

Taxa de mistura para bilhares semidispersivos com
cúspides não compactas

Regis Castijos Alves Soares Jr

27 de janeiro de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

Desde o trabalho seminal de Sinai em [28], estuda-se propriedades caóticas de mesas de bilhares planares. Entre essas, está o estudo de decaimento de correlações para essas mesas. Temos então exemplos de mesas com decaimento exponencial e até polinomial ([32], [5], [21], [9] e [8])

Porém, até o momento, nada se sabe sobre propriedades misturadoras para os bilhares em mesas com cúspides não compactas. Um agravante é a falta de uma “boa” definição para transformação misturadora no caso de medida infinita. De fato, desde Hopf [12], passando por Krickenbeg [17], Krengel e Sucheston [16], Friedman [11] e Aaronson [1], podemos obter tentativas de definições para sistemas misturadores e exemplos para os quais essas são aplicadas.

O objetivo desse texto é, após ter escolhido uma das definições acima para misturador, a saber a de Krengel e Sucheston, mostrar que os bilhares estudados por Lenci em [18] são misturadores e que a velocidade de mistura é polinomial.

Abstract

Since the seminal work of Sinai in [28], one studies chaotic properties of planar billiards tables. Among them is the study of decay of correlations for these tables. We have examples of tables with exponential and even polynomial decay ([32], [5], [21], [9] and [8]).

However, until now, nothing is known about mixing properties for billiard tables with non-compact cusps. One of the problems is the lack of a “good” definition for mixing transformations in the case of infinite measure. Indeed, since Hopf [12], through Krieger [17], Krengel e Sucheston [16], Friedman [11] and Aaronson [1], we can obtain several definitions of mixing systems and examples for which these are applied.

The goal of this text is, after we have chosen one these definitions, namely Krengel and Sucheston’s, to show that the billiards studied by Lenci in [18] are mixing and that the speed of mixing is polynomial.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais.

Gostaria de agradecer também aos Professores Maria José Pacífico, Roberto Markarian, Vítor Araújo e Alexander Arbieto, a quem devo muito pela realização desta tese; e aos professores Mário Jorge Dias Carneiro, José Vieitez e Samuel Senti por aceitarem participar da minha banca e ajudar na melhoria desta tese com suas observações e correções.

Agradeço a meus amigos e à Sofia Carolina.

Agradeço também à FAPERJ e ao CNPQ pelo apoio financeiro para a realização desta tese.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução Histórica	1
1.2	Anúncio dos Resultados	3
1.3	Estrutura do Texto	4
2	Preliminares	6
2.1	Análise Funcional e Teoria da Medida	6
2.2	Teoria Ergódica Infinita	9
2.2.1	Recorrência e Ergodicidade	9
2.2.2	Mistura	11
2.2.3	K-automorfismo Infinito	13
2.3	Teoria dos Bilhares	14
3	Mesas de Bilhares com Medida Invariante Infinita	19
3.1	Construção do Sistema Dinâmico	19
3.2	Campos de Cones e Vizinhanças de Conjuntos de Singularidades	23
3.3	Teoria Hiperbólica	25
3.4	Ergodicidade	27
4	Mistura, K-automorfismos e Bilhares	31
4.1	Definição do Sistema Dinâmico	31
4.2	K-automorfismos e Prova do Teorema A	32
4.3	Sistemas F-misturadores e Outra Prova do Corolário 1.1	35
5	Taxa de Mistura	39
5.1	Condições Geométricas	39

5.2	Hiperbolicidade	48
5.3	Prova do Teorema B	56
	Referências Bibliográficas	59

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Histórica

O *bilhar planar* é o sistema dinâmico definido pelo movimento livre de uma partícula no interior de um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ sujeita a colisões elásticas com a fronteira de \mathcal{D} , ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Em 1970 apareceu o primeiro trabalho sobre bilhares caóticos, com o artigo de Sinai [28]. Neste, Sinai provou que a aplicação do bilhar de um sistema em um toro bidimensional com uma quantidade finita de obstáculos convexos (curvatura positiva) é um K-automorfismo. Para isso, ele utilizou o chamado *método de Hopf*. Este consiste na prova de ergodicidade de um sistema a partir da existência de variedades estáveis e instáveis absolutamente contínuas. Em um outro artigo, em conjunto com Bunimovich [2], este resultado foi aprimorado, sendo demonstrado para uma classe mais abrangente de bilhares que foram denominados *dispersivos*. Essa denominação é aplicada aos bilhares cuja fronteira possui um número finito de peças convexas quando vistas do interior, inclusive com cantos com ângulos positivos.

A teoria de Pesin [24] para difeomorfismos que preservam medida e possuam algum comportamento hiperbólico (não uniformemente hiperbólicos) é estendida para transformações suaves exceto em um conjunto de singularidades por Katok e Strelcyn em [13]. Nesse livro, são apresentadas o teorema da variedade invariante de Pesin e a continuidade absoluta dessas variedades para transformações com singularidades. Além disso são apresentados exemplos de transformações que satisfaçam as condições necessárias para os teoremas acima, entre eles bilhares planares em regiões limitadas por uma quantidade

finita de arcos convexos e côncavos de classe C^3 e segmentos de reta, desde que todo arco convexo tenha tangência de ordem finita com todas suas tangentes.

Porém essa teoria não é suficiente para garantir ergodicidade dos sistemas. É necessário um teorema fundamental [2] conhecido como Teorema Ergódico Local. Assim temos os trabalhos de Sinai e Chernov [29], para o caso de sistemas de n discos bidimensionais e bolas tridimensionais, e de Krámli, Simányi e Szász [14], que apresenta melhoria e extensões com relação ao anterior. E para casos gerais temos os trabalhos de Chernov [4] (ver também [20]) que apresenta o teorema de Sinai e Chernov em uma forma mais geral e de Liverani e Wojtkowski [19] para o caso de aplicações simpléticas, que no caso de dimensão 2, se reduz à continuidade absoluta da medida invariante.

As provas de propriedades ergódicas de bilhares com cúspides são mais recentes, apresentadas por Reháček em [25], como uma aplicação do teorema fundamental de Krámli, Simányi e Szász para esse caso. Com relação a bilhares com cúspides não compactas, que geram um sistema dinâmico com medida invariante infinita, em [18] Lenci provou uma extensão dos resultados de Katok e Strelcyn [13] para o caso de medida infinita e como aplicação, mostrou que algumas mesas com cúspides não compactas possuem estrutura hiperbólica, i.e., existência de variedades estáveis e instáveis absolutamente contínuas. Além disso, adaptando argumentos contidos em [19], ele provou que as transformações nessas mesas são ergódicas.

Quanto ao estudo de decaimento de correlações, em [3], Bunimovich e Sinai provaram que bilhares dispersivos têm decaimento de correlações exponencial “esticado”. Com isso foi conjecturado que singularidades em sistemas hiperbólicos poderiam desacelerar o decaimento de correlações de exponencial para subexponencial. Porém, Young [32] mostrou que o decaimento de correlações é exponencial para transformações hiperbólicas com singularidades sob hipóteses bem gerais. Este resultado é válido para bilhares de Sinai dispersivos. Chernov [5] estendeu esse resultado tendo como exemplos bilhares cujos cantos possuam ângulo positivo.

Em [21], Markarian, baseando-se no trabalho de Young [33], mostrou que bilhares no estádio de Bunimovich têm decaimento de correlações polinomial, resultado esse estendido para outras classes de bilhares por Chernov e Zhang [9]. Recentemente, Chernov e Markarian [8] mostraram que bilhares com cúspides compactas também possuem decaimento de correlações polinomial.

Porém, até o momento, nada se sabe sobre propriedades misturadoras para os bilhares em mesas com cúspides não compactas. Um agravante é a falta de uma “boa” definição para transformação misturadora. De fato, desde Hopf [12], passando por Krickenberg [17], Krengel e Sucheston [16], Friedman [11] e Aaronson [1], podemos obter tentativas de definições para sistemas misturadores e exemplos para os quais essas definições são aplicadas.

O objetivo desse texto é, após ter escolhido uma das definições acima para misturador, a saber a de Krengel e Sucheston, mostrar que os bilhares estudados por Lenci são misturadores nessa definição e que a velocidade com que ocorre essa “mistura” é polinomial. Esses resultados estão enunciados de maneira mais precisa na próxima seção.

1.2 Anúncio dos Resultados

Estamos interessados em mesas da forma $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$, onde $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função três vezes diferenciável, limitada e convexa que satisfaz as condições descritas no Capítulo 3.

Nosso primeiro resultado é o

Teorema A. *A aplicação do bilhar definida na mesa com uma cúspide não compacta \mathcal{D} é um K -automorfismo infinito.*

Para a definição de K -automorfismo infinito, ver Seção 2.2, Definição 2.24.

Parry [23] mostrou que “um K -automorfismo infinito possui espectro de Lebesgue enumerável” e em [16], Krengel e Sucheston mostraram que “se um endomorfismo tem espectro de Lebesgue enumerável então esse endomorfismo é F -misturador” (para a definição de F -misturador, ver Seção 2.2, Definição 2.18). Portanto temos o

Corolário 1.1. *A aplicação do bilhar definida na mesa com uma cúspide não compacta \mathcal{D} é F -misturadora.*

Para um endomorfismo conservativo \mathcal{F} de um espaço de medida σ -finita (X, \mathcal{B}, μ) , definimos sua *entropia* [15] por

$$h(\mathcal{F}) = \sup\{h(\mathcal{F}_E, \mu_E) \mid E \subset X, 0 < \mu(E) < \infty\}.$$

Em [15] p. 172, Krengel mostrou que “todo K -automorfismo conservativo de um espaço de medida σ -finita tem entropia positiva”. Logo

Corolário 1.2. *A entropia da aplicação do bilhar definida na mesa com uma cúspide não compacta \mathcal{D} é positiva.*

Além disso podemos estudar qual é a velocidade de convergência a zero nessa definição de F-misturador, a partir do Lema 2.21 (c) . Dizemos que o endomorfismo \mathcal{F} é *polinomialmente F-misturador* se

$$\mu(\mathcal{F}^{-n}A \cap A) \geq C \frac{1}{n^\alpha},$$

para algum conjunto A com $0 < \mu(A) < \infty$ “bom” (e.g., com fronteira diferenciável por partes), e algum $\alpha > 0$. Aqui a constante C depende de A mas o expoente α depende apenas de \mathcal{F} .

Utilizando $f(x) = (x + 1)^{-1}$ na definição da mesa \mathcal{D} mostramos o

Teorema B. *A aplicação do bilhar definida na mesa com uma cúspide não compacta \mathcal{D} é polinomialmente F-misturadora.*

1.3 Estrutura do Texto

O texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentamos resultados gerais de Análise Funcional, Teoria da Medida, Teoria Ergódica Infinita e Teoria de Bilhares necessários para as provas ao longo deste trabalho. Nestes incluímos, e.g., o Teorema de Alaoglu (Teorema 2.5), o Teorema de Banach-Saks (Teorema 2.6), definições e teoremas sobre conservatividade e ergodicidade de sistemas de medida infinita, e alguns resultados de Parry sobre K-automorfismos infinitos e de Krengel e Sucheston para transformações misturadoras em espaços de medida infinita. No Capítulo 3 recordamos os principais resultados obtidos por Lenci em [18] para as mesas \mathcal{D} , entre eles os teoremas de existência e continuidade absoluta de variedades estáveis e instáveis para aplicações com singularidades em espaços de medida infinita (Teoremas 3.9 e 3.12) e os teoremas de ergodicidade local e global para os bilhares em \mathcal{D} (Teorema 3.16 e Proposição 3.17).

O Capítulo 4 contém a prova do Teorema A. Este está baseado na prova de que a propriedade de K-automorfismo de uma aplicação de retorno a um conjunto cujo saturado é todo o espaço original (em medida) então a aplicação inicial também é um K-automorfismo, inclusive no caso de medida infinita (Proposição 4.1). Assim, conseguimos provar que a aplicação (global) do bilhar é um K-automorfismo a partir da prova de

que a aplicação do bilhar obtida a partir de uma parte da seção transversal global, que dá origem a um sistema de medida finito, é um K -automorfismo. Além disso, apresentamos uma outra prova do Corolário 1.1, que não passa pela prova de que a aplicação seja um K -automorfismo. Esta é uma adaptação de trabalho de Coudene [10] ao caso de medida infinita e a definição de misturador utilizada neste texto.

No Capítulo 5 apresentamos a prova do Teorema B utilizando como base a técnica desenvolvida por Chernov e Markarian em [8] para o estudo de bilhares dispersivos com cúspides. Apesar do original ser para o caso de medida finita, muito pode ser aproveitado pois são utilizadas construções geométricas muito parecidas tanto no caso de cúspide compacta quanto no caso de cúspide não compacta. Entretanto os argumentos finais de [8] não serão utilizados, pois neles estão contidos algumas características próprias de transformações misturadoras em espaços de medida finita que não são válidas no caso de medida infinita.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos utilizados no texto. Na Seção 2.1 recordamos conceitos e teoremas de Análise Funcional e Teoria da Medida. Estes serão utilizados na prova alternativa do Corolário 1.1. Na Seção 2.2 apresentamos uma introdução à Teoria Ergódica Infinita, com os conceitos de conservatividade, ergodicidade, mistura e K-automorfismos infinitos. Na Seção 2.3 trazemos alguns resultados de Teoria dos Bilhares, entre eles as construções do espaço de fase e da transformação de retorno.

2.1 Análise Funcional e Teoria da Medida

Apresentamos nessa seção alguns resultados clássicos de Análise Funcional e Teoria da Medida que serão utilizados no decorrer do texto, a saber o Teorema de Alaoglu (Teorema 2.5), o teorema de densidade das funções contínuas com suporte compacto dentro do espaço L^p , $1 \leq p < \infty$ (Teorema 2.9) e o Teorema de Banach-Saks (Teorema 2.6). As referências para essa seção são Oliveira [22], Riesz e Sz.-Nagy [26] e Rudin [27],

Denotamos por \mathbb{F} o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

Definição 2.1. Uma norma num espaço vetorial X (real ou complexo) é um aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- (i) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in X$, e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- (ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo $v \in X$, $\alpha \in \mathbb{F}$;
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, para todo $v, w \in X$.

Cada norma induz uma *métrica* d em X por $d(v, w) = \|v - w\|$. O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado *espaço normado*. Denotaremos por \mathcal{N} espaços normados em geral.

Em um espaço métrico (X, d) , para $r > 0$, indicaremos por $B(v_0; r) = B_X(v_0; r) = \{v \in X : d(v_0, v) < r\}$, $B[v_0; r] = B_X[v_0; r] = \{v \in X : d(v_0, v) \leq r\}$, $S(v_0; r) = S_X(v_0; r) = \{v \in X : d(v_0, v) = r\}$ a bola aberta, a bola fechada e a esfera unitária de raio r centradas em v_0 .

Um espaço métrico é chamado *completo* se toda sequência de Cauchy é convergente a um elemento desse espaço. Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado um *espaço de Banach*.

Teorema 2.2. *A bola fechada $B[0; 1]$ em um espaço vetorial normado \mathcal{N} é compacta se, e somente se, $\dim \mathcal{N} < \infty$.*

Assim se $\dim \mathcal{N} = \infty$ tem-se que a bola fechada $B[0; 1]$ não é compacta. Mas podemos resgatar esse resultado em uma outra topologia. Para isso introduziremos a topologia *fraca**

Seja \mathcal{N} um espaço normado. Denotemos por \mathcal{N}^* o espaço dos operadores lineares contínuos de \mathcal{N} em \mathbb{F} . Este é o chamado *espaço dual* de \mathcal{N} e cada um dos seus elementos é chamado *funcional linear contínuo em \mathcal{N}* . É possível mostrar que \mathcal{N}^* é um espaço de Banach definindo

$$\|h\| = \sup\{|h(\xi)| : \xi \in \mathcal{N}, \|\xi\| = 1\}, \quad h \in \mathcal{N}^*,$$

(com efeito, segue do fato de que \mathcal{N} é normado e \mathbb{F} é completo [22] p. 22, Teorema 4.5).

Faz sentido o *segundo dual ou bidual* de \mathcal{N} , $\mathcal{N}^{**} = (\mathcal{N}^*)^*$. Há uma forma natural de se identificar elementos de \mathcal{N}^{**} com os de \mathcal{N} : a cada $\xi \in \mathcal{N}$ associa-se um elemento $J(\xi) \in \mathcal{N}^{**}$ por

$$J(\xi)(h) = h(\xi), \quad h \in \mathcal{N}^*.$$

Essa aplicação é chamada *aplicação canônica de \mathcal{N} em \mathcal{N}^{**}* e é uma isometria linear. Se essa aplicação for sobrejetora diz-se que \mathcal{N} é *reflexivo*. Denotamos $\hat{\mathcal{N}} = J(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}^{**}$.

A sequência $(h_n) \subset \mathcal{N}^*$ converge *fracamente** a $h \in \mathcal{N}^*$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\xi)(h_n) = J(\xi)(h)$, para todo $\xi \in \mathcal{N}$.

Definição 2.3. *A topologia *fraca** em \mathcal{N}^* é a topologia gerada pela coleção de todas as uniões de interseções finitas de conjuntos $J(\xi)^{-1}(V)$ com $J(\xi)$ funcional linear em $\hat{\mathcal{N}}$ e V*

aberto de \mathbb{F} , ou seja, é a topologia menos fina em \mathcal{N}^* que torna todos os elementos de $\hat{\mathcal{N}}$ contínuos.

Observação 2.4. Estaremos interessados no caso em que \mathcal{N} é o espaço $L^2_\mu(X)$. Nesse caso, podemos simplificar as considerações acima sobre convergência fraca* e topologia fraca* devido as características próprias de $L^2_\mu(X)$ e o Teorema de Representação de Riesz ([22], p. 110).

Assim dizemos que a sequência (f_n) em $L^2_\mu(X)$ converge fracamente* a $f \in L^2_\mu(X)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n \cdot g) d\mu = \int (f \cdot g) d\mu,$$

para toda $g \in L^2_\mu(X)$. E a topologia fraca* é a topologia gerada por essa convergência.

A prova do teorema abaixo encontra-se em [22]

Teorema 2.5 (Alaoglu). *Se \mathcal{N} é um espaço normado então $B_{\mathcal{N}^*}[0; 1]$ é compacta na topologia fraca*.*

Uma sequência $\xi_n \in \mathcal{N}$ converge fracamente a $\xi \in \mathcal{N}$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\xi_n) = h(\xi)$ para todo $h \in \mathcal{N}^*$.

Dizemos que a sequência $(f_n) \subset L^p_\mu(X)$ converge em norma ou é uma sequência convergente em $L^p_\mu(X)$ a $f \in L^p_\mu(X)$ se $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [26], p. 80.

Teorema 2.6 (Banach-Saks). *Dado em $L^p_\mu(X)$ uma sequência $\{f_n\}$ que converge fracamente a um elemento f , podemos selecionar uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que as médias aritméticas*

$$\frac{f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_k}}{k}$$

convergem em norma a f .

O seguinte teorema encontra-se em [27], p. 68.

Teorema 2.7. *Se $1 \leq p \leq \infty$ e se $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p_\mu(X)$ com limite f , então $\{f_n\}$ possui uma subsequência que converge em quase todo ponto para $f(x)$.*

Agora enunciaremos um teorema sobre densidade das funções contínuas com suporte compacto no espaço das funções $L^p_\mu(X)$, para $1 \leq p < \infty$. Primeiro apresentamos um resultado que garante a densidade de funções simples, sobre certas condições.

Teorema 2.8. *Sejam X um espaço de medida arbitrário com uma medida positiva μ e S a classe de todas as funções complexas $s : X \rightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis simples em X , tais que*

$$\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Se $1 \leq p < \infty$, então S é denso em $L^p_\mu(X)$

Segue do teorema acima o seguinte

Teorema 2.9. *Sejam X um espaço de Hausdorff localmente compacto e μ uma medida regular em X . Para $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_c(X)$ das funções contínuas em X com suporte compacto é denso em $L^p_\mu(X)$.*

Os dois teoremas acima encontram-se em [27], p. 69.

2.2 Teoria Ergódica Infinita

Nesta Seção apresentamos os conceitos e resultados de Teoria Ergódica Infinita que utilizaremos neste texto. Em particular falaremos sobre conservatividade, ergodicidade, transformações misturadoras e automorfismos de Kolmogorov. As referências para essa seção são Aaronson [1], Krengel e Sucheston [16] e Parry [23].

2.2.1 Recorrência e Ergodicidade

Nessa subseção, utilizaremos definições e apresentaremos resultados que podem ser encontrados em [1], Chapter 1.

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, com μ σ -finita. Dizemos que uma transformação $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ é *não singular*¹ quando $\mu(\mathcal{F}^{-1}(A)) = 0$ sempre que $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{A}$. Diz-se que \mathcal{F} *preserva medida* quando $\mu(\mathcal{F}^{-1}(A)) = \mu(A), A \in \mathcal{A}$. Transformações que preservam medida serão chamadas *endomorfismos*. Um endomorfismo \mathcal{F} em (X, \mathcal{A}, μ) é chamado um *automorfismo* se \mathcal{F}^{-1} é também um endomorfismo em (X, \mathcal{A}, μ) .

Um conjunto $W \subset X$ é chamado *errante* (para \mathcal{F}) quando os conjuntos $W, \mathcal{F}^{-1}(W), \mathcal{F}^{-2}(W), \dots, \mathcal{F}^{-n}(W), \dots$ são disjuntos dois a dois. Denotemos por $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F})$ a coleção mensurável de conjuntos errantes. A *parte dissipativa* da transformação não singular \mathcal{F} é $\mathfrak{D}(\mathcal{F}) = \cup \mathcal{W}(\mathcal{F})$ a união mensurável da coleção de conjuntos errantes para \mathcal{F} . O conjunto $\mathfrak{C}(\mathcal{F}) = X \setminus \mathfrak{D}(\mathcal{F})$ é a *parte conservativa* da transformação \mathcal{F} .

¹Em [1] é chamada de *non-singular* e em [16] de *null-preserving*.

Definição 2.10. A transformação não singular \mathcal{F} é chamada (*totalmente*) *dissipativa* quando $\mathfrak{D}(\mathcal{F}) = X \pmod{\mu}$ e *conservativa* quando $\mathfrak{C}(\mathcal{F}) = X \pmod{\mu}$.

Observação 2.11. Qualquer transformação que preserva uma probabilidade é conservativa. Porém nem toda transformação que preserva uma medida σ -finita infinita é conservativa. De fato, basta tomar a translação $x \mapsto x + 1$ em \mathbb{R} equipado com borelianos e a medida de Lebesgue, que é totalmente dissipativa.

Definição 2.12. Dizemos que uma transformação não singular do espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) é *ergódica* se $A \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}^{-1}A = A \pmod{\mu}$ então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Observação 2.13. Ao contrário do caso de espaços de medida finita, em que valem diversas interpretações equivalentes de ergodicidade, essas não são todas verdadeiras no caso de medida infinita. Por exemplo, se \mathcal{F} é uma transformação conservativa, ergódica que preserva medida de um espaço de medida σ -finita infinita (X, \mathcal{B}, μ) então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n f(\mathcal{F}^h x) = 0$, para quase todo $x \in X$, para toda $f \in L^1(\mu)$ (ver [1], p.61).

Seja $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ uma transformação conservativa e não singular, e seja $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) > 0$. Então quase todo ponto de E retorna infinitas vezes a E sob iterações de \mathcal{F} e, em particular, a função *tempo de retorno*

$$\begin{aligned} r_E : E &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \min\{n \geq 1 : \mathcal{F}^n x \in E\} \end{aligned}$$

é finita para μ -quase todo ponto em E .

A *transformação induzida* $\mathcal{F}_E : E \rightarrow E$ em E é definida por

$$\mathcal{F}_E x = \mathcal{F}^{r_E(x)} x.$$

As provas das duas proposições seguintes encontram-se em [1], p.42.

Proposição 2.14. A *transformação induzida* \mathcal{F}_E é uma transformação não singular conservativa de $(E, \mathcal{B} \cap E, \mu_E)$.

Proposição 2.15. Suponha que \mathcal{F} é conservativa e $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) > 0$. Então

(1) \mathcal{F} ergódica $\Rightarrow \mathcal{F}_E$ ergódica;

(2) \mathcal{F}_E ergódica e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-n}E = X \pmod{\mu} \Rightarrow \mathcal{F}$ ergódica.

2.2.2 Mistura

Nesta subseção apresentaremos uma definição de transformação misturadora. Notemos que a definição usual em espaços de medida finita não é extensível para espaços de medida infinita. De fato, basta tomarmos todo o espaço e um conjunto invariante de medida finita que obtemos uma sequência constante finita que não pode convergir para o produto das medidas:

$$\infty > \mu(B) = \mu(\mathcal{F}^{-n}X \cap B) \rightarrow \mu(X)\mu(B) = \infty.$$

Assim, desde Hopf [12], passando por Krickenberg [17], Krengel e Sucheston [16], Friedman [11] e Aaronson [1] p.83, acompanhamos tentativas de definições para misturadores em espaços de medida infinita. Neste texto utilizaremos uma das definições propostas por Krengel e Sucheston em [16].

Definição 2.16. Dada uma sequência (A_n) de conjuntos mensuráveis em um espaço mensurável (X, \mathcal{A}, μ) , a interseção $\mathcal{R}(A_n)$ das σ -álgebras $\mathcal{B}_k(A_n)$ geradas por A_k, A_{k+1}, \dots será chamada a σ -álgebra remota de (A_n) . A sequência (A_n) é chamada *remotamente trivial* se $\mathcal{R}(A_n)$ é trivial, i.e., contém apenas conjuntos nulos e seus complementares. A sequência (A_n) é chamada *semiremotamente trivial* se toda subsequência possuir uma subsequência que é remotamente trivial.

Sucheston [30] provou que uma sequência de conjuntos em um espaço de medida finita é misturadora se, e somente se, é semiremotamente trivial; assim, uma transformação que preserva medida em um espaço de medida finita é misturadora se, e somente se, para todo conjunto mensurável A , a sequência $A, \mathcal{F}^{-1}A, \mathcal{F}^{-2}A, \dots$ é semiremotamente trivial.

Uma sequência (A_n) de conjuntos é chamada *remotamente infinita* se, e somente se, $\mathcal{R}(A_n)$ contém além do conjunto vazio apenas conjuntos de medida infinita; (A_n) é chamada *semiremotamente infinita* se toda subsequência de (A_n) contém uma subsequência remotamente infinita.

A coleção de conjuntos de medida finita é denotada por \mathfrak{F} e $\mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$ é denotado por \mathfrak{F}^+ .

Teorema 2.17 ([16] Theorem 1.1). *Assuma $\mu(X) = \infty$. As seguintes condições são equivalentes para uma sequência de conjuntos A_n com $\mu(A_n)$ limitadas por uma constante:*

- (i) para cada $F \in \mathfrak{F}$, $\mu(A_n \cap F) \rightarrow 0$;

(ii) para cada inteiro k , $\lim_n \mu(A_n \cap A_k) = 0$;

(iii) (A_n) é semiremotamente trivial;

(iv) (A_n) é semiremotamente infinita.

Definição 2.18. Uma transformação não singular \mathcal{F} é chamada *F-misturadora* se para todo $A \in \mathfrak{F}$, a sequência $\mathcal{F}^{-n}A$ é semiremotamente trivial.

Observação 2.19. Duas razões nos levaram a escolher a definição de Krengel e Sucheston: o trabalho de Sucheston, mostrando a equivalência entre misturador e F-misturador em espaços de medida finita ([30], Theorem 1) e também o fato de que ela melhor se encaixa, dentre todas, em nossa noção de taxa de mistura e nas adaptações feitas do trabalho de Coudene [10], como pode ser visto no Capítulo 4, Seção 4.3.

Observação 2.20. Notamos que a definição que adotamos aqui poderia ser adotada como de “fracamente misturadora”, pois tomamos apenas conjuntos de medida finita. Mas como é comentado por Aaronson em [1], p. 75, “*não existe uma generalização razoável de (fortemente) misturador para automorfismos conservativos e ergódicos*”, que são os tipos de transformações em que estamos interessados.

Lema 2.21. *As seguintes afirmações são equivalentes para um endomorfismo \mathcal{F} :*

(a) \mathcal{F} é F-misturador.

(b) $f \circ \mathcal{F}^n$ tende fracamente* a zero em L^2 , para todo $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(c) $\mu(\mathcal{F}^{-n}A \cap A) \rightarrow 0$, $A \in \mathfrak{F}$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b): Como \mathcal{F} é F-misturadora, pelo ítem (i) do Teorema 2.17, para todo $A, F \in \mathfrak{F}$, $\mu(\mathcal{F}^{-n}A \cap F) \rightarrow 0$. Ou seja, $\mu(1_A \circ \mathcal{F}^n \cdot 1_F) \rightarrow 0$. Agora sejam $f, g \in L^2$. Como o conjunto das funções simples $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$ é denso em L^2 (pelo Teorema 2.8) e funções simples desse tipo são combinações lineares de funções características de conjuntos de medida finita, obtemos que $\mu(f \circ \mathcal{F}^n \cdot g) \rightarrow 0$.

(b) \Rightarrow (a): Basta tomar $f = 1_A$ e $g = 1_F$, para $A, F \in \mathfrak{F}$.

(a) \Rightarrow (c): Basta utilizar o ítem (i) do Teorema 2.17, com $F = A$.

(c) \Rightarrow (a): Como \mathcal{F} é um endomorfismo $\mu(\mathcal{F}^{-n}A \cap A) = \mu(\mathcal{F}^{-n-k}A \cap \mathcal{F}^{-k}A)$, e obtemos o ítem (ii) do Teorema 2.17. Ou seja \mathcal{F} é F-misturadora. \square

O endomorfismo \mathcal{F} induz um operador isométrico $U_{\mathcal{F}}$ em L_{μ}^2 pela relação

$$U_{\mathcal{F}}(f) = f \circ \mathcal{F}, \text{ para } f \in L_{\mu}^2.$$

Definição 2.22. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida σ -finita Diz-se que um endomorfismo \mathcal{T} de (X, \mathcal{B}, μ) tem *espectro de Lebesgue enumerável* se existe uma base ortonormal $\{f_{i,j}\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) de L_{μ}^2 tal que $U_{\mathcal{T}}(f_{i,j}) = f_{i,j+1}$.

Teorema 2.23 (Krengel e Sucheston, [16], Theorem 2.2). *Se um endomorfismo \mathcal{F} em um espaço de medida infinita (X, \mathcal{B}, μ) tem espectro de Lebesgue enumerável, então ele é F -misturador.*

Em espaços de medida finita também é válida a implicação acima ([31], Theorem 2.12).

2.2.3 K-automorfismo Infinito

Nessa subseção apresentamos resultados e definições que podem ser encontrados em [23].

Dadas duas σ -álgebras \mathcal{A}, \mathcal{B} denotamos por $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a σ -álgebra gerada por $\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ e por $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ a σ -álgebra dada por $\{C : C \in \mathcal{A} \text{ e } C \in \mathcal{B}\}$.

Definição 2.24. Sejam (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida σ -finita e infinita, e $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ um automorfismo. Dizemos que \mathcal{F} é um *K-automorfismo infinito* se existe sub- σ -álgebra $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ tal que

- (i) $\mathcal{F}\mathcal{K} \supset \mathcal{K}$;
- (ii) $\bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n \mathcal{K} = \mathcal{B} \pmod{\mu}$;
- (iii) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \mathcal{K} = \mathcal{N} = \{\emptyset, X\} \pmod{\mu}$.

Além disso, chamaremos de *K-automorfismo finito* um automorfismo de um espaço de probabilidade (X, \mathcal{B}, μ) que satisfaça às condições da definição acima (conforme [31], Definition 4.13).

Proposição 2.25 (Parry, [23], p. 963). *Se \mathcal{F} é um K-automorfismo infinito (com respeito a \mathcal{B}) então ou \mathcal{F} é completamente dissipativa ou \mathcal{F} é ergódica.*

Além disso, vale o

Teorema 2.26 (Parry, [23], Theorem 3). *Se \mathcal{F} é um K -automorfismo infinito então \mathcal{F} tem espectro de Lebesgue enumerável.*

Os Teoremas 2.23 e 2.26 implicam que um K -automorfismo infinito é F -misturador, de forma semelhante ao caso de espaços de probabilidade (conforme [31], Corollary 4.33.1).

2.3 Teoria dos Bilhares

Apresentamos aqui uma breve introdução à Teoria dos Bilhares, tendo como base o livro de Chernov e Markarian [7].

Definição 2.27. Dado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes, um *bilhar planar* corresponde ao movimento livre de uma partícula no interior de \mathcal{D} , com reflexões elásticas na fronteira $\partial\mathcal{D}$.

Como só trabalharemos com bilhares planares, nos referiremos a eles neste texto apenas como bilhares. Utilizaremos ainda as seguintes hipóteses:

- (i) A fronteira de $\partial\mathcal{D}$ é uma união finita do fecho Γ_i de curvas suaves,

$$\partial\mathcal{D} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r.$$

As Γ_i são chamadas *paredes* ou *componentes de $\partial\mathcal{D}$* . Elas são de classe C^k , $k \geq 3$, e cada uma é definida por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , onde I é intervalo de \mathbb{R} , que está parametrizada pelo comprimento de arco.

- (ii) As componentes da fronteira Γ_i podem intersectar umas as outras apenas em seus extremos, i.e.,

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j \text{ para } i \neq j.$$

- (iii) Em cada Γ_i a segunda derivada da curva ou nunca é zero ou é identicamente zero.

Definição 2.28. Uma *mesa de bilhar* \mathcal{D} é o fecho de um domínio aberto conexo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tal que $\partial\mathcal{D}$ satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) descritas acima.

Denotemos por

$$\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*.$$

Pontos $x \in \Gamma_*$ serão chamados *pontos de quina*, pontos $x \in \tilde{\Gamma}$ serão chamados *pontos de fronteira regulares*.

A parede Γ_i será chamada

1. *flat*, se $f_i'' = 0$;
2. *focalizadora*, se $f_i'' \neq 0$, apontando para dentro de \mathcal{D} ;
3. *dispersiva*, se $f_i'' \neq 0$, apontando para fora de \mathcal{D} .

Definimos a *curvatura (com sinal)* K , dada por

1. $K = 0$ se Γ_i é flat;
2. $K = -\|f_i''\|$ se Γ_i é focalizadora;
3. $K = \|f_i''\|$ se Γ_i é dispersiva.

Denotemos por $q \in \mathcal{D}$ a posição da partícula em movimento e por $v \in \mathbb{R}$ seu vetor velocidade, que são funções do tempo $t \in \mathbb{R}$. Quando a partícula se move no interior da mesa, tal que $q \in \text{int}\mathcal{D}$, ela mantém velocidade constante

$$\dot{q} = v \quad \text{e} \quad \dot{v} = 0. \quad (2.1)$$

Quando a partícula colide com a parte regular da fronteira, $q \in \tilde{\Gamma}$, seu vetor velocidade é refletido através da tangente a Γ em q , utilizando a regra ângulo de incidência é igual a ângulo de reflexão e pode ser expressado por

$$v^+ = v^- - 2\langle v, n \rangle n, \quad (2.2)$$

onde v^+ e v^- referem-se às velocidades pós-colisão e pré-colisão, respectivamente, e n denota o vetor unitário normal a $\tilde{\Gamma}$ no ponto q . Se a partícula atinge um ponto de quina, ela pára e seu movimento não será mais definido além desse ponto.

As equações de movimento (2.1) e (2.2) preservam a norma $\|v\|$ e é comum tomá-la normalizada, $\|v\| = 1$. Uma colisão é *regular* se $q \in \tilde{\Gamma}$ e o vetor v^- não é tangente a Γ . Neste caso $v^- \neq v^+$. Se v^- é tangente a Γ nos pontos de colisão, então $v^- = v^+$ e tal colisão é chamada *tangencial*.

O *estado* de uma partícula em movimento para qualquer tempo é especificada por sua posição $q \in \mathcal{D}$ e seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$. Assim, o *espaço de fase* do sistema é

$$\Omega = \{(q, v)\} = \mathcal{D} \times S^1.$$

Em cada ponto de fronteira regular $q \in \tilde{\Gamma}$, é conveniente identificar os pares (q, v^-) e (q, v^+) relacionados pela regra de colisão (2.2). Isto ocasiona uma mudança na topologia de Ω , mas suas propriedades topológicas não serão essenciais.

Denotemos por π_q e π_v as projeções naturais de Ω sobre \mathcal{D} e S^1 , respectivamente. Além disso, denotemos por $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ o conjunto de estados (q, v) nos quais a dinâmica da partícula está definida para todos os tempos $-\infty < t < +\infty$. Obtemos um fluxo

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Toda trajetória do fluxo $\{\Phi^t x\}$, $x \in \tilde{\Omega}$, é uma curva contínua em Ω . É usual chamar sua projeção $\pi_q(\Phi^t x)$ sobre a mesa \mathcal{D} uma *trajetória do bilhar*.

O fluxo Φ^t é C^{k-1} suave em pontos de colisões regulares ([7], Lemma 2.24). Além disso, é possível mostrar que $\tilde{\Omega}$ é um subconjunto denso de medida de Lebesgue total em Ω , e assim pode-se estender (tomando certos cuidados) o fluxo Φ^t a todo o espaço Ω por continuidade ([7], Seção 2.8).

No estudo de sistemas dinâmicos, é comum reduzir um fluxo a uma transformação construindo uma seção transversal. Para um bilhar, uma seção transversal em Ω é geralmente construída na fronteira da mesa de bilhar, i.e., no conjunto $\Gamma \times S^1$. Podemos descrever a seção transversal como o conjunto de todos os vetores de velocidade pós-colisão:

$$\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \{x = (q, v) \in \Omega : q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\},$$

onde n denota o vetor unitário normal a Γ_i apontando para dentro de \mathcal{D} . O conjunto \mathcal{M} é uma subvariedade de dimensão 2 em Ω chamado o *espaço de colisão*.

Denotamos por $\tau(x)$ o primeiro tempo positivo no qual a órbita $\Phi^t(x)$ intersecta $\Gamma \times S^1$, e chamamos esse valor o *tempo de retorno*. Seja $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$. Este define uma *aplicação de retorno* $\mathcal{T} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ por

$$\mathcal{T}(x) = \Phi^{\tau(x)+0} x,$$

onde o símbolo $\tau(x) + 0$ indica que estamos tomando tempos que se aproximam de $\tau(x)$ pela direita. \mathcal{T} é chamada a *aplicação do bilhar* ou *aplicação de colisão* (de acordo com isso, \mathcal{M} é chamado o *espaço de fase da aplicação do bilhar* \mathcal{T}).

Parametrizamos esses elementos como $x = (r, \varphi)$, r é o parâmetro de comprimento de arco ao longo de $\partial\mathcal{D}$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ é o ângulo entre o vetor velocidade v e a normal no ponto x , n , orientado como na Figura 2.1.

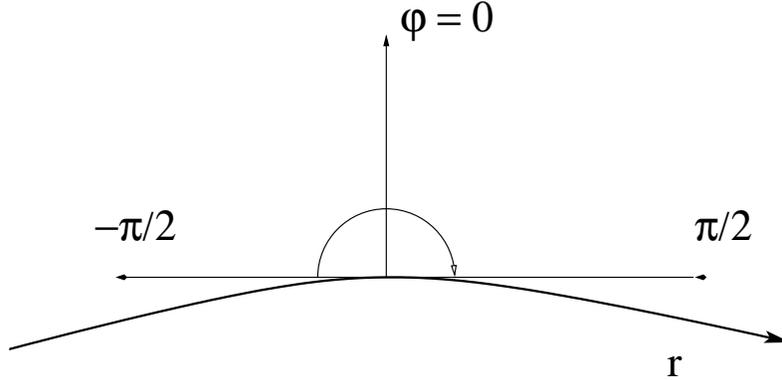


Figura 2.1: As orientações de r e de φ

Denotamos

$$S_0 = \partial\mathcal{M} = \{|\varphi| = \pi/2\} \cup \left(\bigcup_i (\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}) \right),$$

onde o conjunto $\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}$ está incluído apenas para as curvas Γ_i que não são fechadas (constituindo fronteiras para o intervalo $[a_i, b_i]$). Além disso consideramos os seguintes conjuntos

$$S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int}\mathcal{M} : \mathcal{T}(x) \notin \text{int}\mathcal{M}\}.$$

Esses são pontos que fazem uma colisão tangencial com uma parede dispersiva (i.e, $\mathcal{T}(x) \in S_0$) ou cuja trajetória atinge um ponto de quina e pára. Utilizando o mesmo estudo para a inversa \mathcal{T}^{-1} , escrevemos

$$S_{-1} = S_0 \cup \{x \in \text{int}\mathcal{M} : \mathcal{T}^{-1}(x) \notin \text{int}\mathcal{M}\}.$$

Quando \mathcal{T} está bem definida em uma vizinhança de um ponto $x = (r, \varphi)$, podemos obter sua derivada neste ponto da seguinte maneira (ver [7], Seção 2.11):

$$D_x \mathcal{T} = -\frac{1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau K + \cos \varphi & \tau \\ \tau K K_1 + K \cos \varphi_1 + K_1 \cos \varphi & \tau K_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

para $x_1 = (r_1, \varphi_1) = \mathcal{T}(r, \varphi) = \mathcal{T}(x)$ e $K_1 = K(x_1)$, onde τ é tempo necessário para duas rebatidas consecutivas (ou o deslocamento entre duas rebatidas consecutivas, já que

a partícula tem velocidade constante unitária) e $K(x)$ indica a curvatura da fronteira $\partial\Gamma$ no ponto x .

Após uma rápida análise da matriz acima segue que a aplicação $\mathcal{T} : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$ é um difeomorfismo C^{k-1} ([7], Theorem 2.33). Definimos indutivamente

$$S_{n+1} = S_n \cup \mathcal{T}^{-1}(S_n) \text{ e } S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup \mathcal{T}(S_{-n}).$$

S_{n+1} e $S_{-(n+1)}$ são os conjuntos de singularidades para \mathcal{T}^{n+1} e $\mathcal{T}^{-(n+1)}$, respectivamente. Assim, no conjunto

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_n$$

todas as iterações de \mathcal{T} estão definidas e são C^{k-1} difeomorfismos. Assim, \mathcal{T} está bem definida em um subconjunto denso $\widehat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ de medida de Lebesgue total. Assim a aplicação pode ser estendida por continuidade a todo \mathcal{M} , como anteriormente.

Utilizando a fórmula para $D_x\mathcal{T}$ (2.3), obtém-se que $\det D_x\mathcal{T} = \cos\varphi / \cos\varphi_1$.

A aplicação \mathcal{T} preserva a medida $\cos\varphi dr d\varphi$ em \mathcal{M} . De fato, utilizando mudança de variáveis e o valor do determinante acima

$$\iint_{\mathcal{T}(A)} \cos\varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \iint_A \cos\varphi dr d\varphi$$

para qualquer boreliano $A \subset \mathcal{M}$.

Capítulo 3

Mesas de Bilhares com Medida Invariante Infinita

Em [18], Lenci provou que mesas de bilhares com cúspides não compactas, satisfazendo algumas hipóteses a mais ((H1) -(H5) abaixo) são ergódicas. Para isso, ele apresentou uma adaptação da Teoria de Pesin para transformações com singularidades de espaços de medida infinita e uma adaptação, para medida infinita, dos resultados apresentados por Liverani e Wojtkowski em [19].

3.1 Construção do Sistema Dinâmico

Estamos interessados em mesas da forma $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$, onde $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função três vezes diferenciável, limitada e convexa.

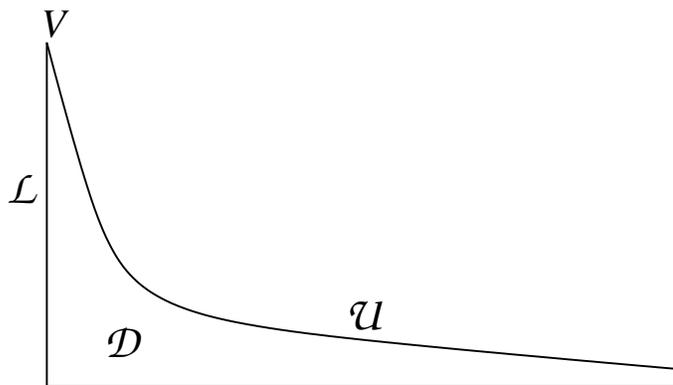


Figura 3.1: Apresentação de \mathcal{D} , \mathcal{U} , \mathcal{L} e V .

Denotaremos por \mathcal{U} a parte dispersiva da mesa \mathcal{D} e \mathcal{L} a parede vertical mais à esquerda em \mathcal{D} . O ângulo no vértice $V = (0, f(0))$ é $\pi/2 + \arctan f'(0^+)$ e pode ser zero. Assim o bilhar pode ter uma cúspide compacta junto com a não-compacta em $x = +\infty$.

Apresentamos duas outras mesas que serão úteis em várias provas geométricas no decorrer do texto (Figuras 3.2 e 3.3):

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} : |y| \leq f(x)\},$$

$$\mathcal{D}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |y| \leq f(|x|)\}.$$

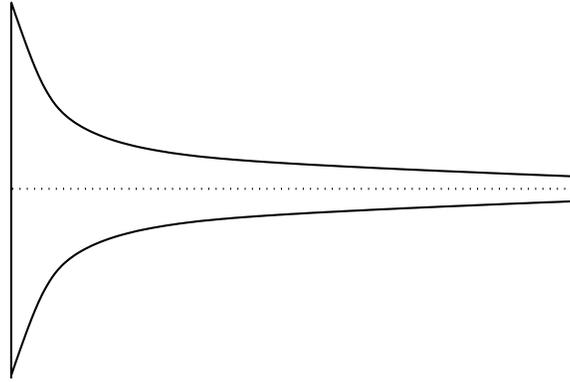


Figura 3.2: Apresentação de \mathcal{D}_2 .

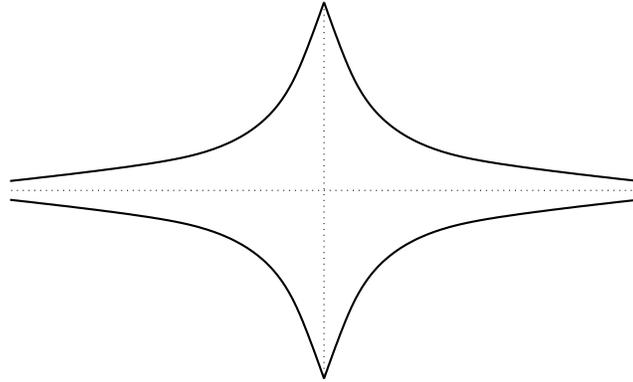


Figura 3.3: Apresentação de \mathcal{D}_4 .

Para $f, g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ usaremos as seguintes notações: $f(x) \ll g(x)$ para indicar que existe uma constante C tal que $f(x) \leq Cg(x)$, quando $x \rightarrow \infty$, análogamente para o símbolo \gg e indicaremos por $f = o(g)$ se $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a zero, quando $x \rightarrow \infty$. E mais, usaremos os mesmos símbolos quando $x \rightarrow 0$, se não houver ambigüidade. Além disso,

indicaremos por $A \asymp B$ se existe uma constante $C > 0$ tal que $C^{-1} < A/B < C$ e escreveremos $A = O(B)$ se existe $C > 0$ constante tal que $|A|/B < C$.

Definimos $x_t = x_t(x)$, para cada x em \mathcal{D}_2 , implicitamente por

$$\frac{f(x) + f(x_t)}{x - x_t} = -f'(x_t).$$

Temos que x_t é a abscissa do ponto de tangência em \mathcal{U} .

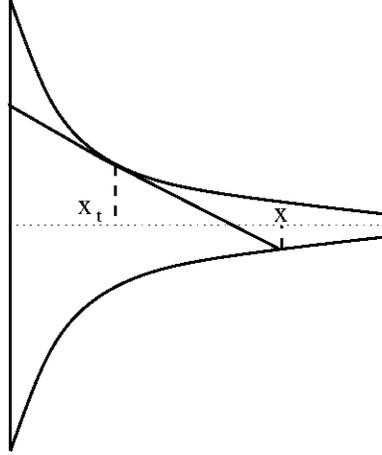


Figura 3.4: O ponto x_t .

Em [18], Lenci estudou mesas com $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes hipóteses

(H1) $f''(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$;

(H2) $|f'(x_t)| \ll |f'(x)|$;

(H3) $\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \gg 1$;

(H4) $\frac{|f'''(x)|}{f''(x)} \ll 1$;

(H5) $|f'(x)| \gg (f(x))^\theta$, para algum $\theta > 0$.

Não é difícil ver que $f(x) = \frac{1}{x+1}$ satisfaz as condições (H1) a (H5) acima.

Como vimos na seção 2.3, é usual adotar as rebatidas em $\partial\mathcal{D}$ como seção transversal. Mas devido à geometria da mesa de bilhar (veja \mathcal{D}_4), tomamos como seção transversal as rebatidas na parte dispersiva \mathcal{U} de $\partial\mathcal{D}$. Parametrizamos esses elementos como $z = (r, \varphi)$, $r \in (-\infty, 0]$ é a variável de comprimento de arco ao longo de \mathcal{U} (com $r = 0$ para o vértice V) e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ é o o ângulo medido como na Seção 2.3. Definimos a variedade

$M = (-\infty, 0) \times (-\pi/2, \pi/2)$ e a aplicação de retorno T definida em M , que preserva $d\mu = \cos \varphi dr d\varphi$.

Observação 3.1. Notamos que nossa adoção de parametrização é diferente da de Lenci [18], p.138. Devemos fazer algumas adaptações, como por exemplo a escolha dos cones na Seção 3.2 e as Figuras 3.5 e 3.6, com relação às de Lenci (e.g., [18], Fig. 4 e 7). Porém nossa escolha não altera os resultados obtidos por Lenci.

Note que, na adoção de M , não definimos T em pontos que passariam tangentes a \mathcal{U} ou que colidiriam com o vértice. Ou seja, excluimos $T^{-1}\partial M$. Esses pontos formam o conjunto de *singularidades* de T , denotado por S . Este é formado por duas curvas (conforme [18] p.138) $S^+ = S^{1+} \cup S^{2+}$ (como mostrado na Figura 3.5). A curva S^{1+} corresponde a tangências em $\partial\mathcal{D}_4$ no terceiro quadrante (em \mathcal{D} , tangências em \mathcal{U} , após quicar no lado vertical); esta curva é tão regular quanto f . Em relação à S^{2+} , sua primeira parte corresponde a elementos apontando para V (em \mathcal{D} , após quicar na horizontal); à medida que r aumenta, esses tornam-se tangentes a $\partial\mathcal{D}$. A fronteira desses dois comportamentos é o único ponto não-regular de S^{2+} .

Analogamente definimos $S^- = S^{1-} \cup S^{2-}$, onde S^{i-} são as curvas de singularidades de T^{-1} , obtidas de S^{i+} a partir de operador de reversão temporal $(r, \varphi) \mapsto (r, -\varphi)$. Denotemos por $S_n^\pm = \bigcup_{i=0}^n T^{\mp i} S^\pm$ e $S_\infty^\pm = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\pm$.

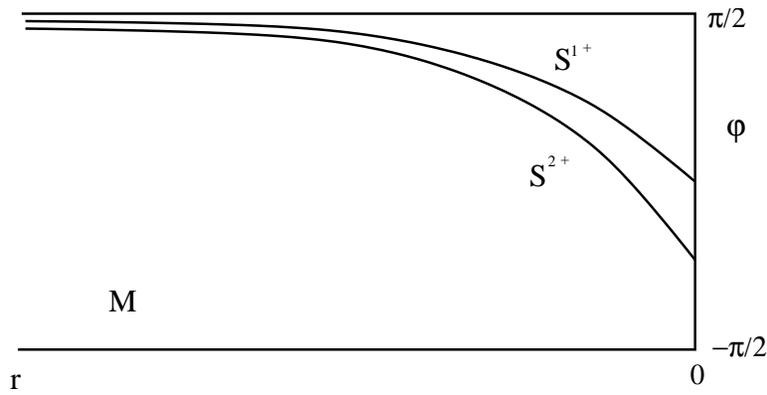


Figura 3.5: Curvas de singularidades.

A matriz da derivada de T é como em (2.3), mas com um sinal de mais ou de menos, dependendo do ponto considerado. Como estamos restringindo a uma porção de $\partial\mathcal{D}$, nota-se que rebatidas na parte reta da fronteira tem o efeito de mudar a orientação de um dado $v \in T_z M$.

Observação 3.2. Sejam \mathcal{L} a parede vertical mais a esquerda em \mathcal{D} e M_4 o espaço de fase definido pelos vetores baseados em \mathcal{L} . Como \mathcal{L} é uma seção transversal global podemos definir uma aplicação de retorno T_4 e seja μ_{M_4} a medida μ induzida em M_4 . Denote por M_3 a região de M que se localiza acima de S^{2+} . Por definição de S^{2+} , os elementos de M_3 são precisamente aqueles que, em \mathcal{D}_4 , cruzam o eixo y antes da próxima rebatida. Chamamos T_3 a aplicação de retorno a M_3 e podemos constatar que (M_3, T_3, μ_{M_3}) é isomorfa (com respeito a μ) a (M_4, T_4, μ_{M_4}) .

Proposição 3.3 (Lenci, [18], Corollary 3.3). *O sistema (M, T, μ) é recorrente no sentido de Poincaré, i.e., para cada conjunto A tal que $\mu(A) > 0$, a órbita de quase todo $z \in A$ retorna a A infinitas vezes.*

Corolário 3.4. *A aplicação do bilhar T é conservativa.*

Demonstração. Seja E um conjunto errante, i.e., $E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E = \emptyset$. Então a órbita de todo ponto $z \in E$ não retorna a E . Se $\mu(E) > 0$ contradiz a Proposição 3.3. Portanto $\mu(E) = 0$ e T é conservativa. \square

3.2 Campos de Cones e Vizinhanças de Conjuntos de Singularidades

Em TM definimos os campos de cones ([18], Section 4)

$$\mathcal{C}^+(z) = \{(dr, d\varphi) \in T_z M : drd\varphi \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}^-(z) = \{(dr, d\varphi) \in T_z M : drd\varphi \leq 0\}.$$

A forma da matriz DT como apresentada em (2.3) (e lembrando que ela possui sinais alternados) mostra que esses campos são estritamente invariantes, i.e., $DT_z \mathcal{C}^+(z) \subset \text{int } \mathcal{C}^+(Tz)$ e $DT_z^{-1} \mathcal{C}^-(z) \subset \text{int } \mathcal{C}^-(T^{-1}z)$.

Para $(r_n, \varphi_n) = z_n = T^{-n}z = T^{-n}(r, \varphi)$ definimos o n -ésimo cone encaixado como

$$\mathcal{C}_n^+(z) = DT_{z_n}^n \mathcal{C}^+(z_n) = \{(dr, d\varphi) \in T_z M : a_n \leq \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d\varphi}{dr} \leq b_n\}.$$

Os a_n e b_n podem ser calculados, utilizando a forma da matriz da derivada de T e obtemos

$$a_n = -\frac{K}{\cos \varphi} + \frac{1}{-\tau_{-1} + \frac{1}{-\frac{K_{-1}}{\cos \varphi_{-1}} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{-\tau_{-n}}}}}$$

e

$$b_n = -\frac{K}{\cos \varphi} + \frac{1}{-\tau_{-1} + \frac{1}{-\frac{K_{-1}}{\cos \varphi_{-1}} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{-\tau_{-n} + \frac{1}{-\frac{k_{-n}}{\cos \varphi_{-n}}}}}}}$$

Os valores τ_{-n} e K_{-n} são $\tau(z_{-n})$ e $K(z_{-n})$, respectivamente.

Proposição 3.5 (Lenci, [18] Proposition 4.2). *Para todo $z \notin S_{\infty}^{-}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \chi^u(z).$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{C}_n^+(z)$ converge, no sentido de conjuntos decrescentes, a um subespaço $E^u(z) \subset T_z M$. Chamamos este subespaço o subespaço instável. Este é uma reta de inclinação $\chi^u \cos \varphi$ com respeito a base $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \varphi\}_z$.

Ver também [7], Theorem 4.35, para mais detalhes.

Definimos a *distância instável* $d^u(z, w)$ entre dois pontos z e w como o ínfimo do comprimento de curvas diferenciáveis $t \mapsto \gamma(t)$ unindo z a w e tais que $\frac{d\gamma}{dt}(t) \in \mathcal{C}_1^+(\gamma(t))$. Toda curva assim será chamada uma *curva instável*. Tendo apresentado $d^u(z, w)$, a distância instável entre um ponto e um conjunto é definida da maneira usual.

Denotemos por $S^{0+} = \mathbb{R}_0^+ \times \{\pi/2\}$ e $S^{0-} = \mathbb{R}_0^+ \times \{-\pi/2\}$. Além disso, para $A \subset M$ e $\varepsilon > 0$,

$$A_{[\varepsilon]} = \{z \in M \mid d^u(z, A) \leq \varepsilon\}.$$

Teorema 3.6 (Lenci, [18] Theorem 5.1). *Denotamos por Leb a medida de Lebesgue em M , e assumimos (H1)-(H4). Para $i = 0, 1, 2$,*

$$\mu(S_{[\varepsilon]}^{i\pm}) \leq Leb(S_{[\varepsilon]}^{i\pm}) \ll \varepsilon, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Corolário 3.7 (Lenci, [18] Corollary 5.2). *Existe uma medida π definida no conjunto de singularidades, de massa finita, tal que, para todo conjunto fechado $A \subseteq S^+ \cup S^-$,*

$$Leb(A_{[\varepsilon]}) \leq \pi(A)\varepsilon + o(\varepsilon), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Esta medida é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue unidimensional no conjunto de singularidades.

3.3 Teoria Hiperbólica

Para a prova da ergodicidade local é necessário a existência e continuidade absoluta de variedades estáveis e instáveis locais. Como foi dito na Introdução, temos a Teoria de Pesin e as suas generalizações e a versão de Katok e Strelcyn para aplicações com singularidades que se adapta bem ao estudo de bilhares. Mas esta não cobre sistemas com medidas invariantes infinitas. Assim, nessa seção são apresentadas as extensões desses resultados para nosso caso, feitas por Lenci.

Em primeiro lugar apresentamos uma definição dada por Lenci ([18], Definition 6.1) de variedades invariantes locais que se encaixa bem ao nosso caso. Vamos supor que M é uma variedade riemanniana ¹.

Definição 3.8. Dado $z \in M \setminus S_\infty^{+(-)}$, definimos uma *variedade estável (instável) local*, $W^{s(u)}$, para T em z como um disco topológico C^1 contendo z , sem interseção com $S_\infty^{+(-)}$ e tal que:

- (a) o espaço tangente a $W^{s(u)}$, em todo ponto, está contido no cone estável (instável) de toda ordem, isto é, $\forall w \in W^{s(u)}, T_w W^{s(u)} \subset \bigcap_n \mathcal{C}_n^{-(+)}(w)$, e tem dimensão máxima (um, no nosso caso);
- (b) $\forall w \in W^{s(u)}, |T^n(w) - T^n(z)| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty(-\infty)$, onde $|\cdot|$ é a norma que provêm da métrica riemanniana;
- (c) Se $W_0^{s(u)}$ é outra variedade desse tipo, então $W^{s(u)} \cap W_0^{s(u)}$ também o é.

Se a convergência em (b) for exponencial, dizemos que $W^{s(u)}$ é *exponencialmente estável (instável)*.

O seguinte teorema é o de existência de variedades estáveis e instáveis locais. Notamos que tal como ele é enunciado em [18] (e aqui), ele é um teorema abstrato. Na seção 6 de [18], Lenci mostra como aplicá-lo ao caso dos bilhares estudados neste texto.

¹No original, Lenci não fez nenhum comentário sobre isso, mas no item (b) fica evidente a necessidade de tal suposição.

Teorema 3.9 (Lenci, [18], Theorem 6.2). *Sejam M uma variedade riemanniana, imersa em \mathbb{R}^n e (M, T, μ) um sistema dinâmico recorrente e inversível definido em M . Seja S o conjunto de descontinuidades de T . Suponha que, para algum $\alpha, \beta > 0$, o seguinte ocorre:*

(a) $\mu((S \cup \partial M)_{[\varepsilon]}) \ll \varepsilon^\alpha, \varepsilon \rightarrow 0^+;$

(b) *existe um feixe de cones invariantes e contínuos \mathcal{C} , tal que $\forall z \in M, \bigcap_n \mathcal{C}_n(z) = E^u(z)$ subespaço de $T_z M$;*

(c) *existe uma norma $\|\cdot\|$ para vetores do cone tal que, $\forall z \in M \setminus S \exists k(z) > 1$ tal que $\forall v \in \mathcal{C}(z)$,*

$$\|DT_z v\|_{Tz} \geq k(z) \|v\|_z;$$

(d) *para $H = \{z; \exists z_n \rightarrow z, k(z_n) \rightarrow 1\}$ vale $\mu(H_{[\varepsilon]}) \ll \varepsilon^\alpha, \varepsilon \rightarrow 0^+;$*

(e) *denote por $|\cdot|$ a norma riemanniana em TM e tome duas funções $0 < p \leq q$ tais que $\forall z \in M \setminus S, p(z) \|\cdot\|_z \leq |\cdot|_z \leq q(z) \|\cdot\|_z$. Então $p(z)$ pode acumular apenas em 0 se z acumula em $S \cup \partial M$ e $q(z) \ll [d^u(z, S \cup \partial M)]^{-\beta}$.*

Então para μ -q.t.p. z , a variedade instável local existe.

Além disso, tomemos $M_0 \subseteq M, \mu(M_0) < \infty$ tal que $(S \cup \partial M)_{[\varepsilon_0]} \subseteq M_0$ para algum $\varepsilon_0 > 0$. Então $W^u(z)$ é exponencialmente expansor com respeito aos retornos a M_0 . Isto significa que dado um $z \in M_0$, para o qual $W^u(z)$ existe, e denotando por $\{-n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência de seus retornos no passado, então $\exists C, \lambda > 0$ tais que $\forall w \in W^u(z), |T^{-n_k}(w) - T^{-n_k}(z)| \leq C e^{-\lambda k}, k \rightarrow +\infty$.

Observação 3.10. Observe que essa última afirmação implica, para o caso de espaço de medida finita, a existência de expoentes de Lyapunov não nulos para a aplicação de retorno.

Na definição a seguir, dada por Lenci ([18], Definition 7.4), um cilindro é um conjunto difeomórfico a $B \times \mathbb{R}^{N-\nu}$ onde B é uma bola não-degenerada em \mathbb{R}^ν .

Definição 3.11. Uma folheação ν -dimensional \mathcal{W} em \mathbb{R}^N é *absolutamente contínua* com respeito a medida μ se o seguinte ocorre: dados qualquer espaço $(N - \nu)$ -dimensional afim Θ e qualquer cilindro C contendo Θ , e qualquer união L de folhas $W(z) \in \mathcal{W}$, transversal em todo ponto à direção de Θ e excedendo C (isto é, $\partial W(z) \in \mathbb{R}^N \setminus C$), então temos que

$$\mu(L \cap C) = 0 \quad \implies \quad Leb_\Theta(L \cap \Theta) = 0;$$

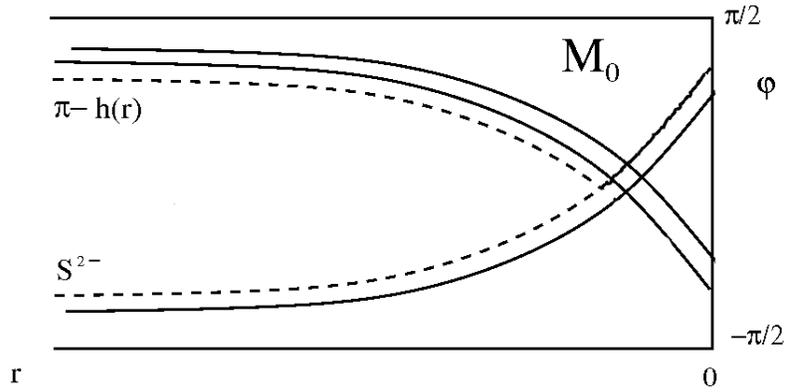


Figura 3.6: A escolha de M_0 , limitada pelas semi-retas horizontais, pelo segmento de reta vertical e pelas curvas tracejadas. A função h que aparece na figura é tal que $h(r) \sim |f'(x)|$ (ver [18], p.153 para mais detalhes na escolha do conjunto M_0).

onde Leb_Θ é a medida de Lebesgue $(N - \nu)$ -dimensional em Θ .

Teorema 3.12 (Lenci, [18], Theorem 7.5). *Supondo (H1)-(H5), as folheações estáveis e instáveis em M são absolutamente contínuas com respeito a μ .*

3.4 Ergodicidade

Sabemos que em Teoria Ergódica Infinita nem todas as formulações de ergodicidade são equivalentes. Enunciamos a seguir uma definição alternativa de ergodicidade, que será utilizada nessa seção.

Definição 3.13 (Lenci [18], Definition 8.1). Dizemos que um sistema dinâmico (M, T, μ) é *Boltzmann-ergódico* quando para toda $\psi \in L^1_\mu(M)$ a média temporal

$$\psi^*(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\psi \circ T^k)(z)$$

é constante para μ -quase todo ponto $z \in M$.

Lenci utilizou essa definição para o enunciado do Teorema Ergódico Local, pois ela é mais conveniente para se utilizar o método de Hopf. Notamos que essa definição não impede a existência de dois conjuntos invariantes complementares ambos com medida infinita. Mas, como se mostra no final dessa seção, isto não ocorre no nosso caso.

Enunciamos a seguir condições suficientes para provar um teorema de ergodicidade local em sistemas com medida invariante infinita. Tudo está contido em [18], Section 8, e é uma generalização das enunciadas no trabalho de Liverani e Wojtkowski [19].

Definição 3.14 (Lenci [18], Definition 8.2). Um conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *regular* se é uma união finita de pedaços Σ_i de subvariedades de codimensão 1, tal que:

- (i) Σ_i é o fecho do seu interior (na topologia da subvariedade);
- (ii) Os pedaços sobrepõem-se no máximo em suas fronteiras, isto é, $\Sigma_i \cap \Sigma_j \subset \partial \Sigma_i \cap \partial \Sigma_j$;
- (iii) $\partial \Sigma_i$ é uma união finita de suconjuntos compactos de subvariedades de codimensão 1.

A é chamado *localmente regular* se, para todo $z \in \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança U de z tal que $A \cap U$ é regular.

(C1) *Espaço de Fase*: O espaço de fase M é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^{2d} , com ∂M regular. \mathbb{R}^{2d} está dotado de uma forma simplética que assume-se equivalente a padrão, isto é, o elemento de volume simplético $d\mu$ é assumido como absolutamente contínuo com respeito ao elemento de volume padrão $dLeb$, e vice-versa.

(C2) *Transformação*: A transformação T é inversível e recorrente, no sentido de Poincaré como na Proposição 3.3. Ela não está definida no conjunto de singularidades S^+ e T^{-1} não está definida em S^- . Em $M \setminus S^+$, T preserva a forma simplética mencionada em (C1).

(C3) *Feixe de Cones*: Um feixe de cones \mathcal{C}^+ está definido onde a transformação está definida, é contínuo e invariante por T . Além disso, \mathcal{C}^+ é estritamente invariante. A condição (C1) garante que o mesmo ocorre para \mathcal{C}^- , o feixe de cones constituído pelos fechos dos cones $\mathbb{R}^{2d} \setminus \mathcal{C}^+$.

(C4) *Regularidade Local dos Conjuntos de Singularidades*: Denotando por $S_n^\pm = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{\mp i} S^\pm$, suponhamos que S_n^+ e S_n^- são localmente regulares para todo n .

(C5) *Medida das vizinhanças tubulares*: Em S^- , existe uma medida finita π_- tal que para todo subconjunto fechado A de S^- (na topologia de S^-),

$$\mu(A_{[\varepsilon]}) \leq \pi_-(A)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

A medida π_- deve ser absolutamente contínua com respeito a medida μ induzida em S^- e a distância usual. Uma condição análoga vale para S^+ e a distância estável.

(C6) *Alinhamento correto dos conjuntos de singularidades:* O espaço tangente à S^+ em qualquer ponto $z \in S^+$ possui uma linha característica contida em $\mathcal{C}^-(z)$. A condição reversa vale para S^- .

(C7) *Propriedade de não-contração ao redor dos conjuntos de singularidades:* Para todo $z_0 \in M$, existem U_0 vizinhança de z_0 , $\varepsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tal que, sempre que $w \in S_{[\varepsilon]}^-$ e $T^n w \in U_0$, $n > 0$, então

$$|DT_w^n v| \geq k|v|,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma riemanniana apropriada de um vetor em \mathbb{R}^2 . A condição análoga vale para o sistema dinâmico no passado.

Para apresentar uma versão da última condição devemos introduzir o conceito de norma crescente:

Definição 3.15. Uma norma $\|\cdot\|$ é dita *crescente* se satisfaz as hipóteses (c) e (d) do Teorema 3.9, com $H = \emptyset$, e é localmente equivalente à norma riemanniana $|\cdot|$ de (C7) (i.e., para todo conjunto compacto A , disjunto de S^+ , existe $C = C(A) > 1$, tal que $C^{-1}|\cdot|_z \leq \|\cdot\|_z \leq C|\cdot|_z, \forall z \in A$).

(C8) *Sinai-Chernov Ansatz para a norma crescente:* Existe uma norma crescente $\|\cdot\|$ tal que para π_- -q.t. $z \in S^-$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{0 \neq v \in C_1(z)} \frac{\|DT_z^n v\|}{\|v\|} = \infty.$$

Enunciamos agora o *teorema de ergodicidade local*.

Teorema 3.16 (Lenci [18], Theorem 8.5). *Considere um sistema dinâmico (M, T, μ) dotado com uma estrutura hiperbólica. Suponha além disso que este sistema satisfaz (C1) – (C8). Então, para qualquer z_0 que possui uma semi-órbita (i.e., $z_0 \in M \setminus S_\infty^+$ ou $z_0 \in M \setminus S_\infty^-$) existe uma vizinhança U de z_0 pertencendo a uma componente ergódica de T .*

Seu principal corolário é a ergodicidade global de T :

Proposição 3.17 (Lenci [18], Proposition 8.10). *Se a aplicação do bilhar T é localmente ergódica como no Teorema 3.16, então T é Boltzmann-ergódica.*

Além disso, pode-se provar que a aplicação de retorno T_3 ao espaço de fase de medida finita M_3 é ergódica:

Proposição 3.18 (Lenci [18], Proposition 8.11). *Para bilhares que verificam o Teorema 3.16, (M_3, T_3, μ_{M_3}) é ergódica.*

Corolário 3.19. *(M, T, μ) é ergódica no sentido da Definição 2.12. (E portanto não há decomposição do espaço M em conjuntos invariantes de medida infinita.)*

Demonstração. De fato, temos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}M_3 = M \pmod{\mu}$ e usamos a Proposição 2.15. □

Corolário 3.20. *Para bilhares que verificam o Teorema 3.16, T_3^m é ergódica, para todo $m \geq 1$.*

Demonstração. De fato, como é dito na demonstração da Proposição 3.18, quase todos dois pontos $z', z'' \in M_3$ podem ser ligados por um caminho alternado de variedades estáveis e instáveis locais para T que se interceptam em pontos típicos. Um ponto típico é um ponto pertencente a um conjunto arbitrário de medida total de M_3 .

Tomemos uma função ψ contínua com suporte compacto em M_3 .

$$\psi^{\pm}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ T_3^{\pm jm})(z)$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, e igualdade em quase todo ponto das duas médias, o conjunto

$$A = \{z \in M_3 : \exists \psi^+(z), \psi^-(z) \text{ e } \psi^+(z) = \psi^-(z) = \psi^*(z)\}$$

tem medida total em M_3 . Diremos que pontos que pertencem a esse conjunto são típicos. Ergodicidade será obtida quando mostrarmos que $\psi^+(z') = \psi^-(z'')$ para todo $z', z'' \in M_3$. Basta mostrarmos que $\psi^+(w)$ é constante para todo $w \in W^s(z)$ típico e $\psi^-(w)$ é constante para todo $w \in W^u(z)$ típico. Vamos considerar o caso $w \in W^s(z)$ o outro sendo de demonstração análoga. Para $j > 0$, $T_3^{jm}z = T^{n_j}z$ e $T_3^{jm}w = T^{n_j}w$, ou seja, os tempos de retorno a M_3 para z e w são os mesmos. Se isso não fosse verdade, teríamos um j tal que $T^{n_j}z \in M_3$ e $T^{n_j}w \notin M_3$, digamos. Mas isto implicaria que a variedade estável de z corta o conjunto de singularidades S^{2+} em um ponto interior. o que não acontece.

Portanto, quando $j \rightarrow +\infty$, $|T_3^{jm}z - T_3^{jm}w| \rightarrow 0$ e, como ψ é uniformemente contínua, $|\psi(T_3^{jm}z) - \psi(T_3^{jm}w)| \rightarrow 0$, assim $\psi^+(z) = \psi^+(w)$ e T_3^m é ergódica, como queríamos demonstrar. □

Observação 3.21. Uma aplicação direta deste último corolário é que o isomorfismo entre (M_3, T_3, μ_{M_3}) e (M_4, T_4, μ_{M_4}) garante que T_4^m é ergódica para todo $m \geq 1$.

Capítulo 4

Mistura, K -automorfismos e Bilhares

Neste capítulo iniciamos a apresentação dos resultados principais deste texto. Primeiro, mostramos que mesas de bilhares em \mathcal{D} satisfazendo as condições $(H1)–(H5)$ de Lenci são K -automorfismos. Isto é feito na Seção 4.2. Para isso, utilizamos a Proposição 4.1, que diz que uma condição suficiente para que um automorfismo seja de Kolmogorov é que exista uma aplicação de retorno a um conjunto, cujo saturado pela inversa do automorfismo seja todo o espaço (em medida), que seja um K -automorfismo. A seguir, mostramos que a aplicação de retorno associada às rebatidas na parede vertical \mathcal{L} , satisfaz as condições da Proposição 4.1, e disso segue o Teorema A.

Na Seção 4.3 apresentamos uma prova alternativa do Corolário 1.1. Ela é baseado no trabalho de Coudene [10], que tem como característica principal resgatar o método de Hopf utilizando algumas ferramentas de Análise Funcional.

4.1 Definição do Sistema Dinâmico

Precisamos explicitar a transformação com a qual trabalharemos pois até agora, dada a mesa \mathcal{D} , já utilizamos duas transformações do bilhar, a saber $T_4 : M_4 \rightarrow M_4$ que é proveniente das rebatidas na parede vertical \mathcal{L} e $T : M \rightarrow M$, estudada por Lenci e proveniente das rebatidas na parte dispersiva \mathcal{U} . A utilização de várias transformações é um artifício para simplificar alguns passos durante as provas dos vários argumentos. A princípio, as rebatidas na parte dispersiva contém a informação caótica do bilhar, mas geram um sistema de medida infinita. Assim trabalha-se também com as batidas na parede vertical, que geram um sistema de medida finita.

Vamos definir $M_5 = M \cup M_4$, que considera tanto as batidas na parede vertical quanto as batidas na parte dispersiva; e T_5 a transformação de retorno a M_5 . Como M e M_4 se originam de seções transversais ao fluxo do bilhar, M_5 também é proveniente de uma seção transversal global, ou seja das rebatidas na parte dispersiva \mathcal{U} e na parede vertical \mathcal{L} . Portanto T_5 é uma aplicação do bilhar, que preserva a medida infinita $d\mu = \cos \varphi dr d\varphi$ definida em M_5 . Note que vamos utilizar a mesma notação para a medida invariante pela transformação $T : M \rightarrow M$, também infinita.

A aplicação T_5 é conservativa pois, como é explicado por Lenci em [18], Corollary 3.3, para provar que $T : M \rightarrow M$ é recorrente, utiliza-se o fato de que quase todas as trajetórias do fluxo do bilhar atingem \mathcal{L} pelo menos uma vez (e portanto infinitas vezes). Mas esse argumento continua válido para T_5 e assim concluímos que T_5 é conservativa, argumentando como no Corolário 3.4. Como $T_4 : M_4 \rightarrow M_4$ é ergódica, (ver Observação 3.21) e é uma aplicação induzida de T_5 , esta última é ergódica pela Proposição 2.15.

Será para essa aplicação $T_5 : M_5 \rightarrow M_5$, que descreve completamente a dinâmica do bilhar, que obteremos nossos resultados.

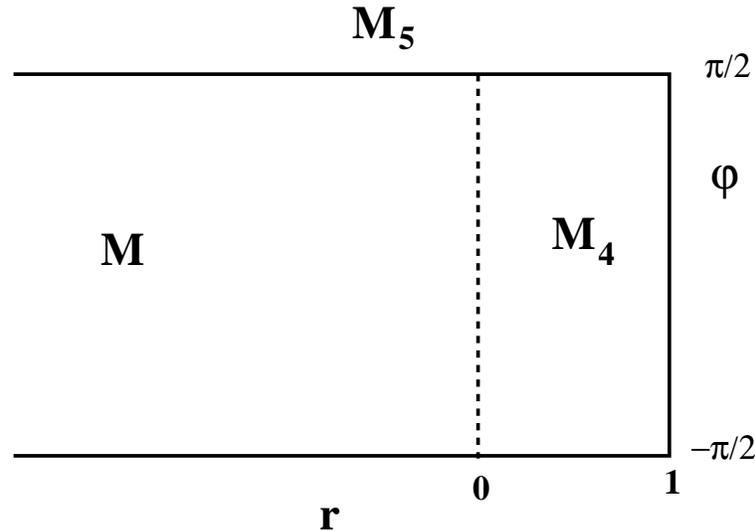


Figura 4.1: O espaço de fase M_5 . Neste desenho, a linha $r = 0$, corresponde ao vértice V (da Figura 3.1) e $r = 1$ corresponde ao vértice no ponto $(0,0)$ de \mathcal{D} .

4.2 K-automorfismos e Prova do Teorema A

Vamos precisar da seguinte proposição. Recorde as definições da Seção 2.2.

Proposição 4.1. *Suponha que \mathcal{F} é um automorfismo do espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) conservativo e ergódico e $E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) > 0$. Se \mathcal{F}_E é um K -automorfismo (finito ou infinito) e $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n}E = X \pmod{\mu}$, então \mathcal{F} é um K -automorfismo (finito ou infinito).*

Demonstração. Como \mathcal{F}_E é um K -automorfismo existe \mathcal{K}_E sub- σ -álgebra de $\mathcal{B}_E = \mathcal{B} \cap E$ tal que

- (1) $\mathcal{F}_E \mathcal{K}_E \supset \mathcal{K}_E$;
- (2) $\bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_E^n \mathcal{K}_E = \mathcal{B}_E \pmod{\mu_E}$;
- (3) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_E^{-n} \mathcal{K}_E = \mathcal{N}_E = \{\emptyset, E = X \cap E\} \pmod{\mu_E}$.

Tomemos $\mathcal{K} = \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E$. Temos que

$$(i) \quad \mathcal{F}\mathcal{K} = \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^{i+1} \mathcal{K}_E = \bigvee_{i=-\infty}^1 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E \supset \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E = \mathcal{K}.$$

$$(ii) \quad \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n \mathcal{K} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^n \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E = \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E = \mathcal{B} \pmod{\mu}; \text{ pois, pela condição}$$

$$(2), \mathcal{B}_E \subset \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E, \text{ e dado } A \in \mathcal{B},$$

$$A = A \cap X = A \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-i}E = \bigcup_{i=0}^{\infty} (A \cap \mathcal{F}^{-i}E) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-i}(\mathcal{F}^i A \cap E).$$

Como $\mathcal{F}^i A \cap E \in \mathcal{B}_E$, temos que $\mathcal{F}^{-i}(\mathcal{F}^i A \cap E) \in \mathcal{F}^{-i} \mathcal{B}_E$ e, portanto, $A \in \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E$.

Logo $\mathcal{B} \subset \bigvee_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E$.

$$(iii) \quad \text{Queremos mostrar que } \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E = \mathcal{N} \pmod{\mu}. \text{ Para isso}$$

basta mostrar que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \mathcal{K} \subset \mathcal{N} \pmod{\mu}$.

Seja $A \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E$ e vamos supor que $\mu(A) > 0$. Podemos supor ainda que $\mu(A \cap E) > 0$ pois, se não, se tomamos A^c como conjunto inicial.

$$\text{Assim, } A \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E \Rightarrow A \cap E \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}^i \mathcal{K}_E \cap E \text{ que é igual a}$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_E^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}_E^i \mathcal{K}_E, \text{ por definição de } \mathcal{F}_E.$$

Pela condição (1), $\bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}_E^i \mathcal{K}_E = \mathcal{K}_E$, logo $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_E^{-n} \bigvee_{i=-\infty}^0 \mathcal{F}_E^i \mathcal{K}_E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_E^{-n} \mathcal{K}_E = \mathcal{N}_E$ mod μ_E , pela condição (3). Assim $\mu_E((A \cap E) \triangle E) = 0$ e $\mu_E(A^c \cap E) = 0$. Portanto $\mu(A^c \cap E) = 0$.

Além disso, $\mu_E(\mathcal{F}_E^k(A^c \cap E)) = \mu_E(\mathcal{F}_E^k A^c \cap E) = 0$, para todo $k \geq 0$. Assim $\mu_E(\mathcal{F}^j A^c \cap E) = 0$, para todo $j \geq 0$, pois $\mu_E(\mathcal{F}^j A^c \cap E) \leq \sum_{k=1}^j \mu_E(\mathcal{F}_E^k A^c \cap E) = 0$. Como $A^c = A^c \cap X = A^c \cap \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-j} E = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-j}(\mathcal{F}^j A^c \cap E)$, temos que $\mu(A^c) = 0$ e portanto $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n} \mathcal{K} \subset \mathcal{N}$ mod μ , como queríamos demonstrar. \square

Antes de prosseguirmos vamos recordar um importante teorema que será necessário. Este foi essencialmente provado por Pesin em [24], e vale nas condições de nossos bilhares (ver [13] para maiores detalhes).

Teorema 4.2 (Pesin [24] Theorem 7.2, Katok e Strelcyn [13] Theorem 13.1). *Seja \mathcal{V} uma união finita de variedades riemannianas compactas $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \dots \mathcal{V}_s$ (possivelmente com bordos e quinas), todas de mesma dimensão $d \geq 2$, coladas ao longo de uma quantidade finita de subvariedades C^1 de codimensões positivas e \mathcal{F} uma transformação sobre \mathcal{V} que preserve uma probabilidade de Borel μ e ambas satisfaçam as condições de Katok e Strelcyn indicadas na Seção 1.1 de [13]. Suponhamos que o conjunto $\Sigma(\mathcal{F}) = \{x \in X : \text{os expoentes de Lyapunov em } X \text{ são não nulos}\}$ tenha medida μ positiva. Então existem conjuntos $\Sigma_i \subset \Sigma(\mathcal{F})$, $i = 0, 1, 2, \dots$, tais que*

$$(1) \Sigma(\mathcal{F}) = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i, \Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset \text{ para } i \neq j, i, j = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(2) \mu(\Sigma_0) = 0, \mu(\Sigma_i) > 0, \text{ para } i > 0;$$

$$(3) \text{ para } i > 0: \mathcal{F}(\Sigma_i) = \Sigma_i, \mathcal{F}|_{\Sigma_i} \text{ é ergódica};$$

$$(4) \text{ para } i > 0, \text{ existe uma decomposição } \Sigma_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \Sigma_i^j, n_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ onde}$$

$$(a) \Sigma_i^{j_1} \cap \Sigma_i^{j_2} = \emptyset \text{ para } j_1 \neq j_2;$$

$$(b) \mathcal{F}(\Sigma_i^j) = \Sigma_i^{j+1} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \mathcal{F}(\Sigma_i^{n_i}) = \Sigma_i^1;$$

$$(c) \mathcal{F}^{n_i}|_{\Sigma_i^1} \text{ é um K-automorfismo finito.}$$

Passemos agora para o caso do bilhar.

Lema 4.3. *Seja M_4 o espaço de fase associado às rebatidas na parede vertical. Então T_4 é um K-automorfismo finito.*

Demonstração. Sabemos pela Observação 3.21 que T_4^n é ergódica, para todo $n \geq 1$. Além disso, de acordo com a Observação 3.10, os expoentes de Lyapunov para T_4 são não nulos. Assim podemos aplicar o Teorema 4.2 ao nosso caso. Mas como T_4 é ergódica, temos que a decomposição $\Sigma(T_4) = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i$ se reduz a $\Sigma(T_4) = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, pois cada um dos Σ_i dados pelo Teorema são T_4 -invariantes. Além disso, na decomposição de Σ_1 dada pelo item (4) do Teorema 4.2, $n_1 = 1$, pois cada Σ_1^j é um conjunto $T_4^{n_1}$ -invariante e como T_4^n é ergódica para todo $n \geq 1$, temos que cada um desses conjuntos ou tem medida zero ou tem medida total em Σ_1 . Portanto, pelo subitem (c), isto implica que T_4 é um K-automorfismo finito, como queríamos demonstrar. \square

Pela Proposição 4.1, segue que (M_5, T_5, μ) é um K-sistema infinito, concluindo a prova do Teorema A.

4.3 Sistemas F-misturadores e Outra Prova do Corolário 1.1

Explicaremos agora uma condição suficiente para que um sistema seja F-misturador, sem passar pela prova de K-automorfismo. Ele é baseado no trabalho de Coudene [10] adaptado para nossa definição de F-misturador. De agora em diante X é um espaço métrico, \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel de X , μ uma medida σ -finita infinita regular sobre X e $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva μ .

Definição 4.4 ([10] Definition 1). Definimos a *distribuição estável* de \mathcal{F} no ponto $x \in X$ como sendo o conjunto

$$W^s(x) = \{y \in X : d(\mathcal{F}^n(x), \mathcal{F}^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *W^s -invariante* quando existe um conjunto de medida total $\Omega \subset X$ tal que para todo $x, y \in \Omega$, $y \in W^s(x)$ tem-se que $f(x) = f(y)$.

Se \mathcal{F} é invertível define-se a *distribuição instável* $W^u(x)$ de um ponto x para \mathcal{F} como sendo a distribuição estável para \mathcal{F}^{-1} . De maneira análoga define-se função W^u -invariante.

Diremos que a distribuição estável W^s é ergódica se toda função W^s invariante for constante em μ -quase todo ponto.

Proposição 4.5 (Baseado em [10], Theorem 2). *Seja X um espaço métrico, μ uma medida σ -finita infinita regular sobre X , $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida e $f \in L^2_\mu(X)$. Então qualquer ponto de acumulação fraco de $f \circ \mathcal{F}^n$ é W^s -invariante.*

Demonstração. Seja g um ponto de acumulação fraco de $f \circ \mathcal{F}^{n_i}$. Primeiro suponhamos que f é contínua com suporte compacto (portanto uniformemente contínua). O Teorema de Banach-Saks (Teorema 2.6) e o Teorema 2.7 garantem que existem subsequências m_l e n_{i_k} tais que

$$\Psi_l(x) = \frac{1}{m_l} \sum_{k=1}^{m_l} f \circ \mathcal{F}^{n_{i_k}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g \quad \mu - q.t.p..$$

Se $y \in W^s(x)$, então

$$|\Psi_l(x) - \Psi_l(y)| \leq \frac{1}{m_l} \sum_{k=1}^{m_l} |f \circ \mathcal{F}^{n_{i_k}}(x) - f \circ \mathcal{F}^{n_{i_k}}(y)| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto g é W^s -invariante.

Seja $f \in L^2_\mu$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe f_0 função contínua de suporte compacto tal que $\|f - f_0\|_2 < \varepsilon$ (pelo Teorema 2.9). Passando a uma subsequência, podemos assumir que $f_0 \circ \mathcal{F}^{n_i}$ converge fracamente a alguma função g_0 (essa existência é garantida pelo Teorema 2.5) que é W^s -invariante. Isto dá $(f - f_0) \circ \mathcal{F}^{n_i} \rightarrow g - g_0$ fracamente, o que implica que

$$\|g - g_0\|_2 \leq \liminf \|(f - f_0) \circ \mathcal{F}^{n_i}\|_2 \leq \|f - f_0\|_2 < \varepsilon.$$

Logo existe uma sequência de funções W^s -invariantes que converge a g na norma L^2_μ e, tomando uma subsequência, para quase todo ponto. Assim, para um conjunto de medida total Ω , se $y, x \in \Omega$, $y \in W^s(x)$, temos que

$$g(y) = \lim g_n(y) = \lim g_n(x) = g(x).$$

Isto mostra que g é W^s -invariante. □

Proposição 4.6 (Baseado em [10], Theorem 3). *Seja X um espaço métrico, μ uma medida σ -finita infinita regular sobre X , $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ uma transformação invertível que preserva medida e $f \in L^2_\mu(X)$. Então qualquer ponto de acumulação fraco de $f \circ \mathcal{F}^n$ é W^s -invariante e W^u -invariante.*

Demonstração. Seja g um ponto de acumulação fraco de $f \circ \mathcal{F}^{n_i}$. Primeiro mostramos que existe uma função g' que é W^s -invariante e W^u -invariante e que satisfaz $\langle f, g' \rangle = \langle g, g' \rangle$.

Aplicamos a Proposição 4.5 a \mathcal{F}^{-1} e à sequência $g \circ \mathcal{F}^{-n_i}$. Existe uma subsequência n_{i_k} e uma função g' W^u -invariante tal que $g \circ \mathcal{F}^{-n_{i_k}} \rightarrow g'$ fracamente. A função g é W^s -invariante, então para todo $n \in \mathbb{Z}$, $g \circ \mathcal{F}^{-n}$ são W^s -invariantes. Logo g' é W^s -invariante. Agora temos que

$$\langle f, g' \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, g \circ \mathcal{F}^{-n_{i_k}} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f \circ \mathcal{F}^{n_{i_k}}, g \rangle = \langle g, g' \rangle.$$

Denotemos por I o subespaço fechado de L^2_μ contendo todas as funções que são W^s e W^u -invariantes. Este subespaço é \mathcal{F} -invariante. Agora escrevemos f como uma soma

$$f = f_1 + f_2,$$

$f_1 \in I$ e $f_2 \in I^\perp$. extraindo subsequências podemos encontrar duas funções g_1 e g_2 e uma sequência n'_i tais que

$$f_1 \circ \mathcal{F}^{n'_i} \rightarrow g_1 \quad f_2 \circ \mathcal{F}^{n'_i} \rightarrow g_2 \quad \text{fracamente.}$$

Isto mostra que $g_1 \in I$, $g_2 \in I^\perp$ e $g = g_1 + g_2$. No entanto, existe uma função $g'_2 \in I$ tal que

$$0 = \langle f_2, g'_2 \rangle = \langle g_2, g_2 \rangle.$$

Portanto $g_2 = 0$ e g é W^s -invariante e W^u -invariante. □

Corolário 4.7. *Se W^s é ergódica então \mathcal{F} é F-misturadora.*

Demonstração. Seja $f \in L^2_\mu$. Se $f \circ \mathcal{F}^n$ possui um limite fraco, pela Proposição 4.5 e pela hipótese de W^s ser ergódica, este limite é constante em quase todo ponto, logo é igual a zero em quase todo ponto. Portanto \mathcal{F} é misturadora.

Suponhamos, por absurdo, que $f \circ \mathcal{F}^n$ não convirja fracamente a zero. Assim existem um $\varepsilon > 0$, uma subsequência n_i e uma função $h \in L^2_\mu$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int (f \circ \mathcal{F}^{n_i}) h \, d\mu > 0.$$

Mas pelo Teorema de Alaoglu (Teorema 2.5), existe uma subsequência n_{i_k} tal que $f \circ \mathcal{F}^{n_{i_k}}$ converge fracamente para uma função W^s -invariante, pela Proposição 4.5, que é constante por hipótese e portanto deve ser zero em quase todo ponto. Esta contradição mostra que \mathcal{F} é F-misturadora. □

Demonstração do Corolário 1.1. Tomemos uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que seja ao mesmo tempo W^s -invariante e W^u -invariante. Pela continuidade absoluta das variedades estáveis e instáveis locais (pelo Teorema 3.12), W^s -invariância e W^u -invariância implicam que esta função deve ser constante em quase todo ponto da componente ergódica de T_5 . Mas como T_5 possui apenas uma componente ergódica (como visto na Proposição 3.17), ψ é constante em quase todo ponto, ou seja, W^s e W^u são ergódicas. Portanto, pelo Corolário 4.7, T_5 é F-misturadora. \square

Capítulo 5

Taxa de Mistura

Nesta seção apresentamos a demonstração do Teorema B. Utilizaremos a técnica que Chernov e Markarian desenvolveram em [8] para provar que mesas de bilhares semidispersiva com cúspides (compactas) possuem decaimento de correlações polinomial. Entretanto não podemos utilizar a técnica completa, pois como esta é baseada nos trabalhos de Young [33] e Markarian [21], são empregados certos resultados de transformações misturadoras de espaços de medida finita que não valem no caso infinito, e.g., transformações misturadoras são topologicamente mixing (utilizado em [33], p. 161).

5.1 Condições Geométricas

Continuamos trabalhando em mesas \mathcal{D} como no Capítulo 3, satisfazendo as hipóteses (H1) - (H5) lá listadas.

Fixemos um $N_0 \gg 1$. Vamos estudar o comportamento de uma trajetória, que partindo de \mathcal{L} (com coordenadas (r, φ) em M_4), entra na direção da cúspide, e regressa após $N > N_0$ rebatidas. Para isto vamos adotar novas coordenadas nesta parte do trabalho. Sejam $x_n \in [0, \infty)$, $0 \leq n \leq N$, a coordenada- x associada à n -ésima rebatida em \mathcal{U} , (onde $x_0 = 0$, saindo de \mathcal{L}), e $\gamma_n \in [0, \pi/2]$, $0 \leq n \leq N$, o ângulo positivo que a trajetória faz com a tangente no ponto de colisão de coordenada x_n ($\gamma_0 = \pi/2 - |\varphi|$).

Defina

$$x_{N_2} := \max \{x_n : n = 1, 2, \dots, N\},$$

ou seja, este é o valor da abscissa do ponto mais interno na direção da cúspide

Temos que se $n \leq N_2 - 1$ então

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \tan^{-1} |f'(x_n)| + \tan^{-1} |f'(x_{n+1})| \quad (5.1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{\tan(\gamma_n + \tan^{-1} |f'(x_n)|)}. \quad (5.2)$$

Se $n \geq N_2$ então

$$\gamma_n = \gamma_{n+1} + \tan^{-1} |f'(x_n)| + \tan^{-1} |f'(x_{n+1})| \quad (5.3)$$

$$x_n = x_{n+1} + \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{\tan(\gamma_{n+1} + \tan^{-1} |f'(x_{n+1})|)}. \quad (5.4)$$

Lema 5.1. *Temos que $|N_2 - N/2| = O(1)$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_{N_2+1} \geq x_{N_2-1}$. Temos, por um lado que

$$\gamma_{N_2} = \gamma_{N_2-1} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-1})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2})|.$$

Por outro lado,

$$\gamma_{N_2} = \gamma_{N_2+1} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+1})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2})|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma_{N_2-1} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-1})| &= \gamma_{N_2+1} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+1})| \\ &\leq \gamma_{N_2+1} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-1})|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\gamma_{N_2-1} \leq \gamma_{N_2+1}.$$

Agora, queremos mostrar que $x_{N_2-i} \leq x_{N_2+i}$ e $\gamma_{N_2-i} \leq \gamma_{N_2+i}$, para todo $i = 1, 2, \dots$ enquanto as colisões permanecem na cúspide. De fato, suponhamos que para i é verdade e mostraremos para $i + 1$. Temos que

$$\begin{aligned} x_{N_2-i} &= x_{N_2-(i+1)} + \frac{f(x_{N_2-i}) + f(x_{N_2-(i+1)})}{\tan(\gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})|)} \\ x_{N_2+i} &= x_{N_2+(i+1)} + \frac{f(x_{N_2+i}) + f(x_{N_2+(i+1)})}{\tan(\gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})|)} \\ \gamma_{N_2-i} &= \gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-i})| \\ \gamma_{N_2+i} &= \gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+i})|. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} & \gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-i})| \\ & \leq \gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+i})| \\ & \leq \gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})| + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-i})|. \end{aligned}$$

Logo

$$\gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})| \leq \gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})|. \quad (5.5)$$

Novamente pela hipótese de indução e por (5.5), temos que

$$\begin{aligned} & x_{N_2-(i+1)} + \frac{f(x_{N_2-i}) + f(x_{N_2-(i+1)})}{\tan(\gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})|)} \\ & \leq x_{N_2+(i+1)} + \frac{f(x_{N_2+i}) + f(x_{N_2+(i+1)})}{\tan(\gamma_{N_2+(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2+(i+1)})|)} \\ & \leq x_{N_2+(i+1)} + \frac{f(x_{N_2+i}) + f(x_{N_2+(i+1)})}{\tan(\gamma_{N_2-(i+1)} + \tan^{-1} |f'(x_{N_2-(i+1)})|)}. \end{aligned}$$

Logo

$$x_{N_2-(i+1)} + f(x_{N_2-(i+1)}) \leq x_{N_2+(i+1)} + f(x_{N_2+(i+1)}).$$

Como $x_i \geq 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, N$, segue que

$$x_{N_2-(i+1)} \leq x_{N_2+(i+1)} \quad \text{e} \quad \gamma_{N_2-(i+1)} \leq \gamma_{N_2+(i+1)},$$

como queríamos mostrar. Portanto $|N_2 - N/2| = O(1)$. \square

Vamos agora dividir a direção da cúspide em três regiões distintas. Para isso, escolhe-
mos $\bar{\gamma}$ um valor suficientemente pequeno, não importando seu valor exato, e.g. $\bar{\gamma} = 10^{-10}$.
Esta escolha permite realizar estimativas em três regiões, definindo

$$\begin{aligned} N_1 &= \max\{n < N_2; \gamma_n \leq \bar{\gamma}\} \\ N_3 &= \min\{n > N_2; \gamma_n \leq \bar{\gamma}\}. \end{aligned}$$

Chamaremos a região de rebatidas entre 1 e N_1 de *período de entrada*, entre N_1 e N_3 de *período de contorno* e entre N_3 e N de *período de saída* da trajetória da partícula.

Estaremos interessados em calcular a taxa de expansão da aplicação do bilhar. Para isso, usaremos a divisão acima para estudar a taxa a medida que a trajetória está no período de entrada, no de contorno e no de saída.

Além disso, consideramos x_1 suficientemente grande, e.g. $x_1 > 10^6$, visto que estamos interessados em trajetórias que possuam N rebatidas na cúspide, para N suficientemente grande.

A partir desse ponto, vamos trabalhar na mesa \mathcal{D} definida pela função $f(x) = (x+1)^{-1}$.

Lema 5.2. *Temos que*

$$N_1 \asymp N_2 - N_1 \asymp N_3 - N_2 \asymp N - N_3 \asymp N,$$

portanto todos os segmentos possuem tamanho de ordem N . Além disso

$$x_1 \asymp N^{\frac{1}{6}} \quad e \quad x_{N_2} \asymp N^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

e

$$x_n \asymp n^{\frac{1}{3}} N^{\frac{1}{6}} \quad \forall n = 2, \dots, N_1. \quad (5.7)$$

E mais

$$\gamma_1 = O(N^{-1/3}) \quad e \quad \gamma_2 \asymp N^{-1/3} \quad (5.8)$$

e

$$\gamma_n \asymp n^{\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{3}} \quad \forall n = 2, \dots, N_1. \quad (5.9)$$

Demonstração. Para cada $n = 1, 2, \dots, N_1$, definimos $\omega_n = \frac{\gamma_n}{\frac{1}{|f'(x_n)|}}$. Até o final dessa seção, adotaremos a seguinte mudança de variáveis, nos cálculos abaixo:

$$t_n = x_n + 1, \quad \forall 1 \leq n \leq N.$$

Utilizando a definição da f , obtemos $\omega_n = \gamma_n t_n^2$ e, além disso, definimos $u_n = \frac{t_n}{t_{n+1}}$. Multiplicando (5.1) por t_{n+1}^2 e expandindo \tan^{-1} em série de Taylor obtemos que

$$\omega_{n+1} = \frac{\omega_n + 1}{u_n^2} + 1 + O(x_n^{-4}). \quad (5.10)$$

De (5.1), temos que

$$\gamma_1 + \frac{1}{t_1^2} + \frac{2}{t_2^2} + \dots + \frac{2}{t_{n-1}^2} + \frac{1}{t_n^2} + O\left(\sum_{i=1}^n t_i^{-6}\right) = \gamma_n \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.11)$$

E portanto,

$$\sum_{i=1}^n t_i^{-2} = O(1). \quad (5.12)$$

Da equação (5.10), temos que

$$\omega_n > 2n - 2. \quad (5.13)$$

De (5.2) e usando o fato de que $\tan x > x$, temos que

$$\frac{1}{u_n} < 1 + \frac{2}{\omega_n + 1}(1 + O(t_n^{-6})). \quad (5.14)$$

Substituindo (5.14) em (5.10):

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &< 1 + (\omega_n + 1) \left(1 + \frac{2}{\omega_n + 1}(1 + O(t_n^{-6})) \right)^2 + O(t_n^{-4}) \\ &= 6 + \omega_n + \frac{4}{\omega_n + 1} + O(t_n^{-4}) < 6 + \omega_n + \frac{4}{2n - 1} + O(t_n^{-4}). \end{aligned}$$

Logo

$$\omega_n < 6n + 2 \ln n + O(1). \quad (5.15)$$

De (5.13) e (5.15) concluímos que $\omega_n = \gamma_n t_n^2 \asymp n$. Uma vez que $\gamma_{N_2} \approx \pi/2$, temos que $x_{N_2}^2 \asymp N_2 \asymp N$, pelo Lema 5.1.

Para $n = 1, 2, \dots, N_1$,

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\frac{1}{t_n} + \frac{1}{t_{n+1}}}{\gamma_n + \frac{1}{t_n^2} + O\left(\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right)^3\right)} = t_n + \frac{t_n + \frac{t_n^2}{t_{n+1}}}{\omega_n + 1 + t_n^2 O\left(\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right)^3\right)}.$$

Dividindo por t_n e colocando $\frac{1 + u_n}{w_n + 1}$ em evidência, obtemos

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1 + u_n}{w_n + 1} \left(\frac{1}{1 + \frac{t_n^2}{\gamma_n t_n^2 + 1} O\left(\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right)^3\right)} \right).$$

Uma vez que as escolhas de $\gamma_n < 10^{-10}$ e $x_1 > 10^6$ implicam que $O\left(\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right)^3\right) = O(\gamma_n^3)$ e, além disso, temos que $\frac{t_n^2}{\gamma_n t_n^2 + 1} O(\gamma_n^3) = O(\gamma_n^2)$, obtemos também que

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1 + u_n}{w_n + 1} \left(\frac{1}{1 + O(\gamma_n^2)} \right) = 1 + \frac{1 + u_n}{w_n + 1} (1 + O(\gamma_n^2)),$$

pois $O(\gamma_n^2)$ é suficientemente pequeno. De (5.14) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} &> 1 + \left(\frac{1}{\omega_n + 1} + \frac{1}{\omega_n + 3 + O(t_n^{-6})} \right) (1 + O(\gamma_n^2)) > 1 + \frac{2}{\omega_n + 3} + O\left(\frac{\gamma_n^2}{n}\right) \\ &> 1 + \frac{2}{6n + 2 \ln n + O(1)} + O\left(\frac{\gamma_n^2}{n}\right) \\ &> \exp\left(\frac{2}{6n + 2 \ln n + O(1)} - \frac{4}{(6n + 2 \ln n + O(1))^2} + O\left(\frac{\gamma_n^2}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

na última desigualdade usamos o fato de que $1 + x > \exp(x - x^2)$ para x pequeno.

Multiplicando de $i = 1$ a $n - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1} &> \exp\left(\sum \frac{2}{6i + 2 \ln i + O(1)} - \sum \frac{4}{(6i + 2 \ln i + O(1))^2} + O\left(\sum \frac{\gamma_i^2}{i}\right)\right) \\ &> \exp(\ln n^{1/3} - C) = C' n^{1/3}, \end{aligned}$$

visto que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i^2}{i} \leq 12 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i^2}{\omega_i} = 12 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i}{x_i^2} = O(1), \quad (5.16)$$

já que $\gamma_i < \pi/2$ e $\sum_{i=1}^n t_i^{-2} = O(1)$, conforme vimos em (5.12). Logo obtemos que

$$\frac{t_n}{t_1} > C' n^{1/3}. \quad (5.17)$$

Mas

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= 1 + \frac{\omega_n + 1}{u_n^2} + O(t_n^{-4}) \\ &> 1 + (\omega_n + 1) \left(1 + \frac{2}{\omega_n + 3} + O\left(\frac{\gamma_n^2}{n}\right)\right)^2 + O(t_n^{-4}) \\ &> 2 + \omega_n + 4 \left(1 - \frac{2}{\omega_n + 3}\right) + 4 \left(\frac{1}{\omega_n + 3} - \frac{2}{(\omega_n + 3)^2}\right) + O(\gamma_n^2) + O(t_n^{-4}) \\ &> \omega_n + 6 - \frac{4}{2n + 1} - \frac{4}{(2n + 1)^2} + O(\gamma_n^2) + O(t_n^{-4}) \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\omega_n > 6n - 2 \ln n + O(1).$$

E portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n^2} &= \frac{\omega_{n+1} - 1 + O(t_n^{-4})}{\omega_n + 1} < \frac{\omega_n + 1 + 4 + \frac{4}{\omega_n + 1} + O(t_n^{-4})}{\omega_n + 1} \\ &= 1 + \frac{4}{\omega_n + 1} + \frac{4}{(\omega_n + 1)^2} + O\left(\frac{t_n^{-4}}{n}\right) \\ &< 1 + \frac{4}{6n - 2 \ln n + O(1)} + \frac{4}{(6n - 2 \ln n + O(1))^2} + O\left(\frac{t_n^{-4}}{n}\right) \end{aligned}$$

Multiplicando de $i = 1$ a $n - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-2} &< \exp\left(\sum \frac{4}{6i - 2 \ln i + O(1)} + \sum \frac{4}{(6i - 2 \ln i + O(1))^2} + O\left(\sum \frac{x_i^{-4}}{i}\right)\right) \\ &< \exp(\ln n^{2/3} + C) = C' n^{2/3}. \end{aligned}$$

E obtemos que

$$\left(\frac{t_n}{t_1}\right)^2 < C'n^{2/3}. \quad (5.18)$$

Por (5.17) e (5.18) temos que

$$\frac{t_n}{t_1} \asymp n^{1/3}.$$

Logo

$$n \asymp \gamma_n t_n^2 \asymp \gamma_n n^{2/3} t_1^2.$$

Mas $\gamma_{N_1} \approx \bar{\gamma} = \text{constante}$, portanto

$$N_1 \asymp \gamma_{N_1} N_1^{2/3} x_1^2 \Rightarrow x_1 \asymp N_1^{1/6}.$$

E assim

$$t_n \asymp n^{1/3} N_1^{1/6} \quad \text{e} \quad \gamma_n \asymp n^{1/3} N_1^{-1/3},$$

para todo $n = 2, \dots, N_1$.

Para mostrarmos que $N_1 \asymp N$, basta notar que no período de contorno, i.e., $N_1 \leq n \leq N_2$, o ângulo γ_n cresce de $\bar{\gamma}$ até aproximadamente $\pi/2$ e que

$$\frac{1}{t_n^2} = \frac{\gamma_n}{\omega_n} > \frac{\bar{\gamma}}{6n + 2 \ln n + C},$$

Segue de (5.1) e (5.12) que

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) \geq \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{C'}{6n + 2 \ln n + C} \geq C'' \ln \frac{N_2}{N_1},$$

para algumas constantes $C', C'' > 0$. Isto implica que $N_1 < N_2 < C''' N_1$, para algum $C''' > 0$. \square

Na prova do Lema 5.2, obtivemos os seguintes valores

$$\omega_n + 1 = 6 + \omega_n + O\left(\frac{1}{n} + \gamma_n^2 + t_n^{-4}\right),$$

$$\omega_n = 6n + O(\ln n),$$

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{3n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right),$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{3n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right),$$

e utilizamos esses valores daqui em diante.

Para $1 \leq n \leq N_2$, seja τ_n o deslocamento da partícula entre duas batidas consecutivas na parte dispersiva da mesa, i.e.,

$$\tau_n = \frac{f(t_n) + f(t_{n+1})}{\sin(\gamma_n + \tan^{-1}(|f'(t_n)|))}.$$

Então, utilizando os valores acima,

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{\frac{1}{t_n} + \frac{1}{t_{n+1}}}{\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right) + O\left(\left(\gamma_n + \frac{1}{t_n^2}\right)^3\right)} = \frac{t_n + \frac{t_n^2}{t_{n+1}}}{\omega_n + 1 + O(t_n^2 \gamma_n^3)} \\ &= \frac{t_n(1 + u_n)}{\omega_n(1 + \omega_n^{-1} + O(\gamma_n^2))} = \frac{t_n}{\omega_n} \frac{2 + O(n^{-1})}{1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)} \\ &= \frac{2t_n}{\omega_n} \frac{1}{1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)} = \frac{2t_n}{\omega_n} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &\asymp n^{-2/3} N^{1/6}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

para $1 \leq n \leq N_2$.

Além disso, se chamarmos de K_n a curvatura da parte dispersiva da mesa no ponto de colisão (r_n, φ_n) , temos que, a medida que estamos indo em direção à cúspide ($n = 1, 2, \dots, N_2$)

$$K_n = \frac{f''(t_n)}{(1 + (f'(t_n))^2)^{3/2}} = \frac{\frac{2}{t_n^3}}{\left(1 + \left(\frac{1}{t_n^2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{2}{t_n^3}}{\left(\frac{t_n^4 + 1}{t_n^4}\right)^{3/2}} = \frac{2}{t_n^3}, \tag{5.20}$$

pois, $x_1 > 10^6$.

Temos também que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n K_n}{\sin \gamma_n} &= \frac{2t_n \omega_n^{-1} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2))}{\gamma_n + O(\gamma_n^3)} \cdot \frac{2}{t_n^3} = \frac{4}{t_n^2} \frac{(1 + O(1/n) + O(\gamma_n^2))}{\omega_n \gamma_n (1 + O(\gamma_n^2))} \\ &= \frac{4}{t_n^2} (1 + O(1/n) + O(\gamma_n^2)) (1 + O(\gamma_n^2)) = \frac{4}{\omega_n^2} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &= \frac{4}{(6n + O(\ln n))^2} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &= \frac{4}{36n^2 + O(n \ln n) + O((\ln n)^2)} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &= \frac{4}{36n^2 (1 + O(\ln n/n) + O((\ln n/n)^2))} (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &= \frac{1}{9n^2} \left(1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) (1 + O(n^{-1}) + O(\gamma_n^2)) \\ &= \frac{1}{9n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3} + \frac{\gamma_n^2}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Além disso

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{f(t_{n+1}) + f(t_{n+2})}{f(t_n) + f(t_{n+1})} \cdot \frac{\sin(\gamma_n + \tan^{-1}(|f'(t_n)|))}{\sin(\gamma_{n+1} + \tan^{-1}(|f'(t_{n+1})|))} = F_1 \cdot F_2.$$

Para obtermos F_1 , notamos que

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\frac{1}{t_{n+1}} + \frac{1}{t_{n+2}}}{\frac{1}{t_{n+1}} + \frac{1}{t_n}} = \frac{\frac{1}{t_{n+1}} \left(1 + \frac{t_{n+1}}{x_{n+2}}\right)}{\frac{1}{x_n} \left(1 + \frac{t_n}{t_{n+1}}\right)} \\ &= u_n \cdot \frac{(1 + u_{n+1})}{(1 + u_n)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Este último é calculado como

$$\begin{aligned} \frac{1 + u_{n+1}}{1 + u_n} &= \frac{1 + 1 - \frac{1}{3(n+1)} + O\left(\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\gamma_{n+1}^2}{n+1} + \frac{t_{n+1}^{-4}}{n+1}\right)}{1 + 1 - \frac{1}{3n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right)} \\ &= \frac{6(n+1) - 1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \gamma_{n+1}^2 + t_{n+1}^{-4}\right)}{6n - 1 + O\left(\frac{\ln n}{n} + \gamma_n^2 + t_n^{-4}\right)} \frac{3n}{3(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{6(n+1)} + O\left(\frac{\ln n + 1}{n+1^2} + \frac{\gamma_{n+1}^2}{n+1} + \frac{t_{n+1}^{-4}}{n+1}\right)\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{6n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{5}{36n^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{5}{36n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

E para obtermos F_2 , temos que

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\gamma_n + \frac{1}{t_n^2} + O(\gamma_n^3)}{\gamma_{n+1} + \frac{1}{t_{n+1}^2} + O(\gamma_{n+1}^3)} = \frac{t_n^2 t_{n+1}^2}{t_n^2 t_{n+1}^2} \frac{\gamma_n + \frac{1}{t_n^2} + O(\gamma_n^3)}{\gamma_{n+1} + \frac{1}{t_{n+1}^2} + O(\gamma_{n+1}^3)} \\ &= \frac{t_{n+1}^2}{t_n^2} \frac{\omega_n + 1 + O(\gamma_n^2 \omega_n)}{\omega_{n+1} + 1 + O(\gamma_{n+1}^2 \omega_{n+1})} = \frac{1}{u_n^2} \cdot \frac{\omega_n + 1 + O(\gamma_n^2 \omega_n)}{\omega_{n+1} + 1 + O(\gamma_{n+1}^2 \omega_{n+1})} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \cdot \frac{\omega_n + 1 + O(\gamma_n^2 \omega_n)}{\omega_n + 7 + O(\gamma_{n+1}^2 \omega_{n+1} + n^{-1} + \gamma_n^2 + t_n^{-4})} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{7}{6n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} &= u_n \left(1 + \frac{5}{36n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \right) \times \\
&\times \frac{1}{u_n^2} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{7}{6n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \right) \\
&= \frac{1}{u_n} \left(1 + \frac{5}{36n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \right) \times \\
&\times \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{7}{6n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{3n} \right) \left(1 + \frac{5}{36n^2} \right) \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{7}{6n^2} \right) + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{t_n^{-4}}{n}\right). \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Observação 5.3. Devido a propriedade de reversibilidade do bilhar, todas as fórmulas acima obtidas valem tanto para o período de entrada quanto o de saída. Assim

$$x_N \asymp N^{1/6} \quad \text{e} \quad \gamma_N = O(N^{-1/3}). \tag{5.26}$$

Durante o período de saída usamos ainda o índice regressivo $m = N + 1 - n$ e obtemos outras taxas assintóticas, para $m = N_3 - 1, \dots, N_1$, a partir das obtidas para o período de entrada, como por exemplo, $x_m \asymp m^{1/3} N^{1/6}$, $\tau_m \asymp m^{-2/3} N^{1/6}$, etc.

5.2 Hiperbolicidade

Trabalharemos nessa seção com a chamada *p-norma*, definida por

$$\|dx\|_p = \cos \varphi |dr|,$$

para vetores $dx \in T_x M$ de um ponto $x = (r, \varphi)$. Para bilhares, a taxa de expansão de vetores instáveis (i.e., contidos em um cone instável) na p-norma é dada por $\frac{\|D_x \mathcal{T}^{n+1}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} =$

$\prod_{i=0}^n |1 + \tau_i B_i|$ (ver [7], p.58). Aqui B_i denota a curvatura de um pequeno arco transversal à frente de onda. Para maiores detalhes, sugerimos o livro de Chernov e Markarian [6], Chapter IV. Além disso, para bilhares dispersivos, vetores instáveis são expandidos monotonicamente na p-norma, o que não é necessariamente verdade para a norma euclidiana (ver [7], Seção 4.4).

Os valores de B_i^+ podem ser calculados indutivamente como

$$B_{n+1}^+ = \frac{2K_{n+1}}{\sin \gamma_{n+1}} + \frac{B_n^+}{1 + \tau_n B_n^+}.$$

De acordo com as equações (5.8) e (5.26), sabemos que $\gamma_1 = O(N^{-1/3})$ e $\gamma_N = O(N^{-1/3})$, podendo portanto estarem arbitrariamente próximos de zero, fazendo com que a taxa de expansão seja extremamente alta. Mas B_{n+1}^+ é uma função crescente de B_n^+ e de $\frac{1}{\sin \gamma_{n+1}}$. Assim, se γ_n aumentar, B_n^+ só diminuirá. Logo podemos obter uma cota inferior para a taxa de expansão tomando cotas superiores para γ_1 e γ_N . Por isso, fazemos a seguinte suposição

$$\gamma_1 \asymp N^{-1/3} \quad \text{e} \quad \gamma_N \asymp N^{-1/3}. \quad (5.27)$$

Seja

$$E_N = \{x \in M_4 \mid R(x) = N + 1\},$$

$N > N_0$, onde

$$R(x) = \inf\{n \geq 1 : T_5^n x \in M_4\},$$

i.e., $R(x) - 1$ indica o número de rebatidas na parte dispersiva antes de retornar à parede vertical \mathcal{L} . Assim, E_N é o conjunto dos pontos de M_4 que retornam pela primeira vez a M_4 através de $N + 1$ iterações por T_5 .

O objetivo dessa seção é demonstrar o seguinte teorema utilizando os cálculos da construção geométrica da sub-seção anterior.

Teorema 5.4. *Para todo $x \in E_N$, satisfazendo $\gamma_1 \asymp N^{-1/3}$ e $\gamma_N \asymp N^{-1/3}$, temos que*

$$\frac{\|D_x T_5^{N+1}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} \asymp N.$$

Denotaremos $\tau_i B_i$ por λ_i . Temos que, para $n \geq 1$,

$$\lambda_{n+1} = \frac{2\tau_{n+1}K_{n+1}}{\sin \gamma_{n+1}} + \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} \cdot \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n}. \quad (5.28)$$

Lema 5.5. *Temos que*

$$\begin{aligned} \lambda_n &\asymp \frac{1}{n} \quad , \quad 1 \leq n \leq N_1, \\ \lambda_n &\asymp \frac{1}{n} \asymp \frac{1}{N} \quad , \quad N_1 \leq n \leq N_3, \\ \lambda_n &\asymp \frac{1}{(N-n)} \quad , \quad N_3 \leq n < N. \end{aligned}$$

Demonstração. Para $1 \leq n \leq N_1$, temos que $\lambda_{n+1} > \frac{a}{n^2} + \left(1 - \frac{b}{n}\right) \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n}$, para alguns

$a, b > 0$. Assuma que $\lambda_n > c/n$. Então

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} &> \frac{a}{n^2} + \left(1 - \frac{b}{n}\right) \frac{c/n}{1 + c/n} = \frac{a}{n^2} + \left(1 - \frac{b}{n}\right) \left(\frac{c}{n+c}\right) \\ &= \frac{a}{n^2} + \frac{c}{n+c} - \frac{bc}{(n+c)n} = \frac{a(n+c) + cn^2 - bcn}{(n+c)n^2} \\ &= \frac{c + (a - bc + ac/n)/n}{n+c}.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Se $c > 0$ é suficientemente pequeno, e expressão em parênteses é positiva e $\lambda_{n+1} > \frac{c}{n+c} > \frac{c}{n+1}$. Similarmente $\lambda_{n+1} < \frac{A}{n^2} + \left(1 - \frac{B}{n}\right) \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n}$.

Assumindo $\lambda_n < C/n$, obtemos $\lambda_{n+1} < \frac{C + (A - BC + AC/n)/n}{n+C}$.

Se $C > 0$ é suficientemente grande, a expressão em parênteses é negativa para N grande e $\lambda_{n+1} < \frac{C}{n+C} < \frac{C}{n+1}$, completando a indução.

Para $N_1 \leq n \leq N_3$, temos que $\lambda_{N_1} \asymp \frac{1}{N}$ e $\tau_n \asymp n^{-2/3} N^{1/6} \asymp N^{-1/2}$. Logo $B_{N_1}^+ = \frac{\lambda_{N_1}}{\tau_{N_1}} \asymp N^{-1/2}$. Temos que

$$K_{n+1} \asymp N^{-3/2} \Rightarrow \exists a, A > 0 \text{ tais que } aN^{-3/2} \leq K_{n+1} \leq AN^{-3/2},$$

$$\tau_n \asymp N^{-1/2} \Rightarrow \exists b, B > 0 \text{ tais que } bN^{-1/2} \leq \tau_n \leq BN^{-1/2},$$

$$B_{N_1}^+ \asymp N^{-1/2} \Rightarrow \exists c, C > 0 \text{ tais que } cN^{-1/2} \leq B_{N_1}^+ \leq CN^{-1/2}.$$

Além disso

$$2 \leq \frac{2}{\sin \gamma_{n+1}} \leq \frac{2}{\sin \bar{\gamma}} =: G, \quad \forall N_1 \leq n \leq N_3.$$

Assim

$$B_{N_1+1}^+ = \frac{2K_{N_1+1}}{\sin \gamma_{N_1+1}} + \frac{B_{N_1}^+}{1 + \tau_{N_1} B_{N_1}^+} \leq GAN^{-3/2} + CN^{-1/2}.$$

$$\begin{aligned}B_{N_1+2}^+ &= \frac{2K_{N_1+2}}{\sin \gamma_{N_1+2}} + \frac{B_{N_1+1}^+}{1 + \tau_{N_1+1} B_{N_1+1}^+} \leq GAN^{-3/2} + B_{N_1+1}^+ \\ &\leq 2GAN^{-3/2} + CN^{-1/2}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}B_n^+ &= \frac{2K_n}{\sin \gamma_n} + \frac{B_{n-1}^+}{1 + \tau_{n-1} B_{n-1}^+} \leq (n - N_1)GAN^{-3/2} + CN^{-1/2} \\ &\leq DNGAN^{-3/2} + CN^{-1/2} = (DGA + C)N^{-1/2} \\ &= EN^{-1/2}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$B_{N_1+1}^+ = \frac{2K_{N_1+1}}{\sin \gamma_{N_1+1}} + \frac{B_{N_1}^+}{1 + \tau_{N_1} B_{N_1}^+} \geq 2aN^{-3/2} + \frac{cN^{-1/2}}{1 + BEN^{-1}}.$$

$$\begin{aligned} B_{N_1+2}^+ &= \frac{2K_{N_1+2}}{\sin \gamma_{N_1+2}} + \frac{B_{N_1+1}^+}{1 + \tau_{N_1+1} B_{N_1+1}^+} \\ &\geq 2aN^{-3/2} + \frac{1}{(1 + BEN^{-1})} \left(2aN^{-3/2} + \frac{cN^{-1/2}}{1 + BEN^{-1}} \right) \\ &= 2aN^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{(1 + BEN^{-1})} \right) + \frac{cN^{-1/2}}{(1 + BEN^{-1})^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n^+ &= \frac{2K_n}{\sin \gamma_n} + \frac{B_{n-1}^+}{1 + \tau_{n-1} B_{n-1}^+} \\ &\geq 2aN^{-3/2} \left(\sum_{i=0}^{n-N_1-1} \frac{1}{(1 + BEN^{-1})^i} \right) + \frac{cN^{-1/2}}{(1 + BEN^{-1})^{n-N_1}}. \end{aligned}$$

Existem constantes $f > 0$ e $h > 0$ tais que $\sum_{i=0}^{n-N_1-1} \frac{1}{(1+BEN^{-1})^i} \geq fN$ e também $\frac{1}{(1+BEN^{-1})^{n-N_1}} \geq h$, pois $\sum_{i=0}^{n-N_1-1} \frac{1}{(1+BEN^{-1})^i} \geq \sum_{i=0}^{n-N_1-1} \frac{1}{(1+BEN^{-1})^{N_3-N_1}} \asymp N$, e $\frac{1}{(1+BEN^{-1})^{n-N_1}}$ é uma sequência limitada.

Logo

$$\begin{aligned} B_n^+ &\geq 2afN^{-1/2} + chN^{-1/2} \\ &= (2af + ch)N^{-1/2} \\ &= eN^{-1/2}. \end{aligned}$$

Assim $B_n^+ \asymp N^{-1/2}$, e portanto $\lambda_n = B_n^+ \tau_n \asymp N^{-1/2} N^{-1/2} = N^{-1}$.

Para $N_3 \leq n < N$, temos, pela propriedade de reversibilidade do bilhar, que

$$\lambda_{m-1} = \frac{2\tau_{m-1}K_{m-1}}{\sin \gamma_{m-1}} + \frac{\tau_{m-1}}{\tau_m} \cdot \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m},$$

para $m = N + 1 - n$. Em particular,

$$\frac{a}{m^2} < \frac{2\tau_{m-1}K_{m-1}}{\sin \gamma_{m-1}} < \frac{A}{M^2} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{b}{m} < \frac{\tau_{m-1}}{\tau_m} < 1 + \frac{B}{m},$$

para alguns $0 < a < A < \infty$ e $0 < b < B < \infty$.

Assumindo $\lambda_m > c/m$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{m-1} &> \frac{a}{m^2} + \left(1 + \frac{b}{m} \right) \frac{c/m}{1 + c/m} \\ &= \frac{c + [a + bc - c - c^2 + (ac - a - bc - ac/m)/m]/(m + c)}{m - 1}, \end{aligned}$$

Se $c > 0$ é suficientemente pequeno, a expressão entre colchetes é positiva, para m grande, e obtemos que $\lambda_{m-1} > c/(m-1)$. Assumindo que $\lambda_m < C/m$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_{m-1} &< \frac{A}{m^2} + \left(1 + \frac{B}{m}\right) \frac{C/m}{1 + C/m} \\ &= \frac{C + [A + BC - C - C^2 + (AC - A - BC - AC/m)/m]/(m + C)}{m - 1} \end{aligned}$$

Se $C > 0$ é suficientemente grande, a expressão entre colchetes é negativa, m grande, e obtemos que $\lambda_{m-1} < C/(m-1)$, completando a prova. \square

O Lema 5.5 implica que $\sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n^2 = O(1)$. Logo, para $1 \leq N' < N'' \leq N$, vale que

$$\prod_{n=N'}^{N''-1} (1 + \lambda_n) = \exp\left(\sum_{n=N'}^{N''-1} \ln(1 + \lambda_n)\right) \asymp \exp\left(\sum_{n=N'}^{N''-1} \lambda_n\right). \quad (5.30)$$

No período de contorno, temos que $\sum_{n=N_1}^{N_3-1} \lambda_n \asymp 1$, fazendo que a expansão durante esse período seja insignificante.

Lema 5.6. *Para todo $x \in E_N$ satisfazendo (5.27) temos que $\prod_{n=1}^{N_1} (1 + \lambda_n) \asymp N^{2/3}$.*

Demonstração. De acordo com a equação (5.30), é suficiente mostrar que

$$\lambda_n = \frac{2}{3n} + \chi_n; \quad \text{onde} \quad \sum_{n=1}^{N_1} \chi_n = O(1).$$

Temos que, por (5.28)

$$\lambda_{n+1} = \frac{2}{9n^2} + a_n + \left(1 - \frac{2}{3n} + b_n\right) \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n},$$

onde

$$a_n = O\left(\frac{\ln n}{n^3} + \frac{\gamma_n^2}{n^2}\right) \quad \text{e} \quad b_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\gamma_n^2}{n} + \frac{x_n^{-4}}{n}\right),$$

são referentes às equações (5.21) e (5.25).

Note que $|a_n| \leq c/n^2$ e $|b_n| \leq c/n$, para algum $c > 0$ suficientemente pequeno.

Tomemos

$$\lambda_n = 2 \frac{1 + Z_n}{3n}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2 \frac{1 + Z_{n+1}}{3(n+1)} &= \frac{2}{9n^2} + a_n + \left(1 - \frac{2}{3n} + b_n\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{2}{3n} + \frac{2Z_n}{3n}\right) \left(1 - \frac{2}{3n} - \frac{2Z_n}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{Z_n^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{9n^2} + a_n + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
X_2 \cdot X_3 &= \frac{2}{3n} + \frac{2Z_n}{3n} - \frac{4}{9n^2} - \frac{8Z_n}{9n^2} - \\
&\quad - \frac{4Z_n^2}{9n^2} + O\left(\frac{1}{n^3} + \frac{Z_n}{n^3} + \frac{Z_n^2}{n^3} + \frac{Z_n^3}{n^3}\right) \\
X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 &= \frac{2}{3n} - \frac{8}{9n^2} + \frac{2b_n}{3n} + \frac{2Z_n}{3n} - \frac{12Z_n}{9n^2} + \\
&\quad + \frac{2b_n Z_n}{3n} - \frac{4Z_n^2}{9n^2} + O\left(\frac{1}{n^3} + \frac{Z_n}{n^3} + \frac{Z_n^2}{n^3} + \frac{Z_n^3}{n^3}\right),
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= R_n + Z_n \times \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{n} + b_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - Z_n \left(\frac{2}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{Z_n^2}{n^2}\right)\right),
\end{aligned}$$

onde

$$R_n = \frac{3}{2}na_n + b_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Se fixamos um $\delta > 0$ pequeno, então para n suficientemente grande temos

$$|Z_{n+1}| \leq |R_n| + |Z_n| \left(1 - \frac{\delta}{n}\right).$$

Sem afetar o comportamento assintótico de Z_n , podemos assumir que a limitação acima é válida para todo n . Usando-a recorrentemente obtemos

$$\begin{aligned}
|Z_n| &\leq |R_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |R_k| \prod_{i=k}^{n-1} \left(1 - \frac{\delta}{i+1}\right) \\
&\leq \text{const} \sum_{k=1}^n \left(|R_k| \exp\left(-\sum_{i=k}^n \frac{\delta}{(i+1)}\right)\right) \\
&\leq \text{const} \sum_{k=1}^n |R_k| (k/n)^\delta. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N_1} |\chi_n| &\leq \sum_{n=1}^{N_1} |Z_n|/n \\
&\leq \text{const} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=1}^n |R_k| k^\delta / n^{\delta+1} \\
&\leq \text{const} \sum_{k=1}^{N_1} |R_k| \sum_{n=k}^{N_1} k^\delta / n^{\delta+1} \\
&\leq \text{const} \sum_{k=1}^{N_1} |R_k|. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

A última soma é uniformemente limitada em N , a partir de (5.16), o que completa a prova. \square

Lema 5.7. Para todo $x \in E_N$ satisfazendo (5.27) temos que $\prod_{n=N_3}^N (1 + \lambda_n) \asymp N^{1/3}$.

Demonstração. É suficiente mostrar que, para $m = N - n + 1$,

$$\lambda_m = \frac{1}{3m} + \chi_m; \quad \text{onde} \quad \sum_{m=2}^{N-N_3} \chi_m = O(1).$$

Temos que

$$\lambda_{m-1} = \frac{2}{9m^2} + a_m + \left(1 + \frac{2}{3m} + b_m\right) \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m},$$

onde

$$a_m = O\left(\frac{\ln m}{m^3} + \frac{\gamma_m^2}{m^2}\right) \quad \text{e} \quad b_m = O\left(\frac{\ln m}{m^2} + \frac{\gamma_m^2}{m} + \frac{x_m^{-4}}{m}\right).$$

Note que $|a_m| \leq c/m^2$ e $|b_m| \leq c/m$, para algum $c > 0$ suficientemente pequeno.

Tomemos

$$\lambda_m = \frac{1 + Z_m}{3m}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1 + Z_{m-1}}{3(m-1)} &= \frac{2}{9m^2} + a_m + \left(1 + \frac{2}{3m} + b_m\right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{3m} + \frac{Z_m}{3m}\right) \left(1 - \frac{1}{3m} - \frac{Z_m}{3m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) + O\left(\frac{Z_m^2}{m^2}\right)\right) \\ &= \frac{2}{9m^2} + a_m + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3. \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} X_2 \cdot X_3 &= \frac{1}{3m} + \frac{Z_m}{3m} - \frac{1}{9m^2} - \frac{2Z_m}{9m^2} - \\ &- \frac{Z_m^2}{9m^2} + O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{Z_m}{m^3} + \frac{Z_m^2}{m^3} + \frac{Z_m^3}{m^3}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 &= \frac{1}{3m} - \frac{1}{9m^2} + \frac{b_m}{3m} + \frac{Z_m}{3m} + \frac{b_m Z_m}{3m} - \\ &- \frac{Z_m^2}{9m^2} + O\left(\frac{1}{m^3} + \frac{Z_m}{m^3} + \frac{Z_m^2}{m^3} + \frac{Z_m^3}{m^3}\right), \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} Z_{m-1} &= R_m + Z_m \times \\ &\left(1 - \frac{1}{m} + b_m + O\left(\frac{1}{m^2}\right) - Z_m \left(\frac{1}{3m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) + O\left(\frac{Z_m^2}{m^2}\right)\right), \end{aligned}$$

onde

$$R_m = 3ma_m + b_m + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Se fixamos um $\delta > 0$ pequeno, então para n suficientemente grande temos

$$|Z_{m-1}| \leq |R_m| + |Z_m| \left(1 - \frac{\delta}{m}\right).$$

Sem afetar o comportamento assintótico de Z_m , podemos assumir que a limitação acima é válida para todo $m \geq 3$. Usando-a recorrentemente obtemos

$$\begin{aligned} |Z_m| &\leq \sum_{k=m}^{N-N_3} |R_k| \prod_{i=m}^k \left(1 - \frac{\delta}{i}\right) \\ &\leq \text{const} \sum_{k=m}^{N-N_3} \left(|R_k| \exp\left(-\sum_{i=m}^k \frac{\delta}{(i)}\right) \right) \\ &\leq \text{const} \sum_{k=m}^{N-N_3} |R_k| (m/k)^\delta. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{N-N_3} |\chi_m| &\leq \sum_{m=2}^{N-N_3} |Z_m|/m \\ &\leq \text{const} \sum_{m=2}^{N-N_3} \sum_{k=m}^{N-N_3} |R_k| m^{\delta-1}/k^\delta \\ &\leq \text{const} \sum_{k=2}^{N-N_3} |R_k| \sum_{m=2}^k m^{\delta-1}/k^\delta \\ &\leq \text{const} \sum_{k=2}^N |R_k|. \end{aligned} \tag{5.36}$$

A última soma é uniformemente limitada em N , o que completa a prova. \square

Demonstração do Teorema 5.4. Seja dx um vetor instável. Temos que no período de saída, $\lambda_m \asymp 1/m$ e $\tau_m \asymp m^{-2/3}N^{1/6}$, para $m = 2, \dots, N - N_3$. Portanto $B_m^+ = \frac{\lambda_m}{\tau_m} \asymp m^{-1/3}N^{-1/6}$, $m = 2, \dots, N - N_3$. Quando $m = 1$, $\tau_N \asymp N^{1/6}$.

Para $m = 1$ (ou $n = N$),

$$B_N^+ \asymp B_{N-1}^+ \asymp N^{-1/6}.$$

Assim, utilizando os valores encontrados nos Lemas 5.6 e 5.7, temos que

$$\frac{\|D_x T^{N_5+1}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} \asymp N^{2/3} \times N^{1/3} \asymp N,$$

para todo $x \in E_N$ satisfazendo $\gamma_1 \asymp N^{-1/3}$ e $\gamma_N \asymp N^{-1/3}$. \square

5.3 Prova do Teorema B

Seja $E_N = \{x \in M_4 \mid R(x) = N + 1\}$. Este conjunto é como mostrado na Figura 5.1. Ele é limitado por curvas, que denotaremos por S^* , S_{N-1}^* e S_N^* e pela linha $r = 1$. A curva S^* é formada pelos pontos de M_4 que, partindo de \mathcal{L} , atingem, na primeira batida, a parte dispersiva \mathcal{U} tangencialmente. Esta é uma curva decrescente, pois é uma curva de singularidades para T_5 (observe que pela condição (C6) na Seção 3.4, essas curvas estão contidas nos cones estáveis) por valores positivos de φ até o ponto $(1, 0) \in M_5$; e não é difícil calcular a inclinação dessa curva, a partir de sua definição e da forma da mesa \mathcal{D} , e ver que ela tem tangente horizontal em $(1, 0) \in M_5$ (a quina retangular em \mathcal{D} , com vetor velocidade paralelo ao eixo x , que não pertence ao domínio). Além disso, as curvas S_N^* separando E_N e E_{N+1} são formadas por trajetórias cuja última colisão com \mathcal{U} saindo da cúspide é tangente. Assim elas são curvas de singularidades para T_5^N , novamente contidas em cones estáveis e são, portanto, decrescentes.

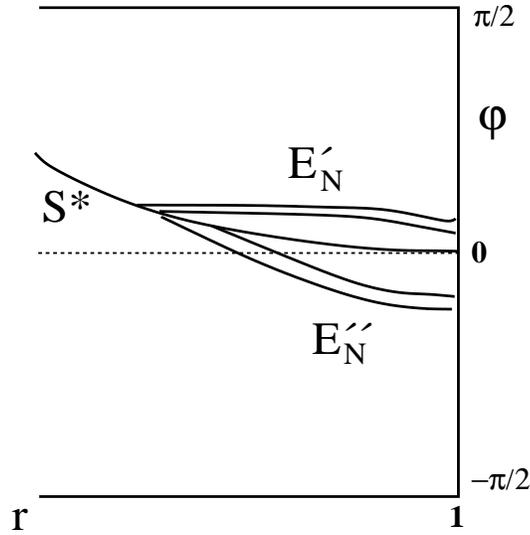


Figura 5.1: Os conjuntos E'_N e E''_N .

As imagens $F_N = T_4(E_N) = T_5^{N+1}(E_N)$ são domínios limitados por curvas de singularidades para T_5^{-i} , $i = 1, 2, \dots, N$, que são curvas com inclinação positiva. Além disso, pela propriedade de reversibilidade temporal do bilhar, um ponto $(r, \varphi) \in E_N$ se, e somente se, $(r, -\varphi) \in F_N$. Logo F_N é obtido refletindo E_N com relação a reta $\varphi = 0$.

O domínio E_N próximo a $(1, 0) \in M_5$ é formado por duas faixas: a faixa inferior E''_N consiste dos pontos que partem da parede vertical e atingem a cúspide diretamente

e a faixa superior é E'_N formada pelos pontos que atingem a cúspide após uma rebatida na parte horizontal da mesa \mathcal{D} . Os conjuntos E_N , $N > N_0$, formam uma estrutura “encaixada” que encolhem para $(1,0)$ quando N tende a infinito (basta notar que para que se tenha cada vez mais rebatidas na cúspide, em \mathcal{D} devemos estar cada vez mais próximos do ponto $(0,0)$ e a partícula deve ser lançada quase paralelamente com relação ao eixo x).

O ponto de E_N mais afastado de $(1,0) \in M_5$ sobre S^* está a uma distância $\asymp N^{-1/6}$ pois $x_1 \asymp N^{1/6}$ em \mathcal{D} (dada pela equação (5.6)). Sobre $r = 1$, usando os valores de x_1 e γ_1 obtidos em (5.6) e (5.8), respectivamente, e uma simples construção geométrica, obtemos que a distância da faixa E''_N ao ponto $(1,0)$ é $\asymp N^{-1/3}$. Como as curvas S^* , S_{N-1}^* e S_N^* são decrescentes e S^* tem tangente horizontal em $(1,0)$, o “comprimento” de cada uma das faixas de E_N é $\asymp N^{-1/6}$.

Agora considere uma curva instável W em uma das faixas de E_N , que será transversal à direção de S_N^* , pela relação entre cones e curvas de singularidades dada pela condição (C6) da Seção 3.4. Pela simetria de $T_5^{N+1}(E_N)$, o conjunto $T_5^{N+1}(W)$ é uma curva percorrendo longitudinalmente uma das faixas de $F_N = T_5^{N+1}(E_N)$, portanto tendo “comprimento” $\asymp N^{-1/6}$. Utilizando o fato de que a derivada de T_5^{N+1} possui uma taxa de expansão de $\asymp N$ para vetores instáveis, dada pelo Teorema 5.4, temos que $|W| \asymp N^{-1/6}/N = N^{-7/6}$. Esta é a “largura” de cada um das faixas de E_N .

Como os conjuntos E_N estão afastados de $\varphi = \pm\pi/2$, temos que a medida μ é equivalente à medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 com densidade uniformemente afastada de 0 e uniformemente limitada. Assim,

$$\mu(E_N) \asymp N^{-1/6} \times N^{-7/6} = N^{-4/3},$$

logo

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) \asymp N^{-1/3},$$

portanto $A = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ tem medida finita.

Além disso temos que a medida da interseção $E_m \cap T_5^m E_m$ pode ser calculada pela simetria dos conjuntos E_m e F_m , e é dada por

$$\mu(E_m \cap T_5^m E_m) \asymp m^{-7/6} \times m^{-7/6} = m^{-7/3}.$$

Portanto

$$\mu(A \cap T_5^m A) = \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \cap T_5^m \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right)\right) \geq \mu(E_m \cap T_5^m E_m) \asymp m^{-7/3},$$

mostrando que a velocidade de decaimento é no máximo polinomial.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Aaronson, “An introduction to infinite ergodic theory”, Mathematical Surveys and Monographs, **50**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [2] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, *On a fundamental theorem in the theory of dispersing billiards*, Math. USSR Sbornik **19** (1973), 407–423.
- [3] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, *Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*, Commun. Math. Phys. **78** (1981), 479–497.
- [4] N. Chernov, *On local ergodicity in hyperbolic systems with singularities*. Funct. Anal. Appl., **27**(1) (1993), 51–54.
- [5] N. I. Chernov, *Decay of correlations and dispersing billiards*, J. Statist. Phys. **94**(3-4) (1999), 513–556.
- [6] N. Chernov and R. Markarian, “Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards”, 24° Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA, 2003.
- [7] N. Chernov and R. Markarian, “Chaotic billiards”, Mathematical Surveys and Monographs, **127**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [8] N. Chernov and R. Markarian, *Dispersing billiards with cusps: slow decay of correlations*, Commun. Math. Phys. **270** no 3 (2007), 727–758.
- [9] N. Chernov and H.-K. Zhang, *Billiards with polynomial mixing rates*, Nonlinearity **18** (2005), 1527–1553.
- [10] Y. Coudene, *On invariant distributions and mixing*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **27** (2007), 109–112.

- [11] N. A. Friedman, *Mixing transformations in an infinite measure space*, Studies in Probability and Ergodic Theory, Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol 2 (1978), 167–184.
- [12] E. Hopf, “Ergodentheorie”, Springer, Berlin, 1937.
- [13] A. Katok, J.-M. Strelcyn, (in collaboration with F. Ledrappier and F. Przytycki), “Invariant manifolds, entropy and billiards; smooth maps with singularities”, Lect. Notes in Math., 1222, Spinger-Verlag, 1986.
- [14] A. Krámli, N. Simányi e D. Szász, *A transversal fundamental theorem for semi-dispersing billiards*. Commun. Math. Phys., **129**(3) (1990), 535–560.
- [15] U. Krengel, *Entropy of conservative transformations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **7** (1967), 161–181.
- [16] U. Krengel and L. Sucheston, *On mixing in infinite measure spaces*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **13** (1969), 150–164.
- [17] K. Krickeberg, *Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure*, in “Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 2” Univ. California Press, Berkeley, Calif (1967), 431–446.
- [18] M. Lenci, *Semi-dispersing billiards with an infinite cusp I*, Commun. Math. Phys. **230** no 1 (2002), 133–180.
- [19] C. Liverani and M. Wojtkowski, *Ergodicity in Hamiltonian systems*, Dynamics reported, 130–202, Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N.S.), 4, Springer, Berlin, 1995.
- [20] R. Markarian, *The fundamental theorem of Sinai-Chernov for dynamical systems with singularities*, In *Dynamical Systems. Santiago de Chile, 1990*, R. Bamón, R. Labarca, J. Lewowicz, and J. Palis, editors, Longman, Harlow (1993), 131–158.
- [21] R. Markarian, *Billiards with polynomial decay of correlations*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **24** (2004), 177–197.

- [22] C. R. de Oliveira, “Introdução à Análise Funcional”, Publicações Matemáticas, IMPA, 2005.
- [23] W. Parry, *Ergodic and spectral analysis of certain infinite measure preserving transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 960–966.
- [24] Ya. B. Pesin, *Lyapunov characteristics exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surv. **32**(4) (1977), 55–114.
- [25] J. Reháček, *On the ergodicity of dispersing billiards*, Rand. Comput. Dynam. **3** (1995), 35–55.
- [26] F. Riesz and B. Sz. Nagy, “Functional Analysis”, Translated from the 2nd french edition by Leo F. Boron, Dover Publications, Inc., New York, 1990.
- [27] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, WCB/McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.
- [28] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russ. Math. Surveys **25** (1970), 137–189.
- [29] Ya. G. Sinai e N. I. Chernov, *Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three- dimensional balls*. Russ. Math. Surveys, **42**(3) (1987), 181–207.
- [30] L. Sucheston, *On mixing and the zero-one law*, J. Math. Analysis Appl. **6** (1963), 447–456.
- [31] P. Walters, “An Introduction to Ergodic Theory”, Graduate texts in Mathematics, **79**, Springer-Verlag, 2000.
- [32] L. S. Young, *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. of Math.(2) **147** no. 3 (1998), 585–650.
- [33] L. S. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, Israel J. Math. **110** (1999), 153–188.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)