identificamos nesta situação e exigimos que os preços dos mesmos fossem corrigidos. Essa experiência se repetiu outras vezes, e em todas elas, reportávamo-nos ao gerente, requerendo que fosse cobrado o preço justo pela promoção anunciada. Atualmente, quando retornamos ao supermercado, não detectamos mais tal artimanha.

Por meio de uma simples experiência percebemos, então, que o conhecimento matemático nos possibilitou, através de algumas operações aritméticas simples, não apenas solucionar certos problemas envolvendo preços de alguns produtos em um supermercado. Muito mais do que isso, permitiu-nos “ler” uma realidade para desconstruí-la criticamente e nela intervir alternativamente, evidenciando, assim, o pensar quantitativo como um dos constituintes de uma autonomia possível, contudo, não se restringindo apenas à técnica, mas abarcando também a politicidade[5] do conhecimento matemático em favor de uma coletividade. Desse modo, surgiu o interesse em investigar a Resolução de Problemas.

Pensar é uma atividade tipicamente mental, enquanto intervir é uma atividade eminentemente prática, mas ambas se entrelaçam e fazem um todo. Neste sentido, Demo (2005, p. 78) afirma que,

> quando desconstruímos e reconstruímos a realidade e respectivas teorias, não estamos apenas praticando traquejo metodológico, estamos, acima de tudo, interferindo de modo inteligente na realidade, realizando um dos horizontes mais fundamentais da cidadania: saber pensar para saber intervir. Cidadania supõe procedimentos democráticos, em nome do bem comum. Primeiro, não pode ser cidadania que destrói a cidadania dos outros. Postula uma convivência possível, dentro de consensos alimentados pela autoridade do argumento. Segundo, exige a comunidade capaz de convencer sem vencer. Trata-se do apreço por esfera pública da discussão aberta, na qual melhor se resolvem os problemas, sem recurso a truculências.

[5] Politicidade: habilidade humana de fazer, em parte, seu destino (deixando a condição de objeto, para assumir a de sujeito participativo e criativo) (DEMO, 2005, p. 75).

Saber pensar para saber intervir, visando a uma transformação tanto pessoal quanto coletiva, trouxe-nos à luz a cidadania. Entretanto, assim como o "problema", o entendimento do que é cidadania é muito amplo, e o termo ainda é utilizado com sentidos e significados diferentes. Segundo Gadotti (2006, p. 66), "cidadania tornou-se uma palavra perigosamente consensual, um envelope vazio no qual podem tanto caber os sonhos de uma sociedade de iguais, uma sociedade de direitos e deveres, quanto uma sociedade dividida por interesses antagônicos". Nela cabem hoje todos os sonhos e todas as realidades.

De acordo com Ferreira (1993), as dificuldades de se conceituar cidadania vêm do fato de que as representações que fazemos dela nem sempre correspondem a postulações rigorosas. Ora ela é tratada como nacionalidade, ora traz em si juízos de valor, aparecendo associada ao aspecto positivo da vida social do homem, em contraste com a negatividade da não cidadania, a marginalidade. No entanto, não é possível visualizar a cidadania como um "em si", uma vez que a cidadania só se configura quando encarnada em um indivíduo, o cidadão.

Atualmente, a sociedade brasileira retoma sua trajetória na construção da democracia, deparando-se assim com um surto de exigências de cidadania, oriundo de diferentes grupos que lutam pelo direito de viverem à luz de suas próprias especificidades. No entanto, o que nos chama a atenção, e nos leva a focalizar a cidadania em nossa pesquisa, é o fato de esta temática se manter na atual legislação do ensino brasileiro, a qual preconiza uma formação para a cidadania. Assim, com o intuito de uma aproximação ao nosso interesse de estudo, centraremos nosso olhar nas bases legais do Ensino Médio brasileiro.

A Constituição Federal do Brasil promulgada em 15 de novembro de 1988 e considerada como a Constituição Cidadã explicita, em seu Artigo 205, os objetivos fundamentais da educação (BRASIL, 2009): "A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho".

Responsável por detalhar os encaminhamentos para a implementação das reformas educacionais e explicitar as linhas gerais das metas apontadas na Constituição brasileira, a LDB (BRASIL, 1996) – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei 9394/1996, estabelecendo os princípios e os fins da Educação Nacional, aponta em seu Artigo 2º: "A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” Seguindo essa diretriz, os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (BRASIL, 2000), pontuam que

> a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação de justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Explicitando as Disposições Gerais da Educação Básica, a LDB (BRASIL, 1996) afirma: “Art. 22º. A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores” e, referindo-se especificamente aos desígnios do ensino médio, o artigo 35 estabelece que

> O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> **I -** a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> **II -** a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> **III -** o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> **IV -** a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Enquanto aprofundamento dos conhecimentos já adquiridos, o perfil pedagógico do ensino médio tem como ponto de partida o que estabelece o Artigo 3º da Lei nº 11.274, de 06 de fevereiro de 2006, que altera a redação dos Artigos 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 anos de idade. De acordo com o Art. 3º de tal Lei, o Artigo 32 passa a vigorar com a seguinte redação:

> O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante:
>
> **I –** Desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
>
> **II –** A compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
>
> **III –** O desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
>
> **IV –** Fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O ensino médio deverá, assim, continuar o processo de desenvolvimento da capacidade de aprender com destaque para o aperfeiçoamento do uso das linguagens – enfatizamos aqui a linguagem matemática – como meios de constituição dos conhecimentos, da compreensão e da formação de atitudes e valores.

A partir de determinados pressupostos o Estado define, através da LDB, a formação do cidadão como um dos fins da educação, atribuindo às instituições de ensino, públicas e privadas, o dever de dotar os jovens de condições básicas para o exercício consciente da cidadania. Ou seja, deixa a cargo dessas instituições a tarefa de transmitir conhecimentos aos jovens e desenvolver neles hábitos e atitudes, de forma a viabilizar a meta da cidadania.

Dando as últimas interpretações e novas determinações à LDB, o Conselho Nacional de Educação, por meio da Resolução n^{o} 03/1998, instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – DCNEM (BRASIL, 1998). Tais diretrizes constituem um conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular de cada unidade escolar, objetivando a vinculação da educação com o mundo do trabalho e a prática social, consolidando a preparação para o exercício da cidadania. O décimo artigo dessa Resolução estabelece que a base comum dos currículos do ensino médio será organizada em três grandes áreas de conhecimento e aponta em seu inciso 2^{o} as “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias” como uma dessas áreas, tendo por fim a constituição de competências e habilidades nos educandos.

Objetivando nortear a elaboração dos currículos escolares do ensino médio em todo o país, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2002) vêm fundamentar as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada uma das áreas do conhecimento apontadas pelas DCNEM. Embora as disciplinas sejam apresentadas nos PCNEM isoladamente, a intenção não é fragmentá-las, mas traçar grandes competências de maneira interdisciplinar e contextualizada, visando a uma preparação geral para o trabalho e para o exercício da cidadania. De modo geral, os PCNEM surgiram com o intento de contribuir e dar significado aos conteúdos trabalhados na escola, acompanhando o que preconizam as bases legais para o ensino médio, quais sejam, a LDB e as DCNEM, também apontando para uma formação voltada para o exercício da cidadania.

Apontando o exercício da cidadania enquanto contexto relevante indicado pela LDB, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1998, p.45), ao discutir as diretrizes para uma Pedagogia da Qualidade preconizam que

> Desde logo é preciso que a proposta pedagógica assuma o fato trivial de que a cidadania não é dever nem privilégio de uma área específica do currículo nem deve ficar restrita a um projeto determinado. Exercício de cidadania é testemunho que se inicia na convivência cotidiana e deve contaminar toda a organização curricular.

No entanto, a indicação de uma formação para a cidadania nas bases legais da educação brasileira, embora necessária, não é suficiente. Para sua possível efetivação, é imperativo garantir não só o acesso das crianças, jovens e adultos à escola, mas também, assegurar-lhes a permanência no âmbito escolar e, neste, tornar possível a terminalidade, com uma formação de ensino básico de qualidade.

Segundo os dados do Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional[6] (INAF, 2007), a porcentagem de crianças e jovens entre 4 e 17 anos que frequentavam a escola no Brasil passou de 77,9% em 1995 para 88,9% em 2005, isto é, houve um aumento de 11 pontos percentuais em uma década. Todavia, a questão que se põe atualmente é se o acesso e a freqüência à escola são suficientes para garantir a aquisição de habilidades necessárias à vida pessoal e profissional, bem como o desenvolvimento do aluno enquanto cidadãos conscientes de seus direitos e deveres.

Avaliando as habilidades necessárias para viver em uma sociedade letrada, exercendo com autonomia seus direitos e responsabilidades, o INAF definiu quatro níveis de alfabetismo da população brasileira entre 15 e 64 anos, composta por consumidores, eleitores, chefes de família, entre outros, e que majoritariamente integram a força de trabalho do país. São eles:

- Analfabetismo: corresponde à condição dos que não conseguem realizar tarefas simples que envolvem a leitura de palavras e frases, ainda que uma parcela destes consiga ler números familiares, como números de telefone e preços.

- Alfabetismo nível rudimentar: refere-se à capacidade de localizar uma informação explícita em textos curtos e familiares, ler e escrever números usuais e realizar operações simples, como manusear dinheiro para pagamento de pequenas quantias ou fazer medidas de comprimento usando a fita métrica.

- Alfabetismo nível básico: corresponde à condição dos que já leem e compreendem textos de média extensão, localizam informações mesmo que seja necessário realizar pequenas inferências, leem números na casa dos milhões, resolvem problemas envolvendo uma sequência simples de operações e têm noção de proporcionalidade. Mostram, no entanto, limitações quando as operações requeridas envolvem maior número de elementos, etapas ou relações.

- Alfabetismo nível pleno: classificadas neste nível estão as pessoas cujas habilidades não mais impõem restrições para compreender e interpretar

[6] Disponível em http://www.acaoeducativa.org.br/portal/images/stories/pdfs/inafresultados 2007.pdf. Acesso em 15/10/2008.

> elementos usuais da sociedade letrada: leem textos mais longos, relacionando suas partes, comparam e interpretam informações, distinguem fatos de opiniões, realizam inferências e síntese. Quanto à Matemática, resolvem problemas que exigem maior planejamento e controle, envolvendo percentuais, proporções e cálculo de área, além de interpretar tabelas de dupla entrada, mapas e gráficos.

De acordo com o INAF (2007), os indivíduos enquadrados nos dois primeiros níveis, analfabetismo e alfabetismo nível rudimentar, são considerados Analfabetos Funcionais[7], enquanto as pessoas dois últimos níveis, alfabetismo nível básico e alfabetismo nível pleno, consideram-se Alfabetizados Funcionalmente.

Considerando os dados do INAF para o período 2001-2005, no que se refere ao numeramento[8], pudemos constatar que 34,7% das pessoas pesquisadas foram consideradas analfabetas funcionais, isto é, não tiveram condições de responder às questões matemáticas que envolviam situações do cotidiano. E, como tal, impossibilitadas de exercerem plenamente seus direitos enquanto cidadãos.

Transcorridos mais de dez anos da aprovação da LDB, os dados e as avaliações oficiais revelam que ainda não foi possível superar a dualidade histórica que tem prevalecido no ensino médio, tampouco assegurar a universalização, a permanência e a aprendizagem significativa para a maioria de seus estudantes. Embora o Brasil tenha ampliado a oferta do ensino médio de forma expressiva, mais de 1,8 milhões de jovens entre 15 e 17 estão fora da escola. Massificou-se o acesso, mas não se garantiu democraticamente a permanência e, principalmente, um currículo capaz de promover uma aprendizagem que faça sentido para os jovens e adolescentes.

Segundo os dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios[9] – PNDA de 2006, dos 10.471.763 brasileiros de 15 a 17 anos, mais de 50% deles não estão matriculados nessa etapa da educação básica. Por outro lado, o acesso ao ensino médio é profundamente desigual entre grupos da população: apenas 24,9% de jovens na faixa etária de 15 a 17 anos, dos 20% mais pobres da população, estudam no ensino médio, enquanto existem 76,3% de jovens estudando dos 20% mais ricos da população. No que se refere às regiões, 33,1% dos

---

[7] É considerada analfabeta funcional a pessoa que, mesmo sabendo ler e escrever, não tem as habilidades de leitura, de escrita e de cálculo necessárias para viabilizar seu desenvolvimento pessoal e profissional (INAF, 2007).

[8] Capacidade de compreender e operar com noções e representações matemáticas envolvidas em situações do cotidiano (INAF, 2007).

[9] Disponível em http://desafios2.ipea.gov.br/sites/000/17/edicoes/37/pdfs/rd37not06.pdf. Acesso em 29/08/2008.

jovens do Nordeste estão nesta etapa da educação, ao passo que temos 73,3% dos jovens no Sudeste nesta situação. Outros dados expressivos são: 37,4% dos jovens negros, enquanto 58,4% dos brancos; e apenas 27% dos jovens de 15 a 17 anos que estão no ensino médio residem no campo, todavia 52% estão na área urbana.

Diante do exposto, passamos à seguinte indagação: de que maneira a Matemática, como integrante de uma das áreas do conhecimento que compõem a base nacional comum dos currículos do ensino médio, pode colaborar para a concretização de uma formação cidadã preconizada pelas bases legais do ensino brasileiro?

Temos como **pressuposto** que a Matemática trabalhada na sala de aula por meio da Resolução de Problemas de modo contextualizado e estabelecendo conexões com outras áreas do conhecimento, pode contribuir para uma formação cidadã.

Considerando ser o livro didático um recurso básico para o aluno e um importante instrumento de trabalho para a atividade docente, e que o acesso a este recurso pode contribuir para a qualidade da educação básica, além de promover a inclusão social, o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação do Ministério da Educação, FNDE/MEC, através da Resolução nº 38[10], de 15 de outubro de 2003, resolveu em seu Artigo primeiro: "Art. 1º – Prover as escolas do ensino médio das redes estadual, do Distrito Federal e municipal de livros didáticos de qualidade, para uso dos alunos, abrangendo os componentes curriculares de Português e Matemática por meio do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM". Hoje, essa abrangência foi ampliada aos componentes curriculares de Química, Física, Biologia, História e Geografia.

De acordo com o PNLEM, a obra didática, para ser disponibilizada por esse Programa, deve considerar, em sua proposta científico-pedagógica, o perfil do aluno e dos professores, as características gerais da escola pública e as situações mais típicas e frequentes de interação professor-aluno, especialmente em sala de aula. Além disso, nos conteúdos e procedimentos que mobiliza, deve apresentar-se como compatível e atualizada, seja em relação aos conhecimentos correspondentes nas ciências e saberes de referência, seja no que diz respeito às orientações curriculares oficiais. Reconhecidos esses pressupostos, cabe mencionar que o livro didático, objeto do PNLEM, atende a uma etapa da aprendizagem – o ensino médio – e, desse modo, deve contribuir para o atendimento aos seus objetivos gerais, estabelecidos pelo Artigo 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB: Lei nº 9.394/96) e já mencionados.

---

[10] Disponível em ftp://ftp.fnde.gov.br/web/resolucoes_2003/res038_15102003.pdf. Acesso em 23/06/2008.

Assim, as obras didáticas não podem, quer sob a forma de texto, quer de ilustração: veicular preconceitos de qualquer espécie; ignorar as discussões atuais das teorias e práticas pedagógicas; repetir estereótipos; conter informações e conceitos errados ou análises equivocadas; ou, ainda, contrariar a legislação vigente. Não podem, tampouco, ser concebidas como apostilas, com informações, regras e recomendações que visem apenas à preparação do aluno para um exercício profissional específico ou para o ingresso no ensino superior. Devem, ao contrário, favorecer o diálogo, o respeito e a convivência, possibilitando a alunos e professores o acesso a conhecimentos adequados e relevantes para o crescimento pessoal, intelectual e social dos atores envolvidos no processo educativo.

Objetivando um melhor acesso aos livros didáticos como também a democratização na escolha dos mesmos, o PNLEM elaborou e distribuiu às escolas públicas do país catálogos nos quais se apresentam obras didáticas previamente avaliadas e aprovadas. O intuito é proporcionar aos educadores um instrumento que os auxilie na seleção da obra didática com a qual deseja trabalhar no decorrer de sua prática docente.

Entendendo, por outro lado, que a prática dos professores não pode se respaldar tão somente no uso de um livro didático, mas que este material deve contribuir para que eles a organizem e encontrem sugestões de aprofundamento e proposições metodológicas coerentes com as concepções pedagógicas que postulam e com o projeto político-pedagógico desenvolvido pela escola, o PNLEM, por meio do catálogo de Matemática do PNLEM/2009 (BRASIL, 2008)[11], apresenta em formato de síntese e de avaliação oito obras didáticas de Matemática e as disponibiliza à adoção com o fim de atender ao triênio 2009/2011.

Diante do exposto, e objetivando verificar a relação entre a resolução de problemas matemáticos e a construção/formação/exercício da cidadania, tendo em vista as bases legais do ensino brasileiro, como também os problemas contidos nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio distribuídos pelo PNLEM/MEC às escolas públicas para o triênio referido acima, definimos a **Resolução de Problemas** como nosso **objeto de estudo**.

Este trabalho tem como **tese** que a Matemática apresentada nos livros didáticos, através de problemas, desde que seja trabalhada no processo educativo de forma contextualizada, valorizando-se a linguagem e o conteúdo matemáticos, e sendo articulada com outras áreas do conhecimento, tendo assim um caráter interdisciplinar, pode contribuir para a formação de cidadãos críticos e participativos. Argumentamos ainda que esta forma de trabalhar a Matemática é, portanto, elemento fundamental para a formação matemática, bem

---

[11] Disponível em http://www.fnde.gov.br/index.php/pnld-consultas

como para a construção da cidadania do aluno (sujeito social, histórico e cultural). Neste sentido, o livro didático, assim como a forma didático/pedagógica de o professor trabalhar os problemas matemáticos contidos nesse livro, são elementos constituintes desse processo educativo de formação cidadã.

Ressaltamos que o presente trabalho pretende contribuir, fundamentalmente, para superar compartimentalizações entre áreas do conhecimento, ao mostrar a interface entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, dando conta da dinâmica dialógica entre elas.

Considerando o objeto de estudo desta pesquisa, ancoramos a discussão sobre a Resolução de Problemas nas obras dos autores: Lester (1983), Chi e Glaser (1986), Newel e Simon (1972), Huete e Bravo (2006), Trigo (1996), Sternberg (2008), Ponte (2008), Steen (2004), Andrade (1998), Onuchic (1999), entres outros. Quanto à discussão que aborda as questões inerentes à cidadania, respaldamos a mesma em estudos tais como: Arendt (2005), Guarinello (2005), Funari (2005), Outhwaite (1996), Canivez (1991), Dallari (1984), Carvalho (2007), Mondaini (2005), Cury (2002), Marshall (1967), Cortina (2005), Arroyo (2003), Garretón (1999), Singer (2005) e outros, os quais nos ajudarão na interpretação e análise dos dados selecionados para estudo.

Devido à intencionalidade e caráter desta investigação e à especificidade do objeto de estudo, utilizaremos como suporte metodológico a **abordagem qualitativa**, como **método** a **hermenêutica** e a **análise de conteúdo** e a **análise documental** como **técnicas** inerentes a este método, uma vez que as bases legais da educação brasileira, assim como os livros didáticos de Matemática distribuídos pelo PNLEM, constituem fontes de informação para reforçar o entendimento sobre o objeto investigado, e baseados nos livros didáticos, temos como **objeto de análise** os **problemas matemáticos** apresentados nestes instrumentos.

Em consonância com nosso objeto de estudo e os pressupostos apresentados anteriormente, o **objetivo** desta pesquisa consiste, então, em analisar problemas de funções apresentados em dois livros didáticos de Matemática, tendo em tendo em vista uma formação para a cidadania.

Para atingir tal objetivo, estabelecemos as seguintes **especificações**: a) Situar o conhecimento matemático como um domínio que contribui para a formação do sujeito reflexivo e cidadão; b) Identificar as interrelações entre os problemas matemáticos contidos nos livros didáticos do ensino médio e as bases legais da educação brasileira; c) Verificar a congruência entre as modalidades de resolução de problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática do ensino médio e a formação cidadã; d) Investigar o conteúdo matemático implícito nos problemas e a possibilidade de ressignificação/contextualização dos mesmos para o alcance da cidadania.

No tocante à disposição deste trabalho, o mesmo está organizado em seis capítulos. O primeiro deles apresenta a introdução. Contém a justificativa, o argumento, os fundamentos teóricos, aspectos metodológicos e a organização do trabalho.

No segundo capítulo abordamos a Matemática como construção humana. Fazendo um paralelo evolutivo entre o homem e a Matemática, construímos a definição desta a partir das realizações e feitos daquele, no decorrer do processo de sua hominização. O homem, ora observando a natureza ao seu redor, ora influenciado pelas transformações impostas a ela por ele mesmo, desvendou e revelou a Matemática nela existente. Como construção humana, ou melhor, como resultado do ato de pensar do homem, a Matemática adentrou em nosso mundo, levando-nos a novas formas de pensar, de agir e de ser e, por meio dessas novas formas, em um movimento cíclico, mudando o nosso mundo e, por conseguinte, a nossa condição humana.

O terceiro capítulo tem como finalidade delinear o objeto de estudo. É neste capítulo que discutimos os conceitos de problema e resolução de problemas, trazendo a contribuição de autores que apontam diferentes perspectivas, tanto de abordagem quanto de utilização, as influências que estes conceitos receberam e ainda vêm recebendo de outras áreas do conhecimento, contribuindo, deste modo, para um melhor entendimento do tema Resolução de Problemas na Educação Matemática, bem como suas implicações no currículo e na formação do cidadão.

No quarto capítulo apresentamos a metodologia, objetivando situar o presente estudo no contexto no qual se deu a pesquisa, indicar os procedimentos metodológicos, o processo de escolha e delimitação do material da pesquisa, as estratégias e os instrumentos utilizados e as etapas organizadoras na análise dos dados.

No quinto capítulo procedemos à análise dos dados.

O sexto capítulo – Considerações Finais – oferece uma síntese dos resultados encontrados, os quais nos permitirão visualizar a Matemática, através da Resolução de Problemas, como possibilitadora de uma formação cidadã.

2 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIDADANIA: CONSTRUÇÃO E CONQUISTA HUMANA

Neste capítulo tratamos a Matemática como uma construção humana. Estabelecendo um paralelo entre a evolução do homem e a da Matemática, vamos construindo a definição desta área do saber a partir das realizações do homem ao longo do seu processo de hominização[12]. O ser humano, ao observar a natureza ao seu redor e ao ser influenciado pelas transformações que ele mesmo imprimia sobre ela, descobriu e revelou a Matemática que existe na mesma. Como construção humana, ou como resultado do ato de pensar do homem, a Matemática penetrou no mundo dos homens, levando-os a novos modos de pensar, de agir e de ser e, ainda, por meio desses novos modos, num movimento cíclico, mudando esse mundo e, assim, a própria condição humana.

Os acontecimentos que se evidenciam na história da humanidade normalmente constituem marcas de uma época, uma forma de conceber e traduzir o mundo, os seres e os fenômenos nas diversas áreas do conhecimento ou do comportamento humano. Traduzem, na verdade, o pensamento dominante na sociedade e, embora ocorram em local e período determinados, podem repercutir em alguns setores da existência humana por um bom tempo. Certamente, esse fenômeno ocorreu com o desenvolvimento da Matemática, influenciando o seu ensino e, por conseguinte, os instrumentos, métodos e técnicas inerentes à educação matemática, sobretudo quando esta possibilita aos homens não só idealizar e revelar o mundo, mas nele viver, conscientemente, enquanto cidadãos.

2.1 O Saber Está na Humanidade

Ainda mais remoto que a pré-história ou, mais ainda, o tempo em que as coisas não tinham nome, é o tempo em que coisas não existiam e, quiçá, o tempo também não existisse. E foi necessário criar as coisas, a partir do verbo, das ideias e da necessidade de preservar a vida do indivíduo, do grupo, da comunidade, da espécie.

A força que impulsiona o saber é a força da vida e, para mantê-la, o homem mudou, ora se adaptando às novas situações impostas pelas mudanças da natureza, ora se adequando à

[12] Processo evolutivo pelo qual a espécie humana se constituiu, tomando as características físicas, fisiológicas e psíquicas que a distinguem dos demais primatas. (FERREIRA, 2000).

natureza por ele próprio transformada e, ao mesmo tempo, se transformando com ela. De qualquer forma, como lembra Heráclito ao chamar-nos a atenção para a perene mobilidade de todas as coisas (“tudo flui”), que nada permanece imóvel e que tudo é movimento, já não somos o mesmo homem, nem tampouco vivemos no mesmo mundo. Quase invisíveis, somo partículas microscópicas do universo, em constante transformação.

Aqui nos reportamos ao mundo como experiência humana no decorrer da história, isto é, como “condição humana”, organizado pelos sentidos e significados humanos e que se sustenta pela sua obra. Como artefato humano, como produto de suas mãos, o mundo é construído e transformado pelo homem. Mais ainda, como nos diz Safra (2005),

> o mundo é uma estrutura do campo experencial, organizado transgeracionalmente e que se constitui de discursos e obras, de tal forma que esse campo da experiência humana fica significado por sentidos e linguagens.

Todavia, para além do objeto manufaturado, artefato – do latim *arte factu*, (FERREIRA, 2000), “feito com arte” –, podemos supor a construção de um tipo particular de conhecimento não como um produto das mãos, mas sim do pensamento humano, um *mentefato*. Constitui a arte de pensar do homem, na tentativa de compreender e atuar em seu mundo, ou seja, compreendê-lo e interagir/transformá-lo, numa construção humana cujo objeto e *locus* estão na relação do ser com o mundo circundante. Segundo D’Ambrósio (2005) “as ideias matemáticas, particularmente comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar, são formas de pensar, presentes em toda a espécie humana”

De acordo com Karlson (1961), Boyer (1996) e Eves (2004), desde a origem da humanidade, a vida coletiva repousou sobre diversas formas de comunicação, como também sobre os conhecimentos e as habilidades dos indivíduos. E foi em função dessa coletividade e da necessidade primordial, mesmo que inconsciente, de preservar a vida da espécie que, aproximadamente cinco milhões de anos antes de Cristo, o *Australopithecus*, um “quadrúpede em pé” ancestral do homem, pôs-se a construir, ainda que toscamente, machados e facas de pedras, golpeando um seixo contra o outro. Com uma comunicação semelhante à dos demais mamíferos, isto é, com gritos, urros, rosnados e determinadas posturas corporais, ele procurava traduzir os seus desejos, tais como comer, acasalar, brincar, bem como revelar alguma situação ameaçadora ou de perigo.

Decorridos um pouco mais de quatro milhões de anos, por volta de 400.000 a.C. o *Homo Erectus* já construía e manipulava ferramentas diversas feitas de pedra. Tais instrumentos eram utilizados com mais maestria pelo *Homo Neanderthalensis*, que viveu na Europa e no Oriente Médio entre aproximadamente 110.000 a.C. e 35.000 a.C. Este já se comunicava através de desenhos feitos nas paredes das cavernas (pinturas rupestres) e, por meio desse tipo de representação, trocava mensagens, comunicava ideias, transmitia seus desejos e expunha suas necessidades. Ressaltamos aqui que "ao desenvolver sua faculdade de representação simbólica esses homens pré-históricos deram um passo inicial para o nascimento da linguagem e da sociedade como a conhecemos"[13].

Ao substituir a caverna por moradias móveis, construídas com madeiras e peles de animais, que podia levar consigo nas caçadas que fazia pelas savanas, o *Homo Sapiens*, já dominando o fogo, desenvolveu uma cultura complexa que incluía a feitura de novas ferramentas, agora feitas com metal. Estes novos homens, por meio de seus feitos, realizações e conquistas, começaram a povoar a terra.

Como todas as épocas históricas, os períodos citados acima não foram estáticos. A sociedade e a cultura foram mudando com o tempo para adaptar-se a um mundo em transição. Do *Australopithecus* ao *Homo Sapiens*, um período longo de evolução, o homem verticalizou-se, seu cérebro[14] cresceu, e ele diferenciou-se dos outros animais pelo ato de pensar complexamente.

D'Ambrósio (1996) considera que os esforços de indivíduos e da sociedade para encontrar explicações e formas de lidar e conviver com a realidade natural e sociocultural deram origem aos modos de comunicação e às línguas, às religiões e às artes, assim como às ciências e às matemáticas, enfim, a tudo que chamamos de "conhecimento" ou "saber", conhecimento este resultante de um longo processo cumulativo de geração, organização intelectual, organização social e difusão, um processo dinâmico e jamais finalizado[15].

Isso se explica pelo fato de a vida estar impregnada de saber, o qual é intotalizável, incontável e infinitamente diverso e evolui rapidamente transformando diversas esferas da vida coletiva. Segundo Lévy e Authier (2000), a vida não desdenha nenhum saber, seja este humilde ou glorioso, desprezado ou procurado, ele comparece em algum momento de nossas

---

[13] História da comunicação humana. Disponível em http:// www.**scribd**.com/doc/932718/Historia-da comunicacaohumana. Acesso em 29 de outubro de 2007.
[14] Aparelho biológico dotado de competência para agir, perceber, saber, aprender.
[15] Segundo D'Ambrósio, o conhecimento é algo gerado, organizado e difundido, e é difícil negar que essas três fases de elaboração do conhecimento não podem ser estudadas separadamente. O conhecimento, nessas três fases, mostra várias dimensões: sensorial, intuitiva, emocional, racional, que igualmente não podem ser separadas. Esse é o princípio holístico que orienta nossas reflexões sobre o conhecimento.

vidas. Tendo como princípio que ninguém sabe tudo e que, em relação à imensidão de saberes que circulam, crescem e se multiplicam entre os humanos, cada um ignora infinitamente mais coisas do que tem noção, para além da possibilidade de o saber absoluto ser irremediável e definitivo, Lévy e Authier (2000, p. 103) chamam-nos à humildade e ao respeito que nós humanos devemos uns pelos outros afirmando que

> o conhecimento advém e dura somente por causa da imensa coletividade dos homens e de seus produtos, da fervilhante fábrica dos povos, do meio humano em geral. Quem segreda e sustenta o saber? A própria vida da espécie e de seu mundo. Todo saber está na humanidade.

Estando o saber na humanidade e sendo o processo de hominização uma aventura de milhões de anos, alguns saberes se universalizaram a ponto de dominar, interferir e influenciar a vida moderna e contemporânea e, consequentemente, a própria condição humana. Para Arendt (2005), a condição humana compreende algo mais que as condições nas quais a vida foi dada ao homem: tudo o que espontaneamente adentra o seu mundo ou para ele é trazido – quer pelo esforço humano, quer pela soma total das atividades e capacidades humanas, tais como o pensamento e a razão – torna-se parte da condição humana. Referindo a esta, Charlot (2005, p. 76) assevera que nascer "é entrar, inacabado, em um mundo que já está aí. A humanidade (ou a "humanitude"), isto é, o que constitui o ser humano no que ele tem de específico, não é uma natureza que cada indivíduo traria em si no nascimento, é o que é produzido pela espécie humana ao logo da história".

O mundo sempre esteve e está repleto de ideias matemáticas e, desde o seu aparecimento na Terra, o homem tem recorrido a elas. Calculava, contava, media, classificava, quantificava, explicava, generalizava, inferia e avaliava mesmo no período em que seu espírito não tinha consciência de si mesmo e quando ainda sobre tais assuntos não existiam conceitos ou convenções. A matemática sempre esteve presente ou muito próxima de todas as atividades desenvolvidas pelo homem, contribuindo para a compreensão de suas ações, explicando-as ou dando-lhes sentido concreto. Tais fatos levaram à concepção da Matemática como um corpo de conhecimento desenvolvido pelo homem, sem considerar, contudo, as peculiaridades locais, ou seja, ela é vista como um tipo de conhecimento universal, que ocorre do mesmo modo em todas as culturas. Nessa direção, Santos (2007, p. 270) observa que

> essa tem sido uma compreensão muito difundida historicamente e que tem servido de base para uma resposta à questão o que é matemática? Em todo

> caso, a história, como corpo de conhecimento difundido, é carregada de valores e de ideologia do vencedor e, por isso, estes componentes não podem ser deixados de lado, quando pensamos sobre o que é matemática e quais são efetivamente as suas atribuições para a formação/construção do ser humano.

Abordando a dimensão política da Etnomatemática[16], D'Ambrósio (2005) ressalta que ao expandirem seus domínios para além do Mediterrâneo os gregos, e posteriormente os romanos, impuseram seus sistemas de conhecimento, organização social e política aos povos conquistados. Para tal imposição faz-se necessário mantê-los inferiorizados. De acordo com D'Ambrósio (2005, p. 40), "uma forma, muito eficaz, de manter um indivíduo, grupo ou cultura inferiorizado é enfraquecer suas raízes, removendo os vínculos históricos e a historicidade do dominado"[17]. Sendo assim, a universalização da Matemática tem carregado consigo os valores dos grupos dominantes, o que permite que ela seja utilizada como um instrumento de poder destes grupos sobre os demais.

D'Ambrósio (1993) pondera que a Matemática tem sido, desde os gregos, a forma de pensamento mais estável, que perdura até nossos dias como manifestação cultural que se impôs, incontestada, às demais formas. Universalizou-se de tal maneira que deslocou todos os demais modos de quantificar, de medir, de ordenar, de inferir e serviu de base, se impôs como o modo de pensamento lógico e racional que passou a identificar a própria espécie.

Do *Homo Sapiens* se fez recentemente uma transição para o *Homo Rationalis*, identificado pela sua capacidade de utilizar a Matemática. Assim como D'Ambrósio (2005, p. 22), falamos então "de um saber/fazer matemático na busca de explicações e de maneiras de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber/fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais". Neste sentido, o homem tornou-se matematizado e, como tal, capaz de dialogar, manifestar e impor seu pensamento matemático sobre o mundo e sobre si mesmo. Quanto à Matemática, universalizada, tornou-se parte da vida social do homem, enquanto cidadão e, por meio desta vida social, contribui para desenvolver a condição humana.

Embora a Matemática tenha nascido da necessidade de quantificar alguns aspectos da realidade, o desenvolvimento de seus conceitos possivelmente se tenha dado a partir das observações da natureza feitas pelo homem. A persistência deste, enquanto raça humana,

[16] Qualquer forma de ação humana na direção de produzir conhecimento, contextualizada pelas diferentes formas culturais de diferentes grupos humanos (SANTOS, 2007, p. 292).

[17] A remoção da historicidade, segundo D`Ambrósio (2005), implica na remoção da língua, da produção, da religião, da autoridade, do reconhecimento, da terra e da natureza e dos sistemas de explicação em geral.

provavelmente esteja relacionada ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos, cuja ampliação não ficou atrelada só à questão da natureza, como afirma Boyer (1996, p. 41):

> Em certa época, pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebessem, e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza.

O despontar da álgebra moderna, por volta de 1830 na Inglaterra e, posteriormente, a lógica matemática, a teoria dos conjuntos e os fundamentos e filosofias da matemática, impulsionados a partir do século dezenove, contribuíram para a libertação dos referidos limites. De qualquer maneira, a evolução da Matemática, quer decorrente das observações da natureza, quer pela capacidade do homem de perceber e manejar propriedades abstratas, cooperou para o desenvolvimento da racionalidade humana.

2.2 A Matemática: uma Construção Humana

Há quem concorde que os números originaram-se já no primeiro dia da criação. De acordo com Karlson (1961, p.5), ao separar a luz e as trevas, Deus fez surgirem duas coisas no mundo e, como consequência deste ato, “ficou criado o número dois – o primeiro número!” Nessa perspectiva, o número seria então uma construção divina. No entanto, os números e a sua utilização esperaram um longo tempo antes de serem descobertos. Não apareceram por acaso, mas sim pela necessidade que o homem teve inicialmente de contar objetos e coisas, e o seu desenvolvimento foi fundamental na evolução da espécie humana.

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos, e a explicação da maneira como isso ocorrereu é meramente conjectural. Porém, não é difícil imaginar como isso provavelmente se deu. Desde sua origem, o homem, independentemente do estágio de evolução em que se encontrava e das proezas que conseguia executar, possuía uma capacidade chamada senso numérico. Números, pelo menos os pequenos, tinham significado para ele. Este significado não era algo cuja aprendizagem exigisse esforço, pois era capaz de perceber variações de quantidade nos objetos ao seu redor. Tal capacidade nós humanos compartilhamos com outros animais, como os chimpanzés, os ratos, os leões e os pombos. A expressão “senso numérico” aqui usada, segundo Devlin (2005, p. 36), foi introduzida por Tobias Dantzing em seu livro (de 1954) *Number: the language of Science*, no qual escreveu:

> O homem mesmo nos estágios mais inferiores de desenvolvimento, possui uma faculdade que, à falta de melhor nome, chamarei de *senso numérico*. Essa faculdade lhe permite reconhecer que algo mudou em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou acrescentado ao conjunto.

A espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha, assim, algum senso numérico. Contudo, com a evolução gradual da sociedade, da cultura e do próprio homem, tornou-se inevitável a contagem simples, pela necessidade, por exemplo, de uma tribo quantificar as pessoas que a compunham ou de um homem, devido à sua atividade pastoril, saber se o seu rebanho de ovelhas estava aumentando ou diminuindo.

Dos seres humanos que hoje vivem nenhum esteve presente à invenção dos números, mas, apesar disto, não é difícil imaginar, com Karlson (1961) e Boyer (1996) que o homem aprendeu a contar com seus dedos, instrumentos de capacidade vasta e naturalmente ordenados, sempre à nossa disposição. Estes constituíram o primeiro mediador, o primeiro elemento de comparação que possibilitou estabelecer uma relação entre objetos de naturezas diferenciadas. Duas coisas que aparentemente não se relacionam como, por exemplo, os dedos das mãos e um rebanho de ovelhas, são ligadas, estabelecendo-se um elo entre dois conjuntos, estes não entendidos como adjetivos numerais bem determinados, pictóricos, relacionados com objetos igualmente bem determinados, mas como conceitos abstratos, aplicados da mesma forma a dedos e ovelhas em quantidades iguais.

A capacidade do homem de desligar o número do objeto constituiu um processo mental da mais alta significação. Do número concreto, adstrito à coisa, originou-se o número em si. A esse respeito, Karlson (1961, p.6) acrescenta que “a descoberta do número puro, como abstração do caso particular e firmado de um modo conceitual, é o primeiro feito matemático da humanidade – o primeiro e, quem sabe, talvez o maior”.

A construção de símbolos para representar quantidades e, posteriormente, um sistema de numeração, deu-se a partir da contribuição e dos esforços de vários povos e durante um longo período de tempo. Contudo, depois de estabelecida a linguagem dos números ou, mais exatamente, a numeração escrita, constituiu-se numa linguagem universal. Por maior que seja o número representado como, por exemplo, o número 1.432.035, ele é compreendido e possui o mesmo sentido em todo o mundo civilizado. Embora pronunciado de maneiras diferenciadas nas diversas línguas existentes, seu significado é o mesmo. Caracterizada pelos hindus e disseminada pelos árabes, a numeração decimal escrita que se utiliza atualmente é reconhecida pela humanidade em virtude de suas qualidades, a exemplo de ser posicional e, mesmo sendo os números seres estranhos e artificiais, aos poucos foram se incorporando e adentrando silenciosamente em nosso mundo, de modo que hoje não nos vemos sem eles.

Sendo a descoberta dos números um fato tão importante para a humanidade, assim como foram também a descoberta do fogo, a invenção da escrita e da roda, não é de se estranhar que ainda hoje, para muitos, a Matemática se restrinja apenas ao seu estudo (DEVLIN, 2005). Embora aceita como a “ciência dos números” até cerca de 500 a.C. no antigo Egito, Babilônia e China, a Matemática era altamente utilitária, tratava apenas dos números e consistia quase que inteiramente em aritmética. Sua definição foi evoluindo juntamente com as formas mais avançadas de sociedade.

Assim, a Matemática evoluiu com a sociedade e com as novas formas de viver do homem, o qual passou de caçador nômade a agricultor, agora fixo em aldeias e vilas. Exercendo ele funções mais complexas originadas do exercício das atividades paralelas ao plantio, tais como o cultivo de áreas comuns, a construção de celeiros e a escavação de valas para a irrigação, estas exigiram um novo modo de contar, de medir, de calcular, levando-o a uma nova maneira de pensar e, consequentemente, de ocupar o mundo em que vivia.

A caverna não era mais lugar habitável. O conhecimento da matemática, paralelo a outros conhecimentos diversos como a escrita e também sobre o clima, a vegetação, reprodução, bem como a geografia, forçaram mudanças significativas no homem e em sua condição humana. De agricultores, com funções simples de cuidar de rebanhos, alguns passaram a construtores, e assim foram surgindo novas formas de moradia. A partir de então, estradas, barragens, pontes, castelos, templos, igrejas e pirâmides começaram a fazer parte do cotidiano coletivo/cultural das pessoas, impulsionando significativamente os seus conhecimentos geométricos e, naturalmente, um avanço na Matemática associado às técnicas de construção.

Assim como o senso numérico, noções primitivas relacionadas aos conceitos de grandeza e de forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana. Os já mencionados desenhos e figuras descobertos nas cavernas habitadas pelos homens, ainda na Idade da Pedra, sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para o desenvolvimento da geometria. Embora qualquer afirmação sobre sua origem seja, no mínimo, arriscada, não se pode negar a contribuição dos egípcios para a evolução da geometria, partindo de suas necessidades práticas de construção e de demarcação de terras. No primeiro caso, estabelecendo as bases para a construção dos templos e, no segundo, fazendo as novas medidas de terra após cada inundação anual no vale do rio Nilo, atividades que abriram um campo fértil para o desenvolvimento dessa área.

Segundo Boyer (1996), entre 500 a.C. e 300 d.C, os matemáticos da antiga Grécia, por meio da geometria, deram um grande impulso à Matemática. Eles começaram a estudar os números numa perspectiva geométrica, como medida e comprimento e, a partir de então, a Matemática passou a ser vista como o estudo dos números e das formas. Para tal impulso, a contribuição de dois grandes matemáticos foi imprescindível: Tales de Mileto, frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização dedutiva da geometria; e Pitágoras de Samos, fundador da famosa escola pitagórica, que exaltava o estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido da teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia.

O homem, então, começava a medir e, com ajuda dos conhecimentos geométricos acumulados por gerações, teve início a conquista do mundo, primeiro por meio da razão, posteriormente pela descoberta dos espaços geográficos e, por fim, pela ocupação e dominação desses espaços. Observa-se que tais conquistas imprimiram um novo modo de ser no homem, que modificou definitivamente a sua condição humana, enfatizando que os primeiros passos das mesmas se deram a partir de "simples" medições.

É certo que o saber está na humanidade e, assim como esta, ele não é estático. De acordo com Lévy e Authier (2000), este saber é intotalizável, incontável, infinitamente diverso. Organiza-se e diferencia-se em mundos, nichos e subgrupos, muda de lugar, levanta-se, ondula e se reconecta em si mesmo de um horizonte do saber ao outro, conforme os movimentos imprevisíveis da vida.

Foi exatamente em um destes movimentos que Eratóstenes, o bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria, que viveu no Egito entre os anos de 276 e 194 antes de Cristo, encontrou em um velho papiro a indicação de que ao meio-dia de cada 21 de junho, o dia mais longo do ano, uma vareta fincada verticalmente no solo da cidade de Siene, localizada a 800 km ao sul de Alexandria, não produzia sombra. Partindo de tal afirmação, Eratóstenes comprovou que a Terra tem uma forma esférica. Karlson (1961, p. 263) explica que

> [...] a idéia de uma terra esférica já era antiga. Contudo, era simplesmente uma especulação, em nada pior ou melhor que tantas outras existentes à época. Assim, em civilizações antigas é frequente encontrar-se a crença de que o mundo seria um torrão, completamente cercado por um mar que se estenderia até as distâncias as mais remotas, ou então teria um limite na linha em que se encontrasse com a abóbada do firmamento.

Tudo indica que Eratóstenes de Siene não concordava com essas crenças. Observador como era, percebeu que o mesmo fenômeno, isto é, a sombra produzida pela estaca, não ocorria no mesmo dia e horário em Alexandria, e conclui que, se o mundo fosse plano como uma mesa, então as sombras produzidas pelas varetas teriam que ser iguais. Se isso não acontecia era porque a Terra deveria ser curva. Ao fazer uma experiência, utilizando-se de um conhecimento muito "simples" da geometria – *se duas retas paralelas interceptam uma reta transversal, então os ângulos correspondentes são iguais* – chegou ao valor do comprimento da circunferência da Terra, quarenta mil quilômetros, comprovando assim que o mundo não era plano, conforme se vê em Boyer (1996). Apesar de o bibliotecário de Alexandria utilizar um instrumento tão rude como uma vareta, a diferença atualmente encontrada para o valor da circunferência da Terra, ao longo da linha do Equador, isto é, cerca de 40.072 km, é insignificante, considerando-se a simplicidade com que a medida foi feita e o tempo em que foi realizada.

Utilizando conhecimentos geométricos e reconectando saberes, Eratóstenes, um pouco mais de dois mil anos antes que pudéssemos enviar espaçonaves ao espaço para fotografar nosso planeta, tornou visível o invisível, iluminando, sob um novo ângulo, a questão da orientação sobre a Terra. Novos horizontes, novas descobertas, novas conquistas e um novo mundo se descortinando diante dos homens. Infinito; vida e movimento; ação e reação – eis os novos conceitos que doravante dominariam o mundo, formando sua nova imagem.

Segundo Devlin (2005), Boyer (1996) e Eves (2004), depois dos gregos a Matemática progrediu em várias partes do mundo, notavelmente na Arábia e na China, porém sua natureza não mudou até meados do século dezessete, quando Isaac Newton e Leibniz inventaram, simultaneamente, o cálculo infinitesimal, associado ao estudo do movimento e da mudança. Este permitiu que os homens estudassem o movimento dos planetas e a queda dos corpos na Terra; o funcionamento das máquinas; o fluxo dos líquidos; a expansão dos gases; as forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade; o vôo; o crescimento das plantas e animais; a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros.

Karlson (1961) considera que o desenvolvimento de tal estudo foi o centro de atração da Matemática ocidental, que então ressurgia, e evoluiu em interessante paralelo com o Renascimento da totalidade da nossa ciência. O autor citado (p. 375) ainda afirma que

> até os dias de Copérnico e Galileu a humanidade vivia bem protegida, num mundo seguro, harmonicamente estruturado. As esferas celestes do mundo de Ptolomeu giravam cintilantes, postas e mantidas em movimento pelo princípio divino do "Primeiro Motor", e enchendo o universo com a harmonia das esferas, de indescritível doçura. Tudo ali eram harmonia e paz, pois tudo era de natureza divina. Luta, litígio e discórdia ficavam circunscritos à baixa esfera terrestre, domínio do homem, que perdera a felicidade divina pelo pecado original.

Porém, na visão desse mesmo autor (p.375), tal quadro mudou significativamente no século heróico da Renascença.

> Novamente, e dessa vez em definitivo, Copérnico arremessa a Terra para longe do centro do universo; com mão firme e realista Galileu segura o mundo da matéria, arrebata-o do tranquilo abrigo da concepção aristotélico-escolástica e o submete aos números e medidas, à lei do movimento e da variação; Kepler deduz as leis matemáticas que regem a marcha dos planetas, e seu sonho sobre a harmonia do mundo, *o Hormonice mundus*, não consegue ocultar o caráter revolucionário deste feito; Newton destrona o "Primeiro Motor", anima o céu e a terra com a ação poderosa, mas calculável, de forças que agem a distância, completando assim a nova imagem do universo; todas as descobertas ulteriores são retoques do programa estabelecido por ele e Galileu; Giordano Bruno finalmente arranca o véu que até agora cobria o infinito, proclamando a existência de miríades de outros mundos. Arrepiado, o olhar penetra agora em profundezas imensas do espaço, nunca d'antes suspeitadas; o negro Nada envolve as bolas de fogo de sóis longínquos, o universo se estende sem limite.

De acordo com Devlin (2005), no início, o cálculo infinitesimal foi principalmente dirigido para o estudo da Física, contudo, a partir de 1750, houve um grande interesse na teoria matemática, não apenas em sua aplicação, à medida que os matemáticos procuravam compreender o que estava por trás do enorme poder do cálculo infinitesimal. O autor em foco ressalta que, já ao final do século dezenove, a Matemática havia se transformado no estudo dos números, formas, movimento, mudança, espaço e das ferramentas matemáticas que são usadas neste estudo.

Com o crescimento da atividade matemática no século vinte, não só a geometria e o cálculo infinitesimal continuaram a crescer, como surgiram outros ramos da Matemática: a álgebra, que se dedica a explorar as estruturas subjacentes aos números e às operações entre eles; a probabilidade e a estatística, mediante as quais se encontram modos de manejar quantitativamente o acaso; a lógica matemática, que é o resultado da exploração da complexidade da estrutura formal do pensamento; a teoria da complexidade e a teoria dos sistemas dinâmicos, inteiramente novas.

Diante de tal evolução, como poderíamos hoje responder à pergunta "O que é Matemática?" Podemos ver com Devlin (2005, p.26) a Matemática como sendo

> *"a ciência dos padrões"*, onde os padrões, [...] são reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos. Esses padrões podem surgir do mundo que nos cerca, das profundezas do espaço e do tempo e do funcionamento da mente.

> Diferentes tipos de padrão fazem surgir diferentes áreas da matemática, por exemplo, a teoria dos números estuda (e a aritmética usa) padrões de números e cálculos numéricos; a geometria estuda padrões de formas; o cálculo infinitesimal nos permite lidar com padrões de movimento; a lógica estuda padrões de raciocínio; a teoria da probabilidade lida com padrões do acaso; a topologia estuda padrões de proximidade e posição.

Este breve relato convergiu para uma definição da Matemática como a “ciência dos padrões”. Neste caso, a palavra “padrão”, segundo Devlin (2005), é aqui compreendida como ordem, como estrutura e suas relações lógicas, que ocorrem por toda parte na natureza, como os padrões simétricos existentes nas flores; nos nós; nas órbitas descritas pelos planetas à medida que se deslocam pelo céu; na votação de uma população; nos resultados aleatórios em um jogo de dados ou roleta; nas palavras que formam uma frase; no som que reconhecemos como música, entre outros. Esses padrões revelados pela Matemática ajudam-nos a compreender o mundo que nos rodeia, pois o processo de se “fazer” Matemática é mais que cálculos e deduções, envolve a observação de padrões, a prova de conjecturas e a estimativa de resultados.

Ao estudar esses padrões abstratos, a Matemática também nos permite ver semelhanças entre dois fenômenos que, à primeira vista, parecem bem diferentes. Assim, podemos pensar a Matemática como uma lupa que nos possibilita enxergar aquilo que de outro modo nos seria invisível. É a Matemática, ou mais precisamente, uma equação descoberta pelo matemático Daniel Bernoulli no início do século dezoito, portanto muito antes de Santos Dumont sobrevoar Paris com o seu 14 Bis, que nos permite compreender o que faz um avião de algumas toneladas se manter por um longo tempo no ar. E a gravidade? Como sabemos que ela de fato existe? São as equações newtonianas do movimento e da mecânica, do século dezessete, que nos possibilitam “ver” as forças invisíveis que mantêm a Terra girando em torno do Sol e fazem com que uma maçã caia da árvore até o chão. Essas equações, tanto as de Bernoulli quanto as de Newton, são fruto do cálculo infinitesimal, que tornou possível ao homem olhar, através das lentes do primeiro microscópio, para novos e inexplorados mundos do infinitamente pequeno, sem princípio nem fim e, ao mesmo tempo, desvendar a imensidão do céu e seus mistérios.

Na busca incessante de outros mundos e de outras formas de vida, o homem utiliza novos e modernos meios de comunicação. Agora vivemos em uma sociedade de informação, e a forma pictórica de comunicação do *Homo Neanderthalensis* não é mais suficiente para a caverna global. Hoje, nos comunicamos através de aparelhos que são quase uma extensão do braço humano. As novas formas de comunicação do mundo contemporâneo tornaram-se, categoricamente, parte de nossa condição humana. Com o aumento da importância das comunicações multidestinatárias tornou-se desejável que as trocas de informações entre membros de um determinado grupo ocorram em um ambiente seguro, onde haja garantia de privacidade e autenticidade. Além disso, uma das maiores preocupações em um sistema de comunicação relaciona-se às fontes de ruído; garantir que uma mensagem transite entre a fonte de informação e a destinação sem a interferência de qualquer sinal que venha alterar ou danificar a mensagem original é uma tarefa que a Matemática vem desenvolvendo através dos códigos corretores de erros. Eles aparecem em nosso cotidiano de várias maneiras, como quando fazemos uso de informações digitalizadas ao assistir à televisão, falar pelo telefone, ouvir as músicas de um CD, assistir a um DVD ou simplesmente navegar pela internet. Um código corretor de erros é, basicamente, uma forma organizada de acrescentar algum dado a cada informação que precise ser transmitida ou armazenada, de modo que permita, ao se recuperar a informação, detectar e corrigir os erros ocorridos no processo de transmissão da mesma.

Assim, vê-se que a Matemática não é um jogo inventado pelo homem apenas para lidar com os números. Ela diz respeito aos padrões que surgem no mundo à nossa volta, lida com ideias e diz respeito à vida, adentrou nosso mundo e hoje faz parte de nossa condição humana.

Embora o desenvolvimento da Matemática inicialmente estivesse, como vimos, atrelado às práticas do cotidiano, não podemos perder de vista que o seu mais alto sentido não se esgota nas aplicações. Ela, graças a uma secreta harmonia preestabelecida, antecipa-se constantemente às atividades do espírito humano, bem como ao desenvolvimento das ciências congêneres no campo da prática. Com a antecedência de quase duas gerações, às vezes mesmo de séculos, cria o instrumental que será depois aplicado por profissionais de outras áreas e eras. Os códigos corretores de erro, por exemplo, que têm como aporte teórico a teoria dos corpos finitos ou corpos de Galois – matemático que viveu no início do século dezenove e que desenvolveu uma teoria algébrica altamente abstrata à época –, hoje constituem uma ferramenta para a transmissão de informações digitalizadas, no sentido de garantir sua integridade.

Podemos também afirmar que o matemático não é um ser completamente isolado, pois não consegue subtrair-se à poderosa influência de sua época, por mais retraído que possa parecer. Seu pensamento se desenvolve em raciocínios que se encontram sob o signo da evolução e, através de vários caminhos ocultos, subconscientes, o seu espírito, ainda que introvertido, ainda se encontra em contato com o mundo exterior.

Quanto aos problemas que se apresentam como interessantes, às soluções que se oferecem, às associações de ideias, à maneira de refletir, à pergunta sobre o que se deve considerar fácil, difícil ou evidente, tudo isso não é, de forma alguma, propriedade de um único homem, de um pesquisador ou mesmo de um curioso e perspicaz matemático. Pertence à totalidade dos “sábios” e, ainda mais, pertence a toda a humanidade. Como disseram Lévy e Authier (2000), o saber está na humanidade, e esse saber transforma o homem, o seu mundo e, em conseqüência, a sua condição humana.

Nossa intenção aqui não foi, de modo algum, afirmar que todos os acontecimentos do mundo podem ser condensados em uma fórmula mecânico-matemática. Tão somente houve o intuito de traçar um paralelo evolutivo entre o homem e a Matemática e percebermos que estes evolveram imbricados e que a persistência desse homem, enquanto raça humana, não pode ser dissociada do desenvolvimento de conceitos matemáticos. Estes conceitos transmutaram a partir das necessidades prementes do homem, que, por meio deles, começou a contemplar a natureza, perceber o mundo ao seu redor e, como autor de sua própria história, interferir nele, transformando-o. Seja por seus esforços físicos ou mentais, sua capacidade de pensar, de raciocinar, o homem muda sua condição humana transformando o seu mundo. Muda o mundo, muda o homem; muda o homem, muda o mundo.

2.3 Habilidades Matemáticas

Hoje soa absurda a ideia de imaginar o mundo sem a Matemática: o mundo contemporâneo jamais sobreviveria sem ela. Assim como o homem foi capaz de, através de um processo mental, desligar o número do objeto, da mesma forma também foi capaz de atrelar este àquele, numa relação tão estreita que “tudo” passou a ser número. Possuidor do conceito de número puro, isento de peso material e de uma numeração falada ou escrita, o homem desenvolveu uma teoria para os números, cuja contribuição ao desenvolvimento da própria Matemática e, conseguentemente, da humanidade, é inegável.

No entanto, a dependência da humanidade em relação aos números chegou a um limite tal que *o fato de existirmos enquanto espécie nos é necessário, porém não suficiente para garantirmos o que há de humano em nós. C*omo se a criatura tivesse suplantado o criador, agora somos um registro, uma senha, uma estatística, um código, quiçá uma probabilidade de um dia voltarmos a ser novamente *humanos*.

Não obstante, percebemos que desde o aparecimento do homem na Terra, a Matemática vem, de maneira imbricada, crescendo e se transformando com ele e, ao mesmo tempo, transformando-o. A busca de explicações e maneiras de lidar com fatos e fenômenos do seu ambiente natural, social e cultural, possibilitou ao homem gerar e acumular conhecimento no decorrer das eras, conhecimento este que, socializado, organizado socialmente, expropriado pela estrutura de poder e, depois, difundido, forma o que D'Ambrósio (2004) chama de ciclo do conhecimento, isto é, geração, organização intelectual e social e difusão. Tal busca origina os sistemas de conhecimento; de acordo com D'Ambrósio (2004, p. 33),

> um sistema de conhecimento só se justifica quando é validado pela sua incorporação às práticas sociais. E, assim, os sistemas de conhecimento são apontados como uma das características das civilizações. Em todas as civilizações, pode-se reconhecer o esforço, genericamente chamado de educação, para facilitar à população a assimilação dos elementos básicos do sistema de conhecimento.

Uma das características mais notáveis da civilização moderna é a racionalidade. É esta que se dispõe a estabelecer o diálogo entre a ideia e o real, e se manifesta nas diferentes formas de conhecimento presentes nas várias sociedades e culturas do planeta, como, por exemplo, nas religiões, nas artes e, sobretudo, nas ciências e entre elas a Matemática. Sendo assim, a racionalidade tem como resultante a incorporação, no comportamento do cidadão, do pensamento racional. Segundo o autor referido, tal pensamento encontra, nas práticas matemáticas, seu padrão. Daí, a aceitabilidade de que a utilização de habilidades matemáticas, mesmo que sejam informais, é indicador de racionalidade.

Desenvolver e potencializar essas habilidades é uma das funções primordiais da escola, uma vez que elas constituem em ferramentas essenciais para o desenvolvimento dos alunos e como tal, possibilitadoras de uma prática consciente de cidadania.

Embora a Matemática, principalmente no ensino médio, tenha um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo do educando, ela também desempenha um papel instrumental, tendo em vista ser a mesma uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. A esse respeito, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 40) apontam que,

> em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a

> capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade [...]. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática, ele deve ser visto como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Neste sentido, a Matemática é considerada um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

Apesar disto, a Matemática no ensino médio não deve possuir apenas o caráter formativo ou instrumental; neste nível de ensino, é necessário que ela também seja vista como ciência, com suas características estruturais específicas e, assim sendo, é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos na Matemática têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Corroborando o exposto anteriormente, D'Ambrósio (2004) nos diz que só a capacidade de processar informação escrita na vida cotidiana (o que inclui escrita, leitura e cálculo), que ele chama de *literacia* (instrumentos comunicativos), não é suficiente. A complexidade da sociedade moderna, assevera D'Ambrósio, exige que a escola se dedique, com igual prioridade, a fornecer aos estudantes instrumentos analíticos e instrumentos tecnológicos (instrumentos materiais), denominados por ele *materacia* e *tecnoracia*, respectivamente.

Para esse autor, *materacia* é a capacidade de interpretar e manejar sinais e códigos e de propor e utilizar modelos na vida cotidiana. Referindo-se à materacia, Skovsmose (2000) afirma que esta não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática. Segundo D'Ambrósio (2004), *tecnoracia* é a capacidade de usar e combinar instrumentos, simples ou complexos, avaliando suas possibilidades, limitações e adequações a necessidades e situações. D'Ambrósio assegura ainda que as meras alfabetização e contagem não são suficientes para o cidadão; necessárias, mas insuficientes se não forem acompanhadas pelos instrumentos analíticos e tecnológicos que dão significado ao que é feito por indivíduos que dispõem dos instrumentos comunicativos. Em outras palavras, lidar com números, como aparecem nos preços e medidas, nos horários e calendários e, mesmo, ser capaz de efetuar algumas operações elementares, é insuficiente para o cidadão. É enganador crer que a simples alfabetização conduza ao pleno exercício da cidadania.

Vivemos em uma sociedade tecnológica que vem, ao longo das eras, em processo contínuo de transformações, e com elas surgem novas demandas, o que exige que os estudantes estejam preparados para essa mobilidade. Com isto, e em conformidade com os PCNEM (BRASIL, 2002, p. 40), à medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, “é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente”.

Mas o que significa preparar para essa mobilidade, e como a Matemática poderá contribuir para essa preparação? Tentando responder a estas questões, a associação americana *The National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM) apresentou em 1988 um documento denominado “Basic Mathematical Skills for the 21 st Century” contendo as habilidades de base, em Matemática, que no seu entendimento os estudantes do século XXI deveriam possuir.

Para o NCSM, essas habilidades representam as expectativas sobre as competências básicas que os alunos necessitarão durante sua maioridade responsável e que lhes possibilitarão tanto ingressarem no mercado de trabalho, cada vez mais competitivo e exigente, quanto prosseguirem em seu processo de formação. Para tanto, eles deverão revelar uma perfeita compreensão dos conceitos e princípios matemáticos, raciocinar claramente e comunicar efetivamente suas ideias matemáticas, reconhecer aplicações matemáticas no mundo ao seu redor e abordar questões matemáticas com segurança, ou seja, ter as capacidades descritas por D’Ambrósio, citadas anteriormente, e denominadas *literacia, materacia* e *tecnoracia*.

Assim, o NCSM (1988) identifica doze áreas de competência nas quais os alunos deverão apresentar habilidades; são elas: resolução de problemas, comunicação de ideias matemáticas, raciocínio matemático, aplicação da Matemática a situações da vida cotidiana, atenção com a “razoabilidade” dos resultados, estimativa, habilidades apropriadas de cálculo, raciocínio algébrico, medidas, geometria, estatística e probabilidade.

A primeira dessas áreas de competência, a resolução de problemas, o NCSM a compreende como um processo de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos a novas e não familiares situações, cujas estratégias de resolução envolvem: apresentação de questões, análise de situações, transferências de resultados, ilustração de resultados, traçado de diagramas e o uso da técnica de ensaio e erro. Entendida como a principal razão para o estudo da Matemática, a resolução de problemas não deve se restringir a problemas escritos, mas estender-se a problemas não-textuais.

Quanto à comunicação de ideias matemáticas, o NCSM evidencia a necessidade de se aprender a linguagem e a notação matemáticas, para que ideias matemáticas, transmitidas tanto oralmente quanto por escrito ou através de imagens possam ser compreendidas. A esse respeito, Lorenzato e Vila (1993, p. 44), observam que tal habilidade deve ser estimulada: “Se o aluno for chamado constantemente a debater com seus colegas ou com o professor, a argumentar e a contra-argumentar, escrevendo ou falando, isso certamente ajudará a desenvolver sua capacidade de expressão matemática”.

No que se refere ao raciocínio matemático, salienta que os estudantes deverão ser capazes de chegar a conclusões a partir de um dado conjunto de condições; justificar seu pensamento e seu processo de solução, seja por meio de modelos ou usando fatos conhecidos, propriedades e generalizações (argumentos lógicos); identificar padrões, fazer conjecturas e usar contra-exemplos para invalidar uma conjectura. Recomenda, também, que os alunos sejam encorajados a representar matematicamente situações da vida real através de gráficos, diagramas, tabelas e expressões matemáticas e a processar matematicamente os dados representados, obtendo resultados que se deverão ser interpretar à luz da situação real proposta.

Vimos anteriormente que, por vários séculos, a Matemática vem sendo útil ao homem e à sociedade, ajudando a resolver problemas práticos do cotidiano. Não obstante, Lorenzato e Vila (1993, p. 46) afirmam que “aos alunos não é dada a oportunidade de conhecer essa dimensão de aplicabilidade da Matemática a outros domínios pois, na escola, eles se limitam a resolver exercícios repetitivos e padronizados sem nenhuma relação com a vida real”.

No que diz respeito à “razoabilidade”, os educandos deverão ser capazes de verificar, quando obtido um resultado, se ele é razoável ou não com relação aos dados inicias, e isto só é possível se eles desenvolverem o senso numérico.

A capacidade de efetuar cálculos aproximados, seja através da aritmética mental, seja empregando outras técnicas disponíveis, é uma das habilidades de base recomendadas. Os alunos deverão, segundo o NCSM, adquirir a habilidade com técnicas simples de estimativa de comprimento, área, volume e massa e serem capazes de decidir se um resultado particular tem a precisão suficiente para o propósito dado.

No que se refere às habilidades apropriadas de cálculo, recomenda que os alunos devem saber operar com números inteiros, frações e dízimas e, sobretudo, ter a capacidade de escolher métodos apropriados de cálculo (aritmético mental, algoritmo com lápis e papel, instrumentos de cálculo como computadores e calculadoras).

Deverão, também, desenvolver o pensamento algébrico, utilizando a resolução de problemas práticos que envolvam razão e proporção, variação direta e inversa, números positivos e negativos.

A capacidade de medir é uma habilidade de base há muito tempo reconhecido pelos educadores, aparecendo na maioria dos currículos de Matemática. O NCSM reforça essa tendência, ao afirmar que os estudantes deverão aprender, através de situações concretas, os conceitos fundamentais de medidas e desenvolver suas capacidades de medir distâncias, superfícies, massa, tempo, capacidade e temperatura.

Reconhecida como um assunto importante para a formação matemática dos indivíduos, a geometria é um tema apresentado nos currículo do mundo inteiro. Embora negligenciada essa temática por muitos professores, os alunos deverão compreender alguns conceitos geométricos básicos para atuarem efetivamente no mundo tri-dimensional, tais como: paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, como também as propriedades básicas das figuras planas e dos corpos sólidos simples, e recomenda-se, ainda, que esses conceitos geométricos sejam explorados de modo a envolver resolução de problemas e medidas.

Por último, o NCSM apresenta a necessidade de que os aprendizes tenham habilidade básica na áreas de probabilidade e estatística, uma vez eles deverão ser capazes de planejar e utilizar coleções de dados para responder a questões de suas vidas cotidianas, como também ter as capacidades de lidar com medidas de tendência central e de reconhecer os usos básicos de representação estatística de inferência. Em probabilidade recomenda que os alunos aprendam noções elementares para determinar a equiprobabilidade de eventos futuros e compreendam como a Matemática é utilizada para ajudar a fazer predições em diversas situações como, por exemplo, eleições, negócios, eventos esportivos, loteria e crescimento populacional.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2002, p. 46), apontam competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, envolvendo três segmentos: representação e comunicação; investigação e compreensão e contextualização sociocultural.

No que se refere à representação e comunicação, os estudantes deverão ser capazes de:

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

No âmbito da investigação e compreensão, os alunos deverão ter as capacidades de:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Já no segmento da contextualização sociocultural, os alunos devem apresentar as habilidades de:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Considerando que os conteúdos e os problemas matemáticos ensinados/propostos na escola constituem um novo saber, muitas vezes deslocados de sua origem, estes requerem um tratamento didático apropriado como, por exemplo, a utilização da história e da filosofia da ciência, para contextualizá-los, a fim de que o aluno tenha uma noção de que houve um caminho percorrido para se chegar ao saber neles constituídos. Nesse sentido há, então, uma contextualização que é própria do processo do ensino escolar.

Outra dimensão da contextualização relaciona o conhecimento científico e o cotidiano. Muitas vezes confunde-se contextualização com cotidiano, porém, essa relação não é tão simples como aparenta. Nesta direção, as orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2006, p. 50) ponderam que

> Embora a maioria dos fenômenos da natureza e dos avanços tecnológicos faça parte do dia-a-dia de uma parcela significativa da sociedade, sua explicação científica não ocorre com a mesma freqüência. As pessoas explicam muitas coisas utilizando o que se poderia chamar de senso comum. Essas explicações são limitadas a situações específicas e superficiais. A formação geral que a escola deve dar aos seus alunos tem como meta ampliar a compreensão que eles têm do mundo em que vivem. Esse empreendimento não é linear; ao contrário, o conhecimento científico possui características bem diferentes e tem de romper com o senso comum, pois busca a generalização dos conhecimentos adquiridos para uma infinidade de outras situações.

Neste momento que vivemos numa sociedade em processo de transição – sobretudo na comunicação, nos modelos econômicos e sistemas de produção, assim como nos sistemas de governabilidade e tomadas de decisão –, na qual o ensino da Matemática, ainda cumpre o papel, entre outros, de reforçar a ideia dominante de que “inteligência e racionalidade estão identificadas com matemática” (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 115), consideramos que a educação “não pode focalizar a mera transmissão de conteúdos obsoletos, na sua maioria desinteressantes e inúteis, além de inconsequentes na construção de uma nova sociedade” (D’AMBRÓSIO, 2005, p. 40); ao contrário, deve oferecer instrumentos comunicativos, analíticos e materiais que possibilitem aos alunos viver, com capacidade crítica, numa sociedade que também é multicultural e impregnada de tecnologia. Reconhecer e desenvolver esses três tipos de instrumentos – comunicativos, analíticos e materiais – representa, de acordo com Santos (2007, p. 288), “uma forma de se comprometer o processo pedagógico, ou a ação pedagógica, com a construção do cidadão consciente de seus direitos e deveres, e apto para lidar com as diferentes formas como os conhecimentos são construídos e utilizados socialmente”.

Sabemos hoje que os conhecimentos de base elencados acima devem fazer parte da cultura matemática de todos os cidadãos. A falta deles impossibilita o indivíduo de viver com autonomia e compreender o mundo letrado, no qual grande parte das informações são processadas e apresentadas em linguagem matemática. Contudo, parte significativa da população brasileira, segundo os dados do Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF, 2007), que trazemos a seguir, não tem desenvolvido essas habilidades.

2.4 Alfabetismo Funcional

Há mais de meio século, as nações do mundo afirmaram na Declaração Universal dos Direitos Humanos que “toda pessoa tem direito à educação”. Porém, segundo a Declaração Mundial sobre Educação para Todos: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem (Declaração de Jomtien de 1990)[18] (UNESCO, 1998), não obstante os esforços realizados por países do mundo inteiro para assegurar o direito à educação para todos, persistem as seguintes realidades: mais de 100 milhões de crianças, das quais pelo menos 60 milhões são meninas, não têm acesso às series iniciais do ensino fundamental. Mais de 960 milhões de adultos – dois terços dos quais mulheres – são analfabetos, e o analfabetismo funcional é um problema significativo em todos os países industrializados ou em desenvolvimento. Mais de um terço dos adultos do mundo não têm acesso ao conhecimento impresso, às novas habilidades e tecnologias, que poderiam melhorar a qualidade de vida e ajudá-los a perceber e a adaptar-se às mudanças sociais e culturais. E mais de 100 milhões de crianças e incontáveis adultos não conseguem concluir o ciclo básico, e outros milhões, apesar de concluí-lo, não conseguem adquirir conhecimentos e habilidades essenciais, entre estes, os conhecimentos e habilidades matemáticas.

Sendo construção humana, a Matemática pode ser entendida como uma construção social e, como tal, sujeita à concepção que cada sociedade tem do saber e da ciência. Ao considerarmos em específico a sociedade moderna, percebemos que grande parte das informações veiculadas em seu interior é expressa através da linguagem matemática. Taxas, percentuais, coeficientes multiplicativos, diagramas, gráficos e tabelas estatísticas são apenas alguns exemplos dessas informações que permeiam o mundo em que vivemos.

---

[18] Disponível em http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf. Acesso em 13/08/2008.

Para compreendê-las e decifrá-las, é mister que sejamos matematicamente alfabetizados, isto é, que estejamos dentro da faixa de classificação que o Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF) chama de "alfabetismo nível pleno", com as pessoas cujas habilidades não mais impõem restrições para compreender e interpretar elementos usuais da sociedade letrada. No que se refere especificamente à Matemática, isso implica resolver problemas que exigem maior planejamento e controle, envolvendo percentuais, proporções e cálculo de área, além de interpretar tabelas de dupla entrada, mapas e gráficos, ou seja, possuir tais habilidades básicas preconizadas pelo NCSM. Para tanto, Alves (2002, p. 60) chama à responsabilidade social a escola, alertando que esta

> não deve permitir que seus alunos saiam despreparados para atuar como cidadãos conscientes em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia. Parte disso consiste em habilitá-los a resolver problemas do nosso contexto, que possam ser formulados matematicamente. Mas essa capacidade operativa deve ser consequência da compreensão das estruturas, das ideias e dos métodos matemáticos pelos alunos, e não de uma simples aplicação de algoritmos e fórmulas.

Os dados do INAF/Brasil[19], em sua edição de 2007, confirmam uma evolução positiva de sete por cento, em relação aos dados de 2001, do alfabetismo funcional no país. Saindo de 61% dos funcionalmente alfabetizados em 2001/2002 para 68% em 2007, tal crescimento põe em evidência que a escolarização é, de fato, o principal fator de promoção das habilidades de alfabetismo da população brasileira: quanto maior o nível de escolaridade, maior a chance de atingir bons níveis de alfabetismo. No entanto, os resultados também mostram que nem sempre o grau de escolaridade garante o nível de habilidades esperado, conforme demonstrado no quadro abaixo.

---

[19] Os dados do INAF são coletados anualmente junto a amostras nacionais de 2000 pessoas, representativas da população brasileira de 15 a 64 anos, residentes em zonas urbanas e rurais em todas as regiões do país. Em entrevistas domiciliares, são aplicados testes e questionários. O intervalo de confiança estimado é de 95% e a margem de erro máxima estimada é de 2,2 pontos percentuais para mais ou para menos sobre os resultados encontrados no total da amostra. O INAF mede habilidades de leitura, escrita e matemática, independentemente do nível de escolaridade. O formato do teste de matemática é, resumidamente, o seguinte: 36 questões de complexidade variada; demandam habilidades de escrita e leitura de números e de representações matemáticas, como gráficos, tabelas etc.; análise de situações-problema com operações aritméticas; raciocínio matemático e cálculo; utilização de calendário, cédulas e moedas, fita métrica, calculadora, régua; questões respondidas oralmente, somente 1 questão escrita. Em ambos os casos são levantadas também as condições econômicas, socioculturais e familiares dos entrevistados. A realização do INAF, bem como a publicação de seus resultados e do livro Letramento no Brasil: Habilidades Matemáticas fizeram com que diversas esferas da sociedade se posicionassem e debatesse a educação e suas conseqüências, tema fundamental para o crescimento e desenvolvimento do Brasil. Disponível em http://www.vivaleitura.com.br/pnll2/mapa_show.asp?proj=47. Acesso em 14/04/2010.

Quadro 1 Percentual dos níveis de alfabetismo por grau de escolaridade

	1ª a 4ª série	5ª a 8ª série	Ensino Médio	Ensino Superior	Total Brasil (com alguma escolaridade)	Total Brasil (inclui pessoas sem escolaridade)
Analfabeto	12	1	0	0	4	11
Rudimentar	52	26	8	2	26	26
Básico	31	53	45	24	41	37
Pleno	5	20	47	74	29	26
Analfabetos Funcionais	64	27	8	2	30	37
Funcionalmente Alfabetizados	36	73	92	98	70	63

Fonte: INAF (2007)

A esse respeito, os dados dos níveis de alfabetismo por grau de escolaridade apresentam-se reveladores. Se considerarmos apenas o percentual dos alunos que cursaram ou estavam cursando o nível médio, veremos que 8% destes foram enquadrados no nível rudimentar de alfabetismo, ou seja, foram considerados analfabetos funcionais. Embora 92% dos entrevistados dentro dessa faixa de escolaridade fossem avaliados como funcionalmente alfabetizados, percebe-se que 45% desses possuíam nível básico de alfabetismo, enquanto 47% atingem o nível pleno de alfabetismo. Este último nível referido era o desejado e esperado, considerando o grau de escolaridade dos sujeitos pesquisados.

No período compreendido entre 2001 e 2007, os dados do INAF, ao retratar a distribuição dos diferentes níveis de alfabetismo pelo território nacional, evidenciam os contrastes e, por vezes, profundas diferenças regionais, como se vê no quadro a seguir.

Quadro 2 Percentual de alfabetismo por região no período 2001 – 2007

	Norte e Centro Oeste	Nordeste	Sudeste	Sul	Total Brasil
Analfabeto	18	15	8	5	11
Rudimentar	23	31	25	24	26
Básico	35	35	38	38	37
Pleno	24	19	28	33	26
Analfabetos Funcionais	41	46	33	29	37
Funcionalmente Alfabetizados	59	54	67	71	63

Fonte: INAF (2007)

Tomando como referência os dois resultados extremos, verificamos que a população da região Sul é a que tem níveis mais altos de alfabetismo, com 71% de funcionalmente alfabetizados, sendo 1/3 de forma plena. Na extremidade oposta, o Nordeste é a região que apresenta maior contingente de analfabetos funcionais, correspondentes a 46% da sua população entre 15 e 64 anos, e destes, 15% foram avaliados como analfabetos. Se observarmos o percentual para o Brasil, vemos que 37% da população pesquisada foram enquadrados como analfabetos funcionais, ou seja, são pessoas que, mesmo sabendo ler e escrever, não possuem as habilidades de leitura, de escrita e de cálculo necessárias para viabilizar seu desenvolvimento pessoal e profissional.

Para melhor dimensionarmos os dados elencados acima, traremos alguns dos resultados em valores absolutos. De acordo com o último censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE (BRASIL, 2007), a população brasileira de 15 a 64 anos é de aproximadamente 70.900.433 de habitantes. Entre estes, e em conformidade com os índices apresentados pelo INAF (2007), 7.799.048 são considerados analfabetos absolutos e 26.233.160 são considerados analfabetos funcionais. Ao nos reportarmos aos índices apresentados pelo INAF, referentes à região Nordeste do Brasil, que segundo o IBGE tem aproximadamente 24.080.601 de habitantes entre 15 e 64 anos, constatamos que, entre estes, 10.595.464 são considerados analfabetos funcionais e 3.612.090 são considerados analfabetos absolutos.

Diante da magnitude que esses números revelam, podemos perceber que grande parte da população brasileira ainda se encontra sujeita às mais variadas formas de exclusão social. Esta, no entendimento de Castells, trazido por Skovsmose (2007, p. 61), é “o processo pelo qual certos indivíduos e grupos são sistematicamente barrados ao acesso às posições que poderiam capacitá-los a uma vida autônoma dentro dos padrões sociais delimitados pelas instituições e valores em um dado contexto”. E a educação formal de qualidade se constitui uma delas. Desprovido de “letramento e numeramento”[20], que possibilitam ao indivíduo atuar em uma sociedade letrada, como também exercer com autonomia seus direitos e responsabilidades, ele fica refém das mais diferentes formas de exploração social, submetido a trabalhos desqualificados e escravos, com elevada carga horária de trabalho, baixa

[20] O termo “letramento”, assim como “alfabetismo” foram utilizados no Brasil como correspondentes do termo inglês *literacy* , que se refere à condição de pessoas ou grupos sociais que fazem uso da linguagem escrita. No ambiente educacional brasileiro, o termo que se popularizou foi o de letramento, que destaca a capacidade de utilizar a linguagem escrita em diversas práticas sociais, em contraposição a um conhecimento formalizado das regras de funcionamento do código. Posteriormente, por analogia, passou-se também a utilizar o termo *numeracy* para designar a capacidade de operar, em situações práticas, com informações que envolvem quantificação, medidas, representações espaciais e tratamento de dados. O INAF mantém o uso do termo alfabetismo – contraposto ao de analfabetismo – considerando os dois domínios: letramento (processamento de informação verbal em diversos formatos; compreensão e expressão escrita) e numeramento (capacidade de compreender e operar com noções de representações matemáticas envolvidas em situações cotidianas). As situações cotidianas envolvem operações mais simples ou mais complexas, tanto de leitura e escrita quanto de operações matemáticas; o que as caracteriza é envolver tarefas que não requerem muita especialização, tarefas que qualquer pessoa deveria poder realizar com autonomia, seja executar uma receita culinária, seja compreender os argumentos expressos no editorial de um jornal de grande circulação (INAF, 2007).

remuneração salarial, assistência precária à saúde, condições inadequadas de moradia e de saneamento básico, alimentação com baixo teor nutritivo, entre outras.

Excluído da possibilidade de participar ativamente no governo da sociedade, torna-se vulnerável à manipulação política e muitas vezes desprovido dos direitos fundamentais à vida, à liberdade, à igualdade perante a lei, culminando assim com a impossibilidade de exercer plenamente sua cidadania. A ausência de uma população educada tem sido um dos principais obstáculos à construção da cidadania. Educação aqui é entendida como processo de desenvolvimento da capacidade física, intelectual e moral do ser humano, tento em vista sua integração individual, social, cultural e política. Como um dos principais direitos sociais, a educação tem sido historicamente um pré-requisito para a expansão de outros direitos, como os direitos civis e os direitos políticos, haja vista que é ela que permite às pessoas tomarem conhecimento destes e se organizarem para lutar por eles.

Os direitos civis, políticos e sociais compõem a base do que hoje entendemos por cidadania; no entanto, este termo, principalmente no mundo contemporâneo, tem sido apropriado com sentidos e significados diversos. Aparece no discurso de quem detém o poder, políticos e capitalistas, na produção intelectual e nos meios de comunicação. Segundo Carvalho (2007, p. 7) a palavra cidadania caiu, literalmente, na boca do povo. Mais ainda, também de acordo este autor, ela substituiu o próprio povo na retórica política. Não se diz mais “O povo quer isto ou aquilo”, diz-se “A cidadania quer”. Cidadania virou gente! Nela cabem hoje todos os sonhos e todas as realidades. Por isso, visando a entender melhor sua extensão, passamos neste ponto aos conceitos de cidadania.

2.5 Cidadania no Mundo Antigo

O conceito de cidadania não é recente, nem tampouco sua definição é estanque; pelo contrário, conceitos de cidadania floresceram em diversos períodos históricos[21] – na Grécia e na Roma antigas, nos burgos da Europa medieval e nas cidades do Renascimento. O que importa é dizer que o seu sentido varia no tempo e no espaço: por exemplo, existe uma grande diferença entre o cidadão da Grécia antiga e o da atualidade. Ainda hoje, é muito diferente ser cidadão no Brasil, nos Estados Unidos, na Coréia do Norte e no Iraque, não apenas pelas regras que definem a cidadania como, por exemplo, a descendência ou a nacionalidade, isto é, o vínculo que uma pessoa tem com uma comunidade política estatalmente organizada, ou

[21] Para uma visão mais ampla do conceito de cidadania no decorrer da História, ver História da cidadania, organizado por Pinsky e Pinsky (2005).

pelos diversos e variados direitos e deveres que caracterizam o ser cidadão em cada um dos Estados nacionais[22] contemporâneos, mas também pela pluralidade e singularidade do ser humano que habita um espaço comum.

A pluralidade humana, de acordo com Arendt (2005), é a condição básica da ação e do discurso e traz em si o duplo aspecto de igualdade e diferença. O fato de serem iguais faz com que os homens possam compreender-se entre si e aos seus ancestrais, fazer planos para o futuro e prever as necessidades das gerações futuras. De outro lado, o fato de diferir de todos os seres humanos que já existiram, existem ou virão a existir faz com que o homem necessite do discurso ou da ação para se fazer entender. Neste sentido, Arendt (2005, p. 189) afirma que,

> [...] só o homem, porém, é capaz de exprimir essa diferença e distinguir-se; só ele é capaz de comunicar a si próprio e não apenas comunicar alguma coisa – como sede, fome, afeto, hostilidade ou medo. No homem, a alteridade, que ele tem em comum com tudo o que existe, e a distinção, que ele partilha com tudo o que vive, tornam-se singularidade, e a pluralidade humana é a paradoxal pluralidade de seres singulares.

Ainda segundo a autora referida, essa distinção singular vem à tona no discurso e na ação, e é por meio deles que os homens podem distinguir-se, ao invés de permanecerem apenas diferentes. A ação e o discurso são os modos pelos quais os seres humanos se manifestam uns aos outros, não como meros objetos físicos, mas enquanto homens. É com palavras e atos que nos inserimos no mundo humano, enquanto espaço político, e esta inserção é como um segundo nascimento. Arendt argumenta que (2005, p. 33) “o surgimento da cidade-Estado significava que o homem recebera, além de sua vida privada, uma espécie de segunda vida, o seu *bios politicos*”.

A qualidade reveladora do discurso e da ação aflora quando as pessoas estão com as outras, na convivência humana, e isto só é possível na esfera pública. Contudo, se o mundo deve conter um espaço público, assevera Arendt (2005, p. 64), “este espaço não pode ser construído apenas para uma geração e planejado somente para os que estão vivos: deve transcender a duração da vida de homens mortais”.

Também de acordo com Arendt (2005, p. 59), o termo “público” denota dois fenômenos intimamente correlatos, mas não perfeitamente idênticos. No primeiro, o termo público significa que tudo o que vem a público pode ser visto e ouvido por todos e tem a maior divulgação possível. No segundo caso, o termo público designa o próprio mundo, na

---

[22] Chama-se Estado-nação um território delimitado, composto por um governo e uma população de composição étnico-cultural coesa, quase homogênea, sendo esse governo produto dessa mesma composição.

medida em que é comum a todos nós e diferente do lugar que nos cabe dentro dele. Assim, a esfera pública, enquanto espaço comum, reúne-nos na companhia uns dos outros e evita que colidamos uns com os outros. Embora o mundo comum seja o terreno comum a todos, os que nele estão presentes ocupam diferentes lugares no mesmo, e o lugar de um não pode ser ocupado por outro.

Para os gregos, esse espaço era a esfera pública da *polis*, e esta não se restringia à cidade-estado em sua localização física, mas à organização da comunidade, resultante do agir e do falar em conjunto. O seu verdadeiro espaço situava-se entre as pessoas que viviam juntas com tal propósito, não importando onde estivessem.

A esfera da *polis* era a esfera da liberdade, e esta situava-se, exclusivamente, na esfera pública; por isso, o termo cidadania remete-se, de maneira inevitável, à cidadania grega, pela qual os atenienses, reunidos em espaço público, exerciam democraticamente seus direitos acerca das leis, elegiam seus governantes e participavam do destino da cidade. Na Grécia vê-se surgir então a *polis* por meio da autonomia do discurso, da argumentação, provocando desta maneira modificações na vida social. Nesse momento cidadania desponta com a mesma concepção de participação política ou direitos políticos, identificados, assim, como inclusão nas decisões sobre a coletividade.

No entanto, essa participação estava adstrita aos homens livres da cidade. Por esta razão é que, na Grécia antiga, só eram considerados cidadãos aqueles que estivessem em condição de opinar sobre os rumos da sociedade, ou seja, aqueles que se distinguiam dos demais através do discurso e da ação. Para tanto, fazia-se necessário que o homem estivesse completamente livre das preocupações do que lhe é próprio, isto é, da esfera da vida privada, como o trabalho[23] e o labor[24], atividades estas exercidas pelos escravos e pelas mulheres e que garantiam a subsistência de seus donos. Tal exigência fez a cidadania grega ser restrita e excludente, limitada aos homens livres da cidade e, entre estes, apenas ao chefe da família. No mesmo sentido, Guarinello (2005) lembra que a democracia ateniense nunca foi, absolutamente, includente: dizia respeito apenas aos cidadãos masculinos e excluía de qualquer forma de participação política as mulheres, os imigrantes e os escravos. Por outro lado, no âmbito restrito aos cidadãos, representou uma experiência notável de decisão no destino da sociedade.

---

[23] Atividade que corresponde ao artificialismo da existência humana (ARENDT, 2005).
[24] Atividade que corresponde ao processo biológico do corpo humano e assegura a sobrevivência do indivíduo e a vida da espécie (ARENDT, 2005).

Cidadania, no conceito grego, remete a um novo nascimento, quando o homem livre adentra o espaço público da *polis* através de sua participação política. Vemos hoje que, enquanto espaço comum e de liberdade, essa *polis* nem sempre existe. Segundo Arendt (2005, p. 211), embora todos os homens sejam capazes de agir e de falar, a maioria deles – o escravo, o estrangeiro, o bárbaro na Antiguidade, o trabalhador e o artesão antes da Idade Moderna, o assalariado e o homem de negócio da atualidade – não vive nela.

Para Aristóteles, a cidadania implicava a possibilidade concreta do exercício da atividade política, ou seja, ser cidadão significava governar e ser governado. Arendt (2005) enriquece o ponto de vista aristotélico, ao conceber a cidadania como “o direito a ter direitos, considerado como o primeiro direito humano fundamental, do qual todos os demais derivam-se”. Em outros termos, a cidadania inscreve-se no quadro geral dos direitos fundamentais do ser humano. Palma Filho (1998, p. 108) destaca que “embora direito fundamental, a cidadania precisa ser conquistada, não é dada, resulta de um agir conjunto, é uma construção coletiva, opondo-se, portanto, à concessão, ao privilégio”. Não sendo concessão, não pode ser revogada ou retirada. O conceito de cidadania em Arendt possui uma abrangência universal, nada tendo a ver com território ou nacionalidade. É uma qualidade do ser humano, mas que com ele não nasce – precisa ser conquistada. Ou seja, ninguém nasce cidadão, torna-se cidadão. A cidadania não é uma qualidade natural, nem apenas do indivíduo: ao contrário, é social.

No sentido moderno, cidadania é um conceito derivado do contexto da Revolução Francesa, para designar o conjunto de membros de uma sociedade que têm direitos e decidem o destino do Estado. No entanto, essa cidadania liga-se de múltiplas maneiras aos antigos romanos, tanto pelo termo utilizado quanto pela própria noção de cidadão. De acordo com Funari (2005), do latim, a palavra *civis* gerou *civitas* – cidadania –, e esta é uma abstração derivada da junção dos cidadãos. Para os romanos, cidadania, cidade e Estado constituíam um único conceito, e só podia haver esse coletivo se existisse, antes, o cidadão. Segundo Funari (2005, p. 49), “*civis* é o ser humano livre e, por isso, *civitas* carrega a noção de liberdade em seu centro”. Se para os gregos havia primeiro a cidade, a *polis*, e só depois o cidadão, *polites*, para os romanos era o conjunto dos cidadãos que formava a coletividade. Se para os gregos havia cidade e Estado, *politeia*, para os romanos a cidadania, *civitas*, englobava cidade e Estado.

Desde sua origem, Roma caracterizou-se pela diversidade de costumes e povos que viviam na região. No entanto, foi através do domínio dos etruscos – povo originário do norte da Península Itálica – que a cidade de Roma se formou, e, por meio deles, estruturas sociais foram desenvolvidas, instituições e formas de governo foram estabelecidas. Oriunda de uma sociedade formada por dois grandes grupos – a nobreza e o restante da população, este em posição subalterna e sem direitos –, essa bipartição social etrusca foi transferida para Roma, na posterior consolidação de dois grupos sociais, os patrícios – detentores da “nobreza de sangue” – e os plebeus.

A cidadania romana, da mesma forma que a grega, estava atrelada inicialmente à posse da terra. Assim, apenas os proprietários rurais, que detinham também o monopólio dos cargos públicos, religiosos e militares, eram possuidores de direitos e considerados cidadãos. Formando uma unidade econômica, social e religiosa, a família patrícia, encabeçada pelo pai de família, possuía escravos e agregados que atuavam como força auxiliar à aristocracia. Tanto os agregados, denominados *clientes*, como os escravos, estavam excluídos dos direitos de cidadania. Entre o restante da população romana encontravam-se o “povo” e a “plebe”. Vemos em Funari (2005, p. 51) que

> essas palavras se ligam à idéia de multidão, massa. A noção de plebe como grupo surgiu no processo histórico de luta contra os privilégios dos patrícios. Era um termo para englobar todos os cidadãos romanos sem os mesmos direitos dos oligarcas. Na sua base estavam os camponeses livres de poucas posses, aos quais se juntaram os artesãos urbanos e os comerciantes. Ao que tudo indica, a plebe incluía também descendentes de estrangeiros residentes em Roma.

Na citação acima podemos confirmar a existência de uma distinção entre o conceito grego e o conceito romano de cidadania. No primeiro, a cidadania estava restrita aos homens livres da cidade, isto é, àqueles que podiam distinguir-se entre seus iguais, através da ação e do discurso, no espaço público da *polis* grega. O segundo caso se mostra mais abrangente, uma vez que o direito à cidadania na Roma antiga não ficou restrita apenas aos patrícios, mas se estendeu aos camponeses livres, aos comerciantes e aos artesãos, ou seja, o direito à cidadania começou a atingir outras classes sociais.

Segundo Cambi (1999), o *civis romanus* era, porém, formado antes de tudo em família, pelo papel central do pai, cuja autoridade destinada a formar o futuro cidadão é colocada no centro da vida familiar e por ele exercida, abarcando cada aspecto da vida do filho (desde a moral, até os estudos, as letras, a vida social), mas também da mãe, por sua vez menos submissa e menos marginal na vida da família em comparação com a Grécia. Conforme explicita Cambi (1999, p. 106),

> a educação na Roma arcaica teve, sobretudo, caráter prático, familiar e civil, destinada a formar em particular o *civis romanus*, superior aos outros povos

> pela consciência do direito como fundamento da própria 'romanidade' e consciente do vínculo que esta vinha constituir entre os povos, até com os escravos, realizando aquela *Respublica* que 'garantia a cada um e a todos, por meio das instituições e do direito, a segurança das pessoas e da propriedade e o acúmulo de riqueza e vantagens' e solicitava a todos *officia* (deveres) militares, fiscais, políticos, religiosos e também educativos.

De acordo com Funari (2005), a sociedade romana permitia mudanças relacionadas a classes sociais, mas geralmente as alterações se davam para classes inferiores, aumentando assim as tensões no seio dessa sociedade. Aos poucos, os plebeus foram conquistando espaço através de sua presença nos exércitos e chegaram a ter direito a voto no "Tribunado da Plebe" [25]. No entanto, essa expansão de direitos não se deu a partir de concessão, mas sim através das lutas pelos direitos civis e, posteriormente, com a República, quando parte da plebe urbana, já com certo acúmulo de riqueza, adquirida através do artesanato e do comércio, começou a reivindicar direitos políticos e sociais. Lutaram para ocupar cargos públicos, votar no Senado e casar com patrícios, o que, até então, lhes era vetado. Com tais conquistas, as camadas plebéias superiores passaram a integrar a elite aristocrática romana, deslocando-se, com isso, os conflitos sociais. Os confrontos, que até então incidiam sobre os direitos igualitários entre patrícios e plebeus, passam a ocorrer entre dominantes e dominados, romanos e não romanos aliados, senhores e escravos.

Entretanto, só no ano 300 a. C. os plebeus viram algumas de suas reivindicações se concretizarem, tais como ocupar cargos, tanto políticos quanto religiosos, e o direito de defesa em caso de pena máxima. Outras medidas, agora de importância social, também significaram um avanço para o direito de cidadania romana, entre elas a abolição da servidão por dívidas, que escravizava temporariamente os cidadãos pobres e, por conseguinte, tirava-lhes todos os direitos civis. Grande relevância teve, também, a limitação do tamanho das propriedades agrícolas, que permitiu aos camponeses o acesso às terras advindas das conquistas romanas, garantindo-lhes o seu sustento como também a sua independência. A partir de então, a possibilidade de recorrer legalmente dos abusos de autoridade cometidos pelos poderosos e o amplo acesso à informação dos direitos aos cidadãos comuns passaram a constituir os princípios basilares da cidadania romana.

Ainda que a cidadania grega nos traga o ideal de liberdade, por meio do agir e do discurso como participação política e, por meio deles, a inserção no espaço público, é na cidadania romana que encontramos subjacente a própria noção de liberdade, entendida como a

[25] Magistratura com poder de veto às decisões dos patrícios.

não submissão ou sujeição a outra pessoa, conceito este fundamental para as formulações da cidadania no mundo moderno.

Embora o entendimento que temos hoje de cidadania decorra de algumas inspirações advindas de certas realidades do mundo greco-romano, tais como a ideia de democracia, de participação popular nos destinos da coletividade, de soberania do povo e de liberdade do indivíduo, a cidadania nos Estados contemporâneos é um fenômeno único na História. Guarinello ressalta que (2005, p. 29) “não podemos falar de continuidade do mundo antigo, de repetição de uma experiência passada e nem mesmo de um desenvolvimento progressivo que unisse o mundo contemporâneo ao antigo”, haja vista que são mundos dessemelhantes, com sociedades distintas, nas quais, pertencimento, participação, direitos e deveres têm sentidos diferenciados.

2.6 Cidadania no Mundo Moderno

Vemos com Outhwaite (1996, p. 73) que a cidadania moderna, embora influenciada pelas concepções da Antiguidade, possui um caráter próprio. Primeiro, a cidadania formal é hoje quase universalmente definida como a condição de membro de um Estado. Em segundo lugar, a cidadania substantiva, definida como a posse de um corpo civil (leis), político e especialmente social, tem-se tornado cada vez mais importante. Ademais, historicamente, a cidadania tem assumido variadas configurações, em função dos diferentes contextos culturais existentes.

Por terem se desenvolvido dentro do fenômeno, também histórico, chamado Estado, as lutas pelos direitos – civis, políticos e sociais – dos cidadãos sempre se deram dentro dos limites geográficos e políticos desse Estado, bem como, por ser uma luta política nacional, o cidadão que dela surgia também era nacional. É por esta razão que a cidadania, conforme nos lembra Canivez (1991, p. 15), “define a pertença a um Estado. Ela dá ao indivíduo um *status* jurídico, ao qual se ligam direitos e deveres particulares. Esse *status* depende das leis próprias de cada Estado, e pode-se afirmar que há tantos tipos de cidadãos quantos tipos de Estado”. A esse respeito, Dallari (1984, p. 61) assevera que

> a noção de cidadania busca expressar a igualdade dos homens em termos de sua vinculação jurídica a um determinado Estado; portanto, este tem o poder de definir os condicionantes do exercício da cidadania. O cidadão constitui uma criação do Estado, que vai moldá-lo aos seus interesses.

Segundo Carvalho (2007, p. 12), essa relação de pertença, geralmente, dava-se por meio de uma identidade nacional e da lealdade a um Estado. Esta dependia do grau de participação na vida política; aquela, de fatores como a religião, a língua e, sobretudo, as lutas e guerras contra inimigos comuns.

Vivemos um momento em que a cidadania enfrenta novos desafios, busca novos espaços de atuação e abre novas áreas por meio das grandes transformações pela quais passa o mundo contemporâneo. Questões ambientais, econômicas, raciais, territoriais, espaciais, o respeito à diversidade religiosa, sexual e o cosmopolitismo[26], no sentido filosófico, são alguns desses espaços. O direito à educação, afirma Cury (2002, p.246), "é um desses espaços que não perderam e nem perderão sua atualidade". No entanto, é importante que se tenha conhecimento de realidades que, no passado, significaram e, no presente, ainda significam passos relevantes no sentido da garantia de um futuro melhor para todos. Por isso, quando falamos, escrevemos ou pensamos sobre cidadania, jamais podemos olvidar que ela é uma construção lenta, marcada por influências do mundo greco-romano, a qual, todavia, vem se consolidando a partir da Revolução Inglesa, passando pelas Revoluções Americana e Francesa e, muito especialmente, pela Revolução Industrial, por ter sido esta que trouxe uma nova classe social, o proletariado, à cena histórica. Tendo isso em vista, faremos um breve relato dessas revoluções, evidenciando o legado de cada uma delas para a construção e consolidação da cidadania no mundo moderno.

2.6.1 A Revolução Inglesa

O ponto de partida para o desenvolvimento dos direitos de cidadania tem sua localização no século XVII, com a Revolução Inglesa. A transição do feudalismo ao capitalismo na Europa centro-ocidental impôs uma nova visão de mundo, uma vez que os processos de secularização, racionalização e individualização substituíram a milenar percepção teológica das coisas. A partir de então, a legitimidade de uma sociedade hierarquizada, alicerçada em privilégios de nascença, começava a perder força. Segundo Mondaini (2005, p. 115),

> o primado resignador da fé recuou diante da força crítica e otimista do saber científico. Os limites impostos pela natureza (e devidamente justificados pela ética religiosa medieval) foram cada vez menos vistos como algo

[26] Filos. Atitude ou doutrina que prega a indiferença ante a cultura, os interesses e/ou soberania nacionais, com a alegação de que a pátria de todos os homens é o Universo (FERREIRA, 2000).

> intransponível aos seres humanos. Contra o mundo de “verdades reveladas”, assentado no trinômio particularismo/organicismo/ heteronomia[27], construiu-se um outro pautado no trinômio universalidade/individualidade/autonomia, no qual a descoberta das verdades depende do esforço criativo do homem.

O mesmo autor acrescenta que tal projeto civilizatório não podia ser conivente com um corpo ético que, de uma parte, recomendava aos trabalhadores pobres do campo a aceitação passiva do sofrimento, uma vez que este trazia em si a purificação e o caminho seguro dos céus e que, de outra parte, tranquilizava a consciência dos nobres na mais profunda ociosidade. Assim, uma nova visão de mundo exigia o rigoroso questionamento dos princípios que embasavam o sistema estamental[28] de privilégios, a mudança revolucionária da percepção da desigualdade entre os homens como fato natural e/ou instituído pela vontade divina e, por isso mesmo, fadado à eternidade.

Quanto ao citadino, o fato de habitar uma cidade não mais bastava. Os novos tempos exigiam que o homem passasse a ter também direitos nessa mesma cidade e não mais somente deveres. Mondaini (2005, p. 116) afirma que, nesse contexto, “a obscuridade de uma Era dos Deveres abre espaço para uma promissora Era dos Direitos”. O marco para tal transição configura-se a partir daquela que é considerada a primeira revolução burguesa da história, a Revolução Inglesa, que se inicia em 1640 e tem sua conclusão quase meio século depois, em 1688. Nesse momento, o poder estatal passou para as mãos de uma nova classe social, abrindo caminho para o livre desenvolvimento do modo de produção e, dessa maneira, dando origem ao primeiro país capitalista do mundo. De acordo, ainda, com Mondaini (2005, p. 122),

> o velho poder estatal, protetor da antiga ordem feudal, teve que ser apeado por uma guerra civil, uma guerra de classes que opôs, de um lado, “o despotismo do Rei Carlos I defendido pelas forças reacionárias da Igreja vigente e pelos proprietários de terra conservadores” e, de outro lado, “o Parlamento com o apoio entusiástico das classes mercantis e industriais na cidade e, no campo, dos pequenos proprietários rurais, da pequena nobreza progressiva e das massas mais vastas da população.

Soberania parlamentar, monarquia limitada, política externa imperialista e um mundo lucrativo para os homens são heranças deixadas pela Revolução Inglesa. Conquistas concernentes ao direito de cidadania também se evidenciaram, e uma delas foi a superação das tradicionais formas pelas quais o poder absolutista monárquico era legitimado. Teorias

---

[27] Condição de pessoa ou de grupo que receba de um elemento que lhe é exterior, ou de um princípio estranho à razão, a lei a que se deve submeter (FERREIRA, 2000).

[28] Estamento: cada um dos grupos da sociedade com status jurídico próprio, como a nobreza e o clero (FERREIRA, 2000).

defensoras da idéia do Direito Divino dos reis perdiam fôlego e já não mais sustentavam o cerco imposto pela nova racionalidade.

Em torno do cenário político, social e econômico que permeava a Revolução Inglesa, Thomas Hobbes escreveu, em 1651, O Leviatã, que se tornou a sua maior obra política e umas das maiores em sua época. Nela, faz uma defesa incondicional do rei (o Soberano), defendendo a monarquia e o poder absoluto. Em Hobbes (2000), o Estado absoluto passava a ser visualizado como o resultado do estabelecimento de um “contrato social” entre indivíduos que viviam em “estado de natureza”.

Defendendo a ideia de que todos os homens tinham direito a tudo, em seu estado de natureza, Hobbes (2000) assevera que o direito de natureza é a liberdade que cada homem possui de usar seu próprio poder, da maneira que lhe aprouver, para a preservação de sua vida e, em consequência, de fazer tudo aquilo que seu próprio julgamento e a razão lhe indiquem como meios adequados a esse fim. Portanto, sem freios às suas ações, o estado de natureza é um estado onde “o homem é o lobo do próprio homem”.

De acordo com Hobbes (2000), visando a evitar um possível “estado de barbárie” os homens estabelecem entre si um contrato social, trocando sua liberdade pelo “direito à vida” e, para tanto, abrem mão de sua individualidade e a entregam a um poder soberano – o Estado Leviatã – que, em contrapartida, garantiria aos seus súditos um estado de segurança, tranquilidade e sobrevivência por meio de uma ordem comum a todos que estivessem sob seu domínio. A propósito do assunto, observa Mondaini (2005, p. 129) que, “não obstante seu caráter absolutista, o pensamento hobbesiano já aponta para uma percepção moderna da relação Estado/indivíduos, pois situa o primeiro como fruto da vontade racional dos segundos”.

Em Hobbes, o Estado é apresentado como uma invenção artificial do homem, que consensualmente se supera rumo a uma estrutura maior que si próprio. Neste momento, nasce a sociedade política organizada, que visualiza na pessoa do soberano aquele que tem os poderes ilimitados e necessários para proteger a vida de todos. Entretanto, cabem aqui alguns questionamentos: Até onde os poderes do soberano poderiam chegar? Por que possuir um poder ilimitado? Será que um decidindo por todos seria a melhor opção, para o Estado Civil Organizado?

A partir de então, e no mesmo contexto referido acima, surgiu uma nova concepção de Estado, apresentada por John Locke. Assumindo tendências de postura liberal, Locke (1983) defendia os princípios de liberdade individual, colocando o indivíduo sobre as relações pós-contratuais e o direito à propriedade, e propunha uma limitação política dos poderes estatais.

Locke comungava com Hobbes quanto à passagem do estado de natureza para o estado civil mediante um pacto; à liberdade e a igualdade dos indivíduos no estado de natureza; ao argumento da renúncia. Também para Locke, o indivíduo renuncia aos seus poderes originais em prol de um bem comum: todos concordam em obedecer às leis e sabem a quem devem obedecer. A diferença fundamental é que, na visão de Locke, tudo isso tem limites: os direitos naturais, a renúncia, a obediência. Ou seja, Locke impôs limites no que, na teoria de Hobbes, parecia ser ilimitado. Enquanto para Hobbes o poder é absoluto, indivisível e irresistível, Locke defendia exatamente o contrário: para ele, o poder é limitado, divisível e resistível. Com tal pensamento, Locke rompeu com o "pacto de submissão" proposto por Hobbes, em nome de um "pacto de consentimentos" e, assim, abria caminho para os primeiros passos daquilo que hoje conhecemos como "direitos humanos"; em outras palavras, nos abriu a possibilidade histórica de um Estado de direito, um Estado de Cidadãos, regido não mais por um poder absoluto, mas por uma Carta de Direitos.

Entretanto, Bobbio (1992, p.75) aponta que

> não existe atualmente nenhuma carta de direitos que não reconheça o direito à instrução – crescente, de resto, de sociedade para sociedade – primeiro elementar, depois secundária e pouco a pouco, até mesmo universitária. Não me consta que, nas mais conhecidas descrições do estado de natureza, esse direito fosse mencionado. A verdade é que esse direito não fora posto no estado de natureza porque não emergia na sociedade da época em que nasceram as doutrinas jusnaturalistas, quando as exigências fundamentais que partiam daquelas sociedades para chegarem aos poderosos da Terra eram principalmente exigências de liberdade em face das igrejas e dos Estados, e não ainda de outros bens, como a instrução, que somente uma sociedade mais evoluída economicamente e socialmente poderia expressar.

Hoje, praticamente não há país no mundo que não garanta, em seus textos legais, o acesso de seus cidadãos à educação básica. Afinal, como observa Cury (2002, p. 246), "a educação escolar é uma dimensão fundante da cidadania, e como tal princípio é indispensável para políticas que visam à participação de todos nos espaços sociais e políticos e, mesmo, para a reinserção no mundo do trabalho".

Não são poucos os documentos de caráter internacional, assinados por países da Organização das Nações Unidas – ONU, que reconhecem e garantem esse acesso a seus cidadãos. Tal é o caso do art. XXVI da Declaração Universal dos Direitos Humanos[29], de 1948, ao afirmar que

[29] http://www.onu-brasil.org.br/documentos_direitoshumanos.php. Acesso em 11/08/2008.

1. Todo ser humano tem direito à instrução. A instrução será gratuita, pelo menos nos graus elementares e fundamentais. A instrução elementar será obrigatória. A instrução técnico-profissional será acessível a todos, bem como a instrução superior, esta baseada no mérito.

2. A instrução será orientada no sentido do pleno desenvolvimento da personalidade humana e do fortalecimento do respeito pelos direitos humanos e pelas liberdades fundamentais. A instrução promoverá a compreensão, a tolerância e a amizade entre todas as nações e grupos raciais ou religiosos, e coadjuvará as atividades das Nações Unidas em prol da manutenção da paz.

3. Os pais têm prioridade de direito na escolha do gênero de instrução que será ministrada a seus filhos.

Do mesmo assunto ocupa-se a Convenção Relativa à Luta contra a Discriminação no Campo do Ensino[30], de 1960, que considera discriminação na esfera educacional toda distinção, exclusão, limitação ou preferência que, com fundamento na raça, cor, sexo, língua, religião, política ou qualquer outra opinião, origem nacional ou social, condição econômica ou de nascimento, tenha a finalidade ou o efeito de destruir ou alterar a igualdade de tratamento quanto à educação, em especial:

1. Excluir qualquer pessoa ou grupo de pessoas do acesso a diversos tipos e grau de ensino;

2. Limitar a um nível inferior a educação de uma pessoa ou de um grupo;

3. Sob reserva das provisões do artigo 2 da presente Convenção, instituir ou manter sistemas ou estabelecimentos de ensino separados para pessoas ou grupos;

4. Colocar uma pessoa ou grupo numa situação de ensino incompatível com a dignidade humana.

[30]http://www.mp.sp.gov.br/portal/page/portal/cao_infancia_juventude. Acesso em 11/08/2008.

Ao empregar a palavra “ensino”, a aludida Convenção entende que esta se refere ao ensino de diversos tipos e graus e compreende o acesso ao ensino, o nível e a qualidade do mesmo e as condições em que é ministrado.

Em conformidade com o exposto acima, o Artigo 13 do Pacto Internacional dos Direitos Econômicos, Sociais e Culturais[31] de 1966, em seus parágrafos primeiro e segundo, assegura o que segue.

Parágrafo 1 - Os Estados-partes no presente Pacto reconhecem o direito de toda pessoa à educação. Concordam em que a educação deverá visar ao pleno desenvolvimento da personalidade humana e do sentido de sua dignidade e a fortalecer o respeito pelos direitos humanos e liberdades fundamentais. Concordam ainda que a educação deverá capacitar todas as pessoas a participar efetivamente de uma sociedade livre, favorecer a compreensão, a tolerância e a amizade entre todas as nações e entre todos os grupos raciais, étnicos ou religiosos e promover as atividades das Nações Unidas em prol da manutenção da paz.

Parágrafo 2 - Os Estados-partes no presente Pacto reconhecem que, com o objetivo de assegurar o pleno exercício desse direito:

1. A educação primária deverá ser obrigatória e acessível gratuitamente a todos.

2. A educação secundária em suas diferentes formas, inclusive a educação secundária técnica e profissional, deverá ser generalizada e tornar-se acessível a todos, por todos os meios apropriados e, principalmente, pela implementação progressiva do ensino gratuito.

3. A educação de nível superior deverá igualmente tornar-se acessível a todos, com base na capacidade de cada um, por todos os meios apropriados e, principalmente, pela implementação progressiva do ensino gratuito.

4. Dever-se-á fomentar e intensificar, na medida do possível, a educação de base para aquelas pessoas que não receberam educação primária ou não concluíram o ciclo completo de educação primária.

[31] http://www.agende.org.br/docs/File/convencoes/pidesc/docs/PIDESC.pdf. Acesso em 11/08/2008.

5. Será preciso prosseguir ativamente o desenvolvimento de uma rede escolar em todos os níveis de ensino, implementar-se um sistema adequado de bolsas de estudo e melhorar continuamente as condições materiais do corpo docente.

6. Os Estados-partes no presente Pacto comprometem-se a respeitar a liberdade dos pais e, quando for o caso, dos tutores legais, de escolher para seus filhos escolas distintas daquelas criadas pelas autoridades públicas, sempre que atendam aos padrões mínimos de ensino prescritos ou aprovados pelo Estado, e de fazer com que seus filhos venham a receber educação religiosa ou moral que esteja de acordo com suas próprias convicções.

7. Nenhuma das disposições do presente artigo poderá ser interpretada no sentido de restringir a liberdade de indivíduos e de entidades de criar e dirigir instituições de ensino, desde que respeitados os princípios enunciados no parágrafo 1º do presente artigo e que essas instituições observem os padrões mínimos prescritos pelo Estado.

E por último, temos a Declaração Mundial sobre Educação para Todos – Declaração de Jomtien[32] (UNESCO, 1990), que tem como um dos objetivos de uma Educação para Todos o que traz em seu Artigo 1, intitulado Satisfazer as Necessidades Básicas de Aprendizagem:

1. Cada pessoa – criança, jovem ou adulto – deve estar em condições de aproveitar as oportunidades educativas voltadas para satisfazer suas necessidades básicas de aprendizagem. Essas necessidades compreendem tanto os instrumentos essenciais para a aprendizagem (como a leitura e a escrita, a expressão oral, o cálculo, a solução de problemas), quanto os conteúdos básicos da aprendizagem (como conhecimentos, habilidades, valores e atitudes), necessários para que os seres humanos possam sobreviver, desenvolver plenamente suas potencialidades, viver e trabalhar com dignidade, participar plenamente do desenvolvimento, melhorar a qualidade de vida, tomar decisões fundamentadas e continuar aprendendo. A amplitude das necessidades básicas de aprendizagem e a maneira de satisfazê-las variam

[32] Disponível em http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf. Acesso em 13/08/2008.

segundo cada país e cada cultura e, inevitavelmente, mudam com o decorrer do tempo.

2. A satisfação dessas necessidades confere aos membros de uma sociedade a possibilidade e, ao mesmo tempo, a responsabilidade de respeitar e desenvolver sua herança cultural, linguística e espiritual, de promover a educação de outros, de defender a causa da justiça social, de proteger o meio-ambiente e de ser tolerante com os sistemas sociais, políticos e religiosos que difiram dos seus, assegurando respeito aos valores humanistas e aos direitos humanos comumente aceitos, bem como de trabalhar pela paz e pela solidariedade internacionais em um mundo interdependente.

3. Outro objetivo, não menos fundamental, do desenvolvimento da educação, é o enriquecimento dos valores culturais e morais comuns. É nesses valores que os indivíduos e a sociedade encontram sua identidade e sua dignidade.

4. A educação básica é mais do que uma finalidade em si mesma. Ela é a base para a aprendizagem e o desenvolvimento humano permanentes, sobre a qual os países podem construir, sistematicamente, níveis e tipos mais adiantados de educação e capacitação.

Diante do exposto, não podemos negar os esforços levados adiante pela Organização das Nações Unidas, através da UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura), no sentido da universalização do ensino, pelo menos o fundamental. No entanto, conforme observa Cury (2002), como se trata de direito reconhecido, faz-se necessário que ele seja garantido e, por esta razão, a primeira garantia é que ele esteja inscrito em lei de caráter nacional, uma vez que o contorno legal indica os direitos, os deveres, as proibições e as possibilidades de limites de atuação. Acrescente-se que tudo isso possui grande impacto no cotidiano das pessoas, mesmo que nem sempre elas estejam conscientes de todas as implicações e consequências.

Nesse contexto, importa lembrar com Bobbio (1992, p. 79) que

> a existência de um direito, seja em sentido forte ou fraco, implica sempre a existência de um sistema normativo, onde por “existência” deve entender-se

> tanto o mero fator exterior de um direito histórico ou vigente quanto o reconhecimento de um conjunto de normas como guia da própria ação. A figura do direito tem como correlato a figura da obrigação.

Neste sentido, poderíamos entender que, juntamente com o direito à educação, o cidadão tem o dever de se instruir. No entanto, em muitos casos, a realização dessas expectativas e do próprio sentido expresso da lei confronta-se com as adversas condições sociais de funcionamento da sociedade em face dos estatutos de igualdade política por ela reconhecidos. É por esta razão, entre outras, que a importância da lei não é identificada e reconhecida como um instrumento linear ou mecânico de realização de direitos sociais; ela acompanha o desenvolvimento contextualizado da cidadania em todos os países. De acordo com Cury (2002, p. 247), essa importância

> nasce do caráter contraditório que a acompanha: nela sempre reside uma dimensão de luta. Luta por inscrições mais democráticas, por efetivações mais realistas, contra descaracterizações mutiladoras, por sonhos de justiças. Todo o avanço da educação escolar, além do ensino primário foi fruto de lutas conduzidas por uma concepção democrática da sociedade em que se postula ou a igualdade de oportunidades ou mesmo a igualdade de condições sociais.

No entanto, é preciso reconhecer que a inscrição de um direito no código legal de um país não acontece da noite para o dia. Trata-se da história da produção de um direito que tem sua clara presença a partir da era moderna, tendo a Revolução Inglesa como marco. Não obstante, a Revolução Americana também deixou sua contribuição à consolidação do que entendemos hoje por cidadania.

2.6.2 O legado da Revolução Americana

Foi com a Revolução Americana, em 1776, que, de acordo com Singer (2005), pela primeira vez um povo fundamentou sua aspiração à independência nos princípios da cidadania, ou seja, colocou como finalidade primordial do Estado a preservação das liberdades dos integrantes do povo, elevados à condição de sujeitos políticos.

A Independência dos Estados Unidos logrou repercussão internacional, não apenas por ter este país se libertado, enquanto colônia no Novo Mundo, de uma das mais pujantes nações da época, a Grã-Bretanha, mas pelo fato de ter sido acompanhada por uma Declaração de Independência, cujas ideias básicas eram a concretização de alguns ideais do século XVIII: o direito à vida, à liberdade e à igualdade entre os homens.

A Declaração de Independência dos Estados Unidos da América proclama[33] que todos os homens são criados iguais; que todos são dotados pelo seu Criador de certos direitos inalienáveis; que entre estes estão a vida, a liberdade e a busca da felicidade e que para assegurar estes direitos, governos são instituídos entre os homens, derivando seus justos poderes do consentimento dos governados; que sempre que alguma forma de governo se tornar destrutiva destes fins, é direito do povo alterá-la ou aboli-la e instituir novo governo, pondo seus fundamentos em tais princípios e organizando seus poderes de tal forma que lhe pareça a mais provável de realizar sua segurança e felicidade.

Segundo Karnal (2005), contudo, observada a Declaração na forma da lei, os Estados Unidos da América tinham criado a mais ampla possibilidade democrática do planeta na época de sua independência: poderes equilibrados, presidentes eleitos regularmente, uma constituição inscrita com princípios de liberdade; porém, o orgulho americano do seu sistema e a admiração do mundo pelo mesmo ocultavam um dado importante. A cidadania e a liberdade criadas com a Independência e a Constituição estavam extremamente limitadas. Mulheres e brancos pobres não votavam, os ideais de liberdade conviviam com a instituição da escravidão, e os indígenas continuavam excluídos. Se a liberdade era um direito inalienável de todos, como afirmava a Declaração de Independência, não havia como negá-la a uma parte da população, a não ser que se negasse a condição humana a essa parte. Assim, de acordo com Carvalho (2007, p. 50), “os pensadores sulistas que justificaram a escravidão [...] tiveram que partir de uma premissa que negava a igualdade estabelecida nos textos constitucionais. Para eles, as pessoas eram naturalmente desiguais, justificando-se o domínio dos superiores sobre os inferiores”.

Em consequência do exposto, Karnal (2005, p. 143) relata que

> os autores mais críticos, como o norte-americano H. Aptherker, sempre destacaram o caráter limitado da Revolução Americana. Para ele, apesar das grandes novidades do texto, a Declaração de Independência apresenta “o Estado de forma idealista e vê o homem de maneira abstrata, e não o homem e a mulher numa sociedade de classe dominante”.

Não obstante, a liberdade religiosa, a liberdade de imprensa e o sufrágio universal masculino enquanto liberdade de o indivíduo escolher seus governantes são princípios fundantes do direito civil e um dos legados deixados pela Revolução Americana para seu povo, com reflexos para outros países.

---

[33] http:// www.embaixada-americana.org.br. Acesso em 11/08/2008.

2.6.3 A Revolução Francesa

A Revolução Francesa em 1789, compreendeu um conjunto de acontecimentos do século XVIII, que alteraram o quadro político e social da França. Em causa estavam o Antigo Regime (*Ancien Régme* – sistema social e político aristocrático) e as autoridades do clero e da nobreza. Influenciada pelos ideais do Iluminismo[34] e da Independência Americana, está entre as maiores revoluções da história da humanidade.

Considerada como o acontecimento que deu início à Idade Contemporânea, aboliu a servidão e os direitos feudais e proclamou os princípios universais de “Liberdade, Igualdade e Fraternidade”. Eram estes os direitos que sintetizavam a natureza do novo cidadão francês e estas as palavras de ordem dos que se amotinassem contra a miséria e a opressão das quais havia séculos padeciam.

A Revolução Francesa teve como apogeu a Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão[35], a qual trazia em seu primeiro artigo que “os homens nascem e permanecem livres e iguais em direitos”. Tais direitos são naturais e imprescritíveis e consistem na liberdade, no direito à propriedade, na segurança e na resistência à opressão.

O novo homem que nascesse a partir daí seria intrinsecamente um cidadão, cuja liberdade deveria estar também assegurada, liberdade esta, conforme o Artigo 4º da Declaração, entendida como o “direito de fazer tudo que não prejudique aos outros”. Por outro lado, a Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão não se restringiu a garantir os direitos civis do cidadão, mas estabeleceu também seus limites, quando afirmou em seu décimo artigo que “ninguém deve ser incomodado por causa de suas opiniões, inclusive as religiosas, na medida em que sua expressão não perturbar a ordem pública, inscrita na lei”. Quanto a este décimo artigo, Odalia (2005, p. 167) pondera que,

---

[34] O Iluminismo representa a saída dos seres humanos de uma tutelagem que estes mesmos impuseram a si. Tutelados são aqueles que se encontram incapazes de fazer uso da própria razão independentemente da direção de outrem. É-se culpado da própria tutelagem quando esta resulta não de uma deficiência do entendimento mas da falta de resolução e coragem para se fazer uso do entendimento independentemente da direção de outrem. Sapere aude! Tem coragem para fazer uso da tua própria razão! – esse é o lema do Iluminismo. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Iluminismo. Acesso em 13/08/2008.

[35] Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Declara%C3%A7%C3%A3o_dos_Direitos_do_Homem_e_do_Cidad % C3%A3o. Acesso em 13/08/2008.

> se ao cidadão é assegurado o direito de falar e escrever, imprimir e publicar, não lhe cabe o direito de ofender ou desobedecer o que é normatizado pela lei. E esta é sem dúvida, uma restrição bastante ponderável, pois coloca a lei acima dos direitos de cidadania, tão recentemente alcançados.

Para Singer (2005), a Constituição Francesa de 1791[36], decorrente da Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão, não foi generosa quanto à atribuição de direitos civis e políticos, uma vez que ela distinguia os cidadãos ativos, com todos os direitos, e os cidadãos passivos, com direitos legais e humanos, mas não políticos. A este respeito, Singer (2005, p. 214) arrola que

> eram destituídos dos direitos de votar e ser votados as mulheres, os menores de 25 anos, os que não possuíam domicílio legal num cantão, os que não pagavam algum imposto direto equivalente a pelo menos três dias de trabalho e todas as pessoas tidas como "domésticas", ou seja, servidores empregados por nobres mas também assalariados da indústria, porque alegadamente seriam incapazes de votar livremente.

Como uma forma de dar satisfação aos pobres e já apontando os direitos sociais como benevolência dos governantes, embutindo neles o caráter assistencialista que carregam até os dias de hoje, essa Constituição "burguesa", segundo Singer (2005, p. 212), dispunha que "estabelecimentos de assistência pública deveriam ser instituídos e organizados para criar crianças abandonadas, aliviar os pobres enfermos e prover trabalho para os pobres saudáveis que forem incapazes de consegui-lo por si mesmos".

No entanto, a mesma Constituição prescrevia também um sistema "de Instrução Pública comum a todos os cidadãos, gratuito com respeito àquelas partes do ensino que são indispensáveis a todos os homens" e cujos institutos seriam distribuídos "em todo o reino". Conforme observa Cambi (1999, p. 366), estavam fixados, assim, os princípios da pedagogia revolucionária, quais sejam: instrução pública para todos, administrada pelo Estado, de caráter laico e livre, destinada a formar o cidadão fiel às leis e ao Estado.

Ao lado da elaboração de programas de reforma escolar e de intervenção legislativa, a Revolução Francesa pôs em ação um intenso trabalho educativo que deveria desenvolver nos indivíduos a consciência de pertencer ao Estado e fazê-los se sentirem cidadãos de uma nação, ativamente partícipes dos seus ritos coletivos e capazes de reivindicar seus ideais e valores.

A importância do ensino básico tornado um direito imprescindível do cidadão e um dever do Estado impôs a gratuidade como um modo de torná-lo acessível a todos. Por isso, o

---

[36] Disponível em http://www.fafich.ufmg.br/~luarnaut/const91.pdf. Acesso em 13/08/2008.

direito à educação escolar inscreve-se dentro de uma perspectiva mais ampla dos direitos civis dos cidadãos. Vemos em Cury (2002, p. 248) que “tais direitos vão sendo concebidos, lentamente, como uma herança dos tesouros da civilização humana e, portanto, não é cabível que alguém não possa herdá-los”. Ao oferecer a educação escolar gratuita, o próprio Estado assegura uma condição universal para o usufruto dos direitos civis, e estes só podem ser exercidos plenamente dentro de um Estado democrático de direitos. Cury (2002, p. 249), explica, ainda, que

> a ligação entre o direito à educação escolar e a democracia terá a legislação como um de seus suportes e invocará o Estado como provedor desse bem, seja para garantir a igualdade de oportunidades, seja para, uma vez mantido esse objetivo, intervir no domínio das desigualdades, que nascem do conflito da distribuição capitalista da riqueza, e progressivamente reduzir as desigualdades. A intervenção tornar-se-á mais concreta quando da associação entre gratuidade e obrigatoriedade, já que a obrigatoriedade é um modo de sobrepor uma função social relevante e imprescindível de uma democracia a um direito civil.

Na visão de Marshall (1967), a história do direito à educação escolar é semelhante à da luta por uma legislação protetora dos trabalhadores da indústria nascente com a Revolução Industrial, pois, em ambos os casos, foi no século XIX que se lançaram as bases para os direitos sociais como integrantes da cidadania. O autor afirma também que “a educação é um pré-requisito necessário da liberdade civil” e, como tal, um pré-requisito do exercício de outros direitos e considera (p. 73) que

> a educação das crianças está diretamente relacionada com a cidadania, e, quando o Estado garante que todas as crianças serão educadas, este tem em mente, sem sombra de dúvida, as exigências e a natureza da cidadania. Está tentando estimular o desenvolvimento de cidadãos em formação. O direito à educação é um direito social de cidadania genuíno porque o objetivo da educação durante a infância é de moldar o adulto em perspectiva. Basicamente, deveria ser considerado não como direito da criança frequentar a escola, mas como o direito do cidadão adulto ter sido educado.

Vimos que o direito à educação, como um direito declarado em lei, é recente e remonta ao final do século XVIII, e seria pouco realista considerá-lo independentemente do jogo das forças sociais em conflito. Ele constitui um produto dos processos sociais, levados adiante por diversos segmentos da sociedade, que viram na educação um meio de participação na vida econômica, social e política, ou seja, de inserção na sociedade enquanto cidadãos.

Depois da Revolução Francesa, vemos a Revolução Industrial, iniciada na Inglaterra em meados do século XVIII – constituída por um conjunto de mudanças tecnológicas que impactou profundamente o processo produtivo no plano econômico, político e social – e que se expandiu pelo mundo a partir do século XIX, que trouxe à cena histórica uma nova classe social, o proletariado. Submetida à exploração do capital, esta nova classe, ao tomar consciência das questões sociais, começou a reivindicar melhores condições de trabalho. Tal reivindicação, além de abrir caminho para as primeiras conquistas sociais dos trabalhadores, significou, também, um avanço inegável, sobretudo no que se refere aos direitos civis.

2.6.4 A Revolução Industrial

Produzida por um complexo feixe de eventos que vão desde a revolução agrícola e a acumulação de capital que esta promove até a invenção das máquinas, a libertação da força-trabalho do campo, o crescimento do mercado mundial, o processo de urbanização, entre outros, e firmada antes de tudo na Inglaterra, a Revolução Industrial (1780 – 1840) transformou profundamente a sociedade moderna, produzindo também uma nova classe social: o proletariado e um novo sujeito socioeconômico: o operário.

Conforme análise de Cambi (1999), este complexo processo de transformação econômico-social manifestou-se como a submissão de massas bastante numerosas de homens, mulheres e crianças às mais férreas leis do capital[37] e reorganizou a existência, mentalidade e aspirações dessas pessoas, dando vida a um processo "educativo" bastante articulado, mas que girava em torno do princípio da alienação. Alienação das necessidades e alienação nas máquinas, produzida por um trabalho cego, regulado pela exploração, e por uma vida social estruturada pelo trabalho que era organizado, não em função do homem, mas apenas da produção e da mais-valia.

Máquinas automáticas de grande porte, movidas a vapor, substituíam o trabalho de muitos artesãos, que, cada vez menos capazes de competir com a produção maquinal, foram obrigados a procurar trabalho assalariado para sobreviver, surgindo assim um vasto proletariado fabril. Ao mesmo tempo, novos métodos de plantio e criação de animais aumentavam acentuadamente a produtividade do trabalho na terra. No entanto, sua aplicação exigia a dissolução da aldeia tradicional e das regras de cultivo coletivo – que impediam o avanço técnico que se implantava pela iniciativa individual de latifundiários aristocráticos e por agricultores capitalistas –, o que levou à expulsão dos habitantes das aldeias e sua redução a proletários agrícolas.

[37] As leis da mais-valia, da exploração intensiva da força de trabalho, da produção de mercadorias por máquinas, do mercado, etc. (CAMBI, 1999).

De acordo com Hobsbawn (2000), o novo sistema manufatureiro inglês consistia em três elementos: a divisão da população ativa entre empregadores capitalistas e trabalhadores que nada possuíam senão sua força de trabalho e que se vendiam em troca de salário; a produção na “fábrica”, uma combinação de máquinas especializadas com mão-de-obra humana especializada; e a dominação de toda a economia pela procura e acúmulo de lucro por parte dos capitalistas.

Enfrentando condições de trabalho extremamente duras, com longas jornadas de trabalho, falta de higiene e salários insuficientes para a subsistência de suas famílias, o operário, radicalmente deseducado e desumanizado, vive uma condição duplamente alienada, no tempo e no trabalho. Segundo Cambi (1999), no primeiro destes ele é um apêndice da máquina e, no segundo, apenas um bruto que recarrega suas forças para voltar ao trabalho e o faz no jogo, no álcool e na prostituição. Em tais condições, a família se desarticula, se fragmenta, perde toda a valência educativa, esmagada pelos problemas do trabalho e da miséria.

As crianças, também inseridas no sistema de fábrica, em duríssimas condições de vida, são desnutridas, macilentas, raquíticas, retardadas; muitas vezes nascem, vivem e morrem na fábrica, sem conhecer outra realidade a não ser aquela imunda e ensurdecedora das oficinas. Acerca desta situação, constata Cambi (1999, p. 370): “Estamos diante de uma infância expropriada de qualquer direito à saúde, à educação, ao crescimento: direitos elementares que o sistema de fábrica anula de maneira total e sistemática”. No entanto, filantropos, intelectuais esclarecidos, políticos progressistas elevaram vozes de protesto contra o trabalho infantil e do menor em geral, reclamando da parte dos governos intervenções que limitassem horários e formas de trabalho, fixassem regras e limites de idade, ao mesmo tempo que a grande concentração operária e a difusão de ideias políticas mais avançadas e revolucionárias faziam com que os operários tomassem consciência da “questão social”. Assim, de acordo com Singer (2005, p. 222),

> as primeiras Leis Fabris foram os primeiros direitos sociais legalmente conquistados na era do capitalismo industrial. A limitação de idade para o trabalho infantil e a jornada de trabalho para as crianças e adolescentes são intervenções do Estado no funcionamento livre do mercado de trabalho. Essas leis declaram que a liberdade de contratar não é ilimitada e que o limite é a pessoa humana, cuja integridade física e mental tem de ser preservada.

Sob o ponto de vista da cidadania, ao tomarem os trabalhadores consciência das questões sociais, as suas reivindicações significaram um avanço inegável, sobretudo no que se refere aos direitos civis. Em resposta às duríssimas condições de vida a que estavam submetidos, os operários sindicalizaram-se e adotaram técnicas como a greve de resistência e boicote em relação às ofertas de trabalho. Sob a pressão das massas operárias organizadas, foram criadas, então, condições mais suportáveis de trabalho, fixados horários e salários, como, também, reguladas condições higiênicas e prevenções para doenças e acidentes. Estas reivindicações organizadas e estas organizações operárias que as orientavam desenvolveram um papel eminentemente educativo por meio da imprensa, dos congressos, das manifestações públicas, agindo no mais profundo da sociedade, construindo a consciência de classe e ligando a um universo de valores, de fins e de objetivos amplas massas populares, vindo a caracterizar intimamente sua existência, marcada por um compromisso de solidariedade e por ideais de emancipação.

No curso do século XVIII, predominou o aspecto mais dramático da Revolução Industrial, caracterizado pela exploração e pela alienação, pela alta mortalidade e pelas condições de vida mais pobres, que implicavam degradação moral e abandono das crianças, diluindo todas as práxis educativas que tinham estado à disposição do povo na sociedade tradicional. No entanto, é nesse mesmo século que se vê nascer o direito social do cidadão.

2.7 Cidadania como Direito Civil, Político e Social

Em seu clássico artigo “Cidadania e classe social”, Marshall (1967, p. 73) escreve:

> A cidadania é um status concedido àqueles que são membros integrais de uma comunidade. Todos aqueles que possuem o status são iguais com respeito aos direitos e obrigações pertinentes aos status. Não há nenhum princípio universal que determine o que estes direitos e obrigações serão, mas as sociedades nas quais a cidadania é uma instituição em desenvolvimento criam uma imagem de uma cidadania ideal em relação à qual o sucesso pode ser medido e em relação à qual a inspiração pode ser dirigida.

O autor em pauta não nos diz quem cria essa “imagem ideal”, apesar de afirmar sua importância, pois é através dela que será “medido o sucesso” e é ela que dá a direção dos anseios da sociedade. Diante do exposto, fica aqui uma indagação: Essa imagem ideal é criada por intervenções externas à sociedade, ou é na prática social que esse ideário é criado?

Entretanto, investigando o direito a ter direito, Marshall (1967), invocou a trajetória de implantação dos direitos civis, no século XVIII, dos direitos políticos, no século XIX e dos direitos sociais, no século XX, na Inglaterra e, sem pretensão de universalidade, generalizou a noção de cidadania e de seus constitutivos, ao desdobrá-la em três elementos: civis, políticos e sociais.

Para esse escritor, o elemento civil é composto dos direitos necessários à liberdade individual – liberdade de ir e vir, liberdade de imprensa, pensamento e fé, direito à propriedade e de concluir contratos válidos, direito à justiça e igualdade perante a lei, à segurança, entre outros. Estes são os direitos que embasam a concepção liberal clássica.

Por elemento político se deve entender o direito de participar no exercício do poder político, como membro de um organismo investido da autoridade política ou como eleitor dos membros de tal organismo. Carvalho (2007, p. 9) explana que “os direitos políticos são aqueles que se referem à participação do cidadão no governo da sociedade. O seu exercício se limita a uma parcela da população e tem como instituição principal os partidos políticos e um parlamento livre e representativo”. Estes direitos dizem respeito à liberdade de associação e reunião, à organização política e sindical, à participação política e eleitoral, ao sufrágio universal, entre outros. São também chamados direitos individuais exercidos coletivamente.

O elemento social se refere a toda espécie de direito que vai desde o direito a um mínimo de bem-estar econômico e segurança ao de participar, por completo, da herança social e levar a vida de um ser civilizado, segundo os padrões que prevalecem na sociedade. De acordo com Carvalho (2007, p. 10), “os direitos sociais são aqueles que garantem a participação na riqueza coletiva e permitem às sociedades politicamente organizadas reduzir os excessos de desigualdades produzidos pelo capitalismo, como também garantir um mínimo de bem-estar coletivo”. A ideia central em que se baseiam é a da justiça social, e as instituições mais intimamente ligadas a eles são o sistema educacional e os serviços sociais.

Por outro lado, segundo Marshall (1967), se a cidadania se invoca em defesa dos direitos – civis, políticos e sociais –, os correspondentes deveres não podem ser ignorados. Estes não requerem o sacrifício da liberdade individual ou a submissão incondicional a qualquer reclamação por parte do governo, mas exigem que os atos sejam inspirados por um grande sentimento de responsabilidade para com o bem-estar da comunidade.

Nessa visão, o cidadão pleno seria portanto, um titular desses três direitos. Os que possuíssem apenas um ou alguns desses direitos seriam considerados cidadãos incompletos ou semicidadãos, e os que não se beneficiassem de nenhum deles seriam os não-cidadãos, os marginais. Embora uma cidadania plena, que combine liberdade, participação e igualdade para todos, seja um ideal desenvolvido no Ocidente e talvez inatingível a todos, ela tem servido de parâmetro para o julgamento da qualidade da cidadania em cada país e em cada momento histórico.

O conceito de cidadania plena, conforme se vê em Cortina (2005, p. 107), integra um *status* legal, abrangendo um conjunto de direitos do cidadão; um *status* moral, incluído aí um conjunto de responsabilidades que o indivíduo ou grupo tem consigo mesmo e com os outros; e uma identidade através da qual não só aflora a consciência de pertencimento, mas também o sentimento de pertencer a uma sociedade.

A manifestação de uma cidadania plena pode ser vista, por exemplo, nas mobilizações da sociedade para a conquista de novos direitos, como também na participação direta da população na gestão da vida pública quando ela compartilha da discussão democrática do orçamento da cidade. Esta tem sido uma prática, sobretudo no nível do poder local, que tem ajudado na construção de uma democracia participativa, superando os limites da democracia puramente representativa.

Além disso, Cortina (2005) afirma existirem dimensões complementares que constituem exigências de uma cidadania plena, como por exemplo: cidadania política – o direito de participação numa comunidade política; cidadania social – que compreende a justiça como exigência ética da sociedade de bem viver; cidadania civil – afirmação de valores cívicos como liberdade, igualdade, respeito ativo, solidariedade, diálogo; cidadania intercultural – afirmação da interculturalidade como projeto ético e político frente ao etnocentrismo, respeitando as identidades das pessoas (de gênero, sexual, entre outras), bem como as diversidades socioculturais, integrando a igualdade e o respeito à diferença; cidadania econômica – participação na gestão e nos lucros da empresa, transformação produtiva com equidade. Segundo essa autora (2005, p. 36),

> a noção de cidadania, habitualmente restringida ao âmbito político, parece ignorar a dimensão pública da economia, como se as atividades econômicas não precisassem de uma legitimidade social, procedente de cidadãos econômicos.

Não obstante, mesmo levando em consideração que a cidadania deverá ser vista a partir desse múltiplo enfoque, ou seja, a partir dos elementos civis, dos elementos políticos e dos elementos sociais, não podemos deixar de considerar que cada experiência histórica tem a sua singularidade e que essa sequência não necessariamente é reconstruída. De acordo com o que aponta Saes (2003, p. 20),

> a cronologia da implantação dos diferentes elencos de direitos não tem de ser, em toda parte, a mesma cronologia do caso inglês. Assim, por exemplo, é possível que a instauração de um elenco importante de direitos sociais seja, não a consequência de um regime democrático, e sim, um ingrediente importante da estratégia compensatória de um regime ditatorial em busca de legitimidade e de uma base social de apoio. Foi o que aconteceu no Brasil pós-trinta: a efetiva passagem de uma política estatal de proteção social foi uma obra da ditadura varguista, nos seus dois subperíodos (1931-34 e 1937-45).

O período de 1930 a 1945 foi o grande momento da legislação social no Brasil, mas, por ter esta sido introduzida em um ambiente de baixa ou nula participação política e de precária vigência dos direitos civis, os direitos sociais e a maneira como foram distribuídos os seus benefícios tornaram duvidosa a sua definição como uma conquista democrática e, desta forma, comprometeram parcialmente seu aporte para o desenvolvimento de uma cidadania ativa. Para Carvalho (2007), esta consiste na luta cotidiana dos cidadãos por direitos individuais e coletivos. É exatamente nessa luta que se compreendem o compromisso e o respeito que se deve ter pelos direitos de outras pessoas e grupos sociais. Isto, na verdade, constitui os deveres dos cidadãos. A cidadania ativa se diferencia da cidadania passiva, outorgada pelo Estado, com a ideia moral da tutela e do favor, e foi exatamente esta cidadania, a passiva, que se evidenciou na era Vargas[38].

Cortina (2005, p. 178) lembra que cidadania implica a existência de um vínculo de união entre grupos sociais diversos, sendo, assim, complexa, pluralista e diferenciada. Considerando as sociedades nas quais convivem culturas diversas, denomina cidadania multicultural aquela na qual existe tolerância, respeito e integração das diferentes culturas de uma comunidade política, de tal modo que seus membros se sintam “cidadãos de primeira”. Defende que os problemas multiculturais não são apenas de justiça, mas também de riqueza humana. Ainda segundo Cortina (2005, p. 183), trata-se, pois, de “tomar consciência que nenhuma cultura tem soluções para todos os problemas vitais e que pode aprender com outras, tanto soluções das quais necessitam, como compreender-se a si mesma”. Indo nesta mesma

---

[38] Período compreendido de 1930 a 1945, governado por Getúlio Vargas, que assumiu o poder no Brasil após comandar a Revolução de 1930, que derrubou o governo de Washington Luís. Seus quinze anos de governo caracterizaram-se pelo nacionalismo e populismo. Sob seu governo foi promulgada a Constituição de 1934. Fechou o Congresso Nacional em 1937, instalou o Estado Novo e passou a governar com poderes ditatoriais. Sua forma de governo passou a ser centralizadora e controladora. Criou o Departamento de Imprensa e Propaganda – DIP, para controlar e censurar manifestações contrárias ao seu governo. Perseguiu opositores políticos, principalmente os partidários do comunismo. Disponível em http://www.suapesquisa.com/vargas/. Acesso em 14/04/2009.

direção, Charlot (2005) chama de mundialização-solidariedade o reconhecimento do outro em sua diferença cultural, em sua identidade comigo mesmo e em sua singularidade de sujeito.

Charlot (2005, p. 138) considera que o respeito às diferenças culturais não implica fechamento, ou seja, é preciso que "a cultura de meu grupo seja questionada também em relação à universalidade do homem e à singularidade do sujeito". Como não questionar, por exemplo, culturas que mutilam mulheres e as que escondem estas atrás de paredes e de véus em nome de uma identidade étnica ou religiosa, sem oferecer-lhes possibilidade de escolha?

O estudo de Cortina (2005) ressalta que a dificuldade para a construção da cidadania multicultural, como também da cidadania econômica, tem suas raízes nas desigualdades econômicas e sociais e que o reconhecimento da cidadania social – que proporciona a todos os cidadãos um mínimo de bens materiais que não são obtidos no jogo do mercado – é condição *sine qua non* para a construção da cidadania cosmopolita, que tem como característica ser justa, por fazer sentir e saber que todos os homens são cidadãos do mundo.

No entanto, o fosso existente entre as partes pobres e ricas do mundo, bem como o ressentimento que uma sustenta com relação à outra, apresenta-se como um grande obstáculo para tal cidadania. Uma passagem de Hobsbawn (1995, p. 540) ilustra um dos impedimentos ao cosmopolitismo, quando afirma que

> a ascensão do fundamentalismo islâmico foi visivelmente um movimento não apenas contra a ideologia de modernização pela ocidentalização, mas contra o próprio ocidente. Não por acaso os ativistas desses movimentos perseguem seus fins perturbando as visitas de turistas ocidentais, como no Egito, ou assassinando moradores ocidentais em números substanciais, como na Argélia. Por outro lado, o grosso da xenofobia popular nos países ricos era dirigido contra estrangeiros vindos do Terceiro Mundo, e a União Européia represou suas fronteiras contra a inundação de pobres do Terceiro Mundo em busca de trabalho. Mesmo dentro dos EUA, começaram a aparecer sinais de séria oposição à ilimitada tolerância *de facto* daquele país à imigração.

Guarinello (2005) lembra que cidadania implica sentimento comunitário, processos de inclusão de uma população, um conjunto de direitos civis, políticos e econômicos e significa também a exclusão de outros. Para esse autor, todo cidadão é membro de uma comunidade, como quer que ela se organize, e esse pertencimento, que é fonte de obrigações, permite-lhe também reivindicar direitos, buscar alterar as relações no interior dessa comunidade, tentar redefinir seus princípios, sua identidade simbólica, como também redistribuir os bens comunitários.

Neste sentido, cidadania pode ser entendida como reivindicação, por parte do sujeito, de direitos e responsabilidades referentes a um poder específico. Segundo Garretón (1999), esse sujeito está inserido em uma sociedade que é multidimensional, com uma diversidade crescente nos campos da economia, da cultura, da política e da organização social. Sendo assim, essas reivindicações de direitos e responsabilidades já não são dirigidas somente ao poder político ou às instituições estatais, centralizadas ou descentralizadas, mas também aos poderes constituídos no campo econômico, nas relações de gênero, nas comunicações, no meio ambiente, nos negócios locais e regionais, nos termos de uma cidadania global que está fora do âmbito territorial ou nacional, e em cada um desses campos surge o problema específico de como ser cidadão. Logo, as reivindicações encaminhadas a cada um desses mesmos campos exigem do sujeito um saber pensar para poder intervir, visando a uma transformação tanto pessoal, do sujeito, quanto coletiva, da sociedade.

A essência da cidadania, assevera Guarinello (2005), "reside, precisamente, nesse caráter público, impessoal, nesse meio neutro no qual se confrontam, nos limites de uma comunidade, situações sociais, inspirações, desejos e interesses conflitantes". Há na História, certamente, comunidades sem cidadania, mas só existe cidadania efetiva no seio de uma comunidade concreta, que pode ser definida de diferentes maneiras, mas que é sempre um espaço privilegiado para a ação coletiva e para a construção de projetos para o futuro.

Como vimos, as dificuldades de se conceituar cidadania vêm do fato de que as representações que fazemos dela nem sempre correspondem a postulações rigorosas. Ora ela é tratada como nacionalidade, ora traz em si juízos de valor, aparecendo associada ao aspecto positivo da vida civil, política e social do homem, em contraste com a negatividade da não cidadania, a marginalidade. No entanto, como enfatiza Ferreira (1993), "não é possível visualizar a cidadania como um 'em si', uma vez que a cidadania só se configura quando encarnada em um indivíduo, o cidadão".

A educação popular, definida como um direito social, tem sido historicamente um pré-requisito para a expansão dos outros direitos, pois a educação permite às pessoas tomarem conhecimento de seus direitos e se organizarem para lutar por eles, e a ausência dela tem constituído sempre um dos principais obstáculos à construção da cidadania civil e política, sem as quais a população fica impossibilitada de participar integralmente da comunidade na qual está inserida e fica também excluída do *status* de cidadania que esses direitos concedem. De outra parte, Arroyo (2003, p. 74) apresenta um questionamento ressaltando que

> é fundamental captar se a cidadania se constrói através de intervenções externa, de programas e agentes que outorgam e preparam para o exercício da cidadania, ou, ao contrário, a cidadania se constrói como um processo que se dá no interior da prática social e política das classes.

Atualmente, a sociedade brasileira retoma sua trajetória na construção da democracia, deparando-se desta forma com um surto de exigências de cidadania, oriundo de diferentes grupos que lutam pelo direito de viverem à luz de suas próprias especificidades. E a educação matemática constitui uma dessas exigências, visto ser constante o elo entre educação e cidadania. Ambas caminham imbricadas e vêm se transformando no tempo e no espaço, em movimento cíclico, à medida que as sociedades também se transformam, exigindo assim uma população educada para nelas atuar. Por sua vez, a população requer dessa sociedade uma relação de igualdade com respeito aos direitos e deveres pertinentes ao *status* que essa educação lhe confere.

Neste ponto, convém lembrar que, na Grécia antiga, a cidadania reservava-se ao homem com uma instrução básica ministrada por sábios, a qual se configura, sobretudo, como cultura retórico-literária do “bem” falar e do “bem” escrever e que lhe possibilitava adentrar a *polis* grega, através do discurso e da ação. O “homem educado”, diferente do escravo, era o que recebia sua educação diretamente do criador da ciência e tinha, assim, garantidos seus direitos de cidadão. Foi dessa maneira que se estabeleceu o elo entre cidadania e educação, como um dos elementos de demarcação de *status*, e é esta a concepção que perdura até nossos dias. Segundo Arroyo (2003), essa vinculação entre cidadania e educação é marcada pela excludência, haja vista que ela é chamada a arbitrar no processo de exclusão da maioria da participação política. Não obstante, a Constituição brasileira de 1988, “a Constituição Cidadã”, explicitando os objetivos fundamentais da educação, traz em seu Artigo 205 que “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 2009).

Reconhecemos que a educação, e em particular o conhecimento matemático, muitas vezes é convocado para arbitrar não só no processo de exclusão política, como também em diversas situações inerentes ao direito civil e social do cidadão. Contudo, não podemos negar que, enquanto direito de todos, a educação de modo geral e, mais especificamente, o letramento – enquanto capacidade do indivíduo de utilizar a linguagem escrita em diversas práticas sociais – e de modo especial o numeramento – como habilidade do indivíduo de operar em situações práticas do cotidiano que envolvem quantificação, medidas, representações espaciais, tratamento de dados, entre outros –, quando adquiridos, apresentam-se muito mais como instrumentos de inclusão do sujeito enquanto cidadão, possibilitando-lhe ler uma realidade, desconstruí-la criticamente e nela intervir alternativamente. Inclusão: não só no mundo do trabalho, mas no mundo construído através da experiência humana no decorrer da história, organizado transgeracionalmente e que se constitui de discursos e ações.

2.8 Educação Matemática e Cidadania

A educação, de acordo com argumento de Puig (2000, p. 15), resulta de dois elementos inseparáveis: a instrução e a formação;

> [...] a educação é instrução na medida em que prepara os jovens e as jovens para se adaptar e para melhorar o mundo dos saberes culturais, instrumentais e científicos [...]. Em todos esses casos, a instrução tem muito de transmissão de saberes informativos necessários para se viver eficazmente no mundo cultural e profissional. A educação é formação na medida em que prepara os jovens e as jovens para se relacionar da melhor maneira com o mundo dos seres humanos: consigo mesmo, com os outros e com o conjunto de regras e normas de convivência que configuram a vida social.

Diante dessas ideias, concordamos com Charlot (2005, p. 137) quando este afirma que “a educação supõe uma relação com o outro, já que não há educação sem algo de externo àquele que se educa”. Esse “outro” é compreendido por ele não só como um conjunto de valores, de objetos intelectuais e de práticas, mas, também, um outro ser humano. Isto posto, define educação como um processo pelo qual (p. 137)

> um “filhote” da espécie humana, inacabado, desprovido dos instintos e das capacidades que lhe permitiram sobreviver rapidamente sozinho, apropria-se, graças à mediação dos adultos, de um patrimônio humano de saberes, de práticas, de formas subjetivas, de obras.

Essa apropriação, de acordo com o autor em pauta, é que permite ao homem tornar-se, ao mesmo tempo e no mesmo movimento, um ser humano, membro da sociedade e de um triplo processo de humanização, de socialização e de singularização. Esse triplo processo é possível somente pela apropriação de um patrimônio humano, o que segundo Charlot (2005) implica dizer que a educação é cultura, e isso com três significados que não devem ser dissociados (p. 138):

- É cultura porque é humanização. É um ingresso na cultura, isto é, no universo dos signos, dos símbolos, da construção de sentido.

- Em segundo lugar, porque é socialização. Ninguém pode se apropriar do patrimônio humano em sua integridade, da totalidade do que a espécie humana produziu ao longo da história. Entrar na cultura é possível entrando em uma cultura, aquela de um determinado grupo social, em um dado momento histórico.

- Em terceiro lugar, por que é movimento pelo qual eu me cultivo. Entrar na cultura, em uma cultura, permite-me constituir minha cultura.

D'Ambrósio (1999, p. 15), por sua vez, entende a educação como uma ação, isto é, como o resultado de estratégias definidas e desenvolvidas pela sociedade a partir da leitura da realidade, tendo como objetivos principais "a) possibilitar a cada indivíduo atingir seu potencial criativo; b) estimular e facilitar a ação comum, com vistas a viver em sociedade e exercer cidadania". Considerando que agir é inerente ao estar vivo, este não pode ser dissociado da consciência acerca do passado e do futuro como possibilidade. Assim, para D'Ambrósio, a ação humana é compreendida como um movimento determinado por um objetivo de alterar a realidade agindo sobre ela. Nesse processo, tal agir não se dá de modo isolado ou unilateralmente: Santos (2007, p. 276) lembra que

> [...] a realidade também exerce uma ação sobre o indivíduo informando-o acerca da necessidade de desenvolver um agir característico, que lhe permita assimilar os valores inerentes a seu grupo, as relações de poder, os códigos, mitos, ritos, necessidades à sua sobrevivência e à sua convivência com outros indivíduos.

Esta ação jamais é possível no isolamento, pois estar isolado é se encontrar privado da capacidade de agir. Assim, o reconhecimento da existência do outro impõe ao indivíduo a necessidade de desenvolver estratégias de comunicação para que, juntamente com ele, possa também desenvolver ações comuns sobre a realidade. Neste sentido, ao abordar a circunvizinhança da ação e do discurso, Arendt (2005) nos diz que estes são circundados por uma teia de atos e palavras de outros homens e estão em permanente contato com ela. Segundo a autora (2005, p. 201),

> [...] o mito popular de um homem forte que, isolado dos outros, deve sua força ao fato de estar só, é mera superstição baseada na ilusão de que podemos “fazer” algo na esfera dos negócios humanos – “fazer” instituições ou leis, por exemplo, como fazemos mesas e cadeiras, ou fazer o homem “melhor” ou “pior” – ou é, então, a desesperança consciente de toda ação, política ou não, aliada à esperança utópica de que seja possível lidar com os homens como se lida com qualquer “material”.

Conceber a educação enquanto instrução e formação de um ser inacabado que se constitui e se reconstrói na relação com o outro, através do discurso e da ação, remete-nos ao conceito de cidadania planetária, que sustenta a visão unificadora do planeta, uma sociedade mundial. Gadotti (1998, p. 2) nos informa que “Cidadania Planetária é uma expressão adotada para expressar um conjunto de princípios, valores, atitudes e comportamentos que demonstra uma nova percepção da Terra como uma única comunidade”. Frequentemente associada ao “desenvolvimento sustentável”, ela é muito mais ampla do que essa relação com a economia. De acordo com o autor referido acima (p. 2), “trata-se de um ponto de referência ético indissociável da civilização planetária e da ecologia. A Terra é ‘Gaia’, um super-organismo vivo e em evolução, o que for feito a ela repercutirá em todos os seus filhos”.

Segundo a Carta da Terra[39], devemos reconhecer que, “no meio de uma magnífica diversidade de culturas e formas de vida, somos uma família humana e uma comunidade terrestre com um destino comum”. Destino este moldado pelo homem/cidadão planetário, por meio de suas ações, no âmbito local. Para tanto, “devemos nos juntar para gerar uma sociedade sustentável global fundada no respeito pela natureza, nos direitos humanos universais, na justiça econômica e numa cultura da paz”. Para alcançar tal propósito, é imprescindível assumirmos a responsabilidade que temos não só para conosco, mas, também, para com os outros: “com a grande comunidade da vida e com as futuras gerações”.

Considerando que a humanidade é parte de um vasto universo em evolução, a Carta da Terra, ao abordar a situação global, os desafios futuros e a responsabilidade universal, destaca que

- Os padrões dominantes de produção e consumo estão causando devastação ambiental, esgotamento dos recursos e uma massiva extinção de espécies. Comunidades estão sendo arruinadas. Os benefícios do desenvolvimento não estão sendo divididos equitativamente e a diferença entre ricos e pobres está aumentando. A injustiça, a pobreza, a ignorância e os conflitos violentos têm aumentado e são causas de grande sofrimento. O crescimento sem precedentes

[39] Carta da Terra. Disponível em http://www.cartadaterrabrasil.org/prt/text.html. Acesso em 15/01/2010.

da população humana tem sobrecarregado os sistemas ecológico e social. As bases da segurança global estão ameaçadas. Essas tendências são perigosas, mas não inevitáveis.

- A escolha é nossa: formar uma aliança global para cuidar da Terra e uns dos outros ou arriscar a nossa destruição e a da diversidade da vida. São necessárias mudanças fundamentais em nossos valores, instituições e modos de vida. Devemos entender que, quando as necessidades básicas forem supridas, o desenvolvimento humano será primariamente voltado a ser mais e não a ter mais. Temos o conhecimento e a tecnologia necessários para abastecer a todos e reduzir nossos impactos no meio ambiente. O surgimento de uma sociedade civil global está criando novas oportunidades para construir um mundo democrático e humano. Nossos desafios ambientais, econômicos, políticos, sociais e espirituais estão interligados e juntos podemos forjar soluções inclusivas.

- Para realizar estas aspirações, devemos decidir viver com um sentido de responsabilidade universal, identificando-nos com a comunidade terrestre como um todo, bem como com nossas comunidades locais. Somos, ao mesmo tempo, cidadãos de nações diferentes e de um mundo no qual as dimensões local e global estão ligadas. Cada um compartilha responsabilidade pelo presente e pelo futuro bem-estar da família humana e de todo o mundo dos seres vivos. O espírito de solidariedade humana e de parentesco com toda a vida é fortalecido quando vivemos com reverência o mistério da existência, com gratidão pelo dom da vida e com humildade em relação ao lugar que o ser humano ocupa na natureza.

Deste modo, a cidadania planetária deverá ter como foco a superação da desigualdade, a eliminação das diferenças econômicas e a integração da diversidade cultural da humanidade. De acordo com Gadotti (1998, p. 6), “não se pode falar em cidadania planetária [...] sem uma efetiva cidadania na esfera local e nacional”. Para esse autor uma cidadania planetária “é por essência uma cidadania integral, portanto, uma cidadania ativa e plena não apenas nos direitos sociais, políticos, cultural, institucional, mas também, econômico-financeiro”.

Assim, uma educação matemática que vise a uma formação cidadã não pode deixar de considerar o homem enquanto cidadão do mundo e as implicações de tal fato. De que maneira? Eis aí um desafio! Todavia, D'Ambrósio (1996) apresenta-nos uma possibilidade através de uma proposta pedagógica ampla que, em linhas gerais, conforme expõe Santos (2007), recusa a ideia de um currículo nacional fechado ao mesmo tempo que sustenta a ideia de um currículo dinâmico e voltado às questões locais; nega a organização disciplinar e propõe uma organização transdisciplinar; rejeita a transmissão pura e simples de conteúdos e propõe uma abordagem que parta das motivações e percepções materiais e intelectuais mais imediatas dos educandos e, por último, nega a abordagem estruturalista e aponta para uma abordagem educacional holística. Considerando essas ideias e tendo como elemento fundamental a ética que conduza à paz, D'Ambrósio (1996, p. 120) resume sua proposta como segue:

> A essência da minha proposta é uma educação universal, atingindo toda a população, proporcionando a todos o espaço adequado para o pleno desenvolvimento de criatividade desinibida, que ao mesmo tempo em que preserva a diversidade e elimina as iniquidades, conduz a novas formas de relações intra e interculturais sobre as quais se estruturam novas relações sociais e uma nova organização planetária. Essa proposta tem implícita nela uma ética, que eu chamo de ética da diversidade:
>
> 1. *Respeito* pelo outro com todas as suas diferenças;
>
> 2. *Solidariedade* com o outro na satisfação de necessidades de sobrevivência e transcendência;
>
> 3. *Cooperação* com o outro na preservação do patrimônio natural e cultural comum.
>
> Essa ética pode ser praticada em todas as nossas ações e no meu entender deveria pautar o comportamento do professor. Ela conduz à paz interior, à paz social e à paz ambiental, e como consequência, à paz militar.
>
> Atingir a paz total é nossa missão maior como educadores, em particular como educadores matemáticos.

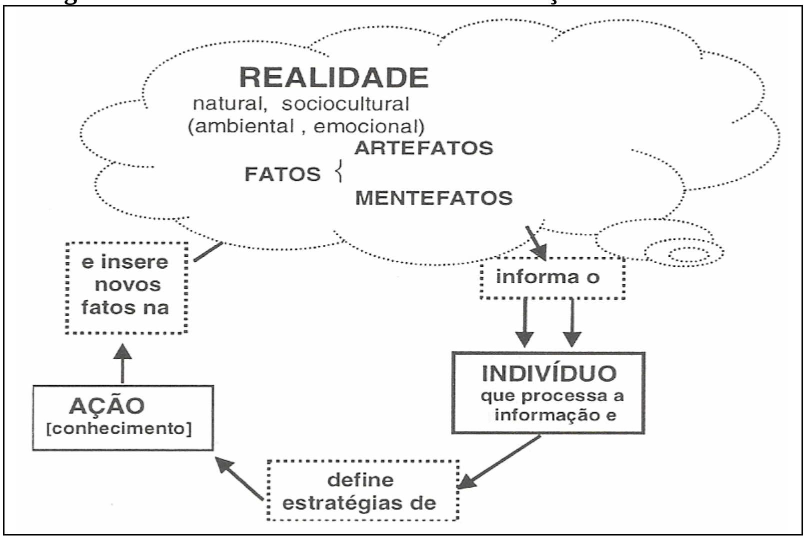
Assim, as reflexões sobre o presente, como as referentes à realização de nossa vontade de sobreviver e transcender, segundo D'Ambrósio (2005, p. 51), "devem ser necessariamente de natureza transdisciplinar[40] e holística. Nessa visão, o presente, que se apresenta como a interface entre passado e futuro, está associado à ação e à prática".

---

[40] Vê Carta da Transdisciplinaridede (Adotado no primeiro Congresso de Transdisciplinaridade, Convento de Arrábida, Portugal, 2-6 novembro, 1994). Disponível em http://www.ccsa.ufrn.br/5sel/v2/pdf/minicurso15_carta_ transdisciplinaridade.pdf. Acesso em 11/05/2010

D’Ambrósio entendendo que a ação gera conhecimento, entendido como a capacidade de explicar, de lidar, de manejar, de entender a realidade. Essas capacidades são transmitidas e acumuladas no convívio com o outro através da comunicação, de cada indivíduo para si mesmo e transgeracionalmente. Ainda de acordo com esse autor (p. 53), o conhecimento é “o gerador do saber, decisivo para a ação e, por conseguinte é no comportamento, na prática, no fazer, que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento”. Ou seja, para D’Ambrósio, ação gera conhecimento e conhecimento gera ação. Esse movimento cíclico é apresentado na figura abaixo.

Figura 1 Ciclo Realidade → Indivíduo → Ação



Fonte: D’Ambrósio (2005)

D’Ambrósio (2005, p. 52) afirma que “esse é o ciclo permanente que permite a todo ser humano interagir com seu meio ambiente, com a realidade considerada na sua totalidade como um complexo de fatos naturais e artificiais”. Neste sentido, entendemos que uma educação matemática que possibilita ao aluno, no processo ensino-aprendizagem, compreender/transitar pelo ciclo “…→ REALIDADE → INDIVÍDUO → AÇÃO → …” apresenta-se como uma formação transformadora, capaz de conduzir a um “saber pensar para saber intervir”, entendida por nós como uma formação cidadã.

Assim como Palma Filho (1998), compreendemos que a educação escolar, e a educação matemática em particular, está a serviço de um determinado tipo de cidadania e muitas vezes atua como “pedra de toque do controle social e econômico”. Essa educação pode significar conformismo e obediência – quando, por exemplo, o aluno recebe passivamente o conteúdo matemático que lhe é imposto em sala de aula, ou quando a não compreensão do mesmo o estigmatiza como incompetente e o impossibilita de participar ativamente, como cidadão, da sociedade na qual está inserido. Não obstante, o desdobramento da relação professor-aluno-conteúdo no contexto escolar, e na sala de aula de Matemática em particular, pode conduzir ao desenvolvimento intelectual do educando, como também ampliar a compreensão do mesmo – enquanto indivíduo integrado, imerso, numa realidade natural e social – de que o transitar pelo ciclo vital pode levar à modificação dessas realidades e, assim, irá contribuir para a formação de um indivíduo/cidadão crítico e reflexivo. Palma Filho (1998, p. 102) chama a atenção para o fato de que

> o modo como a educação de crianças e jovens se desenvolve não é neutro em relação do tipo de cidadania que se busca. Diferentes concepções de educação, mesmo implícita às vezes, sempre estão no planejamento educacional e curricular. Quando a escola seleciona objetivos educacionais, conteúdos, metodologias e critérios de avaliação do aprendizado, está optando por um determinado projeto educacional, que de forma alguma é neutro em relação à cidadania.

Não menos importante é o modo como esses conteúdos são organizados no currículo escolar e como os estudantes a eles têm acesso. Assim, compreendendo o valor do conhecimento matemático para a formação do cidadão e a importância da resolução de problemas nos diferentes contextos em que esse conhecimento é exigido, tanto no específico da Matemática quanto nos contextos das demais áreas do conhecimento e das práticas sociais, passamos a discutir no próximo capítulo o conceito de problema e de resolução de problemas, visando à melhor compreensão de nosso objeto de estudo e sua implicação no currículo e na formação cidadã.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, discutimos os conceitos de problema e resolução de problemas, trazendo a contribuição de autores que apontam diferentes perspectivas, tanto de abordagem quanto de utilização, assim como as influências que estes conceitos receberam e ainda vêm recebendo de outras áreas do conhecimento, contribuindo, deste modo, para um melhor entendimento do tema Resolução de Problemas na Educação Matemática e suas implicações no currículo e na formação do cidadão.

Como já considerado anteriormente, nosso foco é a Resolução de Problemas no contexto da educação/alfabetização matemática, com vistas a uma formação cidadã, ou seja, uma formação que capacite o indivíduo a pensar qualitativa e criticamente e lidar, efetivamente, com aspectos e situações quantitativos com os quais deparam na vida cotidiana. Uma formação que possibilite aos alunos compreender melhor e adequadamente o mundo que os cerca, suas exigências e complexidade e, assim, que possa torná-los cidadãos cônscios de uma possibilidade de ações coletivas, ou seja, conscientes de seus direitos e deveres e do exercício destes no relacionamento e realização social comunitários.

Tendo em vista uma formação cidadã, poderíamos abordar essa questão a partir de inúmeras possibilidades que esse tema nos sugere, como por exemplo a prática do professor em sala de aula de Matemática; as atitudes e comportamentos dos alunos perante uma atividade proposta pelo professor em sala de aula ou atividades realizadas extra-classe; a participação e o envolvimento da comunidade escolar na escolha de seus representantes (direção, conselhos, representantes de sala); a democratização da relação professor-aluno-escola; o impacto da formação matemática na prática cotidiana dos alunos; os aspectos de inclusão e de exclusão do aluno/cidadão na sociedade por meio do domínio da Matemática, entre outras. No entanto, optamos por abordar a formação para a cidadania partindo da possibilidade de se explorar os enunciados dos problemas matemáticos contidos em livros didáticos de Matemática e, a partir deles, e em conexão com outras áreas do conhecimento e com os diferentes contextos a que esses enunciados nos remeterem, entrelaçar o conhecimento matemático com a cidadania.

Para tanto, e visando a um melhor entendimento do que são problemas e resolução de problemas, trazemos, a seguir, as contribuições de alguns autores como Newell e Simon (1972), Polya (1978), Schroeder e Lester (1989), Charles e Lester (1984), Chi e Glaser (1986) Stanick e Kilpatrick (1990), Borralho (1995), Lester (1983), Echeverría e Pozo (1998)

Andrade (1998), Mendonça (1999), Onuchic (1999), Ponte, Brocato e Oliveira (2003), Onuchic e Allevato (2004), Huete e Bravo (2006), Vila e Callejo (2006), Reis e Zuff (2007), Schoenfeld (2007), Sternberg (2008), entre outros, que abordam essa temática a partir de diferentes perspectivas.

3.1 Conceitos de Problema

Nesta seção, fazemos uma necessária abordagem dos conceitos de problema, pois, devido ao seu caráter relativo, dar-lhe uma definição completa e abrangente torna-se uma tarefa praticamente impossível, visto que ela depende do contexto em que está inserido o problema, se em ambiente escolar, profissional, doméstico, recreativo ou de lazer, como também das pessoas que estão envolvidas com o mesmo, da finalidade deste e do objetivo em encontrar a solução.

Para uma primeira aproximação, trazemos a definição encontrada no dicionário da Língua Portuguesa[41], que demarca problema como uma questão não solvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento. Etimologicamente, problema é algo que se coloca diante de uma pessoa, interpondo-se, de alguma maneira, em seu caminho ou ocultando o que está por trás dele mesmo.

Entretanto, partimos de uma definição já considerada clássica, apresentada por Lester (1983). Para este autor, problema é uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução.

Além dessa definição, encontramos várias outras. Em Borralho (1995), nos deparamos com um vasto levantamento desse conceito, entretanto apresentamos aqui duas definições que, ao nosso entender, sintetizam todas que ali se encontram e apontam-nos duas perspectivas. A primeira delas é a apresentada pelos psicólogos Micheline Chi e Robert Glaser (1986), em um estudo sobre as capacidades intelectuais humana, que define problema como uma situação na qual o indivíduo atua com o propósito de alcançar algum objetivo, utilizando para isso uma estratégia particular. Outra maneira de conceituar problema é efetuar uma translação deste para a vida cotidiana e, nessa perspectiva, como assinala Borralho (1995), problema passa a ser entendido como situação-problema.

Esta situação emerge quando um indivíduo tem determinado objetivo mas não dispõe de um caminho claro para chegar a ele. Neste sentido, trazemos a contribuição de Newell e

---

[41] Ferreira (2000).

Simon (1972), que definem uma situação-problema como uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o curso da ação necessária para consegui-lo. Já Huete e Bravo (2006) afirmam que situação-problema é aquela que possibilita ao indivíduo observar, descrever, classificar, ordenar, comparar, conjecturar, perguntar ou realizar uma representação. Ainda segundo estes autores, a proposição de tais situações possibilita formar as bases de um bom desenvolvimento mental.

Assim, um problema pode ser entendido como um obstáculo que se apresenta diante do indivíduo, ao enfrentar determinada situação e, para transpô-lo, faz-se necessário evocar conhecimentos previamente adquiridos. Se estes não se fizerem suficientes para tanto, é imprescindível ir à busca de novos conhecimentos que possibilitem chegar à solução.

No entanto, não entendemos a "solução" de um problema como um fim em si mesmo; assim, concordamos com Onuchic (1999, p. 215) que, numa perspectiva metodológica, define problema como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessando em resolver". Neste ponto de vista, o problema passa a ser um ponto de partida, e, através da resolução do mesmo, conexões podem ser feitas pelo professor, não só entre os diferentes ramos da Matemática, mas também entre outras áreas do conhecimento, produzindo desta forma, novos conceitos, novos conteúdos, novos aprendizados.

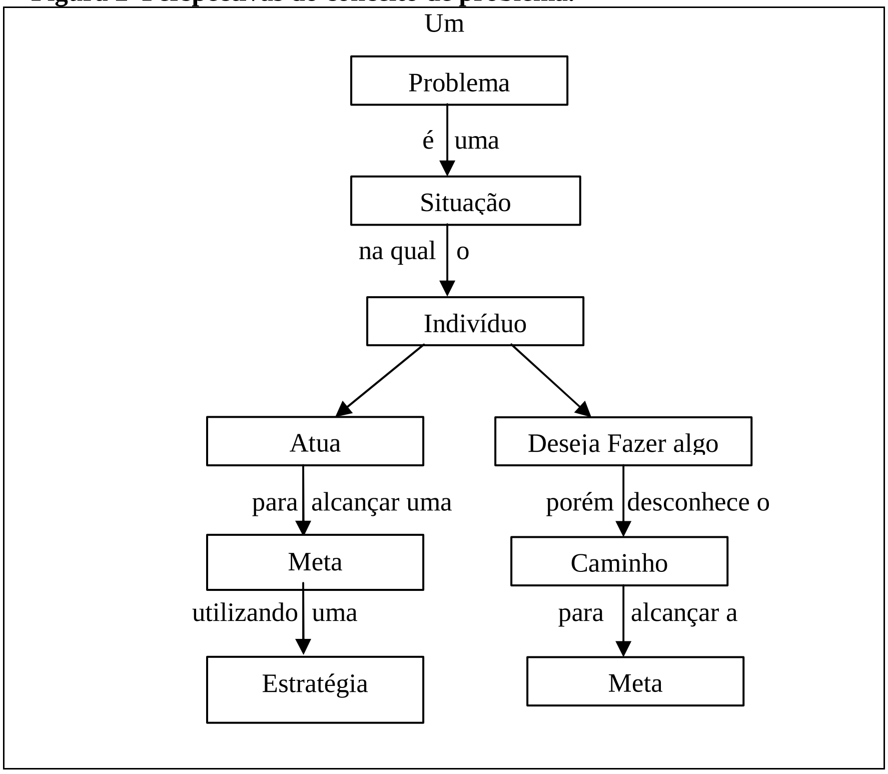
Nessa mesma perspectiva, Reis e Zuffi (2007, p. 120) entendem por situação-problema "aquela que convide ao pensamento matemático, que seja desafiador, que envolva a ideia de um obstáculo a ser superado, ou de ideias a serem elucidadas, e que não forneça indicações diretas de quais operações executar para a sua solução". Evidenciando que só haverá problema se o aluno perceber uma dificuldade a ser superada, as autoras ora referidas (p. 120) asseveram que

> tal situação-problema somente se constituirá em uma motivação de aprendizado para uma pessoa, quando não lhe for familiar, ou seja, quando há certa novidade na mesma, que requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira; quando necessita de uma deliberação, identificação de hipóteses possíveis, tendo o indivíduo que elaborar condutas próprias que ponham à prova suas capacidades de raciocínio autônomo.

De acordo com Trigo (1996), um problema pode ser identificado através de alguns componentes: (i) a existência de um interesse, isto é, uma pessoa ou um grupo de indivíduos que quer ou necessita encontrar uma solução; (ii) a inexistência de uma solução imediata, isto é, não existe um procedimento ou regra que garanta a solução completa da tarefa, como, por exemplo, quando a aplicação direta de algum algoritmo[42] ou um conjunto de regras não é suficiente para determinar a solução; e (iii) a presença de diversos caminhos ou métodos de solução (algébricos, geométricos, numéricos). Considera-se também a possibilidade de os problemas terem mais de uma solução, diferentes caminhos, irem além da resposta.

Para melhor compreensão das definições referidas anteriormente, trazemos na figura a seguir uma adaptação do esquema apresentado por Poggioli (2001), que nos ajudará a visualizar os caminhos percorridos pelas perspectivas apresentadas.

Figura 2 Perspectivas do conceito de problema.

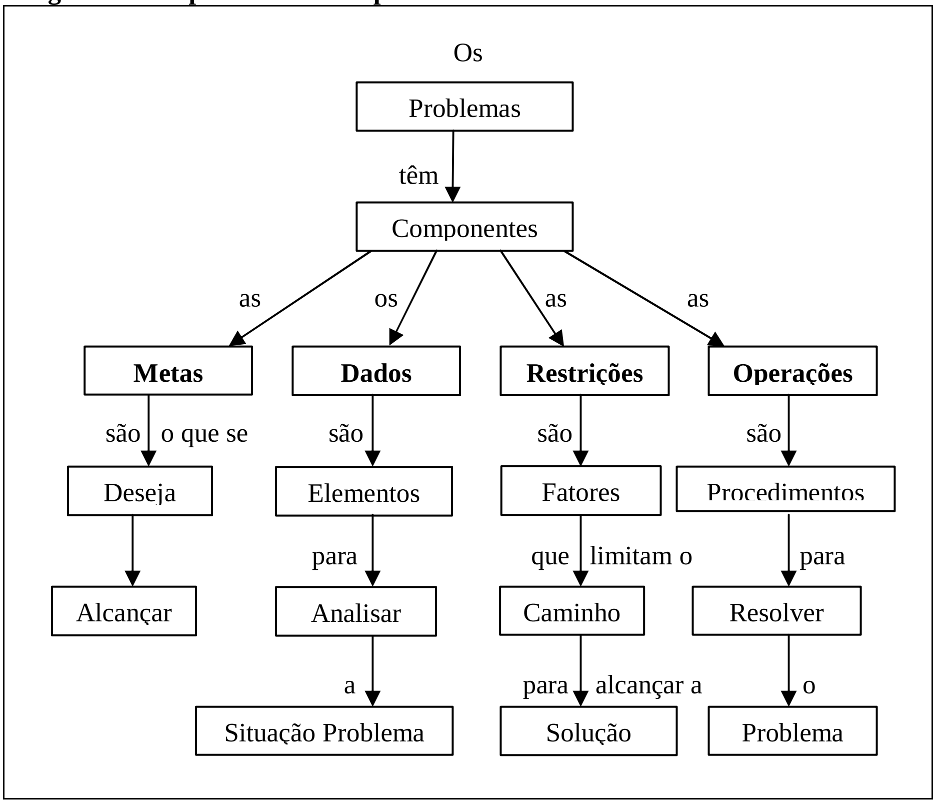


Fonte: Poggioli (2001).

Tendo em vista que um problema é uma situação na qual o indivíduo atua, ou deseja fazer algo, para alcançar uma meta, isto é, encontrar uma solução, Poggioli (2001) afirma que a meta (ou a solução) está associada a uma situação inicial e que a diferença existente entre estas duas é o que se denomina “problema”. Além disso, observa também que as atividades desenvolvidas pelos sujeitos nesse percurso têm por objetivo operar sobre a situação inicial visando a transformá-la em meta. A autora apresenta e especifica quatro componentes de um problema, quais sejam: as metas, os dados, as restrições e os métodos. Podemos visualizar na figura 2 esses componentes e suas implicações.

[42] Sequências de operações que podem ser repetidas muitas vezes e que, em teoria, garantem a solução de um problema.

Figura 3 Componentes de um problema



Fonte: Poggioli (2001)

Como vimos, as metas constituem o que se deseja alcançar em uma determinada situação; um problema pode ter mais de uma meta, e ela(s) pode(m) estar bem definida(s), a exemplo do que se espera dos problemas específicos da Matemática em contexto escolar ou, ao contrário, pode(m) estar não tão claramente definida(s) como, por exemplo, as situações problemáticas com que nos deparamos na vida real. Quanto aos dados, estes consistem em informações numéricas ou verbais disponíveis para que se possa começar a analisar a situação-problema; assim como as metas, os dados podem ser abundantes ou escassos, estar bem ou mal definidos, implícitos ou explícitos nos enunciados. As restrições são fatores que limitam o caminho para que se possa chegar à solução; igualmente, podem estar bem ou mal definidas, serem explícitas ou implícitas. Os métodos ou operações referem-se aos procedimentos ou heurísticas[43] utilizados para resolver o problema, procedimentos estes que, segundo Huete e Bravo (2006), são ações ou transformações realizadas para enfrentar

[43] Heurística, Heurética ou "ars inveniendi" era o nome de certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado, mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção (POLYA, 1978, p. 86) ou um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas (FERREIRA, 2000).

questões ou resolver problemas que necessitam de processos estruturados. São, enfim, destrezas, técnicas e habilidades.

Abordando o conceito de problema na Educação Matemática[44], Huete e Bravo (2006, p. 124) afirmam que "a dificuldade que encerra a definição do termo 'problema' está ligada à abundância de variáveis implícitas, tanto em sua realidade como objeto identificado em um texto quanto nos subsídios para o sujeito que o resolve".

Problema pode ser identificado com categorias próprias da atividade mental: raciocínio, discernimento, análise, síntese, entre outros, em um contexto psicológico. Em vista disso, recorremos às contribuições de Leontiev (2000), Rubinstein (1975), Esaulov (1972), Ball (1970) e Sarduy (1987).

Leontiev (2000), o primeiro desses estudiosos elencados, considera que se deve entender por problema um fim dado em determinadas condições. Com este critério, o autor considera o fato de que cada problema apresenta, a quem o resolve, a necessidade de obter determinado produto (fim) que não pode ser alcançado por qualquer via, mas apenas por aquela que as condições do problema permitem.

Em Rubinstein (1975), destaca-se o caráter ativo do sujeito. Um problema deve ser compreendido como determinada situação problemática de que o sujeito tem consciência. Rubinstein faz, também, uma diferença entre situação-problema e o próprio problema. Para esse autor, a primeira é compreendida como aquela situação que apresenta elementos desconhecidos, insuficientemente esclarecidos ou pouco explícitos. O problema surge precisamente a partir da situação-problema e, ao contrário dela, caracteriza-se pelo fato de o sujeito ter consciência do que busca, quer dizer, sua atividade tenta conscientemente alcançar um determinado fim ou objetivo e, para isso, organiza e desenvolve sua atividade mental direcionada à solução do problema.

Esaulov (1972, apud Huete e Bravo, 2006) e Ball (1970, idem) expressam definições muito próximas entre si, ambos fazendo intervir o sujeito, isto é, o aspecto psicológico como elemento central. Esaulov considera que todo problema resulta de uma falta de correspondência ou uma contradição entre processos informativos, ou seja, entre diferentes elementos da informação que se oferecem no problema, a qual faz surgir no sujeito que o

---

[44] O significado da expressão Educação Matemática varia com o contexto no qual ela é usada. Por um lado, a educação matemática constitui um campo de práticas sociais, cujo núcleo são as práticas de ensino e de aprendizagem de professores e alunos, mas que inclui igualmente outras vertentes como as práticas de apoio à aprendizagem extra-escolar e a produção de materiais didáticos. Por outro lado, a Educação Matemática constitui um campo de investigação acadêmica em que se produz novo conhecimento sobre o que se passa no campo anterior. Por um outro lado, ainda, é um campo de formação, onde se transmite esse conhecimento a novas gerações de professores e de investigadores e também aos professores em serviço (PONTE, 2008).

resolve a necessidade de realizar as transformações que possibilitam eliminar a dita contradição. Ball, por sua vez, caracteriza o problema como aquela situação que demanda a realização de determinadas ações (sejam práticas ou mentais) encaminhadas no sentido de transformar tal situação.

Sarduy (1987), finalmente, vê uma característica dos problemas, em seu sentido psicológico, no fato de que eles não podem ser resolvidos a partir de uma aplicação mecânica e direta da experiência anterior. Por isso, a apresentação ou o surgimento de um verdadeiro problema implica que o sujeito não tem acesso à resposta somente pela sua memória, mas está obrigado a pensar, a raciocinar, para encontrar os conhecimentos necessários que o levem à resposta ou, em termos mais amplos, à solução do problema.

Considerando que o espaço de um problema é o universo de todas as ações possíveis de ser aplicadas à sua solução, dadas quaisquer restrições que se apliquem e considerando também que a mente humana não é especializada em cálculos em alta velocidade e de numerosas combinações possíveis – uma vez que os limites de nossa memória de trabalho[45] nos proíbem de considerar mais do que algumas operações de cada vez –, Sternberg (2008) observa que os serem humanos devem usar vários atalhos mentais com o fim de resolver problemas. Estes atalhos mentais são chamados de heurísticas – estratégias informais, intuitivas e especulativas, que algumas vezes levam a uma solução efetiva e outras, não.

Já no contexto específico da Matemática escolar, Vila e Callejo (2006, p. 71), definem problema como,

> uma situação matemática cujo método e solução não é imediatamente acessível ao sujeito que tenta respondê-lo porque não dispõe de um algoritmo que relacione os dados e a incógnita ou os dados e a conclusão e deve, portanto, buscar, investigar, relacionar, implicar seus afetos, etc., para fazer frente a uma situação nova. É, pois, um conceito relativo ao sujeito que tenta resolvê-lo e ao contexto em que a questão é apresentada.

Estes autores empregam o termo problema para designar uma situação de proposição, com finalidade educativa, de uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao estudante/resolvedor do problema ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-lo, levando-nos a uma caracterização de problema entendido como ferramenta para pensar matematicamente.

---

[45] A memória de trabalho é aquela que guarda apenas a porção mais recentemente ativada da memória de longo prazo (ver notas 39 e 40) e movimenta esses elementos ativados para dentro e para fora da armazenagem de memória temporária e breve. Sternberg (2008, p. 168)

3.2 Tipos de Problemas

De acordo com Sternberg (2008), os problemas podem ser classificados segundo a clareza de caminhos para uma solução. Os problemas bem-estruturados têm caminhos claros – ainda que não necessariamente fáceis – que conduzem a suas soluções; estes problemas também são chamados bem-definidos. Os problemas mal-estruturados carecem de caminhos claros e prontamente disponíveis para suas soluções; denominam-se também problemas mal-definidos. Em relação a estes problemas, grande parte da dificuldade está em construir um plano para seguir sequencialmente uma série de passos que se aproximem cada vez mais de sua solução.

Trigo (1996, p. 33-34) considera que os problemas bem-estruturados são aqueles que, de modo geral, aparecem nas instruções ou nos livros-texto de Matemática; nestes problemas, a informação que possibilita sua resolução é parte do enunciado, as regras para encontrar a solução são claras e existem critérios bem definidos para resolvê-los. Os problemas mal-estruturados, por sua vez, seriam aqueles que, em geral, encontram-se no cotidiano. Frequentemente possuem pouca ou demasiada informação e, para resolvê-los, faz-se necessário reformulá-los, fornecer ou eliminar algumas informações na fase de resolução.

A esse respeito, Huete e Bravo (2006) afirmam que os problemas bem-estruturados podem ser resolvidos com a aplicação de algum algoritmo conhecido e existem critérios para verificar se a solução está isenta de erros. Já os problemas mal-estruturados necessitam de uma clara formulação, de um procedimento que garanta uma solução, sem que existam critérios definidos para determinar quando se obteve uma solução. Geralmente, quem enfrenta esse tipo de problema necessita reformular o enunciado e desenvolver uma série de estratégias para alcançar a solução.

Devido a seu caráter relativo, existem diferentes maneiras de classificar problemas, no entanto, na área específica da Matemática, respeitando o nível etário a que se propõem, Charles e Lester (1984) apresentam-nos cinco tipificações de problemas. O primeiro tipo, chamado de problema de um passo, pode ser resolvido através da aplicação direta de uma das quatro operações básicas da aritmética, enquanto o segundo, denominado problema de dois ou mais passos, pode ser resolvido pela aplicação direta de duas ou mais dessas quatro operações básicas.

O terceiro tipo é o problema de processo e só se pode resolver por meio da utilização de uma ou mais estratégias de resolução, não se podendo resolver com o uso de processos mecânicos. Constituem os problemas considerados não rotineiros, e algumas das estratégias de resolução que podem ser empregadas para resolver os mesmos são: descobrir um padrão; construir uma tabela; dramatizar o problema; fazer um desenho, um diagrama ou um gráfico; formular e/ou testar uma conjectura; trabalhar do fim para o princípio; selecionar a notação apropriada; reformular o problema; simplificar o problema; identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que se necessita.

O quarto tipo é o problema de aplicação: para resolvê-lo faz-se necessário recolher dados e tomar decisões acerca de situações da vida real. Sua resolução passa, muitas vezes, pela utilização de uma ou mais operações e de uma ou mais estratégias de resolução. Frequentemente este tipo de problema admite mais de uma solução.

Constituindo o quinto e último tipo, estão os problemas do tipo *puzzle* (quebra-cabeça ou desafio). Estes podem permitir o envolvimento dos estudantes em situações que são potencialmente enriquecedoras; podem suscitar o seu interesse e habituá-los a "olhar" para os problemas sob diversos pontos de vista e, em geral, demandam uma forma não-tradicional ou não-rotineira de pensar.

Os problemas matemáticos podem também ser classificados a partir de sua natureza ou do contexto no qual se resolvem os mesmos, a partir dos seus componentes sintáticos, das relações matemáticas ou das suas estruturas lógicas. De acordo com Huete e Bravo (2006, p. 139), atualmente se percebem duas tendências de classificação: as que têm correspondência com a composição do problema, geralmente são os bem-estruturados, e as que têm correspondência com a dimensão subjetiva quanto às relações exigidas ao pensamento da pessoa que resolve são geralmente associadas aos problemas mal-estruturados.

Também bordando a classificação dos problemas matemáticos, Polya (1978) apresenta-nos duas categorias. Na primeira, são identificados aqueles problemas em que se pede que alguma coisa seja encontrada. Neles são fornecidos algumas condições ou alguns dados, e a ideia do problema é determinar o valor de alguma incógnita. A segunda categoria é relacionada aos problemas em que alguma coisa deve ser provada.

Na tentativa de "eleger" bons problemas tendo em vista o processo do ensino-aprendizagem de Matemática, Ramos et al. (2007, p. 6) salientam que é importante que o problema tenha enunciado acessível e de fácil compreensão; exercite o pensar matemático do aluno; exija criatividade na resolução; possa servir de "trampolim" para a introdução ou consolidação de importantes ideias e/ou conceitos matemáticos; e, sobretudo, não seja demasiadamente fácil ou muito difícil e sim, natural e interessante. Apontando que o ensino da Matemática torna-se muito mais interessante à medida que se utiliza de bons problemas, ao invés de se basear apenas em exercícios que remetem à reprodução de fórmulas e se distanciam da realidade do aluno, os autores referidos acima dividiram os problemas matemáticos em quatro tipos:

- Problemas de sondagem: para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito;
- Problemas de aprendizagem: para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito;
- Problemas de análise: para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos e mais fáceis que os problemas de sondagem;
- Problemas de revisão e aprofundamento: para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos.

Resnick e Collins (1996), por seu lado, com o intuito de classificar os diversos tipos de problemas encontrados nos livros de Matemática, caracterizam seis diferentes tipos; são eles:

- Sem algoritmização: são os problemas cujo caminho para a resolução é total ou parcialmente desconhecido;
- Os complexos: são os que necessitam de vários pontos de vista;
- Os exigentes: são aqueles cuja solução só é atingida após intenso trabalho mental e, embora o caminho para encontrar a solução possa ser curto, eles tendem a ser difíceis;
- Os que necessitam de lucidez e paciência: constituem aqueles problemas que começam com uma aparente desordem de ideias e é preciso adotar padrões que permitirão construir o caminho até a sua solução;
- Os nebulosos: são aqueles nos quais nem sempre todas as informações necessárias estão aparentes;
- Os que não têm resposta única: são os que, normalmente, admitem várias maneiras de resolvê-los, podendo, no entanto, acontecer de não existir uma melhor solução ou até de não haver solução – ou seja, resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

3.3 Resolução de Problemas

A importância e a necessidade de resolver problemas, numa sociedade impregnada pelas tecnologias, as quais evoluem de maneira extremamente rápida, têm atraído a atenção de estudiosos de diferentes áreas do conhecimento, uma das quais consiste na Matemática, e é especificamente na Educação Matemática que a Resolução de Problemas tem despertado maior interesse, tanto nas pesquisas quanto no ensino, sendo que essa temática vem se beneficiando das contribuições provenientes de investigações realizadas em diversos campos do saber, principalmente das que estudam os processos cognitivo. Na publicação *The international journal on Mathematics Education*, volume 39 (ZDM, 2007), ao se abordarem os estudos sobre a temática Resolução de Problemas, realizados em nosso país e em vários outros, encontra-se respaldo para as afirmações acima.

É sabido que um dos objetivos primordiais da educação é desenvolver a inteligência, isto é, ensinar os jovens a pensar. Assim, vemos que não só, mas também as matemáticas assumem um papel preponderante na busca desse intento, e nelas destacamos a Resolução de Problemas, uma vez que esta atividade implica ação em nível de processos cognitivos – atenção, percepção, memória, raciocínio lógico, concentração, inteligência, esquemas, entre outros – ou, como ressalta Sternberg (2008), um esforço para superar obstáculos que estejam no caminho para uma solução.

Neste sentido, faz-se necessário visualizar a Resolução de Problemas em uma perspectiva psicológica e, para tanto, trazemos, primeiramente, a contribuição de Dijkstra (1991). Para este autor, a resolução de problema é um processo cognoscitivo completo que envolve conhecimento armazenado na memória de curto prazo[46] e na memória de longo prazo[47] e consiste em um conjunto de condutas e atividades mentais, uma vez que implica também fatores de natureza cognoscitiva, afetiva e motivacional.

Chi e Glaser (1986) veem a resolução de problemas como uma aptidão cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes. Assim, a resolução de problemas consiste em: usar processos básicos para resolver determinada dificuldade;

[46] A Memória de Curto Prazo recebe informações já codificadas pelos mecanismos de reconhecimento de padrões da Memória Sensorial-Motora (A Memória Sensorial é um sistema de memória que, através da percepção da realidade pelos sentidos, retém por alguns segundos a imagem detalhada da informação sensorial recebida por algum dos órgãos do sentido, e é responsável pelo processamento inicial da informação sensorial e sua codificação) e retém estas informações por alguns segundos, talvez alguns minutos, afim de que estas sejam utilizadas, descartadas ou mesmo organizadas para serem armazenadas.

[47] A Memória de Longo Prazo recebe as informações da Memória de Curto Prazo e as armazena. Ela possui capacidade ilimitada de armazenamento, e as informações ficam nela armazenadas por tempo também ilimitado.

reunir fatos acerca da dificuldade e determinar a informação adicional necessária; inferir ou sugerir soluções alternativas e testar sua adequação; simplificar o nível de explicação e eliminar discrepâncias; verificar as soluções de modo a generalizá-las.

De acordo com Andre (1986), o processo de resolução de problemas pode se descrever a partir dos elementos que seguem:

1. Uma situação na qual se quer fazer algo, porém se desconhecem os passos precisos para alcançar o que se deseja;

2. Um conjunto de elementos que representam o conhecimento relacionado com o problema;

3. O solucionador de problemas, o sujeito que analisa o problema, suas metas e dados e forma uma representação do problema em seu sistema de memória;

4. O solucionador de problemas que opera sobre a representação para reduzir a discrepância entre os dados e as metas (a solução de um problema está constituída por uma sequência de operações que podem transformar os dados em metas);

5. Ao operar sobre os dados e metas, o solucionador de problemas utiliza, ou pode utilizar os seguintes tipos de informações:

   - Informação armazenada em sua memória de longo prazo em forma de esquemas ou produção;
   - Procedimentos heurísticos;
   - Algoritmos;
   - Relações com outras representações;

6. O processo de operar sobre uma representação inicial com o fim de encontrar uma solução ao problema se denomina busca. Como parte do processo de busca da solução, a representação pode transformar-se em outras representações;

7. Uma busca continua até se encontrar uma solução ou o solucionador de problemas se dar por vencido.

Uma vez que resolver problemas envolve trabalhar mentalmente para superar obstáculos que estejam no caminho de um objetivo, Sternberg (2008) estabelece sete passos, que considera fundamentais, para a resolução de um problema:

1. A identificação do problema, que implica reconhecer um objetivo a ser alcançado;

2. A definição e a representação do problema, que consiste em identificar os conteúdos envolvidos no enunciado que, por sua vez, determinarão as estratégias que possibilitarão a solução do problema;

3. A construção de estratégias, que pode envolver a análise, ou seja, desmembrar o todo de um problema complexo em elementos gerenciáveis, ou pode envolver o processo complementar de síntese, isto é, juntar vários elementos para organizá-los em algo útil. Outro par de estratégias complementares envolve o pensamento divergente, onde se tenta gerar um conjunto diversificado de soluções alternativas possíveis para um problema; entretanto, após examinar as possibilidades, deve-se desenvolver o pensamento convergente, para afunilar as várias possibilidades e convergir para a melhor resposta possível;

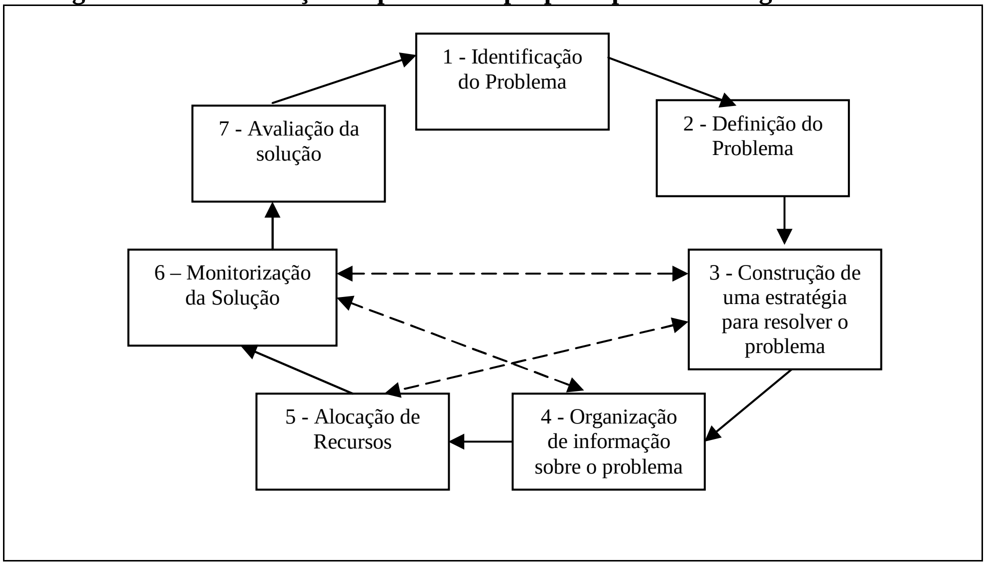
4. Organização das informações, isto é, integrar todas as informações que acredita precisar para realizar a tarefa de forma eficaz. Muitas vezes problemas não são resolvidos, por não se darem conta das informações que se tem ou de como elas se encaixam;

5. Alocação de recursos, tais como tempo ou mesmo recurso mental. Alguns problemas demandam maior quantidade de tempo para serem resolvidos que outros. No entanto, os melhores alunos têm mais probabilidades de passar mais tempo na fase inicial, decidindo como resolver um problema, e menos de fato o resolvendo. Ao gastar mais tempo antecipadamente pensando no que fazer, os estudantes eficazes têm menos probabilidade de serem vítimas de falsos começos, de caminhos tortuosos e de todos os tipos de erros;

6. Monitorização do processo de solução, ou seja, fazer várias verificações ao longo do caminho para se certificar da proximidade do objetivo desejado;

7. Avaliação, processo onde muitas vezes avanços fundamentais acontecem e novos problemas podem ser reconhecidos. É nesta etapa que o problema pode ser redefinido e é possível que surjam novas estratégias. Novos recursos também podem tornar-se disponíveis ou os já existentes podem ser usados mais eficazmente. Dessa forma, o ciclo se completa quando leva a novas ideias e recomeça.

Figura 4 Ciclo da solução de problemas proposto por Sternberg



Fonte: Sternberg (2008)

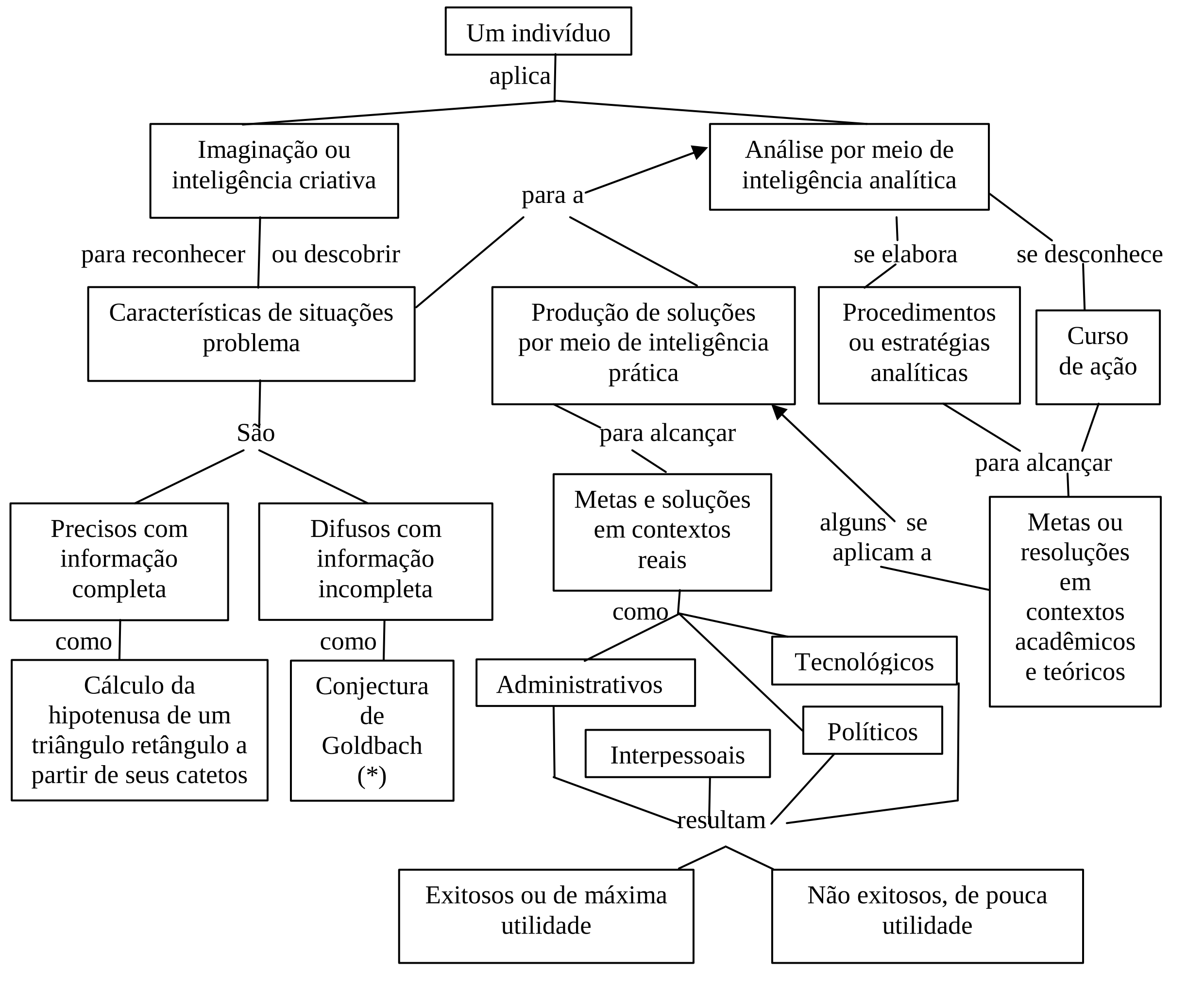
Nas experiências cotidianas de resolução de problemas, esses passos podem ser implementados com muita flexibilidade. Vários passos podem ser repetidos, ou ocorrer fora da sequência, ou, ainda, ser implementados de forma interativa, como se pode ver na figura 5 acima.

Ainda para Sternberg (2008), resolver problemas requer o uso de estratégias, reflexões e tomadas de decisão a respeito de passos a serem seguidos. Envolve raciocinar percorrendo diferentes etapas que vão desde a identificação do problema, de como representá-lo mentalmente, passando pela construção de estratégias, organização das informações disponíveis, do tempo necessário, monitoramento desse processo até a avaliação dos resultados. Ou seja, implica a utilização da inteligência humana, que, segundo Sternberg

(2008, p. 450), “é a capacidade de aprender a partir da experiência, usando processos metacognitivos[48] para melhorar a aprendizagem, e a capacidade de se adaptar ao ambiente”.

Rodriguez (1996), baseado em Sternberg, apresenta-nos um mapa conceitual, trazendo a inteligência humana como uma capacidade primordial para a resolução de problemas, seja para reconhecer ou descobrir as características apresentadas por estes ou para elaborar estratégias, procedimentos ou caminhos que possibilitem alcançar as metas desejadas, nos diferentes contextos em que os problemas se apresentam. É o que se observa na figura 4 a seguir.

Figura 5 Mapa conceitual de Resolução de Problemas, baseado em Sternberg



(*) Todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois números primos

Fonte: Rodriguez (1996).

48 Conhecimento e controle de nossa cognição; capacidade de pensar sobre e controlar nossos processos e nossas formas de pensar (STERNBERG, 2008).

Conforme se vê no mapa conceitual acima, a resolução de problemas implica, sobretudo, a utilização da inteligência humana. Segundo Sternberg (2008, p, 472), a inteligência inclui capacidades analíticas, criativas e práticas. No pensamento analítico, tentamos resolver problemas conhecidos usando estratégias que manipulam os elementos de um problema ou as relações entre os elementos (como comparar, analisar, avaliar), e geralmente o utilizamos com o intuito de alcançar metas ou a resolução de problemas em contextos acadêmicos e teóricos; no pensamento criativo, tentamos resolver novos tipos de problemas que nos exigem pensar sobre o problema e sobre seus elementos de uma nova maneira (como inventar, projetar, criar), e o empregamos para reconhecer ou descobrir características de situações-problema; no pensamento prático, tentamos resolver problemas aplicando o que sabemos a contextos cotidianos (aplicar, usar, utilizar), ou seja, o utilizamos com o fim de alcançar metas e soluções em contextos reais. Assim, percebe-se que o desenvolvimento da resolução de problemas está intimamente ligado à inteligência humana, quer em contextos acadêmicos, desafiadores, ou para sair de uma situação problemática que se apresente em diversos contextos do cotidiano.

Ao afirmar que, através da avaliação, "avanços fundamentais acontecem e novos problemas podem ser reconhecidos", Sternberg, mesmo abordando a Resolução de Problemas numa perspectiva cognitiva, sinaliza para a mesma direção de Schroeder e Lester (1989), quando discutem a compreensão da Matemática através da Resolução de Problemas[49] e de Onuchic (1999), que aborda esta atividade como uma metodologia de ensino[50].

No contexto da aprendizagem matemática, Huete e Bravo (2006, p. 71) consideram que a resolução de problemas

> trata-se de um processo no qual se combinam diferentes elementos que o aluno possui, como os pré-conceitos (em geral, aqueles conhecimentos previamente adquiridos que servem a uma nova situação), as regras, as habilidades.... Exige uma grande dose de reflexão e depende de uma excelente provisão de conhecimentos e capacidades, mais que por sua quantidade, por sua clara compreensão. É importante que essa aprendizagem sustente-se na realidade (situações da vida) e que quem aprenda o faça atribuindo, na aplicação matemática, à utilidade que representa.

Descrevendo alguns tipos de aprendizagem matemática e referindo-se à resolução de problemas como um deles, Huete e Bravo (2006, p. 76) asseveram que o fim da solução de

---

[49] Apresentado no item 3.7.8 deste capítulo (p. 154).
[50] Idem.

problemas não é a busca particularizada de uma resolução concreta e específica, mas que a mesma se apresenta como facilitadora do conhecimento das habilidades básicas, dos conceitos fundamentais e da relação existente entre eles. Compreendem a resolução de problemas como um processo no qual se combinam elementos distintos, tais como pré-conceitos, regras e habilidades, já possuídas pelos alunos, como também a reflexão e uma provisão de conhecimentos e capacidades, nas quais se confronta o educando com situações e fatos reais, práticos, da vida cotidiana, em que a Matemática adquire um papel preponderante e necessário: desenvolver naturalmente habilidades para resolver, mediante determinadas categorias, uma gama de problemas.

3.4 Influência da Modernidade na Resolução de Problemas

Estando o saber na humanidade, ele evolui juntamente com o desenvolvimento da sociedade em todos os seus aspectos. No entanto, a Idade Média, período da história caracterizado por uma sociedade de ordens, que negava o exercício das liberdades individuais para valorizar, ao contrário, os grandes organismos coletivos (a Igreja ou o Império, mas também a família e a comunidade), favorecendo o bloqueio de qualquer mudança e intercâmbio cultural, distingue-se por ter sido um período estéril para o saber e a cultura na Europa Ocidental. Segundo Cambi (1999, p. 196), todavia,

> essa sociedade estática, autoritária, tendencialmente imodificável, mesmo nas suas profundas, e constantes, convulsões internas (lutas de classes sociais, de grupos religiosos, de ideologias, de povos) entra em crise nos fins dos anos Quatrocentos, quando a Europa se laiciza economicamente (com a retomada do comércio) e politicamente (com o nascimento dos Estados nacionais[51] e sua política de controle sobre toda a sociedade), mas também ideologicamente, separando o mundano do religioso e afirmando sua autonomia e centralidade na própria vida do homem.

Tomando-se a impressão do primeiro livro de Matemática no mundo ocidental (Aritmética de Treviso, 1478); a primeira impressão dos Elementos de Euclides (tradução de Campanus, 1482); a Renascença[52]; a descoberta das Américas, em 1492; e a descoberta do

[51] Territórios definidos por limites, traços culturais e linguísticos, governados por uma monarquia absolutista, com autoridade e legitimidade para criar leis, formar exércitos e decretar impostos.

[52] Período da história da Europa, aproximadamente entre fins do século XIII e meados do século XVII, quando diversas transformações em uma multiplicidade de áreas da vida humana assinalam o final da Idade Média e o início da Idade Moderna. Apesar de essas transformações serem bem evidentes na cultura, sociedade, economia, política e religião, caracterizando a transição do feudalismo para o capitalismo e significando uma ruptura com

Brasil, em 1500, como pontos de referência e marcos de uma ruptura, que caracterizaram o término de um longo ciclo histórico (a Idade Média), é possível se verificar que se dá, a partir daí, o início de outro ciclo, também longo, designado Modernidade.

De acordo com Cambi (1999, p. 196 - 199), a ruptura da Modernidade apresenta-se como uma revolução em muitos âmbitos. Como revolução geográfica, deslocou o eixo da história do Mediterrâneo para o Atlântico, do Oriente para o Ocidente e, com as viagens de descobrimentos e a colonização de novas terras, proporcionou um contato estreito entre diferentes áreas do mundo, entre etnias e culturas diversificadas e entre diferentes modelos antropológicos.

Como revolução econômica, acabou com o modelo feudal, ligado a um sistema econômico fechado, baseado na agricultura, para ativar uma economia de intercâmbio, baseada na mercadoria e no dinheiro, na capitalização, no investimento e, sobretudo, na produtividade. Com isto, surgiu o sistema capitalista, que nasceu independente de princípios éticos, justiça e solidariedade, caracterizando-se somente pelo puro valor econômico e pela exploração de recursos humanos, técnicos e naturais.

Como revolução política, a Modernidade girou em torno do nascimento do Estado moderno, centralizado, controlado pelo soberano, atento à prosperidade econômica, organizada, por sua vez, segundo critérios racionais de eficiência. Mudava-se, então, a concepção de poder. Mesmo ancorado na visão social da figura do rei, o efetivo exercício do poder se distribuía pela sociedade através de um sistema de controle, de instituições às quais eram delegadas a elaboração do consenso e a penetração de uma lógica estatal na sociedade em seu conjunto.

Por fim, temos a revolução social, que veio promover a formação e a afirmação de uma nova classe, a burguesia, nascida nas cidades, instaurando um novo processo econômico (capitalista), delineando também uma nova concepção do mundo (laica e racionalista) e novas relações de poder. Ainda na visão de Cambi (1999, p. 197),

> do ponto de vista ideológico-cultural, a Modernidade opera uma dupla transformação: primeiro, da laicização, emancipando a mentalidade – sobretudo das classes altas da sociedade; segundo, de racionalização, produzindo uma revolução profunda nos saberes que se legitimam e se organizam através de um livre uso da razão, a qual segue apenas seus vínculos internos, opondo-se a toda forma de preconceito. [...] Tudo isso implica e produz também uma revolução na educação e na pedagogia. A

---

as estruturas medievais, o termo é mais comumente empregado para descrever seus efeitos nas artes, na filosofia e nas ciências. http://pt.wikipedia.org/wiki/Renascimento.

> formação do homem segue novos itinerários sociais, orienta-se segundo novos valores, estabelece novos modelos.

Diante desse contexto, podemos dizer, então, que a procura de métodos para resolver problemas é parte da modernidade, e creditamos a René Descartes, filósofo e matemático que viveu entre os séculos XVI e XVII, a definição de suas bases. Estas podem ser encontradas em sua obra Discurso ao Método, publicado em 1637. No entanto, antes de enunciá-las, faremos algumas considerações a respeito dos escritos do aludido autor.

3.4.1 A contribuição de René Descartes para a Resolução de Problemas

Uma das contribuições mais profícuas, no sentido de apresentar uma heurística para a resolução de problemas, vem do filósofo e matemático René Descartes (1596 -1650). No entanto, devido ao caráter positivista que suas obras apresentavam, poucos trabalhos de pesquisa abordando a temática Resolução de Problemas fazem a devida referência a ele, quando muito, mencionando a pretensão de Descartes em apresentar um método universal para a resolução de problemas. Em sua obra “Rules for the Direction of the Mind”, deu ênfase a fases, quais sejam: reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equação(ões); reduzir todo problema matemático a um problema algébrico; e reduzir qualquer problema a um problema matemático. Embora fique evidente o caráter irrealista de tal projeto, o grande legado de Descartes para a resolução de problemas não está no resultado apresentado, mas no processo de construção de seu método.

Para este filósofo, os homens são igualmente racionais – é a razão que distingue o homem dos animais –, no entanto diferem quanto à memória, à imaginação e a todas as faculdades que permitem o exercício do pensamento. Colocando-se com elevado grau de humildade, aliás, como cabe aos grandes sábios, Descartes (1985, p. 31) afirmava:

> Quanto a mim, jamais presumi que meu espírito fosse, em algo, mais perfeito do que os das outras pessoas em geral; frequentemente até desejei ter o pensamento tão vivo, ou a imaginação tão clara e nítida, ou a memória tão ampla ou tão presente, quanto quaisquer outras pessoas.

Também podemos ver em seus escritos que a construção do método por ele elaborado é fruto de caminhos trilhados desde a sua juventude, pois, desde então, vinha nutrindo-se das letras e das ciências sem, contudo, deixar de apreciar os exercícios com os quais o ocupava a escola, as línguas que o levavam ao entendimento dos livros antigos, a Poesia, a Filosofia e as

Matemáticas. Por estas, demonstrava uma declarada preferência, como podemos constatar (1985, p. 35) nas seguintes palavras:

> Comprazia-me, sobretudo, com as Matemáticas, por causa da certeza e da evidência de suas razões, mas não percebia ainda seu verdadeiro uso, e acreditando que serviam somente às artes mecânicas, surpreendia-me que, embora fossem firmes e sólidos seus fundamentos, nada de mais elevado se tivesse edificado sobre eles.

Decidido a não mais procurar outra ciência além daquela que pudesse existir em si próprio, ou então no grande livro do mundo, Descartes passou o resto de sua mocidade viajando, observando cortes e exércitos, recolhendo diferentes experiências "e por toda parte, fazendo tal reflexão sobre as coisas que se me apresentavam, para que pudesse tirar delas algum proveito" (1985, p. 37). Visualizamos, ainda, em seu texto (1985, p. 38) grande lição que essa vasta experiência lhe proporcionou:

> percebendo uma série de coisas que, entretanto, nos parecem aceitas e aprovadas comumente por grandes povos, aprendi a não confiar muito em nada do que me fora incutido somente por exemplo, e pelo hábito, e, desse modo, livrei-me gradativamente de muitos erros que podem ofuscar nossa luz natural e nos tornar menos capazes de ouvir a voz da razão.

Após estudar, por alguns anos, o livro do mundo, deliberou estudar a si próprio e empregar todas as forças de seu espírito na escolha dos caminhos que deveria seguir. Como fruto dessa decisão, um de seus primeiros pensamentos foi que "não há tanta perfeição nas obras compostas por várias peças, e realizadas pelas mãos de diversos mestres, quanto naquelas em que um só trabalhou"[53] (1985, p.38). Não obstante, Descartes deixava claro que o seu propósito não era ensinar o método que se devia seguir para conduzir bem a razão, mas apenas mostrar de que maneira ele se esforçou para conduzir a sua.

Apesar de o método proposto por Descartes já ser bastante conhecido e, na verdade, inerente às atuais propostas de resolução de problemas, faz-se necessário atentarmos a mais uma passagem a que, segundo D'Ambrósio (2007, p.516), "não é concedida suficiente atenção. Relatou Descartes (1985, p. 44) sobre suas experiências:

---

[53] A ideia fundamental do pensamento cartesiano: a da unidade do corpo das ciências a partir de um mesmo modelo matemático. Esta concepção é radicalmente diferente da concepção da Filosofia escolástica; esta última admitia a diversidade das ciências segundo seus objetos. Por exemplo, a Filosofia da Natureza tinha por estudo o ser móvel; a Lógica, a ordem que a razão coloca em suas operações. Portanto, uma vez que havia diferentes ciências, havia diversos métodos para estudá-las. Em face disso, Descartes formula um único método decorrente das Matemáticas (comentário 43 de Denis Huisman in Descartes,1985, p. 38).

> Mais jovem, eu estudara um pouco, entre os ramos da Filosofia, a Lógica, e, entre as Matemáticas, a Análise dos geômetras e a Álgebra, três artes ou ciências que pareciam dever contribuir em algo para o meu projeto. Mas, examinando-as, notei que, quanto à Lógica, seus silogismos e a maior parte de seus demais preceitos, servem mais para explicar a outrem as coisas que já se sabem […] do que para aprendê-las. […] Com respeito à Análise dos antigos e à Álgebra dos modernos, além de se estenderem apenas a matérias muito abstratas, e de não parecerem de nenhuma utilidade, a primeira permanece sempre tão adstrita à consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar muito a imaginação. Ademais, esteve-se de tal forma sujeito, na segunda, a certas regras e cifras, que ela se tornou uma arte confusa e obscura que embaraça o espírito, ao invés de uma ciência que cultiva. Por esta razão, pensei ser necessário procurar algum outro método que, reunindo as vantagens desses três, fosse isento de seus defeitos. E como a multiplicidade de leis frequentemente oferece desculpas aos vícios, de modo que um Estado é mais bem dirigido quando, embora tendo muito poucas leis, são elas estritamente cumpridas; assim, em lugar desse grande número de preceitos de que se compõe a Lógica, julguei que me bastariam os quatro a seguir [...].

Analisando a citação referida acima, D’Ambrósio (2007) chama-nos a atenção para duas frases: a primeira é “explicar a outrem as coisas que já se sabem […] do que para aprendê-las” e a segunda, a “consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar muito a imaginação”. Para D’Ambrósio, estes são o cerne do insucesso e do fracasso na educação matemática. Parece que já não há mais espaço para a criatividade e que o principal objetivo da educação é formar os estudantes nos mesmos moldes em que são forjados a sociedade e o mundo, o que, sem dúvida, os angustia quando pensam sobre o seu futuro.

De acordo com D’Ambrósio (2007), contudo, o objetivo do educador não é dar continuidade ao modelo de mundo que prepara o cidadão para a guerra, para que seja intolerante com seus semelhantes e que viva em função do acúmulo de capital em detrimento dos recursos naturais, mas sim, preparar as novas gerações de alunos para serem criativos e encontrarem formas de paz, em todas as suas dimensões: militar, social e ambiental. Que proponham o novo com criatividade e não apenas sejam bons reprodutores dos antigos.

Descartes, ao propor o método, tinha em mente a busca do desconhecido, uma orientação para a sua investigação, e é nesse mesmo espírito que deve ser interpretada a resolução de problemas: com o objetivo de encontrar o novo e não de reproduzir o que já é bem conhecido. Ao enunciar os quatro preceitos do Discurso que definem o método matemático, reduzindo-os ao essencial e, por isso mesmo, generalizando, o filósofo assevera (1985, p. 44-45) que esses quatro preceitos lhe bastariam, desde que ele tomasse a firme e constante resolução de jamais deixar de observá-los. São eles:

> 1 - O primeiro preceito era o de jamais aceitar alguma coisa como verdadeira que não soubesse ser evidente como tal, isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e de nada incluir em meus juízos que não se apresentasse tão clara e tão distintamente a meu espírito que eu não tivesse nenhuma chance de colocar em dúvida.[54]
>
> 2 - O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas partes quantas possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las.[55]
>
> 3 - O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, a começar pelos objetos mais simples e mais fáceis de serem conhecidos, para galgar, pouco a pouco, como que por graus, até o conhecimento dos mais complexos e, inclusive, pressupondo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros.[56]
>
> 4 - E o último, o preceito de fazer em toda a parte enumerações tão completas e revisões tão gerais que eu tivesse a certeza de nada ter omitido.[57]

Reafirmamos neste ponto que o caminho ora proposto não tem o objetivo de ensinar como conduzir a razão, mas apenas de mostrar os procedimentos que Descartes utilizou para conduzir sua própria razão. Contudo, como assegura D'Ambrósio (2007, p. 517), "infelizmente, muitos educadores matemáticos não deram atenção suficiente a tal fato". Não obstante, o caminho percorrido por Descartes influenciou todos os procedimentos propostos à resolução de problemas que se seguem à publicação de seu tratado filosófico sobre a ciência universal intitulado *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité*

---

[54] O primeiro preceito é sempre denominado regra de evidência e, com efeito, significa: não aceitar por verdadeiro senão aquilo que é evidente. A evidência consiste na intuição intelectual de uma ideia clara e distinta. Analisemos os seguintes termos: a intuição, contrariamente ao sentido em que a entendemos hoje, é de ordem intelectual e não sensível; se origina unicamente das luzes da razão. – Uma idéia é clara quando se percebem todos os seus elementos; uma idéia é distinta quando não se pode confundi-la com nenhuma outra. Daí decorre o fato de que o que é evidente é indubitável (Comentário 64 de Denis Huisman in Descartes, 1985, p. 44).

[55] Segundo preceito: a análise não consiste somente na decomposição de uma ideia complexa em seus elementos simples, através de um procedimento mental análogo a análise química que se pode fazer de um corpo. Ela é, de maneira mais profunda, um procedimento que reduz o desconhecido ao conhecido e remonta os princípios dos quais depende (Comentário 65 de Denis Huisman in Descartes, 1985, p. 44).

[56] Terceiro preceito: aqui, reconstitui-se o complexo partindo-se do simples: trata-se da dedução. A ordem é lógica; é a ordem segundo a qual as verdades dependem uma das outras. Para Descartes, deve-se supor uma ordem mesmo onde não há ordem. Grau: a expressão é tomada em sentido matemático, como nas expressões "uma equação do primeiro ou do segundo grau". Pode-se, igualmente, falar de graus de saber que não são os das ciências especificamente diferentes, mas as etapas de uma mesma ciência (Comentário 66 de Denis Huisman in Descartes, 1985, p. 45).

[57] Quarto preceito: a contagem ou enumeração consiste em passar de um juízo a outro. Essa passagem não é rigorosa, a menos que se faça "por um movimento contínuo, e em parte alguma interrompido, do pensamento". Quanto mais rápido é o movimento do espírito, mais ele elimina toda intervenção da memória, que é fonte de erro (Comentário 67 de Denis Huisman in Descartes, 1985, p. 45).

dans les sciences (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências).

3.4.2 A contribuição da Escola Gestaltica para a Resolução de Problema

Após Descartes, encontramos ideias originais acerca de resolução de problemas na Escola Gestaltista[58] de psicologia, com o psicólogo e cientista político inglês Graham Wallas. Em seu clássico *The art of thought*, Wallas (1926, p. 82) destaca quatro fases do processo de resolução de problemas. A primeira delas ele chama de saturação; nesta fase deve-se trabalhar no problema até se ter feito tudo o que se podia com ele, coletar todas as informações contidas e realizar todas as tentativas preliminares de solução. A segunda fase, chamada de incubação, consiste em tirar o problema do consciente e deixar o subconsciente tomar conta dele, ou seja, "dorme-se sobre o problema", o que se entende aqui como deixar o problema de lado para realizar outras atividades; aparentemente, esta é a parte mais fácil desse processo. A terceira fase ele denomina de inspiração ou iluminação: é quando a resposta chega inesperadamente, sem que se esteja pensando no problema, uma quase instantânea reorganização dos elementos numa situação-problema que leva a uma solução correta, como se fosse uma chave para a solução do problema (aqui é onde se produz o *estalo*, o *insight*[59] ou o *eureca*). A última fase é a de verificação, quando se faz uma conferência da solução apenas para ter certeza de sua correção.

Dentre uma série de incidentes relatados em uma autobiografia muito citada do francês Henri Poincaré, um dos grandes matemáticos do início do século XX, segue-se uma história que exemplifica um processo de descoberta, como o descrito por Wallas. Ao tentar demonstrar a impossibilidade de existência de funções com certo tipo de característica, Poincaré acabou por provar exatamente o contrário: concluiu que essas funções, afinal, existem e as batizou de "funções fuchsianas"[60].

---

[58] A Psicologia da forma, Psicologia da *Gestalt*, Gestaltismo ou simplesmente *Gestalt* é uma teoria da psicologia que considera os fenômenos psicológicos como um conjunto autônomo, indivisível e articulado na sua configuração, organização e lei interna. A teoria foi criada pelos psicólogos alemães Max Wertheimer (1880-1943), Wolfgang Köhler (1887-1967) e Kurt Koffka (1886-1940), nos princípios do século XX. Funda-se na idéia de que o todo é mais do que a simples soma de suas partes. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Gestalt. Acesso em 21/03/2010.

[59] O *insight* é um entendimento distintivo e aparentemente súbito de um problema ou de uma estratégia que auxilia em sua solução (STERNBERG, 2008, p. 377).

[60] Funções f(z), que voltam a tomar o mesmo valor quando a variável z sofre uma substituição da forma: (az+b)/(cz+d) em que a,b,c,d são constantes determinadas, formando assim um grupo descontínuo: f((az+b)/(cz+d)) = f(z). Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/poincare/matematica.htm. Acesso em 31/03/10.

Segundo seu relato, essa investigação desenrolou-se em três fases bem definidas. Uma primeira fase, de compilação de informação e experimentação, ocorreu sem produzir resultados palpáveis, após horas de trabalho diário, durante aproximadamente quinze dias. No entanto, uma viagem o fez distanciar-se de tal investigação; chegando a seu destino, sem que qualquer coisa em seu pensamento se referisse às funções, veio-lhe, como uma iluminação súbita, a ideia de que as transformações que usara para definir as funções fuchsianas eram idênticas às da geometria não-euclidiana (geometria dos espaços curvos). Ao retornar, já com plena certeza de sua descoberta, sistematizou e verificou os resultados. Com o relato dos passos decorridos no processo dessa demonstração, Poincaré mostrou ter passado por uma experiência tipicamente gestáltica. Contudo, vê-se em Pereira (2001, p. 4) uma expressão da crítica formulada a esta escola:

> ainda que a descrição Gestaltista da solução de um problema seja muito interessante e sua concepção de um problema como um todo organizado seja bastante relevante como contraposição à atomização então em voga (em parte devido às ideias de Descartes), seu apelo a noções vagas relacionadas ao funcionamento da 'mente' não é de grande ajuda para um programa de ação em resolução de problemas.

Apesar disso, não se pode negar a contribuição da escola gestáltica para a investigação matemática e para a Resolução de Problemas em particular. Embora a experiência narrada por Poincaré, evidentemente, tenha ocorrido a partir de uma investigação matemática, aquela não se restringe somente a esta; pelo contrário, a experiência gestáltica é vivenciada nas mais diversas áreas do conhecimento e em variadas situações com as quais se depara o ser humano, e cuja solução não se apresenta de imediato, porém ocorre de forma súbita. Além do mais, consideramos que compreender as fases apresentadas pela escola gestáltica é de suma importância para a pesquisa e para o ensino-aprendizagem relacionadas à Resolução de Problemas.

3.5 A Resolução de Problemas no Currículo Escolar

Segundo Stanic e Kilpatrick (1990 p. 1), há muito que os problemas têm ocupado um papel central no currículo de Matemática, contudo, o mesmo não ocorre com a solução de problemas. Afirmam que só recentemente os educadores matemáticos aceitaram a ideia de que o desenvolvimento da habilidade para resolver problemas merece uma atenção especial.

No entanto, junto com a ênfase dada a esta habilidade sobreveio a confusão. O termo Resolução de Problemas se converteu em um slogan que acompanhou diferentes concepções sobre o que é educação, o que é escola, o que é Matemática e por que devemos ensinar Matemática em geral e Resolução de Problemas em particular.

Esses autores relatam que a utilização dos termos “problema” e “resolução de problemas” tem se apresentado, ao longo dos anos, de maneiras variadas e muitas vezes contraditórias, todavia três temas gerais têm caracterizado o papel da solução de problemas no currículo de Matemática: resolução de problema como contexto; resolução de problema como habilidade; e resolução de problema como “fazer Matemática”.

A resolução de problemas como contexto se exprime através de cinco subtemas: como justificação; como motivação; como atividade recreativa; como meio para desenvolver novas habilidades e como prática. Todos estes subtemas estão baseados na ideia de que os problemas e sua resolução apresentam-se como veículo a serviço de outros objetivos curriculares.

- Como justificação: historicamente, a resolução de problema fornece uma justificação para se ensinar Matemática, no sentido de que aprender Matemática é aprender a resolver problemas. Visando a um convencimento do valor e da importância que a Matemática tem para vida, assim como para a prática e o exercício da cidadania, alguns problemas relacionados com experiências da vida cotidiana são incluídos no ensino para mostrar o valor da Matemática e deixá-la mais próxima da realidade dos alunos e dos professores.

- Como motivação: a motivação está relacionada à justificação, entretanto, com uma conexão mais específica, pois, ao justificar o conteúdo matemático que se deseja ensinar, objetiva-se despertar o interesse dos estudantes para o conteúdo a ser ministrado. Os problemas são frequentemente usados para introduzir novos temas, com o convencimento implícito ou explícito de que favorecerá a aprendizagem de um determinado conteúdo.

- Como atividade recreativa: a resolução de problemas como recreação está relacionada à motivação. Nesse caso, os problemas são apresentados não tanto para motivar os alunos a aprenderem, mas permitir que eles percebam o lado lúdico da Matemática, como também possibilitar diversão com a Matemática já aprendida. Enigmas ou problemas sem qualquer conexão necessária com o mundo real são perfeitamente adequados para este fim.

- Como veículo: os problemas, muitas vezes, são fornecidos não apenas para motivar o aluno ou despertar seu interesse para algum conteúdo matemático específico, mas como meio através do qual um conceito ou uma habilidade possa ser aprendido. Técnicas de descobertas refletem, em parte, a ideia de que a resolução de problemas pode ser um meio para aprender novos conceitos e competências. Crê-se que, cuidadosamente sequenciados, os problemas podem proporcionar aos estudantes novas habilidades e prover contexto para discussões relacionadas a algum tema.

- Como prática: dos subtemas apresentados anteriormente, a resolução de problemas como prática é a que teve maior influência sobre o currículo de Matemática. Neste caso, os problemas não fornecem justificação, motivação, recreação ou meio, mas as práticas necessárias para reforçar as habilidades e conceitos diretamente ensinados.

As mudanças tecnológicas advindas da Revolução Industrial, em meados do século XVIII, causaram profundo impacto no processo produtivo em nível econômico e social em todo o mundo civilizado e exigiram de estudiosos matemáticos habilidades para se solucionarem problemas do mundo real. Tal fato, certamente, influenciou o currículo de Matemática, e daí advém a visão que se tem, frequentemente, da resolução de problemas como uma entre inúmeras habilidades a serem ensinadas.

Colocando a resolução de problemas em uma hierarquia de competências que devem ser adquiridas pelos estudantes, faz-se aqui uma distinção entre problemas não rotineiros e problemas rotineiros. A resolução de problemas não rotineiros é caracterizada como uma habilidade de nível superior, e esta só é adquirida após os alunos resolverem uma quantidade significativa de problemas rotineiros – habilidade esta que por sua vez é adquirida a partir da aprendizagem de conceitos e habilidades matemáticas básicas.

É importante observar que nesta segunda interpretação, quando os problemas são vistos como uma habilidade em si mesma, as concepções pedagógicas e epistemológicas que subjazem são precisamente as mesmas que as assinaladas na interpretação anterior: as técnicas de resolução de problemas são ensinadas como um conteúdo, relacionando problemas práticos, para que as técnicas possam ser dominadas.

O último tema abordado é a resolução de problemas como um fazer matemático. Nessa perspectiva, há um ponto de vista acerca do papel que os problemas desempenham na vida daqueles que fazem Matemática. Consiste em acreditar que o trabalho dos matemáticos é resolver problemas e que a Matemática se reduz a problemas e à solução, isto é, fazer Matemática é resolver problemas. Essa ideia é sustentada pelo matemático Polya, em seu livro *How to solve it*, publicado em 1954, no qual introduz a ideia de heurística para descrever a arte de resolução de problemas. Para evidenciar as afirmações acima, Polya (1978, p. 101) assevera que "o futuro matemático deverá ser um hábil solucionador de problemas, mas não só isso, oportunamente, ele terá de resolver sérios problemas matemáticos e, primeiro, deverá descobrir para que tipo é mais bem dotado". A resolução de problemas como um "fazer matemático" defendida por Polya abriu portas para que pesquisas abordando questões referentes à temática Resolução de Problemas fossem desenvolvidas.

3.6 Movimentos em favor da Resolução de Problemas

No tocante à Educação Matemática, foi somente na década de 1970 que se iniciou o estudo sistemático sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares, quando o. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) a consagrou como orientação e eixo para o ensino de Matemática. No entanto, faz-se necessário reconhecer que, desde a publicação do já referido livro *How to solve it*, de George Polya, em 1954, aqui publicado como A arte de resolver problemas (1978), o tema Resolução de Problemas vem despertando o interesse de professores e alunos, nos níveis superiores. A este respeito, Schoenfeld (2007) ressalta que um pequeno número de investigadores, entre eles Kilpatrick, Lucas e Kantowski, motivados pela obra de Polya, começaram a identificar as práticas heurísticas utilizadas pelos estudantes no ato de resolução de problemas. No entanto, o interesse maior por essa temática se deu quando ela se apresentou como uma alternativa para o currículo da Matemática escolar, após o malogro da Matemática Moderna, que teve seu lugar na década de 1960.

3.6.1 O Movimento da Matemática Moderna

Boyer (1996) observa que a Matemática do século XX é marcada pela abstração e preocupação com a análise de grandes esquemas. Assim, temos, em 1939, o primeiro volume de uma obra denominada Elementos de Matemática, assinada por "Nicolas Bourbaki", que esteve em desenvolvimento até meados da década de 1960. Na realidade, os autores da obra eram um grupo de matemáticos que, sob esse pseudônimo, elaboraram um tratado que pretendia integrar de modo coerente e impecavelmente rigoroso os principais desenvolvimentos da Matemática: as "Estruturas Fundamentais da Análise", com os subtítulos: Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia Geral, Funções de Variável Real, Espaços Vetoriais, Topologia e Integração.

Ainda de acordo com Boyer (1996), nesse grupo de matemáticos – quase todos eles franceses –, o qual formou uma espécie de sociedade secreta, Jean Dieudonné e André Weil foram considerados os dois líderes mais ativos. Os trabalhos publicados por Bourbaki caracterizavam-se por uma adesão completa ao tratamento axiomático, a uma forma abstrata e geral, retratando uma estrutura lógica. O lema do movimento era "Um objeto matemático é a sua definição". Como consequência dessas ideias, surgiu um movimento conhecido como Matemática Moderna, que tentava adaptar a formalização do movimento bourbakista ao ensino.

O Movimento da Matemática Moderna foi um acontecimento que marcou a história da Educação Matemática. Para Schoenfeld (1985), o culto à Matemática Moderna foi uma das respostas que os americanos deram aos russos, depois do lançamento do Sputnik[61] pela (extinta) União Soviética, em outubro de 1957; Kline (1976, p. 22) explica que "este acontecimento convenceu o governo e o país que os Estados Unidos estava atrás dos russos do ponto de vista das matemáticas e de outras ciências".

Tal lançamento, também segundo Kline (1976), acarretou grande instabilidade para os americanos, que, com a intenção de renovar os seus conhecimentos científicos, promoveram o desenvolvimento de novos programas de Matemática – baseados na Álgebra Abstrata, na Topologia, na Lógica Simbólica, na Teoria dos Conjuntos e na Álgebra de Boole –, uma vez que, inspirados no ideário de uma busca incessante por progresso tecnológico, viam nesta ciência a base de sustentação para seus ideais.

[61] Primeiro satélite artificial da Terra, lançado pela União Soviética em 4 de outubro de 1957, cuja função básica era transmitir um sinal de rádio, "beep", que podia ser sintonizado por qualquer radioamador. O Sputnik ajudou a identificar as camadas da alta atmosfera terrestre, como também ofereceu a oportunidade de estudar pequenos meteoritos.

Foi neste sentido que a Sociedade Americana de Matemática, organização dedicada à pesquisa, decidiu aplicar todos seus esforços na elaboração de um plano para o ensino secundário. De acordo com Kline (1976, p. 22), tal sociedade criou um grupo denominado School Mathematics Study Group para executar essa tarefa. O grupo começou seu trabalho redigindo um plano para todos os cursos de ensino secundário, ampliando posteriormente para incluir o plano de Aritmética das escolas primárias.

No que tange ao ensino, a Matemática Moderna provocou mudanças significativas nas práticas escolares. Por isso mesmo ela passou, de certa forma, a ser o centro das atenções das reformas educacionais, o que acabou por promover e orientar reformas curriculares no ensino da Matemática em quase todo o mundo ocidental. Esse movimento atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática atribuindo, a partir de então, uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos.

Vê-se em Fiorentini (1994) que os principais propósitos do movimento foram os seguintes:

a) Unificar os três campos fundamentais da Matemática. Não uma integração mecânica, mas a introdução de elementos unificadores como a Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções.

b) Dar mais ênfase aos aspectos estruturais e lógicos da Matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não-justificativo e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar.

c) Os ensinos fundamental e médio deveriam refletir o espírito da Matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente.

Na verdade, observa Fiorentini (1994, p. 44), “essa proposta de ensino parecia visar não à formação do cidadão em si, mas à formação do especialista em matemática”.

No Brasil, a influência da Matemática Moderna se deu a partir da fundação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM, o qual reunia professores com grande projeção nacional na área, entre eles Osvaldo Sangiorgi. No entanto, a concretização e materialização desse movimento se deram após a publicação, em 1963, do primeiro volume da obra inovadora Matemática – curso moderno, de Sangiorgi. Destinada ao curso “ginasial” da época, tal obra marcou o ensino brasileiro, pois foi nela que, pela primeira vez, foi dado um tratamento didático à teoria do conjunto em livros didáticos de Matemática em nosso país. Valente (2008, p. 149) relata que, "produzidos à casa dos milhões, os textos de Sangiorgi fizeram escola", sobretudo por ter sido esse autor um grande articulador entre todas as instâncias que influenciavam o processo educacional em seu tempo. Ainda segundo Valente (2008, p. 150),

> Sangiorgi tinha trânsito fácil na esfera pública; era reconhecido pelas elites como excelente professor e acadêmico, por sua formação na Universidade de São Paulo; teve, por circunstância do contexto político-econômico dos anos de 1960 e, também, por relações pessoais com editores de jornais, franco acesso à mídia impressa; usou a mídia televisiva para, de modo inédito, promover cursos pela TV; constituiu-se autor didático em tempos em que as editoras brasileiras e, em particular, a Companhia Editora Nacional transformar-se-iam em grandes empresas, a partir de São Paulo.

O prestígio e a articulação que Osvaldo Sangiorgi mantinha com essas diferentes instâncias prepararam devidamente o cotidiano escolar da época para a aceitação da grande novidade didática do início dos anos de 1960: a Matemática Moderna. A esse respeito, Valente (2008, p. 150) afirma que "A cultura escolar de época parece não ter tido forças para resistir à tentação do novo, transformando as obras de Osvaldo Sangiorgi em manuais inovadores e vulgata ao mesmo tempo".

Quanto à relação professor-aluno e ao processo ensino-aprendizagem, Fiorentini (1994, p. 44) verifica que não houve grande mudança: "O ensino, de modo geral, continua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro-negro". O aluno continua passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor. Para Schoenfeld (1985, p. 8),

> a impressão geral é a de que a Nova Matemática foi muito pior que o ensino que vinha substituir. Os alunos não apenas não conseguiam dominar a matemática abstrata do novo plano de estudos, como tampouco conseguiam dominar as operações básicas. Como resultado surgiu em fins da década de 1960 uma forte rejeição contra a Nova Matemática e apareceu o movimento de "volta ao domínio das técnicas básicas".

O Movimento da Matemática Moderna começou a perder força quando questionamentos cada vez mais frequentes em torno dessa concepção de ensino começaram a se fazer ouvir em meio aos educadores em todo o mundo. Um desses questionamentos foi encabeçado pelo movimento denominado Retorno às Bases, que reivindicava a volta do ensino tradicional da Matemática, baseado na repetição, nos exercícios e nas aplicações de algoritmos. No entanto, só após a publicação da obra O fracasso da Matemática Moderna, de Moris Kline, com críticas contundentes à concepção de ensino em foco, a Matemática Moderna teve seu fim decretado. Para esse autor, o exagero da forma dedutiva de abordar os conteúdos, aliado ao excessivo formalismo e simbolismo da linguagem utilizada pela Matemática Moderna, empobreciam a vida e o espírito da Matemática; assim, Kline (1976, p. 84) asseverava que

> a dificuldade em lembrar os significados e a desagrabilidade das expressões simbólicas afugentam e perturbam os estudantes; símbolos são como estandartes hostis adejando sobre uma cidadela aparentemente inexpugnável. O próprio fato de o simbolismo ter entrado na matemática até certo ponto significativo por volta dos séculos dezesseis e dezessete indica que não sem dificuldade para as pessoas. O simbolismo pode servir a três propósitos. Pode comunicar ideias eficazmente; pode ocultá-las e pode ocultar a ausência delas. Quase sempre parece dar-se a impressão de que os textos de matemática moderna empregam o simbolismo para ocultar a pobreza de ideias. Alternativamente, o propósito de seu simbolismo parece ser o de tornar inescrutável o que é óbvio e afugentar, portanto, a compreensão.

Apesar de endereçar suas críticas ao ensino americano, por tratar-se de um movimento internacional, essa obra teve grande repercussão no meio acadêmico brasileiro. De acordo com Bertoni Pinto (2005), o livro de Kline, apesar de publicado no Brasil apenas três anos após sua divulgação nos Estados Unidos, foi um marco decisivo para o esgotamento do movimento em nosso país. Ao analisar as marcas históricas que esse movimento deixou no Brasil, constata Bertoni Pinto (2005, p. 29) que

> a excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia da teoria dos conjuntos deixou marcas profundas, ainda não desveladas, nas práticas pedagógicas daquele período. Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino da Matemática, nesse período, parece ter descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. O modelo dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade.

Num contexto de busca de uma alternativa à Matemática Moderna e no qual não se via o retorno às bases como uma opção adequada para o currículo de Matemática, a Resolução de problemas apresentou-se como uma nova proposta ao currículo de Matemática para os anos de 1980.

3.6.2 Caminhos percorridos até a apresentação da proposta

De acordo com Lester (1977), o ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos anos de 1960, nos Estados Unidos. Entretanto, antes desse período, podemos encontrar experiências e alguns estudos que enfatizaram os produtos da resolução de problemas.

Ao fazer um breve histórico da linha de investigação Resolução de Problemas, Fiorentini (1994, pp. 188 a 191) considera que as experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. "Nessas experiências as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações sócio-econômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade)". Segundo o autor em foco, Dewey sugeriu que essa orientação pedagógica, centrada em projetos, pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Conforme, ainda o autor referido acima, até o final da década de 1950 os estudos sobre Resolução de Problemas indicavam que, para desenvolver a capacidade de resolver problemas, as crianças deveriam exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas. No entanto, pesquisas realizadas nessa época começaram a questionar os estudos que enfatizavam os produtos das soluções em lugar de valorizar os processos implícitos da resolução criativa de problemas e apontavam que o ensino de resolução de problemas deveria centrar-se no ensino de estratégias para essa resolução. A partir daí, inaugura-se o período (1962 a 1972) que demarca a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma de caráter mais qualitativo.

No final dos anos de 1970, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de buscar informações sobre as características desejadas para o currículo de Matemática. Para esse fim, foram entrevistadas nove amostras de diferentes populações, em duas rodadas de pesquisa, com o intuito de verificar quais eram as preferências curriculares e as prioridades elencadas pela comunidade para o ensino da Matemática para os anos de 1980. Seis dessas amostras foram designadas "profissionais" e constituídas por membros da Associação Americana de Matemática; professores de Matemática; monitores de professores de Matemática; supervisores de Matemática; assinantes da revista *Arithmetic Teacher*; e assinantes da revista *Mathematics Teacher*. As outras três amostras, designadas “leigas”, foram extraídas de fora da comunidade matemática. Uma delas foi composta por diretores de escolas, outra por presidentes de conselhos de escolas e a última por presidentes de associação de pais e mestres.

Destacando algumas conclusões obtidas nessa pesquisa, Osborne e Kasten (1997) apontam que, para as nove populações pesquisadas, a Resolução de Problemas deveria ser o foco da Matemática escolar para a década de 1980. Observam também que, enquanto para as amostras de fora da comunidade matemática, ajudar a resolver problemas do cotidiano constituía a principal meta da Matemática escolar, algumas das amostras profissionais viam a Resolução de Problemas como provedora de habilidades necessárias para viver no mundo atual; todavia, a amostra constituída por membros da Associação Americana de Matemática, em função de suas especificidades, valorizou a aplicação da Matemática na ciência.

Todas as populações pesquisadas consideraram a importância de incluir ideias globais da Resolução de Problemas (por exemplo, ler, planejar, executar e testar) no programa curricular, em todos os níveis de ensino. Concebiam, também, como metodologia desejável usar um problema como recurso ou veículo para introduzir e desenvolver novos tópicos de Matemática. Destacaram a relevância da solução de problemas para todos os alunos e que esta deveria começar cedo em suas experiências matemáticas. Apontaram como inadequada qualquer alteração do currículo de Matemática que proporcionasse experiências peculiares para resolver problemas a grupos particulares, como por exemplo a grupos de mulheres, aos alunos em preparação para ingressarem no curso superior ou para as minorias étnicas. Por fim, indicaram que o ensino de Resolução de Problemas deveria ser interdisciplinar. A partir de então, essa temática foi colocada no topo das prioridades, tanto pelos profissionais como pelos leigos, alegando que *era absolutamente decisivo que todos os alunos desenvolvessem habilidade nessa área*.

Este relato apresenta-se aqui tão somente para evidenciar que, diferentemente da Matemática Moderna, as recomendações feitas pelo NCTM, que conduziram a modificações construtivas dos programas de Matemática escolar, foram resultado de uma longa pesquisa, realizada durante dois anos, que indicou um compromisso suficientemente forte com a Resolução de Problemas a ponto de se executarem as mudanças necessárias no currículo de Matemática para a década de 1980. Tais recomendações, entre elas a de que a solução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar na década de 1980 e que o currículo de Matemática deveria ser organizado em torno desse tema, influenciaram, de maneira significativa, os currículos em todo o mundo e, desde então, o interesse por esse assunto vem florescendo substancialmente, contribuindo para o avanço das pesquisas no campo da Educação Matemática.

No Brasil, os estudos concernentes ao ensino de Resolução de Problemas tiveram inicio, de maneira mais efetiva, a partir da segunda metade da década de 1980. Esses estudos, segundo Fiorentini (1994, p. 189), "restringem-se, quase que absolutamente, a trabalhos traduzidos em dissertações e teses de Mestrado e Doutorado". Foi nessa década que surgiu o grupo de Psicologia Cognitiva de Recife (David Carraher, Terezinha Nunes Carraher e Analúcia Schliemann) na Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, que, entre outros estudos, desenvolveu e orientou pesquisas relacionadas à investigação de estratégias e habilidades cognitivas apresentadas por pessoas com ou sem escolarização na resolução de problemas matemáticos, em diferentes contextos socioculturais.

Nesse mesmo período iniciou-se o curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP-RC, onde trabalhos na linha de Resolução de Problemas começam a ser desenvolvidos. No entanto, foi após a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, em 1987, que a Resolução de Problemas ganha mais visibilidade e passa a ocupar a atenção de vários congressos nacionais. Nessa década, foram produzidos em programas de pós-graduação no Brasil (Psicologia Cognitiva/UFPE, FE/USP, PUC/SP, UNESP/RC, FE/UNICAMP) catorze trabalhos abordando essa temática[62], sendo doze dissertações de Mestrado, uma tese de Doutorado e uma tese de Livre Docência.

De acordo com Andrade (1998), a preocupação essencial, na década de 1980, era desenvolver no educando a capacidade de resolução de problemas. "Para isso, os estudos realizados centralizavam-se mais na criação e no uso de estratégias e de modelos ou programas especiais de ensino de resolução de problemas que pudessem otimizar o desempenho dos alunos na resolução de problemas". No final dessa década, e sob as influências de teorias construtivistas de aprendizagem, pesquisadores começavam a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas. Assim, na década de 1990, essa tendência passava a ser pensada como uma metodologia de ensino e vista não só como um objetivo para a aprendizagem da Matemática, mas também como o meio principal para isso.

[62] Fiorentini (1994) descreve esses estudos em sua Tese de Doutorado "Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação".

3.6.3 A Resolução de Problema como proposta curricular

Em 1980 o National Council of Supervisors of Mathematics, NCSM, afirmou que "aprender a resolver problemas é o principal objetivo no momento de estudar matemática". O documento mais influente sobre o tema passou a ser a *Agenda for Action*, publicada pelo NCTM (1980) e cuja primeira recomendação é de que "a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos de 1980". Tal recomendação tornou-se um marco, uma referência para o ensino e para as pesquisas que abordam a Resolução de Problemas e todas as suas implicações.

Entretanto, conforme apontam Vila e Callejo (2006, p. 17), esse marco deve ser entendido como resultado, como "ponto de chegada" de alguns movimentos e informes anteriores, tais como o de Krygowska, no Congresso Internacional de Matemática de Moscou, em 1966, em relação ao desenvolvimento da atividade matemática dos alunos e ao papel dos problemas nesse desenvolvimento, como também a exposição da mesma autora na reunião da Comissão Internacional para o Estudo e a Melhora do Ensino da Matemática (CIEAEM) em 1976, sobre "O problema dos problemas". Para Krygowska, conforme se vê em D'Amore (2007, p. 285), "a resolução de problemas é a forma mais eficaz não somente do desenvolvimento da atividade matemática dos estudantes, mas também da aprendizagem dos conhecimentos, das habilidades, dos métodos e das aplicações matemáticas". Contudo, não poderíamos deixar de citar que o anúncio do "novo" método de resolução de problemas, proferido por Polya em 1931 para a Sociedade Suíça de Professores de Matemática, bem como a publicação de seu livro *How to solve* it, em 1954, certamente, contribuíram para a proposição dessa Agenda.

A primeira recomendação contida na *Agenda for Action* (NCTM, 1980), isto é, a Resolução de Problemas como o foco da Matemática escolar, expressava-se através de seis ações, nas quais eram envolvidos os professores, os pesquisadores e as administrações educacionais; são elas:

1. Deveria organizar-se o currículo de Matemática em torno da Resolução de Problemas.

2. Deveriam desenvolver-se e ampliar a definição e a linguagem da Resolução de Problemas em Matemática a fim de incluir uma ampla categoria de estratégias,

processos e modos de apresentação que abarcasse todo o potencial das aplicações matemáticas.

3. Os professores de Matemática deveriam criar ambientes de sala de aula nos quais pudesse surgir a resolução de problemas.

4. Deveriam desenvolver-se materiais curriculares apropriados para ensinar a resolver problemas em todos os níveis.

5. Os programas de Matemática deveriam implicar os alunos na resolução de problemas, apresentado aplicações para todos os níveis.

6. Os pesquisadores deveriam dar prioridade às investigações sobre a natureza da Resolução de Problemas e sobre as vias efetivas para se conseguir formar resolvedores de problemas.

No final da década de 1980 e no contexto de um novo documento, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, 1989), a resolução de problemas é apresentada como o objetivo principal de toda a atividade Matemática, e se recomendava que os alunos deveriam fazer uso de abordagens em resolução de problemas para investigar e compreender os conteúdos matemáticos. Tal documento propunha cinco objetivos gerais para os alunos:

1. Aprender a valorizar a Matemática.

2. Adquirir confiança na própria capacidade.

3. Adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos.

4. Aprender a se comunicar matematicamente.

5. Aprender a se relacionar matematicamente.

Estes cinco objetivos culminavam com a afirmação: “A resolução de problemas, em seu sentido mais amplo, significa praticamente o mesmo que o uso da matemática”.

Descrevendo a Matemática que todos os estudantes devem saber e ser capazes de fazer, tal publicação, segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 217), “foi projetada para falar àqueles muito próximos de poder tomar decisões sobre o currículo de Matemática: professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais e currículo”. Nessa nova proposta do NCTM, conhecer Matemática significava ser capaz de usá-la com propósitos definidos. Para aprender Matemática, os alunos têm que se envolver em explorar, conjecturar e raciocinar, diferentemente da aprendizagem baseada na memorização de regras e procedimentos. Para dar sentido à Matemática, é necessário que os alunos a vejam e a empreguem como ferramenta de raciocínio e resolução de problemas.

Conforme relato de Onuchic e Allevato (2004), no decorrer da década de 1980, objetivando o trabalho em sala de aula, foram desenvolvidos diversos recursos em Resolução de Problemas na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho na solução de problemas. Segundo essas autoras, muito desse material passou a ajudar os docentes a fazer dessa atividade o ponto central de seu trabalho.

Posteriormente, em 1991, o NCTM publicou o *Professional standards for teaching Mathematics*. De acordo com as autoras referidas acima, tal publicação delineia os caminhos pelos quais os professores podem estruturar as atividades em sala de aula, de maneira que os alunos possam aprender a Matemática descrita na publicação anterior. Quatro anos depois, o NCTM publicou o *Assement tandards for chool athematics*, contendo os princípios em que professores e educadores poderiam se apoiar para construir práticas de avaliação que pudessem contribuir para o desenvolvimento de uma Matemática forte para todos. Uma característica encontrada nesses currículos, conforme ressaltam Onuchic e Allevato (2004, p. 217), “é o uso de contextos na Resolução de Problemas como um meio de desenvolver os conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas”. Esses currículos descrevem a Matemática como disciplina unificada por tópicos coerentemente integrados.

Apoiado nas ideias dos *Standards* do NCTM, o Brasil elabora os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs:

1. PCN-Matemática – 1º e 2º ciclos – 1ª a 4ª séries –1997;
2. PCN-Matemática – 3º e 4º ciclos – 5ª a 8ª séries –1997;
3. PCN-Matemática – Ensino Médio – 1999.

Os objetivos gerais da área da Matemática, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, procuram contemplar várias linhas para trabalhar o ensino da Matemática. Segundo Onuchic e Allevato (2004, p. 218), esses objetivos são:

> Fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias Matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da Matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

Especificamente no que se refere à Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a Resolução de Problemas como um ponto de partida das atividades matemáticas e discute caminhos para se fazer Matemática na sala de aula.

No ano 2000 o NCTM publicou mais um documento programático, desenvolvido com base na revisão e atualização dos *standards* precedentes, intitulado *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000). Este documento apresenta-se como "um recurso e um guia para todos os que tomam decisões que afetam a educação matemática" (Id., 2000, p. ix) no ensino básico, no entanto não se pretende prescritivo, mas tem o propósito principal de proporcionar "orientação" e uma "visão" global para a Matemática escolar nas primeiras décadas do século XXI.

O novo documento destaca seis princípios que "enquadram" as normas e explicitam as concepções subjacentes sobre a educação e o currículo, o ensino e a aprendizagem, o papel do professor e do aluno, a avaliação e o papel da tecnologia na Matemática escolar. Tais princípios incidem sobre seis temas basilares: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Analisando este documento e referindo-se ao princípio de equidade, Guimarães (2005, p. 3) afirma que

> a ideia de uma Matemática para todos está já presente e é valorizada nos *Standards* de 1989, mas adquire maior visibilidade e importância nos *Principles and Standards* com a formulação de um princípio que lhe é inteiramente dedicado e com o lugar que lhe é dado na visão da Matemática escolar traçada no novo documento: a equidade educacional é um elemento nuclear desta visão.

Enquanto nos *standards* anteriores a ênfase estava no “poder matemático” – referindo-se, desta maneira, às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros, incluindo-se aí o desenvolvimento da autoconfiança pessoal –, como, também, na ideia de que “saber Matemática é fazer Matemática”, privilegiando o fazer, neste novo documento, “aprender Matemática com compreensão” surgiu como uma ideia unificadora, uma vez que aprender Matemática “exige compreender e ser capaz de aplicar procedimentos, conceitos e processos” (NCTM, 2000, p. 20). Neste sentido, assevera Guimarães (2005, p. 3), também, que

> A compreensão da Matemática é ainda associada à ideia de competência nessa disciplina, relacionada à capacidade de transferência de conhecimento, ou seja, com a capacidade de utilizar adequadamente, em contextos diversificados, as aprendizagens realizadas: ser competente num domínio tão complexo como a Matemática envolve a capacidade de usar o conhecimento de forma flexível, aplicando, de forma apropriada, o que é aprendido numa situação, numa outra.

A partir de então, reforça-se a ideia de que saber Matemática é compreender Matemática e ser capaz de aplicá-la, e o desenvolvimento dessa compreensão e capacidade emerge como grande objetivo do ensino da disciplina: “no século vinte e um, deve ser esperado de todos os alunos que compreendam Matemática e sejam capazes de aplicá-la” (NCTM, 2000, p. 20).

Embora direcionados à realidade educativa e social americana, é possível evidenciar nos *Principles and Standards* algumas tendências relativas às perspectivas e orientações curriculares para a renovação da Matemática, pertinentes a outras realidades sociais e educacionais. Neste contexto, e ainda segundo Guimarães (2005, p. 4),

> Em primeiro lugar, com base no reconhecimento da importância da Matemática no patrimônio cultural da humanidade, bem como do seu papel no desenvolvimento científico e tecnológico, na vida corrente, no trabalho profissional e no prosseguimento dos estudos, a renovação da Matemática escolar é defendida numa perspectiva de uma Matemática para todos. Isso não significa, no entanto, uma uniformização do ensino ou uma diminuição do nível de exigência na Matemática ensinada. Na verdade, sustenta-se que todos os alunos devem aprender Matemática e conseguem aprender Matemática, implicando esta consideração um nível elevado das expectativas da parte do professor e uma diferenciação e apoio no ensino que tenha em conta e integre as diferenças que os alunos manifestem.

Essa perspectiva renovadora da Matemática escolar, que, respeitando as diferenças, reconhece igualmente o direito de cada aluno aprender tal disciplina, aponta para uma alfabetização matemática democrática e cidadã.

3.7 Algumas Posições a Respeito da Resolução de Problemas

Nesta seção apresentamos as principais contribuições e os diferentes enfoques da Resolução de Problemas. Trazemos primeiro, o método heurístico de Polya, devido à influência que este exerceu sobre a solução de problemas e seu estudo. A seguir, e na sequência, apresentamos o pensamento quantitativo e sua importância para a resolução de problemas; a resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica; o modelo de resolução de problemas proposto por Kantowiski; o processo de resolução de problemas apresentado por Lester; o processo de resolução de problemas apresentado por Schoenfeld; a resolução de problemas como investigação e, por último, a Resolução de Problemas como ensino-aprendizagem.

3.7.1 O método heurístico de resolução de problemas apresentado por Polya

Antes de adentrarmos o método de Polya, é importante que se tenha uma ideia clara sobre o significado da palavra heurística. Para tal, recorremos ao dicionário Houaiss[63], que nos apresenta o sentido da heurística em vários contextos: no científico, "a ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos"; no contexto de problematização, "a arte de inventar, de fazer descobertas" ou "o método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema"; e, no contexto pedagógico, apresenta-se como "método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar".

Diante das definições, percebe-se, portanto, que referir-se à heurística de resolução de problema é referir-se a "métodos e regras que conduzem à descoberta, à inovação, investigação e resolução de problemas"[64]. Ressaltamos, ainda, a pertinência tanto do contexto científico, uma vez que a tendência Resolução de Problemas vem contribuindo para a evolução da Matemática, quanto do contexto educacional, devido à sua importância no processo ensino-aprendizagem. Diante do exposto e de uma compreensão do termo "heurística", veremos como Polya o propôs.

---

[63] HOUAISS (2001).
[64] FERREIRA (2000).

Desde 1931, quando em uma conferência na cidade de Zurique, George Polya anunciou perante a Sociedade Suíça de Professores de Matemática que tinha um novo método para a solução de problemas, o ensino da Matemática através da resolução de problemas vem chamando a atenção de diversos estudiosos e pesquisadores da comunidade de educação matemática.

Polya (1978) entende que uma pessoa está diante de um problema quando se confronta com uma questão para a qual não pode dar uma resposta de pronto, ou com uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis. Um dos primeiros passos para que um problema possa ser solucionado consiste na compreensão do mesmo, o que aqui não significa somente compreender as palavras, a linguagem e os símbolos com os quais ele é apresentado, mas também dar-se conta das dificuldades e dos obstáculos apresentados, tentar superá-los e adquirir uma disposição para buscar a solução.

Após a compreensão do problema, conceber um plano que ajude a resolvê-lo constitui mais um passo a ser dado. Este plano, contudo, deve estabelecer a distância entre a situação da qual se parte e a meta que se pretende alcançar, como também instituir os procedimentos que se apresentem mais úteis para diminuir essa distância. Referindo-se a esta distância, denominando-a de diferença existente entre uma situação inicial e a meta que se deseja alcançar, Poggioli (2001) a denomina de problema. O terceiro passo, de acordo com Polya, consiste na execução do plano elaborado e, por fim, fazer um retrospecto, uma reflexão do caminho percorrido. O processo de solução de um problema só termina quando o objetivo estabelecido for alcançado.

Resolver um problema consiste em encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado, através de realizações específicas da inteligência, que é um dom peculiar do ser humano. Se o fim, por si só, não recomendar de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançá-los, temos de resolver um problema. Segundo Polya (1997, p. 2), "a capacidade de contornar um obstáculo, empreender um caminho indireto, onde nenhum caminho direto se apresenta, coloca o ser inteligente acima do estúpido, coloca o homem muito acima dos mais inteligentes animais e, o homem de talento acima de seus próximos".

Na concepção de Gardner (1995), a inteligência é a capacidade de solucionar problemas ou elaborar produtos que são importantes em um determinado ambiente ou comunidade cultural. Para ele, a capacidade de resolver problemas permite às pessoas abordar situações, atingir objetivos e localizar caminhos adequados a esse objetivo. De acordo com este autor, a inteligência pode ser codificada num sistema de símbolos e significados culturalmente criados que capturam e transmitem formas importantes de informação. A linguagem, a pintura e a Matemática constituem em um desses símbolos.

A inteligência é conceituada por Gardner (2001, p. 47) como

> [...] um potencial biopsicológico para processar informações que pode ser ativado num cenário cultural para solucionar problemas ou criar produtos que sejam valorizados numa cultura (...) as inteligências não são objetos que podem ser vistos nem contados. Elas são potenciais – neurais presumivelmente – que poderão ser ou não ativadas, dependendo dos valores de uma cultura específica, das oportunidades disponíveis nessa cultura e das decisões pessoais tomadas por indivíduos e/ou suas famílias, seus professores e outros.

Observando que Polya (1997, p. 2) considera “a inteligência” como, essencialmente, a habilidade que capacita o homem a resolver toda sorte de problemas – do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeça, entre outros –, podemos inferir que, embora se reportando à inteligência no singular, Polya não se refere aqui especificamente à inteligência lógico-matemática, uma vez que por “resolver toda sorte de problemas” subentende-se a utilização das múltiplas inteligências preconizadas por Gardner (1995; 2001), quais sejam: a inteligência linguística, a inteligência lógico-matemática, a inteligência espacial, inteligência musical, inteligência corporal - cinestésica, inteligência interpessoal, inteligência intrapessoal e inteligência naturalista, as quais se conceituam brevemente, a seguir.

1. Inteligência linguística: é o tipo de capacidade exibida em sua forma mais completa, talvez, pelos poetas. Essa inteligência tem como componente central uma sensibilidade para os sons, ritmos, e significados de palavras, além de uma especial percepção das diferentes funções da linguagem.

2. Inteligência lógico-matemática: incidi na capacidade lógico-matemática, assim como a capacidade científica. Esta inteligência tem como componentes centrais uma sensibilidade para padrões, ordem e sistematização. Consiste em uma habilidade para explorar relações, categorias e padrões, através da manipulação de objetos ou símbolos, como também habilidade para lidar com séries de raciocínios, para reconhecer problemas e resolvê-los.

3. Inteligência espacial: consiste na capacidade para perceber o mundo visual e espacial de forma precisa. É a habilidade para manipular formas ou objetos mentalmente e, a partir das percepções iniciais, criar tensão, equilíbrio e composição, numa representação visual ou espacial.

4. Inteligência musical: é a capacidade voltada para a música. Esta inteligência se manifesta através de uma habilidade para apreciar, compor ou reproduzir uma peça musical. Inclui discriminação de sons, habilidade para perceber temas musicais, sensibilidade para ritmos, texturas e timbre, e habilidade para produzir e/ou reproduzir música.

5. Inteligência corporal - cinestésica: capacidade de resolver problemas ou de elaborar produtos utilizando o corpo inteiro ou partes do corpo. É a habilidade para usar a coordenação grossa ou fina em esportes, artes cênicas ou plásticas no controle dos movimentos do corpo e na manipulação de objetos com destreza.

6. Inteligência interpessoal: capacidade de compreender outras pessoas: o que as motiva, como elas trabalham, como trabalhar cooperativamente com elas. Esta inteligência pode ser descrita como uma habilidade para entender e responder adequadamente a humores, temperamentos motivações e desejos de outras pessoas

7. Inteligência intrapessoal: é uma capacidade correlativa voltada para dentro. É a capacidade de formar um modelo acurado e verídico de si mesmo e de utilizar esse modelo para operar efetivamente na vida.

8. Inteligência naturalista: descrita como a capacidade em reconhecer padrões na natureza; identificar e classificar objetos e as numerosas espécies; compreender sistemas naturais e aquelas criadas pelo homem.

Contudo, vale ressaltar que nenhuma dessas inteligências se desenvolve de maneira independente; pelo contrário, segundo Vasconcelos e Brennand (2005, p. 154),

> o potencial da inteligência humana é múltiplo porque se propaga entre diferentes inteligências e se desenvolve a partir da flexibilidade do sistema nervoso de gerir aprendizagens, a partir de interações ambientais com a sociedade e a natureza [....]. Por serem interdependentes, é possível que cada humano disponha da manifestação mais marcante de uma, duas ou três … como consequência de suas interações com o ambiente social e natural.

De acordo com o entendimento de Gardner (1995), o que nos difere de outros seres humanos é o fato de possuirmos diferentes combinações de inteligências, e o reconhecimento disso nos possibilita lidar adequadamente com os muitos problemas que enfrentamos neste mundo. Para esse autor,

> se pudermos mobilizar o espectro das capacidades humanas, as pessoas não apenas se sentirão melhores em relação a si mesmas e mais competentes; é possível, inclusive, que elas também se sintam mais comprometidas e mais capazes de reunir-se ao restante da comunidade mundial para trabalhar pelo bem comum. Se pudermos mobilizar toda a gama das inteligências humanas e aliá-las a um sentido ético, talvez possamos ajudar a aumentar a probabilidade de nossa sobrevivência neste planeta, e talvez inclusive contribuir para nossa prosperidade.

Compreendendo que um dos papéis primordiais da educação é contribuir para o desenvolvimento “dessas inteligências”, Polya afirma, categoricamente, que se isso não ocorre, essa educação está, obviamente, incompleta. Vendo a inteligência como uma das habilidades para resolver problemas, considera que o aprendiz desenvolve sua inteligência usando-a; aprende a resolver problemas resolvendo-os. Por isso, referindo-se especificamente aos alunos do ensino médio, pondera que estes, visando a desenvolver suas habilidades, já se encontram em condição de resolver problemas matemáticos científicos. Considera que, embora se tratando de teoremas simples, o nível de Euclides é completamente científico. Assegurando ser esta a grande oportunidade da Matemática, Polya (1997, p. 2) observa que

> a matemática é o único assunto na escola secundária em que o professor pode propor e os estudantes podem resolver problemas em um nível científico. Isto acontece porque a matemática é muito mais simples do que outras ciências. Por causa dessa simplicidade, o indivíduo, exatamente como a raça humana, pode chegar muito antes a uma visão clara da matemática do que em outras ciências. Cabe lembrar que, no tempo de Euclides, a matemática era uma ciência altamente desenvolvida com critérios não essencialmente inferiores aos de hoje […], se o professor auxilia seus alunos apenas o suficiente e discretamente, deixando-lhes alguma independência ou pelo menos alguma ilusão de independência, eles podem se inflamar e desfrutar a satisfação da descoberta. Tais experiências podem contribuir para o desenvolvimento mental dos alunos.

Em A arte de resolver problemas, Polya (1978) procura expor as linhas gerais de uma teoria de resolução de problemas. Descreve a solução de um problema como consistindo das quatro fases citadas anteriormente, com as quais lança as bases da “heurística moderna”, contendo sugestões e propondo estratégias para auxiliar a resolução de problemas complexos.

O fato, aparentemente óbvio, de que – segundo Polya (1978, p. 3-13) – não se pode resolver um problema sem antes compreendê-lo, é muitas vezes negligenciado. Com o fim de auxiliar nesta etapa, ele sugere que se proponham as seguintes questões: Qual é a incógnita? Quais os dados? Qual é a condição a ser satisfeita? Ainda neste passo, é importante que todas as faces do problema sejam consideradas atentamente e de vários ângulos. Objetivando um melhor entendimento, sugere a utilização de desenhos, gráficos, esquemas ou outras formas de representação que possam clarificar o enunciado do problema.

Outro ponto crucial no processo de resolução de problemas é formular um plano e, para executá-lo, é necessário que, ao menos em linhas gerais, se conheçam os cálculos e as construções que se deve executar. Se, diante de um problema, não tivermos nenhum indício de como resolvê-lo, Polya recomenda começar com perguntas do tipo: “Será que eu conheço um problema relacionado com este que eu saiba resolver?”, ou “O problema pode ser expresso de maneira diferente?” Evidentemente, essas sugestões heurísticas não funcionam em todos os casos, mas podem ser auxiliares úteis.

Diante de um bom plano, executá-lo é relativamente simples, sendo preciso verificar se os passos imaginados para a solução se encaixam e se não resta nenhuma passagem obscura que possa ocultar um erro. Finalmente, fazer uma “reflexão” ou um retrospecto do caminho percorrido possibilita consolidar o conhecimento e aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas.

Nas sugestões apresentadas, bem como ao longo das discussões apresentadas em sua obra, o autor procura ressaltar o papel da heurística. Para ele, o objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. No entanto, alerta-nos que o raciocínio heurístico é provisório, plausível, e tem sua importância na descoberta de soluções de problemas, contudo, não devemos tomá-lo como uma demonstração.

O propósito desse autor é sugerir um método, denominado por ele de heurística, que possa contribuir para, ao menos, auxiliar na resolução de problemas matemáticos. Se e em que medida ele teve êxito é, ainda hoje, motivo de muito debate. Alguns autores consideram que as sugestões feitas por Polya, ainda que úteis, são muitas vezes demasiado gerais para ajudar em problemas específicos. A esse respeito, Echeverría e Pozo (1998, p. 30) observam que o primeiro e mais fundamental pressuposto dos estudos sobre a solução de problemas é que

> as habilidades e estratégias de solução de problemas são específicas a um determinado domínio e, por isso, dificilmente intransferíveis de uma área a outra. Não haveria regras gerais úteis para a solução de qualquer problema, ou seriam insuficientes e meramente orientadoras; assim, quando diante de um problema, as quatro fases enunciadas por Polya referidas anteriormente, somente proporcionariam um esquema geral que é necessário encher de "conteúdo", ou seja, é preciso desenvolver especificamente para cada área e tipo de problema.

Sternberg (2008, p. 366) chama a atenção para o fato de que a resolução de problemas pode, ocasionalmente, demandar tolerância para uma certa ambiguidade com relação à melhor forma de proceder; "Raras vezes conseguimos resolver problemas seguindo uma sequência ideal de passos". Além disso, podemos adiantar ou retroceder em vários desses passos, dependendo da necessidade, alterar sua ordem, ou mesmo pular ou acrescentar passos quando se fizer necessário (Id., 2008, p. 366). Ademais, "a forma como as pessoas resolvem problemas depende, em parte, de como elas os entendem". Entretanto, não podemos desconsiderar os passos que Polya descreveu.

Diante do exposto, podemos fazer algumas considerações. A primeira delas é a constatação da similaridade existente entre o método heurístico apresentado por Polya e o método apresentado por Descartes, evidenciando-se, assim, a influência dos escritos de Descartes em sua formação. Ambos apresentam seus métodos com o propósito de orientar a investigação e a resolução de problemas e, dessa forma, melhor conduzir a razão. Outro aspecto a ser considerado é que, apesar das críticas, o método cartesiano promoveu verdadeira revolução no meio científico com a criação do método que, direcionado à obtenção de certeza e evidência, estabelecia a dúvida como parâmetro de filtragem e aceitação científica; da mesma forma, o método heurístico de Polya representou um progresso considerável sobre a tradição de trabalhos rotineiros vigente em sua época, abriu caminhos para o desenvolvimento de pesquisas no campo da educação matemática e, ainda hoje, apresenta-se como um marco nas pesquisas realizadas com a temática Resolução de Problemas em todo o mundo.

Percebemos igualmente que, em linhas gerais, os passos que se veem em Polya são semelhantes às fases propostas por Wallas (1926). O passo de "compreensão" do primeiro é similar à fase de "preparação" do segundo; a elaboração de um plano também tem algo da fase de preparação de Wallas, e tanto as fases de incubação quanto as de iluminação se relacionam, à colocação do plano em ação, e a "reflexão" está relacionada com a verificação proposta por Wallas.

3.7.2 O pensamento quantitativo e a resolução de problemas

O pensamento quantitativo ocorre quando usamos os números de alguma maneira, ao tratarmos com os elementos de uma situação que conduzam a uma análise ou descrição matemática. Este pensamento se realiza em diferentes níveis de maturidade. Obviamente, o pensamento quantitativo de uma criança, que pensa quantitativamente em um nível elementar, difere do pensamento quantitativo de um cientista nuclear, ao aplicar conceitos matemáticos e métodos de pensamento altamente abstratos. De acordo com Grossnickle e Brueckner (1965), o nível no qual se dá o pensamento quantitativo é claramente determinado pelos conhecimentos, experiências e capacidade de pensar com números, no entanto, a habilidade de pensar quantitativamente resulta de experiências em nossas vidas diárias. Para esses autores, a resolução de problemas é o mais alto nível de pensamento quantitativo e este é a base para a eficiência de tal resolução.

Tradicionalmente, o termo problema é usado para identificar uma declaração oral ou escrita incluindo uma questão cuja resposta deve ser encontrada, através da situação que o problema apresenta e pela realização de cálculos usando os números apresentados em seu enunciado. De regra, o propósito é mostrar como os processos numéricos são usados na vida diária e aplicar relações e conceitos quantitativos em situações práticas. Contudo, no contexto da Matemática escolar, esse tipo de resolução de problemas degenerou-se em uma forma disfarçada de exercício. Agrupados de acordo com os processos neles usados, sua resolução elimina a necessidade de qualquer pensamento real, recorrendo a simples "truques numéricos" considerados como uma forma de ginástica mental e completamente mecânica em sua natureza. Entretanto, nos últimos tempos, esse tipo tradicional de problema tem sido desafiado. Grossnickle e Brueckner (1965, p. 393) alertaram que, enquanto o problema típico, oral ou escrito, utilizado no âmbito escolar, contém todas as informações necessárias à obtenção da resposta,

> na vida diária os dados requeridos para a solução de algum problema similar, surgido de uma situação da vida social fora da escola, devem ser reunidos, organizados e analisados para se encontrar a solução. E a resolução de tais problemas é um processo mais complicado que a solução de problemas escritos em livros.

A habilidade de pensamento quantitativo envolvido na solução de problemas reais será tanto mais desenvolvida quanto mais experiências tivermos com os legítimos problemas que surgem em nossa vida diária, pois o pensamento quantitativo envolvido na solução de problemas reais não é tão lógico e sistemático como às vezes se acredita. Em Grossnickle e Brueckner (1965, p. 394), encontramos que

> a resolução de problemas reais envolve a visão do problema como um todo, familiaridade com os elementos da situação problemática, análise dessa situação, percepção dessas relações, aquisição de um padrão de ligação, estimativa, verificação e organização. Raramente resolvemos um problema real através de passos dedutivos organizados. A estrutura dedutiva é geralmente feita depois do discernimento da solução já encontrada.

A capacidade de lidar, efetivamente, com aspectos quantitativos da vida é referida por muitos nomes diferentes, entre os quais alfabetização quantitativa, numerácia, alfabetização matemática, raciocínio quantitativo ou, algumas vezes, simplesmente matemática. Além disso, de acordo com Steen (2004), uma definição inicial do termo “numerato” apareceu em um relatório do governo britânico sobre educação matemática, implicando a possessão de dois atributos. O primeiro destes é um “à vontade” com números, uma destreza, habilidade matemática, que possibilita ao indivíduo lidar com demandas práticas do dia-a-dia. O segundo é ter a capacidade de valorizar e de entender as informações que se apresentam em termos matemáticos.

Assim como as diferentes denominações, em Steen (2004) nos deparamos, também, com diferentes definições para a alfabetização quantitativa. A primeira delas é a adotada pela National Adult Literacy Survey[65], que entende alfabetização quantitativa como os conhecimentos e habilidades requeridos para aplicar operações aritméticas, isoladas ou sequencialmente, usar números incluídos em material impresso. Por outro lado, o International Life Skills Survery[66] a define como um agregado de habilidades, conhecimentos, crenças, disposições, hábitos mentais, destreza de comunicação e capacidade de resolver problemas que as pessoas precisam para se envolver efetivamente em situações quantitativas que surgem na vida e no trabalho. O Programme for International Student Assessment (PISA)[67] adota uma definição análoga, porém chamando-a de alfabetização matemática, entendida como a capacidade de um indivíduo identificar e entender o papel que a Matemática desempenha no mundo, fazer julgamentos matemáticos bem fundamentados e se engajar em Matemática de uma forma que atinja as necessidades atuais e futuras na vida daquele indivíduo como um cidadão construtivo, preocupado e ponderado.

---

[65] Disponível em http://nces.ed.gov/pubs98/98053.pdf. Acesso em 23/09/2008.
[66] Disponível em http://nces.ed.gov/pubs98053.pdf. Acesso em 23/09/2008.
[67] Disponível em http://pisa.oecd.gov. Acesso em 23/09/2008

As definições apontadas acima apresentam entre si algumas diferenças. Enquanto algumas focalizam a habilidade no uso de ferramentas quantitativas, outras centram-se na habilidade de entender e apreciar o papel da Matemática e de métodos quantitativos em assuntos do mundo. Algumas enfatizam destreza básica (operação aritmética), outras, pensamentos de ordem mais elevada (julgamentos mais fundamentados). Com o intuito de clarificar essas diferentes definições, Steen (2004, p. 9-10) as separa em diferentes elementos, os quais podem ser combinados, para formar um panorama mais abrangente da alfabetização. Alguns desses elementos são:

- Confiança em Matemática: ser confiante de suas ideias quantitativas e à vontade em aplicar métodos quantitativos. Indivíduos que são confiantes com noções quantitativas fazem, rotineiramente, estimativas mentais para quantificar, interpretar e verificar outras informações. Confiança é o oposto de "ansiedade matemática"; isso faz a numerácia tão natural quanto a linguagem comum.

- Valorização Cultural: entender a natureza e a história da Matemática, seu papel na investigação científica e no progresso tecnológico, e sua importância para a compreensão de assuntos de interesse público.

- Interpretação de Dados: raciocinar com dados, ler gráficos, inferir e reconhecer fontes de erro. Esta perspectiva difere da Matemática tradicional, uma vez que dados (ao invés de fórmulas e relações) estão no centro do processo.

- Pensamento Lógico: analisar evidências, raciocinar cuidadosamente, entender argumentos, questionar hipóteses, detectar falácias e avaliar riscos. Indivíduos com tais hábitos de investigação aceitam pouco pelas aparências, de forma consciente procuram por trás das aparências, demandando informação apropriada para ir à essência dos assuntos.

- Decisão: usar a Matemática para tomar decisões e resolver problemas do dia-a-dia. Para indivíduos que adquirem esse hábito, a Matemática não é algo feito apenas nas aulas de Matemática, mas uma poderosa ferramenta para viver, tão útil e entranhada quanto a leitura ou a fala.

- Matemática em Contexto: usar ferramentas matemáticas em cenários específicos onde o contexto providencia o significado. Tanto a notação, quanto a estratégias de resolução de problemas e os padrões de desempenho dependem do contexto específico.

- Noção de Número: ter intuição precisa sobre o significado dos números, confiança em estimar e senso comum no emprego de números como uma medida de coisas.

- Habilidades Práticas: saber como resolver problemas quantitativos que seja comum uma pessoa encontrar em casa ou no trabalho. Indivíduos que possuem estas habilidades são adeptos de usar matemática elementar em uma grande variedade de situações comuns.

- Conhecimento de Pré-requisitos: ter a destreza de usar uma grande gama de ferramentas algébricas, geométricas e estatísticas que são requeridas em muitos campos de educação pós-secundária.

- Senso Simbólico: sentir-se confortável em usar símbolos algébricos e à vontade lendo-os e interpretando-os. Exibir bom senso sobre a sintaxe e a gramática dos símbolos matemáticos.

Os elementos assim delineados clarificam mas não resolvem a confusão linguística que se interpõe às discussões a respeito de alfabetização quantitativa. De fato, Steen (2004, p. 10) observa que

> algumas vezes os termos *quantitativo* e *matemático*, são usados de forma intercambiável, mas frequentemente eles são usados para demarcar importantes distinções de significado – por exemplo, entre o que é necessário para a vida (quantitativo) e o que é preciso para educação (matemática), ou entre o que é necessário em assuntos gerais na escola (quantitativo) e o que é necessário para a engenharia e as ciências físicas (matemática). Para alguns a palavra quantitativo parece muito limitante, sugerindo números e contas ao invés de raciocínio e lógica, enquanto para outros o termo parece ser vago demais, sugerindo uma diminuição de ênfase em matemática tradicional. De forma semelhante, o termo alfabetização propicia diferentes significados: para alguns ele sugere uma capacidade mínima de ler, de redigir, e de calcular, enquanto para outros ele conota as características definidoras de uma pessoa instruída.

Guardadas as devidas proporções do que é necessário para uma participação ativa e atenta na atualidade, a alfabetização quantitativa pode ser vista como um análogo direto da alfabetização verbal. Ambas são indispensáveis para que cidadãos bens instruídos possam lidar com assuntos sutis que hoje são comunicados em uma junção de formas verbais, simbólicas e gráficas. Na contemporaneidade, ser letrado e *numerato* tornaram-se qualidades inseparáveis de uma pessoa instruída.

Vivemos em uma sociedade regida por dados, com expressões de alfabetização quantitativa por toda parte e em diferenciadas circunstâncias como, por exemplo, quando estimamos a divisão de uma conta em um restaurante, quando comparamos as opções de preço para a compra de um produto, quando lemos rótulos nutricionais, quando aumentamos ou diminuímos receitas ou quando convertemos unidades de volume e de peso, entre outras situações de nosso cotidiano. Além disso, muitas das mais sofisticadas expressões de raciocínio quantitativo têm se tornado comuns entre os atuais estudantes e futuros cidadãos, tanto em ambiente escolar quanto fora dele. Algumas destas, com caráter de uso particular, enquanto que outras servindo aos desígnios de uma sociedade democrática. Juntas, elas proporcionam uma amostra da numerácia existente na atualidade. Steen (2004, p.11-14) enumera algumas delas, abordadas a seguir.

A primeira mencionada diz respeito à cidadania. Potencialmente, tudo que diz respeito aos direitos e deveres do cidadão e que esteja atrelado ao domínio público, como a saúde pública, a previdência social, a reforma da aposentadoria, a economia internacional, depende de dados, projeções, inferências e do tipo de pensamento sistemático que está no âmago da alfabetização quantitativa como, por exemplo, analisar dados econômicos e demográficos para apoiar ou se opor a determinadas propostas políticas; entender resultados de testes de alunos expressos em percentuais e percentis e interpretar o que esses dados dizem relativamente à qualidade das escolas.

No tocante à cultura, espera-se que homens e mulheres instruídos, além da história, literatura e arte, possam conhecer também, pelo menos em termos gerais, algo da história, natureza e importância da Matemática na cultura humana. Entender, por exemplo, o papel da Matemática na revolução científica e os papéis que continua a desempenhar; compreender o caráter dedutivo da Matemática, no qual as conclusões são consideradas verdadeiras apenas se as hipóteses são verdadeiras; reconhecer o poder e o perigo de números determinarem a política na sociedade contemporânea.

No que diz respeito à educação, Steen faz referência à importância que a educação quantitativa tem para a formação acadêmica, em diversas áreas do conhecimento. Áreas tais como a Física, a Economia e a Engenharia têm, desde sempre, necessidade de uma forte preparação em cálculo. A Biologia requer matemática computacional para mapear genomas, estatística para avaliar experimentos laboratoriais, probabilidade para estudar hereditariedade. A Medicina requer entendimento de cálculo para compreender os sistemas elétrico, bioquímico e cardiovascular do corpo. Destaca-se, ainda, a importância da estatística para as pesquisas nas ciências sociais; o impacto da computação gráfica nas artes visuais que, ao utilizarem cálculo, geometria e algoritmos computacionais, trazem a numerácia para uma área que, anteriormente, era relativamente não quantitativa; e a influência que os métodos quantitativos e lógicos têm exercido no estudo da linguagem, especialmente em Linguística e no novo campo de traduções computadorizadas.

Abordando as questões profissionais, Steen nos diz que a interpretação de evidências tem se tornado cada vez mais importante nas decisões que afetam as vidas das pessoas e isso requer que profissionais em todas as áreas sejam versados em ferramentas quantitativas. A título de exemplo, os advogados se fiam em lógica para trabalhar os seus casos e em argumentos sutis de probabilidade para estabelecer ou refutar uma “dúvida razoável”. Administradores escolares lidam regularmente com assuntos complexos como horários, orçamentos, inventário e planejamento – todos os quais têm muitas dimensões quantitativas.

Gerir bem as finanças pessoais é provavelmente o contexto mais comum no qual as pessoas se defrontam com assuntos quantitativos sofisticados, tais como entender a depreciação e seus efeitos na compra de um bem; estimar os custos de longo prazo ao fazer pagamentos mensais mais baixos do cartão de crédito, escolher um plano de seguro ou escolher um plano financeiro para a compra de uma casa.

Em uma perspectiva mais tradicional, sem contudo deixar de reconhecer que, para serem efetivas, as habilidades numéricas devem ser ensinadas e aprendidas em contextos que sejam tanto significativos quanto memoráveis – fora de contexto ficam desprovidas de significado e utilidade –, uma vez que, para muitos, as habilidades numéricas são reconhecidas mais imediatamente como algo ensinado e aprendido na escola, Steen (2004, p.15) apresenta uma lista de habilidades relevantes para um curso em alfabetização quantitativa. No entanto, percebe-se que muitas dessas habilidades estão firmemente relacionadas aos elementos e expressões da alfabetização numérica. Elas incluem, de acordo com o autor:

- Aritmética: ter facilidade com aritmética mental simples; estimar cálculos aritméticos; raciocinar com proporções; contar de forma indireta (combinatória);

- Dados: usar informações presentes em dados, gráficos e mapas; tirar conclusões a partir de dados; reconhecer desagregação como um fator na interpretação de dados;

- Computadores: usar planilhas computacionais de cálculo; gerar dados, fazer cálculos, criar gráficos, extrapolar, ajustar retas ou curvas a dados;

- Modelagens: formular problemas, procurar padrões e tirar conclusões; reconhecer interações em sistemas complexos; entender modelos lineares, exponencial, multivariado e de simulação; entender o impacto de diferentes taxas de crescimento;

- Estatística: entender a importância da variabilidade; reconhecer as diferenças entre correlação e causa, entre experimentos randomizados e estudos observacionais, entre não descobrir nenhum efeito e não encontrar efeito estatístico significativo (especialmente com amostras pequenas) e entre significância estatística e importância prática (especialmente com amostras grandes);

- Acaso: reconhecer que coincidências aparentemente improváveis não são incomuns; avaliar riscos a partir de evidência disponível; entender o valor de amostras aleatórias;

- Raciocinar: usar pensamento lógico; reconhecer níveis de rigor em métodos de inferência; verificar hipóteses; ter cautela ao fazer generalizações.

Ainda segundo Steen (2004, p. 15), o que difere esses tópicos dos que são encontrados em avaliações ou em disciplinas planejadas especificamente para atingir um assim chamado requisito quantitativo ou de Matemática, é típico da distinção entre a alfabetização quantitativa, que dá ênfase à utilização de ferramentas matemáticas e lógicas para resolver problemas comuns e o que podemos chamar de alfabetização matemática, a qual enfatiza as ferramentas tradicionais e o vocabulário de Matemática.

Em contraste com a Matemática escolar, a alfabetização quantitativa não tem conteúdo específico próprio, visto que, por estar presente em toda parte, as oportunidades para ensiná-la dentro do currículo tornam-se abundantes e, se trabalhada dentro de contextos reais e significativos, possibilita aos estudantes desenvolver hábitos mentais de um cidadão numerato.

Enquanto a Matemática cresce verticalmente, a numerácia se expande mais horizontalmente. A Matemática avança sobre degraus da abstração, objetivando enxergar padrões comuns em coisas aparentemente dessemelhantes; a abstração é o que dá à Matemática o seu poder, é o que capacita métodos derivados em um contexto para serem aplicados em outros. Contudo, a abstração não é o foco da numerácia; ao contrário, esta se conecta ao específico, ordenando todos os aspectos relevantes do cenário e do contexto para chegar a conclusões, caracterizando-se, deste modo, como uma modalidade de resolução de problemas.

3.7.3 Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica

O que podemos perceber com o exposto anteriormente é que resolução de problemas é uma expressão abrangente, configurando-se como uma atividade inerente a muitas profissões, com aplicação em diversos contextos e utilização em variadas disciplinas. Embora, aparentemente, ela seja uma especificidade da Matemática, no interior desta ainda nos deparamos com diferentes interpretações. Branca (1997, p. 4) aponta três interpretações mais comuns dadas à mesma e algumas implicações que elas podem ter para o ensino da Matemática.

Como meta, a resolução de problemas é vista como alvo do ensino de Matemática, com um enfoque maior em seu aspecto utilitário. Independe de problemas específicos, de procedimentos ou métodos e do conteúdo matemático. A ênfase maior está na ideia de que aprender a resolver problemas é a razão principal para o estudo desta ciência. Esse entendimento influenciou a natureza de todo o currículo matemático com implicações importantes para a sala de aula, uma vez que se fazia necessário que o estudante dominasse os conteúdos matemáticos para depois resolvê-los: os currículos reforçavam a necessidade, para o aluno, de possuir todas as informações e conceitos envolvidos na resolução de problemas antes de enfrentar estes.

A segunda concepção evidencia a resolução de problemas como processo de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos e, de forma isolada, a novas e desconhecidas situações. Nesta perspectiva, priorizam-se os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas utilizadas pelos alunos para resolver os problemas, sendo estas partes do processo da solução de problemas consideradas essenciais e, como tal, tornam-se um foco do currículo de Matemática. Como habilidade básica, a resolução de problemas deve ser entendida como uma competência mínima para que todos os cidadãos possam inserir-se no mundo do conhecimento, do trabalho e atuar efetivamente em nossa sociedade. Isto é, que eles sejam alfabetizados quantitativamente, cidadãos numeratos.

3.7.4 Modelo de resolução de problemas proposto por Kantowiski

Ensinar a resolver problemas é algo que difere de todos os outros aspectos da educação matemática, nos diz Kantowiski (1997), e deve ser abordado como um sistema. Para tal, devem-se estabelecer definições e suposições. A autora entende que problema é uma situação que se enfrenta sem contar com um algoritmo que garanta a solução e que, para resolvê-lo, fazem-se necessários os conhecimentos que forem relevantes, bem como organizá-los em nova disposição. Supõe que resolver problema é, de alguma modo, uma tarefa para todos; que a maioria dos alunos simplesmente não chega a se capacitar para a resolução de problemas; e, finalmente, que esta não pode ser aprendida em um curso relâmpago. A partir de então, fixa sua atenção no que ensinar, bem como na maneira de fazê-lo, quando se trata de resolução de problemas.

Destaca que para se obter sucesso nesta área há pelo menos dois componentes essenciais: conhecer algo da Matemática pertinente à situação com a qual se depara e saber o que fazer com o que é conhecido: além do conhecimento da Matemática necessária, quando se trata de resolução de problemas é preciso ter algumas ideias sobre o que fazer com esse conhecimento. A habilidade de pensar no que fazer é tão essencial quanto conhecer os fatos ou ter a facilidade requerida para os cálculos.

Kantowiski concorda com a proposta de Polya, ao considerar que a resolução de problemas constitui uma característica do ser humano e não só de alguns humanos; no entanto, divide os alunos em quatro níveis de habilidades para resolver problemas. Se situados no primeiro nível, os estudantes têm pouca ou nenhuma compreensão do que é resolver um problema, do significado de estratégia ou da estrutura matemática do problema. No segundo nível, os alunos compreendem o significado de resolver um problema, o que são estratégias e percebem a estrutura matemática do problema, entretanto ainda se sentem inseguros para resolver problemas independentemente. Quando no terceiro nível, os alunos propõem estratégias diferentes a partir daquelas utilizadas anteriormente e, no quarto nível, eles são capazes de selecionar estratégias apropriadas para a maioria dos problemas encontrados e têm bom êxito na maioria das vezes que resolvem um problema.

Este modelo destaca o papel do professor no processo de resolução de problemas e em particular a sua ação, dependendo do nível dos alunos. Ele atua como facilitador e provedor de problemas e tem como uma de suas tarefas motivar constantemente os estudantes para que eles cheguem a propor problemas.

Ressaltando que a aquisição da competência para resolver problemas consiste num processo longo e demorado e comungando, desta maneira, com Polya (1978) para quem a competência para resolver problemas só é adquirida quando se resolvem problemas, e com Stanic e Kilpatrick (1990), que apontam a resolução de problemas como uma competência a ser adquirida, Kantowiski assegura: para que ao alunos adquiram a mesma, faz-se necessário que a resolução de problemas seja exercitada pelo menos um dia por semana, ou parte de alguns dias e que, muito bem estruturada, seja integrante do currículo.

3.7.5 Processo de resolução de problemas apresentado por Lester

Referindo-se a um contexto específico da Matemática, Lester (1983) define problema como uma tarefa na qual o indivíduo ou grupo se confronta com a necessidade de encontrar uma solução, não possuindo um procedimento diretamente acessível que garanta a determinação desta. O autor apresenta uma perspectiva inovadora para a resolução de problemas, vendo-a a partir da análise dos processos mentais envolvidos, os quais se constituem de algumas etapas: a conscientização; a compreensão; a análise do(s) objetivo(s); o desenvolvimento do plano; a implementação do plano e a avaliação dos procedimentos e da solução.

De acordo com o autor em foco, após a análise de uma determinada situação, esta se torna um problema quando o sujeito toma consciência de que a situação apresentada não pode ser resolvida de imediato e, consequentemente, há uma tendência de não se alcançar o objetivo. Também, existe um segundo componente aí envolvido, que é o sentimento ou desejo de tentar resolver o problema. Diante da situação, se o sujeito não reconhecer a dificuldade, ou não possuir o mencionado desejo, então qualquer procedimento deixará de ter sentido.

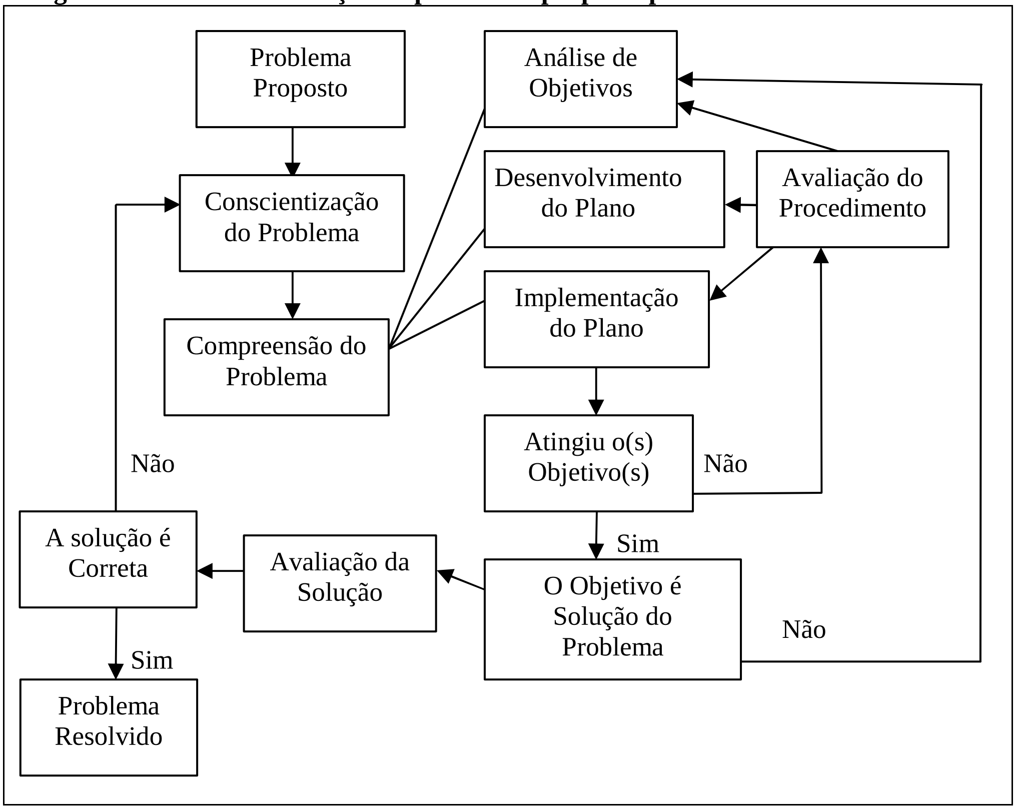
Quanto à compreensão, esta é a fase em que dá sentido ao problema, isto é, existe uma representação interna do problema pelo indivíduo. Esta etapa possui duas subetapas. A primeira, denominada translação, envolve a interpretação da informação proveniente do problema, em termos de esta possuir significado para o sujeito. A segunda, chamada interiorização, requer do indivíduo a seleção das informações relevantes e da maneira como estas se interligam.

A análise do(s) objetivo(s) pode ser vista como uma tentativa para reformular o problema. É a fase na qual se podem usar as técnicas e as estratégias, como também identificar as partes que compõem o problema. Ela inclui a especificação da informação dada, da inter-relação da informação e das operações que podem ser necessárias para se atingir o objetivo e constitui momento em que se pode voltar à etapa anterior e retroceder novamente a esta, visto que para identificar o(s) objetivo(s) do problema, é fundamental primeiro compreendê-lo.

A implementação do plano é o momento no qual o indivíduo tenta por em prática o que projetou; consiste em um dos momentos mais delicados, pois juntar adequadamente as partes de um plano implica escolher uma sequência apropriada de passos a serem percorridos com o intuito de se alcançar subobjetivos a serem interligados e se evitar erros. O aparecimento de erros pode tornar esta fase confusa e impedir que o(s) objetivo(s) seja(m) atingido(s), fato que requer uma avaliação dos procedimentos utilizados. Se, contudo, a instrução do plano enfatizar a avaliação dos procedimentos ainda enquanto este estiver sendo aplicado, a ocorrência de erros pode ser reduzida. Assim, as etapas de implementação do plano e de avaliação dos procedimentos devem estar interligadas.

A fase que consiste na avaliação dos procedimentos e da solução, muito frequentemente subestimada, é primordial, pois o sucesso na resolução de problemas é, muitas vezes, o resultado de uma avaliação sistemática das decisões durante o processo de resolução e de um exame atencioso dos resultados obtidos. Ressaltamos ainda que o papel da avaliação, em geral, ultrapassa o fato de a resposta estar certa ou errada. A seguir, com o intento de melhor compreender as etapas acima descritas, apresentamos a representação esquemática do modelo de resolução de problemas de Matemática preconizado por Lester (1980).

Figura 6 Modelo de resolução de problemas proposto por Lester



Fonte: Borralho (1995)

3.7.6 Processo de resolução de problemas proposto por por Schoenfeld

Para Schoenfeld, o objetivo maior do ensino da Matemática não é só levar o aluno a resolver problemas e sim ajudá-lo a aprender a pensar matematicamente, o que envolve mais do que ter uma grande quantidade de conhecimentos da matéria, incluindo ser reflexivo, dominar os recursos dentro da disciplina e usar os conhecimentos próprios de maneira eficiente. Nesta perspectiva, entende-se que um aspecto central no desenvolvimento do pensamento matemático dos discentes é que estes adquiram os caminhos, as estratégias, os recursos e uma disposição para exercerem atividades que reflitam o trabalho do matemático. Assim, de acordo com Schoenfelf (1996, p. 68),

> aprender a pensar matematicamente significa (a) desenvolver um ponto de vista matemático – que valorize o processo de matematização e abstração e ter a predileção em aplicá-los e (b) desenvolver uma competência com as ferramentas de trabalho e usá-las a serviço da meta de aprender estruturas – desenvolvimento do sentido matemático.

Nas palavras acima percebe-se que Schoenfeld reconhece a resolução de problema como parte significativa do pensamento matemático, que, para ele, denota ver o mundo de um ponto de vista matemático, apontando, deste modo, uma preferência por matematizar, isto é, modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias matemáticas a uma ampla gama de situações. Assinala, da mesma forma, a necessidade de se ter as ferramentas necessárias para matematizar com sucesso. Percebe-se, igualmente, uma similaridade com a alfabetização matemática, proposta por Stenn (2004), no sentido de que esta enfatiza, de certa maneira, uma matematização, bem como que o autor dá ênfase à utilização de ferramentas matemáticas com o intuito de viabilizar a aprendizagem.

Pretendendo esclarecer de que maneira os indivíduos, estudantes ou não, desenvolvem o conhecimento matemático a partir de atividades que envolvam a resolução de problemas, Schoenfeld (1985) apresenta-nos uma distinção das dimensões ou categorias que explicam o êxito ou o fracasso na resolução de problemas de Matemática, apontando-nos quatro aspectos do conhecimento e comportamento envolvidos nesse processo. São eles: (a) o conhecimento ou recursos básicos; (b) as estratégias cognitivas ou heurísticas; (c) o controle; e (d) os sistemas de concepções/pré-conceitos/percepções. Para explicarmos o comportamento de um indivíduo ao se deparar com uma situação matemática, incluindo aí o sucesso ou o insucesso obtido na resolução de problemas, necessitamos levar em consideração essas quatro categorias, que se sobrepõem e interagem entre si em alguns níveis.

No que concerne aos recursos (a), estes constituem o corpo de conhecimento que o indivíduo é capaz de aplicar (no sentido de se lembrar) em uma situação particular matemática. São os conhecimentos factuais, processuais e proporcionais que ele possui. Tais recursos podem ser intuições e conhecimento informal a respeito de um domínio; fatos; procedimentos algorítmicos; procedimentos não algorítmicos; conhecimento de proposições sobre as regras estabelecidas para trabalhar num domínio. Isto é, são os conhecimentos ou recursos básicos que incluem definições, fórmulas, algoritmos e conceitos fundamentais associados a um domínio matemático particular.

As estratégias cognitivas ou heurísticas (b) são regras, por vezes falíveis, de manuseio para a resolução de um problema. Elas envolvem formas de representar e explorar problemas com a intenção de compreender o enunciado e procurar caminhos de solução. Alguns exemplos dessas estratégias são desenhar figuras ou diagramas; introduzir uma notação adequada; reformular o problema; testar e verificar procedimentos; explorar problemas relacionados; trabalhar do fim para o princípio; estabelecer submetas.

O controle (c) diz respeito à administração dos recursos e das heurísticas, antes, durante e após a resolução do problema. Podemos entender também como a maneira de gerir os conhecimentos que serão aplicados. É nesta fase que entram em ação as teorias das decisões, a seleção de recursos e heurísticas adequadas para enfrentar o problema apresentado. Para tanto, faz-se necessário arquitetar um plano, tomar decisões e atuar conscientemente em nível metacognitivo. As estratégias metacognitivas envolvem conhecimento acerca do funcionamento cognitivo próprio do indivíduo (De que necessito? Como utilizo esse conhecimento?) como também estratégias de monitoramento e controle do próprio processo cognitivo (Que estou fazendo? Por que o faço? Para onde estou indo?).

Já os sistemas de concepções/pré-conceitos/percepções (d) consistem na visão do mundo matemático que cada indivíduo possui. É a perspectiva com a qual cada pessoa se relaciona com a Matemática, com as atividades matemáticas e com a resolução de problemas de Matemática. O pré-conceito/percepção/crença que cada um tem sobre a Matemática determina a maneira de abordar um problema, as técnicas a serem utilizadas, o tempo, o empenho e a dedicação ao problema. Os sistemas de concepções estabelecem o contexto no qual os recursos, as heurísticas e o controle se relacionam.

Schoenfeld (1985) evidencia a importância das decisões na resolução de problemas de Matemática e que estão envolvidas nestas categorias. Para ele, duas espécies de decisões são necessárias na resolução de problemas: decisões táticas e decisões estratégicas. As primeiras incluem procedimentos para implementar a resolução de problemas, como todos os algoritmos e muitas heurísticas como, por exemplo, as apresentadas por Polya. As decisões táticas, ainda, possuem a característica de serem "locais". Por exemplo, para determinar a área de uma região, a escolha do cálculo da mesma – que pode se dar por via geométrica ou por via analítico-geométrica – constitui uma tática. Por outro lado, as decisões estratégicas têm maior impacto na direção que a resolução de problemas pode tomar e na fixação dos tipo de recursos a serem usados especificamente no processo de resolução. A este tipo de decisões, Schoenfeld chama de execução ou de gestão.

Do ponto de vista da aprendizagem matemática, o autor ora mencionado considera o uso de problemas como um ponto de partida para discussões matemáticas – o que Schroeder e Lester (1989) chamam de ensino de Matemática via resolução de problemas – e afirma que eles deveriam servir como introdução ao pensamento matemático. Para tanto, e numa tentativa de estabelecer uma "estética de problemas", Schoenfeld (1996, p. 69) apresenta-nos quatro propriedades que considera relevantes para os problemas: para ele, os bons problemas devem (i) ser "relativamente" acessíveis, de fácil compreensão e não demandar uma grande quantidade de vocabulário ou "maquinaria" para se obter progressos em sua resolução; (ii) poder ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos; (iii) juntamente com suas soluções, servir como introduções a importantes ideias matemáticas; e por último (iv), servir como “germes” para “honestas e boas” explorações matemáticas.

Analisando essas propriedades, Borralho (1995) afirma que elas não constituem atributos que devem ser seguidos como se fossem regras infalíveis, embora se faça necessário trabalhar com atividades com sentido puramente matemático, tais como, por exemplo, representar uma situação problemática com símbolos matemáticos; executar operações matemáticas relevantes; interpretar os resultados obtidos nos termos da situação apresentada originalmente; desenvolver atividades que explorem a comunicação com e via linguagem matemática; analisar; explorar; conjecturar e provar. Todavia, não se deve perder de vista que temas matematicamente válidos, sedutores e estéticos são aqueles que podem servir como um território em que os estudantes se envolvem, em um desafio intelectual de extrapolar as fronteiras de seu próprio conhecimento. Nesse aspecto, trata-se de problemas compreensíveis, que apontem variadas soluções, no sentido de que os alunos possam perceber que nem sempre o fundamental é descobrir uma resposta, mas sim as diversas possibilidades de encontrá-la, assim como a introdução ao pensamento e a concepções que os levem à exploração da Matemática.

Schoenfeld compreende a resolução de problemas a partir de três fases. A primeira fase ele chama de análise, que consiste em examinar casos particulares, simplificar o problema. Na segunda, denominada exploração, o que acontece é substituir as condições, introduzir elementos auxiliares, considerar o raciocínio por contradição, examinar problemas modificados. A terceira fase é a da comprovação, e nela são feitos alguns questionamentos, tais como: Todos os dados pertinentes foram utilizados? Está de acordo com previsões ou estimativas razoáveis? É possível obter a mesma solução por outro método?

Todavia, cumpre lembrar que, para Schoenfeld (1985), o processo de resolução de problemas não é linear, como o proposto por Polya, que o descreve como compreender o problema, elaborar um plano, colocar o plano em ação e, por último, fazer uma retrospectiva, uma reflexão do caminho percorrido. Ao contrário, supõe que este percurso é sinuoso, muitas vezes levando-nos a caminhar em diferentes sentidos.

3.7.7 Resolução de problemas como investigação

A primeira vista, investigar é procurar o que não se sabe. Não obstante, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), para os matemáticos profissionais “investigar é descobrir relações existentes entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar suas respectivas propriedades". Usualmente, essas investigações desenvolvem-se em torno de um ou mais problemas, podendo-se mesmo dizer que o primeiro passo de qualquer investigação é identificar o problema a ser resolvido.

No entanto, em contextos de ensino-aprendizagem, investigar não significa necessariamente, conforme os autores referidos acima (p. 9),

> ligar com problemas muitos sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

Em referência ao contexto da sala de aula de Matemática, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 22) afirmam que "as investigações matemáticas constituem uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas". Em uma experiência de investigação, os alunos podem assumir o papel de um matemático que, diante de uma situação, objeto, fenômeno ou mecanismo suficientemente rico e complexo, tenta compreendê-lo, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças de forma, com o fim de chegar a uma generalização. Nas palavras dos autores (p. 23),

> o conceito de investigação matemática, como uma atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Assim como a Resolução de Problemas, as investigações matemáticas envolvem processos cognitivos complexos e requerem elevado grau de empenho e criatividade dos discentes. Entretanto, diferem em alguns aspectos. Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por se assentarem em dados e objetivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido.

Na Resolução de Problemas, tal como entendido inicialmente, o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É, portanto, um processo convergente. Todavia, como nos asseguram Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), em uma investigação matemática o objetivo consiste em explorar todos os caminhos interessantes que surgem a partir de uma dada situação. Trata-se de um processo divergente: sabe-se qual é o ponto de partida, porém não se sabe qual será o ponto de chegada.

No processo da investigação matemática, diferentemente do que ocorre na resolução de problemas, é possível distinguir atividades como a definição do objetivo (O que se pretende saber?); a idealização e realização de experiências (O que acontece neste ou naquele caso específico?); a formulação de conjecturas (Que regra geral se pode propor?) e o teste das conjecturas (Quais serão as experiências fundamentais para verificar a validade desta conjectura? Será possível prová-la?).

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 20), a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro momento compreende o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. O último momento diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. De acordo com os autores referidos acima, esses momentos, muitas vezes, surgem simultaneamente: a formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste. Cada um deles pode incluir diversas atividades, como se indica no quadro a seguir.

Quadro 3 Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulações	• Realizar teste • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte; Brocardo; e Oliveira (2003).

O sucesso de uma investigação depende, tal como qualquer outra proposta do professor, de um cenário de pesquisa, do ambiente de aprendizagem que se cria em sala de aula. Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se também que os alunos possam utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática. Alguns destes processos são, como referido anteriormente, a exploração e formulação de questões; a formulação de conjecturas; o teste e a reformulação de conjecturas; e, ainda, a justificação de conjecturas e a avaliação do trabalho.

Um cenário de investigação é aquele que convida os estudantes a formular questões e a procurar explicações. Segundo Skovsmose (2008), o convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. Para o autor, o “Por que isto...? ” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e buscando explicações. Quando os mesmos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para a investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem, em que eles são responsáveis por esse processo. A possibilidade de um cenário dar suporte a uma abordagem de investigação é, na visão de Skovsmose, uma questão empírica que deve ser respondida por meio da prática dos professores e alunos envolvidos.

Referindo-se à investigação na Educação Matemática, Skovsmose (2008, p. 15) espera que “a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa proporcionar novos recursos para levar os alunos a agir e a refletir, oferecendo, dessa maneira, uma Educação Matemática de dimensão crítica”.

Entretanto, o autor (p. 15) alerta que “o que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos”. Acredita, ainda, que, com os cenários de investigação, o aluno, conduzido pelo professor, tem contato com os conceitos principais da Matemática.

Aprender Matemática, afirma-nos Braumann (2002), não se reduz à compreensão da Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (no nível adequado a cada grau de ensino). Só deste modo se pode, realmente, dominar os conhecimentos adquiridos.

3.7.8 Resolução de Problemas como ensino-aprendizagem

A aprendizagem matemática demanda uma metodologia precisa, e a Resolução de Problemas apresenta-se como um de seus pilares básicos. Como metodologia de ensino, a Resolução de Problemas pode ser compreendida como um ponto de partida ou um meio de se ensinar Matemática. A partir dos problemas é possível, no contexto da sala de aula, fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. Andrade (1998, p. 12), nessa perspectiva considera que

> o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Nessa abordagem, para que os problemas sejam pertinentes, faz-se necessário adequá-los aos conhecimentos prévios e às possibilidades cognitivas dos alunos, como também que sejam motivadores e fornecedores de uma formação integral dos mesmos. Dada a importância atribuída a essa aprendizagem, espera-se que os problemas propostos não consistam, exclusivamente, de mera aplicação de um algoritmo.

Colocando o foco na solução de problemas, Onuchic (1999, p. 215) defende que

> o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para um certo tipo de problema e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos em que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem .

Corroborando o exposto, Vila e Callejo (2006, p. 164) afirmam que os problemas podem ser propostos aos estudantes percorrendo diversos objetivos, como desenvolver estratégias e processos gerais ou específicos do pensamento matemático, ou motivar e tornar significativa a introdução de uma noção. No primeiro caso, a Resolução de Problemas é objeto de aprendizagem e, como tal, entendida como “aprender a resolver problemas” ou “pensar matematicamente”. No segundo caso, ela é instrumento ou ferramenta de aprendizagem e compreendida como “aprender resolvendo problema”.

Apontam que os objetivos também têm relação com a sequência didática: atividade de introdução, de desenvolvimento, de recapitulação ou de aplicação. Quando os problemas são atividades de introdução de uma unidade de aprendizagem, têm como objetivo motivar a aprendizagem de um novo conceito a partir de uma situação-problema, que pode ser ou não aquela que lhe deu origem, ou problematizar um tema por meio de perguntas que serão respondidas durante o seu desenvolvimento. Nos outros casos, os problemas são atividades de desenvolvimento da unidade de aprendizagem e ajudam a assimilar os conteúdos, a aprofundá-los, a verificar sua utilidade e a possibilidade de aplicá-los a situações semelhantes ou novas.

Segundo Mendonça (1999, p.16), a solução de problemas pode ser pensada a partir de três perspectivas: a primeira delas consiste em entendê-la como uma importante ferramenta para o aluno enfrentar, enquanto cidadão, problemas os mais diversos, em que o não conhecimento de determinadas formalidades matemáticas pode atrapalhar suas ações cotidianas; uma segunda considera que a tarefa primordial da Matemática é resolver problemas de qualquer natureza, inclusive aqueles não cotidianos, que só existem nos livros de Matemática; e, em uma terceira abordagem, pode-se ensinar Matemática a partir da resolução dos mais diversos problemas nas mais diferentes situações, encarando resolver problemas como objetivo no processo ensino-aprendizagem.

A Resolução de Problemas pode focalizar a aprendizagem da Matemática no sentido de que o seu ensino esteja centrado em transmitir aos discentes aquelas ideias, estratégias, processos e atitudes que se mostrarem úteis e eficazes para resolver problemas. No entanto, as propostas para o ensino-aprendizagem combinam elementos distintos e que se complementam. Tais elementos foram apresentados por Kilpatrick (1985), ao dividir o ensino da solução de problemas em cinco categorias: osmose, memorização, imitação, cooperação e reflexão.

- O ensino por osmose ancora-se na ideia de que os estudantes aprendem a resolver problemas resolvendo-os, isto é, praticando-os, resolvendo muitos deles e que, ao fazê-lo, aprendem técnicas, métodos ou ferramentas heurísticas neles implícitas.

- A memorização implica decompor a resolução de um problema em elementos mais simples e abordar a solução mediante o ensino de cada um desses elementos.

- A imitação consiste em situar o aluno em presença de modelo de um sujeito competente em resolver problemas; de certa maneira, ensina-se a analisar as condutas e os comportamentos desses modelos e a compará-los com as condutas próprias e alheias.

- Na cooperação, os alunos não devem apenas ser capazes de observar e analisar condutas competentes para tentar imitá-las, como também de observar e analisar seus próprios colegas para cooperar com eles.

- Quanto à reflexão, esta possibilita compreender o êxito, o fracasso, o caminho mal escolhido, a falha de raciocínio nas estratégias, incidindo em conclusões válidas para situações futuras. Os bons resolvedores de problemas refletem sobre o que fazem.

Ao analisarem as cinco categorias expostas logo acima Vila e Callejo (2006, p. 166) apontam algumas limitações dos elementos apresentados. Observam que, não obstante a prática seja condição necessária para melhorar a habilidade de resolver problemas, ela não é suficiente, pois outros elementos, como as crenças e as atitudes negativas dos estudantes sobre si mesmos, podem neutralizá-la ou torná-la pouco eficaz. Referindo-se à imitação, asseveram que esta apresenta o inconveniente de que a forma de resolver problema é muito pessoal e, portanto, aprender com especialistas supõe relacionar as próprias capacidades, referências e limitações com as do modelo.

Huete e Bravo (2006, p. 193), por seu lado, asseguram que as categorias que enumeram os diferentes pontos de vista do ensino de resolução de problemas de pouco servirão se não analisarem os métodos utilizados que facilitam essa resolução. Afirmam ainda que se torna necessário ver a resolução de problemas como uma atividade mental, e nela se acham as operações básicas do pensamento: a análise, a síntese, a generalização, a abstração e a comparação.

Por análise compreendem a operação mediante a qual o objeto de conhecimento (o problema) é decomposto ou separado em partes na mente. A síntese é o ato de reunir mentalmente os diferentes elementos, conformando um todo: um elemento isolado no problema vê-se em sua íntima relação com os outros, em seus nexos e em suas interdependências. A generalização é compreendida em dois sentidos: conforme o primeiro deles, por meio da generalização se diferenciam ou destacam, em dois ou mais objetos, propriedades comuns, que não variam de um objeto para o outro, enquanto segunda maneira de se compreender a generalização é vê-la como a operação mental que permite distinguir em um ou mais objetos suas propriedades essenciais sob a forma de um conceito geral. A abstração é considerada como uma operação a partir da qual se separam determinadas propriedades ou indícios de certos objetos, ao mesmo tempo que não se levam em consideração outras propriedades ou indícios desses mesmos objetos. Quanto à comparação, esta é a contraposição de diferentes elementos (objetos, problemas, etc.) com o intuito de determinar a semelhança ou a diferença em suas propriedades gerais e particulares.

Discutindo a compreensão da Matemática através da Resolução de Problemas, Schroeder e Lester (1989, pp. 31-33) apresentam-nos três modos diferentes de abordar a relação existente entre o ensino e a resolução de problemas; são eles: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Segundo esses autores, o primeiro destes modo consiste em evidenciar o modelo de Resolução de Problemas apresentado por Polya, ou algumas de suas variações; como já visto, este modelo apresenta um conjunto de quatro etapas interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema, elaborar um plano, executar este plano e fazer um retrospecto ou reflexão do caminho percorrido.

Ao ensinar a resolver problemas, o docente concentra-se na maneira como a Matemática é ensinada e como aplicá-la na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimentos matemáticos seja de primordial importância, poder usá-los é a finalidade essencial da aprendizagem matemática. Consequentemente, os alunos recebem muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas a respeito do que estão estudando e têm oportunidade de aplicar essa Matemática ao resolver problemas.

No ensino da Matemática através da Resolução de Problemas, estes são vistos não só como um objetivo para a aprendizagem da disciplina, mas, também, como o meio principal para a mesma. Nessa perspectiva, o ensino de determinado tópico matemático começa com uma situação-problema que personifique aspectos-chave desse tópico, e se desenvolvem, a partir daí, técnicas matemáticas como razoáveis respostas a problemas razoáveis. Sendo um dos objetivos da aprendizagem matemática transformar problemas não rotineiros em problemas rotineiros, esta aprendizagem pode ser entendida como um movimento do concreto para o abstrato, isto é, partindo de um problema do mundo real que sirva como exemplo do conceito ou da técnica operatória rumo a uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos.

O ensino através da Resolução de problemas também pode ser visto como uma abordagem que incorpora três recomendações (NTCM, 1989): conceitos e habilidades matemáticas devem ser aprendidos no contexto da solução de problemas; o processo de desenvolvimento do mais alto nível de pensamento deve ser promovido através de experiências de resolver problemas; e instruções matemáticas devem ocorrer, por meio de perguntas orientadas, numa atmosfera dessa resolução.

Nessa perspectiva, Lester et al. (1994) asseveram que o fundamental é a mudança da visão de ensino, de um ato de transmitir informações a alunos passivos para um ato de ajudar os estudantes a construir uma compreensão das ideias e processos matemáticos, envolvê-los em um fazer Matemática: criar, conjecturar, explorar, testar, verificar. Esta mudança de ponto de vista requer uma modificação da postura do professor em sala de aula: ao invés de servir como autoridade final e distribuidor de conhecimentos, ele passa a ser um guia, um consultor, um auxiliar na resolução do problemas.

Nesse mesmo sentido, Coelho e Carvalho (2008, p. 1) consideram que a Resolução de Problemas como ponto de partida para o ensino da Matemática representa

> uma ruptura em relação às práticas tradicionais que são centradas no professor e se baseiam no pressuposto de que a aprendizagem se realiza por transmissão do conhecimento, do professor ao aluno. Trata-se de uma prática que se fundamenta na construção do conhecimento que é produzido pelo aluno nas interações sociais, e conta com o papel mediador do professor. O problema gera a necessidade de conhecer as estruturas matemáticas, os conceitos, e de estabelecer relações entre eles. Leva o aluno a organizar estratégias para a resolução e instiga a produção de significações, de argumentação e de troca de ideias. Por outro lado, por romper com práticas tradicionais hegemônicas, enfrenta dificuldades de operacionalização. Uma dessas dificuldades é que produz outro tipo de interação entre os alunos e entre professores e alunos, representando uma mudança nos métodos de ensinar Matemática.

Também abordando o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, e tratando a solução de problema como uma estratégia de ensino, Walle (2001), a partir deste ponto de vista, afirma que tarefas ou problemas podem, e deveriam, ser propostos para envolver os estudantes em atividades que os levem a pensar sobre e a desenvolver a Matemática importante que eles precisam aprender. Para este autor, ensinar a disciplina por esta temática não significa apresentar uma lista de problemas aos alunos e esperar que algo sobrenatural aconteça. Pelo contrário, nesta perspectiva, a participação do professor é fundamental.

Ainda segundo Walle (2001), o docente é o responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer. Para tanto, o autor aponta três momentos, “antes, durante e depois”, em que a aula deve transcorrer. No primeiro momento, o educador deve garantir que os educandos estejam mentalmente prontos para receber a atividade e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. No segundo momento, eles executam a atividade sob a avaliação e observação participativa do professor. Já no terceiro momento, ele aceita a solução dos alunos sem avaliá-la e conduz a discussão enquanto os mesmos justificam e avaliam seus resultados e métodos. A partir de então o professor formaliza novos conceitos e novos conteúdos construídos.

Com base em uma experiência desenvolvida em sala de aula, na qual um objeto matemático foi trabalhado visando a um ensino-aprendizagem acompanhado de compreensão e significado por meio da Resolução de Problemas, Onuchic (1999, p. 216-217) apresenta-nos sete passos pelos quais a aula foi desenvolvida e que transcrevemos a seguir.

- Formar grupos – entregar uma atividade: lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros.

- O papel do professor – o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor só lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

- Resultado na lousa – com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota os resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

- Plenária – chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

- Análise dos resultados – nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem outra vez problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

- Consenso – a partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se o consenso sobre o resultado pretendido.

- Formalização – num trabalho conjunto de professor e alunos, com professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetiva aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias do assunto.

Vê-se, então, que Onuchic (1999) acredita que o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas pode auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos, dos processos e das técnicas operatórias indispensáveis à resolução dos mesmos. Defende, ainda, que entender é essencialmente relacionar e que a compreensão do aluno aumenta quando este é capaz de estabelecer uma relação entre determinada ideia matemática e um grande número ou uma variedade de contextos. Também para Coelho e Carvalho (2008, p. 4), "a capacidade de relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele e a construção de relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema podem ajudá-lo consideravelmente no processo de compreensão".

Embora o ensino da Matemática através da Resolução de Problemas seja uma abordagem que vai ao encontro das recomendações preconizadas pelo NCTM e pelos PCNs e, por meio dessa estratégia, importantes conceitos e procedimentos matemáticos possam ser melhor ensinados, reconhecemos que a sua utilização não é fácil, uma vez que atividades precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, sempre considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. Entretanto, como asseguram Onuchic e Allevato (2004, p. 223), há boas razões para se fazer tal esforço. Segundo essas autoras a Resolução de Problemas

> Coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o "dar sentido". Ao resolver problemas os alunos necessitam <u>refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema</u> (grifo nosso);
>
> Desenvolve o "poder matemático". Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos nos *standards* 2000: Resolução de Problemas; raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de <u>permitir ir bem alem na compreensão do conteúdo que está sendo construído na sala de aula </u>(grifo nosso).

De acordo com Fiorentini (1994, p. 229), ao passar de uma perspectiva de “ensino de resolução de problemas” em Matemática para outra de “ensino da matemática através da resolução de problemas”, passamos, também,

> a não discutir somente conceitos, estratégias e processos matemáticos, mas, sobretudo, questões pedagógicas mais amplas como por exemplo, concepções, finalidades e aspectos epistemológicos e sócio-culturais do ensino e da aprendizagem da matemática e do currículo escolar.

Neste ponto, consideramos válido ressaltar que, embora teoricamente, as três concepções já discutidas anteriormente (SCHROEDER e LESTER, 1989) possam ser entendidas e vistas em separado, na prática elas se imbricam e se concretizam por meio de variadas combinações e sequências, uma vez que, na abordagem da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende esta disciplina para resolver problemas, haja vista que o ensino de solução de problemas não constitui um processo isolado.

Considerando o exposto, podemos afirmar, com Schroeder e Lester (1989, p. 34) que, “embora o ensino de matemática por meio da resolução de problemas não tenha sido assumido por muitos professores, autores de livros e promotores de currículos, ela constitui-se numa abordagem que merece ser considerada, desenvolvida e avaliada”.

O ensino-aprendizagem por meio da Resolução de Problemas apresenta-se como uma tentativa de imprimir um novo modo nas aulas de Matemática, ou seja, de modificar o desenvolvimento habitual desta disciplina. Para Vila e Callejo (2006, p. 29), os problemas são um meio para por foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos, ou seja, uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, que sejam críticos e reflexivos, capazes de se perguntar pelos fatos, suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios, modificando-os, se for necessário, e de propor soluções.

3.8 Problemas e Exercícios

A visão tradicional a respeito da resolução de problemas é que estes servem apenas para aplicar e mecanizar conceitos e processos já estudados e que o ensino de Matemática através deste processo é caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o professor mostra o modelo e os alunos o reproduzem exaustivamente, com o intuito de memorizar os pontos considerados mais importantes, aplicando simplesmente um algoritmo ou um resultado conhecido. Embora a utilização destes modelos seja importante porque possibilita consolidar habilidades instrumentais básicas, não devemos confundi-los com a solução de problemas, pois, como já desenvolvido no decorrer deste capítulo, estes exigem o uso de estratégias e a tomada de decisão sobre o processo de resolução que deve ser seguido.

Uma situação somente pode ser compreendida como um problema na medida em que existe um reconhecimento da mesma como tal, isto é, quando não dispomos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de maneira imediata sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisão sobre a sequência de passos a serem seguidos e quando, por isso, necessitamos conceber uma estratégia para a sua resolução, analisar, sintetizar e avaliar dados, relações e situações. Esta é a característica fundamental, que nos permite diferenciar um verdadeiro problema de situações similares, como, por exemplo, os exercícios. Dito de outra maneira, um problema se diferencia de um exercício pelo fato de que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução, por exemplo, quando aplicamos um algoritmo ou utilizamos um resultado já conhecido.

Segundo Skovsmose (2008), a Educação Matemática se enquadra tradicionalmente no paradigma do exercício, que tem a premissa central de que existe uma, e somente uma, resposta correta para questões, desafios e problemas. O autor acredita que mais importante do que fazer exercícios, porém, é analisar os diferentes tipos de situações e aprender a construir estratégias utilizando os conceitos matemáticos. Vemos com ele (p. 12) que,

> muitas vezes, fazendo exercícios, os alunos não vão aprender matemática para toda a vida, mas na prática de realizações de listas de exercícios em busca de "respostas certas" vão aprender as regras, aprender como se dá o jogo social disciplinado e não criativo. Seguir as regras é, talvez, importante em muitas instituições, em muitas companhias, mas não para estabelecer uma cidadania crítica.

A realização de exercício se baseia no uso de habilidades e técnicas "sobreaprendidas", as quais, de acordo com Echeverría e Pozo (1998, p. 16), "são aquelas transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma prática contínua". Elas constituem um meio ou recurso instrumental necessário, porém não suficiente, para alcançar a solução de problemas; além delas, também são exigidas estratégias, conhecimentos conceituais, atitudes, entre outros elementos. Ainda na visão desses autores, (p. 6), "nos limitamos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidos pelos caminhos ou meios habituais”.

Os exercícios, conforme observa Echeverría (1998, p. 49), “servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a posterior solução de problemas”. Eles não se caracterizam apenas pela repetição das operações matemáticas mais básicas, seja de forma oral ou escrita, mas também como uma tarefa na qual o aluno não precisa tomar decisão alguma sobre os procedimentos que deve usar para chegar à solução.

Corroborando esta visão, lembramos que Vila e Callejo (2006, p. 154) afirmam que a finalidade dos exercícios é “mecanizar/automatizar determinados procedimentos apresentados em aula ou ajudar na compreensão de determinados conceitos, podendo comportar tarefas de reconhecimento, de repetição ou de execução de algoritmo”. Para estes autores, os exercícios se caracterizam pelo fato de seus enunciados conterem indícios suficientemente claros dos procedimentos que se espera sejam utilizados (palavras-chave ou algum referencial facilmente identificável) ou serem apresentados no contexto ou na unidade didática em que se desenvolve o processo de resolução.

Os exercícios são precisos e concisos; propõem a obtenção de um único nível de resposta; não são propostos de forma isolada, mas em uma lista repetitiva ou hierarquizada. Assim, exercício pode ser entendido como uma atividade de “adestramento” no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida, ou seja, ele envolve mera aplicação de resultados teóricos. O problema, por sua vez, necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa.

Procurando evidenciar a diferença entre problema e exercício, D’Amore (2007) apresenta diferentes perspectivas, em um esquema que reproduzimos abaixo.

Quadro 4 Diferentes perspectivas entre problema e exercício proposta por D’Amore

	problema	exercício
ensino	- Instrumento de aquisição de conhecimento. - Objeto de ensino	- Instrumento para Consolidar conhecimentos e habilidades. -Instrumento para verificar conhecimento e habilidade
privilegia	processos	
o professor	- escolhe os problemas - segue os processos	- escolhe os exercícios - corrige e avalia os produtos
O sujeito tem um papel	- produtivo	- executivo

Fonte: D’Amore (2007)

Quanto às atividades apresentadas nas aulas de Matemática, Vila e Callejo (2006, p. 71) consideram que estas podem ser situadas em um contínuo. Em uma extremidade estariam os exercícios rotineiros, com baixo nível de demanda cognitiva e, no outro extremo, as atividades mais abertas de investigação, com alta exigência cognitiva e afetiva, no sentido de que requerem do aluno selecionar, combinar e adaptar conhecimentos, elaborar estratégias e regular sentimentos e emoções, ao mesmo tempo que são influenciadas pelas atitudes e crenças do mesmo, no contexto em que são propostas.

Entendendo por problema uma situação que apresenta uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao sujeito que tenta responder à mesma porque ele não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados com a incógnita ou os dados com a conclusão e deve, portanto, buscar investigar, relacionar, implicar seus afetos para fazer frente a uma situação nova, os autores ora mencionados evidenciam algumas diferenças entre exercícios e problemas, que reproduzimos no quadro a seguir.

Quadro 5 Algumas diferenças entre exercício e problema

1. Ao ler um exercício, vê-se imediatamente em que consiste a questão e qual o meio de resolvê-lo. 2. Diante de um problema não se sabe, à primeira vista, como atacá-lo e resolvê-lo; às vezes, nem sequer se vê com clareza em que consiste o problema.
3. O objetivo que o professor persegue quando propõe um exercício é que o aluno aplique de forma mecânica conhecimentos e algoritmos já adquiridos e fáceis de identificar. 4. O objetivo que o professor persegue ao propor um problema é que o aluno busque, investigue, utilize a intuição, aprofunde o conjunto de conhecimentos e experiências anteriores e elabore uma estratégia de resolução.
5. Em geral, a resolução de um exercício exige pouco tempo e este pode ser previsto de antemão. 6. Em geral, a resolução de um problema exige um tempo que é impossível de se prevê de antemão.
7. A resolução de um exercício não costuma envolver os afetos. 8. A resolução de um problema supõe um forte investimento de energia e afeto. Ao longo da resolução, é normal experimentar sentimentos de ansiedade, de confiança, de frustração, de entusiasmo, de alegria, etc.
9. Em geral, os exercícios são questões fechadas. 10. Os problemas estão abertos a possíveis variantes e generalizações e a novos problemas.
11. Os exercícios são abundantes nos livros didáticos. 12. Os problemas costumam ser escassos nos livros didáticos.

Fonte: Vila e Callejo (2006)

Referindo-se a problema tipicamente escolar, Vila e Callejo (2006, p. 73) asseguram que, como o próprio nome indica, trata-se daquele cuja solução requer a aplicação de conhecimento ou algoritmo que foi apresentado em aula, estudado recentemente; portanto, de modo geral, tem pouco potencial heurístico; seu enunciado contém todos os dados necessários, não falta nem sobra informação, e sua solução é única. No entanto, os problemas que se apresentam na vida cotidiana são diferentes, por serem situações em que se deve buscar e selecionar a informação necessária, identificar os conhecimentos a serem usados para resolvê-los e por poderem não ter solução, ter apenas uma ou apresentar várias soluções.

Neste sentido, concordamos com Onuchic (1999) quando explicita que a atividade matemática escolar, inclusive a resolução de problemas, não se resume a olhar para coisas prontas e definitivas, mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade. Devem-se constituir atividades que o levem a pensar e lhe possibilitem agir, não só no contexto escolar, mas na sociedade, enquanto cidadão.

O que ocorre, porém, é que as atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula são, muitas vezes, apresentadas aos alunos como uma aplicação da Matemática que tem como fim a busca de uma solução precisa, isenta de erros e definitiva. Esta maneira de avistar a disciplina em foco tem suas raízes na ideologia da certeza, a qual afirma, segundo Skovsmose (2007, p. 81), que “a Matemática, mesmo quando aplicada, apresentará soluções corretas asseguradas por sua certeza”. Influenciada por tal ideologia, a escola, por meio das atividades propostas aos estudantes no contexto da sala de aula de Matemática, frequentemente transfere a precisão e o rigor inerentes à Matemática (pura) para a solução de problemas, a investigação matemática e os exercícios, reforçado, assim, a visão tradicional dessa disciplina, a qual sustenta que todas as atividades matemáticas do nível escolar têm que ser desenvolvidas a partir de um conjunto de exercícios previamente determinados.

Skovsmose (2007), chama a atenção para o fato de que esses exercícios, acompanhando a tradição da Matemática escolar, são frequentemente idealizados por autores de livros didáticos, que fornecem uma extensa sequência de tarefas, disponibilizando, deste modo, aos professores, recursos para trabalharem no decorrer de todo o ano escolar.

Todavia, muitos desses exercícios se referem a uma realidade virtual que inclui fazer compras, levantar preços, raciocinar com dinheiro, pagamento, taxas de câmbio, velocidade, aceleração, distância, os quais correspondem a entidades que observamos na “realidade”. Não obstante, como assevera este autor (Id., p. 82), “a realidade virtual de um exercício matemático é de uma natureza particular”, pois, ao descrever uma realidade virtual o faz de modo perfeito, por meio de uma descrição linguística, eliminando, assim, todo elemento da imperfeição empírica, além de fornecer, com exatidão, todos os dados necessários para se resolver o exercício ou o problema proposto. Segundo Skovsmose (2007, p. 83),

> a realidade virtual do livro texto de matemática parece apresentar qualidades epistêmicas do realismo platônico. À medida que uma proposição matemática é verdadeira – e de acordo com Platão, é absolutamente verdadeira quando afirma algo sobre o mundo das ideias –, então um exercício diz algo absolutamente verdadeiro sobre uma realidade virtual. Nessa realidade, como em qualquer outra do mundo platônico, o absolutismo opera perfeitamente.

Podemos, por conseguinte, afirmar que a realidade virtual apresentada nos livros didáticos de Matemática, por meio dos exercícios e dos problemas propostos, vem ao longo do tempo ratificando uma tradição na Matemática trabalhada no contexto da sala de aula, pela qual o "absolutismo opera perfeitamente". Nela, todas as informações fornecidas são necessárias e suficientes: os dados relevantes que possibilitem a resolução do problema são apresentados com exatidão; técnicas matemáticas são evidenciadas e definidas previamente; a existência de uma solução correta é garantida. No entanto, a ideologia da certeza, como nos mostra Skovsmose (2007), muitas vezes não responde a situações e necessidades que emergem em contextos diferentes daqueles encontrados na escola e na sala de aula de Matemática, em particular, uma vez que toda e qualquer situação traz imbricadas a si causalidade, casualidade, intencionalidade, e politicidade.

Rememorando a experiência que nos trouxe a esta pesquisa, podemos perceber que, na realidade virtual, se um determinado produto é anunciado em um supermercado por R$ 2,57 (dois reais e cinquenta e sete centavos) e este oferece uma promoção "Leve três pague dois", a ideologia da certeza nos garante que o preço a ser pago pelas três unidades do artigo em promoção é precisamente R$ 5,14 (cinco reais e catorze centavos), ou seja, o preço exato de duas unidades do produto, e não R$ 5,30 (cinco reais e trinta centavos) como estava sendo cobrado em uma situação real, envolta em causalidade, casualidade, intencionalidade e politicidade, na qual a ideologia da certeza encontra seus limites. No mundo real, 2 x 2,57 "pode" ser igual a 5,30.

Sendo assim, a Matemática escolar não deve ficar presa às amarras da ideologia da certeza e do "absolutismo" que a cerca. – Devemos desprezá-la? – De forma alguma! Afinal, não só, mas também ela nos possibilita fazer uma leitura adequada, por exemplo, da operação matemática implicada no problema enunciado acima e, a partir da compreensão da mesma, verificar a incongruência existente entre o resultado apresentado em uma situação real, como a vivenciada no supermercado, e o resultado preciso, correto e absoluto exibido por tal ideologia. Perguntamos novamente: – Devemos desprezá-la? – Não! Devemos ir além.

Considerando que a Matemática escolar, mesmo que desenvolvida com o auxílio de instrumentos impregnados pela ideologia da certeza – como é a maioria dos livros-texto –, dentro dos limites e das possibilidades, poderá estabelecer conexões e reflexões não só com os elementos internos à própria Matemática, mas, também, fazer conexões e reflexões sobre a utilidade/aplicabilidade da mesma em relação às diferentes áreas do conhecimento e aos diversos contextos nos quais os conhecimentos matemáticos poderão ser necessários, tendo sempre em vista, no entanto, um saber pensar para poder agir. Esta exigência se dá até mesmo em situações corriqueiras, como fazer compras em um supermercado.

4 A METODOLOGIA

O objetivo deste capítulo é situar o presente estudo no contexto em que se deu a investigação, indicar os procedimentos metodológicos, o processo de escolha e delimitação do material da pesquisa, as estratégias e instrumentos utilizados e as etapas organizadoras na análise dos dados.

4.1 Definição do Percurso Metodológico

Nada mais real em um processo de investigação científica do que a afirmação do poeta espanhol Antonio Machado: “a construção do caminho é feita ao caminhar”[68]. Este caminhar, que de antemão pensamos ser solitário, com certeza não o é. As passadas que o constituem – embora inicialmente subsidiadas pelas concepções[69] e crenças[70] que temos do objeto de estudo, por nossa história de vida, escolhas profissionais e acadêmicas – vão se alargando com as contribuições que recebemos nesse processo de construção. Disciplinas cursadas, visões e epistemologias apresentadas, concordância e desconfiança teórica, autores lidos, seminários apresentados, trabalhos construídos, discussões realizadas em grupos de pesquisa e com os colegas de curso nos acompanham e afloram, em momentos oportunos, nesse processo de construção. Logo, não estamos sós. Evidentemente, este trabalho é fruto de tudo isso; não obstante, como observa Minayo (1998, p. 10), “nem a teoria nem a prática são isentas de interesse, de preconceito e de incursões subjetivas”, que com certeza também emergiram aqui.

O olhar que lançamos sobre um objeto de estudo é interpretativo e resulta de um processo de percepção e de pensamento, portanto, de um processo autoreflexivo. Embora tal objeto não seja uma construção de nosso olhar, por certo, a interpretação que fazemos dele está intimamente ligada e dependente da maneira pela qual olhamos e lemos a realidade que o rodeia. Por conseguinte, o olhar que projetamos sobre o objeto desta pesquisa não pretende ser o guardião de nenhuma verdade absoluta: longe disso, almeja apenas expressar a compreensão que temos do mesmo, à luz de nossas concepções e crenças agora ampliadas e

---

[68] Disponível em www.cao.pt/surya/ja_35_1.pdf. Acesso em 03/07/2009.
[69] Marcos organizativos que servem de suporte aos conceitos e que têm essencialmente uma natureza dedutiva (PONTE, 1994).
[70] Tipo de conhecimentos subjetivos referentes a um conteúdo específico sobre o qual versam; as crenças têm um forte componente cognitivo, que predomina sobre o afetivo, e estão ligadas a situações. Embora apresentem um alto grau de estabilidade, podem evoluir graças ao confronto com experiências que podem desestabilizá-las: elas vão sendo construídas e transformadas ao longo de toda a vida (VILA e CALLEJO, 2006).

lapidadas pelas epistemologias a ele inerentes, adquiridas nesse caminhar em passadas coletivas.

Isso posto, é cogente afirmar que entendemos o desenvolvimento da pesquisa científica como um entrelaçamento extensivo de ideias, abordagens teóricas, metodológicas, históricas, práticas, étnicas, culturais, sociais, educacionais, políticas e éticas, na busca de uma melhor compreensão da realidade. Assim considerando, vislumbramos poder compreendê-la não de maneira exclusiva, mas também, por meio do princípio hologramático, (MORIN, 2007), pelo qual não apenas a parte está contida no todo, mas também contém o todo. Deste modo, podemos apreender nosso objeto de estudo tanto por meio da visão analítica, que compreende o todo a partir das partes que o compõem, quanto a partir do todo que o constitui. Com tal visão, pensamos ser possível inscrever o estudo dos Problemas contidos nos livros didáticos de Matemática na linha de investigação que tem a **abordagem e metodologia qualitativa** e utilizar este tipo de pesquisa e sua base epistemológica na investigação que nos propomos realizar.

Corroborando o exposto acima, acrescentamos que Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004, p. 131) apontam diversas caracterizações do "paradigma qualitativo", entre elas, a de que as pesquisas qualitativas "seguem a tradição 'compreensiva' ou interpretativa". Em decorrência dessa posição adotamos um dos constitutivos essenciais aos estudos qualitativos, ou seja, a abordagem indutiva, que segundo os autores ora citados (p. 131) "pode ser definida como aquela em que o pesquisador parte de observações mais livres, deixando que as dimensões e categorias de interesse emerjam progressivamente durante os processos de coleta e análise de dados".

Quanto aos **procedimentos metodológicos** adotados por essa abordagem, Richardson (2008, p. 225) nos traz a contribuição de Hosti, para o qual "a análise de conteúdo é a aplicação de métodos científicos a uma evidência documentária". Vemos também que, segundo Bardin (1977, p. 42), a análise de conteúdo pode ser entendida como

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/percepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

A partir destas conceituações e considerando que as ideologias subjacentes aos textos didáticos constituem um campo de aplicação da análise de conteúdo; que toda comunicação que implica a transferência de significado a um receptor pode ser objeto de análise de conteúdo; e que tudo o que é dito ou escrito é susceptível de ser submetido a uma análise de conteúdo, entendemos poder submeter nosso objeto de estudo a esse método científico.

Ao focalizar a **análise de dados**, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que a tendência é seguir um processo indutivo, pois eles não são e não podem ser recolhidos apenas para confirmar hipóteses elaboradas previamente. Ao contrário, a compreensão/abstração dos dados é construída pelo pesquisador à medida que os mesmos vão se agrupando e dando sentido ao objeto de análise.

No tocante aos **dados**, os inerentes a esta pesquisa são compostos por problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática do ensino médio**,** tanto os utilizados para introduzir um novo conceito matemático, quanto os propostos aos alunos e identificados nesses livros, na maioria das vezes, como exercícios ou exercícios propostos.

4.1.1 Escolha e delimitação do material da pesquisa

O livro didático tem sido tratado na literatura brasileira não só por sua importância qualitativa mas também quantitativa: qualitativa, pelo fato de tal livro fazer as transposições didáticas do conhecimento científico para o conhecimento didático; e quantitativa, por serem adotados milhões de livros didáticos a cada ano pelo sistema educacional brasileiro, o que requer investimentos por parte do governo federal e desperta o interesse de vários autores e editoras de nosso país. Se considerarmos o investimento do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE[71], aplicado somente no Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM, cerca de R$ 416,9 milhões, para a publicação de 43,1 milhões de exemplares, com o intuito de beneficiar 7,2 milhões de alunos em 2009, podemos visualizar o empenho desses autores e editoras para terem os títulos de suas obras impressos nos catálogos dos livros didáticos do PNLEM do MEC.

Embora não seja o único recurso utilizado no sistema escolar para o ensino-aprendizagem, o livro didático continua a ser, para uma grande maioria dos professores, o principal instrumento de trabalho. Muitas vezes, é o livro didático que “decide” o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e formula os exercícios e problemas a serem resolvidos, além de orientar o docente por meio dos exemplares especialmente destinados a ele, os designados manual do professor ou livro do professor, nos quais são encontradas orientações e sugestões para as aulas e também as respostas e soluções dos exercícios. De acordo com Silva Jr. e

---

[71] Disponível em ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/quantidade_exemplares_e_aquisicao2008_2009.pdf. Acesso em 05/10/2009.

Réginier (2008), o livro didático é utilizado, em sua plenitude, como fonte de textos, de ilustrações e de atividades e desenvolvido, quase integralmente, na sequência original. Apresenta-se como recurso auxiliar para o ensino, e converte-se em elemento determinante da prática pedagógica do professor.

Os autores referidos acima (2008) apontam quatro funções complementares para o livro didático: formação científica e geral, que oferece aos professores uma melhor matriz do saber; formação pedagógica, que pode sugerir aos mesmos uma série de vias de trabalho; auxilio à aprendizagem e à gestão de curso mediante o fornecimento de numerosos instrumentos que permitem melhorar a aprendizagem e adequá-la ao quotidiano; e ajuda à avaliação das aquisições, por permitir ao docente explicitar os erros e propor vias de melhoria.

Abordando a questão histórica do livro didático e sua relação com a educação matemática, Valente (2008) aponta que a dependência de um curso de Matemática a esse tipo de livro não é recente; segundo este autor (p. 141), talvez seja possível dizer que

> a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos.

Neste ponto, importa esclarecer que concordamos com Choppin (2004, p. 563) quando afirma que “o livro didático é um produto cultural complexo que se situa no cruzamento da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade”. Sendo assim, esse material tem, entre outros atributos, o papel de repassar conhecimento, de comunicar os acontecimentos passados e presentes, proporcionando aos leitores a compreensão, a análise e o julgamento dos fatos que compõem a trajetória do homem e do mundo. E, mesmo se considerando a especificidade que lhe é inerente, o livro didático de Matemática não deve se furtar a tais características.

Tendo em vista que uma das funções do livro didático da disciplina em pauta é transmitir conhecimento matemático impresso, entendemos que esta forma de apresentação, por si só, já apresenta algumas limitações à sua aprendizagem, entre as quais podemos citar aquelas procedentes da variedade de linguagem que apresenta: a usual, a das demonstrações matemáticas, as simbologias matemáticas, a linguagem gráfica, as representações espaciais, entre outras. Vê-se portanto, que o livro didático de Matemática, por si mesmo, não se presta à obtenção de uma aprendizagem que possa ser considerada eficaz: a ação do professor perante este instrumento é fundamental.

Diante do exposto, até mesmo ao longo do trabalho, cabe a seguinte indagação: Como um dos materiais mais utilizados em sala de aula de Matemática, o livro didático, faz a articulação dos conteúdos clássicos dessa disciplina com os conteúdos de caráter social? Esta articulação é real? Ou seja, os livros didáticos de Matemática abordam questões como diversidade, ética, cidadania, meio ambiente, etc?. Como instrumento a serviço da Educação Nacional, é de fundamental importância que as obras didáticas contribuam significativamente para a construção da ética necessária ao convívio social e ao exercício da cidadania, considerem a diversidade humana com equidade, respeito e interesse e respeitem a parcela juvenil do alunado a que se dirigem.

Tendo em vista o objetivo central de nossa pesquisa ou, mais precisamente, com o intuito de verificar se os problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática recomendados pelo Programa Nacional do Livro para o ensino médio sinalizam para uma formação cidadã, tal como preconizam as bases legais da educação brasileira bem como o método escolhido para a concretização do mesmo, apresentamos a seguir o processo de escolha e delimitação do material da pesquisa, observando o que indica Bardin (1977) quando se refere ao método por nós adotado.

4.1.1.1 O método de escolha e os critérios de seleção do material da pesquisa

Após a escolha do objeto de estudo e a definição precisa dos objetivos da pesquisa, passamos à fase de organização da mesma, visando a operacionalizá-la e sistematizá-la. A esse respeito Richardson (2008) afirma que esta é uma etapa flexível da pesquisa, que nos permite eliminar, substituir e introduzir elementos de acordo com o que venha colaborar para uma melhor explicação do fenômeno em estudo.

Com o intuito de operacionalizar e sistematizar a investigação proposta, fizemos um levantamento, junto à Sub-gerência de Estatística da Secretaria de Estado da Educação e Cultura da Paraíba – SEEC/PB, das entidades escolares urbanas da Rede Estadual de Ensino que ofereciam a modalidade ensino médio no município de João Pessoa (ANEXO 1). Posteriormente, em consulta ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE[72], via lista de Distribuição do Livro (ANEXO 2), procedemos a um levantamento das escolas que foram atendidas no ano de 2009 pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM/2009, do Ministério da Educação. De posse destas informações, procuramos o

[72] https://www.fnde.gov.br/pls/simad_fnde/!simad_fnde.sisadweb_1_pc

Núcleo de Material Didático da Gerência Operacional de Assistência ao Estudante da SEEC/PB e junto a esse órgão obtivemos o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – Matemática/2009, no qual contém as resenhas de oito obras de Matemática aprovadas e recomendadas pelo PNLEM do MEC após serem submetidas à avaliação de uma comissão composta por dezenove professores de diversas universidades brasileiras, segundo os critérios contidos na Ficha de Avaliação do PNLEM/2007 (ANEXO 3), e à leitura crítica de outros cinco professores. Esse Catálogo é distribuído às escolas públicas que oferecem o ensino médio, com o propósito de auxiliar o professor na escolha do livro didático de Matemática a ser adotado em sua unidade escolar no triênio 2009/2011, chamando a atenção do mesmo para que adote uma obra que esteja afinada com as características da escola, dos alunos e do contexto educacional em que estão inseridos e que sirva de apoio às suas práticas pedagógicas.

As mencionadas resenhas incluem uma síntese avaliativa contendo uma visão geral das principais características do material didático, os pontos fortes e as principais deficiências apresentadas em cada obra; um sumário que contém informações sobre a forma como a obra está organizada, quanto aos volumes, unidades, capítulos; uma análise da obra, contendo aspectos de correção conceitual, pedagógico-metodológicos, como também uma abordagem da construção do conhecimento científico na obra e sua contribuição para a construção da cidadania do aluno. Por fim, trazem recomendações aos docentes incluindo sugestões sobre como valorizar os aspectos mais vantajosos e como superar as deficiências que as obras apresentam.

De posse dos anexos dois e três, entramos em contato, por telefone, com os coordenadores de 38 escolas estaduais urbanas do município de João Pessoa que ofereciam o ensino médio e que foram atendidas pelo PNLEM no ano de 2009, tendo por fim verificar o título e os autores dos livros de Matemática adotados em cada uma dessas unidades escolares. No decorrer desses contatos, verificamos que seis dessas escolas, embora incluídas na lista de Distribuição do Livro (ANEXO 2), receberam complementação dos livros por elas adotados e escolhidos por meios de catálogos anteriores e que já não mais se configuravam entre as obras apresentadas no Catálogo de Matemática de 2009, que se expõem no quadro a seguir.

Quadro 6 Obras contidas no Catálogo de Matemática do PNLEM/2009 e adotadas pelas escolas de ensino médio do município de João Pessoa-PB

Obra	Autores	Volumes	Editora	Escolas	%
Matemática Ensino Médio	Kátia Stocco Smole Maria Ignez Diniz	3	Saraiva	1	3,1

Matemática Aula por Aula	Benigno Barreto Filho Cláudio Xavier da Silva	3	FTD	0	0
Matemática Completa	José Roberto Bonjorno José Ruy Giovanni	3	FTD	23	71,9
Matemática e Suas Tecnologias	Angel Pandés Rubió Luciana M. T. de Freitas	3	IBEP	0	0
Matemática no Ensino Médio	Marcio Cintra Goulart	3	Scipione	0	0
Matemática	Luiz Roberto Dante	Único	Ática	7	21,9
Matemática	Antônio Nicolau Yossef Elizabeth Soares Vicente Paz Fernandez	Único	Scipione	1	3,1
Matemática	Manoel Paiva	Único	Moderna	0	0
Total das escolas que adotaram livros apresentados no Catálogo Matemática PNLEM 2009				**32**	**100**

Fonte: PNLEM (2009).

Podemos perceber no quadro acima que quatro das oito obras incluídas no Catálogo de Matemática 2009 – **Matemática Ensino Médio**, de Kátia Stocco Smole/Maria Ignez Diniz; **Matemática Completa**, de José Roberto Bonjorno/José Ruy Giovanni; **Matemática**, de Luiz Roberto Dante; e **Matemática**, de Antônio Nicolau Yossef/Elizabeth Soares/Vicente Paz Fernandez – foram escolhidas e adotadas por escolas estaduais do município de João Pessoa. Sendo assim, estas obras passaram a demarcar o universo[73] de documentos de análise, determinados para comporem o material de investigação.

Estando o universo demarcado, passamos à constituição do ***corpus***[74] desta pesquisa.

Segundo Bardin (1977, p. 96), a composição do *corpus* implica, muitas vezes, “escolhas, seleções e regras”, e a representatividade constitui uma delas. Assim considerando e tendo em vista o exposto no quadro acima (Quadro 6), percebemos que, das quatro obras adotadas, duas delas (**Matemática Completa**, de José Roberto Bonjorno/José Ruy Giovanni e **Matemática**, de Luiz Roberto Dante) apresentam-se com maior percentual de escolha, conforme evidenciado no gráfico a seguir.

[73] Gênero de documentos sobre os quais se pode efetuar a análise (BARDIN, 1977).
[74] O *corpus* é o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 1977).

Percentual das obras adotadas, identificadas pelos autores.

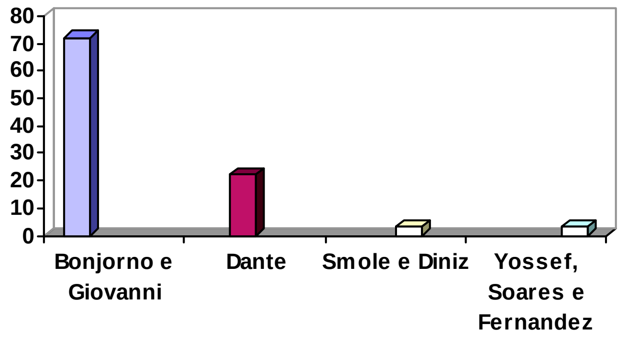


Gráfico 1 - Obras de Matemática adotadas pelas escolas de ensino médio da Rede Estadual de Ensino no município de João Pessoa – PB

Considerando o número de matrículas no ensino médio nas 44 escolas da Rede Estadual de Ensino, no município de João Pessoa, que segundo dados do Censo Escolar 2009 – Educacenso do INEP foi de 22.567 (ANEXO 4); lembrando que grande parte dessas escolas, trinta e duas, receberam livros didáticos de Matemática escolhidos através do Catálogo de Matemática 2009; levando em conta que, das 44 escolas que oferecem o ensino médio, 52,27% adotaram a obra **Matemática Completa** dos autores José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni, e 15,91 % dessas escolas adotaram a obra **Matemática** do autor Luiz Roberto Dante; considerando também a relação biunívoca cada aluno matriculado, um livro didático –, percebemos que grande parte dos alunos do ensino médio, distribuídos em 68,18% das escolas estaduais que oferecem esta modalidade de ensino no município de João Pessoa, está recebendo uma formação matemática influenciada pelas obras supracitadas. Sendo assim, o impacto dessa formação é algo que pode e deve ser futuramente pesquisado.

Diante de tal evidência, e considerando que as obras **Matemática Completa** de José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni e **Matemática** de Luiz Roberto foram adotadas por 93,8% das escolas estaduais de ensino médio no município de João Pessoa atendidas pelo PNLEM em 2009 e que estas escolheram o livro didático de Matemática por meio do Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – Matemática/2009, estas obras passam, então, a demarcar o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos.

4.1.1.2 Descrição das obras selecionadas para análise

Passamos neste ponto a descrever as duas obras selecionadas quanto à composição dos conteúdos e à estrutura na qual estes conteúdos estão distribuídos: unidades, capítulos, seções. Em seguida, passamos ao critério de escolha dos volumes que as constituem, visando à composição do *corpus* de nossa investigação.

A obra **Matemática Completa**, dos autores José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni e publicada pela Editora FTD, é composta por três volumes que contemplam conteúdos de Álgebra, Geometria, análise de funções elementares e noções de Matemática Financeira, de Estatística e de Probabilidade. Os tópicos contidos em cada volume estão ordenados por capítulos que se iniciam com uma situação-problema e finalizam com seções de exercícios que visam a fixar e recapitular as propriedades e operações dos conteúdos trabalhados e estão sistematizados teoricamente por definições exemplificadas, afirmações com ou sem validação e ilustrações de procedimentos, regras e aplicações. Os três volumes da coleção têm a mesma estrutura, começando com breve apresentação dos autores e da obra, seguida do sumário, capítulos divididos em seções, capitulo final com respostas dos exercícios, lista de endereços eletrônicos e livros para leitura e pesquisa, lista de siglas utilizadas na obra e bibliografia. No terceiro volume, encontram-se reproduzidas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com suas respectivas respostas.

Considerando o conteúdo matemático a ser envolvido no estudo e análise de nosso objeto de investigação, explicitado no item (4.1.1.3) seguinte, selecionamos **o volume um** desta coleção, referente à primeira série do ensino médio, **como um dos componentes do *corpus*** desta pesquisa. Neste volume os autores apresentam (p. 3) a obra com a indicação de que a mesma foi criada “pensando em preparar o aluno para a prática da cidadania, respeitando-o como um cidadão ativo, crítico e ético” e de que os textos nele contidos são “interdisciplinares, interessantes, que aguçam a curiosidade do aluno e o levam a refletir sobre a realidade”.

O volume um é composto pelos onze capítulos que se seguem:

- Geometria métrica plana;
- Trigonometria nos triângulos;
- Conjuntos;

- Funções;
- Função polinomial;
- Função modular;
- Função exponencial;
- Função logarítmica;
- Noções de matemática financeira;
- Trigonometria no ciclo;
- Progressões.

Diante de tal composição, já podemos evidenciar a importância do estudo das Funções no ensino da Matemática.

Por sua vez, a obra **Matemática**, de autoria de Luiz Roberto Dante e publicada pela Editora Ática, está estruturada em volume único e inicia com uma breve apresentação do autor e da obra. Quanto a esta última (p. 3), o autor ressalta que, ao elaborá-la, levou em consideração as seguintes afirmações: “A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos”, de Aristóteles e “Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”, de Labochevsky e que o objetivo da mesma é fazer com que o aluno compreenda as idéias básicas da Matemática do ensino médio e, quando necessário, saiba aplicá-la na resolução de problemas do mundo real.

Após a apresentação encontramos o sumário, que distribui os conteúdos matemáticos em oito unidades e trinta e cinco capítulos, ordenadas e denominadas como se segue.

- Álgebra (I): Conjunto e conjuntos numéricos; Funções; Funções afim; Função quadrática; Função modular; Função exponencial; Logaritmo e função logarítmica; Progressões.

- Geometria Plana: Propriedades de figuras geométricas; Semelhança de triângulos; Relação métrica no triangulo retângulo; Polígonos regulares inscritos na circunferência e comprimento da circunferência; Áreas – medidas de superfícies.

- Trigonometria: Trigonometria no triângulo retângulo; Trigonometria – resolução de triângulos quaisquer; Conceitos trigonométricos básicos; Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica; Relações e equações trigonométricas; Transformações trigonométricas; Senóides e os fenômenos periódicos.

- Álgebra (II): Matrizes; Determinantes; Sistemas Lineares; Análise combinatória; Probabilidade.

- Estatística e Matemática Financeira: Noções básicas de estatística; Noções de matemática financeira.

- Geometria Espacial – de posição e métrica: Geometria espacial de posição – uma introdução intuitiva; Poliedros – prismas e pirâmides; Corpos redondos – cilindro, cone e esfera.

- Geometria Analítica: Ponto e reta; Circunferência; Secções cônicas.

- Álgebra (III): Números complexos; Polinômios e equações algébricas.

Cada um desses capítulos está organizado em seções, sendo a primeira invariavelmente iniciada por uma situação-problema. Em seguida, desenvolve-se a teoria “necessária” à análise, visando à possível solução da situação-problema apresentada inicialmente. Cada uma dessas seções contém boxes denominados “Para refletir”, “Desafio em dupla” e “Desafio em equipe” e uma variedade de problemas propostos. Cada capítulo é geralmente finalizado por uma seção de “Leitura”, abordando questões históricas, curiosidades matemáticas, personalidades que contribuíram para o avanço da Matemática, entre outras.

Podemos observar que os capítulos que compõem a unidade Álgebra (I), contidos no **volume único** da obra Matemática, de autoria de Luiz Roberto Dante, e o **volume um** da obra Matemática Completa, dos autores José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni, contemplam conteúdos matemáticos semelhantes, dando maior proeminência ao estudo das Funções. Por este motivo, esses dois volumes constituem **o *corpus*** de nossa investigação.

4.1.1.3 Justificativa e delimitação do conteúdo matemático nas obras escolhidas

Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM, (BRASIL, 2002, p. 40), afirmando que,

> à medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente [...]
> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional

bem como os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais – PCN+ (BRASIL, 2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Ao referirem-se aos conteúdos matemáticos, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM – Brasil, 2006), alertam que, para a escolha dos mesmos, devem-se levar em consideração os diferentes propósitos da formação matemática e da cidadania na educação básica e afirmam que (p. 67),

> ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído, saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

No tocante aos conteúdos básicos da Matemática, estes podem ser agrupados em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade. No entanto, alertamos que o fato de estarem separados em blocos não significa que seus conteúdos devam ser trabalhados isoladamente; pelo contrário, eles podem e devem ser articulados. Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções.

Tendo em vista a importância do conceito de função para a construção do conhecimento matemático, este é abordado em todos os níveis de ensino, quer de maneira implícita quer explicitamente, uma vez que o seu estudo possibilita a compreensão dos mais variados fenômenos, em diversas áreas do conhecimento. A esse respeito, assevera Rêgo (2000, p. 20):

> [...] o conceito de função constitui-se, além disso, de um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, uma vez que inúmeros problemas das Ciências Exatas, da Tecnologia, da Saúde e Ciências Sociais Aplicadas podem ser modelados e estudados utilizando-se funções de uma ou várias variáveis.

De acordo com o PCN+ (BRASIL, 2002), o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar relações entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. A ênfase do seu estudo deve estar no seu conceito e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas suas aplicações, e estas devem ser motivo e contextos para a sua aprendizagem. Nesse mesmo sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, (BRASIL, 2002, p. 43) apontam o fato de que,

> além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Evidenciando ainda mais a importância do conceito de função e de seu estudo, Ardenghi (2008) apresenta um mapeamento das pesquisas realizadas no Brasil, no período de 1970 a 2005, que abordam a temática do ensino e aprendizagem deste conceito. Segundo este autor, nesse período foram produzidas quarenta e três dissertações de mestrado e três teses de doutorado, envolvendo quarenta e cinco pesquisadores (orientadores e co-orientadores) de universidades brasileiras, em todas as regiões do país, abordando vários aspectos de seu estudo – histórico, evolução do conceito, representações, contextualização, metodologia, concepções, entre outros –, o que demonstra a importância desse conceito na formação matemática do aluno.

O conceito de função passou por evoluções acentuadas, e o estudante de Matemática poderá percebê-las ao atentar para os vários refinamentos desse processo evolutivo que acompanham seus progressos escolares, desde os cursos mais elementares até os mais avançados e sofisticados em nível de pós-graduação.

A história do termo função proporciona um exemplo interessante da tendência, evidenciada pelos matemáticos, de generalizar e ampliar conceitos. Segundo Eves (2004), "a palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva". Bernoulii, por volta de 1718, chegou a vê-la como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes. Pouco tempo depois, Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Esta última ideia corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de Matemática tem. Numa tentativa de dar uma definição mais ampla, Dirichlet (1805-1859), de acordo com Eves (2004, p. 661), chegou à seguinte formulação:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis *x* e *y* estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a *x*, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a *y*; então se diz que *y* é uma *função* (unívoca) de *x*. A variável *x*, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável *y*, cujos valores dependem dos valores de *x*, é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função.

A definição acima geralmente é apresentada em um curso inicial de Cálculo; podemos considerá-la muito ampla e que, ademais, não implica a necessidade de acomodar em alguma forma de expressão analítica a relação que há entre *x* e *y*. Observa-se que tal definição acentua a ideia de relação entre dois conjuntos.

A teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Neste sentido, conforme se vê em Eves (2004, p. 661), na teoria dos conjuntos, uma função f é, por definição,

> um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \varepsilon f$, $(a_2, b_2) \varepsilon f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto *A* dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto *B* de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano *A* x *B*. Uma função *f* se diz injetora se, de $(a_1, b_1) \varepsilon f$, $(a_2, b_2) \varepsilon f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se f é uma função e $(a, b) \varepsilon f$, escreve-se $b = f(a)$.

O conceito de função permeia grande parte da Matemática, e desde o início do século XX muitos matemáticos vêm defendendo seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de Matemática. Tal conceito parece representar uma orientação natural e essencial para a seleção e desenvolvimento do material de textos matemáticos. Enfim, é indiscutível que, quanto antes um estudante se familiarize com o conceito de função, tanto melhor para a sua formação matemática.

Diante do exposto e das possibilidades de aplicação, contextualização e conexão que o estudo das **funções** permite dentro do ensino-aprendizagem da Matemática, **delimitamos a este conteúdo matemático o estudo e a análise de nosso objeto de pesquisa.**

4.1.2 Etapas organizadoras da análise

Para se compreender o processo de análise de dados de uma pesquisa de tese, é necessário ter clareza de que se exige do pesquisador a organização e sistematização dos instrumentos e das informações[75]. No entanto, esta assertiva não implica afirmar que tal processo esteja concluído, visto que ele toma acabamento no decorrer da análise. A mencionada exigência ocorre em razão da necessidade de esclarecimento acerca do objeto de estudo e das categorias exigidas para análise.

Dessa forma, a organização do material de análise foi sistematizada em cinco momentos:

1º. Leitura prévia do material selecionado para a pesquisa;

2º. Leitura para conhecimento das questões apresentadas no material;

3º. Leitura intensa das questões apresentadas, objetivando compreensão profunda de enunciados, linguagens, simbologias, tipologias, estruturação e conteúdo matemático contidos nos mesmos;

4º. Verificação dos problemas que possibilitem ao professor, no processo de ensinar, estabelecer conexão com a cidadania;

5º. Definição e seleção dos problemas a serem submetidos à análise.

[75] Na visão de Bardin (1977) as diferentes fases de análise de conteúdo organizam-se em torno de três polos cronológicos: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Diante da diversidade dos problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática escolhidos, e objetivando melhor selecioná-los, tendo em vista o pressuposto central desta investigação, levamos em consideração as classificações apresentadas por Sternberg (2008), Charles e Lester (1984), Ramos et al (2007), Polya (1978) e Resnick & Collins (1996), apontadas no terceiro capítulo do presente trabalho.

Com a análise dos **problemas que envolvem funções** apresentados nos livros didáticos, sob a ótica interpretativa e subjetiva dos investigadores, pretendemos:

- Articular a base teórica da pesquisa com os problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática, visualizando nesta articulação a configuração e análise do objeto de estudo da tese;

- Apresentar a alfabetização matemática, e os conhecimentos provenientes desta, como um instrumento que possibilita aos alunos “ler” uma realidade e nela intervir enquanto cidadãos;

- Analisar a Matemática apresentada nos problemas propostos nos livros didáticos e sua contribuição com vistas à formação e ao exercício da cidadania;

- Situar o conhecimento matemático adquirido pelo aluno no contexto da sala de aula, via Resolução de Problema, como elemento de inclusão política, civil e social;

- Evidenciar a importância do trabalho do professor, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como elemento essencial à construção da cidadania do aluno.

4.2 Categorias de Análise

Após percorrer os momentos de sistematização do material, com o intuito de atender às pretensões elencadas acima, tendo em vista a afirmação central desta investigação, procedemos ao agrupamento dos dados para análise, sendo esta disposta em duas categorias e algumas subcategorias, que surgiram como uma exigência posta pelo objeto de estudo, pelo problema da tese e pela necessidade de explicá-los sob o viés das análises. São elas:

1. **Enunciados dos problemas**
2. **Conteúdo matemático implícito nos problemas**

No próximo capítulo, apresentamos a análise, buscando, com a discussão dos dados mais significativos contidos nos instrumentos, compreender de que maneira a Matemática, via resolução de problemas, pode proporcionar o desenvolvimento de uma formação cidadã nos alunos do ensino médio. Para tanto, fazemos uma discussão sobre as categorias escolhidas e, a partir dos problemas selecionados para serem submetidos à análise, estabeleceremos uma conexão com a formação cidadã.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Este Capítulo trata da análise dos dados da pesquisa. Como apontamos nos Capítulo anterior, fazemos uma breve apresentação das categorias selecionadas; no entanto, vale esclarecer que estas não apareceram *a priori*, para atender a uma "estética didática", mas sim à medida que são chamadas e exigidas no decorrer da análise.

Observamos também que, embora metodologicamente separadas, as categorias e as subcategorias que foram emergindo ao se proceder à sistematização da análise dos dados presentes neste trabalho não são aqui exploradas em caráter insulado. Nem, tampouco, temos a pretensão de esgotá-las. Todavia, dentro dos limites impostos a esta pesquisa, como também dos nossos, a partir de alguns problemas, exemplos e exercícios selecionados nos instrumentos desta investigação, as evidenciamos, entrelaçando-as quando possível, tentando assim estabelecer um diálogo via e com as categorias/subcategorias e posteriormente responder ao questionamento do presente estudo.

5.1 As Categorias de Análise

Analisamos uma multiplicidade totalizando 998 questões matemáticas contidas nos capítulos que abordam conteúdos de funções nos livros didáticos **Matemática Completa** de José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni (577 questões) e **Matemática** de Luiz Roberto Dante (421 questões). Anunciadas tais questões em forma de exercícios, além daquelas inúmeras que se apresentam sob a forma de exemplos que introduzem esses conteúdos, as questões apontaram para a utilização de técnicas de análise categorial. Essas questões, exercícios e exemplos foram congregados em categorias de acordo com as semelhanças e proximidades que apresentavam.

Ressaltamos que, neste trabalho, não estamos analisando livros didáticos, mas sim utilizando-os como instrumentos de análise, sem, contudo, deixar de considerar o exposto no Capítulo anterior a respeito dos mesmos. Assim sendo, e tendo como orientação para a análise o quadro teórico, o objeto estudado e as informações obtidas nos referidos instrumentos, procedemos o agrupamento dos dados para análise, dispondo-os em duas grandes categorias:

1. Enunciados dos problemas
2. Conteúdo matemático implícito nos problemas

A elaboração de tais categorias foi ocorrendo à medida que se deu a compreensão e aprofundamento dos dados. É importante salientar que as categorias aqui elencadas e as subcategorias suscitadas na análise – tais como contextualização, conexões com outras áreas do conhecimento, formação cidadã/cidadania, por meio da resolução de problemas, exercícios resolvidos e as possibilidades deles decorrentes – não foram impostas para responder às indagações da pesquisa, mas constituíram uma exigência do objeto de estudo, do problema da tese e da necessidade de explicá-los sob o viés da análise.

Buscamos, com ela, compreender de que maneira a Matemática, como integrante de uma das áreas do conhecimento que compõem a base nacional comum dos currículos do Ensino Médio, pode contribuir para a concretização de uma formação cidadã preconizada pelas bases legais do ensino brasileiro.

5.1.1 Enunciados dos problemas

A linguagem, se considerada em sua totalidade, apresenta-se sob numerosas formas, e a linguagem matemática constitui uma destas. De acordo com Silva (2003), quando se discute Matemática, é muito comum ouvirmos expressões tais como “a linguagem da Matemática é de difícil compreensão para os alunos”, “a linguagem da Matemática é precisa, formal e rigorosa” ou, ainda, “a Matemática é uma linguagem abstrata”. Sendo esta uma área do saber cujos objetos são abstratos e requerem, para a sua caracterização, definições precisas, é natural que seja rigorosa em inúmeras facetas. Uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que, em alguns casos e em certos momentos históricos, confundiu-se com a própria Matemática.

Diferente da linguagem materna, que é introduzida no cotidiano das crianças desde a mais tenra idade, sobretudo no ambiente familiar, a linguagem matemática, e em especial os seus registros escritos, só é inserida a partir da idade escolar e, de modo geral, em ambientes educacionais formais. Não obstante a distância entre esses momentos em que estas linguagens são introduzidas e as diferentes formas em que são expressas, ambas necessitam e devem ser exercitadas para que seja desenvolvida familiaridade com as mesmas. Tal familiaridade permitirá abrir um canal de comunicação através do qual objetos concretos e abstratos passam a ser revelados e depois compreendidos.

Segundo Menezes (1999), a linguagem matemática, como qualquer outra, possui registros orais e escritos como também apresenta diversos níveis de elaboração.

Evidentemente, a linguagem matemática utilizada pelos “matemáticos profissionais”, por exprimir ideias de alto nível teórico, é mais exigente do que a linguagem matemática utilizada em sala de aula. No entanto, mesmo no contexto da sala de aula de Matemática, com atores sociais plenamente definidos – professores e alunos –, para que o diálogo possa ser estabelecido e a cultura matemática compartilhada, necessariamente essa linguagem precisa ser trabalhada, sem todavia conceder-lhe destaque excessivo a ponto de privilegiar questões puramente formais em detrimento da compreensão dos conteúdos.

A linguagem matemática é possuidora de um conjunto de símbolos próprios, codificados, que se relacionam obedecendo certas regras e que supostamente são comuns a uma determinada comunidade que a utiliza para se comunicar. Não obstante, na situação de sala de aula de Matemática, ela se apresenta de forma híbrida, por meio da composição de elementos da linguagem matemática com elementos da linguagem materna, no nosso caso, o português, e materializa-se por meio de enunciados, definições e proposições.

Entendido como uma sequência de palavras de forma a constituir uma frase, um conjunto de frases ou um pensamento acabado, o enunciado não representa um conteúdo meramente formal, um enunciado é sempre um acontecimento. Ribeiro (2006) considera que o mesmo “demanda uma situação histórica definida, atores sociais plenamente identificados, o compartilhamento de uma mesma cultura e o estabelecimento necessário de um diálogo. Todo enunciado demanda outro a que responde ou outro que o responderá”. Contudo, o que efetivamente identifica um enunciado, segundo o autor em pauta, “é aquilo que ele efetivamente diz, naquele momento, para aquele enunciatário, nas condições específicas em que é produzido e recebido”.

Para existir, o enunciado exige a presença de um enunciador (quem fala, quem escreve) e de um receptor (quem ouve, quem lê). Sendo assim, e levando em consideração as questões contidas nos instrumentos de análise desta pesquisa, podemos entender por enunciador tanto o autor do texto – quanto este, através dos enunciados das questões apresentadas no livro didático, se dirige aos professores e aos alunos –, como também os professores de Matemática – quando estes, no exercício de sua docência, problematizam essas questões, produzindo assim outros enunciados. Em nossa investigação, como centramos nosso levantamento no livro didático e não na prática do professor, foi especialmente o primeiro tipo de enunciador que nela emergiu. Do segundo tratamos em nossas considerações finais.

5.1.2 Tipos de enunciados encontrados

Geralmente, quando nos referimos aos enunciados dos problemas apresentados nos livros-texto de Matemática, o primeiro pensamento que nos vem são as inúmeras expressões matemáticas, permeadas por símbolos, letras e números que, aparentemente, muito pouco nos dizem. Um olhar mais atento aos enunciados das questões encontradas nos livros didáticos aqui selecionados, todavia, permitiu-nos identificar três diferentes modelos de enunciados que explicitamos, exemplificamos e discutimos a seguir.

O primeiro deles pode ser visto nos enunciados em que a linguagem matemática é mais evidente, ou seja, aparece de forma explícita, expressando assim todo o formalismo e simbolismo que ela imprime à Matemática. Simbolismo este que pode comunicar ideias eficazmente, ocultá-las ou esconder a ausência delas (KLINE, 1976). O enunciado da questão que mostramos em seguida, evidenciando elementos da Teoria dos Conjuntos, das Estruturas Algébricas e de Relações e Funções e, assim, trazendo em si as marcas da Matemática Moderna, exemplificando muito bem o modelo de enunciado ao qual ora nos referimos.

Exemplo (1)

10 (UFSM-RS) O domínio da função

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \log_{10}(x^2 - 5x + 6)$, em $\mathbb{R}$, é o subconjunto:

a) $]-\infty, -1[\cup [1, 2[\cup]3, +\infty[$

b) $]-\infty, +\infty[$

c) $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Fonte: Giovanni & Bonjorno (2005, p. 280)

Ao priorizar questões com esse tipo de enunciado, o livro didático de Matemática do Ensino Médio tende a avigorar uma das influências da resolução de problemas no currículo desta disciplina, conforme apontado por Stanic e Kilpatrick (1990), qual seja: os problemas são apresentados como “práticas necessárias para reforçar as habilidades e conceitos diretamente ensinados”, com tendência à formação de alunos especialistas em Matemática quando, de fato, deveriam possibilitar uma formação que capacitasse o discente enquanto cidadão a utilizar esta resolução em contextos e em situações diferentes daqueles nele encontrados.

No entanto, embora pareça paradoxal esta afirmação, é exatamente neste tipo de enunciado que o professor, na sala de aula, pode explorar as conexões internas à própria Matemática, não só exigindo-as enquanto conhecimentos prévios, mas retomando-as, esclarecendo-as ou mesmo apresentando-as quando necessário.

Considerando que "toda pessoa tem direito à educação" e que um percentual significativo de alunos do ensino médio, conforme dados do INAF (2007), encontra-se em um nível rudimentar de alfabetismo, o direito a ter direito de aprender Matemática dos educandos e a capacidade/oportunidade de "saber pensar para saber" intervir dos educadores – não só, mas também – podem ser aqui requeridos. Deste modo, conteúdos matemáticos que possibilitem a compreensão e a resolução de problemas como o apresentado no exemplo acima podem ser retomados e trabalhados, permitindo ao aluno não apenas encontrar a resposta a uma questão matemática – no caso, o domínio de uma função –, mas também, reconectar os saberes inerentes à própria Matemática; explorar e potencializar o senso simbólico necessário à compreensão de questões matemáticas que são apresentadas por meio de enunciados como o do exemplo em foco.

Tendo em vista serem puramente matemáticos os enunciados de problemas como este, é possível neles visualizar parte do que D'Ambrósio (2004) chama de *materacia*, no sentido de que, para resolvê-los, é necessário que os alunos tenham a capacidade de "interpretar e manejar sinais e códigos". Não a tendo, eis uma possibilidade de o professor trabalhar com o propósito de desenvolvê-la, permitindo-lhes, deste modo, não só a compreensão de conteúdos puramente matemáticos em ambientes educacionais formais, mas também transpô-la a outros ambientes e situações nos quais o senso simbólico seja requerido.

Na Matemática, os conceitos já construídos servem de base para outros conceitos, no sentido de que a descoberta de um não invalida o anterior, estabelecendo, desde modo, uma ciência cuja compreensão difere, e muito, do senso comum e simplista que a justifica, erroneamente, por meio de expressões como a que afirma ser "dois mais dois sempre igual a quatro". Na verdade, nem sempre o é, uma vez que tal resultado depende do conjunto no qual se está trabalhando e do modo como a operação, neste caso a adição, for definida. Sendo assim, dois mais dois pode ser, por exemplo, igual a zero, e a Matemática enquanto ciência exata, ancorada na ideologia da certeza, respalda tal resultado. Fora dela, também encontramos somas diferentes de quatro, quando dois mais dois são adicionados. O exemplo do supermercado, oferecido no início de nosso trabalho, valida esta afirmação.

Parte dos conhecimentos da Matemática enquanto ciência construída e alicerçada em si mesma se reflete, também, nos conhecimentos da Matemática enquanto disciplina escolar, quando esta última previamente os seleciona, ordena e organiza, permitindo que os problemas matemáticos apresentados nos livros-texto os entrelacem, dando-lhes sentido, independentemente do momento histórico em que foram validados e do conteúdo matemático que se esteja trabalhando.

Restringindo-nos apenas ao estudo das funções, à primeira vista identificamos nos livros utilizados nesta pesquisa 111 (cento e onze) diferentes conteúdos matemáticos a ele atrelados, sem considerar, contudo, os próprios e inerentes às funções, tais como o domínio, contradomínio e imagem; coeficiente angular; coeficiente linear; taxa de variação; tipos de funções e suas representações gráficas, entre outros. Abaixo, listamos os conteúdos por nós identificados.

Quadro 7 Conteúdos matemáticos articulados ao estudo das funções

- Ângulos - Áreas - Capacidade - Cardinalidade - Catetos e hipotenusa - Centro de uma circunferência - Cilindro - Circunferência - Coeficientes - Comprimento de uma circunferência - Comprimentos - Conjunto solução - Conjunto vazio - Conjuntos finitos e infinitos - Conjuntos numéricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ - Correspondência biunívoca - Diagonal - Discriminante de uma equação do segundo grau - Distância - Distância entre dois pontos - Distância entre dois pontos numa reta real - Distributividade - Divisores - Eixo de simetria - Eixos ortogonais - Elementos geométricos (ponto, reta e plano) - Equações e inequações do primeiro e do segundo grau - Escalas - Espaço - Exponencial	- Fatoração - Formas geométricas - Grandezas diretamente e inversamente proporcionais -Igualdade, diferença e desigualdades - Inequação produto - Inequação quociente - Interseção de conjuntos - Intervalos abertos e fechados - Inverso de um número não nulo - Lado de polígonos regulares - Logaritmos - Massa - Medidas - Módulo ou valor absoluto - Múltiplos - Notação científica - Números ímpares - Números mistos - Números pares - Números positivos e negativos - Operações com os elementos dos conjuntos numéricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ e as propriedades válidas nessas operações - Operações inversas - Origem de uma reta	- Origem de eixos coordenados - Ortogonalidade - Perímetro - Pesos - Polígono convexo - Polígonos regulares e irregulares - Ponto de interseção - Porcentagens - Potência com expoente inteiro - Potência com expoente irracional - Potência com expoente natural - Potência com expoente racional - Potência com expoente real - Potenciação - Prisma - Produto - Produto cartesiano - Progressão aritmética - Progressão geométrica - Proporcionalidade - Propriedades da potenciação - Propriedades envolvendo módulo - Propriedades operatórias dos logaritmos - Radiciação	- Raio - Razão - Região poligonal de um plano - Regra de três - Relação de continência - Relação de pertinência - Reta - Reta real - Retas coincidentes - Retas concorrentes - Retas paralelas - Segmentos de reta - Sequências numéricas - Simetria - Simplificação de expressões - Simplificação de fração - Sistemas de equações do primeiro grau - Sistemas de inequações do primeiro grau - Soma, produto, quociente e diferença - Sucessor de um número - Tempo - teorema de Pitágoras - Trinômio quadrado perfeito - União de conjuntos - Valor máximo -Valor mínimo - Vértice - Volume

A quantidade de conteúdos matemáticos abarcados no ensino de funções nos direciona a observar a instrução matemática de um educando real. Muitas vezes nós, professores, na sala de aula idealizamos um tipo de aluno e apenas para ele nos dirigimos, ou seja, trabalhamos para aquele que chega à escola com todos os conhecimentos matemáticos necessários ao acompanhamento dos conteúdos específicos do ano escolar em que se encontra, os denominados pré-requisitos.

Entendendo a sala de aula de Matemática enquanto espaço público e, como tal, um espaço de ação educativa, o direito de ensinar e de aprender Matemática deve ser nela demandado. Este direito, porém, não se restringe apenas ao ensinar/aprender uma Matemática fragmentada e compartimentalizada por ano de escolaridade ou em momentos pré-estabelecidos e específicos, ou para alunos imaginários. Ao contrário, o ensino-aprendizagem deve ocorrer à medida que determinados conteúdos matemáticos forem sendo “chamados” – mesmo aqueles que por inúmeras circunstâncias não tiverem sido ensinados ou aprendidos – e a percepção de sua ausência (tanto pelo professor quanto pelo aluno) sinalizar a necessidade de serem esses conteúdos ensinados/aprendidos.

O estudo de funções, por mobilizar diversos conteúdos matemáticos, como os elencados no Quadro (7), possibilita que conexões internas sejam estabelecidas. No entanto, estas não devem aparecer apenas para ancorar um novo conteúdo matemático, mas serem trabalhadas sempre que necessário. E isto só é possível se a sala de aula de Matemática, por ser um espaço público, for um espaço de liberdade para se ensinar e aprender.

Os conteúdos implícitos presentes no problema sobre funções, trazido no Exemplo (1) – radiciação; logaritmo e a condição de existência dos mesmos; polinômios; raízes de uma equação do segundo grau; estudo do sinal de uma função quadrática; inequações do 2º grau; inequação-quociente; conjuntos e subconjuntos numéricos, e as diferentes maneiras de representá-los; operação com intervalos, entre outros – podem ser retomados tanto pelos alunos, individualmente ou em grupo no momento da execução da atividade proposta, quanto pelo professor, no momento da correção da mesma.

Conceitos matemáticos, tais como o de infinito, também podem ser explorados a partir dos subconjuntos apresentados como alternativas à resposta da questão do Exemplo (1). Considerando que a função apresentada na questão ora em discussão tem como domínio o subconjunto de números reais expresso pela união de intervalos da alternativa (a) $]-\infty, -3[\cup]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$, partindo de uma resposta como esta, indagações a respeito de conjuntos infinitos podem ser suscitadas.

Considerando a Matemática enquanto ciência dos padrões (DEVLIN, 2005) e nesta, a Topologia como o estudo de “padrões de proximidade e posição”, intuímos que subconjuntos numéricos, mesmo limitados, podem ser infinitos. Utilizando-se a linguagem simbólica matemática, esse conceito pode ser melhor compreendido mostrando-se que o intervalo de números reais $[1, 2[$ – que também pode ser representado pelo subconjunto $\{x \in R : 1 \leq x < 2\} = \{1; ...; 1{,}0003;...; 1.1; ...; 1{,}99996194;...\}$, é composto por infinitos números que são maiores ou igual ao número um, e que se aproximam, mas nunca chegam ao número dois, ou seja, tal conjunto numérico é infinito e limitado, tendo os numerais 1 e 2 como seus limitantes.

De modo semelhante, os subconjuntos infinitos $]-\infty, -1]$ e $]3, +\infty[$, limitados superior e inferiormente, respectivamente, podem ser explorados, e a infinitude de cada um deles, compondo um subconjunto $[1, 2) \ U \ (-\infty, -1] \ U \ (3, +\infty)$ de números reais, também infinito, correspondente ao domínio da função expressa no Exemplo (1) em pauta, possibilita-nos questionamentos tais como: Existem infinitos maiores que outros? Como parte de um conjunto infinito pode ser infinito? Como um conjunto infinito pode ser limitado? Estas perguntas podem ser trazidas à sala de aula de Matemática e exploradas, por exemplo, a partir das unidades métricas, utilizando-se uma régua ou uma fita métrica, fazendo analogias com os múltiplos e submúltiplos dos centímetros, o que facilita a compreensão de um conceito fortemente utilizado não apenas na Matemática e que possibilita “enxergar” tanto o infinitamente pequeno quanto o infinitamente grande.

De maneira antípoda, o segundo modelo de enunciados que identificamos apresenta a linguagem matemática de forma implícita, por meio de palavras que nos remetem à Matemática sem, contudo, utilizar os símbolos tradicionais que a caracterizam. Embora raros nos livros didáticos pesquisados, os enunciados dos exemplos que trazemos a seguir ilustram bem o que mencionamos.

Exemplo (2)

Escreva a expressão matemática correspondente:
A resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta (resistência elétrica).

Fonte: Dante (2009, p. 69)

Exemplo (3)

Prove que, se a soma de dois números positivos é constante, seu produto é o maior possível (máximo) quando eles são iguais.

Fonte: Dante (2009, p. 78)

Os exemplos (2) e (3) evidenciam que a Matemática e a compreensão dos problemas que a envolvem, requerem muito mais que “sentir-se confortável” ao usar símbolos algébricos e “à vontade” lendo-os e interpretando-os. Diante de enunciados como os que aqui se apresentam, o senso simbólico ganha outra conotação. Eles nos colocam diante de problemas matemáticos aos quais, como aponta Polya (1978), não sabemos dar uma resposta de imediato e cuja compreensão implica, também, no entendimento das palavras que os constituem. Este entendimento é fundamental para que a transposição da linguagem materna (o português) para a linguagem matemática (simbólica) possa transcorrer de modo a expressar, corretamente, as ideias matemáticas neles contidos e, assim, possibilitar-se sua resolução.

Os dois últimos exemplos ofercidos mostram-nos, também, dois aspectos importantes: a Matemática enquanto instrumento de aplicação e a Matemática que se constrói a partir de si mesma, o primeiro deles sendo evidenciado no Exemplo (2). Ao relacionar a **resistência** de um fio condutor de energia com o **comprimento** deste fio e a **área** de sua seção reta – ou seja, com a área do círculo de cobre, por exemplo, que fica visível ao cortarmos com um alicate um fio encapado –, através de funções, envolvendo grandezas proporcionais e inversamente proporcionais, o Exemplo apresenta a Matemática enquanto instrumento para outro campo do conhecimento, no caso, a Física.

Quando é usada como ferramenta de aplicação para a modelagem e resolução de problemas de outras áreas do saber, a Matemática é identificada como Matemática Aplicada e se constitui, também, a partir dessas aplicações. A discussão levada a efeito no capítulo dois deste trabalho nos dá indícios desta constituição.

Não obstante essa aplicabilidade, destaca-se outro aspecto: a Matemática em si mesma, que se constrói a partir dela e por ela própria, tendo ainda o privilégio de não ser autodestrutiva. Partindo deste ponto de vista, a existência de problemas matemáticos nos livros didáticos, como o apontado no Exemplo (3), possibilita apresentá-la enquanto ciência, corroborando a consideração de Polya (2007) de que “a Matemática é o único assunto na escola secundária em que o professor pode propor e os estudantes podem resolver problemas em um nível científico. Isto acontece porque a Matemática é mais simples do que outras ciências”. O aspecto hipotético-dedutivo da Matemática, apresentado por meio de uma condicional no enunciado do exemplo aqui discutido, possibilita explorá-la como tal.

A questão do Exemplo (3) é explorada nos conteúdos relativos ao estudo das funções quadráticas[76], cuja demonstração da forma canônica, como também os desdobramentos desta (DANTE 2009, p. 75), é altamente cientifica mas, ao mesmo tempo, perfeitamente compreensível aos alunos do ensino médio, possibilitando-lhes, assim, utilizá-las em questões puramente matemáticas, como a do primeiro exemplo citado. A aplicabilidade das funções quadráticas também se dá na Geometria, na relação entre a quantidade de lados e o número de diagonais de um polígono convexo; na Física, na relação do espaço percorrido por um corpo em queda livre com o tempo; no esporte, na relação da quantidade de partidas de um campeonato (com turno e returno) de futebol com o número de clubes participantes, entre outros identificados nos livros utilizados.

Para além destes dois aspectos da Matemática que destacamos, o fato de uma grandeza física, como a resistência elétrica, aparecer no enunciado de um problema matemático proposto a alunos do primeiro ano do ensino médio (Exemplo (2)), envolvendo, deste modo, um conteúdo matemático próprio a esta série (função linear) com um conteúdo da disciplina Física (resistência de um fio condutor) estudado no último ano deste nível de escolaridade, chamou nossa atenção.

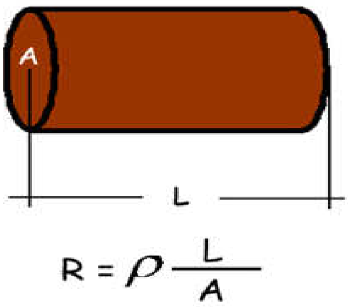
A presença de tal questão no livro didático “exige” que o docente extraia os elementos de saber do contexto do enunciado do problema, para recontextualizá-los no ambiente da sala de aula de Matemática, de modo que a questão possa ficar mais próxima de um aluno do primeiro ano do Ensino Médio do que de um físico ou de um engenheiro elétrico, tendo em vista que ela envolve conceitos da Física tais como resistência (R), intensidade da corrente (I) e diferença de potencial ou tensão (U), com suas respectivas unidades de medidas, *ohms*, *ampères* e *volts*, estabelecendo uma relação matemática entre elas (R x I = U ou R = U/I),

[76] Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais **a, b, c**, com a $\neq$ 0, tal que definida f(x) = ax^2 +bc + c para todo x $\in \mathbb{R}$.

denominada de primeira lei de Ohm[77], a qual nos diz que a razão entre a diferença de potencial e a corrente elétrica em um condutor é igual à resistência elétrica desse condutor, ou seja, R = volt/ampere = ohm.

No entanto, alguns fatores influenciam a resistência elétrica. De acordo com a segunda lei de Ohm, tal resistência depende da geometria do condutor (espessura e comprimento) e do material de que ele é feito; a resistência é diretamente proporcional ao comprimento do condutor e inversamente proporcional a área de seção reta (a espessura do condutor). Veja-se a propósito a figura a seguir.

Figura 7 Segunda lei de Ohm



Fonte: http://educacao.uol.com.br/fisica/ult1700u46.jhtm

Esta figura mostra-nos a segunda lei de Ohm, onde ***L*** representa o comprimento do fio condutor e ***A*** corresponde à área de sua seção reta. Esta equação mostra que o aumento do comprimento do fio resultará no aumento da resistência elétrica e que o aumento da área de sua seção reta implicará na diminuição da resistência elétrica (sendo ρ a resistividade do condutor, que depende do material de que este é feito e de sua espessura). Sendo assim, o enunciado da questão no Exemplo (2) traz uma lei da Física, que pode ser exemplificada por meio de analogias, sem se perder de vista os diferentes conceitos específicos nela envolvidos.

Na tentativa de possibilitar uma melhor compreensão da lei, e fazendo analogia com a corrente de água[78], é fácil concluir que canos grossos permitem uma maior vazão de água que canos finos. Além disso, considerando canos iguais, a água que provém do potencial de uma caixa-d’água mais elevada passa com mais pressão no cano a ela conectado do que no cano

---

[77] Físico alemão Georg Simon Ohm (1789 – 1854) que descobriu duas leis que determinam a resistência elétrica dos condutores. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Simon_Ohm.
[78] Analogia encontrada em http://www.cdcc.usp.br/exper/fundamental/roteiros/ohm.pdf. Acesso em 12/01/2010

que está ligado a uma caixa próxima ao chão. Neste sentido, faz-se a seguinte analogia entre o fluxo de uma caixa-d'água até a torneira e a corrente elétrica:

Circuito de água	Altura da caixa	Cano grosso (ou fino)	Vazão da água
Circuito elétrico	Diferença de potencial ou voltagem	Resistência pequena (ou grande)	Corrente elétrica

Fonte: CDCC/USP – Experimentoteca

Nesta analogia, a afirmação "quanto mais alta a caixa d'água e mais grosso o cano, maior será a vazão" equivale a "quanto maior a diferença de potencial elétrico e menor a resistência, maior será a corrente elétrica". O impacto de tal lei física pode ser percebido, por exemplo, em um simples banho de chuveiro.

Entende-se que, pelo fato de o homem não dominar todo o patrimônio cultural produzido pela humanidade, contextualizar um problema matemático requer do professor uma ação geradora de conhecimento (D'AMBRÓSIO, 2005) que o capacite a explicar, lidar, manejar e entender uma realidade para, então, gerar novos saberes decisivos a novas ações, tanto no ambiente da sala de aula como fora dele. No entanto, como guiam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM, (BRASIL, 2006, p. 81),

> A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola.

Igualmente, essa antecipação de conteúdos deve ser observada não só pelo professor de Matemática, em sua prática docente, mas também pelos autores e avaliadores de livros didáticos (PNLEM), para que os problemas matemáticos que aparecem nesta obras não tragam em seus enunciados conteúdos – tais como "área de uma seção reta" ou uma "lei da Física" – sem que estes tenham sido previamente apresentados.

Ademais, observamos que, enquanto problema de aplicação, pode-se visualizar por meio do exemplo aqui discutido não apenas uma conexão com outras áreas do conhecimento, mas também uma conexão interna à própria Matemática, visto que tal problema traz, em seu enunciado, elementos relacionados aos conteúdos da Álgebra e da Geometria.

Também entendemos, tendo em vista que “contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto” – conforme se vê nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - DCNEM (BRASIL, 1998, p. 42) – que esta relação pode se dar, por exemplo, por meio de enunciados dos problemas matemáticos presentes nos livros didáticos. Em alguns casos, porém, os textos se caracterizam como enunciados ilustrativos que poderiam ser configurados, deste modo, como pretexto, e não como contexto ao problema matemático apresentado.

Tais ilustrações se produzem nos livros didáticos aqui utilizados através das conexões que estes estabelecem com outras áreas do conhecimento e, do ponto de vista do problema matemático, muitas vezes são perfeitamente dispensáveis. Todavia, mesmo como pretextos, essas ilustrações ainda podem ser exploradas de modo a propiciar a construção de conhecimento pelos estudantes na aula de Matemática. No Exemplo (6), destacado na análise, mostraremos este aspecto.

Convém neste ponto ressaltar que esses livros foram avaliados e recomendados pelo PNLEM. A análise dos mesmos, contida no catálogo de Matemática do PNLEM/2009 (BRASIL, 2008), ao referir-se à articulação dos conteúdos no livro **Matemática**, de Luiz Roberto Dante (p. 59), assevera que ela “é executada de forma variada e permeia toda a obra”, afirmação ratificada pelo seguinte trecho: “[...] observa-se, ainda, abundância de articulação entre os conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento, reforçando a proposta de interdisciplinaridade”.

Diante, também, da apresentação do livro didático feita pelo próprio autor (2009, p. 3), destaca-se o trecho em que este afirma: “Priorizamos os exercícios e problemas que envolvem contextualização, interdisciplinaridade e integração entre os temas matemáticos”. Deste modo, parece-nos poder entender que, ao trazer um problema como o do Exemplo (2), associando conteúdos matemáticos do primeiro ano do Ensino Médio a uma lei da Física, que, adequadamente, deveria ser apresentada aos alunos no terceiro ano, o autor o coloca numa perspectiva interdisciplinar.

Neste sentido, consideramos possível que, estabelecendo uma interação com outras áreas do conhecimento por meio dos conteúdos disponibilizados por suas disciplinas (no sentido escolar), parece-nos que os autores de livros didáticos tentem atender, tão somente, a uma “exigência” de interdisciplinaridade que é posta pelas bases legais da educação brasileira, conforme se constata, por exemplo, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – DCNEM (BRASIL, 1998, p. 38), quando elucidam que

> O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de contemplação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos.

Tal exigencia pode ser observada na ficha de avaliação proposta pelo PNLEM, no anexo do catálogo do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – Matemática (BRASIL, 2008, p. 81), ficha esta anexada, também, no presente trabalho (ANEXO 3). Ela aponta como critério de aprovação o fato do livro apresentar relações da Matemática com outras áreas do conhecimento, entre outros aspectos teórico-metodológicos considerados.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (p. 38), afirma-se que "será principalmente na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades [...] que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada aos objetivos do ensino médio", compreendendo que um desses objetivos, preconizados pela LDB (Art. 2º), é o pleno desenvolvimento do educando e o seu preparo para o exercício da cidadania.

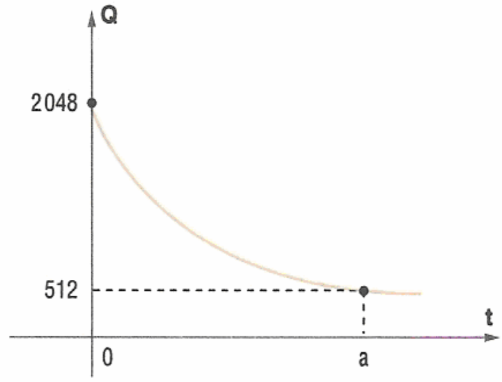
Levando em consideração seu aspecto aplicativo, compreendemos que os objetos do conhecimento matemático – mesmo aqueles selecionados, ordenados e organizados por meio dos livros didáticos –, como por exemplo as funções, constituem eixos integradores e possibilitam abordar a Matemática escolar numa perspectiva interdisciplinar. Na mesma direção, podemos entender as questões apresentadas nesses livros – enunciadas em forma de problemas ou de exercícios propostos – como atividades a serem desenvolvidas quer intra, que extra-sala de aula.

Neste sentido, os enunciados dessas questões devem ir além de uma mera justaposição de disciplinas. Os conteúdos nelas embutidos devem ser significativos e adequados ao nível de escolaridade ao qual se destinam, contemplando situações que se aproximem mais de um aluno do ensino médio e permitindo-lhe, desse modo, não só maior aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas também a compreensão da relação dialógica existente entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento. Sendo assim, é perfeitamente possível que o docente institua uma prática pedagógica interdisciplinar mediante uma atividade de resolução de problemas na sala de aula, mesmo que ela se concretize tão somente por meio de uma contextualização/recontextualização de um problema matemático, tal como o que trouxemos anteriormente.

O terceiro e último tipo de enunciado por nós identificado, constitui a maioria das questões encontradas nos livros didáticos de matemática e apresenta-se por meio de um formato híbrido, composto por elementos da linguagem matemática (equações, gráficos, tabelas...) e elementos da linguagem materna (português), como o enunciado do problema que mostraremos a seguir.

Exemplo (4)

(Vunesp) Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K \cdot 2^{-0,5t}$, em que **K** é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e Q(t) indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t.



Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a.

Fonte: Dante (2009, p. 117)

Em detrimento do tipo de enunciado que caracteriza tal questão, ou seja, seu hibridismo, mas sem deixar de explorá-lo, inicialmente trazemos a discussão que o antecede, acerca de alguns episódios (conteúdo e forma), tendo em vista fazer-se presente esta mesma questão de função exponencial nos dois livros didáticos aqui tomados como instrumentos de análise. Embora, como afirmado anteriormente, não estejamos fazendo uma análise de livros didáticos de Matemática, nem tampouco tenhamos a pretensão de explorar suas definições, tal coincidência chamou nossa atenção.

A função exponencial é apresentada em ambos os livros através de sua definição clássica, ou seja: Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$), determina-se uma função exponencial de base **a** a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = \mathbf{a}^x$ ou $y = \mathbf{a}^x$, definindo-se, também, suas condições de existência.

No livro **Matemática Completa**, de Giovanni & Bonjorno (2005), tal conteúdo é antecedido por seus pré-requisitos básicos (revisão de potenciação; apresentação de equações exponenciais) e finalizado com a lembrança de que "existem fenômenos que podem ser descritos por meio de uma função do tipo exponencial" (p. 234), tais como os juros do dinheiro acumulado, o crescimento ou decrescimento de populações animais e vegetais e a desintegração radiativa, mostrando-se com isto, o caráter aplicativo de tal função.

Em seguida se fornecem três exemplos de funções exponenciais, entre eles a questão do Exemplo (4) demonstrado em nosso texto.

Tal questão é claramente resolvida, expondo-se todos os passos necessários à determinação do que se pede. No entanto, a presença de uma constante K na composição de uma função tipo exponencial $Q(t) = K.\ 2^{-0,5t}$, trazida como exemplo pelos autores neste ponto abordados, aparece como se transpor a representação da função exponencial presente na definição para a representação da função apresentada no exemplo dado ocorresse de uma forma desprovida de qualquer contexto matemático e fosse natural para o aluno. Tal fato vem corroborar a existência de problemas matemáticos cujos enunciados trazem o aspecto aplicativo da Matemática como pretexto e encontrados, facilmente, na obra destes autores.

Na contramão desta, o livro de Dante (2009, p. 117) propõe a mesma questão em forma de exercício. Antes, porém, faz um aprofundamento do estudo da função exponencial, caracterizando-a, de modo a ajustar-se ao nível de escolaridade a que se propõe. Ao mostrar que determinada função transforma uma progressão aritmética[79] (PA) em uma progressão geométrica[80] (PG) prova, assim, que de modo geral esta é uma característica da função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$ e vemos uma aproximação desta última com a notação da função $Q(t) = K.\ 2^{-0,5t}$ trazida no enunciado da questão proposta. Antes de exemplificá-la por meio de suas aplicações, o autor esclarece que (p. 117) "O crescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais. No entanto, de modo geral não se apresenta na forma a^x, mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em $f(x) = K.a^{cx}$ " , sendo C e K essas constantes.

Ao tratar da decomposição de uma substância, expressa por uma lei matemática $Q(t) = K.\ 2^{-0,5t}$, embora não determinando que substância seja essa e a que circunstâncias esteja submetida, fica evidente no exemplo com enunciado híbrido acima que tal decomposição implica uma relação entre quantidade de substância (química) e tempo. Sendo assim,

---

[79] PA é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o terno anterior é constante.

[80] PG é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior.

podemos inferir que substâncias diferentes levam tempos também diferentes para se decompor. Aparece aqui, como sendo muito mais importante do que encontrar o valor de K = 2048 e saber que 512 gramas de determinada substância leva quatro minutos para se decompor, a possibilidade de uma questão matemática trazer à sala de aula, através do enunciado de um problema, reflexões sobre a decomposição de resíduos sólidos, como o lixo produzido na escola, e o tempo que os mesmos levam para de desintegrar, dependendo do meio a que estiverem submetidos.

A título de comparação, trazemos abaixo uma relação de alguns resíduos sólidos, com o tempo que cada um gasta para se desintegrar, implicando na decomposição da substância que constitui cada um desses resíduos, muitos deles facilmente encontrados no ambiente escolar.

Quadro 8 Resíduos sólidos e tempo de desintegração

Resíduo	**Tempo**	**AMBIENTE**			
		Terra		**Água**	
		Resíduo	**Tempo**	**Resíduo**	**Tempo**
- Papel - Pano - Filtro de cigarro - Chiclete - Madeira pintada - Nylon - Plástico - Metal - Borracha - Vidro	- De 3 a 6 meses - De 6 meses a 1 ano - 5 anos - 5 anos - 13 anos - Mais de 30 anos - Mais de 100 anos - Mais de 100 anos - Indeterminado - 1 milhão de anos	- Tampinha de garrafa - Isopor - Garrafa plástica - Pneu - Vidro - Lata - Copo plástico - Linha de nylon - Fralda descartável - Papel - Jornal - Palito de madeira - Filtro de cigarro - Chiclete - Pano	- 150 anos - 8 anos - 400 anos - 600 anos - 4 mil anos - Indeterminado - 50 anos - Mais de 30 anos - De 6 meses a 1 ano - De 3 a 6 meses - 6 meses - 6 meses - 2 anos - 5 anos - De 6 meses a 1 ano	- Camisinha - Pedaço de madeira pintada - Prancha de isopor -Linha de nylon	- 300 anos - 13 anos - 80 anos - 650 anos

Fonte: UFRRJ

Diante de tal reflexão, um problema matemático pode desencadear uma ação, como por exemplo a coleta seletiva dos resíduos produzidos na escola, como também produzir no meio escolar uma discussão sobre a reciclagem do lixo e o papel fundamental que esta assume na preservação do meio ambiente, uma vez que tal ato contribui para a diminuição da extração de recursos naturais, além de diminuir o acúmulo de resíduos nas áreas urbanas das cidades e, por conseguinte, nos rios e nos oceanos, entre outros, trazendo assim benefícios para a sociedade, para a economia e para a natureza.

O tipo de enunciado híbrido permite, também, visualizar/utilizar a Matemática por meio de algumas expressões características à sua linguagem, tais como a representação gráfica, as tabelas, os diagramas e outras. A habilidade em lidar com tais representações, como a representação gráfica da função do Exemplo (4) acima, está em visualizar o conceito de função nela embutido e, a partir de então, estabelecer as conexões necessárias e inerentes a tal representação. Este conceito pode ser construído a partir de várias situações, diferentemente daquelas realidades virtuais apresentadas pelos livros didáticos.

Tendo em vista ser a função uma relação entre grandezas variáveis, o seu conceito pode ser trabalhado em sala de aula do ponto de vista puramente matemático, destacando-se, por exemplo, a análise das relações entre o lado (ℓ) e o perímetro (p) de um quadrado e, posteriormente, propondo uma atividade que estabeleça a relações entre a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e sua área (em cm^2), conforme exemplificado no quadro abaixo, explorando-se os aspectos geométrico e algébrico da Matemática envolvidos na situação: a) O que é dado em função do quê? b) Qual é a variável dependente? c) Qual é a variável independente? d) Qual é a lei que associa a medida do lado com a área? e) Qual é a área de uma região quadrada cujo lado mede 12 cm? f) Qual é a medida do lado da região quadrada cuja área é igual a 169 cm^2?

Medida do lado (em cm)	1	3	4	5,5	10	...	ℓ
Área (em cm^2)	1	9	16	30,25	100	...	ℓ^2

Fonte: Dante (2009, p. 33)

Contudo, esse conceito pode ser construído, por exemplo, a partir de questionamentos que envolvam valores agregados a um determinado produto, em uma situação real, que pode ser trazida para à sala de aula de Matemática, tanto pelo professor como pelo aluno. A título de exemplo, poderíamos questionar em sala de aula: O que faz com que um quilo de uma erva aromática como a manjerona – (*Origanum majorana L. Majoran hortensis M.*)[81], planta herbácea da família das Labiadas, a mesma da hortelã, melissa, orégano, tomilho, alecrim e manjericão –, já produzida no Brasil e utilizada na culinária brasileira, custe quase cem vezes mais que um quilo de feijão? Quais os valores agregados em cada produto? É economicamente atraente, então, plantar manjerona? Evidentemente, todas essas perguntas não necessitam ser respondidas em uma sala de aula de Matemática, no entanto questionamentos dessa natureza podem ser feitos e, a partir deles, conceitos matemáticos serem construídos de forma crítica e significativa.

Ao comprar deliberadamente essas mercadorias, um pacote contendo um quilo de feijão por R$ 3,15 (três reais e quinze centavos) e um envelope contendo cinco gramas de manjerona por R$ 1,49 (um real e quarenta e nove centavos), por curiosidade apresentamos os dois produtos a algumas pessoas em um supermercado (fregueses, caixas, seguranças, gerentes), perguntamos qual dos dois produtos era relativamente mais caro e todas elas responderam ser o feijão. Depois endagamos se elas tinham idéia do preço de cada um dos produtos apresentados. Todas atribuíram um valor aproximado ao valor cobrado pelo supermercado, para os produtos nas quantidades presentes nas embalagens consideradas. E, por último, perguntamos: “E o que é mais caro, um quilo de feijão ou um quilo de manjerona?”, e todas elas responderam “um quilo de feijão”, sem, contudo, levar em consideração o peso, o tamanho da embalagem, o preço cobrado por cada produto e os valores finais quando consideradas as mesmas quantidades dos dois.

Do ponto de vista da aprendizagem, esse problema pode ser utilizado como ponto de partida para discussões matemáticas (SCHOENFELD, 1996), servindo de base para a introdução ao pensamento matemático.


AV. GOV. FLAVIO RIBEIRO COUTINHO, 600 - BESSA
JOAO PESSOA - PB
CNPJ:
15/05/2010 16:23:36 CCF:218150 COO:388711
CUPOM FISCAL
ITEM CODIGO DESCRIÇÃO
QTD. UN. VL.UNIT(R$) ST IAT VL.ITEM(R$)
001 0311014 * MANGER LING CART 5GR
1,0000n x 1,49 T00 A 1,49
002 1663013 *& FEIJAO CAR DULAR1K
1,0000n x 3,15 T00 A 3,15
TOTAL R$ 4,64
Dinheiro 10,00
TROCO R$ 5,36
T00=17,00%
CUPOM Oa:00328 Op:000120 Lj:1284
Operador:Camila
VERSAO:03.03.04 ECF:022 LJ:1284 OPR:
15/05/2010 16:23:56

---

[81] http://cvc.instituto-camoes.pt/bdc/lingua/boletimfilologia/16/boletim16_pag344_352.pdf

Em presença de uma situação como esta, é possível abordar o ensino da Matemática na perspectiva apontada por Schroeder e Lester (1989) – ensinar Matemática através da Resolução de Problemas –, na qual o ensino de determinado tópico começa com uma situação-problema que personifique aspectos-chave desse tópico.

Neste sentido, a partir de um sachê contendo 5 g de manjerona e um pacote de 1 kg de feijão, unidades de massa e suas equivalências podem ser trabalhadas, com a mediação do educador. Ao mostrar que 1 kg corresponde a 1000 gramas e explorando seus múltiplos e submúltiplos junto aos alunos, um quadro de correspondências pode ser construído, facilitando a visualização dos dados e relações.

Peso (em g)	Correspondente (em kg)
1000	1
100 = 1000/10	1/10 = 0,1
10 = 1000/100	1/100 = 0,01
1 = 1000/1000	1/1000 = 0,001

Diante dos dados presentes no quadro, o professor pode perguntar, por exemplo: – Cinco gramas de manjerona correspondem a quantos quilos? Obtendo-se como resposta: 5 x 0,001 = 0,005 kg. Ou seja, 5 gramas de manjerona correspondem a 0,005 quilos. Tendo em vista o preço pago por cinco gramas de manjerona (R$ 1,49) poderíamos perguntar – Quanto custa 1 g de manjerona? Quanto custa 0,005 kg de feijão? Embora simples, a partir destas perguntas é possível ajudar os educandos a construir uma compreensão das ideias e processos matemáticos e envolvê-los no que Lester et al. (1994) chamam de um fazer Matemática, ou seja, criar, conjecturar, explorar, testar e verificar.

Ainda partindo do preço de um pacotinho de 5g de manjerona comprado em um supermercado por R$ 1,49 (um real e quarenta e nove centavos) e considerando o preço de um grama (R$ 0,298), a relação entre peso (em g) e o valor do produto (em R$) também pode ser construída, como se mostra na tabela a seguir.

Peso (g)	Valor (R$)
1	1 x 0,298 = 0,298
2	2 x (0,298) = 0,596
...	...
5	5 x (0,298) = 1,49
...	...
10	10 x (0,298) = 2,98
...	...
100	100 x (0,298) = 29,80
...	....
1000 = 1kg	1000 x (0,298) = 298,00
x	x x (0,298) = 0,298 x

Ao construir essa tabela com a participação dos alunos, o conceito de função, assim como a lei que estabelece a relação entre as grandezas nela envolvidas ($x \rightarrow 0{,}298\,x$), podem ser apreendidos, possibilitando-se aos alunos estabelecerem relações entre outras grandezas expressas por meio de funções, diferentes daquelas encontradas nos problemas do livro didático. Tal procedimento reflete a influência da resolução de problemas como contexto, tal como apontado por Stanic e Kilpatrick (1990), quando estes se referem a ela como um veículo por meio do qual novos conceitos e competências possam ser construídos.

De posse do preço de um quilo de manjerona como sendo de R$ 298,00 (duzentos e noventa e oito reais), é possível ao professor fazer os questionamentos trazidos inicialmente. – Quantos quilos de feijão é possível comprar com o valor de um quilo de manjerona (R$ 298,00)? E a resposta certamente causará surpresa: noventa e quatro quilos e seiscentos gramas de feijão.

A presença dos três modelos de enunciado destacados, nos livros didáticos, vem corroborar a importância das linguagens para a Matemática. Dominar os códigos que as compõem e articulá-los de forma coerente possibilitará que os enunciados por eles constituídos sejam compreendidos e, a partir daí não só é possível responder a uma exigência posta pelos problemas, qual seja, chegar a sua solução, mas, também, identificar e explorar os temas neles abordados; estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento; fazer conexão interna à própria Matemática; problematizar e modelar os enunciados das questões matemáticas.

5.1.3 Assuntos abordados nos enunciados

É comum os livros didáticos de Matemática e, em virtude disso, os professores de Matemática no exercício de sua docência, apresentarem os conteúdos matemáticos por meio de definições, seguidos de exemplos, que têm como intuito elucidar o tema abordado. Após os exemplos, uma série de exercícios é proposta aos alunos, para que estes, por meio de repetição, fixem a matéria em foco.

Esses exemplos apresentam uma estética invejável, indicando um caminho preciso a ser seguido pelos estudantes. Desenvolvidos com o rigor inerente à Matemática, os exemplos contidos nos livros didáticos apresentam, ainda que implicitamente, todas as operações, propriedades e regras necessárias e suficientes ao seu desenvolvimento. Culminado com soluções precisas e isentas de erros, como é comum à ciência Matemática. Tais soluções, geralmente expressas por meio de equações (igualdades), inequações (desigualdades), conjuntos, diagramas, gráficos, tabelas e números, reafirmam a precisão herdada dessa ciência. Posto o modelo, espera-se que os alunos, ao desenvolverem os exercícios propostos, o sigam.

Parece evidente, pelo menos *a priori*, que os enunciados dos problemas contidos nos livros didáticos de Matemática, especialmente aqueles restritos ao limites de nossa pesquisa, só abordam temas específicos e inerentes à própria disciplina, como os encontrados no Exemplo (1), reforçando assim a falsa ideia de que a Matemática é uma área de conhecimento fechada em si mesma e, por tal razão, para domínio de poucos. No entanto, um olhar mais atento perceberá que os enunciados dos problemas matemáticos apontam para um extenso e variado leque de assuntos, cuja observância e compreensão são fundamentais à resolução daqueles.

Ignorá-los faz, muitas vezes, com que o rigor e o formalismo, assim como o esforço e o tempo empregados na resolução do problema percam todo o seu valor, isto é, resolver um problema matemático não implica única e exclusivamente traçar uma estratégia, aplicar propriedades e operações matemáticas e, por fim, apresentar uma fórmula, um conjunto ou um número como sua solução. Muito mais do que isso, os resultados encontrados precisam ser coerentes com o tema abordado nos enunciados dos problemas propostos, ou seja, é necessário que os discentes tenham/desenvolvam, ao resolverem um problema matemático, a habilidade de base denominada pelo NCTM (1988) de “razoabilidade”, no sentido de verificarem, quando obtido um resultado, se ele é “razoável ou não com relação aos dados iniciais do problema”.

Um exemplo que elucida bem esta questão foi evidenciado por Schoenfeld (1996). Ao propor o problema “Um ônibus do exército pode levar 36 soldados. Sendo necessário transportar 1128 soldados para seu campo de treinamento, quantos ônibus são necessários?”, a 45 mil adolescentes de 15 anos em um exame nacional de desempenho em Matemática dos estudantes americanos, observou que: 29% deles responderam que o número de ônibus necessários era “31, com resto 12”; 18% responderam que o número de ônibus necessários era “31”; 23% responderam, corretamente, que o número de ônibus necessário era “32” e 30% fizeram o cálculo incorreto.

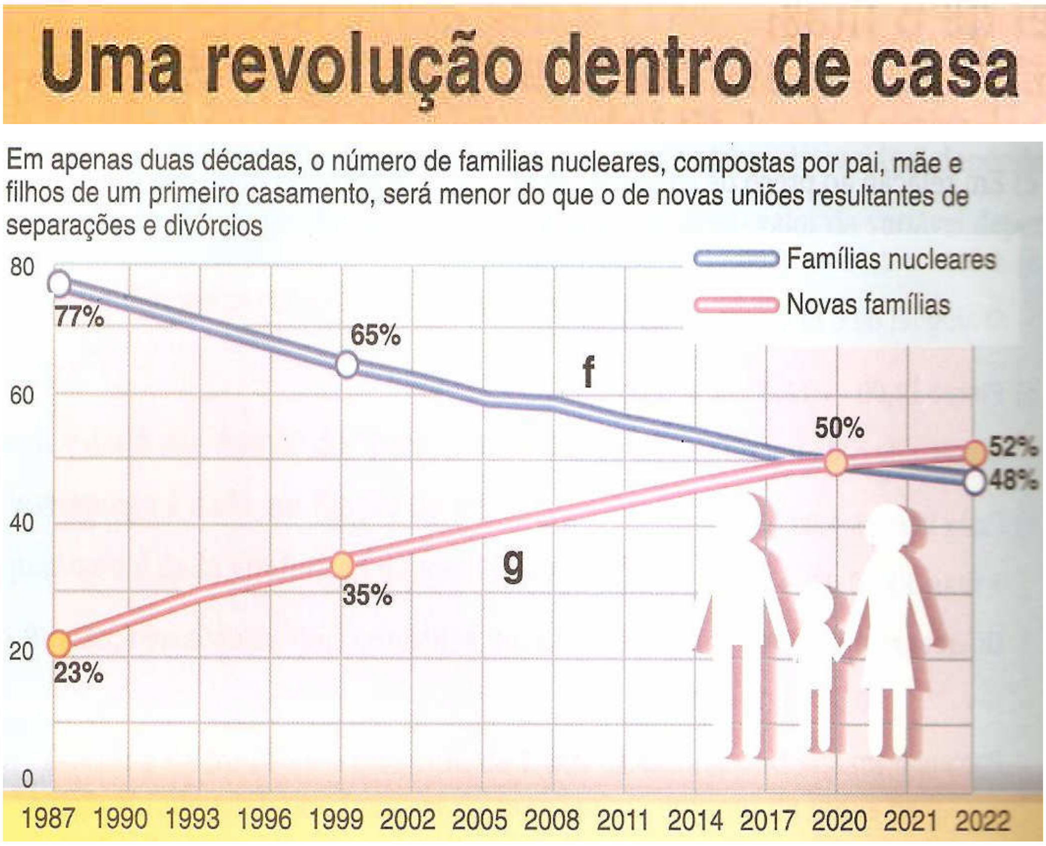
Tal exemplo mostra que, para a resolução de um simples problema matemático, além da inteligência lógico-matemática, necessária à resolução de problemas, outras inteligências devem ser mobilizadas. A simples operação de divisão do número 1128 (de soldados) por 36 (número de lugares do ônibus) não é suficiente para encontrar a solução correta do problema, a saber, 32 ônibus. Isto posto, compreender o tema e o contexto no qual o problema matemático está envolvido é fundamental.

Ao fracionarem a quantidade de ônibus, os alunos trataram o problema como se este demandasse apenas um cálculo formal, demonstrando, deste modo, habilidade com a aritmética, não associando, contudo, o contexto do problema a algo que possa ser vivenciado por eles no mundo real. Afinal, não é comum encontrarmos 1/12 de ônibus circulando pelas ruas das cidades...

Para além de uma resposta coerente aos problemas propostos, os enunciados destes possibilitam ao professor de Matemática, no exercício de sua docência, estabelecer conexões com diversas áreas do conhecimento. Atuando como enunciador e problematizando sobre os enunciados dos exemplos e dos exercícios contidos nos livros-texto, é possível ao docente explorar questões não matemáticas sem, contudo, perder de vista as questões matemáticas.

A extensão dos assuntos tratados nos enunciados dos problemas matemáticos, sobretudo aqueles referentes aos conteúdos de função, dá-se pelo fato de que o seu estudo possibilita a compreensão dos mais variados fenômenos, em diversas áreas do conhecimento, os quais por sua vez são refletidos nos enunciados das questões que abordam tal conteúdo matemático. O exemplo abaixo, ao tratar de uma questão social, vem confirmar esta afirmação.

Exemplo (5)



Fonte: Giovanni & Bonjorno (2005, p. 108)

O exemplo, ao representar uma projeção por meio de um gráfico de duas funções, possibilita trazer à sala de aula de Matemática uma reflexão sobre essas novas reconfigurações familiares, já que a escola é, também, um espaço por elas impactado. A partir da questão anunciada, é possível ressaltar que outros rearranjos familiares, advindos de uma transformação nos modelos e nas relações afetivas direcionadas por vivências plurais e democráticas, constituem, também, famílias nucleares, estas agora diferentes do modelo posto pelo exemplo, que não é mais tido como o modelo único ou padrão referencial e sim constituindo apenas mais uma forma de arranjo familiar. Hoje, na perspectiva das políticas públicas brasileiras, a família é concebida a partir de sua função social, considerando-se a relação entre seus membros e a importância de um para o outro.

Podemos evidenciar dois aspectos da educação suscitados a partir do exemplo aqui apresentado. Ao possibilitar aos alunos lidarem com o tratamento da informação por meio de frequências relativas, associando grandezas e fazendo projeções a partir de um ponto de interseção de duas funções, a educação matemática pode ser vista como instrução (PUIG, 2000), à medida que “prepara os jovens e as jovens para se adaptar e para melhorar o mundo dos saberes culturais, instrumentais e científicos”.

Por outro lado, a compreensão e a interpretação dos dados por ele trazidos, ao possibilitar uma reflexão a respeito de novos rearranjos familiares, evidenciam a educação matemática como formação, quando prepara os jovens e as jovens para se relacionar da melhor maneira com o mundo dos seres humanos: consigo mesmos, com os outros e com o conjunto de regras e normas de convivência que configuram a vida social. Estes dois aspectos podem ser percebidos, também, por meio dos diversos conteúdos matemáticos que permeiam o estudo de função e pela multiplicidade de assuntos abordados nos enunciados dos problemas a ele associados.

Um olhar sobre os exemplos e os exercícios propostos nos livros didáticos aqui tomados como referência de análise, remeteu-nos à primeira vista, a 190 diferentes temas, sem considerarmos, contudo, os específicos e inerentes aos conteúdos próprios da Matemática. Além de abordar questões relacionadas às famílias nucleares e suas novas reconfigurações, outros assuntos, como a mortalidade infantil; reforma agrária; êxodo rural; epidemias; meio ambiente; demografia e privatização, também permeiam os enunciados das questões contidas nesses livros. Evidentemente, um olhar mais apurado e qualificado identificaria muitos outros; não obstante, apresentamos no Quadro 9 (p. 211) a relação de temas por nós identificados.

Ao abordar diferentes assuntos, ligados às mais variadas áreas do conhecimento, via enunciado dos problemas, é possível não apenas trazer a realidade para dentro da sala de aula de Matemática, mas, também, levar a Matemática para uma realidade fora dela. Ao tratar, por exemplo, das funções exponenciais que trazem, por meio de seus problemas, questões associadas ao cálculo de juros cobrados; ao montante recebido em uma aplicação; às taxas aplicadas ou ao capital empregado, estas não se referem apenas a um problema matemático, ilustrativo, configurado nas páginas dos livros didáticos de Matemática e que, quando muito, é associado a uma aplicação em uma caderneta de poupança fictícia que a maioria de nós não tem.

Tal conteúdo matemático pode ser abordado demonstrando, por exemplo, que ao comprarmos um aparelho celular a prazo e em suaves prestações, o capital referente ao produto foi empregado, inicialmente, pelo empresário (proprietário da loja). O montante recebido também será dele. Já os juros pagos mediante as taxas utilizadas, estes caberão ao consumidor, feliz com os dois novos produtos adquiridos: o parelho celular e um novo e robusto carnê que consumirá boa parte de sua renda mensal.

Quadro 9 Assuntos abordados nos enunciados das questões

- Acesso à internet - Acidente nuclear (Chernobyl) - Álcool e direção - Alterações celulares - América Latina - Aplicações financeiras - Área - Área verde por hab – OMS - Astronomia, navegação - Atendimento (por telefone) - Atendimento no setor privado - Atividade física - Balança comercial brasileira - Balanço financeiro - Beijo como transmissor de bactérias - Biopirataria de plantas e animais - Camada de ozônio - Campeonatos esportivos - Câncer de pele - Capacidade de um recipiente - Capacidade máxima de paciente em UTI - Capacidade, memória – informática - Capacidades tecnológicas - Capital financeiro -Carbono 14 - Cartão de crédito - Cartografia - Cérebro humano – líquido cerebral - Cesta básica (crescimento médio mensal) - Colisão de automóveis - Combustíveis fósseis - Comercialização de produtos - Comissão de formatura - Comissões - Como utilizar calculadoras - Composição de tarifas (táxi, luz, água) - Composição salarial (horas extras) - Compra virtual - Confinamento de animais - Construção civil, alojamento, alimentação, serviços técnicos, indústria de transformação - Construções e monumentos históricos - Consumo de água	- Consumo de energia - Contaminação da água - Contratos - Cooperativismo - Corrente elétrica - Cotação de moedas - Crescimento de uma planta - Crescimento médio de uma criança - Crescimento populacional - Curva de aprendizagem - Curva de crescimento (acompanhamento médico) - Custo de produção - Decomposição de um produto - Demografia - Dengue - Depreciação de um bem - Desastres ambientais - Descontos - Desemprego - Desintegração radiativa - Deslocamento de objetos - Desvalorização de um bem - Diferentes maneiras de medir temperatura - Disciplina – comportamento - Divisão celular - Divórcio - Doenças - Eficiência - Eleição - Empréstimos - Energia cinética - Epidemias - Eras, séculos, datas - Excurssões - Êxodo rural - Expectativa de vida ao nascer - Extinção de espécies - Faturamento de uma empresa - Fenômenos naturais - Foguetes com cargas de sais para fazer chover (utilizados na agricultura) - Fonte de dados (referência) - Fotossíntese - Fretamento de avião - Fundo de aplicação - Gasto governamental com educação - Geração de energia elétrica - Guerra nuclear - Idade de um fóssil - Importação de produtos	- Imposto de renda - Indenização - Índice de massa corporal - Inflação - Influência do exercício físico (musculação) no crescimento de criança e adolescente (reduz) - Intensidades de chuva - Intensidades de terremotos - Jornada semanal de trabalho - Juros - Lazer - Lazer (custo) - Localização geográfica - Lógica - Lucro - Lucro de uma empresa - Mapas e escalas - Matemáticos – Arquimedes, Gauss .... - Matriculas escolar - Meia-vida: tempo necessário para que metade de átomos radiativos de um elemento se desintegre - Meio ambiente - Meios de comunicação - Meios de transporte - Menores carentes - Milhas aéreas - Montante - Mortalidade infantil - MST - Núcleos familiares - Obesidade - Órgãos governamentais - Patrimônio genético - Pedágio - Pedra de origem vulcânica - Pesquisa científica - Pesquisa de opinião - Pinturas rupestres - Planos de saúde - Poluentes - Poluição - População de insetos - População rural e urbana - Posse de terra - Poupança - Pragas em lavouras - Pré-história - Preço de serviços prestados - Predador natural - Prevenção de acidentes de trabalho	- Privatização (telefonia, estradas, luz) - Processo de decomposição de uma substância - Produção de bactérias - Profissões - Projéteis e mísseis - Propagandas e anúncios - Propriedade privada - Proteínas em alimentos - Pulverização de lavouras - Qualidade de vida - Qualificação profissional - Questões agrárias - Questões climáticas - Questões espaciais - Questões espaciais, satélites artificiais - Radioatividade - Raios ultravioleta - Ramos de atividade profissional e produção - Recursos naturais renováveis - Refinarias de petróleo - Reflorestamento - Reforma agrária - Relação humana - Reservas internacionais de um país - Reservas mundiais (água, carvão, petróleo, florestas...) - Resistência do ar - Riscos da automedicação - Salários - Saldo devedor - Setor farmacêutico - Setor informal da economia: comércio, serviços, transportes - Surto de dengue - Taxas - Telefonia móvel – crescimento - Tempo, espaço - Torcidas de futebol - Trabalho braçal - Trabalho voluntário - Trajetória - Unidades de medidas, capacidades, massa, potência, decibéis - Vantagens promocionais - Variação de temperatura - Velocidade dos computadores - Vestibular - Viagens

Nesta perspectiva, ao se mostrar uma aplicação de função exponencial à compra de uma mercadoria, chamando a atenção para uma situação que vivenciamos frequentemente, os problemas propostos decorrentes do estudo de tal conteúdo matemático e a solução dos mesmos não ficarão presos somente aos processos de solução e a um resultado numérico fictício mas possibilitarão uma reflexão sobre os atos e as atitudes inerentes à compra de um produto, envolvendo consumidores e vendedores, em que o conhecimento matemático é comumente utilizado como instrumento de poder. O fato de dominá-lo possibilitará, por exemplo, comprarmos um celular e pagarmos por dois, mas, conscientes das alíquotas cobradas e dos juros a pagar, não podermos nos dizer enganados.

Assuntos ligados a diferentes áreas do conhecimento, tais como a economia (balança comercial, reservas internacionais, ...); a política (saúde pública, política educacional, ...); a geologia (terremotos, movimentos tectônicos,...), entre outros, elencados no Apêndice (1), foram identificados a partir dos enunciados das questões trazidas pelo livro didático. Que áreas são essas? Quais são seus campos de atuação? Quais são seus objetos de estudo? Qual o perfil de seus profissionais? Quais as habilidades necessárias para nelas atuar? Qual a importância da Matemática para essas áreas? Qual a contribuição da Matemática para o desenvolvimento delas? Que conhecimentos matemáticos são imprescindíveis para melhor compreendê-las? Estes são alguns dos questionamentos que podem ser suscitados a partir dos enunciados dos problemas propostos.

5.1.4 Conexão com outras áreas do conhecimento

Talvez não tenhamos respostas para todos esses questionamentos, porém, os enunciados por si só já estabelecem uma conexão com essas diversas áreas do conhecimento, quando trazem neles embutida a aplicabilidade da Matemática a cada uma dessas áreas, cabendo ao professor, enquanto enunciador, problematizá-los. A questão que trazemos a seguir, elaborada para o exame vestibular da Universidade Federal do Pará – UFPA e apresentada como um dos exercícios do livro **Matemática Completa** de José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni, será utilizada aqui como um exemplo para essa conexão.

Exemplo (6)

6 (UFPA) Uma das práticas mais prazerosas da relaçao humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. Supondo que o número de bactérias (N) por beijo (b) é determinado pela expressão $\mathbf{N(b) = 500 \cdot 2^b}$, para que o número de bactérias seja de 32 000 você terá de dar:

a) 6 beijos
b) 5 beijos
c) 8 beijos
d) 7 beijos
e) 4 beijos

Fonte: Giovanni & Bonjorno (2005, p. 240)

Percebemos aqui uma questão com enunciado altamente figurativo, em que o primeiro trecho, “Uma das práticas mais prazerosas da relação humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias”, do ponto de vista do problema matemático é perfeitamente dispensável. Aparece como um pretexto ao problema, forjando a ideia de uma questão contextualizada, quer para atender a um propósito do exame vestibular da referida universidade, quer para cumprir uma exigência de contextualização imposta aos autores de livros didáticos pelos critérios oficiais de avaliação.

Embora a resolução de tal questão incida sobre a aplicação de um simples logaritmo, ou seja, calcular o logaritmo de 64 na base 2 ($b = \log_2 64$), a quantidade de bactérias transmitidas por apenas seis beijos é algo que pode e deve ser discutido em sala de aula, inclusive na sala de aula de Matemática, uma vez que assuntos tais como “práticas prazerosas da relação humana” são abordados nos enunciados de suas questões.

Tal “prática prazerosa” nos remete de imediato a um comportamento, sobretudo entre a juventude da contemporaneidade brasileira, que é o “ficar”, no qual se pode beijar várias pessoas, geralmente desconhecidas, em uma mesma “balada”. Segundo Justos (2005, p. 61), o “ficar” é “ um relacionamento afetivo bastante popular entre os adolescentes e caracteriza-se por ser breve, passageiro, imediatista, volátil e descompromissado”.

Resumido a um encontro de apenas um dia, uma noite ou de alguns minutos, implicando assim a troca de muitos beijos e, em decorrência, de muitos vírus e bactérias, as consequências de tal ato, bem como os cuidados necessários para que essa atitude não transforme uma prática prazerosa em futuros dissabores, são assuntos que podem ser trazidos à sala de aula de Matemática a partir do enunciado de uma questão como a do exemplo ora referido, sobretudo porque tal questão é dirigida a alunos do ensino médio, com faixa etária propícia a esse comportamento.

Ao fazer alusão às relações humanas, o enunciado da questão do exemplo dado evoca todo tipo de interação entre indivíduos, inclusive o “ficar”, cuja dinâmica desperta o interesse de diversas ciências, entre elas a Psicologia e as Ciências Sociais. E por manifestar-se não só na relação entre diferentes grupos, mas também, e principalmente, nas relações que os membros de um grupo mantêm entre si, é que esta relação também desperta o nosso interesse.

A dinâmica da sala de aula de Matemática, na maioria das vezes segue, o ritual já descrito anteriormente, ou seja, o professor apresenta o conteúdo através de definições, propriedades e regras, em seguida exemplos perfeitos e infalíveis são exibidos, finalizando com uma lista de exercícios para que as definições, propriedades e regras possam ser aplicadas e dominadas.

Tal domínio, contudo, ao invés de atuar como elemento agregador, ampliando as relações na sala de aula, muitas vezes opera em sentido contrário. Dominar conteúdos matemáticos pode resultar, por exemplo, em isolamento de determinado aluno quando por um lado, sente-se superior aos demais colegas, usando a Matemática como um instrumento de poder (D’AMBRÓSIO, 2005), reforçando o conceito de uma Matemática fria e para o domínio de poucos ou, por outro lado, quando por eles é isolado. O conhecimento muitas vezes afasta as pessoas. Por medo, quando estas se sentem incapazes de aprender determinado conteúdo matemático, e a presença do outro que sabe potencializa esse sentimento de incapacidade, ou por orgulho, quando este as impede de buscar ou trocar conhecimentos junto a um colega, no momento mais capacitado, para não se mostrar inferior a ele.

O isolamento, muitas vezes, reflete a dinâmica da sala de aula de Matemática: a maneira como a disciplina é apresentada; a forma como seus conceitos são construídos e como as atividades são desenvolvidas. Porém, dever-se-ia refletir uma visão de educação – e de uma educação matemática em particular – que, segundo Charlot (2005), suponha uma relação com o outro, e este outro não implique somente um “conjunto de valores, de objetos intelectuais e de práticas” puramente matemáticos, mas, sobretudo, um outro ser humano. Se no processo ensino-aprendizagem este outro ser humano não for visto como um ser relacional, apropriando-se de um patrimônio humano/cultural e constituindo-se num triplo processo de “humanização, de socialização e de singularização”, os envolvidos acabarão se tornando seres isolados, reproduzindo uma prática perpetuadora de uma visão equivocada de uma Matemática acessível a um “ser só”.

As trinta e duas mil bactérias transmitidas por apenas seis singelos beijos nos permitem, também, conectar a Matemática com áreas do infinitamente pequeno, tais como a Microbiologia; área do conhecimento que estuda os microorganismos – formas de vida que, originalmente, só poderiam ser vistas com o auxílio do microscópio, entre elas, os fungos, os vírus, os protozoários, as algas unicelulares, entre outras[82]. A Microbiologia tem como uma de suas atividades lidar com os seres microscópios. Sendo assim, compreender, por exemplo, que um intervalo fechado e limitado, de um determinado conjunto numérico, pode ser infinito é fundamental para que esses minúsculos seres possam ser medidos e contados. E isto, só a Matemática pode proporcionar.

Ao referir-se às bactérias o professor, reconectando saberes, pode trazer à sala de aula as escalas de tamanho, como também as diferentes unidades métricas utilizadas para medi-las, aproximando, assim, a Matemática da Biologia. Mesmo sem perder de vista que o objetivo da questão mostrada no Exemplo (6) acima é encontrar os seis fatídicos beijos transmissores de bactérias, essas unidades e suas equivalências, tal como aparecem na tabela seguinte, podem nesse momento ser trabalhadas, estabelecendo-se não só uma conexão com a Microbiologia, como também uma conexão interna com a própria Matemática.

Unidade Métrica	**Símbolo**	**Equivalência**
Micrômetro	µm	Milésima parte do milímetro
Nanômetro	nm	Milésima parte do micrômetro
Angstrom	Å	Décima parte do nanômetro

Considerando que uma bactéria, tal como o mycoplasma, mede cerca de 0,3 µm, que corresponde a $0{,}3 \times 10^{-6}$ m, essa transformação métrica pode ser retomada, associando, assim, a notação científica estudada no ano anterior – ou seja, nono ano do ensino básico, já que a questão do Exemplo (6) acima é destinada aos alunos do primeiro ano do ensino médio – ao tamanho de uma bactéria pesquisada por cientistas, tais como os que estudam a Microbiologia.

Embora sejam sempre lembrados como causadores de doenças e tidos como "inimigos", os microoganismos também trazem benefícios para os homens e para o planeta, uma vez que eles são importantes, por exemplo, para a produção de antibióticos; para o controle biológico; para a produção de alimentos tais como o iogurtes, queijos, cervejas, pão e

[82] O que é Microbiologia? Disponível em http://www.microbiologia.vet.br/Oqueemicrobiologia.htm. Acesso em 03/01/10.

vinho; para a produção de ácidos e vitaminas, entre outros. No entanto, deixamos aos especialistas e aos profissionais da Educação dessa área a tarefa de aprofundar tal discussão.

Considerando que muitas das questões trazidas nos livros didáticos de Matemática são advindas de exames vestibulares, e a sigla (UFPA) encontrada no enunciado da questão do Exemplo (6) assim a identifica, a partir daí outras conexões podem ser feitas. A presença de 283 dessas questões, entre as 998 que abordam os conteúdos de função nos livros didáticos aqui selecionados, remete-nos de imediato a uma das tendências do ensino médio que é preparar o aluno para o vestibular; contudo, elas podem se mostrar mais reveladoras.

Tais questões não devem ser utilizadas como instrumento de pressão e trabalhadas tão somente para mostrar o nível de exigência dos conteúdos matemáticos utilizados para esse fim. Pelo contrário, através de seus enunciados é plausível mostrar a aplicabilidade da Matemática a diversas áreas do conhecimento, tais como as já destacadas, como também apresentar alguns dos objetos com os quais lidam essas diversas áreas, contribuindo deste modo para a formação de uma cultura mais geral, além de apontar caminhos para futuras escolhas profissionais.

Encontramos, nos enunciados dessas questões, a indicação de 76 diferentes instituições de ensino superior, espalhadas por todas as regiões do país (Apêndice 2). Onde estão localizadas? A que distância nos encontramos delas? Quais os cursos que oferecem? Que modalidade de seleção utilizam para o ingresso? Utilizam o Sistema de Seleção Unificada – SiSU, do MEC? São instituições públicas ou privadas? Empregam alguma política de ação afirmativa, como a cota para negro utilizada pela Universidade de Brasília – UnB ou o vestibular especial para os indígenas, realizado pela Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT? Qual a possibilidade e viabilidade de se escolher, por exemplo, um curso via SiSU, no estado do Acre, ou no Rio Grande do Sul, dependendo de onde esteja localizado o candidato? Estes são apenas alguns dos questionamentos que também podem ser trazidos a para a sala de aula de Matemática, e eles não devem ser ignorados, já que a indicação e as possibilidades para que eles sejam feito, são trazidas nos enunciados de suas questões.

5.1.5 Os enunciados dos problemas matemáticos e a matematização

Tendo em vista que o objetivo maior da Matemática é, conforme aponta Schoenfeld (1996), levar o aluno a pensar matematicamente, possibilitando-lhe assim modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias matemáticas a uma ampla gama de situações, ou seja, matematizar, encontramos também nos livros didáticos aqui utilizados questões que trazem em seus enunciados elementos possibilitadores de tal matematização. Este é o caso, por exemplo, da questão que apresentamos a seguir, extraída do livro **Matemática** de Luiz Roberto Dante.

Apesar da artificialidade do enunciado – a qual não decorre da impossibilidade, mas da improbabilidade de o fato nele relatado ocorrer –, a questão apresenta, segundo Steen (2004, p. 9-10), a Matemática em contexto. Nela, as ferramentas matemáticas são utilizadas em cenários específicos onde o contexto providencia o significado. “Tanto a notação, quanto as estratégias de resolução de problemas e os padrões de desempenho dependem do contexto específico”, (STEEN, 2004, p. 9).

Exemplo (7)

> 13. Um casal de namorados marca um encontro numa ciclovia; ele vem do norte e ela do sul. O rapaz pedala a uma velocidade de 32 km/h e a moça pedala a 24 km/h. No instante em que a distância entre eles é de 28 km, uma abelha, que voa a 20 km/h, parte de um ponto entre os dois até encontrar um deles; então ela volta em direção ao outro e continua nesse vaivém até morrer prensada pelas rodas das bicicletas no momento em que o casal se encontra. Quantos quilômetros voou a abelha?

Fonte: Dante (2009, p. 56)

Se levarmos em consideração o que indica Lester (1983) quando, referindo-se ao contexto específico da Matemática, define problema como uma tarefa na qual o indivíduo se defronta com a necessidade de encontrar uma solução, não possuindo, portanto, um procedimento diretamente acessível que garanta a sua determinação. A questão mostrada acima caracteriza-se, de fato, como autêntico problema matemático.

Matematizar tal problema nos remete de imediato aos processos mentais envolvidos na sua resolução (LESTER, 1983), sendo a conscientização; a compreensão; a análise do(s) objetivo(s); o desenvolvimento do plano; a implementação do plano e a avaliação dos procedimentos e da solução alguns dos passos que os constituem, o que, por sua vez, remete-nos à utilização das múltiplas inteligências preconizadas por Gardner (1995).

Tendo em vista que a inteligência para Gardner é a capacidade de solucionar problemas ou elaborar produtos que são importantes em determinado ambiente ou comunidade cultural, compreender e solucionar questões cujo enunciado assemelha-se ao do problema apresentado no Exemplo (7) requer a união de várias das inteligências.

Embora a resolução desse problema implique, inicialmente, em desvendar o tempo que o casal gastou até se encontrar na ciclovia, a partir do instante em que estavam a 28 km um do outro, neste caso, meia hora, o objetivo da questão, no entanto, consiste em encontrar a distância percorrida por uma infeliz *Apis melífera*, enquanto esta voava em um vaivém, durante esse período, em direção aos seus algozes.

Considerando que a mesma voava em movimento uniforme, a resolução do problema se reduz a multiplicar a velocidade de seu voo, isto é, 20 km/h, pelo tempo em que voou em direção a sua morte; sendo assim, encontramos os dez últimos quilômetros percorridos pela abelha antes de ser fatalmente esmagada pelos pneus das bicicletas de um casal de namorados.

No entanto, para encontrar essa resposta, a matematização, enquanto um misto de processos mentais, entre eles as inteligências múltiplas, faz-se aqui fundamental, e para ilustrar tal combinação descrevemos a seguir alguns dos passos por nós utilizados na tentativa de chegar à solução do problema apresentado.

A inteligência linguística, manifestada por meio da habilidade para lidar com as palavras e as ideias, possibilitou-nos tomar consciência da questão quando, através dela, foram identificados o tipo de enunciado do problema, as linguagens embutidas na questão, os símbolos e códigos utilizados, os dados da questão e o objetivo do problema. Todavia, tal conscientização demandou um “vaivém” no enunciado do problema, até que este se fizesse totalmente claro.

Embora não obedecendo a uma linearidade, observamos que a inteligência espacial também foi aqui requerida, uma vez que, para compreender o problema em questão, mentalizamos a ciclovia, as bicicletas, o casal de namorados, a distância existente entre eles e a abelha voando e sendo esmagada e modelos também foram construídos. Estes modelos nos permitiram compreender que, ao calcular o tempo que o casal gastou pedalando até um determinado ponto da ciclovia, ponto este onde ocorreu o encontro, estaríamos calculando, também, o tempo que a abelha voou até morrer prensada pelas rodas das bicicletas. A partir de então, ao estabelecer ordens e sistematizações, explorar relações, manipular símbolos, realizar operações matemáticas e lidar com uma série de raciocínios, também a inteligência lógico-matemática foi mobilizada.

Evidentemente, trabalhar a Matemática no processo educativo na perspectiva aqui proposta, através de problemas, de maneira contextualizada, valorizando a linguagem matemática e os conteúdos matemáticos e articulando-os com outras áreas do conhecimento, requer uma mudança de prática docente. Nesta perspectiva, o ensino não deve se configurar como um ato de transmitir informações a alunos idealizados e invisíveis na sala de aula. Ao contrário, a escola e a sala de aula de Matemática em particular, devem enxergá-los enquanto sujeitos sociais que se constituem histórica e culturalmente, agindo e pensando no meio social em que estão inseridos.

De que maneira, então, a Matemática, como integrante de uma das áreas do conhecimento que compõem a base nacional comum dos currículos do Ensino Médio, pode colaborar para uma formação que vise à cidadania? Primeiro, ela deve ser trabalhada em um espaço de liberdade e agregador. Não pode haver formação cidadã em um espaço repressor que isola professores e alunos e não enxerga estes como elemento fundamental do processo ensino-aprendizagem.

Segundo, para possibilitar que o educando, no processo ensino-aprendizagem, compreenda e transite pelo ciclo (D'AMBRÓSIO, 2005) "…→ REALIDADE → INDIVÍDUO → AÇÃO → …", entendido como uma formação transformadora que leva a um "saber pensar para saber intervir", ou seja, uma formação cidadã, é imprescindível ao professor, também, percorrer o mesmo caminho. Assim, entendemos que ao contextualizar o conteúdo que se quer trabalhado, fazendo as conexões com a própria Matemática e articulando-o com outras áreas do conhecimento, num processo contínuo de pensar e agir, possibilita-se também ao professor compreender/transitar pelo referido ciclo. Contudo, percebemos que tal desafio/responsabilidade não seja só dele.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora nunca antes tenha imaginado caminhar de modo fácil e tranquilo pelas estradas das ciências humanas, e utilizá-las como atalho ou para desviar dos trilhos de “nossa” ciência exata, também nunca imaginamos tão difícil. E foi! Adentrar o mundo da subjetividade exigiu de nós uma nova maneira de pensar e de agir perante o conhecimento produzido ao longo das eras e a apropriação dele para edificarmos outros. Estes, não necessariamente novos, ou talvez, novos apenas para nós mesmos. E é com esta sensação que chegamos ao término deste trabalho. Contudo, ainda envolto de incertezas, esse velho que se faz novo sinaliza agora para outro começo.

O sentimento que nos permeou durante a produção deste trabalho, expresso aqui por analogia, é que estávamos construindo uma colcha de retalhos alinhavada, ora com pontos mais frouxos, ora mais firmes, e que só se deixa mostrar com o último ponto dado. Eis a colcha! Neste processo de construção fomos, também, nos construindo e nos constituindo por meio dos recortes nela utilizados. No final, a colcha se confunde com o seu feitor, assim, as suas falhas refletem também as nossas.

Abordar a Educação Matemática e a Cidadania por meio da Resolução de Problemas se constituiu um desafio, exigindo-nos compreender conceitos até então inteiramente novos para nós, levando-nos a buscar seus primórdios. Deste modo, o alargamento dos conceitos aqui trazidos, bem como os seus desdobramentos, foi imprescindível à compreensão do nosso objeto de estudo, talvez dispensável ao corpo deste trabalho, mas removê-lo implicaria nos mutilar. No entanto, tudo tem o seu preço. Ao caminhar sobre retas paralelas objetivando um ponto em comum, somos forçados a transformá-las em concorrentes implicando, assim, inclinar pelo menos uma delas e o ângulo de inclinação nem sempre nos permite alcançar o ponto desejado. Contudo, este ponto difere, e muito, do inicial.

Partimos de uma questão mais geral, expressa pela seguinte situação-problema: De que maneira a Matemática, como integrante de uma das áreas do conhecimento que compõem a base nacional comum dos currículos do Ensino Médio pode colaborar para a concretização de uma formação cidadã, preconizada pelas bases legais do ensino brasileiro?

Para chegarmos à compreensão de tal questão foi necessário transitar: por um percurso de construção do conhecimento matemático; acompanhar a evolução do conceito de cidadania e por último, percorrer diferentes abordagens e perspectivas do ensino da Matemática e da Resolução de Problemas.

Compreender o percurso de construção do conhecimento matemático, por meio da ampliação da definição de Matemática, permitiu-nos enxergar a Matemática sob outro prisma: como construção humana. Nessa perspectiva, ela refletiu não só o homem, no decorrer da História, em seu processo de hominização, mais que isto, evidenciou o desenvolvimento de um pensar matemático, expandido e utilizado no tempo e no espaço, expressos por meio de ações e intervenções nos diferentes contextos nos quais estava inserido – social, cultural, político, econômico –, transformando-os e sendo por eles transformado. Tal percurso evidenciou, também, a construção de uma ciência que não se contrapõe a si mesmo, não se invalida, e se consolida a partir de suas descobertas, servindo de base a outras ciências.

Percorrer o caminho da evolução do conceito de cidadania nos possibilitou, também, acompanhar o desenvolvimento do homem – enquanto sujeito histórico, civil, social, político, econômico e cultural –, revelado pelos aspectos de igualdade e de diferença na pluralidade, expressos pelo discurso e pela ação desse homem quando inserido em uma sociedade que, conjuntamente com ele, foi se configurando ao longo do tempo multidimensional e complexa. Nesse sentido, o conceito inicial de cidadania, adstrito a um conjunto de direitos – civis, políticos e sociais – para o bem viver de um cidadão limitado as fronteira de um espaço físico, se expande e ganha outras configurações. O direito a ter direitos está agora associado a uma contrapartida de responsabilidade – público/privado não só com o individual/local, mas também com o coletivo/universal – de todos os seres humanos que habitam um espaço comum, o planeta Terra.

Por meio das diferentes abordagens e perspectivas de Resolução de Problemas, pudemos acompanhar as diferentes tendências pedagógicas, as influências destas no currículo da matemática escolar, bem como o desenvolvimento da Educação Matemática, quando esta trás a Resolução de Problemas como um campo de estudo para a sua área de pesquisa, principalmente depois que ela passou a ser o foco da matemática escolar. Ao ser abordado como uma metodologia de ensino, a Resolução de Problemas apresenta-se como um meio de se ensinar Matemática.

Considerando que nesta perspectiva o problema se apresenta como um ponto de partida para se ensinar Matemática, tendo em vista não apenas a construção de determinados conceitos que possibilitem encontrar uma resposta específica a um determinado problema da área, mas a construção de um campo de conceitos que tomam sentido em um campo de problemas – sociais, políticos, econômicos, culturais entre outros –, entendemos que essa abordagem, por permitir uma ruptura com as práticas tradicionais de ensino-aprendizagem da Matemática; por considerar os conhecimentos prévios dos alunos e as suas possibilidades cognitivas; por consentir a colaboração mútua entre os alunos e alunos-professor; por possibilitar a construção de ideias e processos matemáticos; por possibilitar reflexões sobre os temas que estão inerentes e/ou ligados aos problemas matemáticos permitindo, deste modo, aos alunos e professores irem além da compreensão dos conteúdos matemáticos construídos na sala de aula de Matemática, apresenta-se como uma alternativa plausível a uma formação que vise à cidadania.

Na interseção das trajetórias tratadas, chegamos aos livros didáticos de Matemática, sendo estes entendidos não só como instrumentos que permitem registrar e apresentar conhecimentos matemáticos construídos e elaborados no decorrer das eras, mas como ferramentas que podem possibilitar a análise e a reflexão sobre os acontecimentos remotos e, principalmente, dos fatos atuais que podem ser trazidos à sala de aula de Matemática por meio dos enunciados dos problemas neles contidos. Estes enunciados, por refletirem situações, fatos, ocorrências, artefatos e mentefatos em contextos diferenciados e relacionados a diversos campos do saber humano, possibilitam-nos, também, compreender a trajetória do homem e do mundo por ele construído.

Tendo em vista o caráter da pesquisa aqui realizada, ancoramos este trabalho no campo das possibilidades. É possível a Matemática contribuir para a formação cidadã? Salientamos que sim. Contudo, ressaltamos também que uma formação que vise à cidadania só pode existir em uma esfera pública enquanto espaço de liberdade e de igualdade em direitos e responsabilidades. Só podemos vislumbrar uma formação que colabora à cidadania em um espaço onde vigoram os seus princípios. Nessa perspectiva, defendemos que a Matemática apresentada nos livros didáticos, através de problemas, desde que seja trabalhada no processo educativo de forma contextualizada, valorizando-se a linguagem e o conteúdo matemático, e sendo articulada com outras áreas do conhecimento, tendo assim um caráter interdisciplinar, pode contribuir para a formação cidadã.

Abordar a Resolução de Problemas visando uma conexão com a formação cidadã a partir dos enunciados dos problemas contidos nos livros didáticos nos revelou algumas surpresas. Tendo em vista a nossa formação e atuação profissional como docente em um curso de Licenciatura em Matemática, ao propor um pressuposto à pesquisa, o sentimento inicial era de chegarmos a uma antítese, a qual negávamos o tempo todo. Diante dos enunciados dos problemas, no momento da análise, descobrimos que a antítese era nós mesmos. Nesse momento, “perdemos o chão”. E mais uma vez, nesse processo, o desequilíbrio procurou a equilibração.

A descoberta da quantidade de assuntos abordados nos enunciados dos problemas apresentados nos livros didáticos de Matemática aqui utilizados, e a diversidade de áreas que abrangiam, evidenciou a postura de um professor de Matemática, refletida também em sua prática. Até então, não era só uma busca incessante por uma solução de um problema em detrimento do processo ou de uma metodologia apropriada para abordar um conteúdo matemático. Mais que isso, era uma “cegueira” total em relação ao contexto em que tal problema se apresentava e as possibilidades de explorá-los para além da própria Matemática. O enunciado dos problemas, até então figurativo, aparecia somente para ancorar um dado, uma fórmula ou uma equação matemática. Além deles, não existia mais nada.

Hoje, reconhecemos a importância da especificidade do conhecimento matemático, mas este, por si só, não basta à formação de um ser singular que vive a pluralidade. A própria Matemática – enquanto construção humana – se revela multiforme e mesmo quando restrita ao âmbito disciplinar, o enfoque no ensino desta não deve se limitar apenas a um de seus aspectos, o internalista. Vimos que outras dimensões e possibilidades podem ser exploradas a partir dos enunciados dos problemas trazidos nos livros didáticos de Matemática.

Trabalhar na perspectiva apontada em nossa pesquisa demanda um investimento na formação do professor de Matemática e implica, também, ou talvez principalmente, na necessidade de formação dos formadores do professor de Matemática. O transitar pelos caminhos de outras ciências talvez seja um bom começo. Não nos prenderemos aqui a análise desta questão, mas podemos apontar a crise de identidade dos cursos de Licenciatura em Matemática como um limitador para tal formação. Enquanto estes cursos não forem compreendidos em suas características próprias pelos profissionais que neles atuam, ou seja, como um curso formador de professores de Matemática, a ênfase e a cobrança continuará na especificidade, enquanto a prática exige do professor de Matemática uma formação de cultura mais geral.

Os diversos e variados temas abordados nos enunciados dos problemas matemáticos evidenciam a necessidade de tal investimento. Ao tratar a Matemática na perspectiva aplicativa, relacionando-a a vinte e oito diferentes áreas do conhecimento (Apêndice 1) o livro didático de Matemática, enquanto um produto cultural complexo de comunicação de ideais e acontecimentos variados, permeados pela Matemática, sinaliza a urgência de maior comprometimento com a formação do professor dessa disciplina. Evidentemente que um olhar mais apurado identifica muito mais que isso.

Destacamos a necessidade urgente de trazer outro dinamismo à sala de aula de Matemática, com práticas que: utilizem a resolução de problemas como uma metodologia de ensino; explorem os enunciados das questões matemáticas, problematizando-as e fazendo conexões com outras áreas do conhecimento; tragam a Matemática para uma realidade mais próxima do aluno, tornando-a mais acessível, possibilitando um diálogo via Matemática com e entre os alunos, podendo contribuir para uma formação matemática mais efetiva e colaborar para que as interações no contexto da sala de aula de matemática, quiçá fora dela, sejam significativas.

Para tanto, é imprescindível romper com a perspectiva do individualismo e com a mera reprodução do conhecimento, por meio de um educador depositário, destinado a um educando armazenador. Tal dinamismo só cabe em um espaço de reflexão, de invenção e de trabalho colaborativo, mediado pela prática, e influenciado não só por uma realidade virtual trazida pelos problemas apresentados nos livros didáticos mas, também, por uma realidade natural, social, ambiental, cultural e plural – vivenciada por alunos e professores singulares –, fundamentais para uma formação que visa à cidadania. Ou seja, uma formação matemática que possibilite aos professores e alunos, no processo ensino-aprendizagem compreenderem uma dada realidade, agindo sobre ela.

Embora de maneira incipiente, tentamos apresentar aqui uma possibilidade de explorar os enunciados de problemas matemáticos compreendendo que, a partir deles, outra perspectiva pode ser dada a resolução de problemas, diferente daquela que prioriza a busca incessante, pura e simples, de uma solução. Ao explorá-los, percebemos que quando encontramos a solução de um problema, esta não reflete apenas o resultado de uma questão apresentada pelo livro didático a partir de uma situação virtual e desconectada da realidade, pelo contrário, para chegar até ela, a compreensão de uma linguagem, as conexões com outras áreas do conhecimento, a conexão com a própria Matemática, a matematização e a aplicabilidade da Matemática, foram todas requeridas e estão nela embutidas.

Dentro da perspectiva apresentada, a Matemática pode se tornar mais acessível, mais próxima, mais real, e com possibilidade efetiva de contribuir para uma educação voltada à formação da cidadania.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, P. (edit.), **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1996, p. 61 - 72

ALVES, J. **Educação matemática & exclusão social**: tratamento diferenciado para realidades desiguais. Brasília: Plano Editora, 2002.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 1998.

ANDRE, T. Problem solving and education. In: PHYE, G. D.; ANDRE, T. (edit). **Cognitive classroom learning**: understanding, thinking and problem solving. New York: Academic Press, 1986.

ARDENGHI, M. J. **Ensino aprendizagem do conceito de função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC, 2008.

ARENDT, H. **A condição humana**. 10 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2005.

ARROYO, M. G. Educação e exclusão da cidadania. In: BUFFA, E. et al. **Educação e cidadania**: quem educa o cidadão? São Paulo: Cortez, 2003.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Martins Fontes, 1977.

BERTONI PINTO, N. Marcas históricas da Matemática Moderna no Brasil**.** Curitiba: **Revista Diálogo Educacional** v. 5, n. 16, p. 25-38, set./dez. 2005.

BOBBIO, N. **A Era dos direitos**. Rio de Janeiro: Campus, 1992.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN. S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORRALHO, A. Resolução de problemas: uma perspectiva para abordar o ensino/aprendizagem da matemática. In: BORRALHO, A; BORRÕES, M. (edit.) **Ensino/aprendizagem de matemática**: algumas perspectivas metodológicas. Évora: Universidade de Évora, 1995, p. 9 - 65.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRANCA, Nicholas A. Resolução de Problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYES, R. E. (orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. **Constituição Federativa do Brasil**. Coleção Saraiva de legislação. 42[a] ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB**. Brasília: Presidência da República, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Conselho Nacional de Educação, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+: Ensino Médio.** Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Matemática**: Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM/2009, Matemática. Brasília, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. **Contagem da população 2007**. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

BRAUMANN, C. A. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem matemática.** Coimbra: XI encontro de investigação em educação matemática, 2002. Disponível em http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/Braumann.PDF.

BUFFA. E. Educação e cidadania burguesa. In: BUFFA, E. et al. **Educação e cidadania**: quem educa o cidadão? São Paulo: Cortez, 2003.

CAMBI, F. **História da Pedagogia**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

CANIVEZ, P. **Educar o cidadão?** ensaios e textos. Campinas: Papirus, 1991 (Coleção Filosofar no Presente).

CARVALHO, José M. **Cidadania no Brasil**: o longo caminho, 9 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2007.

CHARLES, R.; LESTER, F. **Teaching problem solving**. London: Edward Arnold Pty Ltd., 1984.

CHARLOT, B. **Relação com o saber, formação de professores e globalização**: questões para a educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. Capacidad de resolución de problemas. In: STEMBERG. R. J. **Las capacidad humanas**: um enfoque desde el processammiento de la información. Barcelona: Labor, 1986, p. 293 - 324.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, 30(3), 549-566, 2004.

COELHO, M. A. V. M. P.; CARVALHO, D. L. **A resolução de problemas**: uma prática pedagógica inovadora? Caxambu: ANPED, GT 19, 2008. Disponível em http://www.ufrrj.br/emanped/ paginas/home.php?id=31.

COMENIUS. **Didática magna**. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006, (Coleção Paidéia)

CORTINA, A. **Ciudadanos del mundo:** hacia uma teoría de la ciudadanía. Madrid: Alianza Editorial, 2005.

CURY, C. R. J. Direito à educação: direito à igualdade, direito à diferença. Scielo Brasil, **Cadernos de Pesquisa** n. 116, Julho/2002.

DALLARI, D. Ser cidadão. **Lua Nova**, São Paulo. 1 (2): 61 – 64, jul./set. 1984.

D'AMBRÓSIO, U. Problem solving: a personal perspective from Brazil. **ZDM Mathematics Education**, Secaucus, NJ, v. 39, p. 515-521, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005 (Coleção tendências em educação matemática).

D'AMBRÓSIO, U. A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF como critério de avaliação de qualidade do ensino de matemática. In: Fonseca M. C. F. R. (org.). **Letramento no Brasil**: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 4 ed. São Paulo: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1993.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação para uma sociedade em transição**. Capinas: Papirus, 1999.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática**, volume único. São Paulo: Ática, 2009.

DEMO, P. Saber Pensar. **Revista ABENO**, São Paulo, vol 5 nr. 1. 2005. Disponível em http://www.abeno.org.br/revista/arquivos_pdf/2005/Abeno_5-1.pdf.

DESCARTES, R. **Discurso ao método**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. São Paulo: Record, 2005.

DIJKSTRA, S. Instructinal design models and the representation of knowledge and skills. **Educational technology**. n. 31, v. l 6, p. 19-26, 1991.

ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, N. T. **Cidadania**: uma questão para a educação. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993.

FERREIRA, E. S. Cidadania e educação matemática. **Educação matemática em revista**. n 1 ano 9. Campinas: SBEM, 2002.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio**: O dicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

FIORENTINI, D. Alguns modo de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké.** Publicação do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Ano 3, n.4, novembro de 1995, p.1-37.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática**: O caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Campinas, 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Unicamp.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas** do ProfMat *99.* Lisboa: APM. 1999.

FUNARI, P. P. A cidadania entre os romanos. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

GADOTTI, M. **Escola cidadã**. São Paulo: Cortez, 2006 (Coleção questões de nossa época).

GADOTTI, M. **Cidadania planetária**: pontos para reflexão. Cuiabá: Conferência Continental das Américas para a Carta da Terra. 1998. Disponível em http://www.paulofreire.org/twiki/pub/Institucional/MoacirGadottiArtigosIt0040/Cidadania_Plenataria_1998.pdf.

GARDNER, H. **Inteligência**: um conceito reformulado. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

GARDNER, H. **Inteligências múltiplas:** a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

GARRETÓN, M. A. Cidadania, integração nacional e educação: ideologia e consenso na América Latina. In: ALBALA-BERTRAND, L. **Cidadania e educação**: rumo a uma prática significativa. Campinas: Papirus, 1999.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**, 2[a] edição renovada. São Paulo: FTD, 2005.

GROSSNICKLE, F. E.; BRUECKNER, L. J. **O ensino da aritmética pela compreensão**. Rio de Janeiro: USAID, 1965.

GUARINELLO, N. L. Cidades-estado na antiguidade clássica. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

GUIMARÃES, H. M. Os novos Standards do NCTM na entrada do século XXI. Lisboa. **Revista Educação Matemática**, n. 84. set/out, 2005.

HOBBES, T. **Leviatã, ou a matéria, formas de poder de um estado eclesiástico e civil**. 2.[a] edição. São Paulo: Ícone, 2000.

HOBSBAWN, E. **Da revolução industrial inglesa ao imperialismo**. 5 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2000.

HOBSBAWN, E. **Era dos extremos**: o breve século XX – 1914-1991. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

HOUAISS, A. et al. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. **O ensino da matemática**: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artemed, 2006.

INAF. **Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional**. Instituto Paulo Montenegro. Disponível em http://www.acaoeducativa.org.br/portal/images/stories/pdfs/inafresultados2007.pdf.

JUSTO. J. S. O “ficar” na adolescência e paradigmas de relacionamento amoroso da contemporaneidade. **Revista do Departamento de Psicologia** - UFF, v. 17 - nº 1, p. 61-77, Jan./Jun. 2005. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/rdpsi/v17n1/v17n1a05.pdf.

KANTOWISKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (orgs.). **A resolução de problema na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

KARLSON, P. **A magia dos números**: a matemática ao alcance de todos. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

KARNAL, L. Estados Unidos, liberdade e cidadania. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

KILPATRICK, J. A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In: SILVER, A. **Teaching and learning mathematical problem solving**: multiple research perspective. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

KLINE, M. **El fracaso de la matematica moderna**. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1976.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Centauro, 2000.

LESTER, F. K. Problem Solving: is it a problem? In: LINDQUIST, M. M. (edit.). **Selected issues in mathematics education**. Berkeley: McCuthan Publishing Co, 1980.

LESTER, F. K. Trends and issues in mathematical problem solving research. In: LESH, R.; LANDAU, M**. Acquisition of Mathematics concepts and proceses**. Academic Press, 1983.

LESTER, F. K. et al. Learning how to teach via problem solving. In: AICHELE, D.; COXFORD, A. F. **Professional development for teachers of mathematics**. Reston: NCTM, 1994.

LESTER, F. K. Mathematical problem solving in the elementary school: some educational and psychological considerations. In: **Mathematical problem solving project**. Bloomington. Mathematics Education Development Center. Indiana University, 1977.

LÉVY, P.; AUTHIER, M. **As árvores de conhecimentos**. 2 ed. São Paulo: Editora Escuta, 2000.

LOCKE, J. **Segundo tratado sobre o governo**. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983 (coleção Os Pensadores).

LORENZATO, S. e VILA, M. C. Século XXI: qual matemática é recomendável? Revista **Zetetiké** n. 1. Campinas: UNICAMP, 1993.

MARSHALL, T. H. **Cidadania, classe social e status**. Rio de Janeiro: ZAHAR Editores, 1967.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: PONTE, J. P. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999.

MENEZES, L. Matemática, linguagem, comunicação. **Portimão** Profmat 1999. Disponível em http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm. Consultado em 12/10/2009.

MONDAINI, M. O respeito aos direitos individuais. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo**. 3ª ed. Porto Alegre: Sulina, 2007.

NCSM. **Basic Mathematical Skills for the 21ST Century**. The National Council of Supervisors of Mathematics, 1988. Disponível em http://www.mathedleadership.org/NCSMPublications/position.html#archive.

NCSM. A Matemática Essencial para o Século XXI. **Educação Matemática**. Lisboa, nº 14, 2º trim. 1990.

NCTM. **Agenda for action:** recomendations for school mathematics of the 1980s. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

NCTM. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NCTM. **Professional standards for teaching mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

NEWELL, A.; SIMON, H. A. **Human problem solving**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1972.

ODÁLIA, N. A liberdade como meta coletiva. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

OSBORNE, A.; KASTEN, M. B. Opiniões sobre a resolução de problemas no currículo para os anos 80: um relatório. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (orgs.) **A resolução de problema na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

OUTHWAITE, T. B. **Dicionário do pensamento social do século XX**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 1996.

PALMA FILHO, J. C. Cidadania e educação. **Caderno de Pesquisa** nº. 104, p 101 a 121, julho de 1998.

PEREIRA, A. L. **Seminários de Resolução de Problemas**. São Paulo: IME USP, 2001. Disponível em http:// www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-artigo-teoria.pdf.

POGGIOLI, L. **Estratégias de resolución de problemas**. Serie enseñando a aprender. Caracas: Polar, 2001. Disponível em http:// www fpolar.org.ve/poggioli/poggio05.htm.

POINCARÉ, H. A investigação matemática. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (edits.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, G. Sobre resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (orgs.). **A resolução de problema na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

PONTE J. P.; BROCARDO J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. A investigação em educação matemática em Portugal: realizações e perspectivas. In: GONZÁLES R. L.; GOMES, B. A.; MACHÍN, M. C.; NIETO, B. L. (edits.). **Investigación em educación matemática** XII. Badajoz: SEIEM, 2008, p. 55-78

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante**, v. 3, n.1, 1994.

PUIG, J. M. et al. **Democracia e participação escolar**. São Paulo: Moderna, 2000.

RAMOS, A. P. et al. **Problemas matemáticos**: caracterização, importância e estratégias de resolução. São Paulo: IME-USP, 2007. Disponível em http://www.ime.usp.br /~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf.

RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função**. Tese. Natal: UFRN, 2000.

REIS, M. M. V.; ZUFFI, E. M. Estudo de um caso de implantação da metodologia de resolução de problemas no ensino médio. Rio Claro: **Revista Bolema**, ano 20, nº 28, p. 113 a 137, 2007.

RESNICK, L; COLLINS, A. Cognición y Aprendizaje. **En Anuario Psicología**. Nº 69, p. 189-197. Barcelona: Grafiques 92, 1996.

RIBEIRO, L. F. O conceito de linguagem em Bakhtin. **Revista Brasil**, UFF. Rio de Janeiro: 2006. Disponível em http://revistabrasil.org/revista/artigos/crise.htm.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 2008.

RODRIGUÉZ, R. J. **Tácticas y estratégias para la resolución de problemas**. San José: Universidad de Costa Rica, 1996. Disponível em http: //cariari.ucr.ac.cr/~rodolfor.

RUBINSTEIN, M. F. **Patterns of problem solving**. Englewood Cliffs: Preintice-Hall, 1975.

SAES, D. A. M. Cidadania e capitalismo: uma crítica à concepção liberal de cidadania. **Revista crítica marxista**. Campinas, volume 16, p.9 - 38, março 2003.

SAFRA, G. **Perspectivas ontológicas da condição humana**. São Paulo: Sobornost, 2005 (vídeoconferência).

SANTOS, B. P. **Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrósio**: contribuições para a formação do professor de matemática no Brasil. Tese de doutorado. São Paulo: USP, 2007.

SARDUY, A. F. **Bases psicopedagógicas de la enseñanza de La solución de problemas matemáticos em la escuela primaria** . La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1987.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. New York: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. H. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problema? In: ABRANTES, P.; LEAL. L. C.; PONTE, P. (edit.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1996, p. 61 - 72.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970 – 2008: research and theory, practice e politics. Secaucus, NJ: **ZDM Mathematics Education**, v. 39, p. 537-551, 2007.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (edits.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston. VA: NCTM, 1989.

SEBASTIANI, E. Como usar a história da matemática na construção de uma educação matemática com significado. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 3., 1999, Vitória. **Anais.** p. 22-23.

SILVA. A. C. **Matemática e literatura infantil**: um estudo sobre a formação do conceito de multiplicação. Dissertação de Mestrado. João Pessoa: PPGE/UFPB, 2003.

SILVA JR., C. G.; RÉGINIER, Jean-Claude. **Livro didático e suas funções para o professor de matemática no Brasil e na França**. 2 SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife, 2008.

SINGER, P. A cidadania para todos. In: PINSKY, J.; PINSKY, C. B. (orgs.). **História da cidadania**. São Paulo: Contexto, 2005.

SKOVSMOSE, O. Matemática crítica. **Revista Presença Pedagógica** nº 83, vol. 14, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Revista Bolema** nº 14, 2000.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Vol. 3. Reston: NCTM, 1990.

STEEN, L. A. Argumento em favor da alfabetização quantitativa. In: MOURA NETO, F. D. **A matemática que faz bem à sociedade**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. UFBA, 2004.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. 4 ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TRIGO, M. S. **Principios y método de la resolución de problemas em el aprendizage de las matemáticas**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

UNESCO. Declaração mundial sobre educação para todos: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien: UNESCO, 1990. Disponível em http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. Revista **Zetetiké –** Cempem- FE. Unicamp, v. 16, n. 30, jul./dez. 2008.

VASCONCELOS, G. C.; BRENNAND, E. G. G. **Howard Gardner e o potencial múltiplo da inteligência**. João Pessoa; Editora Universitária - UFPB, 2005.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artemed, 2006.

WALLAS, G. **The art of thought**. New York: Harcout, Brace and World, 1926.

WALLE, J. A. V. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematic). **The international journal on Mathematics Education**. Secaucus, NJ: Springe v. 39, março 2007.

ANEXOS

Anexo 1: Entidades escolares urbanas da Rede Estadual de Ensino no município de João Pessoa - PB

GOVERNO DA PARAÍBA

Secretaria de Estado da Educação e Cultura
Subgerência de Estatística

Ensino Médio por Entidade Escolar no Município de João Pessoa

Rede Estadual	Entidade	Endereço	Nº	Bairro	Telefone	Localização
	CAIC DAMASIO FRANCA	MARGINAL LESTE OESTE	S/N	MANGABEIRA I	32185992	URBANA
	CENATED CENTRO ESTADUAL DE ARTE DO ENS FUND MEDIO	AV DOM PEDRO I	849	CENTRO	32142923	URBANA
	CENTRO EST EXP DE ENS A SESQUICENTENARIO	RUA ORESTES LISBOA		CONJ PEDRO GONDIM	32447870	URBANA
	CENTRO PROFIS DEP ANTONIO CABRAL	RUA AVELINA DOS SANTOS	SN	CONJ VALENTINA FIGUEIREDO II	32185365	URBANA
	CONEGO LUIZ GONZAGA DE OLIVEIRA	RUA JANDUI DANTAS	S/N	MANGABEIRA I	32391505	URBANA
	E E DE E F E M MONSENHOR PEDRO ANÍSIO BEZERRA DANTAS	RUA GIL FURTADO	S/N	BAIRRO DOS IPES	32187276	URBANA
	EEEF PROF CELESTIN MALZAC	RUA ZENAIDE BRAZILINO	SN	VALENTINA FIGUEIREDO		URBANA
	EEEFM COMP LUIS RAMALHO	R ALFREDO FERREIRA ROCHA	SN	CONJ MANGABEIRA I	32139111	URBANA
	EEEFM DAURA SANTIAGO RANGEL	RUA BENICIO DE OLIVEIRA LIMA	S/N	JOSÉ AMÉRICO	32319163	URBANA
	EEEFM ESCRITOR HORACIO DE ALMEIDA	RUA DURVAL COUTINHO	S/N	ALTO DO MATEUS		URBANA
	EEEFM ESCRITOR JOSE LINS DO REGO	R HORACIO TRAJANO DE OLIVEIRA	S/N	CRISTO REDENTOR	32184250	URBANA
	EEEFM FERNANDO MOURA CUNHA LIMA	R CEL DR FRANCISCO DE ASSIS VELOSO	S/N	MANGABEIRA VII	32139217	URBANA
	EEEFM FRANCISCA A CUNHA	RUA LUIS GONZAGA GOMES VIEIRA	700	BANCARIOS	32355083	URBANA
	EEEFM JOAO ROBERTO BORGES DE SOUZA	RUA OSORIO MILANEZ FILHO	SN	MANGABEIRA II		URBANA
	EEEFM LUZIA SIMOES BARTOLLINI	RUA RADIALISTA GERALDO CAMPOS	SN	JARDIM PLANALTO	32337137	URBANA
	EEEFM PADRE HILDON BANDEIRA	RUA CAETANO FILGUEIRAS		TORRE	32443631	URBANA
	EEEFM PREF OSVALDO PESSOA	RUA PROFESSOR JOSE HOLMES	S/Nº	CJ ERNANI SATYRO		URBANA
	EEEFM PRESIDENTE COSTA E SILVA	RUA HORTENCIO RIBEIRO DE LUNA	S/N	COSTA E SILVA	32142728	URBANA
	EEEFM PRESIDENTE MEDICI	AV CONEGO FRANCISCO LIMA		CASTELO BRANCO III	32444354	URBANA
	EEEFM PROF OLIVINA OLIVIA CARNEIRO DA CUNHA	AV DUARTE DA SILVEIRA	450	CENTRO	32184240	URBANA
	EEEFM PROF P A CAMINHA	RUA FREI MARTINHO	355	JAGUARIBE	32184344	URBANA
	EEEFM PROFA DEBORA DUARTE	RUA ADRISIO MOTA DE SOUZA	34	FUNCIONARIOS II	32335077	URBANA
	EEEFM PROFESSOR LUIZ GONZAGA DE ALBUQUERQUE BURITY	AV MONS WALFREDO LEAL	440	TAMBIA	32412207	URBANA
	EEEFM PROFESSORA MARIA JACY COSTA	RUA DRAUZIO FERRE	S/N	MANGABEIRA II		URBANA
	EEEFM RAUL MACHADO	RUA CARNEIRO DE CAMPOS	S/N	ILHA DO BISPO	32418839	URBANA
	EEEFM SEVERINO DIAS DE OLIVEIRA MESTRE SIVUCA	RUA VIA LOCAL	87	CIDADE VERDE MANGABEIRA VIII	32387146	URBANA
	EEEIEF DOM JOSE MARIA PIRES	RUA DAS ROSAS - CONJ. PADRE IBIAPINA	S/N	B. DAS INDÚSTRIAS	32124518	URBANA

Fonte: MEC/INEP/Subgerência de Estatística-SEEC/PB

GOVERNO DA PARAÍBA

Secretaria de Estado da Educação e Cultura
Subgerência de Estatística

Ensino Médio por Entidade Escolar no Município de João Pessoa

Rede Estadual	Entidade	Endereço	Nº	Bairro	Telefone	Localização
	EEEIEF PROF OLIVIO PINTO	RUA ULISSES ALVES PEQUENO	S/N	VALENTINA		URBANA
	EEEIEFM ALICE CARNEIRO	AV SAPE, 1 ANDAR	S/Nº	MANAIRA	32262295	URBANA
	EEEIEFM CÔNEGO NICODEMOS NEVES	PRACA DR LAURO WANDERLEY	S/N	CID FUNCIONARIOS		URBANA
	EEEIF PADRE ROMA	R PROF EMILIO A CHAVES	S/N	ALTIPLANO	32521029	URBANA
	EEEIFM DOMINGOS JOSE DA PAIXAO	RUA DOMINGOS JOSE DA PAIXAO	SN	MUSSU MAGRO		URBANA
	EEEIFM JOSE DO PATROCINIO	RUA ANTONIO CORREIA DA COSTA	S/N	CONJ FUNCIONARIOS II	32334325	URBANA
	EEEM PROFª URSULA LIANZA	AV MONSENHOR WALFREDO LEAL	476	TAMBIA		URBANA
	EEEM PROFº MATHEUS AUGUSTO DE OLIVEIRA	AVENIDA MINAS GERAIS	461	DOS ESTADOS		URBANA
	ESC NOR EST PROFA M DO CARMO DE MIRANDA	R CEL JOAO LUIZ RIBEIRO MORAIS	279	JAGUARIBE	32227378	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL 1 E 2 GRAUS PROFESSOR RAUL CORDULA	JUAREZ TAVORA	3000	TORRE	32243678	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO PAPA PAULO VI	JOSE TAVARES	SN	CRUZ DAS ARMAS	32336520	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO CÔNEGO FRANCISCO GOMES LIMA	R DEPUTADO PETRONIO FIGUEIREDO	S/N	CJ ERNESTO GEISEL	32313429	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO PROFESSORA LILIOSA DE PAIVA LEITE	AV DOM BOSCO	SN	CRISTO REDENTOR	32186725	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO TENENTE LUCENA	AV MARIA ESTER MESQUITA	S/N	BAIRRO DOS IPES	32446842	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL GONÇALVES DIAS	RUA HUMBERTO PAIVA DE CARVALHO	S/Nº	CRISTO REDENTOR	32185188	URBANA
	INST DE EDUCACAO DA PARAIBA	R CAMILO DE HOLANDA, 1.ANDAR	S/N	CENTRO	2184192	URBANA
	LYCEU PARAIBANO	AV GETULIO VARGAS	S/N	CENTRO	32184209	URBANA
Total Geral						

Fonte: MEC/INEP/Subgerência de Estatística-SEEC/PB

Fonte: MEC/INEP/Subgerência de Estatística-SEEC/PB

Pág.: 2 - 2

Anexo 2: Lista de Distribuição do Livro

FNDE - CONSULTA PNLD DISTRIBUIÇÃO Page 1 of 2

X

Distribuição do Livro

Selecione o Ano, UF, Programa e Município (e o tipo da Consulta).

ANO: 2009 PROGRAMA: PNLEM

ESFERA: TODAS LOCALIZAÇÃO: TODAS

CRITÉRIO: TODOS

UF: PB MUNICÍPIO: JOAO PESSOA

CÓDIGO: ENTIDADE:

O nome da ENTIDADE é opcional. Para facilitar a pesquisa, digite código ou parte do nome da ENTIDADE.

Pesquisar | Limpar | Sair | Criterio de Atendimento

Cód. Escola	Nome da Entidade	Esfera Administrativa	Localização
25092340	CAIC DAMASIO FRANCA	ESTADUAL	URBANA
25138200	CENATED CENTRO ESTADUAL DE ARTE DO ENS FUND MEDIO	ESTADUAL	URBANA
25092839	CENTRO EST EXP DE ENS A SESQUICENTENARIO	ESTADUAL	URBANA
25092871	CENTRO PROFIS DEP ANTONIO CABRAL	ESTADUAL	URBANA
25093878	CONEGO LUIZ GONZAGA DE OLIVEIRA	ESTADUAL	URBANA
25094637	E E DE E F E M MONSENHOR PEDRO ANISIO BEZERRA DANTAS	ESTADUAL	URBANA
25123696	EEEEFM BENEDITA TARGINO MARANHA	ESTADUAL	URBANA
25094726	EEEF PROF CELESTIN MALZAC	ESTADUAL	URBANA
25093835	EEEFM COMP LUIS RAMALHO	ESTADUAL	URBANA
25093932	EEEFM DAURA SANTIAGO RANGEL	ESTADUAL	URBANA
25094130	EEEFM ESCRITOR HORACIO DE ALMEIDA	ESTADUAL	URBANA
25094157	EEEFM ESCRITOR JOSE LINS DO REGO	ESTADUAL	URBANA
25094122	EEEFM FERNANDO MOURA CUNHA LIMA	ESTADUAL	URBANA
25093886	EEEFM FRANCISCA A CUNHA	ESTADUAL	URBANA
25094106	EEEFM LUZIA SIMOES BARTOLLINI	ESTADUAL	URBANA
25094688	EEEFM PADRE HILDON BANDEIRA	ESTADUAL	URBANA
25095056	EEEFM PREF OSVALDO PESSOA	ESTADUAL	URBANA
25094033	EEEFM PRESIDENTE COSTA E SILVA	ESTADUAL	URBANA
25094190	EEEFM PRESIDENTE MEDICI	ESTADUAL	URBANA
25094050	EEEFM PROF LUIZ GONZAGA DE ALBUQUERQUE BURITY	ESTADUAL	URBANA
25093959	EEEFM PROF OLIVINA OLIVIA CARNEIRO DA CUNHA	ESTADUAL	URBANA
25093894	EEEFM PROF P A CAMINHA	ESTADUAL	URBANA
25093860	EEEFM RAUL MACHADO	ESTADUAL	URBANA
25094203	EEEIEF DOM JOSE MARIA PIRES	ESTADUAL	URBANA
25094114	EEEIEFM ALICE CARNEIRO	ESTADUAL	URBANA
25093975	EEEIEFM CONEGO NICODEMOS NEVES	ESTADUAL	URBANA
25095080	EEEIF PADRE ROMA	ESTADUAL	URBANA
25094432	EEEIFM DOMINGOS JOSE DA PAIXAO	ESTADUAL	URBANA
25094211	EEEIFM JOSE DO PATROCINIO	ESTADUAL	URBANA
25094076	EEEM PROF? MATHEUS AUGUSTO DE OLIVEIRA	ESTADUAL	URBANA
25095048	EEEM PROF? URSULA LIANZA	ESTADUAL	URBANA
25096702	ESC NOR EST PROFA M DO CARMO DE MIRANDA	ESTADUAL	URBANA
25094181	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO PAPA PAULO VI	ESTADUAL	URBANA
	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL		

25093851	E MEDIO PROFESSORA LIL	ESTADUAL	URBANA
25094025	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL TENENTE LUCENA	ESTADUAL	URBANA
25093916	ESCOLA ESTADUAL 1 E 2 GRAUS PROFESSOR RAUL CORDULA	ESTADUAL	URBANA
25097725	INST DE EDUCACAO DA PARAIBA	ESTADUAL	URBANA
25098357	LYCEU PARAIBANO	ESTADUAL	URBANA
	SECRETARIA DE EDUCACAO DO ESTADO DA PARAIBA	ESTADUAL	URBANA
25096850	CENTRO FEDERAL DE EDUCAC?O TECNOLOGICA DA PARAIBA	FEDERAL	URBANA

TOTAL DE REGISTROS: **40**

Anexo 3: Ficha de Avaliação do PNLEM

PNLEM / 2007 – FICHA DE AVALIAÇÃO

77

MATEMÁTICA

Código do livro

Código da coleção

Código do avaliador

ANEXO

CATÁLOGO DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO PARA O ENSINO MÉDIO . MATEMÁTICA

DESCRIÇÃO DA COLEÇÃO

Estrutura da obra, sumário dos conteúdos

A - CRITÉRIOS ELIMINATÓRIOS [1]

1 Existem conceitos formulados erroneamente na obra?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

2 Há indução ao erro na apresentação de exemplos, em comentários sobre o conteúdo, nos exercícios ou problemas?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

3 As ilustrações veiculam idéias incorretas sobre conceitos?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

Caso seja marcada pelo menos um 'SIM' nos critérios eliminatórios, a obra deverá ser excluída do PNLEM 2007.

78

CATÁLOGO DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO PARA O ENSINO MÉDIO . MATEMÁTICA

ANEXO

4 São propostas atividades de riscos para alunos e professores sem as devidas recomendações de segurança?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

5 Diferentes opções metodológicas são apresentadas de maneira desarticulada?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

6 Há incoerência entre as bases teórico-metodológicas e a proposta concretizada na obra?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

7 A metodologia empregada é insuficiente para a consecução dos objetivos do ensino médio, deixando de promover o desenvolvimento de capacidades básicas de pensamento autônomo e crítico?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

8 Grupos sociais ou regiões particulares do país são privilegiados ou estigmatizados?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

9 Preconceitos e estereótipos relacionados à cor, condição econômico-social, etnia, gênero, orientação sexual etc. são veiculados?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

10 É divulgada matéria contrária à legislação vigente para a criança e o adolescente, no que diz respeito a fumo, bebidas alcoólicas, medicamentos, drogas, armamentos, etc?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

79

11 Veicule-se publicidade de artigos, serviços ou organizações comerciais, incentivando-se o consumo de produtos comerciais específicos?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

12 É feita doutrinação religiosa?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo) ☐ NÃO
Observações:

ANEXO

CATÁLOGO DO PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO PARA O ENSINO MÉDIO . MATEMÁTICA

B - CRITÉRIOS CLASSIFICATÓRIOS [2]

B.1 ASPECTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Análise dos diversos campos de conteúdo - aritmética, álgebra, estatística, trigonometria, probabilidades , combinatória e geometrias plana, espacial e analítica.

13 A apresentação dos conteúdos é clara, sem imprecisões conceituais?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO
Observações:

14 A apresentação dos conteúdos articula adequadamente os diversos assuntos abordados?
☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO
Observações:

A forma como a obra é recomendada para o PNLEM 2007 depende da quantidade de 'SIM' encontrada nos critérios classificatórios.

15 Os conteúdos foram selecionados de maneira a cobrir satisfatoriamente os principais tópicos dos diversos campos de estudo?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

16 Os conteúdos acham-se distribuídos de forma adequada a sua aprendizagem e sistematização?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

17 Assuntos novos são articulados com conhecimentos prévios de modo a facilitar a aprendizagem?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

18 Os conceitos propostos articulam-se harmoniosamente com procedimentos, algoritmos, problemas e exemplos em que são aplicados?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

19 As idéias e conceitos são representados de forma diversificada, com uso apropriado da língua materna e dos diversos recursos simbólicos (linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, etc.)?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

20 Temas ligados à História da Matemática são tratados, contextualizando o processo do conhecimento matemático e destacando o papel das principais personalidades?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

21 O LD relaciona a Matemática com outras áreas do conhecimento?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

B.2 FORMAÇÃO DE CONCEITOS, HABILIDADES E ATITUDES

22 O LD contribui para a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, favorecendo a atribuição de significados aos conteúdos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

23 O LD apresenta situações onde são explicitados os procedimentos pelos quais o conhecimento matemático é descoberto ou inferido: indução (validação empírica), dedução (validação matemática), indução finita, intuição (que inclui a visualização de propriedades geométricas em figuras), etc?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

24 O LD valoriza o papel do aluno na construção do conhecimento matemático levando em conta, inclusive, seus conhecimentos prévios e extra-escolares?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

25 O LD apresenta exercícios e problemas que ilustram os conceitos e resultados estudados de forma adequada?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

26 O LD mescla exercícios de fixação dos conteúdos com problemas que desafiam os alunos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

27 O LD traz problemas e exercícios com situações que envolvam:
(a) cálculo mental ou por estimativa?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

28 (b) utilização e comparação de diferentes estratégias de resolução?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

29 (c) formulação de problemas pelo aluno?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

30 (d) verificação de processos e resultados pelo aluno?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

31 O LD favorece o desenvolvimento de competências complexas – explorar, estabelecer relações e generalizar, conjecturar, argumentar, provar, tomar decisões, criticar, utilizar a imaginação e a criatividade, expressar e registrar idéias e procedimentos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

32 O LD apresenta sugestões de leituras complementares para o aluno?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

B.3 LINGUAGEM

33 O LD é escrito em português gramaticalmente correto, sem vícios de linguagem ou solecismos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

34 O vocabulário do LD é adequado aos alunos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

35 Utiliza-se no LD notação matemática clara, coerente e usual?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

B.4 CONSTRUÇÃO DA CIDADANIA

36 O LD estimula o convívio social e a tolerância, abordando a diversidade das experiências humanas com respeito e interesse?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

B.5 ESTRUTURA EDITORIAL

37 No LD, os diversos capítulos e seções estão adequadamente hierarquizados por títulos e subtítulos e evidenciados por meio de recursos gráficos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

38 Os textos e ilustrações são distribuídos de forma adequada e harmônica?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

39 As ilustrações do LD estão isentas de erros, contribuindo efetivamente para a assimilação e fixação dos conteúdos?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

B.6 LIVRO DO PROFESSOR (LP)

40 Os pressupostos teórico-metodológicos explicitados no LP embasam efetivamente a metodologia adotada no LD?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

41 O LP descreve a estrutura geral da obra, explicitando a articulação pretendida entre suas partes e/ou unidades e os objetivos de cada uma delas?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

42 A linguagem empregada no LP é clara?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

43 O LP traz subsídios para a atuação do professor em sala de aula:
(a) apresentando orientações metodológicas para o trabalho com o LD?

☐ SIM (Apresentar argumentos abaixo)
☐ PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
☐ NÃO

Observações:

44 (b) sugerindo atividades diversificadas (projetos, pesquisas, jogos, etc.) além das contidas no LD?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

---

45 (c) apresentando resoluções das atividades propostas aos alunos?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

---

46 (d) com contribuições para a avaliação dos alunos?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

---

47 O LD favorece a formação e atualização do professor:
(a) sugerindo leituras complementares?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

---

48 (b) apresentando a bibliografia utilizada pelo autor?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

49 (c) indicando fontes de informação adicionais?

- [ ] SIM (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] PARCIALMENTE (Apresentar argumentos abaixo)
- [ ] NÃO

Observações:

C - OUTRAS OBSERVAÇÕES

50 Faça as observações que julgar necessárias:
Observações:

Parecer final sobre a obra:

- [ ] Excluída
- [ ] Recomendada

Anexo 4 - Censo Escolar 2009

Resultados do Censo Escolar 2009 - Educacenso

PARAÍBA

Nova Pesquisa

Município	Dependência	Matrícula Inicial																	
		Ed.Infantil		Ensino Fundamental		Ensino Médio	Educação Profissional (Nível Técnico)	Educação de Jovens e Adultos - EJA (presencial)		EJA (semi-presencial)		Educação Especial(Alunos de Escolas Especiais, Classes Especiais e Incluidos)							
		Creche	Pré-Escola	Anos Iniciais	Anos Finais			Funda-mental[2]	Médio[2]	Fundamental[2]	Médio[2]	Creche	Pré-Escola	Anos Iniciais	Anos Finais	Médio	Ed. Prof. Nível Técnico	EJA Fund[1,2]	EJA Médio[1,2]
JOAO PESSOA	Estadual	901	960	14.676	18.001	22.567	723	7.700	7.498	441	1.240	1	1	194	47	35	0	136	2
	Federal	48	79	41	0	718	771	55	111	0	0	0	3	1	0	6	4	0	0
	Municipal	1.809	3.619	24.535	17.641	0	0	12.904	0	0	0	4	16	307	179	0	0	77	0
	Privada	1.192	5.358	14.325	11.942	9.882	701	224	634	0	0	1	10	346	8	3	0	0	0
	Total	3.950	10.016	53.577	47.584	33.167	2.195	20.883	8.243	441	1.240	6	30	848	234	44	4	213	2

[1] Não estão incluídos alunos da Educação de Jovens e Adultos Semi-Presencial

[2] Inclui os alunos da Educação de Jovens e Adultos Integrada à Educação Profissional

CENSO ESCOLAR DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Matrículas no Ensino Médio por Rede Administrativa - Município de João Pessoa

Paraíba 2009 - Resultados Finais

REDE	MUNICIPIO	ESTABELECIMENTO	CODIGO	1ª Série	2ª Série	3ª Série	4ª Série	TOTAL
ESTADUAL	JOAO PESSOA	CAIC DAMASIO FRANCA	25092340	55	45	29	0	129
ESTADUAL	JOAO PESSOA	CENTRO EST EXP DE ENS A SESQUICENTENARIO	25092839	189	171	189	0	549
ESTADUAL	JOAO PESSOA	CENTRO PROFIS DEP ANTONIO CABRAL	25092871	649	443	345	0	1,437
ESTADUAL	JOAO PESSOA	CONEGO LUIZ GONZAGA DE OLIVEIRA	25093878	169	228	188	0	585
ESTADUAL	JOAO PESSOA	E E DE E F E M MONSENHOR PEDRO ANISIO BEZERRA DANTAS	25094637	164	124	109	0	397
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM COMP LUIS RAMALHO	25093835	248	161	154	0	563
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM CON FRANCISCO GOMES DE LIMA	25093843	125	101	53	0	279
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM DAURA SANTIAGO RANGEL	25093932	162	91	104	0	357
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM ESCRITOR HORACIO DE ALMEIDA	25094130	349	205	176	0	730
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM ESCRITOR JOSE LINS DO REGO	25094157	509	358	330	0	1,197
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM FERNANDO MOURA CUNHA LIMA	25094122	137	131	102	0	370
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM FRANCISCA A CUNHA	25093886	72	40	49	0	161
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM GONCALVES DIAS	25095021	74	26	0	0	100
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM JOAO ROBERTO BORGES DE SOUZA	25114484	48	0	0	0	48
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM JOSE DO PATROCINIO	25094211	400	235	151	0	786
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM LUZIA SIMOES BARTOLLINI	25094106	217	129	118	0	464
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PADRE HILDON BANDEIRA	25094688	205	77	50	0	332
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PREF OSWALDO PESSOA	25095056	217	140	153	0	510
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PRESIDENTE COSTA E SILVA	25094033	21	12	15	0	48
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PRESIDENTE MEDICI	25094190	47	44	24	0	115
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROF CELESTIN MALZAC	25094726	96	41	48	0	185
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROF OLIVINA OLIVIA CARNEIRO DA CUNHA	25093959	707	549	456	0	1,712
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROF P A CAMINHA	25093894	380	209	228	0	817
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROF RAUL CORDULA	25093916	26	27	19	0	72
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROFA DEBORA DUARTE	25094777	29	15	0	0	44
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROFESSOR LUIZ GONZAGA DE ALBUQUERQUE BURITY	25094050	305	209	178	0	692
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM PROFESSORA MARIA JACY COSTA	25094742	19	0	0	0	19
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM RAUL MACHADO	25093860	105	66	57	0	228
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEFM SEVERINO DIAS DE OLIVEIRA MESTRE SIVUCA	25124277	21	11	0	0	32
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEIEF DOM JOSE MARIA PIRES	25094203	301	146	143	0	590
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEIEFM ALICE CARNEIRO	25094114	226	123	67	0	416
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEIEFM CONEGO NICODEMOS NEVES	25093975	190	103	58	0	351
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEIFM DOMINGOS JOSE DA PAIXAO	25094432	145	91	72	0	308
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEM PROFª URSULA LIANZA	25095048	445	269	251	0	965
ESTADUAL	JOAO PESSOA	EEEM PROFª MATHEUS AUGUSTO DE OLIVEIRA	25094076	110	53	58	0	221
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESC NOR EST PROFA M DO CARMO DE MIRANDA	25096702	147	115	102	128	492
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESCOLA ESTADUAL DE EDUCACAO INFANTIL E ENSINO FUNDAMENTAL PADRE ROMA	25095080	41	34	36	0	111
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO PAPA PAULO VI	25094181	599	291	248	0	1,138
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO PROFESSOR OLIVIO PINTO	25094750	72	41	16	0	129
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO PROFESSORA LILIOSA DE PAIVA LEITE	25093851	480	219	194	0	893
ESTADUAL	JOAO PESSOA	ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MEDIO TENENTE LUCENA	25094025	112	39	39	0	190
ESTADUAL	JOAO PESSOA	INST DE EDUCACAO DA PARAIBA	25097725	446	190	98	232	966
ESTADUAL	JOAO PESSOA	LYCEU PARAIBANO	25098357	859	829	701	0	2,389
Total na Re				**9,918**	**6,431**	**5,408**	**360**	**22,117**
PRIVADA	JOAO PESSOA	ACADEMIA DE COMERCIO EPITACIO PESSOA	25092251	87	101	90	0	278
PRIVADA	JOAO PESSOA	ANDREWS EMP EDUC LTDA-HIPOCRATES JD LUNA	25118234	34	45	31	0	110
PRIVADA	JOAO PESSOA	ANGLO CENTRO DE EDUCACAO LTDA	25092260	50	53	81	0	184
PRIVADA	JOAO PESSOA	CENTRO DE EDUCACAO HUMANISTA LTDA	25153820	12	15	12	0	39
PRIVADA	JOAO PESSOA	CENTRO DE ENSINO DECISAO LTDA	25092448	96	81	87	0	264

APÊNDICES

Apêndice 1 - Conexão com outras áreas do conhecimento

Área	**Assunto abordado**	
• Economia	• Balança comercial • Receita, despesa • Consumo • Poupança • População economicamente ativa • Taxas • Custos • Planilhas de custos • Formas de pagamento • Economia informal • Privatização • Faturamento • Balanço financeiro • Reservas internacionais • Desvalorização de um bem • Cotação cambial • Capital • Montante • Juros simples • Juros compostos • Saldo devedor • Descontos • Financiamento • Empréstimo • PIB	
• Sociologia	• Núcleos familiares • Divórcios • Expectativa de vida • Cesta básica • Renda familiar • Êxodo rural • Qualificação profissional • Reforma agrária • MST • Crescimento populacional • Prevenção acidente de trabalho • Habitação (casa própria)	
• Educação	• Matrícula escolar • Vestibular	

• História	• Cronologia • Datas, século, eras • Monumentos históricos • Pré-história
• Biologia	• Fotossíntese • Raios ultravioletas • Peso corpo humano • Bactérias • Cultura de bactéria • Proteínas • Mitose • Alteração celular • Divisão celular • Genética • Botânica • Fisiologia • Micro organismos • Alometria
• Física	• Temperatura • Aquecimento e resfriamento • Energia • Espaço • Tempo • Deslocamento • Aceleração • Eletricidade • Velocidade • Trajetória • Radioatividade • Energia potencial • Energia cinética • Massa • Pressão • Escalas termométricas • Resistência elétrica • Movimento uniforme variado • Intensidade • Astronomia
• Comunicação	• Jornais • Propaganda • Revistas • Telefonia móvel
• Cotidiano	• Postar cartas • Locomoção (táxi) • Locação de veículos • Locação de filmes

	• Acidentes no trânsito • Lojas virtuais • Apostas (loterias) • Cartão de crédito • Chuva forte • Sala de aula
• Direito	• Propriedade • Patentes
• Filosofia	• Ética • Biopiratraria
• Geografia	• Países • Territórios • População • Localização geográfica • Latitudes • Longitudes • Meridianos • Linha do equador • Pólo Norte • Pólo Sul • Demografia • Climatologia • Cartografia • Nível do mar • Atmosfera • Troposfera • América Latina
• Política	• Saúde pública • Iluminação pública • Política educacional • Desapropriação • Saneamento básico
• Medicina	• Câncer de pele • Dengue • Obesidade • Liquido cerebral
• Geologia	• Terremotos • Pedras vulcânicas • Movimento tectônico
• Química	• Reações químicas • Elementos químicos • Moléculas • Combustível fóssil • Átomo • Carbono 14 • Meia vida (tempo que um elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa)

	• pH de uma solução • Volatilidade
• Arquitetura	• Arquitetura grega – Paternon • Torre Eiffel • Monumentos • Fósseis
• Arqueologia	• Pinturas rupestres • Datação arqueológica com carbono 14
• Pecuária	• Cunicultura (criação de coelhos)
• Ecologia	• Reflorestamento • População de insetos • População de anfíbios • Predadores naturais • Meio ambiente • Recursos naturais • Poluição
• Computação	• Programação • Internet • Bit • Capacidade de memória
• Turismo e lazer	• Viagens • Parque de diversão • Pesque-pague • Campeonato esportivo • Excursão • Torcidas de clubes esportivos
• Psicologia	• Curva de aprendizagem • Comportamento
• Agronomia	• Pulverização de lavoura • Plantação de algodão • Pragas em lavouras • Agrotóxicos • Produtos agrícolas
• Serviço Social	• Assistência a menores • Trabalho voluntário • Prevenção acidentes no trânsito
• Saúde	• Beijo como transmissor de bactérias • Automedicação • Crescimento médio de uma criança • Taxa de álcool no sangue • Plano de saúde • UTI
• Tecnologias	• Computadores • Calculadoras • Lançamento de mísseis • Lançamento de foguetes • Satélites

• Engenharia	• Área construída • Plantas
• Profissões	• Fruticultor • Médico • Piscicultor • Psicólogo • Engenheiro • Médico • Biólogo • Economista • Físico • Químico • Assistente social • Professor • Estatístico • Geógrafo • Historiado • Geólogo • Jornalista • Turismólogo • Arqueólogo • Arquiteto • Cartógrafo • Agrônomo • Carpinteiro • Eletricista • Assistente social

Apêndice 2 - Questões utilizadas em exames vestibulares em instituições de ensino superior

	INSTITUIÇÃO	SIGLA	QUESTÕES
01	Fundação Armando Álvares Penteado	FAAP	7
02	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	UFRN	7
03	Universidade Federal de Ouro Preto	UFOP	12
04	Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho	UNESP	24
05	Universidade Federal de Alagoas	UFAL	8
06	Fundação Getúlio Vargas	FGV	24
07	Universidade de São Paulo	USP	11
08	Universidade Federal Fluminense	UFF	6
09	Universidade do Estado do Pará	UEPA	2
10	Universidade Federal do Amazonas	UFAM	2
11	Universidade Federal do Espírito Santo	UFES	4
12	Centro Universitário Lusíada	UNILUS	2
13	Escola Federal de Engenharia de Itajubá	IFEI	1
14	Universidade Federal de Santa Catarina	UFSC	7
15	Universidade Federal da Paraíba	UFPB	3
16	Universidade Presbiteriana Mackenzie	MACK	11
17	Universidade Federal de Minas Gerais	UFMG	8
18	Universidade Estadual do Maranhão	UEMA	1
19	Universidade Federal de Pernambuco	UFPE	4
20	Universidade Federal Rural de Pernambuco	UFRPE	1
21	Universidade Católica de Santos	UNISANTOS	1
22	Universidade Federal do Maranhão	UFMA	2
23	Universidade Federal do Ceará	UFC	4
24	Universidade Federal de Santa Maria	UFSM	5
25	Universidade Federal do Rio de Janeiro	UFRJ	6
26	Universidade Estadual de Campinas	UNICAMP	7
27	Universidade Federal de São Carlos	UFSCar	4
28	Universidade de Mogi das Cruzes	UMC	3
29	Universidade Federal de Goiás	UFG	6

30	Faculdade de Medicina de Catanduva	FAMECA	2
31	Universidade do Estado do Rio de Janeiro	UERJ	9
32	Universidade Federal de Pelotas	UFPel	4
33	Faculdade de Engenharia Industrial	FEI	9
34	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	UFRGS	2
35	Escola Nacional de Ciências Estatísticas	ENCE	2
36	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	PUC SP	7
37	Faculdade Ibemec	IBEMEC	3
38	Instituto Nacional de Telecomunicações	INATEL	1
39	Universidade do Estado de Mato Grosso	UNEMAT	2
40	Universidade de Cuiabá	UNIC MT	1
41	Pontifícia Universidade Católica de Campinas	PUCC	4
42	Fundação Universidade Regional de Blumenau	FURB	1
43	Escola Superior de Agricultura de Lavras	ESAL	1
44	Universidade Federal de Uberlândia	UFU	5
45	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro	UNIRIO	1
46	Universidade Estadual do Centro Oeste	UNICENTRO	1
47	Faculdade de Tecnologia de São Paulo	FATEC	2
48	Universidade de Taubaté	UNITAU	2
48	Universidade Federal do Rio Grande	FURG	1
50	Universidade Federal de São Paulo	UNIFESP	2
51	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	PUC MG	1
52	Universidade Federal da Bahia	UFBA	3
53	Universidade Federal de Sergipe	UFSE	1
54	Universidade Estadual de Maringá	UEM	2
55	Universidade do Estado da Bahia	UNEB	1
56	Universidade Federal do Paraná	UFPR	2
57	Universidade de Fortaleza	UNIFOR	3
58	Fundação Mineira de Educação e Cultura	FUMEC	1
59	Universidade Anhembi Morumbi	UAM	3
60	Universidade Católica de Salvador	UNISAL	2
61	Universidade Federal do Pará	UFPA	1
62	Universidade Estadual de Ponta Grossa	UEPG	2

63	Centro Universitário do Pará	CESUPA	1
64	Universidade Federal de Mato Grosso	UFMT	2
65	Universidade Estadual de Londrina	UEL	2
66	Universidade de Brasília	UNB	1
67	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	UFMS	1
68	Universidade Metodista de São Paulo	METODISTA	1
69	Universidade do Vale do Rio dos Sinos	UNISINOS	1
70	Universidade Estadual de Santa Cruz	UESC	1
71	Universidade de Santo Amaro	UNISA	1
72	Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas	EFOA	1
73	Faculdade de Medicina do Triangulo Mineiro	FMTM	1
74	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro	PUC RJ	1
75	Universidade Paulista	UNIP	1
76	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro	UFRRJ	1
TOTAL DE QUESTÕES DE VESTIBULAR			**283**