

# **TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1202**

## **UMA INTRODUÇÃO ÀS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA DESIGUALDADE DE RENDA**

**Marcelo Medeiros**

Brasília, agosto de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



# TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 1202

## UMA INTRODUÇÃO ÀS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DA DESIGUALDADE DE RENDA\*

**Marcelo Medeiros\*\***

Brasília, julho de 2006

---

\* Este texto foi elaborado para servir de material didático no ensino de medidas de desigualdade e pobreza. Buscou-se, para isso, apresentar o conteúdo da maneira mais clara e intuitiva possível. Também foi realizado um esforço para destacar particularidades, formas de interpretação e eventuais aplicações das representações gráficas da desigualdade de renda. Correções e sugestões que permitam que esses objetivos sejam alcançados são muito bem-vindas.

\*\* Coordenador do Ipea no *International Poverty Centre* (IPC)/Programas das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud).

## **Governo Federal**

### **Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão**

**Ministro** – Paulo Bernardo Silva

**Secretário-Executivo** – João Bernardo de Azevedo Bringel



Fundação pública vinculada ao Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, o Ipea fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais – possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro – e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

#### **Presidente**

Luiz Henrique Proença Soares

#### **Diretora de Administração e Finanças**

Cinara Maria Fonseca de Lima

#### **Diretor de Cooperação e Desenvolvimento**

Alexandre de Ávila Gomide

#### **Diretora de Estudos Sociais**

Anna Maria T. Medeiros Peliano

#### **Diretor de Estudos Setoriais**

João Alberto De Negri

#### **Diretor de Estudos Macroeconômicos**

Paulo Mansur Levy

#### **Diretor de Estudos Regionais e Urbanos**

Marcelo Piancastelli de Siqueira

#### **Chefe de Gabinete**

Persio Marco Antonio Davison

#### **Assessor-Chefe de Comunicação**

Murilo Lôbo

URL: <http://www.ipea.gov.br>

Ouvidoria: <http://www.ipea.gov.br/ouvidoria>

ISSN 1415-4765

JEL D31, I30

## **TEXTO PARA DISCUSSÃO**

Publicação cujo objetivo é divulgar resultados de estudos direta ou indiretamente desenvolvidos pelo Ipea, os quais, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e de inteira responsabilidade do(s) autor(es), não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada ou o do Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão.

É permitida a reprodução deste texto e dos dados nele contidos, desde que citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são proibidas.

A produção editorial desta publicação contou com o apoio financeiro do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID), via Programa Rede de Pesquisa e Desenvolvimento de Políticas Públicas – Rede-Ipea, o qual é operacionalizado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud), por meio do Projeto BRA/04/052.

# SUMÁRIO

SINOPSE

ABSTRACT

1 INTRODUÇÃO	7
2 TERMOS E CONCEITOS	8
3 AS CURVAS QUE REPRESENTAM A DESIGUALDADE	13
4 NOTAÇÃO DAS CURVAS	36
5 LITERATURA SOBRE O ASSUNTO	38
REFERÊNCIAS	40



## **SINOPSE**

O texto discute conceitos como distribuição e desigualdade, assim como apresenta quatro das principais ferramentas gráficas utilizadas para se representar a desigualdade em uma distribuição: o gráfico da Parada de Pen, geralmente construído por meio de Curvas de Quantis, a Curva de Lorenz, a Curva de Lorenz Generalizada e a Curva de Concentração. A título complementar também é apresentada a notação formal destas curvas e indicada literatura de apoio que permite um aprofundamento no tema. O objetivo do texto é didático e por isso busca-se uma exposição gradual e baseada em idéias fortemente intuitivas.

## **ABSTRACT**

Besides examining concepts such as distribution and inequality the paper presents four of the most common graphical tools used to represent inequality in a distribution, to wit, the graph of the Pen's Parade – usually built from quantile curves – the Lorenz curve, the generalized Lorenz curve and the concentration curve. In addition, the formal notation of these curves is presented and literature that allows further studies is suggested. As the purpose of the texts is didactic, the paper attempts to use a gradual and intuitive exposition of its contents.



# 1 INTRODUÇÃO

*Pode haver diferença nas opiniões sobre o significado de uma distribuição da riqueza muito desigual, mas não há dúvida sobre a importância de se saber se a distribuição está se tornando mais ou menos desigual.*  
Max O. Lorenz, 1905

Existe pouca dúvida sobre a importância de se analisar a desigualdade nas distribuições de rendimentos. A questão principal talvez seja como fazer isso. Há várias formas de se definir desigualdade e para cada uma delas há diferentes recursos para representar essa desigualdade em uma distribuição. Representações gráficas são um desses recursos. As representações gráficas permitem visualizar de maneira bastante direta e simples uma distribuição, bem como comparar os níveis de desigualdades de diferentes distribuições. De certo modo, elas são a porta de entrada para o debate sobre a mensuração da desigualdade.

A abordagem gráfica é um primeiro passo seguro em qualquer análise sobre desigualdade em uma distribuição. Medidas de desigualdade conhecidas, como o Coeficiente de Gini e os índices de Theil, sintetizam a informação da desigualdade em um único valor. Para muitos propósitos essa síntese é altamente desejável. Porém, a síntese realizada por estes ou qualquer outro indicador implica perda de informação sobre a distribuição como um todo, informação que muitas vezes é mantida quando a desigualdade é representada de forma gráfica.

Medidas e representações gráficas da desigualdade de renda não servem apenas para se estudar distribuições de rendimentos. A maioria – senão todas – dessas medidas pode ser aplicada a praticamente qualquer tipo de distribuição composta por valores intervalares. Uma Curva de Lorenz, por exemplo, pode ser usada para representar a desigualdade nas distribuições do número de filhos nas famílias, do tempo livre entre trabalhadores, da área geográfica segundo municípios e muitas outras. A aplicação delas à renda, porém, é talvez a mais conhecida e simples maneira de estudá-las.

Existem inúmeras maneiras de se representar graficamente uma distribuição de rendimentos. Este texto se concentra em apenas quatro: a Parada de Pen (e as Curvas de Quantis a ela associadas) e a Curva de Lorenz, a Curva de Lorenz Generalizada e as Curvas de Concentração. A mais simples e intuitiva é a Parada de Pen; a mais famosa e usada é a Curva de Lorenz. Elas representam coisas distintas, mas que estão relacionadas. Estas quatro representações são importantes porque são o ponto de partida para se entender melhor boa parte do debate sobre medidas de desigualdade.

A Parada de Pen é uma metáfora extremamente criativa e simples usada para descrever uma distribuição de renda. Nela, a desigualdade de rendimentos é associada à desigualdade na altura das pessoas. Esse recurso chama atenção para o fato de que se a altura das pessoas fosse proporcional a suas rendas, se viveria em uma sociedade formada por uma grande massa de anões e uma pequena elite de gigantes. A representação gráfica mais comumente associada à Parada de Pen é a Curva de Quantis.

A Curva de Lorenz é uma construção simples que indica quanto cada fração da população detém da renda total. Ela é muito útil, dentre outras coisas, porque facilita comparações de distribuições entre populações com níveis de riqueza diferentes ou das distribuições de uma mesma população entre distintos momentos no tempo.

A Curva de Lorenz Generalizada é uma modificação da Curva de Lorenz que traz informações sobre a forma e o nível da distribuição, tal como a Curva de Quantis. Trata-se de uma ferramenta extremamente útil para comparar níveis de bem-estar de diferentes distribuições sem que a comparação seja afetada pelos tamanhos das populações. Ela é um dos principais instrumentos usados em análise de dominância de bem-estar entre distribuições.

Uma Curva de Concentração é uma das formas de representação gráfica da concentração de algo segundo grupos ou indivíduos. Curvas de Concentração têm várias aplicações, como o estudo da progressividade da distribuição de serviços públicos segundo grupos de renda ou a análise da distribuição dos componentes da renda total das famílias.

Com essas representações gráficas é possível analisar os efeitos distributivos de várias políticas e entender como elas podem reduzir desigualdades. Elas permitem, por exemplo, o estudo do comportamento histórico da desigualdade, avaliar quem se beneficia de serviços públicos, ou ainda comparar quais os efeitos sobre a desigualdade de políticas focalizadas, universais e de crescimento. Também possibilitam dizer qual o nível de crescimento equivalente a uma transferência de renda focalizada ou ainda quais as consequências distributivas de erros de focalização.

Para tratar desses aspectos o texto está dividido em seções, sendo a primeira esta introdução. Na segunda são discutidos alguns conceitos necessários para o bom entendimento das representações gráficas da desigualdade na distribuição dos rendimentos, como os significados dos termos *distribuição* e *desigualdade*. Na seção seguinte é apresentada a construção da Parada de Anões e uns Poucos Gigantes, de Jan Pen, mais conhecida como Parada de Pen e uma curva associada a ela, a Curva dos Quantis. A quarta seção discute o que é a Curva de Lorenz e sugere como interpretá-la. Embora a metáfora de Pen seja posterior à criação da Curva de Lorenz, a ordem das seções se justifica porque os instrumentos da primeira são mais elementares que os necessários para se construir a segunda. Uma quinta seção apresenta a Curva de Lorenz Generalizada, as etapas de sua construção e suas semelhanças com a Curva de Quantis. A seção seguinte discute o que é e como se constrói uma Curva de Concentração, relacionando-a com a Curva de Lorenz. A sétima seção apresenta notações para as curvas apresentadas e a oitava faz comentários sobre literatura que pode ser usada para estudos mais detalhados. Uma última seção sumariza o conteúdo do texto.

## 2 TERMOS E CONCEITOS

### 2.1 DISTRIBUIÇÃO E DESIGUALDADE

Existem várias idéias diferentes por trás da expressão distribuição de renda. Ela é usada ora para indicar o ato de distribuir a renda, ora para indicar a forma como ela já se encontra distribuída. Em geral, quando se fala de muita ou pouca distribuição

da renda, está-se usando a expressão no primeiro sentido, o da ação; quando se diz boa ou má distribuição da renda, remete-se ao segundo sentido, o da situação. Portanto, o significado de *distribuição de renda* depende, evidentemente, do contexto em que se usa a expressão.

É comum ouvir a expressão ser usada para indicar uma ação, o ato de distribuir. *Promover a distribuição da renda*, por exemplo, é uma expressão que se refere à execução de um ato, a mudança (geralmente a redução) dos níveis de desigualdade na distribuição dos rendimentos. Tanto é que normalmente entende-se *políticas distributivas* como ações cujo resultado, se espera, deve ser uma sociedade mais igual. Como neste sentido a expressão é muito usada com o significado de modificar uma situação existente, muitos preferem usar o termo *redistribuição*. Portanto, *políticas redistributivas* seriam aquelas que têm o objetivo de mudar o perfil da distribuição existente.

Por outro lado, *distribuição da renda* também tem o sentido de uma descrição do modo como os rendimentos são apropriados por diferentes grupos, indivíduos ou categorias funcionais, um sentido vinculado à noção de distribuição estatística. Uma distribuição não é, rigorosamente falando, um fato observável, ela é uma construção feita a partir da observação de um fenômeno ou de suposições. É por isso que pode-se referir a distribuições de coisas não observáveis diretamente como, por exemplo, o bem-estar das pessoas. Em termos gerais, na definição que será usada, a distribuição de uma variável mostra a frequência de ocorrência de cada um dos valores que essa variável assume na população. A distribuição da renda segundo estratos populacionais, por exemplo, indica qual o montante de rendimentos recebido por cada estrato da população.

E afinal, se diz *renda* ou *rendimentos*? Os dois são usados de forma intercambiável. Como o termo *renda* é às vezes usado para fazer referência a um tipo específico de recebimento de riqueza relacionado a direitos de propriedade (renda da terra, investimentos rentáveis etc.), cuja origem seria diferente da remuneração do trabalho, muitos preferem usar o termo *rendimentos* nas descrições das distribuições. Na prática, não faz muita diferença empregar um ou outro, pois o contexto de uso geralmente permite uma boa compreensão do sentido adotado. A preferência, nos estudos sobre distribuição pessoal ou familiar, é pelo termo *rendimentos*.

A distribuição dos rendimentos ou da renda pode ser abordada de várias maneiras. Fala-se de *distribuição funcional da renda* quando se analisa como a renda é dividida segundo categorias funcionais ou fatores de produção, como capital e trabalho; *distribuição espacial dos rendimentos*, obviamente em referência a divisões geográficas; e *distribuição pessoal dos rendimentos* para o estudo de como a renda é distribuída entre pessoas. Há, evidentemente, inúmeras outras distribuições possíveis. Quando se descreve uma distribuição de renda, é importante informar o que é distribuído e entre quem essa distribuição está sendo descrita. Por isso, implícita ou explicitamente fala-se sempre de distribuição de algo *segundo* algo, de uma variável segundo uma categoria.

Encontram-se distribuições de rendimentos segundo várias categorias diferentes. As mais comuns são divisões abstratas, como poupança, investimentos, consumo, divisões geográficas ou grupos formados por estratificação social por raça, gênero e classe, ou ainda divisões por famílias e indivíduos. Também são encontradas

distribuições de diferentes tipos de renda, como, por exemplo, rendimentos familiares *per capita*, rendimentos do trabalho etc.

A decisão sobre quais os rendimentos e segundo quais categorias conduzir a análise depende, evidentemente, dos objetivos perseguidos. Essa deve ser uma escolha de caráter instrumental, isto é, feita levando em consideração que a divisão é uma ferramenta de análise e, portanto, não é possível dizer que o correto é analisar tais rendimentos usando tal divisão sem levar em conta os propósitos da análise. Como um instrumento, qualquer escolha do tipo de rendimentos e dos critérios de estratificação será mais adequada para alguns objetivos do que para outros.

As expressões *distribuição de renda* e *desigualdade de renda* evocam idéias muito parecidas, mas, a rigor, não tratam da mesma coisa. Na maioria das vezes, quando dizemos *desigualdade de renda* estamos, na verdade, nos referindo à *desigualdade na distribuição das rendas*; a distribuição da renda é um objeto e, por sua vez, a desigualdade é uma característica desse objeto. Uma distribuição estatística pode ser descrita a partir de dois tipos básicos de medidas: as de localização e as de dispersão. Medidas de localização comuns são as de tendência central, como a média e a mediana, e as medidas de dispersão mais comuns são a variância e suas transformações. A desigualdade de rendimentos diz respeito à segunda característica básica da distribuição, sua dispersão. As duas expressões, no entanto, são comumente associadas e uma frase do tipo *precisamos melhorar a distribuição da renda* deve ser entendida como um apelo para a redução na desigualdade na distribuição dos rendimentos.

## 2.2 O QUE SIGNIFICA DESIGUALDADE?

Para saber se a desigualdade em um país (ou em uma população qualquer) está aumentando ou diminuindo ou se é maior ou menor que em outro país precisamos de uma noção de o que vem a ser desigualdade. Definir desigualdade, porém, não é uma tarefa tão trivial quanto pode parecer à primeira vista. Esforços importantes foram realizados nesta área, em particular no que diz respeito aos conteúdos valorativos implícitos nas desigualdades consideradas em estudos sobre desigualdades sociais. Sen (1995), por exemplo, vai mostrar que um passo crucial no estudo da desigualdade é responder à pergunta *desigualdade de quê?*

A intenção aqui, no entanto, é muito mais modesta. O objetivo é discutir formas de se abordar desigualdades em uma distribuição qualquer (ou seja, para qualquer resposta à pergunta *desigualdade de quê?*), em particular realizar comparações entre os níveis de desigualdade de distribuições diferentes. O primeiro passo neste sentido talvez seja buscar uma definição por negação bastante óbvia: desigualdade é uma situação onde não existe igualdade. No entanto, essa definição não é suficiente para se quantificar a desigualdade e assim poder dizer como a desigualdade se comporta no tempo ou como se podem comparar, mais detalhadamente, diferentes populações.

Quando se denota a  $a \neq b$ , está sendo indicada uma desigualdade; então já existe alguma informação: que  $a$  e  $b$  são comparáveis e, quando comparados, são desiguais. Parece pouco, mas a exigência de comparabilidade é um elemento importante no debate sobre desigualdade. Ela está por trás de vários procedimentos relacionados ao

estudo das desigualdades como, por exemplo, o deflacionamento de preços, a criação de índices sintéticos, de escalas de equivalência ou o uso de funções de bem-estar.

Mas essa informação ainda é limitada. Ela não dá muito detalhe sobre o resultado da comparação entre  $a$  e  $b$ . Matematicamente falando, uma desigualdade ocorre quando uma quantidade é maior ou menor que outra. Portanto, quando se denota que a quantidade  $a$  é maior que a quantidade  $b$  ou vice-versa ( $a > b$  ou  $a < b$ ), já se sabe mais do que se sabia com a afirmação  $a \neq b$ . À primeira vista parece um acréscimo irrelevante, mas não é. Quando se compara distribuições inteiras, afirmar que a quantidade de desigualdade em uma distribuição é maior ou menor que outra pode ser objeto de várias controvérsias (é verdade que isso raramente ocorre por dificuldades na comparação de  $a$  e  $b$  e sim porque não há consenso sobre como medir  $a$  e  $b$ ).

O que muitas vezes se busca saber é quanto  $a$  é maior ou menor que  $b$ . Para isso, porém, é preciso uma definição em pouco mais detalhada de desigualdade. Para afirmar, por exemplo, que  $a$  é muito maior do que  $b$  ou vice-versa (denota  $a \gg b$  ou  $a \ll b$ ), é preciso ser capaz de medir a desigualdade. É por isso que as medidas e as representações gráficas de desigualdade dependem tanto da forma como essa desigualdade é definida.

Nos estudos sobre desigualdades coexistem várias definições diferentes. Cada definição traz consigo implicações éticas. De certo modo, é possível dizer que a cada medida ou índice utilizado corresponde uma definição distinta de desigualdade. Isso não quer dizer, porém, que os diferentes estudos não compartilham elementos comuns em suas definições. As noções de desigualdade podem ser agrupadas em grandes famílias ou conjuntos com características semelhantes.

Champernowne e Cowell (1998) sugerem que existem pelo menos duas abordagens importantes para a mensuração da desigualdade. A primeira é analisar as desigualdades absolutas e, a segunda, as desigualdades relativas. As primeiras estão relacionadas a diferenças enquanto as segundas a razões. Um exemplo ajuda a entender a diferença entre esses dois tipos de desigualdade. Suponha uma situação inicial bem simples, uma população de apenas duas pessoas, Ana e Beatriz, que têm, respectivamente, os rendimentos \$1 e \$3. Que existe desigualdade entre essas pessoas é evidente; o que não é tão claro assim é quanta desigualdade existe: por um lado, Beatriz recebe \$2 a mais do que Ana; por outro, Beatriz recebe 3 vezes mais do que Ana.

A desigualdade absoluta entre Ana e Beatriz pode ser medida pela diferença (subtração) entre seus rendimentos, isto é,  $\$3 - \$1 = \$2$ . A desigualdade relativa, por sua vez, pode medir-se pela razão (divisão) entre os dois rendimentos, ou seja,  $\$3/\$1 = 3$ . Há outros modos de se medir desigualdades, mas para os propósitos neste momento, estes são adequados. Para tentar sintetizar essas noções, serão tratadas as desigualdades absolutas como algo que se mede por diferenças e desigualdades relativas como algo que se mede por razões, embora existam maneiras melhores de fazer essa mensuração.

O que está sendo feito aqui é uma distinção dos tipos de mensuração da desigualdade a partir de duas abordagens básicas, diferenças e razões. O objetivo desta distinção é tornar mais claros os significados que o conceito *desigualdade*

assume. Indiscutivelmente há desigualdade entre  $a$  e  $b$  quando  $a - b \neq 0$  (diferença) ou  $a \div b \neq 1$  (razão). Estas duas abordagens medem desigualdade de forma bastante distinta, mas é perfeitamente possível combiná-las, criando novas medidas de desigualdade. Por exemplo, pode ser criado um índice, que será chamado  $I$ , no qual a desigualdade é medida por  $I = (a - b) \div b$ . Isso ajuda a entender como diferentes formas de mensuração da desigualdade implicam, no limite, distintas definições de desigualdade.

No exemplo da desigualdade entre Ana e Beatriz, apesar de 3 ser um número maior do que 2, não é possível dizer que a desigualdade relativa entre essas pessoas é maior do que a desigualdade absoluta, pois as unidades usadas não são comparáveis (as medidas são \$2 e 3 e não \$2 e \$3 ou 2 e 3). As duas abordagens medem coisas diferentes, mas é óbvio que elas possuem uma relação entre si. Porque medem coisas diferentes, variações em um tipo de desigualdade nem sempre são acompanhados por variações no outro tipo. É perfeitamente possível que as desigualdades absolutas de uma distribuição aumentem e, apesar disso, as desigualdades relativas se mantenham estáveis no tempo.

Multiplique por dois os rendimentos das pessoas do exemplo e recalcule as desigualdades entre elas. Ana passará a receber \$2 (2 x \$1) e Beatriz \$6 (2 x \$3). O que ocorre com as medidas de desigualdade? A distância ou desigualdade absoluta cresce para \$4 (diferença \$6 - \$2), mas a desigualdade relativa se mantém no mesmo nível anterior (razão \$6/\$2=3), apesar do crescimento generalizado dos rendimentos. Uma análise baseada na abordagem das desigualdades absolutas (diferenças) diria que ao longo do tempo a população se tornou mais desigual, ao passo que baseada na abordagem das desigualdades relativas (razões) a conclusão seria que o nível de desigualdade tem se mantido estável ao longo do tempo. Fica claro, portanto, que embora as duas abordagens tratem de desigualdades, as noções por trás delas levam a medidas de coisas diferentes.

Não existe uma definição *correta* de desigualdade, mas o costume é usar o termo *desigualdade* para fazer referência às desigualdades relativas e, para as desigualdades absolutas, usam-se termos como *diferença*, *disparidade* ou *distância*. Embora seja comum dizer que sociedades muito desiguais são *sociedades polarizadas*, estas duas noções são ainda distintas da idéia de *polarização*, a qual diz respeito ao agrupamento de indivíduos em posições distantes na estrutura social, e não será discutida aqui.

As medidas de desigualdade mais famosas, como, por exemplo, o índice de Gini ou os índices de Theil, variam apenas quando ocorrem variações na desigualdade relativa. Entre as representações gráficas mais conhecidas, a Curva de Lorenz e as Curvas de Concentração representam apenas desigualdades relativas, enquanto a Curva de Quantis (Parada de Pen) e a Curva de Lorenz Generalizada também permitem a visualização de desigualdades absolutas. A escolha por uma ou outra abordagem é instrumental, isto é, depende dos propósitos da análise e nada impede que duas (ou mais) abordagens sejam utilizadas simultaneamente – na verdade é até mesmo recomendável sempre analisar mais de uma.

## 2.3 DESIGUALDADE DE QUÊ?

Quando se fala em desigualdade, o que está subjacente é a desigualdade na distribuição de algo entre indivíduos, agrupamentos ou categorias. *Indivíduos*, aqui, podem ser tanto pessoas como famílias ou algum outro grupo. São comuns, por exemplo, análises da desigualdade na distribuição de salários entre trabalhadores. Neste caso os salários são o objeto da distribuição e os trabalhadores os indivíduos. A resposta imediata para a pergunta *desigualdade de quê?* neste exemplo é *salários*, mas a questão fundamental por trás disso é *o que salários representam?*

Essa questão é fundamental para a condução de qualquer estudo sobre desigualdade, mas foge ao nosso objetivo aqui discuti-la. As representações gráficas da desigualdade examinadas adiante permitem a apresentação de vários tipos de desigualdade. A maioria delas foi desenvolvida para representar desigualdades na distribuição de rendimentos, mas é perfeitamente possível utilizá-las para representar coisas bem diversas como, por exemplo, a distribuição do número de filhos segundo famílias ou da área territorial segundo municípios. Portanto, deve-se ter em mente que os exemplos a seguir são baseados em distribuições de rendimentos, mas com alguns ajustes é possível representar várias outras distribuições.

Um ponto que merece atenção é a diferença existente entre *desigualdade de rendimentos* e *desigualdade de bem-estar*. Muitas vezes a resposta verdadeira para a pergunta *desigualdade de quê?* em análises da distribuição de renda seria *bem-estar*. Como é muito difícil medir bem-estar, vários estudos tratam ambos como sinônimos. Para a construção das representações da desigualdade não faz muita diferença qual a distribuição em questão, mas do ponto de vista substantivo há quem julgue que a distribuição da renda não é um indicador seguro da distribuição do bem-estar. Basta imaginar, por exemplo, que um centavo apresenta poderes de compra diferentes nas zonas urbana e rural para entender que talvez alguma transformação na distribuição dos rendimentos seja necessária para uma melhor aproximação da distribuição do bem-estar. É possível enumerar outras razões para diferenciar níveis de renda de níveis de bem-estar como, por exemplo, a existência de bens não mercantis, como os serviços públicos gratuitos, diferenciando o nível de bem-estar de pessoas com os mesmos rendimentos.

A maior parte das medidas e representações da desigualdade é praticamente indiferente ao que é distribuído. Portanto, a discussão sobre as diferenças entre renda e bem-estar é muito importante, mas pode ser deixada de lado por enquanto. O objetivo das ressalvas acima é apenas destacar que há outros elementos na análise da desigualdade de qualquer distribuição que estão além das decisões sobre como representar a desigualdade.

## 3 AS CURVAS QUE REPRESENTAM A DESIGUALDADE

### 3.1 A PARADA DE ANÕES DE PEN, A CURVA DOS QUANTIS E OUTRAS REPRESENTAÇÕES RELACIONADAS

Esta seção se ocupa da Parada de Anões e uns Poucos Gigantes, mais conhecida como Parada de Pen, e as principais representações gráficas a ela associadas, as Curvas de Quantis.

A Parada de Pen é uma metáfora usada para descrever a distribuição de renda em uma população que se baseia na imagem de um desfile onde as pessoas marcham com altura proporcional a sua renda. É comum que se recorra à Parada de Pen para se descrever a distribuição dos rendimentos domiciliares *per capita* da população, mas a imagem pode ser usada para representar a distribuição de qualquer medida de quantidade.

São apresentadas representações que costumam ser chamadas de Gráficos da Paradas de Pen, ou simplesmente Paradas de Pen, porque transmitem informações de modo semelhante à metáfora da parada. É o caso, por exemplo, da Curva de Quantis, uma curva que une o valor dos rendimentos do indivíduo mais rico de cada estrato da população em um gráfico de duas dimensões no qual o eixo horizontal representa quantidades de pessoas por meio de frações da população (os quantis) e o eixo vertical representa o valor da renda das pessoas. Existe uma outra curva, muito similar, que também é chamada de Gráfico da Parada de Pen: a curva dos rendimentos médios das frações de população, cuja diferença em relação à Curva de Quantis se resume no uso de valores médios, ao invés de separatrizes, para representar os estratos na distribuição.

A partir de uma distribuição hipotética mostra-se, passo a passo, como se dá a construção de uma Parada de Pen e das curvas a ela associada, ressaltando, por exemplo, a importância de se assegurar que os valores devem ser ponderados pelos pesos de expansão da amostra toda vez que a origem dos dados for um levantamento amostral.

A metáfora da parada ajuda a interpretar não só as informações trazidas pela Curva de Quantis mas, também, a entender o conteúdo das Curvas de Lorenz, das Curvas de Lorenz Generalizadas e das Curvas de Concentração, que serão apresentadas mais adiante.

### 3.1.1 O que é Parada de Anões de Pen

Como representar a distribuição de rendimentos em uma sociedade de uma maneira que seja ao mesmo tempo rigorosa, intuitivamente simples de ser compreendida e capaz de transmitir a todos como é grave a existência de desigualdades sociais? Esta era uma questão importante no final da década de 1960, quando diversas representações eram usadas para descrever distribuições de rendimentos, mas a maioria delas era de difícil compreensão para as pessoas que não possuíam familiaridade com o assunto. Isso muda no início dos anos 1970, quando o economista holandês Jan Pen desenvolve uma maneira extremamente criativa e convincente de se representar a desigualdade na distribuição de renda em uma sociedade, a Parada de Anões e uns Poucos Gigantes, também conhecida hoje como Parada de Pen.

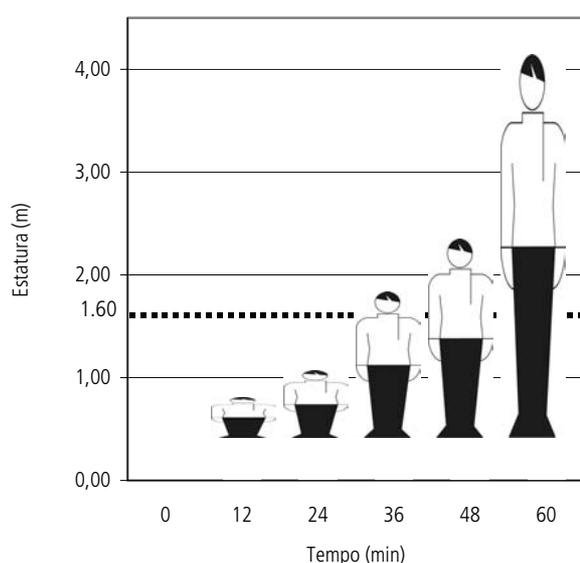
O que a Parada de Anões de Pen faz é descrever a desigualdade de renda a partir da imagem da desigualdade na altura das pessoas. Nem todos se impressionam muito quando tomam conhecimento de que, em uma sociedade, um terço da população recebe, por exemplo, menos da metade da renda média; todavia, quase ninguém seria insensível à cena de uma sociedade onde um terço da população é composto de anões com menos de 80 cm de altura. No livro *Income Distribution* (1971), Jan Pen lança

mão do forte apelo que a imagem das desigualdades na altura das pessoas tem para dar uma idéia de como a desigualdade de renda na Grã-Bretanha era elevada.

Imagine uma sociedade em que as pessoas têm sua altura proporcional à renda. As pessoas com a renda equivalente à média teriam a altura média desta sociedade; quem tiver renda menor que a média, será mais baixo que a estatura média; e quem tiver renda maior, mais alto. Agora imagine essas pessoas colocadas em fila, ordenadas segundo sua altura, as mais baixas – e, portanto, mais pobres – primeiro e as mais altas – e ricas – depois. Agora imagine essas pessoas em uma parada, marchando durante uma hora. Esse desfile das pessoas ordenadas segundo sua altura proporcional à renda por uma hora é a Parada de Pen.

GRÁFICO 1

### Parada de Pen



Elaboração do autor.

O que chama a atenção na imagem da Parada de Pen é que, para grande parte dos países do mundo, esta é uma parada de anões e pouquíssimos gigantes. Nos primeiros minutos desfilam pessoas de altura diminuta, muito menor do que a altura de qualquer anão que se conhece. Em geral pessoas um pouco maiores, mas ainda anãs, desfilam por bem mais de metade do tempo da parada. Nos últimos minutos, porém, começam a passar gigantes de uma altura descomunal, várias vezes maiores que todos – porque são mais ricos –, inclusive as pessoas de estatura média.

As Paradas de Pen são comumente mencionadas para descrever a distribuição dos rendimentos domiciliares *per capita* da população, mas a imagem pode ser usada para representar a distribuição não apenas de qualquer tipo de renda, mas de quaisquer medidas de quantidade.

Geralmente a metáfora do desfile de uma hora é usada em narrativas sobre a desigualdade na distribuição de rendimentos em uma sociedade, para ajudar os leitores a interpretar dados apresentados. Existem representações gráficas desta distribuição,

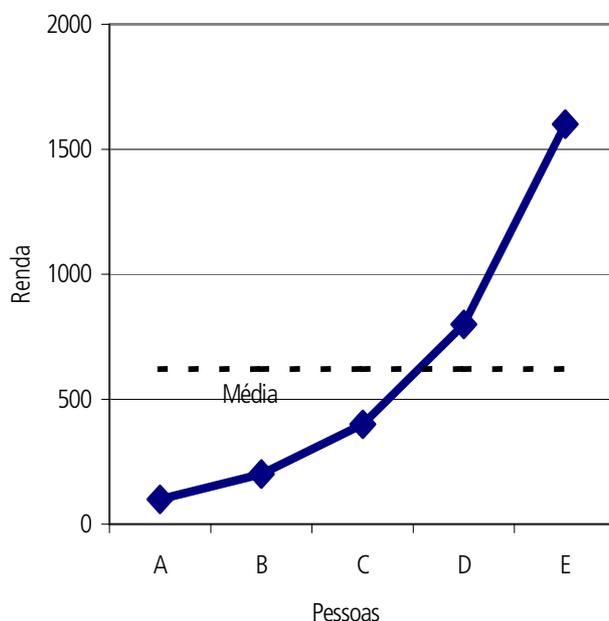
normalmente um pouco diferentes da imagem da parada de anões, que também costumam ser chamadas de Gráficos da Paradas de Pen, porque transmitem informações muito semelhantes. É o caso, por exemplo, das Curvas de Quantis.

### 3.1.2 O que é a Curva dos Quantis?

Imagine uma população ordenada segundo sua renda, com as pessoas mais pobres primeiro e as mais ricas depois. Se se dividir essa população em dez partes iguais tem-se, evidentemente, dez *décimos*, o primeiro sendo o décimo mais pobre e o último o décimo mais rico da população. Cada fronteira entre um décimo e outro é uma separatriz. A essa fronteira se dá o nome de *decil*. O termo decil serve para denominar cada *quantil* de uma distribuição fracionada em dez partes.

Um quantil é uma separatriz, o valor da fronteira que divide diferentes estratos da população ordenada. Por exemplo, em uma população estratificada em três grupos com a mesma quantidade de pessoas, o valor da renda da primeira pessoa do segundo estrato, isto é, o ponto onde termina o primeiro terço da população, é, na prática, o primeiro quantil. Se a população fosse dividida em dez partes iguais, haveria nove quantis separando cada um dos décimos e um ponto para o valor máximo, que para todos os efeitos pode ser entendido como o décimo quantil. A mediana, neste caso, seria o quinto quantil. Embora no caso de números pares de pessoas entre estratos o mais preciso seria calcular o ponto médio entre as pessoas para definir a separatriz, na prática se adota a renda da última pessoa do estrato como demarcação do quantil.

GRÁFICO 2  
Indivíduos segundo sua renda pessoal



Elaboração do autor.

O desfile de anões ajuda a entender como se constrói uma Curva de Quantis. Imagine que, ao invés da estatura, as pessoas fossem realmente representadas em um

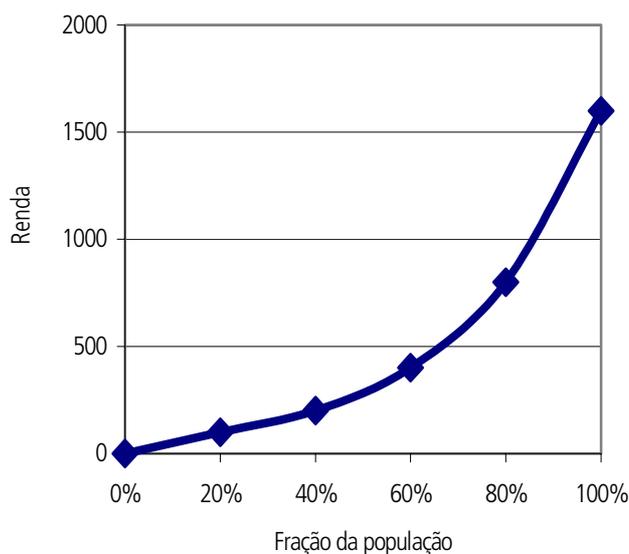
gráfico por suas rendas. Agora imagine que essas pessoas fossem colocadas em fila, como na Parada de Pen, ordenadas da menor para a maior renda. Se forem unidos os pontos que representam as rendas, a curva resultante forma uma imagem muito semelhante à que se teria com a altura das pessoas no desfile, como anteriormente. O problema é que para representar milhões de pessoas em uma população ter-se-ia que marcar milhões de pontos em um gráfico. A solução é escolher algumas pessoas, para que estas representem várias outras com características semelhantes. Se fosse tomada uma população com milhões de pessoas e esta fosse dividida em, por exemplo, cem partes iguais, seria muito mais fácil escolher apenas uma pessoa em cada uma dessas partes para representar as demais e marcar apenas cem pontos no gráfico.

Quais pessoas escolher? Por que não a última, isto é, a mais rica de cada grupo? O valor da renda da última pessoa de cada grupo, que define cada quantil da distribuição, pode ser usado para representar graficamente este grupo. A nomenclatura para descrever cada uma dessas fronteiras é bastante conhecida nos estudos sobre distribuição de renda. Em uma população estratificada em cem partes iguais, as fronteiras são chamadas centis; de uma estratificação em dez partes resultam decis; em cinco partes, quintis; e, em quatro, quartis.

A Curva dos Quantis é uma forma de representar graficamente a distribuição da renda em uma sociedade. Trata-se de um gráfico de duas dimensões no qual o eixo horizontal representa quantidades de pessoas por meio de frações da população (os quantis) e o eixo vertical representa o valor da renda das pessoas. A Curva dos Quantis é, na verdade, a base geralmente usada para construir a metáfora da Parada de Pen; a renda das pessoas é convertida em altura e os quantis da população em minutos da parada, começando do zero. Se a população for fracionada em dez partes iguais, cada décimo corresponderia a seis minutos da Parada de Pen.

GRÁFICO 3

### Curva de Quantis da distribuição da renda pessoal



Elaboração do autor.

Como existe uma associação entre o desfile de anões e a Curva dos Quantis, é muito comum que esta última seja também chamada de Gráfico da Parada de Pen ou simplesmente Parada de Pen, apesar da diferença no que os eixos representam. O mais freqüente é encontrar gráficos denominados Parada de Pen que não possuem eixos para estatura e tempo, sendo, na verdade, Curvas de Quantis ou similares. Não é importante tentar manter uma separação conceitual rigorosa entre ambas, porque na prática as Curvas de Quantis não apenas são conhecidas como Paradas de Pen como as duas representam basicamente a mesma coisa.

A maior parte das Curvas de Quantis de distribuições reais de rendimentos tem um formato sinuoso, crescendo de modo acelerado, porém breve, logo após a renda zero e mantendo-se sem crescimento expressivo até frações mais altas da população. No extremo mais rico, as curvas costumam se inclinar rapidamente em direção a valores de rendimentos muito mais altos que os observados ao longo da distribuição. É bom lembrar que essa descrição não leva em consideração rendimentos negativos (ex.: perdas de poupança), como é praxe nos estudos sobre desigualdade, mas nada impede que estas também sejam representadas nos gráficos caso isso seja importante.

A Curva dos Quantis de uma distribuição perfeitamente igualitária seria uma linha reta paralela ao eixo horizontal. Uma sociedade claramente segmentada entre elite e massa é caracterizada por uma Curva dos Quantis relativamente horizontal na maior parte da distribuição e uma forte inclinação nos estratos mais ricos, com um formato próximo a um L invertido (da direita para a esquerda).

### 3.1.3 Diferença entre Frações e Quantis

É muito comum encontrar expressões do tipo *a população pobre do primeiro decil* ou ainda *o grupo de referência usado foi a população do último quintil de renda*. Mas se um decil é um ponto na distribuição, como pode um grupo de população pertencer a esse ponto? A rigor, as pessoas não pertencem a centis, decis, quintis ou quartis de população, mas a centésimos, décimos, quintos e quartos, respectivamente. Mais fácil talvez seja entender que, analogamente, as pessoas pertencem às metades e não à mediana da distribuição. No entanto, é freqüente o uso das palavras descritoras dos quantis para fazer referência aos *n-ésimos*, as frações da população. Em parte isso se deve a uma tradução imediata dos termos *centile*, *decile* e *quintile*, usados com certa freqüência em inglês para representar estas frações, embora estas expressões em inglês, rigorosamente falando, também se refiram aos pontos e não aos intervalos. Este pequeno equívoco não constitui exatamente um problema, uma vez que todos sabem que a *população de um decil* é certamente a população de um determinado décimo da estratificação, mas não custa muito tentar usar os termos mais corretos e evitar possíveis confusões.

Em alguns casos se encontra o termo *fractil* sendo usado como sinônimo de *quantil*. Trata-se também de uma tradução imediata do termo inglês *fractile*, mas que raramente se usa e, portanto, é recomendável evitar.

### 3.1.4 Parada de Pen: centis ou centésimos?

As Curvas de Quantis são muitas vezes chamadas de Gráficos da Parada de Pen. Há, porém, um outro tipo de curva, muito similar, que também é chamado de Gráfico da

Parada de Pen: a curva dos rendimentos médios das frações de população. Essas frações também são chamadas de estratos. Esta curva compõe um gráfico de duas dimensões onde no eixo horizontal estão os pontos medianos dos estratos ou frações da população (geralmente centésimos) e, no eixo vertical, o valor da renda média de cada estrato. A diferença em relação a uma curva de quantis, portanto, é muito pequena. As duas apresentam praticamente a mesma informação.

Em geral esta curva é traçada usando-se o rendimento médio dos centésimos da população, mas é perfeitamente possível usar outro tipo de divisão, como décimos ou milésimos. Na prática, quando se usa cem pontos as duas curvas são muito semelhantes. A diferença entre elas só se destaca nos estratos mais ricos da população, com a curva construída a partir dos centésimos apresentando valores mais baixos que a curva dos centis. Quanto maior o número de estratos (e, portanto, quanto menor seu tamanho), menor tende a ser a diferença entre as curvas, porque em geral a desigualdade dentro dos estratos se reduz com o tamanho dos estratos. Com mil estratos a diferença entre as curvas é imperceptível. Já as diferenças entre curvas de quintis e quintos, por exemplo, são mais facilmente visíveis.

Em síntese, não há uma distinção muito grande na construção e entre as informações transmitidas pelas Curvas de Quantis e Curvas de Médias dos Estratos. Por exemplo, no eixo horizontal de uma curva de centis marca-se a fronteira entre os estratos na última pessoa do centésimo; na curva de centésimos marca-se o ponto mediano, a pessoa cuja posição é o meio do centésimo. No eixo vertical, marca-se, respectivamente, o valor do rendimento da última pessoa do centésimo (estrato) ou o valor do rendimento médio das pessoas do centésimo.

O que usar, médias dos estratos (frações) ou quantis? Não existe uma resposta única para uma pergunta como essa. A rigor, a melhor representação da forma da distribuição real seria feita com um ponto para cada indivíduo, se essa informação existir. Como é mais fácil construir gráficos com números menores de pontos, usar valores que representam os estratos implica uma troca entre precisão da informação por facilidade operacional, um procedimento totalmente aceitável quando os estratos são pequenos. Cada vez mais tem sido comum o uso de médias dos centésimos para a construção de gráficos, porque muitos julgam que uma média representa mais adequadamente as características de cada estrato, mas quando é desejável realizar comparações com trabalhos anteriores que utilizaram quantis, a escolha costuma ser por privilegiar a comparabilidade mantendo o mesmo padrão de representação. Se a meta é relacionar o Gráfico da Parada de Pen a Curvas de Lorenz, usar quantis (isto é, Curvas de Quantis) é uma boa idéia, pois as Curvas de Lorenz são traçadas a partir de valores de quantis. Acima de tudo, o importante é ter clara a diferença entre os dois tipos de curva no momento de se interpretar os resultados e lembrar que a expressão *Gráfico da Parada de Pen* é usada para denominar várias coisas semelhantes.

### 3.1.5 Construindo Paradas de Pen

Para construir uma Parada de Pen a partir de dados de uma distribuição, supor-se-á uma população composta por apenas cinco pessoas, Ana, Beatriz, Cláudia, Débora e Elisa. Para representar essas pessoas será usada apenas a primeira letra de seus nomes, A, B, C, D e E. Agora será atribuída uma renda (ou rendimento, se preferir) a cada uma dessas pessoas, respectivamente \$100, \$200, \$400, \$800 e \$1.600. A soma de

todas as rendas é \$3.100. Como são cinco pessoas, a renda média dessa população é \$620. Supor-se-á que todas as pessoas que tiverem rendas menores que R\$ 250 podem ser consideradas pobres. Ter-se-á, portanto:

TABELA 1

**Renda pessoal da população ABCDE**

Pessoa	A	B	C	D	E
Renda pessoal	100	200	400	800	1600

Para ilustrar a distribuição usando a metáfora da Parada de Anões, converte-se as rendas em estatura de um modo bastante simples. Como a renda média deve corresponder à estatura média da população, é feita uma mudança de escala dividindo-se todas as rendas da distribuição pelo valor da renda média (\$620) e multiplicando-as por 1,60m, supondo ser esta a estatura média da população em questão. Como existem apenas cinco pessoas no desfile de uma hora, a primeira delas só passará depois de decorridos os primeiros doze minutos da parada, como mostra a tabela a seguir.

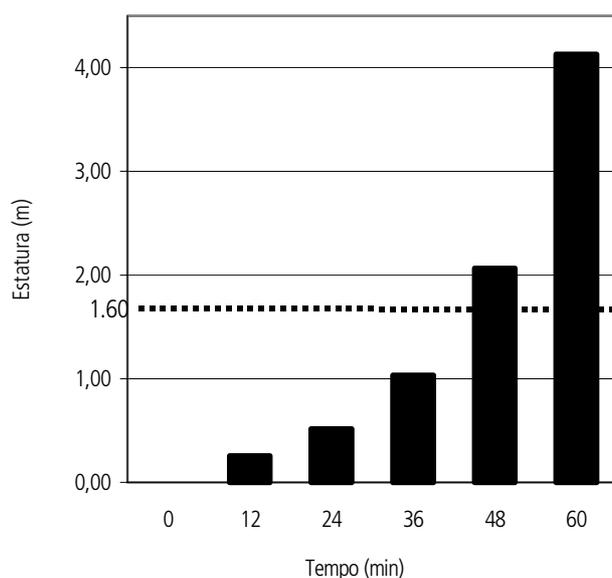
TABELA 2

**Dados de estatura para a Parada de Pen**

Pessoa	A	B	C	D	E
Tempo (min)	12	24	36	48	60
Estatura (m)	0,26	0,52	1,03	2,06	4,13

Em seguida será usado um gráfico de barras para ilustrar a Parada de Pen, com cada barra correspondendo a uma pessoa. A estatura média das pessoa, 1,60m, é indicada por uma linha horizontal. Depois de iniciado o desfile, passa a primeira anã, A, cuja minúscula estatura é pouco superior a um palmo. O desfile continua e durante mais da metade do tempo apenas anãs estão marchando. Apenas aos 48 minutos da parada passa a primeira pessoa com altura superior à média, D. A última pessoa a desfilar é E, uma gigante de mais de quatro metros de altura. A pessoa E é dezesseis vezes mais alta que a pessoa A. O mais impressionante é que para uma grande parte dos países do mundo a parada do exemplo é *menos desigual do que a realidade*, se forem comparadas as primeiras e as últimas pessoas do desfile.

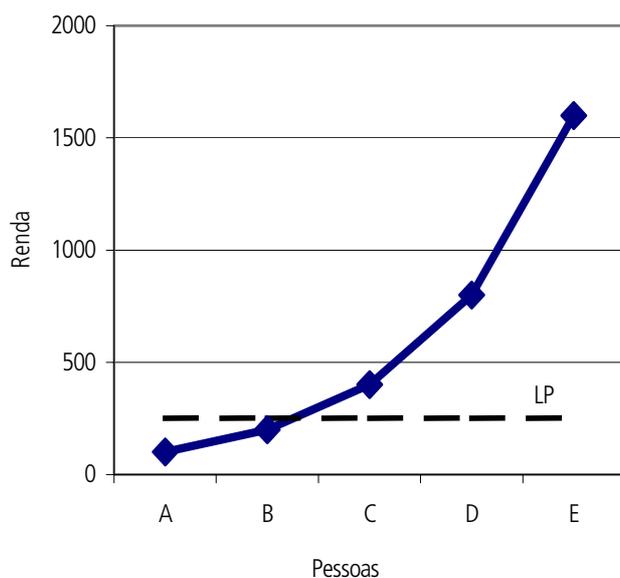
GRÁFICO 4

**Parada de Pen**

Elaboração do autor.

Para ilustrar a mesma distribuição de renda, porém usando diretamente os eixos renda e pessoas, geralmente são usados gráficos de linhas unindo os pontos de renda das pessoas, inclusive a *pessoa zero*. A figura a seguir faz isso e ilustra uma Linha de Pobreza (LP, no caso, \$250) dividindo a população entre pobres e não pobres, mas não inclui a pessoa zero por razões de simplificação. Seria possível marcar também qualquer outro tipo de estratificação baseada na renda, assim como também seria possível registrar valores negativos no eixo vertical.

GRÁFICO 5

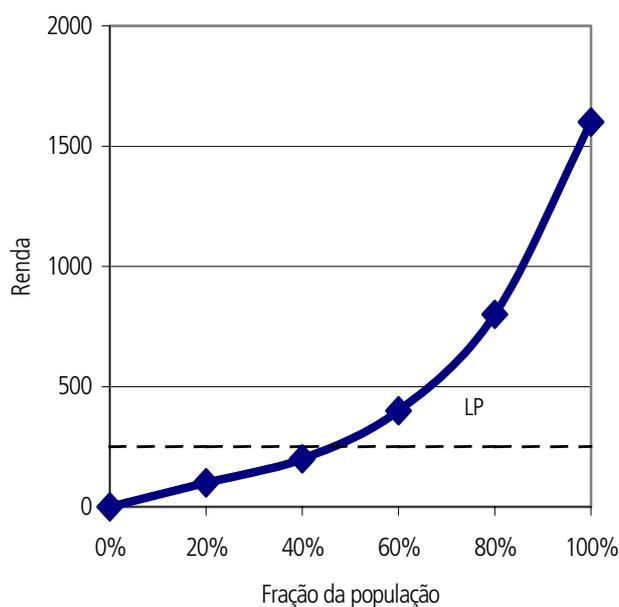
**Distribuição da renda pessoal**

Elaboração do autor.

O gráfico anterior foi facilmente traçado pessoa a pessoa porque o tamanho da população usada como exemplo é pequeno. Em populações maiores, provavelmente o gráfico seria construído para pontos representativos como, por exemplo, centis ou rendas médias dos centésimos, mas sua forma seria praticamente a mesma se for grande a quantidade de pontos representativos usada. A Curva de Quantis a seguir é uma forma de representar a distribuição de rendimentos que é facilmente associada à metáfora da Parada de Pen. Note que o formato é o mesmo, mas no eixo horizontal, ao invés de pessoas, são representadas frações da população.

GRÁFICO 6

**Curva de Quantis da distribuição da renda pessoal na população ABCDE**



Elaboração do autor.

E no caso de amostras expandidas, o que muda? Na maioria das vezes a informação sobre os rendimentos de uma população provém de pesquisas amostrais. Uma amostra precisa ser expandida para representar a população. Isso se faz por meio da ponderação das unidades de observação, que podem ser indivíduos, famílias etc. No caso de indivíduos, essa ponderação se faz pela multiplicação da informação de cada indivíduo por um peso que indica quantas pessoas ele deve representar. Quando a informação provém de amostras, portanto, as Paradas de Pen destinadas a ilustrar o que ocorre na população são construídas a partir dos valores expandidos das amostras.

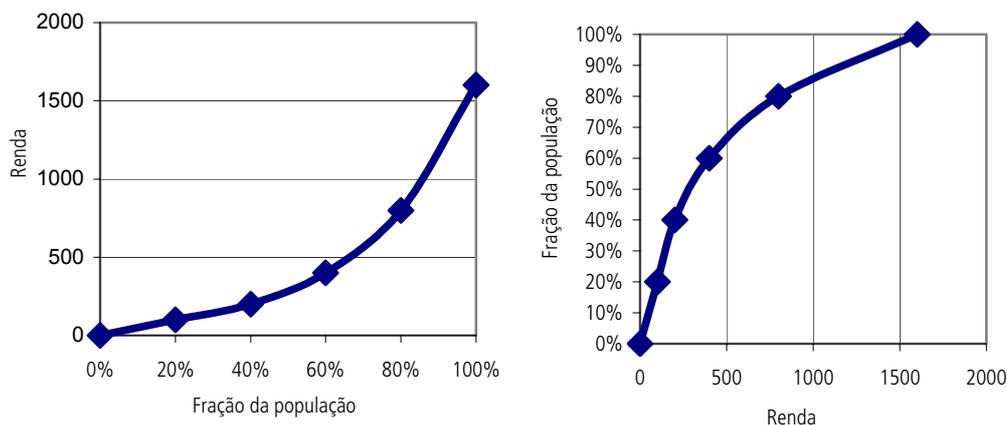
### 3.1.6 Parada de Pen e distribuição de frequência dos rendimentos

Quando se usa uma Curva de Quantis para ilustrar uma Parada de Pen, representa-se os quantis no eixo horizontal do gráfico e as rendas no eixo vertical. Com isso, a forma típica dessa curva é a de um L invertido (da direita para a esquerda). O que aconteceria se trocassem os eixos, isto é, representassem os quantis no eixo vertical e

os rendimentos no eixo horizontal? O formato desta nova curva se pareceria, desta vez, com um L de cabeça para baixo. Essa é uma imagem familiar para muitas pessoas, porque este tipo de curva é o mesmo da representação de uma distribuição de frequência relativa acumulada dos rendimentos.

GRÁFICOS 7 e 8

### Gráficos da Curva de Quantis (Parada de Pen) e Curva de Distribuição de Frequência Acumulada, usando os mesmos dados e escala

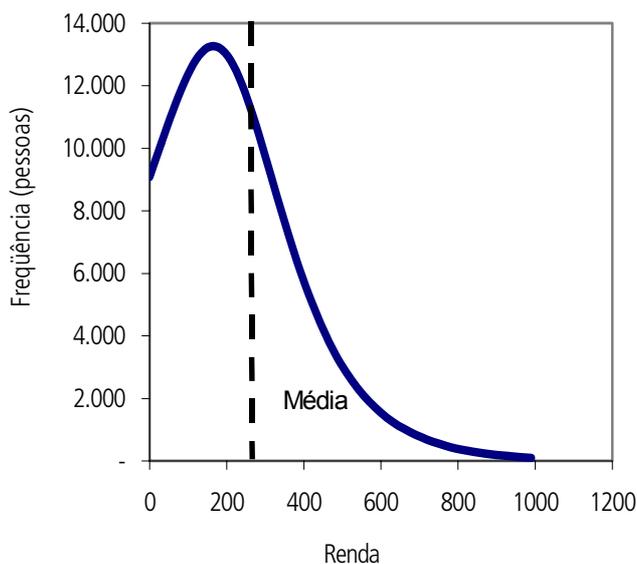


Elaboração do autor.

A relação representada pela curva de frequência relativa acumulada é também conhecida como *função de densidade padronizada* de uma distribuição. É útil saber isso porque, por aproximação, uma Parada de Pen pode ser representada por uma transformação da função de densidade da distribuição dos rendimentos.

Imagine agora que no eixo vertical fosse marcado o número de pessoas que têm uma determinada renda e, no horizontal, se continuasse a marcar os valores dos rendimentos. Essa curva que mostra quantas pessoas recebem cada valor de renda é a Curva da Distribuição de Frequência Absoluta, uma curva que tem um formato bem diferente daquela que representa a frequência acumulada. Na Parada de Pen não é possível observar que a maioria das pessoas têm rendimentos mais baixos? Na curva da distribuição de frequência isso se manifesta em um formato onde o pico da curva fica mais à esquerda do gráfico, o que permite dizer que em geral as distribuições de frequência da renda são assimétricas em relação à media dos rendimentos, tendendo para os valores menores.

### Gráfico da Distribuição de Frequência dos Rendimentos, com a média destacada



Elaboração do autor.

Gráficos de distribuição de frequência já existiam muito antes de Jan Pen elaborar sua metáfora. A razão para apresentá-los depois da Parada de Pen é simplesmente facilitar o entendimento da relação que existe entre ambos. Na verdade, não é necessário ter em mente a Parada de Pen para entender o que contêm esses gráficos. Uma distribuição de frequência é algo como uma lista de quantas vezes cada valor da distribuição ocorre. Conte as ocorrências, ordene-as segundo o valor ocorrido (e não o número de ocorrências) e pronto, foi construída uma distribuição de frequências. No caso dos rendimentos pessoais, por exemplo, conte quantas pessoas têm rendimento igual a 1, 2, 3, e assim sucessivamente e, depois, marque os rendimentos no eixo horizontal e, no eixo vertical o número de vezes que cada rendimento ocorre para fazer um gráfico de sua distribuição.

As informações apresentadas pelos gráficos da distribuição de frequência relativa acumulada dos rendimentos e da curva de quantis (Gráfico da Parada de Pen) são as mesmas, mas, por causa da metáfora do desfile de anões, a maioria das pessoas têm mais facilidade para interpretar esta última, por isso a Parada de Pen é muito mais usada. Por este mesmo motivo, nos Gráficos da Parada de Pen, seja ela representada por Curvas de Quantis ou de Rendimentos Médios dos Estratos, é bem mais fácil apresentar indicações das linhas de pobreza ou das fronteiras entre estratos sociais de uma maneira simples de entender.

### 3.2 CURVA DE LORENZ

De todas as ferramentas gráficas usadas para representar a desigualdade em uma distribuição, a Curva de Lorenz é a mais conhecida. Esta seção aborda temas como a construção, interpretação e comparação de Curvas de Lorenz. Ela mostra, entre

outras coisas, que, diferente dos Gráficos da Parada de Pen, as Curvas de Lorenz representam exclusivamente a desigualdade relativa, ou seja, são indiferentes ao nível da distribuição. Entender isso é importante porque ajuda a compreender que informações traz uma Curva de Concentração, uma vez que a Curva de Lorenz pode ser entendida como uma Curva de Concentração em que a variável de ordenação é a mesma da distribuição. Também estabelece as bases para esclarecer outro assunto tratado adiante, a multiplicação dos valores da Curva de Lorenz pela média da distribuição para se obter a Curva de Lorenz Generalizada.

### 3.2.1 O que é a Curva de Lorenz

Em 1905, o economista americano Max Otto Lorenz (1876-1959) publica o artigo *Methods of measuring the concentration of wealth*, o qual influencia praticamente todos os estudos posteriores no campo da desigualdade. Lorenz discute os métodos existentes à época e propõe uma forma de se analisar a desigualdade que hoje é chamada a Curva de Lorenz. Curiosamente, Lorenz desenvolveu a curva que leva seu nome e a tornou internacionalmente famosa enquanto era estudante de doutorado, mas jamais a utilizou em sua tese sobre transporte ferroviário.

Comparar a desigualdade em uma população muito rica com a desigualdade em uma população muito pobre usando gráficos como os da Parada de Pen é uma tarefa complicada. Esses tipos de gráficos usam informações sobre os níveis absolutos de riqueza; se o nível de riqueza das populações é diferente, a comparação se torna mais difícil, pois é preciso distinguir em que medida as curvas se diferenciam devido à desigualdade interna de cada população (concentração de riqueza) ou à desigualdade entre as duas populações (diferença nos níveis de riqueza).

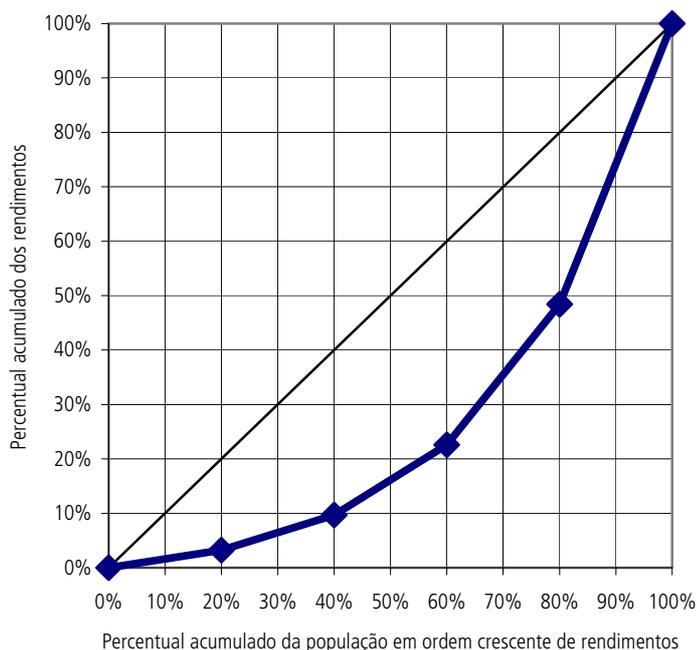
A imagem de Jan Pen é muito posterior ao artigo de Lorenz, mas o problema que este último buscava resolver era, em parte, semelhante ao colocado anteriormente: como comparar facilmente a desigualdade entre populações de tamanhos ou níveis de renda diferentes. A Curva de Lorenz foi uma solução muito importante para este problema porque freqüentemente<sup>1</sup> permite, por exemplo, comparações da situação de um país ao longo dos anos ou comparações entre países. Além disso, ela pode ser usada para o estudo não só da concentração de riqueza, mas de inúmeras outras distribuições.

A construção de uma Curva de Lorenz é algo muito simples. Ela é uma representação gráfica na qual um eixo representa as frações acumuladas da população e o outro representa as frações acumuladas da riqueza total. Em sua formulação original, a curva apresentava as percentagens da população no eixo vertical e as percentagens da riqueza no eixo horizontal. Atualmente a posição dos eixos costuma ser invertida e os gráficos traçados colocando-se as frações de população na horizontal e as frações da renda (ou outra variável) no eixo vertical.

---

1. Há situações em que a comparação das Curvas de Lorenz não permite conclusões seguras sobre a diferença da desigualdade em duas distribuições.

**Gráfico da Curva de Lorenz**  
**Distribuição dos rendimentos da população ABCDE**



Elaboração do autor.

Cowell (1995:19) propõe uma metáfora interessante, semelhante à Parada de Pen, para se entender a Curva de Lorenz. Imagine toda a renda de uma sociedade transformada em um imenso bolo. Imagine agora um desfile no qual cada pessoa, ao começar a marchar, recebe uma fatia do bolo proporcional a sua renda. Se estas pessoas entrarem no desfile ordenadas segundo suas rendas, os primeiros a marchar receberão fatias pequenas do bolo e, os últimos, fatias bem maiores. À medida que as pessoas vão entrando no desfile o bolo vai sendo cortado e entregue a elas. De tempos em tempos verifica-se quanto ainda resta do bolo. Isso dirá, por exemplo, quanto do bolo foi distribuído para os 10% mais pobres da população. Essa verificação prossegue até todas as pessoas desfiliarem. Marcando no gráfico qual a proporção de pessoas que já marcharam e a proporção de quanto foi distribuído do bolo até cada uma delas tem-se uma Curva de Lorenz.

A primeira informação que a Curva de Lorenz dos rendimentos dá é sobre qual é a fração dos rendimentos acumulada até determinado estrato da população. Em uma distribuição perfeitamente igualitária, os dez por cento mais pobres da população devem receber dez por cento da renda, metade da população, metade da renda, e assim sucessivamente. Se isso ocorresse, a Curva de Lorenz seria uma linha reta com inclinação de 45 graus no gráfico. Essa linha é chamada de Linha da Perfeita Igualdade e é usada como parâmetro de referência para a análise de distribuições reais. Devido ao fato de a população ser colocada em ordem crescente de rendimentos, a Curva de Lorenz de uma população desigual é sempre convexa, isto é, ela sempre forma um arco abaixo da Linha de Perfeita Igualdade.

Uma maneira intuitiva de entender o nível de desigualdade em uma distribuição a partir da Curva de Lorenz é pensar que quanto mais distante da Linha da Perfeita Igualdade for a curva, isto é, quanto mais pronunciado for o arco da curva, mais desigual é a sociedade. Se, por exemplo, toda a renda fosse apropriada por uma única pessoa da sociedade, a Curva de Lorenz se manteria no nível zero (renda acumulada zero), ao longo do eixo horizontal, até a penúltima pessoa e bruscamente saltaria para a renda acumulada igual a cem por cento na última pessoa, formando um arco que teria na verdade o formato de um L invertido da direita para a esquerda. Uma curva com esse formato é também conhecida como Curva da Desigualdade Máxima. Essa interpretação intuitiva é importante porque ajuda a entender não só o que significa Dominância de Lorenz, um conceito importante para se comparar a desigualdade de duas distribuições, como também o que é o Índice de Gini, provavelmente a medida mais conhecida no campo dos estudos sobre desigualdade.

### 3.2.2 Construindo uma Curva de Lorenz

Para construir uma Curva de Lorenz passo a passo, pode-se voltar ao exemplo de uma população composta por apenas cinco pessoas, A, B, C, D e E. O primeiro passo é ordenar as pessoas segundo sua renda, dos mais pobres aos mais ricos. Depois monta-se a distribuição da população acumulada, isto é, é somada a população acumulada até cada pessoa. Faz-se o mesmo para a distribuição da renda acumulada. No exemplo, até a pessoa B (inclusive ela) acumulou-se \$300, até D, \$1.500 e, evidentemente, até a última pessoa, E, toda a renda (\$ 3.100) foi acumulada.

TABELA 3

**Dados para a construção da Curva de Lorenz dos rendimentos pessoais da população ABCDE**

Pessoa	A	B	C	D	E
Renda pessoal	100	200	400	800	1.600
População acumulada	1	2	3	4	5
Renda acumulada	100	300	700	1.500	3.100
Fração da população acumulada	20%	40%	60%	80%	100%
Fração da renda acumulada	3%	10%	23%	48%	100%
Linha da perfeita igualdade	20%	40%	60%	80%	100%

Elaboração do autor.

Agora que se tem a população e a renda absolutas acumuladas, será preciso transformar essa distribuição em uma distribuição relativa acumulada dividindo os valores da população e da renda acumuladas até cada pessoa por, respectivamente, o tamanho da população (cinco pessoas) e o valor da soma de todas as rendas (\$3.100). Cada pessoa contribui com 20% da população. Os \$300 acumulados até B, por exemplo, correspondem a aproximadamente 10% da renda total e os \$1.500 até D a cerca de 48% da renda total.

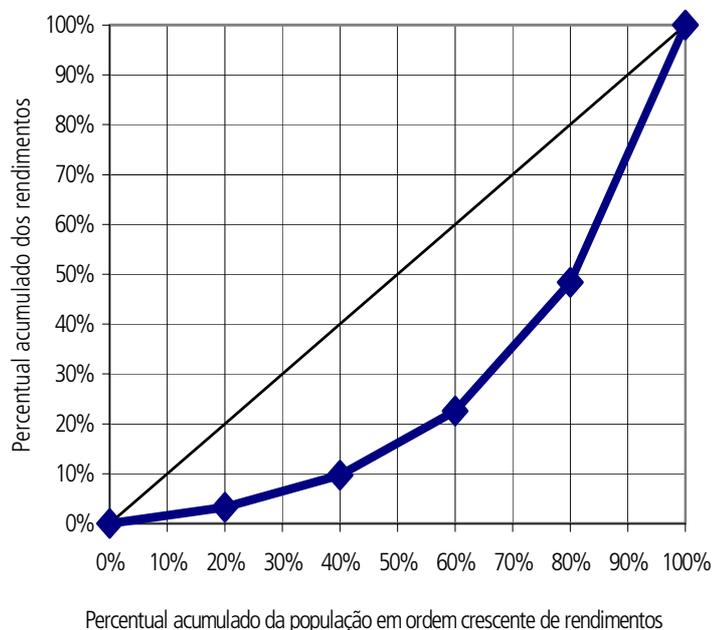
Por último, é traçada a Linha da Perfeita Igualdade para servir de parâmetro para análise. Como se trata de uma população de cinco pessoas, se a renda fosse perfeitamente distribuída cada pessoa receberia um quinto do total. Neste caso, até cada pessoa seriam acumulados mais 20% da população e mais 20% da renda. O resultado é um gráfico com o formato a seguir. Nele é fácil ver que cerca de metade de toda a renda é recebida pelos 20% mais ricos da população (na verdade, uma única

pessoa) e que 10% da renda total – uma fração pequena – precisa ser dividido entre os 40% mais pobres da população. Trata-se de uma distribuição bem desigual, mas ainda assim melhor do que a observada em parte dos países do mundo.

GRÁFICO 11

### Curva de Lorenz

#### Distribuição dos rendimentos da população ABCDE



Elaboração do autor.

Para resumir, o procedimento pode ser sintetizado em quatro etapas:

- ordenar a população segundo rendimentos;
- acumular as frações de 0% a 100% da população;
- acumular as frações de 0% a 100% dos rendimentos;
- marcar as frações acumuladas de população no eixo horizontal e as frações de rendimentos acumulados no eixo vertical.

Que pontos usar para construir as curvas? Como se trata de renda acumulada até um ponto da distribuição, é natural que se use quantis – como os centis ou decis – na construção das curvas. Até meados da década de 1980 era comum encontrar Curvas de Lorenz construídas a partir dos rendimentos acumulados até os decis de população. Isso em geral ocorria como resultado da carência de informações detalhadas sobre a distribuição dos rendimentos ou dificuldades computacionais. Ocorre que décimos de população formam intervalos muito grandes, o que dificultava uma comparação mais precisa de distintas Curvas de Lorenz sempre que houvesse desigualdade elevada dentro dos décimos. Atualmente as Curvas de Lorenz de populações reais costumam ser traçadas usando os rendimentos acumulados até os centis, porque se julga que isso já traz uma quantidade de informação sobre as distribuições suficiente para análise, mas

seria perfeitamente possível construir Curvas de Lorenz com milhões de pontos, usando rendimentos acumulados até cada fração de população definida por um único indivíduo. Vale lembrar que nos casos em que a informação provém de pesquisas amostrais, a construção das curvas destinadas a representar a população utiliza os dados ponderados pelos pesos de expansão da amostra.

Nas Curvas de Lorenz são usadas frequências acumuladas relativas, isto é, cada valor como uma fração do total, porque isso assegura independência em relação às escalas. Essa independência facilita, por exemplo, a comparação de populações de tamanhos diferentes ou que usam moedas distintas, o que seria difícil de fazer em um gráfico da Parada de Pen, por exemplo. Há situações, porém, em que seria desejável representar valores absolutos no gráfico da Curva de Lorenz para refletir certos tipos de estratificação da sociedade. Pode-se, por exemplo, querer identificar qual a renda acumulada pelo estrato dos pobres ou ainda pelo grupo populacional cuja renda está acima da média. Na Curva de Lorenz isso precisa ser feito por meio de posição desses estratos na distribuição da população. Se os pobres constituem 40% da população, registra-se essa posição no eixo horizontal para verificar no eixo vertical que a renda apropriada por eles é, pode-se dizer, apenas 8% da renda total. O mesmo pode ser feito para o valor da renda média ou qualquer outro valor absoluto da distribuição. Uma característica deste tipo de representação é que, na posição correspondente ao valor da média da distribuição, a inclinação da Curva de Lorenz é de 45 graus, isto é, paralela à Linha de Perfeita Igualdade.

### 3.3 CURVA DE LORENZ GENERALIZADA

As Curvas de Lorenz Generalizadas são instrumentos muito usados em análise de dominância de bem-estar entre distribuições. Elas trazem informações sobre o nível e a forma das distribuições, tal como as Curvas de Quantis. Esta seção mostra que sua construção é muito simples e consiste em multiplicar os valores da Curva de Lorenz pela média da distribuição. Vista de outro ângulo, a Curva de Lorenz Generalizada é uma Curva de Lorenz que não foi normalizada pela renda. Devido a essa transformação, a Curva de Lorenz Generalizada representa o comportamento da renda acumulada ao longo da população.

#### 3.3.1 O que é uma Curva de Lorenz Generalizada?

A Curva de Lorenz Generalizada é uma modificação da Curva de Lorenz na qual a fração acumulada dos rendimentos até cada fração da população é multiplicada pelo rendimento médio da distribuição. Devido a esta multiplicação, a curva generalizada traz informações sobre a forma e o nível da distribuição, tal como o Gráfico da Parada de Pen e sua versão na forma de Curva de Quantis. A Curva de Lorenz Generalizada, embora não tenha uma interpretação tão intuitiva e direta quanto as Curvas de Quantis, é muito útil para alguns tipo de estudo, em particular as chamadas análises de dominância de segunda ordem, onde níveis de rendimento (ou outra variável relacionada a bem-estar) nos vários pontos de duas distribuições são comparados.

Embora o assunto já houvesse sido discutido no debate sobre funções de bem-estar social desde o início dos anos 1970, a expressão *Curva de Lorenz Generalizada* foi cunhada a partir do artigo *Ranking Income Distributions*, de 1983, de Anthony

Shorrocks. Neste artigo, Shorrocks parte de um teorema de Atkinson referente à comparação de Curvas de Lorenz de mesma média e o generaliza para Curvas de Lorenz de médias distintas. O teorema generalizado permite a ordenação (análise de dominância) do nível de desigualdade de duas distribuições em termos de bem-estar. A ferramenta principal para esta ordenação são as Curvas de Lorenz Generalizadas.

A Curva de Lorenz (não generalizada) tornou-se uma ferramenta extremamente importante para a análise da desigualdade de uma distribuição. A partir dela tornou-se mais simples decidir se uma distribuição é mais ou menos desigual que outra. Uma das características da Curva de Lorenz é que ela representa bem a forma de uma distribuição ao mesmo tempo que é indiferente ao nível dessa distribuição. A Curva de Lorenz tem propriedades tais que, mesmo que todos os rendimentos de uma população sejam duplicados, ainda assim sua forma permanece a mesma. Essa característica permite, por exemplo, comparar a desigualdade entre países muito ricos e muito pobres.

No entanto, informações sobre o nível das distribuições também são muito importantes. Esta informação permite dizer, por exemplo, se um aumento da desigualdade ao longo do tempo se deu sob circunstâncias nas quais todos ganharam, mas os mais ricos ganharam mais que os demais, ou se os mais ricos ganharam às custas dos mais pobres. Com a multiplicação das frações do rendimentos pela média, a curva passa a expressar também o que ocorre com o nível dos rendimentos e, portanto, ajuda a decidir o que ocorreu.

### 3.3.2 Construindo uma Curva de Lorenz Generalizada

A Curva de Lorenz de uma distribuição é, obviamente, o ponto de partida para a construção da Curva de Lorenz Generalizada. Para produzir a curva generalizada, cada fração de rendimento acumulado até uma determinada parte da população é multiplicada pela média dos rendimentos (o que equivale a deixar de normalizar a Curva de Lorenz por rendimentos). O exemplo a seguir toma como ponto de partida a Curva de Lorenz da distribuição ABCDE. O rendimento médio desta distribuição é \$620. A fração da renda acumulada até a pessoa A é 3% (0,03) e até a pessoa B é 10% (0,10). Multiplicando \$620 por 0,03, por 0,10 e pelos demais valores da fração de renda acumulada, obtém-se \$20, \$60, até \$620, no caso da pessoa E. Estas são as coordenadas do eixo vertical da Curva de Lorenz Generalizada.

TABELA 4

#### Dados para a construção da Curva de Lorenz Generalizada dos rendimentos pessoais da população ABCDE

Pessoa	A	B	C	D	E
Renda pessoal	100	200	400	800	1.600
Renda média	620	620	620	620	620
População acumulada	1	2	3	4	5
Renda acumulada	100	300	700	1.500	3.100
Fração da população acumulada	20%	40%	60%	80%	100%
Fração da renda acumulada	3%	10%	23%	48%	100%
Lorenz generalizada	20	60	140	300	620
Linha da Perfeita Igualdade	20%	40%	60%	80%	100%

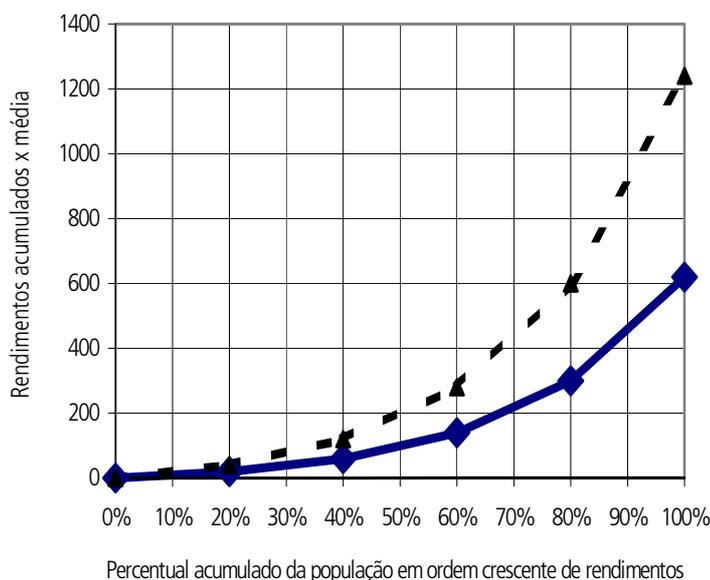
Elaboração do autor.

O gráfico a seguir mostra como seria a curva da população ABCDE que será chamada de distribuição 1. Para ajudar na visualização de uma comparação entre curvas

generalizadas, é traçada uma segunda curva, que representa uma distribuição com exatamente o mesmo nível de desigualdade, mas média duas vezes maior. Esta poderia, por exemplo, ser a distribuição 1 após um crescimento puro de 100%, isto é, um crescimento sem mudanças na distribuição. Será chamada de distribuição 2.

GRÁFICO 12

**Curva de Lorenz Generalizada**  
**Distribuição dos rendimentos da população ABCDE**



Elaboração do autor.

A curva pontilhada representa a distribuição 2, isto é, a distribuição depois do crescimento de 100%; a média desta distribuição é \$1.240. A curva contínua representa a distribuição 1, cuja média é \$620. Elas partem de duas Curvas de Lorenz idênticas, mas depois da generalização é possível observar que a distribuição 2 é sempre mais alta que a distribuição 1, o que indica que todas as pessoas da segunda distribuição têm mais rendimentos que as pessoas da distribuição original. Do ponto de vista do nível de rendimentos, a situação das pessoas da distribuição 2 é indiscutivelmente melhor que a das pessoas da distribuição 1.

O que mais se pode observar na comparação das duas distribuições? Fica claro que na segunda distribuição a distância (isto é, a diferença de rendimentos) entre os ricos e pobres é muito maior que a distância na distribuição original, apesar da desigualdade entre as duas distribuições ser exatamente a mesma. Isso mostra, por exemplo, que mesmo quando a desigualdade relativa (razão) permanece constante ao longo do tempo, a desigualdade absoluta (diferença) entre ricos e pobres pode aumentar.

Algebricamente, multiplicar os valores das frações do rendimento acumulado pelo rendimento médio é o equivalente a dividir o rendimento acumulado em cada ponto pelo tamanho da população. No exemplo da tabela anterior, para a pessoa B, multiplicar \$620 por 0,10 (média por fração acumulada) é o mesmo que dividir \$300 por 5 (renda acumulada por população). Quais as implicações disto?

Ora, como os valores são divididos pela população total, torna-se perfeitamente possível comparar distribuições de populações diferentes sem que o tamanho destas populações interfira na comparação. O crescimento de uma população ao longo do tempo, por exemplo, não afeta diretamente a forma da curva generalizada. Como o tamanho da população não importa, o que podemos concluir é que a principal informação trazida pela Curva de Lorenz Generalizada diz respeito à distribuição dos rendimentos acumulados até cada quantil da população. Estes rendimentos sofrem uma pequena transformação, de modo que o total acumulado passa a ter o valor do rendimento médio.

A Curva de Lorenz Generalizada e a Curva de Quantis (Gráfico da Parada de Pen) guardam semelhanças no conteúdo das informações que trazem, mas representam coisas diferentes. Ambas trazem informações sobre a forma e o nível das distribuições de rendimentos e são indiferentes ao tamanho da população. Porém, enquanto a primeira representa o comportamento da renda acumulada ao longo da população, a segunda representa o rendimento em cada quantil da população (ou a média em cada estrato). Uma vez que o rendimento acumulado está diretamente relacionado com os valores dos rendimentos ao longo da população, no fim das contas as duas curvas trazem informações muito semelhantes, sendo a Curva de Lorenz Generalizada uma ferramenta mais prática para análises de dominância e a Curva de Quantis um instrumento mais intuitivo de apresentação da desigualdade de rendimentos.

### 3.4 CURVA DE CONCENTRAÇÃO

Esta seção se ocupa da construção de Curvas de Concentração, uma representação que guarda semelhanças com a Curva de Lorenz. Porém, enquanto estas se referem à distribuição de uma única variável ao longo da população, as Curvas de Concentração são construídas a partir da distribuição de duas variáveis na população. Na verdade, a Curva de Lorenz pode ser entendida como um caso particular de Curva de Concentração.

A posição e a inclinação de uma Curva de Concentração em relação à linha de igualdade indicam a progressividade da distribuição. Por este motivo, estas curvas são muito usadas para a análise da distribuição de transferências, bens e serviços públicos segundo grupos de renda ou ainda o estudo da distribuição dos componentes da renda total das famílias. Assim como no caso das Curvas de Lorenz, a forma das Curvas de Concentração é independente do tamanho da população, da magnitude das variáveis de ordenação e da magnitude total da variável distribuída.

O termo *curva de concentração* foi cunhado por Mahalanobis no início da década de 1960, em um estudo que usava este recurso gráfico para descrever os diferentes padrões de consumo na população da Índia. Mahalanobis notou que as curvas de concentração eram uma extensão da Curva de Lorenz que poderia ser útil para entender o comportamento dos consumidores. Posteriormente um tratamento mais rigoroso ao assunto foi dado por Kakwani (1980).

#### 3.4.1 O que é a Curva de Concentração

O termo concentração é usado muitas vezes para indicar injustiças. Diz-se, por exemplo, que as melhores escolas de uma região estão concentradas em determinadas cidades para expressar a existência de uma distribuição espacial

desigual. Também se diz que a concentração da renda é muito alta para indicar que existe uma elevada desigualdade na distribuição das rendas, de modo que grande parte das rendas está concentrada nas mãos de uma pequena parcela da população. No entanto, nem sempre a concentração é algo negativo. Por exemplo, ao dizer que os gastos com assistência social estão concentrados na população mais pobre, pode-se tratar isso como algo positivo. As Curvas de Concentração são úteis para fazer julgamentos deste tipo, avaliações da progressividade ou regressividade da transferências de bens, serviços ou rendas.

Mais especificamente, a noção de *concentração* usada nas Curvas de Concentração diz respeito à distribuição de uma variável em uma população classificada segundo uma outra variável. Por exemplo, a distribuição do número de filhos (uma variável) em diferentes classes sociais (outra variável) dá uma noção de como os filhos estão concentrados em um determinado grupo. Outros exemplos de análise da concentração seriam o estudo do acesso a serviços públicos segundo diferentes grupos de renda ou mesmo o recebimento de rendas de previdência de acordo com os níveis de renda familiar. Uma Curva de Concentração é uma das formas de representação gráfica da concentração de algo segundo grupos ou indivíduos.

Assim como a Curva de Lorenz, a Curva de Concentração é um gráfico de frações de uma distribuição acumulada marcadas contra frações de outra distribuição acumulada. Na Curva de Lorenz tem-se, por exemplo, frações de rendimentos do trabalho acumuladas distribuídas entre frações da população de trabalhadores ordenada segundo seus rendimentos do trabalho. A variável da distribuição e da ordenação é a mesma. Em uma Curva de Concentração pode-se ter frações de rendimentos do trabalho acumuladas distribuídas entre frações da população ordenadas segundo sua renda familiar *per capita*. Também frações contra frações, mas com variáveis da distribuição e ordenação diferentes.

A interpretação de uma Curva de Concentração é muito direta. Ela diz, por exemplo, que parte dos rendimentos de juros de uma sociedade são recebidos pelas famílias mais ricas, em termos de renda familiar *per capita*. Trata-se de uma interpretação muito semelhante à da Curva de Lorenz, distinta porém pelo fato de as variáveis da distribuição e ordenação serem diferentes. Na verdade, talvez seja mais fácil compreender isso se se imaginar que a Curva de Lorenz é um caso particular das Curvas de Concentração em que as variáveis da distribuição e ordenação são as mesmas. Aliás, conceitos aplicáveis às Curvas de Lorenz, como a noção de dominância (de primeira ordem), também se aplicam às Curvas de Concentração. A análise de Curvas de Concentração também é facilitada com o uso de uma linha de igualdade perfeita de 45 graus traçada no gráfico.

Curvas de Concentração são úteis para vários propósitos. Em estudos sobre desigualdade social elas são particularmente importantes para se estudar a distribuição de serviços públicos segundo grupos de renda e para a análise da distribuição dos componentes da renda total das famílias, tais como rendimentos do trabalho, aposentadorias, doações etc.

Neste último caso, de decomposição da renda total segundo fontes de rendimentos, a regra geral é quanto maior for a participação de uma fonte no total, mais próxima sua Curva de Concentração estará da Curva de Lorenz dos rendimentos

totais. Um bom recurso para ajudar na análise da desigualdade dos componentes da renda total, portanto, é traçar no mesmo gráfico a própria Curva de Concentração da renda total, que no caso será a Curva de Lorenz da renda total. Quanto mais distantes os pontos da Curva de Concentração de uma fonte de rendimentos estiverem dos pontos da Curva de Lorenz dos rendimentos totais, mais distinto é seu padrão de distribuição.

### 3.4.2 Construindo uma Curva de Concentração

Para construir uma Curva de Concentração passo a passo, será usado o exemplo de uma população composta por apenas cinco pessoas, A, B, C, D e E, e seguir etapas semelhantes às da construção da Curva de Lorenz. Será assumido que se quer criar uma Curva de Concentração do Auxílio-Renda segundo estratos de população ordenada por renda familiar *per capita* para saber quem é beneficiado pelo Auxílio-Renda, um programa social hipotético. O primeiro passo é ordenar as pessoas segundo sua renda familiar *per capita*, dos mais pobres aos mais ricos. Depois é montada a distribuição da população acumulada, isto é, é somada a população acumulada até cada pessoa e, em seguida, são calculadas as frações acumuladas da renda *per capita*, isto é, o quanto cada fração de renda acumulada ao longo da população representa da renda total. Com isso ter-se-á, evidentemente, frações que vão de 0% a 100% da renda total. Essas frações serão o eixo horizontal do gráfico.

O passo seguinte é calcular o quanto do Auxílio-Renda é apropriado pelos 20% mais pobres da população, e assim sucessivamente. Para isso, é necessário manter a população ordenada segundo sua renda familiar *per capita*, calcular o quanto cada valor de rendimentos de juros representa no rendimento de juros total e acumular as frações desse rendimento ao longo da população. Este valor será marcado no eixo vertical do gráfico.

Para resumir, o procedimento pode ser sintetizado em quatro etapas:

- a) ordenar a população por renda familiar *per capita*;
- b) acumular a fração de 0% a 100% da população;
- c) acumular a fração de 0% a 100% do Auxílio-Renda;
- d) marcar as frações acumuladas de população no eixo horizontal e de juros acumulados no eixo vertical.

Seguindo o exemplo, teremos a população ABCDE e as seguintes distribuições:

TABELA 5

#### Distribuição dos rendimentos na população ABCDE

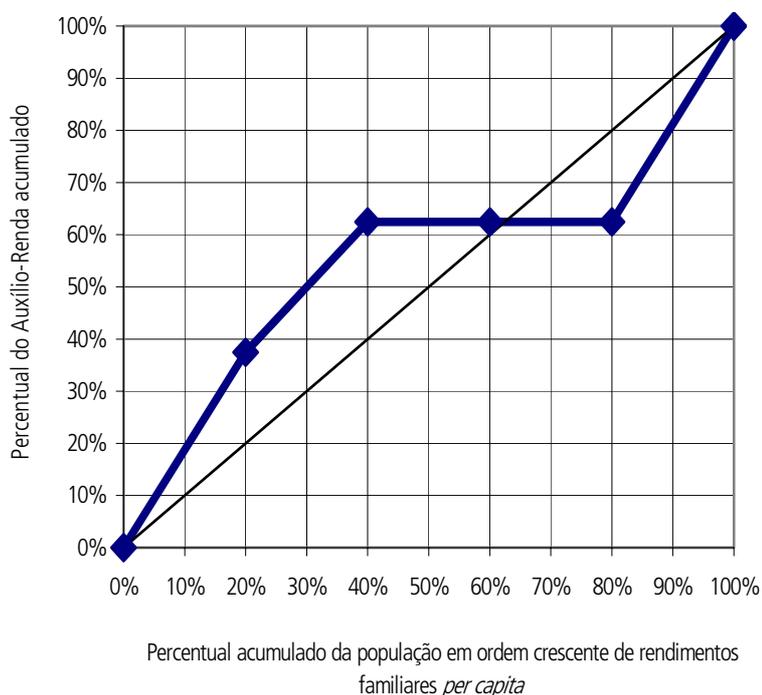
Pessoa	A	B	C	D	E
Renda familiar <i>per capita</i>	300	400	500	700	900
População acumulada	1	2	3	4	5
Auxílio-Renda	300	200	0	0	300
Auxílio-Renda acumulado	300	500	500	500	800
Fração da população acumulada	20%	40%	60%	80%	100%
Fração dos auxílios acumulados	38%	63%	63%	63%	100%
Linha da Perfeita Igualdade	20%	40%	60%	80%	100%

Elaboração do autor.

A população está ordenada segundo os rendimentos familiares *per capita*. Cada pessoa em uma população de cinco indivíduos representa 20% da população total; até a pessoa B foram acumulados 60% da população. Neste mesmo ponto, o Auxílio-Renda acumulado representa 63% do total (\$500 até B dividido pelo total \$800). O mesmo se aplica aos demais pontos da curva. Para concluir, é traçada a Linha da Perfeita Igualdade, que serve de referência. Como se trata de uma população de cinco pessoas, se o Auxílio-Renda fosse igualmente distribuído, cada pessoa receberia 20% do total. Neste caso, até cada pessoa seriam acumulados mais 20% da população e mais 20% do Auxílio. O resultado é um gráfico com o formato a seguir.

GRÁFICO 13

**Curva de Concentração da distribuição do Auxílio-Renda na população ABCDE**



Elaboração do autor.

No gráfico é possível observar que o Auxílio-Renda hipotético é distribuído com certa prioridade aos mais pobres. Os 40% mais pobres recebem mais de 40% do auxílio total (mais precisamente, 63%), razão pela qual a Curva de Concentração está acima da linha de igualdade. É fácil perceber, portanto, que quando a distribuição for favorável aos mais pobres a Curva de Concentração estará acima da linha de igualdade. A curva toma forma horizontal quando as pessoas não são beneficiadas pelo programa e volta a se inclinar, desta vez abaixo da linha de igualdade, nos 20% mais ricos, indicando que a partir deste ponto as transferências têm caráter regressivo, isto é, agravam as desigualdades.

Há dois pontos que merecem ser notados neste gráfico. Primeiro, diferente da Curva de Lorenz, que necessariamente está sempre abaixo da linha de igualdade, uma Curva de Concentração pode estar tanto abaixo quanto acima dessa linha. Segundo, a

posição da curva em relação à linha de igualdade indica maior incidência das transferências entre os mais pobres ou prestação de serviços. Pontos acima da linha indicam contribuição para a igualdade; abaixo, concentração. A inclinação da curva nas diferentes partes da população indicam o efeito sobre a desigualdade. Quanto mais inclinada na região dos mais pobres, mais a distribuição promove a igualdade; inclinação crescente entre os mais ricos indica contribuição para a desigualdade.

Que pontos usar para construir as Curvas de Concentração? Assim como no caso das Curvas de Lorenz, por se tratar de renda (ou outra variável) acumulada até um ponto da distribuição, é natural que se use quantis – como os centis ou decis – em sua construção. Quando a desigualdade dentro dos estratos é alta, intervalos muito grandes entre os quantis dificultam uma comparação mais precisa de distintas curvas. Salvo situações especiais, gráficos traçados usando rendimentos acumulados até os centis podem ser considerados suficientes para análise, embora seja sempre possível construir Curvas de Concentração com milhões de pontos. É sempre bom lembrar que nos casos em que a informação provém de pesquisas amostrais, a construção das curvas destinadas a representar a população utiliza os dados ponderados pelos pesos de expansão da amostra.

A forma das Curvas de Concentração é independente do tamanho da população, da magnitude das variáveis de ordenação (renda familiar *per capita*, no exemplo) e da magnitude total da variável distribuída. No exemplo, a forma da curva não se alteraria se os valores de todos os Auxílios-Renda fossem triplicados. Tratam-se de propriedades úteis quando são requeridas comparações de populações diferentes, valores inflacionados, moedas distintas etc.

Há circunstâncias nas quais seria desejável representar valores absolutos no gráfico da Curva de Concentração para refletir a estratificação da sociedade. Na Curva de Concentração isso precisa ser feito por meio das posições na distribuição da população ordenada. Por exemplo, se os pobres constituem 40% da população, registra-se essa posição no eixo horizontal para verificar no eixo vertical que o Auxílio-Renda apropriado por eles é, digamos, 63% da renda total.

## 4 NOTAÇÃO DAS CURVAS

### 4.1 CURVA DE QUANTIS

É possível expressar as curvas a seguir tanto como uma distribuição discreta como contínua, o que será feito de acordo com a conveniência de cada caso. A Curva de Quantis  $Q(p)$  é dada pela inversa da função de distribuição acumulada  $F(x)$ .

$$Q(p) = F^{-1}(x) \text{ para } 0 \leq p \leq 1 \quad (1)$$

onde  $p$  são as frações acumuladas de população até cada valor possível de renda  $x$ .

### 4.2 CURVA DE LORENZ

A Curva de Lorenz representa frações acumuladas da renda até cada fração acumulada da população. População e renda são variáveis discretas, isto é, variáveis que assumem

apenas valores isolados; não há, por exemplo, meia pessoa ou meio centavo de renda. Já as frações de população e renda podem ser entendidas como variáveis contínuas dentro de seus intervalos, isto é, variáveis podem assumir qualquer valor entre zero e um na Curva de Lorenz. Os valores observados de uma distribuição de renda são necessariamente pontos isolados, porque sua origem é uma distribuição discreta, a distribuição de população. Os valores isolados serão transformados em uma curva ao unir os pontos isolados porque, por aproximação, é possível entender a distribuição como contínua.

A escolha por expressar a Curva de Lorenz na forma discreta ou contínua depende dos objetivos perseguidos. Em geral, a distribuição discreta é mais prática para a definição de algoritmos computacionais usados no tratamento estatístico das distribuições. Por outro lado, a expressão na forma de uma distribuição contínua é muito útil para algumas transformações e operações baseadas na curva.

A Curva de Lorenz pode ser definida (forma discreta) pela seguinte expressão:

$$L(p) = L\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{\sum_{i=1}^j x_i}{\sum_i x_i} \quad \text{para } 1 \leq j \leq N \quad (2)$$

onde  $L(p)$  é a Curva de Lorenz,  $p$  as frações acumuladas de população, o que é equivalente a dizer que  $L(j/N)$  é a Curva de Lorenz de  $j/N$ , a fração acumulada da população até cada renda  $x$ , onde  $j = \{1/N, 2/N, 3/N, \dots, N\}$ , sendo  $N$  a população total e  $x_i$  a renda  $x$  da pessoa  $i$ .

A expressão da forma contínua para uma distribuição  $p = F(x)$  é

$$p = F(x) \Rightarrow L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^x Xf(X)dX \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1 \quad (3)$$

onde  $L(p)$  é a Curva de Lorenz,  $p$  se define pela função da distribuição cumulativa  $F(x)$ , que indica a proporção da população cuja renda é menor ou igual ao valor possível  $x$ ,  $X$  denota a renda da distribuição,  $\mu$  é a média da distribuição dos  $X$ , no caso a renda média.

### 4.3 CURVA DE LORENZ GENERALIZADA

A generalização da Curva de Lorenz realizada por Shorrocks parte de um teorema de Atkinson e na prática consiste em multiplicar os valores dos rendimentos da função de distribuição cumulativa  $F(x)$  pela média  $\mu$  dos rendimentos, e se denota por

$$GL(p) = \mu L(p) \quad \text{para } p \in [0,1] \quad (4)$$

Multiplicando  $\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$  por (2), tem-se a notação para função discreta

$$GL(p) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^j x_i}{\sum_i x_i} \quad (5)$$

e, multiplicando  $\mu$  por (3), a notação para função contínua

$$GL(p) = \int_0^x Xf(X)dX \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1 \quad (6)$$

onde  $GL(p)$  indica a generalização da Curva de Lorenz  $L(p)$  e as demais convenções de cada tipo de notação são mantidas.

#### 4.4 CURVA DE CONCENTRAÇÃO

As Curvas de Concentração são uma extensão da Curva de Lorenz; portanto, sua notação é similar. A notação proposta por Kakwani (1980) é

$$F_1[g(x)] = \frac{1}{E[g(X)]} \int_0^x g(X)f(X)dX \quad (7)$$

onde  $g(X)$  é uma função contínua de  $X$ ,  $E[g(X)]$  uma função similar à Curva de Lorenz  $L(p)$ , ou seja, similar a  $L[F(x)]$ . A ordenada da curva é dada por  $F_1[g(x)]$  e a abscissa por  $F(x)$ .

### 5 LITERATURA SOBRE O ASSUNTO

O artigo original de Lorenz, *Methods of measuring the concentration of wealth*, foi publicado em 1905 no *Journal of the American Statistical Association*, sendo muito difícil encontrar bibliotecas que disponham do volume. Por este motivo, Subramanian (1997) republica o artigo na íntegra em *Measurement of Inequality and Poverty*, um livro que não só é relativamente simples de ser conseguido como também traz inúmeros artigos importantes no campo.

Também difícil de se obter é o livro *Income Distribution*, de Jan Pen (1971), professor de Economia da Universidade de Groningen - Holanda, que propôs a famosa metáfora da Parada de Anões e uns Poucos Gigantes pela primeira vez. Evidentemente, as funções de distribuição acumulada (ou distribuição cumulativa), base das Curvas de Quantis que fundamentam a metáfora, datam de muito antes.

As Curvas de Concentração foram inicialmente propostas pelo físico Prasanta Chandra Mahalanobis, fundador do Indian Statistical Institute, em um artigo publicado na revista *Econometrica*, cujo título é *A Method of Fractile Graphical Analysis* (MAHALANOBIS, 1960). Sua popularização se deu em boa parte devido ao artigo *Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis*, de Kakwani (1977). Particularidades destas curvas são tratadas em detalhe em *Income Inequality and Poverty* (KAKWANI, 1980), um livro muito completo, mas de leitura exigente em conhecimentos matemáticos.

A generalização das Curvas de Lorenz feita pelo matemático e economista inglês Antony Shorrocks no artigo *Ranking Income Distributions* (SHORROCKS, 1983) tem como ponto de partida um famoso teorema de Anthony Atkinson, publicado em 1970. O artigo de Atkinson suscitou um debate com o economista indiano Amartya

Sen (1973), que argumenta ser possível realizar ordenamentos parciais, mas não ordenamentos completos de distribuições. O livro de Sen foi republicado várias vezes e conta com uma edição expandida, que inclui um anexo no qual várias idéias iniciais são atualizadas e comentadas, inclusive comentando o artigo de Atkinson (SEN e FOSTER, 1997). O anexo é bastante esclarecedor, mas requer um certo domínio de matemática e do debate sobre mensuração da desigualdade de bem-estar.

Existem várias obras de referência que tratam das representações gráficas da desigualdade. Em português, no entanto, a quantidade de material é mais limitada. Em *Índices de Desigualdade de Renda e Medidas de Concentração Industrial*, José Rossi (1982) apresenta aplicações da Curva de Lorenz e da Curva de Concentração na análise da elasticidade do consumo domiciliar, da progressividade do sistema tributário e da inflação sobre a distribuição de renda baseado em metodologias desenvolvidas por Kakwani.

A principal obra em português sobre o assunto é o livro *Distribuição de Renda: medidas de desigualdade e pobreza* de Rodolfo Hoffmann (1998), naturalmente mais atualizada que a anterior. Muito completo e rigoroso, o livro de Hoffman discute o assunto em vários capítulos diferentes, usando Curvas de Lorenz para discutir inúmeros aspectos importantes da mensuração da desigualdade. Além disto, o livro acompanha exercícios com respostas que ajudam a compreender melhor como a desigualdade pode ser mensurada. É uma leitura obrigatória para todos aqueles com interesse em se aprofundar no assunto.

Uma discussão sobre o significado do termo *desigualdade* pode ser encontrada em *Distribution and Development*, de Gary Fields (2001), bastante objetivo e didático, que apresenta vários temas referentes à mensuração da pobreza, da desigualdade e da mobilidade social. Embora o livro não seja um manual de medidas de desigualdade, Fields dedica um capítulo inteiro à construção e comparação de Curvas de Lorenz, com atenção especial à análise de dominância. Uma discussão sobre elementos a serem considerados na seleção das variáveis que formam a distribuição analisada pode ser encontrada em *The Economics of Inequality*, de Atkinson (1975) e uma abordagem muito mais profunda sobre o que deve ser medido em estudos sobre desigualdade está no livro *Inequality Reexamined*, de Sen (1995), que se encontra em português sob o título *Desigualdade Reexaminada*.

O livro *Measuring Inequality*, de Frank Cowell (1995), é um manual dedicado ao tema, sendo particularmente interessante no que diz respeito às interpretações das diferentes medidas de desigualdade. Sendo, porém, uma reedição de um livro do final da década de 1970, a obra perde em comparação a manuais mais recentes. Outro manual que traz uma abordagem gráfica fortemente intuitiva é *Economic Inequality and Income Distribution*, de Champernowne e Cowell (1998), onde a discussão sobre mensuração é relacionada às teorias sobre os determinantes da desigualdade e aplicada a casos reais.

## REFERÊNCIAS

- ATKINSON, A. B. *The economics of inequality*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- \_\_\_\_\_. On the measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, v. 2, p. 244-263.
- CHAMPERNOWNE, D. G.; COWELL, F. *Economic inequality and income distribution*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- COWELL, F. *Measuring inequality*. 2nd. ed. London: Prentice Hall, 1995.
- FIELDS, G. *Distribution and development: a new look at the developing world*. New York: Russel Sage, 2001.
- FOSTER, J.; SEN, A. *On economic inequality; expanded edition with a substantial annexe* by James E. Foster & Amartya Sen. New Delhi: Oxford India, 1998.
- HOFFMANN, R. *Distribuição de renda: medidas de desigualdade e pobreza*. São Paulo: EdUSP, 1998.
- KAKWANI, N. Applications of Lorenz Curves in economic analysis. *Econometrica*, v. 45, n. 3, p. 719-728, Apr. 1977.
- \_\_\_\_\_. *Income inequality and poverty: methods of estimation and policy applications*. Oxford: Oxford University Press, 1980.
- LORENZ, M. O. Methods of measuring the concentration of wealth. In: SUBRAMANIAN, S. *Measurement of inequality and poverty*. New Delhi: Oxford India, 2001.
- MAHALANOBIS, P. C. A method of fractile graphical analysis. *Econometrica*, v. 28, n. 2, p. 325-351, Apr. 1960.
- PEN, J. *Income Distribution*. London Allen Lane, 1971.
- ROSSI, J. W. *Índices de desigualdade de renda e medidas de concentração industrial: aplicação a casos brasileiros*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1982.
- SEN, A. *Inequality reexamined*. New York: Russel Sage, 1992.
- SHORROCKS, A. Ranking income distributions. *Economica*, v. 50, n. 197, p. 3-17, Feb. 1983.
- SUBRAMANIAN, S. (ed.) *Measurement of Inequality and Poverty*. New Delhi, Oxford India Press. 369 p. 1997.

## **EDITORIAL**

### **Coordenação**

Ronald do Amaral Menezes

### **Supervisão**

Iranilde Rego

### **Revisão**

Luis André Barreto

Silvia Maria Alves

Camila de Paula Santos (estagiária)

Karen Varella Maia Corrêa (estagiária)

Olavo Mesquita de Carvalho (estagiário)

Sheila Santos de Lima (estagiária)

### **Editoração**

Aeromilson Mesquita

Elidiane Bezerra Borges

Lucas Moll Mascarenhas

### **Brasília**

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES, 9º andar

70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 3315-5090

Fax: (61) 3315-5314

Correio eletrônico: editbsb@ipea.gov.br

### **Rio de Janeiro**

Av. Nilo Peçanha, 50, 6º andar – Grupo 609

20044-900 – Rio de Janeiro – RJ

Fone: (21) 2215-1044 R. 234

Fax: (21) 2215-1043 R. 235

Correio eletrônico: editrj@ipea.gov.br

## **COMITÊ EDITORIAL**

### **Secretário-Executivo**

Marco Aurélio Dias Pires

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES,  
9º andar, sala 908

70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 3315-5406

Correio eletrônico: madp@ipea.gov.br

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)