MEC
INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS

SEMINÁRIO SOBRE NOVAS PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 maio 1994

Série Documental: Eventos.n.4.1ª parte. abr./1994

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

MEC / INEP
SIBE - CIBEC

SEMINÁRIO SOBRE NOVAS PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 maio 1994

Série Documental: Eventos, n.4, 1ª parte, abr./1994

DIRETOR
Divonzir Arthur Gusso

COORDENADORA DE PESQUISA
Margarida Maria Souza de Oliveira

COORDENADOR DE ADMINISTRAÇÃO
Luís Carlos Veloso

COORDENADOR DE AVALIAÇÃO
Orlando Pillati

COORDENADOR DE ESTUDOS DE
POLÍTICAS PÚBLICAS Tancredo Maia
Filho

GERENTE DO PROGRAMA EDITORIAL
Arsênio Canísio Becker

SUBGERENTE DE DISSEMINAÇÃO E CIRCULAÇÃO
Sueli Macedo Silveira

GERENTE DO CENTRO DE INFORMAÇÕES
BIBLIOGRÁFICAS EM EDUCAÇÃO Gaetano Lo
Mônaco

RESPONSÁVEL EDITORIAL
Cleusa Maria Alves

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA
Celi Rosalia Soares de Melo

APOIO GRÁFICO
Maria Madalena Argentino
Mirna Amariles Beraldo

Série Documental: Eventos, n.4

Tiragem: 100 exemplares

INEP - Gerência do Programa Editorial
Campus da UnB, Acesso Sul
Asa Norte
70910-900 - Brasília - DF
Fone: (061) 347 8970
Fax:(061) 273 3233

CENTRO DE INFORMAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS DO MEC
MEC / INEP
SIBE / CIBEC
Reg. 30.973
Ano 23.01.95

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO - MEC INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS

SEMINÁRIO SOBRE NOVAS PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO **MATEMÁTICA** NO **BRASIL**

Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 maio 1994

O evento foi organizado pela Coordenadoria de Pesquisa do INEP, juntamente com a PUC/SP, através da Diretora Geral de Informática e Física, Tânia Campos, contando com o apoio do CNPq e CAPES. Esta publicação, com tiragem reduzida, fora das normas editoriais desta Série Documental, contém textos de expositores, sem nenhuma revisão pelo INEP.

Brasília/1994

APRESENTAÇÃO

Uma das funções institucionais do INEP consiste em prover e estimular a disseminação e discussão de conhecimentos e informações sobre educação, visando seu desenvolvimento e domínio público, através de sua produção editorial.

Com o objetivo de contribuir para a democratização de parte desses conhecimentos, de modo mais ágil e dinâmico, o INEP criou recentemente as *Séries Documentais,* com o mesmo desenho de capa: elas formam um novo canal de comunicações, diversificado quanto a público, temática e referenciação; abrangendo vários campos, elas podem alcançar, com tiragens monitoradas, segmentos de público com maior presteza e focalização; cada série poderá captar material em diferentes fontes (pesquisas em andamento ou concluídas, estudos de caso, *papers* de pequena circulação, comunicações feitas em eventos técnico-cientificos, textos estrangeiros de difícil acesso, etc).

São as seguintes as séries:

1. *Antecipações* tem o objetivo de apresentar textos produzidos por pesquisadores nacionais, cuja circulação está em fase inicial nos meios acadêmicos e técnicos.
2. *Avaliação* tem o objetivo de apresentar textos e estudos produzidos pela Gerência de Avaliação.
3. *Estudo de Políticas Públicas* tem o objetivo de apresentar textos e documentos relevantes para subsidiar a formulação de políticas da Educação.
4. *Eventos* tem o objetivo publicar textos e conferências apresentados em eventos, quando não se publicam seus anais.
5. *Inovações* tem o objetivo de apresentar textos produzidos pelo Centro de Referências sobre Inovações e Experimentos Educacionais (CRIE).
6. *Relatos de Pesquisa* tem o objetivo de apresentar relatos de pesquisas financiadas pelo INEP.
7. *Traduções* tem o objetivo de apresentar traduções de textos básicos sobre Educação produzidos no exterior.

SUMÁRIO

Trazendo a etnomatemática para o currículo escolar: uma investigação das atitudes dos professores e da aprendizagem dos alunos.

* *Geraldo Pompeu Júnior*

Introdução

Este artigo descreve parte de uma recente pesquisa realizada junto à onde (ll) professores das redes de ensino de 1° grau (estadual e municipal) de Campinas e região, e oito (8) estudantes quartanis - tas do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, do Instituto de Ciências Exatas da PUCCAMP.

Os principais objetivos da pesquisa foram os de investigar as possíveis mudanças da atitudes destes professores e estudantes, bem como o aprendizado dos alunos durante o processo de transição de uma abordagem metodológica tradicional do ensino de Matemática (uma abordagem Canônica-Estruturalista - "CE") , para uma abordagem ba - seada nos conhecimentos e valores sociais e culturais dos alunos (uma abordagem Etno).

Metodologicamente, a pesquisa caracteriza-se como "qualitativa" e "de ação" (Action Research) , segundo as definições dadas por Cohen e Manion (1980).

Do ponto de vista do planejamento e desenvolvimento, esta pesquisa constou de três grandes etapas: na primeira, o embasamento teórico das abordagens CE e Etnomatemática foram introduzidas aos profes - sores e estudantes através de aulas expositivas ministradas pelo pesquisador; na segunda etapa, os professores e estudantes foram subdivididos em grupos com o objetivo de planejar e desenvolver seis(6) "Projetos de Ensino" (PsE) baseados na abordagem Etnomatemática; finalmente, na terceira etapa, os professores e estudantes aplicaram esses PsE em seus alunos.

Neste artigo, o autor se deterá na descrição e análise de parte dos dados da pesquisa referentes a investigação das atitudes dos pro - fessores/estudantes durante o transcorrer da pesquisa. Devido a isto, o artigo será dividido em três partes. Na primeira, serão ca - racterizadas as abordagens CE e Etnomatemática, introduzidas aos professores/estudantes no início da pesquisa. Na segunda parte, será justificada a opção pelo uso de PsE como uma estratégia método - lógica para a transição entre estas duas abordagens, bem como estarão sendo caracterizados os seis PsE planejados e desenvolvidos pelos professores e estudantes. Finalmente a terceira parte do artigo descreverá as principais mudanças observadas nas atitudes destes

[1] * PhD em Educação Matemática pela Universidade de Cambridge, Inglaterra e Professor do Instituto de Ciências Exatas da PUCCAMP.

professores e estudantes durante o processo de transição e conclusões serão tiradas com relação a tais mudanças.

I - **As abordagens CE e Etnomatemática**

Com o objetivo de caracterizar as abordagens CE e Etnomatemática, foi adotado o modelo de análise curricular sugerido por Robitaille e Dirks (1982), na qual o currículo matemático é analisado em três (3) níveis:

> "o currículo recomendado, o currículo implementado, e o currículo alcançado" (p. 17).

Este modelo de análise foi aplicado:

a) às cinco abordagens teóricas do currículo matemático sugerido no trabalho de Howson, Keitel e Kilpatrick (1981) na área de desenvolvimento curricular:

   a1) a abordagem Behaviorista;
   a2) a abordagem da Matemática Moderna;
   a3) a abordagem Estruturalista;
   a4) a abordagem Formativa;
   a5) a abordagem Integrativa;

b) às idéias contidas nos trabalhos de Bishop (1988), D'Ambrósio (1985), Gerdes (1988), Mellin-Olsen (1987) e Zaslausky (1987) nos quais a Matemática é vista como um fenômeno cultural" (uma sexta abordagem para o currículo matemático).

O resultado destas aplicações do modelo de Robitaille e Dirks, juntamente com a análise da "Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 1º Grau" (1986) do Estado de São Paulo, resultou na caracterização da abordagem Etnomatemática em comparação com **o** que foi chamado de abordagem CE. Esta caracterização teorética, comparando a abordagem Etnomatemática experimental com a abordagem oficial Paulista (a abordagem CE) contituiu a base teórica da pesquisa. Em particular, isto determinou o feitio do questionário usado para monitorar as possíveis mudanças nas atitudes dos professores e estudantes durante o transcorrer de toda a pesquisa.

Estas duas abordagens estão sintetizadas na Tabela 1.

II - O **trabalho prático dos professores e estudantes**

Existem três principais motivos para a escolha de PsE como estratégia metodológica para a transição entre as duas abordagens curriculares apresentadas acima:

1) o fato de que através de Projetos, todas as características identificadas para a abordagem Etnomatemática podem ser alcançadas;
2) o uso de Projetos também torna viável a investigação da mudança do papel do professor, no qual ele torna-se um "guia do processo de aprendizagem e o construtor do seu próprio currículo";

3) o uso de Projetos planejados, desenvolvidos e aplicados pelos professores e estudantes, contribuirá para aumentar nosso entendimento sobre as possíveis conseqüências para o ensino e para a aprendizagem.de Matemática, caso a abordagem Etnomatemática venha a ser incorporada ao currículo escolar.

Na realidade os seis (6) PsE planejados, desenvolvidos e aplicados pelos professores e estudantes foram desenhados como uma seqüência de atividades micro-curriculares baseadas no conhecimento de aspectos particulares da realidade do aluno.

Os PsE desenvolvidos foram os seguintes:

a) Projeto **"Pulando Corda"** : este projeto constitui-se de dez atividades envolvendo brincadeiras com cordas. Nestas brincadeiras foram explorados conceitos matemáticos relacionados a contar , medir e localizar. A aplicação deste Projeto envolveu 86 alunos da faixa etária dos 6 a 10 anos(Pré, 1ª e 2ª séries do 1º grau)

b) Projeto **"Amarelinha"** : este Projeto constituiu-se de seis atividades, nas quais foram explorados conceitos matemáticos relacionados a localizar, medir, desenhar e jogar. A aplicação deste Projeto envolveu 53 alunos da faixa etária dos 9 aos 13 anos (3ª e 4ª séries do 1º grau).

c) Projeto **"Cata-vento":** Projeto constituído de cinco atividades , nas quais foram explorados conceitos matemáticos relacionados a contar, medir e localizar. A aplicação deste Projeto envolveu 61 alunos da faixa etária dos 9 aos 15 anos (3ª e 4ª séries do 1º grau).

d) Projeto **"Jogo da Queimada"** : Projeto constituído de sete atividades, nas quais foram explorados conceitos matemáticos relacionados a jogar, medir, desenhar e explicar. A aplicação deste Projeto envolveu 71 alunos da faixa etária dos 10 aos 15 anos (5ª a 6ª séries do 1º grau).

e) Projeto **"Balão"** : Este Projeto constitui-se de seis atividades, nas quais foram explorados conceitos matemáticos relacionados a desenhar, medir, jogar e explicar. A aplicação do Projeto envolveu 70 alunos da faixa etária dos ll aos 21 anos (6ª e 7ª séries do 1º grau).

Finalmente,

f) Projeto **"Plano Collor"** : Projeto constituído de seis atividades nas quais foram explorados conceitos matemáticos relacionados a explicar, contar, medir e desenhar. Este Projeto foi aplicado em 94 alunos da faixa etária dos 13 aos 18 anos (7ª e 8ª séries do 1º grau).

Tabela 1 : (Projeto : Pulando Corda) - Caracterização das duas abordagens comparativas do currículo matemático, introduzidas aos professores e estudantes.

(1º nível - De uma perspectiva geral

Canônica Estruturalista

A Matemática deve ser vista como:
a) uma disciplina **Teórica** , no sentido de que ela se preo - cupa com abstrações e gene - realizações;
c) uma disciplina **Lógica,** no sentido de que ela desenvolve estruturas consistentes em si mesma; e) uma disciplina **universal,** sentido de que ela está ba-seada em verdades univer sais

Etnomatemática

A Matemática deve ser vista como:
b) uma disciplina **Prática** no sentido de que ela é aplicável e útil;
d) uma disciplina **Explora tória** e **Explicativa,** no sentido de que ela in vestiga situações no meio ambiente; f) uma disciplina **Particu lar,** no sentido de que ela está baseada em ver dades de uma específica pessoa ou grupo de pes soas.

(2º Nivel) De uma perspectiva curricular

Canônica-Estruturalista

O currículo Matemático deve ser:
a) **Culturalmente independente** no sentido de que suas ver dades são absolutas, inde pendentens de qualquer ti po de fator cultural ou so cial;
c) **Informativo,** no sentido de que enfatiza procedimentos métodos, habilidades, re gras, fatos, algoritmos e resultados.
e) **Conservador,** no sentido de que ele promove o controle sobre o meio ambiente e a estabilidade social.

Etnomatemática

O currículo Matemático deve ser:
a)**Culturalmente/Socialmente** baseado, no sentido de que suas verdades são relati vas, dependentes de fato res culturais e sociais; **d) Formativo** no sentido de que ele enfatiza análi se, síntese, raciocínio entendimento, posiciona mento crítico e utilida des; f) **Progressivo,** no sentido de que ele promove o crescimento do conheci mento sobre o meio am biente e o progresso / modificação da socieda de.

(3º nivel) Da perspectiva do professor de Matemática

Canonica-Estruturalista

O professor deve:

a) ensinar Matemática como uma disciplina de **"Mão única"** , no sentido de que o conhecimento matemático é transmitido do professor para o aluno;

c) ensinar Matemática como uma disciplina **Separada,** no sentido de que as aulas de Matemática são independentes do conhecimento que os alunos trazem de fora da escola;

e) ensinar Matemática como uma disciplina **Reprodutiva,** no sentido de que o conhecimento matemático é ensinado através de textos matemáticos uniformizados.

Etnomatemática

0 professor deve:

b) ensinar Matemática como uma disciplina de **Debate,** no sentido de que o conhecimento matemático é discutido entre os alunos e o professor;

d) ensinar Matemática como uma disciplina **Complementar,** no sentido de que as aulas de Matemática são baseadas no conhecimento de que os alunos trazem de fora da escola;

f) ensinar Matemática como uma disciplina **Produtiva,** no sentido de que o conhecimento matemático é desenvolvido a partir de situações próprias dos alunos.

(42 nível) Da perspectiva dos alunos

Canônica-Estruturalista

O aluno deve:

a) ser capaz de descobrir **Respostas Corretas** para problemas, no sentido de que são as respostas finais dos alunos, aos problemas que são importantes;

c) ser capaz de **usar os metodos formais matemáticos** na resolução de problemas no sentido de que tais métodos são os que produzirão as soluções corretas;

e) ser capaz de **raciocinar matematicamente** sobre problemas, no sentido de que o importante para os alunos é saber o "como" resolver problemas maternaticamente.

Etnomatemática

O aluno deve:

b) ser capaz de **Analisar,** problemas, no sentido de que é **o** entendimento da estrutura do problema, pelos alunos, que é importante;

d) ser capaz de **usar procedimentos apropriados** na resolução re problemas, no sentido de que é a habilidade dos alunos para determinar o procedimento apropriado para a solução do problema que é importante;

f) ser capaz de **fazer críticas matemáticas** sobre problemas, no sentido de que o importante para os alunos é saber o "por quê" resolver problemas matematicamente.

III - **Mudanças nas** atitudes **dos professores/ estudantes.**

Com o objetivo de analisar as possíveis mudanças nas atitudes dos professores e estudantes durante o desenvolvimento da pesquisa, um questionário foi aplicado em três momentos distintos: antes do início da pesquisa, após a caracterização das duas abordagens metodológicas (CE e Etno) , e depois da aplicação dos PsE nos alunos. Este questionário constava de 4 questões, cada uma referindo-se a um dos níveis de análise do currículo matemático especificado na Tabela l. Para cada uma desta questões foram oferecidas 6 alternativas (como aparece na Tabela 1), as quais os professores e estudantes deveriam classificar, de acordo com suas próprias perspectívas, sobre o que estava sendo perguntado.
Além disso, em cada questão também existia espaço para que os professores e/ou estudantes colocassem comentários ou acrescentassem suas próprias definições, caso julgassem isto necessário.

Aplicando o "Kendall Coeficiente de Concordância" (Siegel, 1956) as respostas dadas para as quatro questões e em suas três aplicações, o valor obtido pra "W" (isto é, o grau de concordância entre os professores e estudantes ao responderem uma mesma questão)

Tabela 2 : Respostas Pradão dos Professores e Estudantes

Respostas padrão dos Professores e Estudantes																		
Questão	1ª aplicação						2ª aplicação						3ª aplicação					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	b	c	d	e	a	f	b	d	c*	f*	e	a	d	b	c	f	e	a
2	d	f	c	a	b	e	d	f	b	a	c	e	d	f	b	c	a	e
3	f	b	d	e	a	c	b	d	f	e	c	a	b	f	d	e	c	a
4	b	f	e	d	c	a	b	f	d	e	a	c	b	d	f	e	c	a

mostra uma significância e 01 para todas as questões e suas aplicações. Consequentemente, foi possível definirmos uma resposta padrão para cada uma destas 4 questões e suas três aplicações. A Tabela 2 mostra as respostas-padrão obtidas para cada questão em cada aplicação.

Onde :

o significado de cada alternativa (a, b, c, ... f) pode ser visto na Tabela 1;

. (*) significa que as alternativas foram classificadas numa mesma posição.

Observando as respostas padrão relativas à questão 1 (Para mim a Matemática deve ser vista como . . .) é importante enfatizar o fato de que as alternativas "b", "c" e "d" (uma disciplina "Prática" , "Lógica" e "Exploratória e Explicativa") foram classificadas entre as três primeiras posições. Isto mostra que para aqueles professores a disciplina Matemática é vista como "Prática", "Lógica" e "Exploratória e Explicativa". Além disso, deve-se notar que as Etno alternativas "d" e "f" foram as únicas que subiram de posição em suas classificações durante o transcorrer da pesquisa.

Observe um comentário escrito feito por um dos professores enfatizando estas observações :

"Nesta pesquisa, eu atuei de duas maneiras diferentes, mas que são na realidade possíveis e complementares: como professor e como aluno. Como professor , eu tentei mostrar aos meus alunos uma nova perspectiva da Matemática. Uma perspectiva escondida pela escola. Uma Matemática que pode ser prática, prazerosa, formativa e necessária. Como aluno, eu mudei minha própria visão sobre esta disciplina, com o objetivo de alcançar uma "conciliação" que eu julgava antes ser impossível".

Analisando as respostas-padrão, questão 2 (Para mim o currículo matemático deve ser...) existem 3 importantes observações a serem feitas. Primeiro, as alternativas "d", "e" e "f" ("Formativo", "Conservador" e "Progressivo") foram as únicas que não mudaram suas classificações (1*, 6« e 2 a posições respectivamen te) nas três respostas. Segundo, a alternativa "b" ("cultural -mente e socialmente baseado") mostrou maior aumento de impor -tância na sua classificação durante a pesquisa. Finalmente, as alternativas "a" e "c" ("culturalmente independente" e "informativo") decresceram em importância em suas classificações no decorrer da pesquisa.

Referindo-se à alternativa "b", um professor escreveu:

"Que enorme erro foi o de ter pensando inicialmente nas bases "culturais e sociais" da Matemática com tão pouca importância. Matemática é basicamente um produto da cultura da cada raça. Ela cresce com bases na necessidade da sociedade e na experiência de cada um. Estas devem ser as bases de suas verdades"

Observando as respostas-padrão da questão 3 (Para mim, o professor deve ensinar Matemática como uma disciplina...) nota-se que as alternativas "b", "d" e "f" ("de debate", "complementar" e "produtiva" ocupam as três primeiras posições nas três ocasiões. Embora isto revele que basicamente não houve mudanças nas atitudes dos professores/estudantes da perspectiva de análise enfocada pelas alternativas fornecidas, alguns professores/estudantes manifestaram-se sobre mudanças ocorridas com relação a outros aspectos de suas atuações em sala de aula, em decorrência da pesquisa. Por exemplo, sobre o processo de avaliação dos alunos , professor/estudante escreveu:

"Eu não estava esperando o tipo de reação que alguns alunos tiveram (alguns alunos discordaram dos resultados finais das avaliações-nota do pesquisador). Por outro lado,

(...) eu aprendi que o processo de avaliação é muito complexo para ser tão pouco discutido (...). Eu acredito que um processo de avaliação deva levar em consideração aspectos individuais de cada aluno, exiqindo de cada um respostas proporcionais às suas experiências anteriores. Se os alunos fossem acostumados a se auto-avaliarem, se tivessem espírito crítico e senso de justiça, o procedimento de avaliação poderia somente ser baseado num, "auto-critério de avaliação" (...). O que é importante que uma avaliação mostre é aquilo no que os alunos podem progredir, e não o que eles não sabem fazer".

Analisando as respostas-padrão da questão 4 (Para mim, o aluno deve ser capaz de ...) é importante observar que a alternativa "b" ("analisar problemas") foi classificada na primeira posição em todas as três respostas. Acrescente-se a isto que a alternativa "b" ("usar procedimentos apropriados na resolução de problemas") mostrou o maior crescimento em importância durante a pesquisa, enquanto que as alternativas "e" e "f" ("raciocinar matematicamente sobre problemas" e "fazer críticas matemáticas sobre problemas") registraram um decréscimo de importância. É importante também observar que as alternativas "a" e "c" ("descobrir respostas corretas para problemas" e "usar os métodos formais matemáticos na resolução de problemas") foram classificadas nas duas últimas posições nas três aplicações do questionário.

Referindo-se à alternativa "d", um professor/estudante, ao final da pesquisa, fez o seguinte comentário escrito:

"... durante minha vida de estudante, eu nunca fui estimulado a usar meus próprios procedimentos para resolver problemas; todos os meus raciocínios eram desprezados, e somente minhas "respostas corretas" eram valorizadas. Hoje em dia, acredito que esta visão de Matemática ainda continue sendo a mesma. De uma outra perspectiva, alunos devem ser capazes de criticar suas realidades, de resolverem problemas usando seus próprios procedimentos, e de desenvolverem suas próprias habilidades para analisarem o mundo em que vivem. Um homem com estas habilidades terá mais autonomia para construir sua própria história".

Ao final da pesquisa, os professores e estudantes mostraram uma visão preferencial na qual:

1) A Matemática deveria ser vista como uma disciplina Exploratória e Explicativa no sentido de que ela investigaria situações do meio ambiente;
2) O currículo matemático deveria ser Formativo, no sentido de que ele enfatiza a análise, a síntese, o raciocínio, o entendimento o posicionamento crítico e a utilidade;
3) O professor deveria ensinar Matemática como uma disciplina de debate, no sentido de que o conhecimento matemático seria discutido entre os alunos e o professor;
4) O aluno deveria ser capaz de analisar problemas, no sentido de que seria o entendimento da estrutura do problema, pelos alunos que é importante.

Embora as respostas-padrão utilizadas acima não caracterizem completamente a extensão das mudanças que ocorreram nas atitudes dos professores e estudantes envolvidos, com relação ao currículo matemático em seus diferentes níveis de análise, é interessante notar que após a pesquisa estes professores e estudantes tornaram-se mais conscientes de muitos dos aspectos enfatizados pela abordagem etnomatemática. Da mesma forma, a simples mudança de algumas atitudes dos professores/estudantes, a Etno abordagem também estimulou e reforçou algumas das atitudes pré-existentes dos professores estudantes, os quais se mostraram insatisfeitos como o currículo matemático com o qual normalmente eles trabalhavam.

BIBLIOGRAFIA

BISHOP, A. J. (1988) - Mathematical Enculturation: a cultural perspective on Mathematics Education, D. Reidel Publishing Company, Dordnecht, Holland.

COHEN, L. e MANION, L. (1980) Research Methods in Education, Croon Helm, London, U.K.

CAMBROSIO, U. (1985) - Ethnomathematics ans its Place en the History and Pedagogy of Mathematics, in For the Leaming os Mathematics 5, l, pp. 44/48 (February, 1895), FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canadá.

GERDES, P. (1988) - On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education Studies in Mathematics, 19, pp. 137/162, Kluwer Academic Publishers, London, U.K.

HOWSON, A.G., KEITEL, C. KILPATRICK, J. (1981) Curriculum Developmpment in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

MELLIN-OLSEN, S. (1987) The Politics of Mathematics Education, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - Primeiro Grau - (1986), Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, São Paulo, S.P. Brasil.

ROBITAILLE, D. e dirks, m. (1982) Models for the Mathematics Curriculum, For the Learning of Mathematics 2, 3, pp. 3/21, March, FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canadá.

SIEGEL, S. (1956) Nonparametric Statistics for Behavioral Sciences, Ms Graw-Hill Book Company INC. New York, U.S.A.

ZASLAVSKY, C (1987) Math Comes Alive : Activities from many cultures, J. Weston Walch Publisher, Portland, Maine, U.S.A.

A COMPREENSÃO QUE OS ESTUDANTES TÊM DE TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES UTILIZANDO UM SOFTWARE DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

MARCELO DE CARVALHO BORBA[1]
Departamento de Matemática
Pós-graduação em Educação Matemática
UNESP — Rio Claro — SP

Nesta pesquisa estudantes foram entrevistados individualmente usando como metodologia o "experimento de ensino", uma variação do método clínico de Piaget. Cada estudante foi entrevistado por aproximadamente 16 horas. Os estudantes tinham à sua disposição um aplicativo gráfico com representações que se "comunicam" entre si. O aplicativo, "Function Probe" possui "janelas" gráfica, de tabela e de calculadora. Em todas essas janelas as expressões algébricas podem ser usadas. Nesse experimento se desenvolveu um modelo para a aprendizagem de transformações (translações, reflexões e esticamentos) de funções que enfatizava a visualização na coordenação das diversas representações ao invés da álgebra. Essa coordenação das representações se iniciava com os estudantes transformando gráficos através de ações com o "rato". Em seguida as transformações ocorridas com o gráfico foram relacionadas com as transformações ocorridas nas tabelas de valores do gráfico. No passo seguinte as relações entre mudanças no gráfico e na expressão analítica da função foram analisadas. Embora não intencional, a relação entre um tipo de álgebra desenvolvido nas tabelas e a álgebra do tipo y = f(x) foi estudada por alguns dos estudantes, com resultados originais. Um grande número de exemplos de como os alunos lidam com transformações de funções em ambientes de representações múltiplas foi discutido. O modelo, o uso constante de visualização e o uso de representações múltiplas possibilitou que os estudantes se engajassem em diversas investigações originais. Foi desenvolvido também um outro modelo de como os estudantes compreendem matemática em ambientes de representações múltiplas. Esses estudantes também mostraram como que os computadores podem modificar a natureza da matemática que se ensina quanto da própria matemática em si.

[1] Esta pesquisa de doutoramento foi realizada na Universidade de Comell, Ithaca, NY, USA e contou com o financiamento da CAPES, agência de fomento do governo brasileiro e do NSF, agência de fomento do governo americano.

Aprendizagem dos problemas aditivos e compreensão de texto.

Rctina Flemminy Damm Universidade

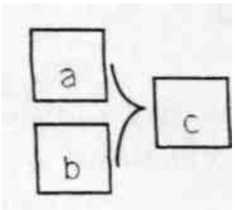
Federal de Santa Catarina

Os problemas aditivos são problemas nos quais o enunciado descreve uma situação econômica ou social (compra, venda, deslocamento....) e que. para resolvê-los. devemos efetuar somente uma operação de adição ou subtração. .São problemas clássicos do ensino primário. Em 1976. Gerard Vergnaud (em Paris) constatou, propondo diferentes problemas aditivos aos-alunos da escola primária, que existe muita diferença, no que se refere às dificuldades dos alunos, em problemas aparentemente semelhantes : que muitos destes problemas ainda causam enormes dificuldades no fim da escola primária.

Numerosas pesquisas confirmaram estas observações e diferentes classificações foram propostas para explicar estas dificuldades. No que se refere às diferentes classificações. diversas experiências de ensino foram propostas para favorecer uma melhor aprendizagem.

A classificação de Vergnaud :

G.Vergnaud (1976) introduziu a distinção entre o cálculo numérico e o cálculo "relacionai". Ele concluiu que a resolução em si de um problema não se situa no cálculo numérico, mas sim no cálculo "relacionai". Num problema aditivo, este cálculo "relacionai" pode ser feito em termos dos *estados*, que são medidas associadas a números positivos (...tem...) ou em termos de *transformações,* que é uma relação entre dois estados sucessivos e que são associados aos números positivos ou negativos (...ganha..., ...perde...). Vergnaud classificou os problemas aditivos em 6 categorias : I) Composição de duas medidas (EEE) :



Ex : Na sala de aula tem 5 meninas e 20 meninos, 25 crianças ao todo.

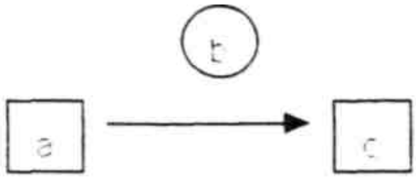
Desta categoria, temos duas classes de problemas : encontrar c. conhecendo a e b. e encontrar a conhecendo b e c, ou encontrar b, conhecendo a e c.

Exemplos:

1) Tem 4 meninas e 3 meninos sentados a uma mesa. Quantas crianças temos no total?

2) Em torno de uma mesa. temos meninos e meninas sentados, no total 9 crianças. Sabendo que 5 destas crianças são meninas, temos quantos meninos ?

ll) Uma transformação opera numa medida para dar uma medida (ETE)



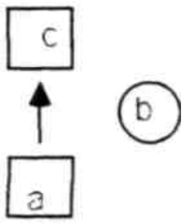
Ex : Eu tinha 7 bolinhas de gude. Eu joguei uma partida e perdi 3 bolinhas. Eu tenho atualmente 4 bolinhas.

7 e 4 são números naturais e -3 é um número relativo. Esta segunda categoria nos oferece 6 classes de problemas, segundo a incógnita do problema. Por exemplo :

1 - Pedro tem 6 bolinhas de gude. Ele joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas êle tem depois da partida?

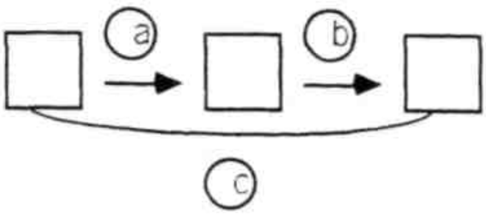
2 - Bernardo joga uma partida de bolinha de gude. Ele perde 7 bolinhas. Após a partida, êle tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas êle tinha antes de jogar?

III) Relação estática de duas medidas :



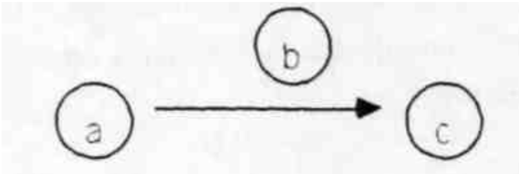
Ex : Paulo tem 3 bolinhas de gude. Ele tem 5 bolinhas a mais que João. João tem 3 bolinhas.
Esta categoria pode dar lugar também a 6 classes de problemas, segundo a incógnita.

IV) Composição de duas transformações (TTT)



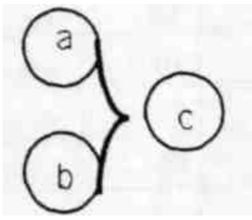
Ex: Pedro ganhou 6 bolinhas de gude de manhã. A tarde, ele perdeu 9 bolinhas. No total, ele perdeu 3 bolinhas de gude.
+6. -9 e -3 são números relativos.
Esta categoria dá lugar a 3 classes de problemas, segundo a incógnita.

V) Transformação entre duas relações estáticas :



Ex : Eu devo 7 bolinhas a Paulo. Eu devolvo 4 destas bolinhas. Eu devo ainda quatro bolinhas.
-7, +4 e -3 são números relativos.

VI) Composição de relações :



Dois exemplos para melhor situar esta categoria :
1 - Pedro deve 8 bolinhas a Henrique, mas Henrique deve 6 bolinhas a Pedro.
2 - Roberto tem 7 bolinhas a mais que Susana. Susana tem três bolinhas a menos que Cláudia. Roberto tem 4 bolinhas a mais que Cláudia.

Onde:
- o *quadrado* representa a medida (representa um elemento do conjunto dos números naturais).
- o *círculo* representa uma transformação (representa um elemento do conjunto dos inteiros).
- a *chave* representa a composição dos estados (estados/medidas, estados/relativos)
- a *flecha na posição horizontal* representa uma transformação (uma mudança de estado)
- *a. flecha na posição vertical* representa uma relação (entre os estados).
- o parênteses ( ) corresponde sempre à incógnita.
- os verbos "antônimos" são verbos contrários, por exemplo : "ganhou...perdeu", "subiu...desceu".

A classificação de Vergnaud é puramente conceituai. Ela trata dos diferentes casos possíveis, e classifica os problemas em : problemas de "estado", problemas puramente de "transformação", e a mistura dos dois tipos (estados e transformação). Vergnaud. numa primeira experiência (em 1976). passou um questionário, explorando os problemas das categorias ll) e IV), problemas do tipo estado-transformação-estado (ETE). e transformação-transformação-transformação (TTT). Todos os enunciados se referiam ao jogo de bolinha de gude. Os problemas foram submetidos aos alunos de I °a 4^{o} séries. Os resultados que ele obteve confirmaram a importância da distinção entre "estado" e "transformação".

Problema	Tipo	1° série	2° série	3° série	4° série	5°série	*	operação a efetuar
		% (N)	% (N)	% (N)	% (N)	% (N)		
PIERRE	ETE tp(t)	50	85	96	96	96		subtração
CLAUDE	ETE (t)gt	18	57	86	100	93		adição
BERTRAND	ETE (t)pt	14	53	96	89	93		adição
LAURENT	TTT pp(p)	7	39	68	89	70	mesmos verbos	adição
PAUL	TTT gp(g)	29	50	86	75	82	*verbos antônimos*	*subtração*
BRUNO	TTT (g)pg	**4**	**7**	**25**	**29**	**46**	**verbos antônimos**	**adição**
CHRISTIAN	TTT g(g)g	7	46	75	96	100	mesmos verbos	subtração
JACQUES	TTT p(p)p	7	39	61	82	86	mesmos verbos	subtração
DIDIER	TTT p(p)p	-	11	43	57	86	mesmos verbos	subtração
OLIVIER	TTT g(p)p	-	-	-	**21**	**21**	**verbos antônimos**	**adição**
VINCENT	TTT g(p)p	-	-	-	**7**	**28**	**verbos antônimos**	**adição**
MICHEL	TTT gp(p)	-	-	-	-	72	*verbos antônimos*	subtração

* - característica dos verbos que dão a informação numérica -

onde t significa tem, g - ganhou e p - perdeu.

Podemos observar no quadro que os problemas mais difíceis aos alunos são aqueles em que os verbos que dão a informação numérica são antônimos, e a operação numérica a efetuar, para resolver o problema, é uma adição.

Depois da classificação de Vergnaud. muitas outras foram feitas, procurando levar em conta fatores de ordem semântica, e outros fatores. Depois de muitas pesquisas, onde foram detectados os problemas nos quais os alunos tem dificuldade, começaram a surgir pesquisas onde o objetivo era encontrar uma forma de transpor estas dificuldades.

Uma análise de todas as pesquisas feitas sobre problemas aditivas nos mostra diversas características comuns:

1 - A importância de fazer a distinção entre os problemas aditivos que apresentam dificuldades durante os três primeiros anos do primário e os que apresentam dificuldades aos alunos não somente na escola primária como também a alunos de quinta a oitava séries.

2 - Depois da análise feita sobre as pesquisas em problemas aditivos, notamos que a maior parte destas pesquisas se referem a problemas aditivos a uma operação.

3 - A importância de uma representação na resolução de problemas aditivos : muitas pesquisas nos últimos 10 anos são voltadas, para o uso de representações como um instrumento na resolução dos problemas. Mas existem muitas divergências sobre qual representação utilizar e como utilizá-la de uma forma que ela possa atuar no processo de resolução.

Depois da análise sobre as pesquisas em problemas aditivos, nós concluimos que a origem das dificuldades de resolução dos problemas aditivos é na compreensão dos enunciados. Que estas dificuldades se encontram na compreensão das relações de ordem temporal indicadas no enunciado, e na dificuldade de compreender o sentido dos verbos que nos dão a informação numérica necessária para a resolução. Estes aspectos pertencem mais a organização redacional do texto que ao conteúdo cognitivo propriamente dito.

Depois de analisar as pesquisas realizadas na resolução de problemas aditivos, duas questões se impõem :

As dificuldades dos alunos devem-se à compreensão dos enunciados dos problemas aditivos ou à resolução dos problemas ?

Qual o tipo de representação que pode ser um instrumento eficaz na resolução dos problemas?

Representação, compreensão e resolução dos problemas aditivos :

Introdução

Se observarmos a constituição de um problema aditivo, temos que reconhecer a importância fundamental do texto do problema. Em todo o problema aditivo, podemos reconhecer dois planos distintos :

- de um lado o **tratamento aditivo,** isto é. a resolução de uma ou duas operações com os valores numéricos que aparecem no texto.

- por outro lado. existe a apresentação redacional do texto. O enunciado evoca uma situação não matemática nos quais os números assumem valores de "ganho, perda, diferença, preço, despesa, etc...".

A distinção destes dois planos mostra imediatamente dois fenômenos que devem ser levados em consideração : o primeiro fenômeno é que. para o mesmo tratamento aditivo, podemos ter diferentes enunciados.o segundo fenômeno é que a resolução do problema exige que o aluno passe do texto ao tratamento aditivo a ser efetuado. Para efetuar esta passagem precisamos:

- selecionar no enunciado os dados pertinentes para a resolução : os números indicados. os valores que lhe são atribuídos lexicamente (estado, transformação), assim como as relações entre estes valores.
- organizar os dados para desta forma fazer aparecer o tratamento aditivo que devemos efetuar.

Para efetuar esta seleção de dados pertinentes do enunciado e para os organizar a fim de encontrar o tratamento aritmético a efetuar, precisamos, implicitamente ou explicitamente, de uma representação. Esta representação deve. por sua vez. permitir extrair os dados pertinentes do enunciado do problema e, ao mesmo tempo, oferecer as condições de interpretar as relações entre estes dados. Então o tratamento aritmético aparecerá.

I - Os dois registros de representação dos problemas aditivos

Nos problemas aditivos, é importante a distinção que chamamos respectivamente, o **tratamento aditivo e a apresentação redacional.**

A - O tratamento aditivo

O tratamento aditivo é constituído por um conjunto de números no qual cada número pode ser obtido a partir dos outros números por uma operação de adição e de subtração.

O tratamento aditivo dos *problemas aditivos a uma operação* é constituído por três números tais que um destes números pode ser encontrado a partir dos dois outros, seja por uma operação de adição ou de subtração.

O tratamento aditivo dos problemas aditivos a duas operações é geralmente constituído por cinco números tais que três números são dados no enunciado do problema e os outros dois podem ser encontrados por operações de adição e/ou subtração. Nós podemos já observar uma primeira diferença com o problema aditivo a uma operação : é preciso escolher dois, dos três números dados, para uma primeira operação... uma tal escolha não existe para os problemas aditivos a duas operações.

Os tratamentos aditivos podem ser particularizados. De um conjunto de números, como por exemplo (7, 12, 5), ligados seja por uma operação de adição, seja por uma operação de subtração, podemos ter os enunciados :

"João joga duas partidas de bolinha de gude. Na segunda partida, ele ganha 12 bolinhas. No total ele ganha 5 bolinhas. O que se passou na primeira partida?". Nós temos o número 7 ligado a 12 e 5 por uma operação de subtração.
"Ricardo joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira, ele perde 7 bolinhas. Ele joga uma segunda partida. Após estas duas partidas, ele ganhou, no total. 5 bolinhas. O que se passou na segunda partida?". Nós temos aqui 12 ligado à 7 e 5 por uma operação de adição.
"Gilberto joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida, ele perde 7 bolinhas. Na segunda partida, perde 12 bolinhas. O que se passou no total?" . Nós lemos o número 5 ligado aos números 12 e 7 por uma operação de subtração.
Isto é. nós particularizamos o tratamento aditivo de três formas diferentes :

tratamento aditivo	partularisação	
7. 12, 5 op adição ou subtração	7, (12)?, 5	op.adição
	(7)?. 12. 5	op.subtração
	7, 12, (5)?	op.subtração

Como podemos observar, a particularização de um tratamento aditivo fixa a operação.

B - A apresentação redacional do texto

Um enunciado do tipo "Quanto é três menos dois?" não é considerado como um enunciado de um problema aditivo. São considerados problemas aditivos, problemas do tipo : "Pedro joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira ele ganha 3 bolinhas. Na segunda ele perde 2 bolinhas. O que se passou no total?" ou "Pedro toma o elevador. Ele sobe três andares. A seguir, ele desce dois andares. Quantos andares ele percorreu no total?"
Observando o enunciado de um problema aditivo, podemos concluir que ele é constituído de três tipos de dados :
1 - os dados relativos à situação extra-matemática (compra, venda, deslocamento.etc) descrita no enunciado.
Ex : No Natal, a tia de Ana comprou... 2 - os dados relativos ao valor operatório dos números:
São aqueles que dão ao número um valor de *estado* ou de *transformação* segundo a distinção estabelecida por G.Vergnaud (1976). Estes valores operatórios de estado ou transformação são expressos por verbos que, no enunciado, dão a informação numérica do problema (R. Duval, 1991) : ..."tem 4"..., ..."ganha 5"..., ..."perde 8".... Aqui um ponto importante deve ser lembrado. Os verbos que fornecem a informação numérica e exprimem uma transformação apresentam muitas vêzes a particularidade de pertencer a um par de antônimos (ganha/perde, avançar/recuar, subir/descer,...). São estes verbos que são pertinentes para uma compreensão dos problemas, que são orientados na direção da resolução. Temos dois casos a pensar :

- os verbos que fornecem a informação numérica empregam somente um dos termos do par de antônimos : "**...ganha** 4 bolinhas**..ganha** 3 bolinhas..."

- os verbos que fornecem a informação numérica empregam os dois termos do par de

antônimos : "**...ganha** 4 bolinhas**..perde** 6 bolinhas..."
Esta diferença tem uma importância fundamental na passagem do enunciado ao tratamento aritmético. *A conversão do valor operatória* (transformação positiva ou transformação negativa) *em uma operação aritmética* não é a mesma, se o enunciado apresenta os dois termos do par de antônimos ou se ela apresenta uma só vez. Para verificarmos isto. basta olharmos os resultados das pesquisas em problemas aditivos desde 1976.
Existem, evidentemente, outros verbos no enunciado de um problema aditivo que não fornecem uma informação numérica, são verbos *neutros* para a resolução dos problemas. Eles ressaltam os dados relativos à situação extra-matemática descrita.
3 - os dados referentes às relações entre os dados operatórios do enunciado : estes são os dados do texto que permitem relacionar entre si os dados operatórios do problema. Num texto narrativo, estes dados são marcados de diferentes formas : ordem de sucessão das frases. emprego de advérbios de tempo (antes, depois,...), adjetivos ordinais (primeiro, segundo,...), localização no tempo (manhã, noite, segunda-feira,...)

II - A passagem do texto ao tratamento aditivo :

A distinção entre estes três tipos de dados que constituem o enunciado de um problema aditivo pode parecer trivial. Mas ela é de fundamental importância para extrair os critérios aos quais uma representação deve responder para permitir a seleção e a organização dos dados pertinentes, isto é, para permitir a passagem do texto ao tratamento aritmético. Nós veremos a seguir que todas as representações propostas sobre um plano didático não privilegiam o mesmo tipo de dados, ou mesmo nem os distinguem.
O ponto importante desta passagem do texto ao tratamento aritmético é a **escolha da operação** "+" ou "-". Da evidência da dificuldade desta escolha vai depender o caráter *congruente* ou *não congruente* da passagem a efetuar. Três fatores determinam o caráter congruente ou não congruente desta passagem.
O primeiro fator é determinado pela necessidade, ou não, de efetuar uma inversão (em relação ao dado final) quando se toma em conta os valores operatórios.
Como, por exemplo, nos problemas ETE e TTT :

inversão	direto
(E)TE	ET(E)
(T)TT	TT(T)

O segundo fator se refere à polarização dos verbos tendo um valor operatório de transformação.
Existe uma correspondência direta e espontânea por parte do aluno entre o sentido do verbo "ganhar" e da operação "+" e do verbo "perder" e da operação "-".

Uma vez que o enunciado apresenta verbos com a mesma polarização ("perde… perde"), a operação aritmética correspondente pode corresponder, ou não. ao sentido sugerido por estes verbos:

correspondência	não existe correspondência
p (g) p ----- "-"	p p (p) ----- "+"
(p) p p ----- "-"	
g g (g) ----- "+"	

O terceiro fator é a presença, ou a ausência, de **verbos antônimos,** isto quer dizer, verbos de polarização contrária (ganha/perde, sobe/desce....).

Chamaremos de problema **estritamente congruente** aquele onde de um lado existe a correspondência, e de outro lado. não existe nem a inversão nem a presença de verbos antônimos.

E importante dizer que estes três fatores não apresentam o mesmo grau de dificuldade ao aluno.

O fator da inversão se revela mais forte, em termos de dificuldade, que o da correspondência.

Uma vez que temos ao mesmo tempo a inversão e a presença de verbos antônimos no enunciado, a passagem do texto ao tratamento aritmético pode ser **fortemente não congruente.**

Na seqüência de nosso trabalho, chamaremos de **congruentes** todos os problemas que não são fortemente congruentes.

O resultado de todas as pesquisas efetuadas após o trabalho de G. Vergnaud (1976) mostram que as dificuldades de resolução dos problemas fortemente não congruentes persistem para a grande maioria de alunos de 4^o, 5^o séries e mesmo em séries mais avançadas.

III - Representação e passagem do texto ao tratamento aritmético: Falamos que a passagem do texto ao tratamento aritmético supõe a seleção de todos os dados pertinentes, e a sua organização. A escolha da operação, para a qual vimos a complexidade no que se refere aos problemas não congruentes, depende dos dados que serão selecionados pelo leitor e da apreensão que ele deve ter para a organização dos dados selecionados.Observamos freqüentemente que todos os dados pertinentes para a resolução não são tomados em conta pelos alunos ou que muitas vezes eles não percebem a relação entre os dados selecionados. Uma aprendizagem dos problemas aditivos deve começar por estas questões de seleção dos dados pertinentes e pela sua organização, isto é. pela compreensão dos enunciados.Todo o problema didático é de saber se uma representação pode ser um instrumento eficaz para ensinar o aluno a compreender e a resolver os enunciados dos problemas e. que tipo de representação deveria ser utilizada.

Depois de constatar a persistência das dificuldades dos alunos a determinadas categorias de problemas, todas as pesquisas convergiram para uma mesma conclusão : *as dificuldades de resolução dos problemas aditivos não podem ser superadas sem a ajuda do desenvolvimento de uma representação adequada da situação descrita no problema.* Assim, na maior parte das pesquisas atuais, uma grande variedade de representações foram propostas : ilustrações. esquemas, flechas, retas. etc... . Fala-se mesmo do uso abusivo destas representações.

A) Análise de algumas representações utilizadas nos estudos referentes a problemas aditivos:

a) As ilustrações

São representações que são centradas na situação extra-matemática descrita. A maior parte dos livros escolares a nível de primeiro grau utilizam *"representações que ilustram as situações"* para ajudar a compreensão dos enunciados. Este tipo de representação conduz a privilegiar os dados que intrinsicamente não são pertinentes. Existem estudos que mostram que. pelo contrário, este tipo de representação pode prejudicar o aluno no seu raciocínio para a resolução do problema proposto.

b) A reta

Esta representação também foi proposta para ajudar a compreensão dos enunciados dos problemas aditivos a uma operação. Ela leva em conta somente os valores operatórios. esquecendo os dados concernentes às relações entre os valores operatórios.

c) esquemas

A vantagem dos esquemas é que eles tomam em conta os dois tipos de dados pertinentes à resolução de um problema aditivo.

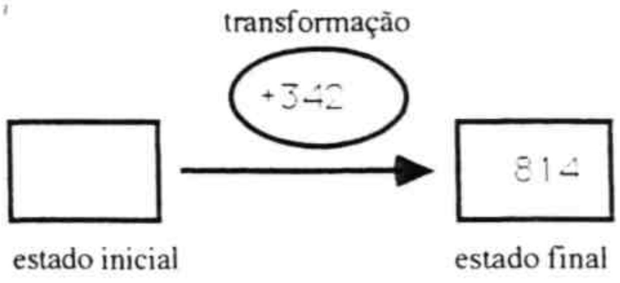
Todavia, eles apresentam dois inconvenientes :

- o primeiro é que existem diferentes esquemas a utilizar, dependendo dos diferentes tipos de problemas. Nestas condições, a utilização dos esquemas pressupõe a compreensão do enunciado.
- o segundo inconveniente é a sua "visibilidade semiótica". Por um lado. a separação dos dois tipos de dados não é claramente representada. Por outro lado, existe o recurso à utilização de flechas que são de difícil interpretação para o aluno, como diversas pesquisas já mostraram (L.Hefendehl-Hebeker, 1990, N.Bernarz&B.DJanvier, 1985)

Como por exemplo :

João tinha algumas figurinhas. Jorge deu a ele mais 342 figurinhas. Atualmente João tem 814.

Quantos figurinhas tinha João no início ?



B) A representação bi-dimensional :

Toda a compreensão de texto implica na elaboração de uma representação não discursiva , seja da organização redacional. seja do seu conteúdo cognitivo (Duval 1986. 1991). Dado o caráter particular dos textos dos enunciados dos problemas, é preciso propor aos alunos uma representação que permite ao mesmo tempo, selecionar as informações pertinentes para a resolução do problema e organizar as informações selecionadas. Uma representação que comporte duas dimensões semânticas diferentes nos pareceu preencher estas condições : - uma relativa à ordem de sucessão dos estados e das transformações que são expressos por verbos que nos fornecem a informação numérica. Então podemos representar três fases sucessivas para os problemas a uma operação e quatro ou cinco para os problemas a duas operações.

- uma outra dimensão sobre a qual os dados operatórios são colocados, cada dado operatório sendo colocado sobre uma reta diferente, em função da situação (temporal ou outra) que lhe foi assinalada no texto.

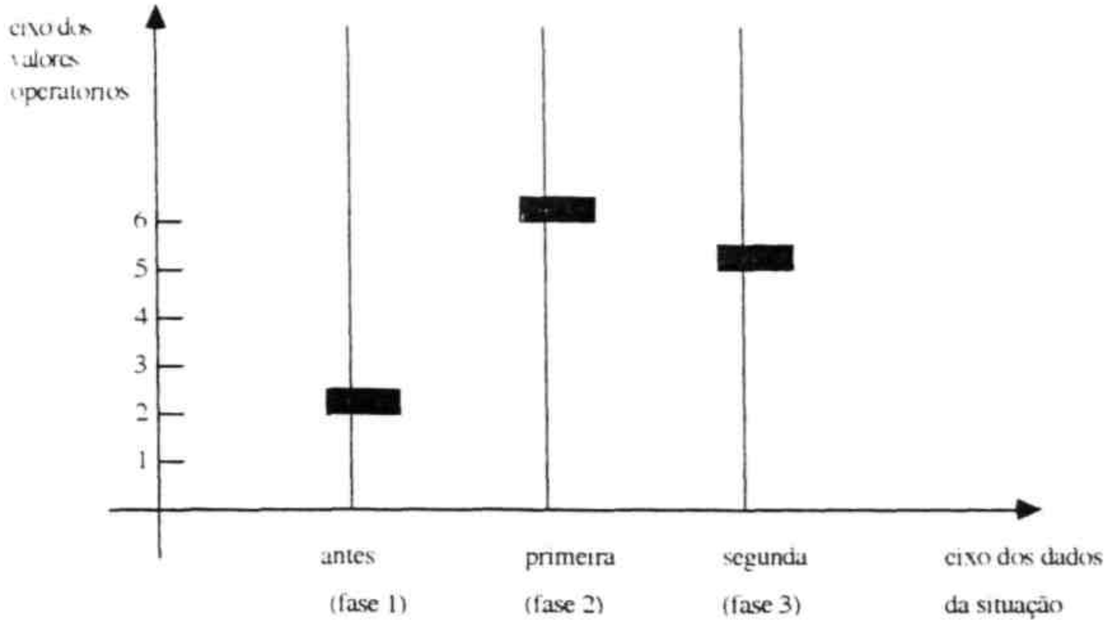
A articulação destas dimensões nos fornece uma representação da compreensão do enunciado orientado na direção da resolução do problema. Esta representação pode ser projetada num primeiro momento utilizando, como fundo, um desenho evocando a situação descrita no enunciado.

Nós obtemos assim um tipo de representação que pode ser proposta para todos os problemas aditivos, sem tomar em conta com antecedência a categoria do problema. Para que esta representação possa ser plenamente utilizada, ela deve ser proposta para os problemas a duas operações.

Por exemplo, seja o problema seguinte :

Pedro tem 2 duas bolinhas de gude. Ele joga duas partidas. Na primeira, ele ganha 4 bolinhas. Na segunda, ele perde 1 bolinha. Quantas bolinhas ele tem, após jogar as duas partidas?

A leitura do enunciado, com a ajuda da representação bi-dimensional permite ao mesmo tempo selecionar todos os dados numéricos e os organizar.



Os problemas aditivos nos levam a situações que são caracterizadas por fases. Cada uma destas fases é marcada por um valor de estado, e a passagem de uma para outra fase compreende dois valores de troca de estado, diretamente conversíveis num valor de transformação.
Este tipo de representação permite, ao mesmo tempo considerar todos os dados pertinentes para a resolução do problema, e os organizar de tal forma que a passagem do texto ao tratamento aditivo se opere naturalmente. Quando trabalhamos com a representação bi-dimensional junto às crianças da escola primária, a apresentamos num primeiro momento com a imagem da situação extra-matemática descrita no enunciado do problema.
Os problemas aditivos a duas operações podem parecer mais difíceis que os problemas a uma operação, uma vez que. para resolvê-los. temos algumas opções a fazer. Isto é. a escolha não recai somente na natureza da operação a efetuar, como também sobre os dois números que iremos considerar, entre os três que aparecem no enunciado do problema, para efetuarmos a primeira operação. E. desta escolha, resulta geralmente dois procedimentos diferentes de resolução, possíveis : um direto, que toma os dados numéricos segundo a sua ordem de aparição, e outro, que não respeita esta ordem.
Por exemplo, para o problema :
Um alpinista escala uma montanha e chega a 40 metros de altura.
Ele deve continuar sua escalada em duas etapas..
Na segunda etapa ele escorrega 20 metros e se encontra a 30 metros de altura.
O que ele fez durante a primeira etapa?

Dois procedimentos podem ser adotados para a resolução :

1) O primeiro, que toma os dados numéricos segundo a sua ordem de aparição no texto :

$$40 - 20 = 20$$

$$30 \quad 20 = 10$$

2) O segundo, que toma os dados numéricos segundo a ordem inversa a qual eles aparecem no texto:

$$30 + 20 = 50$$

$$50 - 40 = 10$$

Os problemas aditivos a duas operações apresentam a vantagem de desenvolver os dados relativos às relações entre os valores operatórios, e portanto, de melhor colocar em evidência o eixo dos dados da situação. O enunciado comporta, na realidade, mais dados concernentes as relações entre os valores operatórios quando tratamos com problemas a duas operações. Para melhor separar as transformações (mudanças de estado) e o desenvolvimento temporal, é importante trabalhar inicialmente problemas a duas operações, para depois propormos os problemas a uma operação. Em outras palavras, o caso de *não congruência* entre a seqüência de ações descritas no enunciado e a ordem do tratamento aritmético das informações numéricas do enunciado são mais importantes no caso de problemas a duas operações.

No final desta análise, temos como hipóteses :

- *as dificuldades encontradas pelos alunos, para a resolução dos problemas aditivos, são em grande parte, dificuldades de selação e de organização dos dados pertinentes.*
- *as dificuldades de seleção e de organização são particularmente importantes, quando não existe congruência na passagem do enunciado ao tratamento arirmético.*
- *as representações bi-dimensionais são representações que permitem efetuar esta seleção e esta organização.*
- *a introdução destas representações deve permitir à grande maioria dos alunos vencer as dificuldades de resolução.*
- *os alunos que serão beneficiados com uma aprendizagem de resolução de problemas, fazendo uso da representação bi-dimensional, utilizarão procedimentos diferentes de resolução e terão um número de acertos maior que os alunos que não serão beneficiados pos esta aprendizagem e disporão somente do enunciado.*

IV - Como foi introduzida, no ensino, a representação bi-dimensional

Para realizar nosso estudo, nós passamos a experiência em três escolas de diferentes níveis. Em cada escola trabalhamos com quatro classes : duas classes de 3ª série (CM1) e duas classes de 4ª série (CM2), sendo que, a cada nível, trabalhamos com uma classe experimental e outra que chamamos "testemunha".

Nós utilizamos duas formas diferentes de trabalho. A primeira, tradicional, apresentando diretamente o enunciado. A segunda, utilizando a representação bi-dimensional. com um eixo para a escala de números e um outro eixo para as etapas cronológicas descritas no enunciado. Com os alunos da classe "testemunha" passamos somente um questionário com enunciados de problemas. Com os alunos das classes experimentais nós passamos dois questionário e uma seqüência didática.

Passamos o primeiro questionário no início da experimentação, o segundo, após a seqüência didática. Para aplicarmos a seqüência didática, utilizamos 5 horas por classe, onde trabalhamos com quatro tipos de representações bi-dimensionais : duas com situação de deslocamento vertical (um personagem que se desloca de elevador, no edifício onde mora. e que escala uma montanha), duas com situação de deslocamento horizontal (um personagem que passeia na rua onde mora e que passeia de barco).

V - Alguns resultados do trabalho realizado junto aos alunos :

A comparação dos resultados entre o questionário inicial e o questionário final aplicado aos alunos pertencentes as classes experimentais, nos permitiu chegar a algumas constatações :

1 - Existe um grande aumento das taxas de acerto para cada problema, nas classes experimentais, no questionário final (passado após a seqüência didática).

- para os problemas *não-congruentes* a duas operações, passamos de uma taxa de acerto na ordem de 20% a uma taxa de acerto de 60% à 80%.
- para os prolemas congruentes a duas operações e para os problemas a uma operação não congruentes obtivemos também um taxa significativa de acertos.

2 - Estes aumentos de acerto são obtidos tanto na 3ª como na 4ª séries onde aplicamos a seqüência didática.

3 - Os resultados que obtivemos, com a utilização da representação bi-dimensional, foram nitidamente superiores aos resultados obtidos em outras pesquisas.

O suporte de uma representação bi-dimensional levou os alunos experimentais a adotar um tipo de procedimento (a inversão) para a resolução dos problemas, que praticamente não foi utilizado pelos alunos que não foram beneficiados por este suporte representativo (alunos pertencentes as classes "testemunhas" experimental antes da seqüência didática). Os alunos experimentais conseguiram separar a ordem de apresentação dos dados numéricos da ordem de tratamento aritmético destes dados, cada vez que o início do tratamento não coincide com o dado inicial da ordem cronológica.

VI - Estabilidade e profundidade das aquisições :

Um ano depois de termos passado a nossa experiências nas escolas, onde obtemos excelentes resultados, algumas questões surgiam :

- Como se comportariam os alunos das classes experimentais, um ano após terem trabalhado com a resolução de problemas, tendo como suporte uma representação bi-dimensional?
- Os alunos que seguiram a nossa seqüência de aprendizagem teriam melhores condições de resolver um problema *não congruente* a duas operações, onde a incógnita é o dado inicial ? Para isto voltamos a uma das escolas na qual tínhamos trabalhado no ano anterior, para apresentar alguns problemas deste tipo que são considerados difíceis, não somente para os alunos da escola primária como também para os que estão em classes mais avançadas.

Os resultados que obtivemos com esta última experência, nos deu uma visão clara, dos efeitos a longo prazo, do nosso ensinamento no ano anterior, efeitos que puderam ser observados em diferentes aspectos :

- os alunos experimentais, que foram beneficiados com o suporte de uma representação bi-dimensional (escala dos deslocamentos e eixo das etapas cronológicas) no ano precedente. tiveram melhor desempenho que os alunos da classe "testemunha" : no problema de bolinha de gude a duas operações, onde a incógnita é o dado inicial, obtivemos 10% de acerto na classe "testemunha", contra 59% na classe experimental. Este fenômeno se repetiu para todos os problemas que foram propostos para as duas populações diferentes.
- o suporte de uma representação dimensional conduziu estes mesmos alunos experimentais a adotar um tipo de procedimento (a inversão) que praticamente não apareceu na classe "testemunha", que não teve este suporte representativo.

A partir de uma observação de todos os resultados obtidos neste último trabalho realizado com os alunos, podemos concluir :

- para os alunos experimentais, nos podemos dizer que as representações utilizadas serviram como um *instrumento transicional* para a compreensão dos enunciados : estes alunos acertam muito mais os problemas que os alunos da classe "testemunha" sem fazer uso de desenhos e esquemas para chegar a solução.
- Os alunos da classe "testemunha" , mesmo utilizando desenhos e esquemas para resolver os problemas, tem um número de acertos muito menores que o dos alunos pertencentes a classe experimental.

Conclusão :

Nós partimos da hipótese que uma das causas principais das principais causas das dificuldades dos problemas aditivos seria a procura das operações que nos levam à compreensão dos enunciados. A compreensão de um enunciado de problema consiste na seleção dos dados pertinentes para a resolução e na organização destes dados. A seleção dos dados pertinentes e a organização destes dados são particularmente difíceis, uma vez que existe a *não-congruencia* entre a apresentação redacional que constitui o enunciado do problema e o tratamento aritmético que termina o processo de resolução.

Considerando esta hipótese, o problema didático consiste em encontrar um meio que permita efetuar estas duas operações, seleção e organização dos dados pertinentes, quando existe ou não congruência entre a apresentação redacional do enunciado e o tratamento aritmético da resolução.

Achamos que uma representação, permitindo ao mesmo tempo separar e articular estes dois tipos de dados pertinentes que encontramos em toda apresentação redacional de um problema aditivo, os dados relativo aos valores operatórios dos números e aqueles que se referem as relações entre estes dados, deveria permitir uma aprendizagem das operações de seleção e de organização. Nós observamos que esta representação bi-dimensional não significa a representação de uma situação extra-matemática. nem um instrumento para o tratamento matemático, como pode ser. por exemplo, a reta dos relativos.

Nossa experiência consistiu então em propor este instrumento representativo aos alunos e a ensinar à eles a sua utilização. Os resultados obtidos tanto na 3ª como na 4ª séries, em cima de problemas reconhecidos como os mais difíceis nas diferentes pesquisas, *os fortemente não-conçruentes.* mostram um aumento significativo de acerto. Este aumento apresenta três características:

- ele é extremamente importante para todos os problemas, uma vez que nós passamos de uma taxa de 10% ou de 20% de acerto antes, para uma taxa de 60% ou de 60% após a seqüência didática.
- ele é obtido através de um ensinamento de pequena duração, uma vez que este ensinamento é feito em apenas 5 períodos de uma hora escolar.
- ele é estável, uma vez que um ano depois pudemos verificar a manutenção das taxas de acerto e a facilidade na resolução por parte dos alunos experimentais.

Bibliografia

BEDNARZ N., JANV1ER B.D.. (1985), Apport des représentations dans 1'aprentissage de concepts arithmétiques impliquant du dynamisme : les opérations dans le sens reconstruction d'une transformation. *Sérninaire sur la Représentation,nº 4*

BOLON J.. (1991), *Lecture d'images dans des manuels de CP et CE1.* Versailles. **1UFM.**

CAMPBELL P. (1978). Texbook pictures and first-grade children's perception of Mathematical Relationships. In *Jounalfor Research in Mathematics Education,* novembre. p.368-374.

CARPENTER T.P.. MOSER J. (1982), The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.), *Addition and Subtraction : A coqnitive perspective,* p. 9-24. Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.

DAMM R., (1990), Le rôle de le représentation dans la résolution des problèmes additifs, in *Proceedings Fourteenth PME conference, III***.**

DENIS M. (1982), Représentation imagée et résolution de problèmes. *Révue Française de Pédagogie, 60* , p. 19-29.

DUVAL R., (1986), *Lecture et compréhension des textes : modeles théoriques et exigences didactiques,* Strasbourg, IREM.

DUVAL R., (1988), "Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : Introduction aux problèmes de congruence", *Annalles de Didactique et de Sciences Cognitives",* IREM de Strasbourg, vol I, p. 7-27.

DUVAL R., (1990), Représentation of Texts, problems for research and prospects for education, in M Poelders (ED) *Literacy Acquisition* Lier, Van IN C&C, p. 161-169.

DUVAL R., (1991), Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* **vol** 4. (pp. 63-196). Strasbourg, IREM.

ESCARABAJAL M.C. (1988), Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques. *Révue Française de Pédagogie, 82,* p. 15-21.

ESFAHANI E. (1989), L'*aspect sémantique des problèmes additifs.* These de doctorat: Université Paris VII.

FISCHER J.P., à paraitre *Annales de Didaaique et de Sciences Cognitives Irem de Strasbourg.* La résolution des problèmes arithmétiques verbaux.

FUSON K. C. WILLIS G.B. (1988), Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80,* p. 192-201.

HEFENDEHL-HEBEKER L.. (1990), Réflexions et expériences sur l'introduction des nombres négatifs. *Annales de Didactique et de sciences Cognitives.* vol. 3, p.75-102. Strasbourg. IREM.

LEWIS A.B.(1989), Training students to represem arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81.* p.521-531.

MARTHE P. (1982). *Problèmes de type additifet appropriation par l'élève des groupes additifs (Z,+) et (D, +) entiers relatifs et decimaux relatifs.* These doctorat de 3ème cycle, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

NESHER P. (1983), Leveis of Description in the Analysis of Addition and Subtraction word problems. In Carpenter T.P., Moser J.M., ROMBERG *T.(Eds)., Addition and subtraction : A cognitive perspective.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

PLUVINAGE F. (1990), Didactique de la résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 3, p.7-34, Strasbourg, IREM.

POLYA G., (1965), *Comment poser et résoudre un problème,* Dunod, Paris.

RILEY M.S., GREENO J.G., HELLER J. (1983), Development of children's problem-solving ability in arithmetic. *The development of mathematical thinking,* Ed H. P. Ginsburg, Academic-Press, p. 153-**196.**

VERGNAUD G. & DURAND C. (1976), Structures additifs et complexité psychogénétique. *Révue Française de Pédagogie,* vol 36. p.28-43.

VERGNAUD G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. CARPENTER, J.M. MOSER & T.A. ROMBERG (Eds.). *Addition and Subtraction : A cognitive perspective,* p.39-57. Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.

VERGNAUD G. (1989), Psychologic du développement cognitif et didactique des mathématiques. un exemple : les structures additives. *Petit X,* vol 22. Irem de Grenoble,p.51-69.

O CONCEITO DE PROPORÇÃO EM CRIANÇAS: IMPLICAÇÕES DA PSICOLOGIA COGNITIVA PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Psicologia
Mestrado em Psicologia

O conceito de proporção desempenha papel importante nas situações de vida diária. Uma pessoa precisa, por exemplo, usar proporções para determinar o custo relativo de dois produtos à venda em diferentes quantidades, ou para descobrir a distância entre dois lugares representados em um mapa, ou para calcular a quantidade de ingredientes em uma receita para um certo número de pessoas, ou ainda para decidir qual, dentre dois carros é o mais rápido.

Em educação, o conceito de proporção é relevante em programas de matemática e ciências. sendo a base para o ensino, compreensão e aplicação de conceitos diversos (e.g., fração, porcentagem, densidade, velocidade) que requerem o reconhecimento de similaridades estruturais entre duas situações diferentes.

Em psicologia, o conceito de proporcionalidade está relacionado ao desenvolvimento cognitivo, cuja aquisição marca a passagem das operações concretas para as operações formais. A aquisição deste conceito tem sido tratada como um fenômeno tudo-ou-nada: crianças não possuem pensamento proporcional, enquanto adolescentes o possuem. Duas conseqüências decorrem deste enfoque. Uma, refere-se à pesquisa em psicologia do desenvolvimento cognitivo, na qual a maioria dos estudos investiga o pensamento proporcional em adolescentes, sendo pouco explorado as noções iniciais que a criança tem sobre proporção. A outra, reflete-se nas propostas educacionais, onde o ensino de proporção só é iniciado por volta da 5a. e 6a. série do primeiro grau (10-11 anos), acreditando-se que nas séries anteriores é impossível ensinar-se tal conceito devido à incapacidade da criança em compreendê-lo.

Esta posição encontra respaldo sobretudo nos estudos conduzidos por Piaget e colaboradores (Piaget & Inhelder, 1975; Inhelder & Piaget, 1976).

Entretanto, apesar de tradicionalmente a compreensão de proporção ser considerada uma aquisição tardia, existem evidências de que crianças são capazes de fazer julgamentos proporcionais desde os 6-7 anos (Muller, 1978; Spinillo, 1990; Spinillo & Bryant, 1989, 1990, 1991, 1993); de aprender sobre proporções através de situações de treinamento (Muller, 1979; Siegler & Vago, 1978; Spinillo, em andamento) e através de atividades em sala de aula (Brink & Streefland, 1979). Os resultados desses estudos contribuem para um novo enfoque acerca da lógica da criança e da possibilidade de se beneficiarem de instruções específicas sobre conceitos matemáticos, extraindo-se implicações educacionais relevantes para a educação matemática.

AS RELAÇÕES ENVOLVIDAS NO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Expenmentos com crianças sobre proporcionalidade variam desde problemas relativos a comparações entre recipientes com água em diferentes quantidades e proporções (e.g., Bruner & Kenney, 1966) até problemas complexos, envolvendo leis físicas (e.g., Piaget & Inhelder, 1975; Inhelder & Piaget. 1976) que requerem a coordenação de dimensões diferentes. Todos esses problemas, entretanto, apresentam um aspecto em comum: para resolvê-los a criança precisa fazer julgamentos acerca das relações de segunda-ordem, ou usando os termos de Piaget & Inhelder (1975), 'relações entre relações'.

As relações de segunda-ordem consistem na relação entre duas ou mais relações de primeira-ordem; e sua importância em julgamentos proporcionais tem sido amplamente reconhecida e apontada como a causa das dificuldades que as crianças apresentam em tarefas de proporção. Contudo, pouca atenção tem sido dada às relações de pnmetra-oraem que são o ponto de partida do pensamento proporcional e que alguns estudiosos consideram como uma das possíveis causas desta dificuldade (e.g., Spinillo, no prelo).

Exemplos das relações de primeira e de segunda-ordem são ilustrados nas tarefas abaixo, utilizadas em pesquisas na área:

(1) Sr. Altão e Sr. Baixinho (Karplus & Peterson, 1970)

Dois bonecos eram apresentados, Sr. Altão e Sr. Baixinho, cujas alturas podiam ser medidas em botões e em clips. A altura do Sr. Baixinho era de quatro botões ou de seis clips. A altura do Sr. Altão era de seis botões. A tarefa da criança consistia em determinar qual seria a altura do Sr. Altão em clips. As relações de primeira-ordem são aquelas entre o número de clips e botões em cada um dos bonecos, o que permite inferir a altura do Sr. Altão em clips. A relação de segunda-ordem consiste em comparar essas duas relações para verificar se são equivalentes ou não. Este tipo de tarefa é chamado de <u>Tarefa de Incógnita</u>, onde três valores são dados, sendo necessário determinar o valor da incógnita, mantendo-se no segundo par de valores a mesma relação proporcional verificada no primeiro par (relação de primeira-ordem).

(2) Comparando recipientes com água (Bruner & Kenney (1966)

Nesta tarefa, a criança tinha que determinar qual, dentre dois recipientes com água, era o mais cheio. As relações de primeira-ordem seriam aquelas entre o espaço ocupado por água e o espaço vazio em cada recipiente (ou entre água e volume total). A relação de segunda-ordem consistia em comparar as relações água-espaço vazio em cada recipiente. Este tipo de tarefa é chamado de <u>Tarefa de Comparação</u>, onde os quatro valores são dados e o sujeito precisa determinar se existe ou não uma equivalência (relação de segunda-ordem) entre o primeiro e o segundo par de valores (relações de primeira-ordem).

Apesar das diferenças entre os dois tipos de tarefas apresentados acima ambos têm um aspecto em comum: para resolvê-los é preciso estabelecer relações de segunda-ordem, ou seja, relações entre relações de primeira-ordem.

A seguir serão focalizadas as relações de primeira-ordem. considerando dois aspectos: a natureza dessas relações e as estratégias utilizadas pelas crianças que são documentadas na literatura.

A natureza das relações de primeira-ordem

As relações de primeira-ordem podem ser estabelecidas através de *relações parte-parte* ou *parte-todo.* As primeiras consistem em partes diretamente comparáveis de um mesmo todo. Podem ser exemplificadas na tarefa de quantificação de probabilidade de Piaget & Inhelder (1975), onde a criança poderia comparar o número de cartas com cruz e o número de cartas sem cruz em cada monte para decidir em qual deles haveria maior chance de tirar uma carta com cruz ou se a chance seria a mesma nos dois montes. O mesmo tipo de análise pode ser feito na tarefa dos recipeintes de Bruner & Kenney (1966), onde a criança poderia comparar o espaço vazio com o espaço ocupado pela água em cada recipiente.

Nas relações parte-todo, entretanto, a parte e o todo não são diretamente comparáveis, embora tenham que ser simultaneamente considerados. Por exemplo, na tarefa de probabilidade de Piaget, a criança compara o número de cartas com cruz ao número total de cartas em cada monte; ou na tarefa de Bruner & Kenney (1966) compara o espaço de água com o volume total do recipiente.

Em outras palavras, nas relações parte-parte a criança estabelece as comparações iniciais (relações de primeira-ordem) em termos de razão, enquanto que nas relações parte-todo as comparações são estabelecidas em termos de fração.

Mas qual dessas relações é a mais fácil? Dentro da teoria piagetiana existem evidências de que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações entre a parte e o todo, como demonstram os estudos sobre inclusão de classes (Piaget & Szeminska, 1971). Spinillo (1990 e no prelo), verificou que a maioria das tarefas de proporção utilizadas nas pesquisas na área, leva a criança a tratar as relações de primeira-ordem em termos parte-todo, que são mais difíceis que as parte-parte. Segundo a autora, este fato sugere que as dificuldades das crianças em tarefas de proporção podem residir nas difíceis relações iniciais do tipo parte-todo, e não necessariamente nas relações de segunda-ordem. Seriam as crianças capazes de estabelecer relações de segunda-ordem (proporção) caso as relações iniciais (primeira-ordem) fossem fáceis (parte-parte)?

Pesquisas recentes (Spinillo, 1990; Spinillo & Bryant, 1989, 1990, 1991) em que as tarefas envolviam relações de primeira-ordem do tipo parte-parte mostraram que as crianças desde os 6-7 anos faziam julgamentos proporcionais adequadamente, i.e., estabeleciam as relações de segunda-ordem Ao que parece.'portanto, nem todos os julgamentos proporcionais são inacessíveis à lógica da cnança e as relações de segunda-ordem não são um problema quando as relações de pnmeira-ordem são do tipo parte-parte.

AS ESTRATÉGIAS USADAS PELAS CRIANÇAS EM DE TAREFAS DE PROPORÇÃO

*

Ao fazer-se a distinção entre relações de pnmeira e de segunda-ordem, é possível compreender melhor os diferentes tipos de estratégias adotados pelas crianças ao tentarem resolver tarefas de . proporção A análise aqui conduzida só se adequa a tarefas de proporção do tipo comparação e que envolvem dimensões complementares (partes de um mesmo todo); não se aplicando a tarefas de incógnita[1] ou tarefas com dimensões não complementares (e.g., clips x botões; distância x peso; distância x tempo; preço x peso).

Noelting (1980a.b) verificou que as relações de primeira-ordem podem ser estabelecidas em duas direções: (1) entre valores de um mesmo par (e.g., A:B e C:D); ou (2) entre o primeiro valor de cada par (A:C) e entre o segundo valor de cada par (B:D). A direção (1), corresponde a uma estratégia *Within* (A:B e C:D); e a direção (2) é uma estratégia *Between* (A:C e B:D). Essas estratégias refletem a maneira como são estabelecidas as relações de primeira-ordem.

Estudos recentes (e.g., Spinillo, 1990, Spinillo & Bryant, 1991 e 1993) com crianças de 4-8 anos de idade documentam um outro tipo de estratégia que baseia-se no referencial de 'metade' que é usado pela criança como um ponto de referência para decidir a equivalência ou não-equivalência entre razões representadas por quantidades contínuas e discretas. O uso desta estratégia é apresentado nos estudos descritos a seguir.

AS NOÇÕES INICIAIS DAS CRIANÇAS SOBRE PROPORÇÃO

Spinillo (1990) investigou o desenvolvimento do conceito de proporção em crianças (4-8 anos) através de uma série de experimentos. Dos sete experimentos realizados, alguns serão descritos sumariamente a seguir, apresentando-se os principais resultados neles obtidos acerca das noções iniciais que crianças nesta faixa etária apresentam sobre proporção.

[1] Em tarefas de incógnita freqüentemente observa-se o uso de estratégias aditivas de resolução como documentado em diversos estudos (e.g., Carraher. Canaher. Schliemann & Ruiz . 1986). Essas estratégias não serão discutidas neste relato, visto que parecem estar associadas mais ao tipo de tarefa apresentado (numérica e do tipo incógnita) do que às relações de primeira e de segunda-ordem.

De modo geral, as tarefas nesses experimentos não requerem cálculos numéricos, e são do tipo comparação. As dimensões são complementares (faziam parte de um mesmo todo) e o paradigma experimental adotado permite que a criança estabeleça as comparações necessárias em termos parte-parte, sendo portanto, mais fáceis do que as comparações parte-todo usualmente adotadas nas pesquisas sobre o assunto.

Experimentos com quantidades contínuas

A tarefa basicamente consistia em determinar qual dentre os dois retângulos maiores (alternativas) estava representado no retângulo menor (modelo), justificando suas escolhas. As Figuras 1 e 2 ilustram o material usado. A resolução desta tarefa requeria da criança estabelecer as relações de primeira-ordem (branco:preto em cada alternativa) e depois decidir qual delas tinha a mesma relação branco-preto que o modelo (relação de segunda-ordem).

Figura 1 e 2 +/- aqui

Três tipos de comparações foram exploradas nestes estudos:

(1) *Comparação Metade:* 'metade' vs. 'mais/menos que metade', onde o referencial de metade estava explicitamente envolvido. Exemplos: 278 azul vs. 4/8 azul; 4/8 azul vs. 6/8 azul.

(2) *Comparação Atravessa Metade:* 'menos que metade' vs. 'mais que metade'. Eram assim chamadas por 'atravessarem' os limites de 'metade'. Exemplos: 3/8 azul vs. 5/8 azul.

(3) *Comparação Não Atravessa Metade:* ambas as alternativas apresentavam 'menos que metade' ou 'mais que metade'. Eram assim chamadas porque em ambas as alternativas as quantidades em Exemplos: 5/8 azul vs. 7/8 azul ou 1/8 azul vs. 3/8 azul.

Justificativas proporcionais são exemplificadas nas passagens abaixo:

Comparação Atravessa metade 3/8
(modelo) e 3/8 vs. 5/8 (alternativas)

"Porque no cartão pequeno (modelo) tem mais branco que preto e este cartão grande (alternativa 3/8) tem mais branco que preto também. Lá (alternativa S/8), é mais preto que branco, não combina. É diferente."

Nas *Comparações Metade* observou-se o uso do referencial de 'metade':

4/8 (modelo) e 4/8 vs. 6/8 (alternativas)

"Metade branco e metade preto no cartãozinho (modelo). A mesma coisa aqui (alternativa 4/8): metade branco e metade preto. Lá (alternativa 6/8) tem mais da metade preto e menos da metade branco. Não combina com o cartãozinho (modelo) porque nele o preto é do mesmo tamanho que o branco, metade e metade."

2/8 (modelo) e 4/8 vs. 2/8 (alternativas)

"Aqui (2/8 alternativa) porque tem mais branco que preto. E mais da metade branco e menos da metade preto Feito esse(modelo). Aqui (alternativa 2/8) parece aue tem mais preto que lá (modelo) por causa de que o cartão é maiorzão e fica tudo maiorzão dentro dele. Mas e a mesma coisa que lá (modelo)2. Não pode ser esse (alternativa 4/8) porque tem metade branco e metade preto.

Verifica-se que as crianças estabelecem as relações de primeira-ordem através de uma comparação interna entre as partes preta e branca no modelo e em cada uma das alternativas (e.g., Preto>Branco ou Preto<Branco ou Preto=Branco). Compara, então, estas relações, determinando em qual das duas alternativas existe a mesma relação preto:branco como no modelo. Esta comparação trata-se de uma relação de segunda-ordem (estabelecida entre duas relações de * primeira-ordem).

Nesses experimentos, as crianças mostravam, desde os 6 anos. uma compreensão acerca ' de julgamentos proporcionais, usando o referencial de 'metade' em seus julgamentos. Outros experimentos. neste mesmo estudo (Spinilio. 1990), investigou se as crianças continuariam usando esta estratégia caso os estímulos apresentados fossem constituidos de forma tal que seria perceptualmente difícil para a criança identificar os limites da 'metade'.

Experimentos examinando o papel da simetria no uso da estratégia de 'metade'

Este aspecto foi então examinado através de dois experimentos onde as alternativas e o modelo eram seccionados em três partes: uma parte branca no meio de duas partes pretas como mostrado na Figura 3.

Fgura 3 +/- aqui

Às vezes o arranjo das cores no modelo e nas alternativas era simétrico e às vezes a era assimétrico. Desta maneira a base perceptual para os julgamentos através do referencial de 'metade' era minimizada. O paradigma experimental consistia no mesmo adotado nos experimentos anteriores descritos acima.

Os resultados demonstraram que novamente as criança usavam julgamentos baseados em relações parte-parte. Dois tipos de estratégias foram observados:

(1) Estratégia 1 (adição): adiciona as partes pretas e compara com a parte central branca. As crianças que adotavam este tipo de adição ainda usavam 'metade' como ponto de referência.

(2) Estratégia 2 (não-adição): não adicionavam as partes pretas e, desconsiderando uma delas, comparavam uma parte preta à parte central branca.

Em geral, as crianças de 8 anos usavam a Estratégia 1 (adição) e eram capazes de mentalmente combinar as duas partes pretas, utilizando o referencial de 'metade', fazendo

2 Importante verificar que a criança compreende que apesar da quantidade de preto na alternativa, em termos absolutos, ser maior que a quantidade de preto no modelo, a razão preto:branco permanece a mesma.

julgamentos proporcionais corretos nas Comparações Metade mas falhavam nas que Não Atravessa Metade. As crianças de 6 e 7 anos, entretanto, usavam a Estratégia 2 (não adição) por serem incapazes de fazer adição mental entre as duas partes pretas.

Quando os estimulos eram assimétricos, mesmo as crianças de 8 anos não conseguiam fazer a adição mental, usando apenas a Estratégia 2, não adotando o referencial de 'metade' em seus julgamentos.

Comparando-se o desempenho nestas tarefas com das crianças de mesma idade nos experimentos antenores (onde os limites de 'metade' eram facilmente identificáveis), verificou-se que poucas crianças de 6 anos emitiam julgamentos proporcionais, em contraste com a alta freqüência de julgamentos proporcionais observados naquelas tarefas. O fato dos limites de 'metade' serem perceptualmente difíceis impede que as crianças usem o referencial de 'metade' como estratégia, levando a um declínio na freqüência de julgamentos proporcionais e um aumento no número de respostas ao acaso.

A simetria, portanto, desempenha papel importante no uso desta estratégia que favorece o aparecimento de julgamentos proporcionais; enquanto a assimetria dificulta que tal fato ocorra.

Esses dados sugerem que quando as relações de primeira-ordem se tomam mais complexas (partes separadas e assimetria), mais difícil é para a criança estabelecer as relações de segunda-ordem e então emitir julgamentos proporcionais. Parece portanto, que as dificuldades das crianças residem mais nas relações de primeira-ordem do que nas de segunda-ordem.

Experimentos com quantidades contínuas e discretas

A Figura 4 ilustra o material usado em outro experimento neste mesmo estudo. 'Fatias' de bolo de chocolate (parte preta) e baunilha (parte branca)' eram as alternativas, e o modelo era uma fotografia do bolo todo (redondo) antes de ser fatiado. Como nas tarefas anteriores, a criança era solicitada a determinar qual das duas alternativas combinava com o modelo, descobrindo a qual dos dois conjuntos de fatias pertencia à fotografia, justificando sua escolha.

Figura 4 +/ - aqui

Passagens com as justificativas proporcionais das crianças são exemplificadas a seguir:

Comparação Atrevessa Metade ('mais que metade' vs. 'menos que metade')
4/6 (foto) e 4:2 vs. 2:4 (bolos fatiados)

"Mais preto que branco (foto e bolo fatiado 4:2), e lá (bolo fatiado 2:4) mais branco que preto. Este bolo aqui (bolo fatiado 4:2) é o contrário do bolo aqui (foto), porque ele tem menos preto que branco. É que ele tem só dois pretos contra quatro brancos (refre-se as fatias de bolo 2:4), e nesse de lá (bolo fatiado 4:2) tem quatro brancos contra dois pretos."

Comparação Metade ('metade' vs. 'menos que metade')

3/6 (foto) e 3:3 vs 2:4 (bolos fatiados)

"Esses dois é o mesmo (foto e bolo fatiado 3:3) porque tem a mesma quantidade de preto e de branco nos dois. Eu não posso dizer quantas fatias que tem aqui (refere-se a foto), mas acho que deve ter três fatias pretas e três brancas. Porque na mesa. esse bolo (3:3) é feito de três pedaços pretos e três brancos. Então, deve ter três pretos e três brancos aqui também (foto) Eles são os mesmos (refere-se às partes preta e branca na foto), metade preto e metade branco. Lá (bolo fatiado 2:4) tem só dois pretos, e dois pretos é menos que metade."

Mesmo envolvendo quantidades discretas, venfica-se que o referencial de 'metade' é usado pela criança em seus julgamentos.

Os autores concluíram que a partir dos 6 anos as crianças são capazes de fazer julgamentos proporcionais quando as relações de primeira-ordem são fáceis de ser estabelecidas (em termos parte-parte) e que usam o referencial 'metade' como estratégia para decidir a equivalência ou não equivalência entre uma das escolhas e o modelo.

O DESENVOLVIMENTO E AS NOÇÕES INICIAIS DAS CRIANÇAS SOBRE PROPORÇÃO

Três principais conclusões podem ser extraídas desses estudos: (1) crianças de 6 anos podem fazer julgamentos proporcionais quando as relações de primeira-ordem são acessíveis à compreensão da criança; (2) as dificuldades que apresentam residem muito mais nas relações de primeria-ordem do que nas de segunda-ordem; e (3) evidencia o papel importante do referencial de 'metade' na resolução de tarefas de proporção, auxiliando no reconhecimento de similaridades estruturais entre duas situações apesar de diferenças na forma, tamanho e número de elementos.

De maneira geral, pareça haver uma progressão quanto ao desenvolvimento do conceito de proporção na faixa etária investigada:

(1) as crianças de 4-5 anos não conseguem estabelecer relações entre relações mesmo quando as relações de primeira-ordem são fáceis. Elas compreendem as relações de primeira-ordem, mas não as aplicam a julgamentos proporcionais;

(2) aos 6 anos estabelecem relações entre relações. Esta habilidade, entretanto, emerge de maneira global: fornecem um mesmo tipo de julgamento proporcional para diferentes tipos de comparações entre razões; e

(3) aos 7-8 anos adotam julgamentos proporcionais mais específicos que variam em função dos diferentes tipos de comparações entre razões. Isto sugere um pensamento proporcional mais elaborado do que aos 6 anos.

DISCUSSÃO

MEC / INEP
SIBE - CIBEC

Apesar de julgamentos proporcionais encontrarem-se fortemente associados às relações parte-todo. estes podem ser estabelecidos através de relações parte-parte que são mais fáceis. Maior ênfase precisa ser dada à natureza das relações de primeira-ordem para uma compreensão das causas das dificuldades que parecem estar associadas a dificuldades com as relações de primeira-ordem e não apenas com as de segunda-ordem. Esta nova forma de encarar as causas dessas dificuldades promove um nivel de reflexão bem diferente daquele tradicionalmente adotado pela literatura, levando-nos a questionar se o conceito de proporção é, de fato, uma aquisição exclusiva das operações formais. Implicações diversas podem ser extraídas em função desta linha de argumentação.

Implicações Educacionais

Em nossas escolas, o ensino de proporção ocorre por volta dos 11 anos, enfatizando o uso do algoritmo da Regra de Três. Caberia nos questionarmos se crianças mais novas não se beneficiariam da instrução sobre proporção se fossem oferecidas situações em que pudessem utilizar estimativas e o referencial de 'metade' para reconhecer e refletir acerca da equivalência estrutural entre duas quantidades representadas em tamanhos e formas diferentes. Brink & Streefland (1979) apresentam exemplos de situações no contexto de sala de aula com crianças entre 6-8 anos de idade, demonstrando que razão e proporção podem ser ensinadas a crianças dessa faixa etária.

Poderíamos ainda supor que o ensino introdutório sobre proporção deveria enfatizar a distinção entre relações de primeira e de segunda-ordem, sendo exploradas tarefas com dimensões complementares comparadas em termos parte-parte. Essas relações de primeira-ordem poderiam envolver quantidades 'menor que metade'', 'igual a metade' e 'maior que metade', onde o referencial de 'metade' pudesse servir como estratégia para a solução de problemas simples com proporção.

O ensino introdutório poderia basear-se em uma menor ênfase em quantificações numéricas precisas, estimulando o uso de estimativas e julgamentos qualitativos. Assim, é desejável que o professor proponha atividades, enfatizando mais os princípios conceituais do que as habilidades de cálculo. Estimativas e comparações qualitativas do tipo *'maior/menor do que', 'igual a'* podem ser exploradas em atividades diversas.

Estimativas auxiliam a direcionar e a antecipar o pensamento, contribuindo para a passagem de uma abordagem qualitativa para outra, de natureza quantitativa, desejável em julgamentos proporcionais mais elaborados. O solucionador pode iniciar o processo de resolução usando uma estratégia semi-numérica que propicia a aquisição da proporção em direção a formas quantitativas mais precisas.

Alguns estudos mostram que tarefas de incógnita são geralmente difíceis que tarefas de comparação. As tarefas de incógnita requerem quantificações numéricas precisas, enquanto tarefas de comparação favorecem o uso de comparações qualitativas. Assim, pode-se inicialmente propor tarefas de comparações em que as relações de primeira-ordem envolvem partes que podem ser diretamente comparadas entre si. a partir de julgamentos qualitativos e de pontos de referência.

Como visto nos estudos apresentados, os pontos de referência auxiliam nas comparações entre as relações de primeira-ordem em tarefas de proporção. O referencial de 'metade', por exemplo, é um referencial importante para decidir, em termos qualitativos e semi-qualitativos, acerca da equivalência ou não-equivalència entre razões.

Implicações Metodológicas

- *Para a pesquisa em psicologia cognitiva:*

Aspectos metodológicos precisam ser consideradas nas investigações sobre proporção em . crianças. Primeiro, o paradigma experimental usado por Spinillo & Bryant (1991) parece ser um recurso metodológico que pode evitar que a criança trate as relações de primeira-ordem exclusivamente em termos parte-todo; como ocorre com a maioria das tarefas de proporção. Os resultados apresentados e os aspectos aqui discutidos indicam que as crianças seriam mais bem sucedidas se pudessem resolver problemas de proporção com base em relações de primeira-ordem que envolvessem relações parte-parte (razão) e não parte-todo (fração).

Segundo, menor ênfase deveria ser dada às quantificações numéricas, principalmente quando se trata de crianças que ainda não dominam habilidades de cálculos. Tarefas não-numéricas, como aquelas oferecidas por Müller (1979) e Spinillo & Bryant (1991), podem auxiliar na investigação das noções iniciais sobre proporção.

Apesar dos pontos cruciais discutidos quanto à aquisição e desenvolvimento do conceito de proporção, muito ainda precisa ser investigado. Pesquisas precisam ser conduzidas no sentido de comparar o desempenho de (1) diferentes grupos de crianças resolvendo os mesmos problemas, onde a variável de interesse seria os aspectos cognitivos que influenciam o desempenho; e (2) mesmos sujeitos resolvendo problemas diferentes, onde a variável de interesse seria a estrutura dos problemas. De modo geral, é relevante explorar as noções inicias que a criança possui sobre proporção, ao invés da freqüente ênfase naquilo que ela não pode fazer.

- Para a *pesquisa em educação matemática:*

Estudos de intervenção precisam ser conduzidos em duas linhas: estudos de treinamento e intervenções em sala de aula.

Estudos de treinamento, de modo geral, permitem estabelecer relações entre dois campos importantes da psicologia; cognição e aprendizagem. De maneira específica, estudos de treinamento envolvendo o conceito de proporção podem fornecer informações simportantes sobre a capacidade da criança em aprender sobre proporção e em especial examinando se o ensino da estratégia de 'metade' levaria a criança a fornecer mais julgamentos proporcionais. Neste sentido, a instrução surge como fator relevante para o desenvolvimento cognitivo, não apenas prescrevendo o que pode ser ensinado, mas compreendendo os fatores específicos que o impulsionam. Estudos desta natureza permitem ainda compreender relações causais entre fenômenos, isto é, explorar que fatores podem gerar a compreensão de determinados conceitos

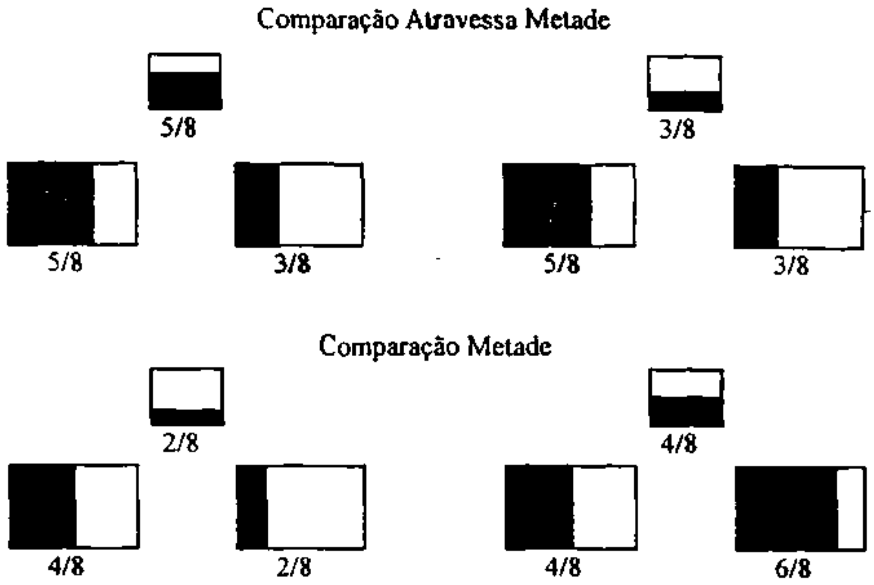
Intervenções em sala de aula permitem avaliar a adequação e a viabilidade de se iniciar o ensino de proporção em crianças nas séries iniciais do primeiro grau ao invés de aguardar até as séries mais adiantadas, como usualmente ocorre em nossas escolas. Experiências educacionais poderiam ser conduzidas, explorando situações diversas, como as propostas por Spinillo (1993).

REFERENCIAS

Brink. F J. van den & Streefland. L. (1979). Young children (6-8) - Ratio and proportion.
Educational Studies in Mathematics. 10. 403-420 Bruner. J.S. & Kenney, H (1966). On relational concepts. In J.S. Bruner: RR Olver & PM.
Greenfield (Eds), Studies in cognitive growth (168-182). New York: John Willey & Sons.
Carraher, T.N.; Carraher, D.W.; Schliemann. AD. & Ruiz, E.L. (1986). Proprocionalidade na educação científica e matemática. I: Quantidades medidas por razões. Revista de Estudos Pedagógicos. 67 (155), 93-107. Inhelder. B. & Piaget, J. (1976). Da lógica da criança ã lógica do adolescente. São Paulo:
Livraria Pioneira. Karplus. R. & Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school ll:
Ratio. a survey. School-Science and Mathematics. 70 (9), 813-820. Karplus, R.; Pulos, S. & Stage. E.K. (1983). Proportional reasoning in earty adolescents. In R.
Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (45-90).
New York: Academic Press. Muller, D. J. (1979). Perceptual reasoning and proportion. Mathematics Teaching, 87, 20-22. Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I -
Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, 217-253. Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part ll
- Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. Educational Studies in Mathematics, 11, 331-363. Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. New York: W.
Norton. Piaget, J. & Szeminska, A. (1971). A gênese do número na criança. Rio de janeiro: Zahar
Editores. Siegler. R.S. & Vago, S. (1978). The development of proportionality concept: Judging relative
fullness. Journal of Experimental Child Psychology, 25, 371-395. Spinillo, AG. (1990). The development of the concept of proportion in young children. Tese de
Doutorado. University of Oxford, Oxford, U.K. Spinillo, AG. (1992). A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do
conceito de proporção. Psicologia: Teoria e Pesquisa, 8 (3), pp. 305-317. Spinillo, A. G. (1993). Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: Schliemann, A.D.;
Carraher, D.W.; Spinillo, A.G.; Meira, LL & Falcão, J.T.R. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora Universitária, UFPE. Spinillo, AG. (no prelo). As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: Um outra
explicação quanto às dificuldades das crianças. Psicologia: Teoria e Pesquisa.

Somillo. A. G. (em preparação). O conceito de proporção em crianças: Um estudo de treinamento. Projeto de pesquisa financiado pelo CNPq. Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1989). The initial understanding of ratio and proportion. Trabalho apresentado e publicado nos Resumos da 13a. International Conference for the Psvcholoqy of Mathematics Education. Paris. Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1991). Children's proportional judgements: The importance of 'half. Child Development, 62, 427-440. Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1993). Julgamentos proporcionais em crianças: Comparando o desempenho e as justificativas me tarefas numéricas e não-numéricas. 45a. Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), p. 884, Recife, PE, Julho.

Figura 1 e 2 Comparações entre alternativas com o mesmo tamanho absoluto e com tamanhos absolutos diferentes (Spinillo & Bryant, 1991).



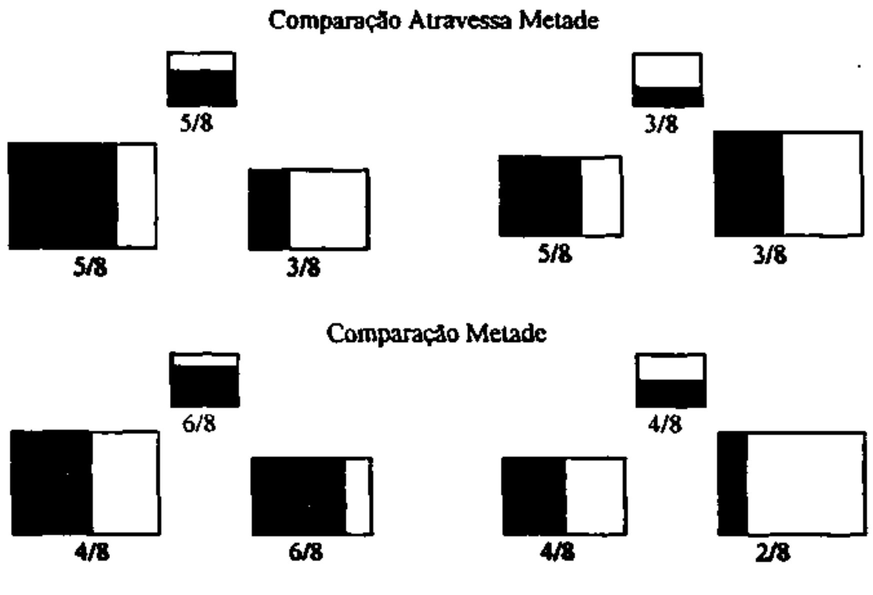


FIGURA 3. SIMETRIA E ASSIMETRIA

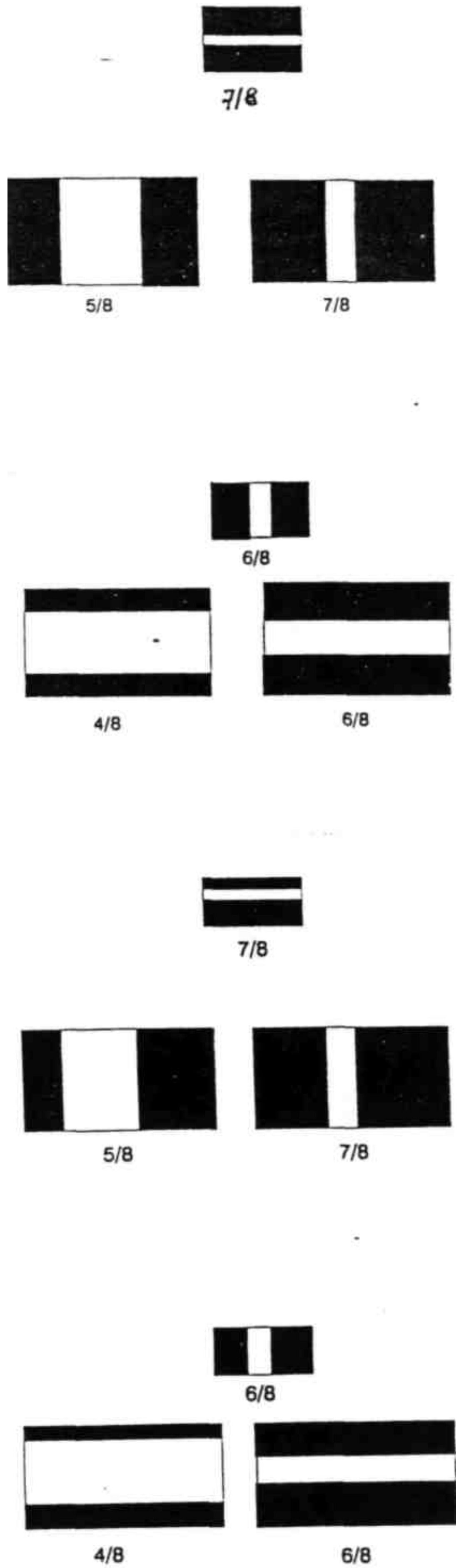
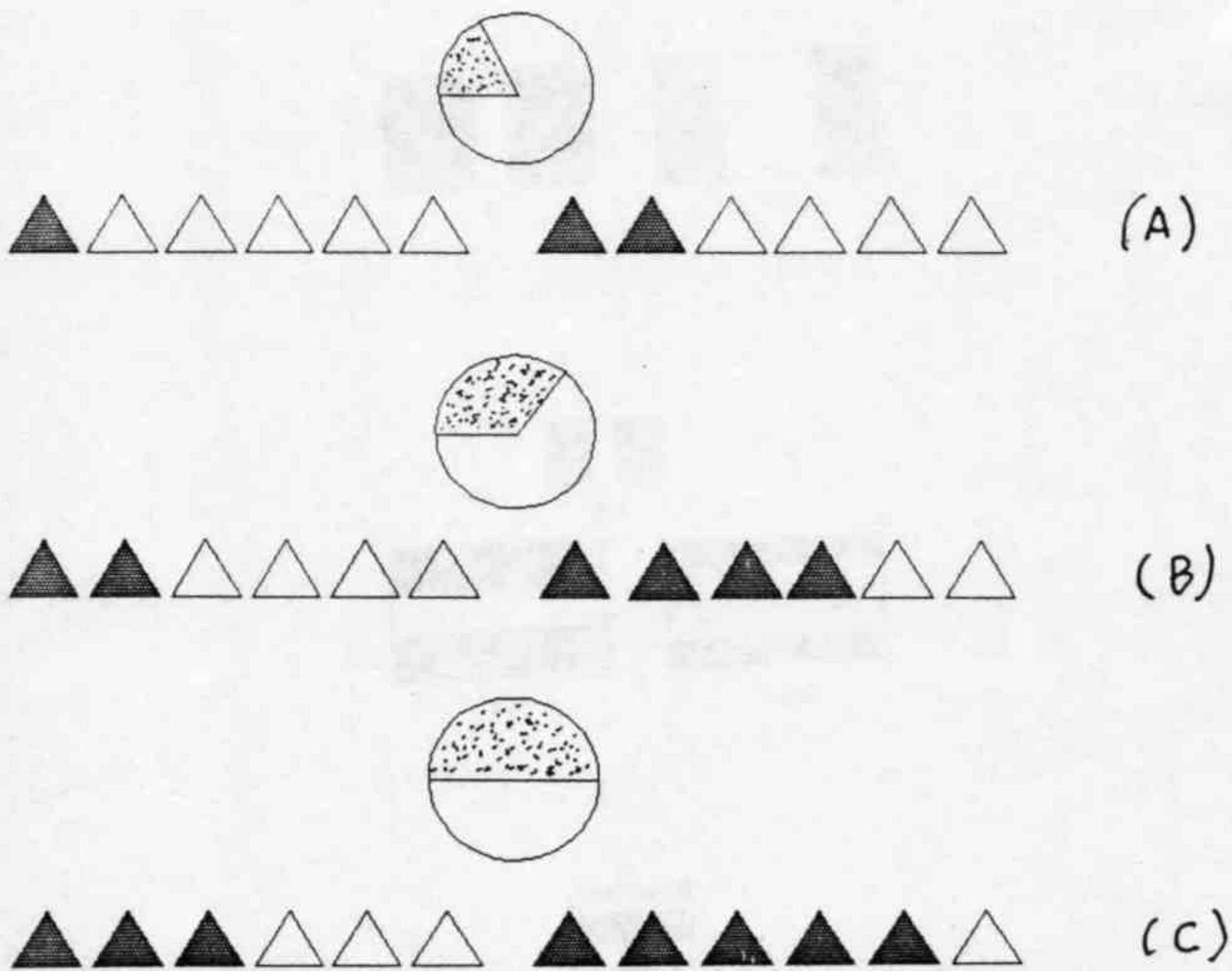


FIGURA 4. COMPARAÇÕES ATRAVESSA METADE (B); NÃO-ATRAVESSA METADE (A); E METADE (C).



SIGE - CIBEC

A Exploração das Análises Fatoriais em Didática da Matemática

Este trabalho é um resumo da tese de Doutorado de M. T. MORETT1 [1992].

Méricles Thadeu Moretti Dpto.
de Matemática - UFSC
Florianópolis - SC

Resumo

Apresentamos de forma unificada os métodos fatoriais com objetivo de adotar um mesmo ponto de vista a estas diferentes técnicas de análises : análise em componentes principais, análise de correspondências simples e múltiplas, análise discriminante e análise canônica. A escolha das diversas situações em didática da matemática de tal modo que pudesse permitir uma imagem bastante completa dos diversos tipos de tratamento a efetuar, constituiu um aspecto importante de nossa reflexão. Em seguida, em cada uma das situações escolhida, a questão colocada era de saber qual ou quais análises poderiam melhor evidenciar os fenômenos didáticos que um corpus de dados pode revelar. Para um bom número de situações, o objetivo que acaba de ser indicado, conduziu não só a uma única análise, mas a um encadeamento de duas ou mais análises. Além disso, através das análises efetuadas, foi possível levantar um certo número de fenômenos didáticos das experiências estudadas.

Introdução geral.

Os métodos de análise de dados, mais particularmente os métodos fatoriais, mostraram sua eficiência em pesquisas nos mais diversos domínio e em particular em Didática da Matemática. Os princípios de onde eles são inspirados são antigos, mais desenvolveram-se só recentemente : eles são devidos a generalização do calculo automático, auxiliar indispensável destes métodos. Estes métodos têm por objerivo facilitar a interpretação de um corpus de dados. O princípio de todos eles é o mesmo, mais a forma como consideramos as semelhanças entre linhas e colunas, as relações entre linhas e colunas podem variar de um método a outro. A diversificação destas técnicas é benéfica pois ela permite responder a questões mais precisas : mas esta diversificação introduz o problema da escolha do método ou mais geralmente dos métodos pertinentes para responder a cada questão levantada.

Em geral, uma só análise não permite de se chegar a um tratamento inteiramente satisfatório de um corpus de dados que se supõe conter as informações necessárias. Isto é devido, por um lado, aos valores em jogo : se as variáveis de um corpus são pertinentes, condição que se supõe realizada para que um estudo qualquer mereça ser feito, os valores, eles mesmos não se impõe em geral, a priori. Por exemplo, as modalidades de uma variável qualitativa são tributárias de decisões de codificações que podem dar margens à discussões. Um retomo sobre as decisões na partição em classes (as modalidades de uma variável) pode ser almejado após uma primeira análise, de maneira a conduzir a uma segunda análise.

Em geral, uma análise em se apoiando sobre uma primeira escolha de valores traz resultados e levanta também novas questões. Dentre estas questões, algumas conduzem a recolher novos dados, por exemplo, procedendo a novas observações. Outras questões são do tipo cujas respostas podem ser encontradas no corpus de dados, desde que ele seja submetido a uma ou mais análises.

Com um corpus de dados a analisar, se coloca a questão do tratamento estatístico, quer dizer. da escolha indissociável codificação-método. Para uma escolha mais acertada, é necessário conhecer os métodos, as possibilidades que cada um deles pode oferecer para responder a um certo número de objetivos precisos.

Apresentamos em nosso trabalho, os métodos fatorias na forma de um tripé (X.M.W) de matrizes comuns a todos estes métodos :

X - obtida por transformação de uma matriz de dados Y.
M - métrica associada ao espaço das colunas de X.
W - ponderação das linhas ou métrica associada ao espaço das linhas de X.

As definições particulares de cada um destes elementos do tripé (X.M.W) permitem de distinguir os diferentes métodos de análise :

- análise em componentes principais (ACP) que trata de matrizes de dados cruzando indivíduos e variáveis quantitativas,
- **análise fatorial de correspondência** simples (AFC) que trata de matrizes de freqüência,
- **análise fatorial de correspondências múltiplas (AFCM)** que se aplica às variáveis qualitativas nominais.
- análise **fatorial discriminante (AFD)** que permite estudar as eventuais ligações entre uma variável qualitativa e um conjunto de variáveis quantitativas, medidas sobre uma mesma população,
- **análise fatorial** canônica (AC) permite estudar as relações entre vários grupos de variáveis quantitativas, medidas sobre uma mesma população.

Esta maneira de introduzir os métodos fatoriais permite visualizar os aspectos comuns a todos estes métodos e, por outro lado, evidenciar suas diferenças ou similaridades. No entanto, ela não justifica a escolha do método, quer dizer, a escolha propriamente de X, M e W. As referências BERTIER et BOUROCHE [1975], LEBARD, MORINEAU et TABART [1977], LEBARD, MOURINEAU et FENELON [1982], ESCOFIER et PAGES [1988], SAPORTA [1988], VOLLE [1981], apresentam estes métodos, mas utilizando outros pontos de vista.

Diante de um corpus efetivamente recolhido, a primeira questão será de determinar em função da problemática estudada, o modelo escolhido em definitivo, ao preço de eventuais transformações convenientes de dados.

Esta escolha adequada da análise ou das análises a praticar depende em grande pane da natureza das variáveis.

Natureza das variáves.

Podemos representar uma variável v pelo esquema v : Ω — O. onde representa o conjunto (suposto finito) de indivíduos e O o espaço das observações. Distinguimos, segundo o cardinal de O e sua estrutura algébrica (D1DAY e all.[1982]). 4 tipos de variáveis conforme tabela abaixo :

		Cardinal de O			
		contínuo	finito ou enumerável		
Estrut. de O	sem estrutura		VLN	Nominal	Variável
	conj. ordenado	VTO	VLO	Ordinal	
	corpo ordenado	VTM		Mens.	
		QuanTitativa	QuaLitativa		
		Variável			

Algumas transformações de variáveis.

1 - Variáveis qualitativas nominais. Praticamente todas variáveis encontradas podem ser colocadas na categoria de variável qualitativa nominal, bastando para isso formar as classes para cada variável. Dificuldades teóricas e também dificuldades ligadas a problemática estudada aparecem na escolha do número da classes para cada variável, uma vez que não existem métodos padrões em tais situações. Além da perda eventual da ordem, a análise é então ligada a arbitráriedade na escolha do número de classes. No entanto, a transformação em classe de variável permite a aplicação da AFCM que pode evidenciar, se existirem, ligações não lineares entre variáveis.

2 - Variáveis binárias. Estas variáveis são obtidas pela atribuição do valor 1 para a presença de um atributo (por exemplo, o acerto a uma dada questão) e 0 pela ausência. Uma matriz de variáveis binárias pode ser tratado por outros métodos não fatoriais, permitindo assim uma comparação ou complementação de análises (por exemplo, os métodos de classificação hierárquica).

3 - Variáveis ternárias. Variáveis obtidas pela atribuição de valores a três classes de uma variável qualitativa. Podemos imaginar por exemplo as situações a três classes onde duas são

antagônicas e uma terceira é neutra. Para preservar o caráter hierárquico das modalidades. podemos proceder a uma quantificação simétrica das modalidades da maneira seguinte. Atribuímos 0 para a classe de respostas neutra, k e -k para as classes de respostas antagônicas. Em muitas situações onde as modalidades são ordenadas, podemos agrupar as modalidades de respostas, preservando a hierarquia. Exemplos desta situação são as enquetes de opinião onde as respostas possíveis dos indivíduos interrogados obedecem a uma certa escala.

4 - Variáveis obtidas através da soma de variáveis binárias. Uma nova variável pode surgir do agrupamento de várias variáveis binárias. Esta técnica é utilizada em questionários extensos e que comportam grupos de questões que exigem tratamentos matemáticos semelhantes de resolução.

5 - Variáveis ordenadas. Consideremos uma variável ordinal ou mensurável sobre n indivíduos. A partir desta variável, construímos uma nova variável de valores posicionais : na ausência de ex-aequos. 1 substitui o menor valor da variável inicial e n o maior valor. Na presença de ex-aequos. o valor posicionai médio é considerado.

Seja o exemplo das notas de uma prova corrigida por n professores. Na ausência de ex-aequos, o valor 1 é dado ao professor que atribuiu a nota mais baixa e n ao professor que atribuiu a nota mais alta. Na presença de ex-aequos, consideramos o valor posicionai médio. Um procedimento idêntico efetuado em uma segunda prova implica em conservar a mesma soma total de pontos em cada uma das provas.

6 - **Matriz** de **dados duplicada.** Para cada coluna (respect. linha) de uma matriz de dados, consideramos uma outra coluna (respect linha) fictícia, cujos valores tornam constante a soma por linha (respect. coluna) desta nova matriz assim obtida.

Consideremos o exemplo anterior, onde n corretores atribuem notas ao resultado de uma prova feita por um aluno. Suponhamos que a nota máxima permitida seja 10. A partir desta prova, consideramos uma outra prova fictícia onde as notas são complementares a 10 das notas efetivamente dadas. Neste caso, a soma das notas atribuídas por qualquer um dos corretores é 10.

Aplicações em didática da matemática

Introdução.

Examinaremos agora a questão de como encadear diversas análises de uma mesma situação didática. Nossa preocupação não é somente saber quais encadeamentos de anállises são possíveis, mas de nos inclinarmos sobre os resultados que podem ser evidenciados. A nossa escolha das situações didáticas obedeceu a esta regra.

O caso mais simples de encadeamento de análise é aquele que se faz suceder somente duas análises. Este procedimento já é objeto de uma certa prática que consiste a confrontar várias análises de um mesmo grupo de variáveis no sentido matemático do termo (quer dizer, tomando os mesmos valores), como por exemplo uma ACP e AFC utilizadas em DAUVISIS-CARLIER 119801.

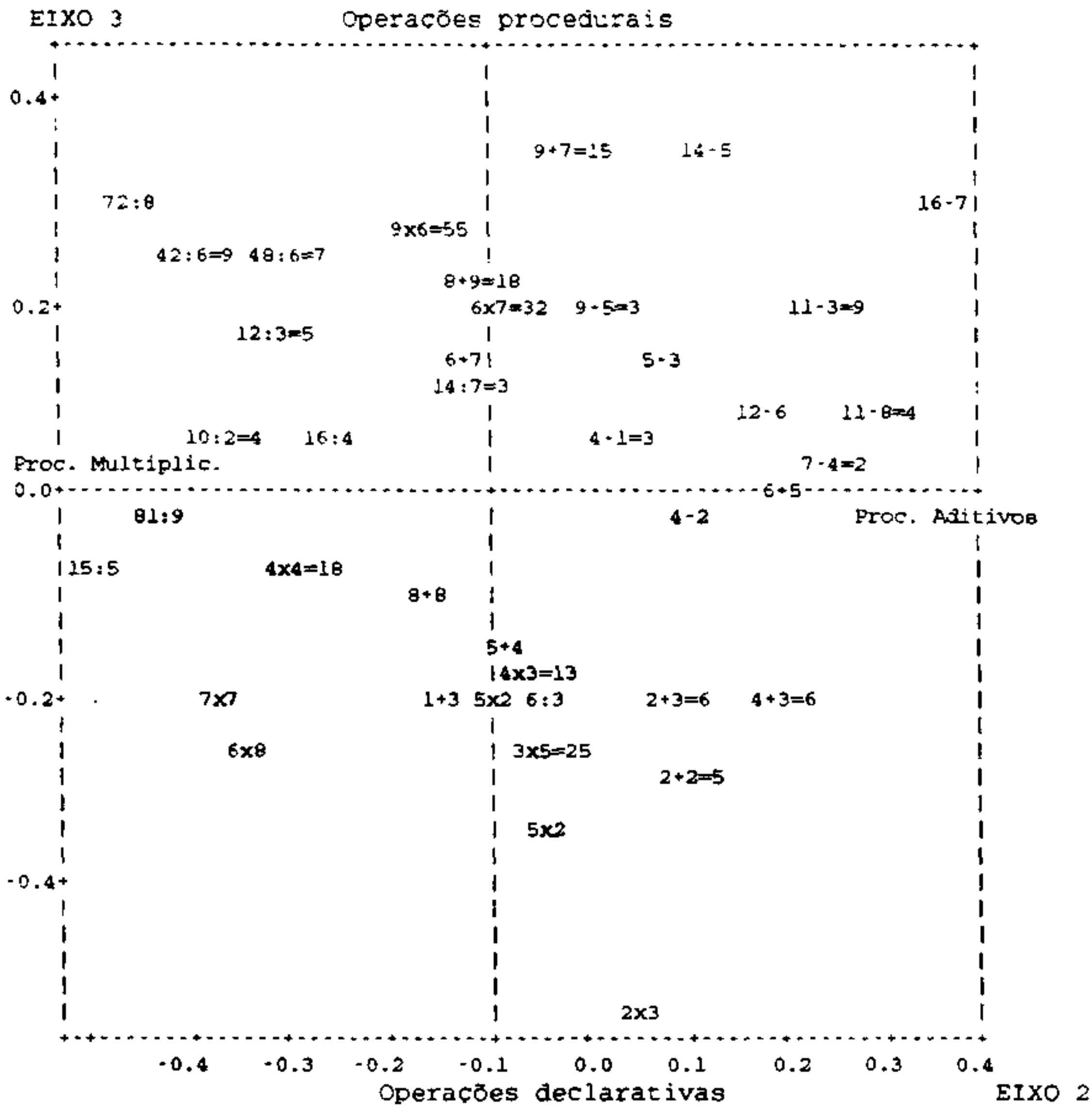
A AFC é por excelência a análise apropriada para os dados organizados sob a forma de de matriz de contingência. Podemos imaginar outras situações interessantes para a utilização deste método. O critério para decidir se temos uma matriz de contigência é de poder dar um sentido a soma das casas da matnz. seja ela feita por linha ou por coluna (VOLLE [1981. p. 162]). Com as matrizes resultantes das experiências de multicorreção (situação didática 1*)* podemos criar diversas situações que podem desembocar em análises diferentes. Essas análises obedecem a pontos de vista diferentes do mesmo problema. Assim, em uma ACP podemos considerar as provas como as variáves da análise e a proximidade entre provas é medida em termos de correlação e podemos também considerar os corretores como variáveis de uma outra análise. Nós utilizamos a primeira situação em nossa experiência, uma vez que as provas foram escolhidas com a finalidade de provocar divergências entre corretores ; nós nos interessamos sobretudo as diferenças entre corretores e não as correlações. Uma decisão deste tipo também pode ser colocada nas transformações de variáveis em variáveis ordenadas (transformação 5). A AFC que é aplicada as matrizes de contingência encontra aqui uma extensão interessante, a análise da matriz duplicada. Este procedimento permite modificar a ponderação dos corretores. ou das provas, conforme duplicamos os corretores ou as provas. No primeiro caso tentamos, atenuar as diferenças de "qualidade" das provas e no segun[illegible]veridade dos corretores.

Examinemos, por exemplo, o erro "$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 17$" encontrado na prova número 8 : na primeira análise, os corretores foram mais severos ou menos severos conforme o caráter dado a este erro; o caráter de um erro elementar (distração) ou o caráter de um erro fundamental que coloca em causa a aprendizagem (17 também é a soma de 12 e 5). Na segunda análise, os corretores são menos severos, considerando este erro em conjunto com a boa "qualidade" desta prova.

As variáveis quantitativas mensuráveis são raras em didática da matemática. Do nosso ponto de vista, um dos casos interessantes de obtenção de variável quantitativa em didática da matemática corresponde as observações de tempo de resposta (situação didática 2) a questões pelas quais o acerto (resposta correta) é a situação geral para os indivíduos observados. A ACP é bem adaptada a esta situação. Podemos aplicar uma AC ou uma AFD sob condição de se conhecer, para a AC, uma repartição em grupos de variáveis e para a AFD uma repartição nas unidades estatística. Esta repartições podem ser estabelecidas anteriormente através de uma outra análise, eventualmente não fatorial.

Mostraremos a seguir um gráfico da ACP nesta experiência. Assinalamos a comunicação importante dos gráficos fatoriais. O primeiro eixo da ACP efetuada pode ser interpretado como o eixo da rapidez ou da lentidão das respostas (todas as variáveis têm correlações de mesmo sinal com este eixo). O segundo plano fatorial desta análise é mostrado a seguir : eixo 2. discrimina os procedimentos aditivos dos procedimentos multiplicativos e o eixo 3. discrimina as operações declarativas das operações mais procedurais.

Segundo Plano Fatorial : as igualdades justas são representadas neste plano sem o resultado (por exemplo. 72 : 8 no lugar de 78 : 8 = 9).

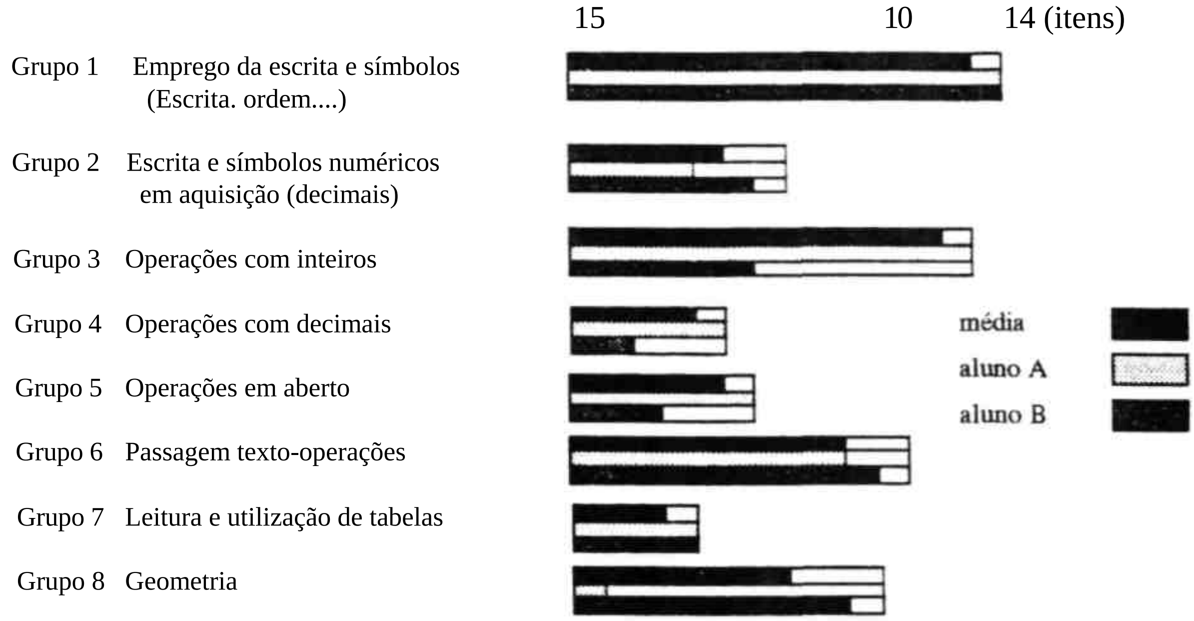


Neste exemplo, pelo menos duas outras situações poderiam ser criadas a partir de transformações de variáveis, mas nós não recomendamos neste caso preciso : a transformação em classe de variáveis (transf. 1) e transformação em variável ordenada (transf. 5)

Na situação didática 3 nós apresentammos várias análises sobre o questionário da Avaliação Nacional na França em 1989. O agrupamento das questões deste questionário (transf. 4) nos permitiu confirmar, a partir de uma AFC, os resultados já estabelecidos através de uma AFCM anteriormente efetuada. Esta transformação de dados nos permitiu também, através de uma

AFD. de estabelecer uma ligação deste questionário com um outro questionário, proposto a esta mesma população. O estudo desta ligação nos mostrou uma certa coerencia entre os dois questionários, condição que se admite para que um estudo de evolução possa ser levado adiante. Este estudo nos permitiu diagnosticar certas dificuldades dos alunos que nos parecem ser duráveis. Citemos por exemplo as dificuldades sobre a escrita e símbolos numéricos em aquisição (decimais) e geometria que parecem ser um "handicap" mais importante do que as dificuldades de cálculo sobre os decimais.

Com o agrupamento de questões nos foi possível também criar um instrumento de busca das dificuldades dos alunos que possa permitir a aplicação de uma pedagogia diferenciada. Examinemos por exemplo as respostas de dois alunos reais designados aqui por A e B, em relação a média geral.



Em vista dos perfis, que correspondem a dois alunos que não apresentam problemas generalizados, o diagnóstico é rápido :

- o perfil do aluno A corresponde a um aluno que apresenta dificuldades localizadas nos grupos seguintes - geometria, escrita e símbolos numéricos em aquisição sobre os decimais e uma certa dificuldade sobre os itens do grupo 6,
- o perfil do aluno B corresponde a um aluno que apresenta dificuldades concentradas no tratamento das operações (grupos 3, 4 e 5).

Os resultados das análises na situação didática 4 (Avaliação Nacional em 91) dão aos professores um instrumento eficaz de apreciação dos resultados dos alunos no fim de ano. Uma AFD permitiu um estudo de previsão dos resultados dos alunos no final do ano a partir dos resultados obtidos no questionário. Estas análises evidenciam também um tipo de questão que podemos chamar de "impuras" : questões que dão margens a três níveis de respostas. Vejamos como exemplo a questão seguinte proposta aos alunos :

"Uma classe organiza uma viajem com custo total 1300 francos. Esta viajem é paga pelos alunos, prefeitura e cooperativa da escola. Os 24 alunos devem pagar cada um 20 francos. A prefeitura doa 520 francos. Quanto a cooperativa deve pagar ? "

Solução: $1300-(20 \times 24+520)$

aluno de ninei 1	- cálculo passo a passo sem escrever a expressão completa
aluno de nível 2	- escrita correta da expressão completa e avaliação com erro
aluno de nível 3	- escrita e cálculo correto da expressão completa.

Em alguns casos, não é necessário proceder a um tratamento no qual duas análises se encadeiam ; uma só análise pode se mostrar suficiente desde que a codificação seja adequada. A situação 6 é um exemplo onde uma única análise se mostrou suficiente para confirmar um fenômemo conjecturado a priori. O oposto a este caso, é o caso da situação didática 7 que apresentava um caráter exploratório e que. geralmente conduz a tomada de novos dados.

Situações didáticas estudadas. 1-
Multicorreção.
Extraímos de um questionário um único problema sobre o cálculo do perímetro de um paralelogramo proposto a um grupo de alunos (idade : em torno de 15 anos). Para o cálculo do perímetro, este problema exigia dos alunos a aplicação do Teorema de Pitágoras. Uma amostra de 10 provas foram escolhidas e submetidas a correção por 52 professores. Duas análises fatoriais foram praticadas sobre este corpus de dados : uma ACP sobre a matriz de posição em relação as provas (transformação 5) e uma AFC sobre a matriz duplicada pelas provas (transformação 6). Estas análises tinham o mesmo objetivo, o de explicar a divergências entre corretores considerando, a priori, as provas com a mesma "qualidade".

2 - Medidas de tempo de resposta.
As variáveis quantitativas mensuráveis são raras em didática da matemática. Do nosso ponto de vista, um dos casos interessantes de obtenção de variável quantitativa em didática da matemática corresponde as observações de tempo de resposta. O método é aplicado em questões simples para que a resposta correta seja a situação geral para os indivíduos observados. As análises são feitas sobre dados originários de uma experiência com 210 alunos (idade aproximada de 11 anos) com questões elementares sobre as quatro operações com números naturais pequenos (por mais detalhes ver FISCHER e PLUVINAGE[1988]) e ela se desenvolvia no computador. Um programa mostrava um resultado. Justo ou Falso, de uma operação elementar (exemplo : 4 + 3 = 6) e os alunos deveriam apertar a tecla "J" (Justo) ou a tecla "F" (Falso) do computador segundo suas apreciações da igualdade mostrada. Quarenta igualdades (dez por operação elementar) foram propostas e para cada uma destas igualdades, o tempo de resposta é gravado em microsegundos.

Duas análises foram efetuadas, uma ACP. para estudar as correlações globais entre as igualdades e uma AC sobre os 4 grupos das operações. Outros grupos poderiam ser formados para aplicação de uma outra AC como, por exemplo, um grupo das questões justas e outro das questões falsas) mas foi a ACP que nos conduziu a tomar os grupos das quatro operações.

3 - Avaliação Nacional na França era 1989.

Esta situação se baseia nas respostas dos alunos a dois questionários aplicado em épocas diferentes, com objetivo principal de estudar a evolução nas concepções em matemática dos alunos.

Um dos questionário estudado é o da Avaliação Nacional aplicado em todo território francês no ano escolar de 1989. Este questionário comportava numerosas questões sobre o programa de matemática da classe "sixième(equivalente no Brasil a quinta série do 1º grau) :

- conhecimentos relativos aos números.
- técnicas operatórias.
- sentido das operações.
- leitura e exploração de tabelas e desenhos geométricos.
- organização de um raciocínio.

A heterogeniedade das questões propostas nos conduziu, em uma AFCM, a um estudo didático para classificar as questões (transformação 4) em 8 grupos por tipo de tratamento matemático :

grupo 1 - emprego da escrita e de símbolos.
grupo 2 - escrita e símbolos numéricos em aquisição (decimais),
grupo 3 - operação com inteiros,
grupo 4 - operação com decimais,
grupo 5 - operações em aberto,
grupo 6 - passagem texto-operações,
grupo 7 - leitura e utilização de tabelas,
grupo 8 - geometria.

Estes grupos foram objetos de estudo em uma AFC. Esta análise e a AFCM anteriormente mencionada, mostraram bem a coerência entre este dois questionários, condição básica para que um estudo de evolução possa ser levado a termo. Do segundo questionário, por nós elaborado para permitir uma comparação com o questionário da Avaliação Nacional, consideramos a soma total de pontos por aluno (transformação 4), como a variável à explicar da AFD e. os grupos acima, como as variáveis esplicativas desta análise.

4 - Avaliação Nacional na França em **1991.**

Nós propomos neste estudo um procedimento de análise de ciados com o objetivo de colocar a disposição dos professores um meio de apreciação dos resultados escolares dos alunos em fim de ano. Com este objetivo, o questionário da Avaliação Nacional de 1991. aplicado aos alunos da sexta série (quinta série do 1 ° grau no Brasil), é estudado e comparado com a média final em matemática de 102 alunos que participaram desta experiência. Duas análises foram efetuadas, uma AFCM que permitiu estudar a respostas dos alunos ao questionário e uma AFD para comparar com os seus resultados no final do ano.

5 - Concepção dos alunos sobre a independência estocástica.

Os dados deste exemplo são originários de um questionário a escolha múltipla (cinco modalidades para todas as questões) sobre a noção de independência estocástica. aplicado a um grupo de 300 alunos do 2º ano de Psicologia da Universidade Louis Pasteur de Strasbourg. Por razões metodológicas a AFCM foi praticada sobre os dados na forma binaria permitindo assim mais facilmente a comparação com outros métodos não fatorias : a análise implicativa e hierárquica segundo o métode R. GRAS [1979]. Por outro lado. esta redução no número de modalidades nos levou a recorrer sistematicamente as respostas iniciais dos indivíduos da análise (ver MORETTI, PLUVINAGE, NOBELIS [1991]) para se chegar a interpretação da AFCM.

6 - A reconfiguração **na solução de problemas de cálculo de área.**

A partir das respostas de 202 alunos a um questionário sobre a resolução de problemas de cálculo de área, efetuamos uma AFCM para confirmar as hipóteses de trabalho de PADILLA SANCHEZ [1992] em sua tese. Estes problemas foram elaborados de modo a permitir quase que exclusivamente dois tipos de procedimentos que pudessem conduzir a resposta correta : o uso de fórmulas e o uso da reconfiguração. Neste caso, duas variáveis foram utilizadas para caracterizar as respostas dos alunos em cada problema : uma sobre o resultado (certo ou errado) e a outra variável assinalava o tipo de procedimento usado (reconfiguração, fórmulas de área ou procedimento ausente). Poderíamos ter utilizado apenas uma variável com 5 modalidades, mas para pequenas amostras isto implica, em geral, obter modalidades com pequenos efetivos, o que não é desejável em análise fatorial (LEBARD, MORINEAU et TABARD [1977]). Os resultados obtidos da análise são claros, os alunos mais eficientes são os que utilizavam a reconfiguração como procedimento de resolução nestes problemas, e não aqueles que utilizavam fórmulas. Uma única análise (AFCM) se mostrou suficiente para evidenciar este fenômeno conjecturado a priori.

7 - Avaliação discente.

Os dados são originários de uma avaliação discente da disciplina de Estatística e Informática da Universidade Louis Pasteur. A cada questão (questões sobre os objetivos do curso, sobre o conteúdo ensinado, etc) os alunos deveriam escolher, cada vez. uma entre as cinco modalidades de respostas propostas : muito falso, falso, nem falso nem verdadeiro, verdadeiro, muito verdadeiro.

As opiniões dos estudantes foram repartidas em três classes de respostas (transformação 3):

-1	- desfavoráveis, correspondendo as opiniões muito falso e falso.
0	- neutra, correspondendo as opiniões nem falso nem verdadeiro.
1	- favoráveis, correspondendo as opiniões verdadeiro e muito verdadeiro.

Esta transformação de dados nos permitiu estudar a opinião dos estudantes sobre o seu curso através de uma ACP.

Conclusão.

A contribuição que esperamos, além do fato de ter apontado um certo número de fenômenos didáticos graças as análises efetuadas, é a ter contribuido para uma sistematização no encadeamento de análises em didática da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

J.-P. BENZECRI. Analyse des données. Tome 2 : Analyse des Correspondances. Paris -Dunod - 1973.

P. BERTIER, J.-M. BOUROCHE. Analyse des données multi-dimensionnelles. Presses Universitaires de France. Paris - 1975.

L. CARTER, C. LAVILLE. Analyse des réponses à un test de connaissances élémentaires en mathématiques. Brochure APMF.P n°40 - Analyse des Données - tome II - 1980.

D. COQUIN-VTENNOT. Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol.6, N° 2-3, pp. 133-192, 1985.

M.-C. DAUVISIS, A. CARLIER. Une application d'analyse des données en docimologie. Brochure APMFP n° 28 - Analyse des Données - tome I - 1980.

M. C. DAUVISIS. Objectifs de rEnseignement des Mathématiques et Docimologie (Étude en fin de premier cycle du second degré). These de Doctorat Université de Toulouse-Le-Mirail - 1982.

C. DUPU1S. F. PLUVINAGE. La Proportionnalité et son utilisaüon. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol.2. N° 2. pp.165-212. 1981.

R. DUVAL, F. PLUVINAGE Démarches individuelles de réponse en mathématique. Educational Studies in Mathematics. Vol.8. N°l. pp.51-116. 1977.

B. ES COMER et J. PAGES. Analyses factorielles simples et multiples - objectifs. méthodes et interprétation. Paris - DUNOD - 1988.

J.-P. FISCHER. F. PLUVINAGE. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol.9, N°l, pp. 133-154, 1988.

R. GRAS. Analyses Factorielle et Classificatoire appliquées à un test en 4ème Expérimentale O.P.C. en septembre 1974. Publication LR.E.M de Rennes - Mai 1975.

R. GRAS. Recherche d'une taxonomie d'objectifs en mathématique. Publication I.R.E.M. de Rennes - Janvier 1976.

R. GRAS. Analyses Factorielle d'un test National dEntrée en en Mathématique. Publication I.R.E.M de Rennes - Avril 1976.

R. GRAS. Contribution à 1'étude expérimentale et à 1'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques. These d'Etat, Université de Rennes - 1979.

R. GRAS et A. LARHER . La quasi-implication : une méthode d'analyse de relations non symétriques entre attributs et entre classes d'attributs. Publication interne I.R.M.A.R., Rennes - 1989.

R. GRAS, A. LARHER. L'implication statistique, une nouvelle méthode danalyse de données. A paraítre dans Mathématiques et Sciences Humaines n°120, 1992.

D. KARAPISTOLIS. Codage et analyse d'une épreuve logique. Les Cahiers de l'analyse des Données. Vol. XI - N° 4 - pp.482-484, 1986

A. LARHER. Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique. These de Doctorat. Rennes - 1991.

L. LEBART, A. MORINEAU et N. TABART. Techniques de la description statistique - méthodes et logiciels pour 1'analyse des grands tableaux. Paris - Dunod - 1977.

MEC / INEP
SIBE - CIBEC

L. LEBART. A. MORINEAU et J.-P. FENELON. Traitements des donnees statistiques - Tieihodes et programmes. Pans - Dunod - 1982.

I. C. LERMAN. R. GRAS. H. ROSTAM. Elaboration et evaluation d'un indice d'implication pour des données binaires. I et II.-Mathémariques et Sciences Humaines n°74. pp.5-35 et n°75 pp.5-47. 1981.

M. T. MORElJ I. L'expioitation des analyses tactonelles en didactiques des mathématiques. These de Doctorat. ULP - Strasbourg - 1992

M. T. MORETTT. Ph. P. NOBELIS. F. PLUVINAGE. L'analyse en composantes pnncipales de rangs. Application à un exemple de docimoiogie. Actes des XXIII° jouraées de Statistique - Université Louis Pasteur - Strasbourg - 1991.

M. T. MORETTI. F. PLUVINAGE. Ph. P. NOBELIS. Le recours au profils des individus dans une AFCM avec un exempie sur Ia notion d'indépendance stochastique. Actes des XXTV° Journées de Statistique - Université Libre de Bruxelles - Bruxeiles - 1992.

F. MURTAGH. Recherche d'un scalogramme sur les réponses de 1300 élèves à une batterie d'épreuves de mathématique. Les Cahiers de l'Analvse des Données. Vol.VI - n° 3 - pp.297-318, 1981

V. PADELLA SANCHEZ. L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour rapprentissage des mathématiques. These de Doctorat. U.L.P., Strasbourg - 1992.

F. PLUVINAGE. La difficulté des exercices scolaires en Mathématiques. These, U.L.P., Strasbourg, 1977.

F. PLUVINAGE. Analyse des correspondances et questionnaires à modalité. Brochure APMEP n°40 - Analyse des Données - tome O - 1980.

F. PLUVINAGE. Codages et analyses de réponses à des questionnaires de mathématiques. Rassegna di Metodi Statistici ed Applicazioni. Cagliari - 1985.

F. PLUVINAGE et R.C. RAUSCHER. Les Mathématiques en sixième après TEvaluation Nationale. Publication interne I.R.E.M., Strasbourg - 1990.

H. RATSIMBA-RAJOHN. Eléments d'Etude de deux Méthodes de Mesures Rationnelles. Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol.3. N°l, pp.65-113. 1982.

G. SAPORTA. Théories et méthodes de Ia statistique. Editions Technip. Paris - 1978.

M. VOLLE. Analyse des données. Económica. 2e édition. Paris - 1981.

A Divulgação da Matemática através das Enciclopédias Universais. Uma Análise Histórica na Grande Enciclopédia Universal Alemã do inicio do Século XVIII

por Sérgio Nobre*

1. Introdução

Um tema pertinente à pesquisa em História da Ciência diz respeito à divulgação das grandes descobertas científicas. Quando se trata de uma descoberta científica de aplicação ou então utilização imediata ao consumo em geral, os meios de comunicação de massas, muitas vezes, serviram, e ainda servem, como divulgadores a nível popular das novidades científicas. No entanto, os resultados práticos de uma importante descoberta científica podem demorar algumas décadas para surgirem, e, quando divulgados, não o são em sua essência, mas sim em sua aplicabilidade. Há de considerar também que nem tudo que se produz cientificamente possui interesse imediato para uma ampla divulgação popular. A seqüência cronológica relativa ao desenvolvimento de uma determinada descoberta é assunto de grande interesse aos historiadores, pois, através dela, pode-se obter com maior segurança as devidas relações com os acontecimentos científicos paralelos. Neste sentido, como parte de uma análise histórico-cronológica, coloca-se a seguinte questão: *"Qual foi o tempo necessário para que uma importante descoberta cientifica fosse divulgada ao público acadêmico em geral?"* No campo da História Social da Ciência, ainda na mesma direção, uma segunda pergunta toma-se pertinente: *"Qual foi o tempo necessário para que uma importante descoberta cientifica fosse divulgada à comunidade não acadêmica?"* Respostas à esta segunda questão podem ser encontradas junto aos meios de divulgação científica que possuem penetração direta ao público não acadêmico. Uma importante fonte de pesquisa histórica sobre este tema encontra-se nas Grandes Enciclopédias Universais.

No sentido de se realizar uma pesquisa histórica voltada à matemática, a razão desta pesquisa diz respeito à análise dos verbetes matemáticos que são encontrados nas Enciclopédias Universais. Especificamente apresentaremos os resultados da pesquisa realizada na Grande Enciclopédia Alemã publicada na primeira

* Sérgio Nobre e assistente na Universidade Estadual Paulista - UNESP campus de Rio Claro, SP, Brasil

metade do século XVIII. O objetivo é analisar as informações obtidas sobre sua atualidade para a época da sua publicação e também sobre a sua abrangência no que diz respeito ao conteúdo apresentado.

2. Pequena introdução à História das Enciclopédias

O termo "enciclopédia" origina-se do grego "enkyklios paidéia" (enkyklios = ir em ciclos, paidéia = ensino, aprendizagem), o que em termos gerais pode significar "um ciclo de formação" ou então "um ciclo de ensinamentos" no qual todo cidadão livre de Atenas deveria ser conduzido.

Em termos interpretativos, "Enciclopédia" significa uma tentativa de ordenação sistemática do conhecimento científico, artístico e cultural acumulado até a época de sua publicação. Tal conhecimento pode ser apresentado de forma geral e abrangente, como é o caso das Enciclopédias Universais, ou então de forma específica, como é o caso de Enciclopédias que apresentam somente um determinado campo do conhecimento. A forma de ordenação sistemática do conhecimento também pode ser dividida por temas ou então por verbetes alfabetica-mente organizados. Sob o ponto de vista da divulgação do conhecimento, a Enciclopédia é o principal meio literário que visa a "Democratização do Saber". Sua organização é resultante de um movimento que visa tornar acessível ao não especialista o conhecimento universal acumulado.

Com relação à História[1] do aparecimento das Enciclopédias, a primeira obra enciclopédica da qual se tem registro foi organizada por SPEUSIPPOS (4087-338? a.C), um sobrinho[2] e ao mesmo tempo aluno de PLATÃO (427-347 a.C), por volta de 370 a.C. Ainda no período antes de Cristo outras obras enciclopédicas foram organizadas e, entre outras, destacamos a do romano MARCUS PORCTUS CATO (234-149 a.C), que escreveu uma enciclopédia para o filho ("Libri ad Marcum filium"), sobre agricultura, medicina, retórica e guerra, por volta de 180 a.C. Apesar de serem mais freqüentes os registros sobre enciclopédias gregas e romanas da antigüidade, não se pode dizer que tal idéia, a de se organizar coleções literárias sobre o conhecimento até então acumulado, era exclusiva destes povos. Há registros de enciclopédias chinesas a partir do século

Sobre a Historia das Enciclopédias, encontra-se boas referências nas próprias Enciclopédias Universais (verbete: "Enciclopédias"), ou então por exemplo em: COLLISON, R. (1964), DIESNER, H.J. E GURST, G. (1976), LEHMANN, E. H (1934), entre outros.

[2] Filho de Potone (mulher de Eurymedon e imã de Platão) - Em COLLISON, R. (1964X pg.22.

III de nossa era e também de enciclopédias árabes a partir do século IX do calendário Cristão. As primeiras Enciclopédias específicas sobre Matemática que se tem registro foram publicadas a partir do século XVI na Europa. São elas: "Dictionrium Mathematicum", em Latim e Grego, publicada em 1573 em Stassburg e organizada por CONRADUS DASIPODIUS (1531-1600); "Lexicon Mathematicum", publicada em 1668 em Paris e organizada por GERONIMO VITALE (?-1698); e "Mathematics made Easie, or a Mathematical Dictionary", publicada no ano de 1679 em Londres e organizada por JOSEPH MOXON (1627-1700).

A primeira Enciclopédia organizada em ordem alfabética que se tem registro é da 1ª metade do século I da Era Cristã, no entanto tais Enciclopédias passaram a predominar mesmo a partir do final do período Renascencista e início do período Barroco. Neste período surgiram as Grandes Enciclopédias Nacionais na Europa e a idéia predominante de "popularização" do conhecimento, que passa a ser mais forte com a adoção das línguas nacionais na produção de tais obras, ganha impulso e atinge o ponto máximo com a publicação da famosa obra do século XVIII, a "Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers", a "Enciclopédia Francesa", organizada por DENIS DIDEROT (1713-1784) e JEAN BAPTISTE LE ROND DALEMBERT (1717-1780) entre 1751 e 1780, que representa, em primeiro lugar, o acabamento amplo e sistematizado da rebeldia intelectual iniciada no Renascimento, correspondendo aos anseios por um novo tipo de homem. As Enciclopédias desta época representam a luta contra o princípio de autoridade, contra todas as posturas feudais de ordenação da sociedade e da consciência consubstanciadas em prescrições rígidas como a do Direito Divino dos Reis, o enquadramento corporativo do trabalho e em todos os obstáculos que impediam a livre circulação dos indivíduos, das mercadorias e das idéias.[3]

Publicada duas décadas antes da Enciclopédia Francesa, porém não tão famosa, a Grande Enciclopédia Universal da Alemanha também pode ser considerada como um "marco" para o início do Iluminismo em seu país. Ela é tida como a mais importante coleção do conhecimento da primeira metade do século XVIII na Alemanha[4]. Nesta Enciclopédia realizamos nossa pesquisa histórica que passaremos a apresentar.

[3] Esta frase é uma adaptação do texto escrito por José A. R. de Andrade e José Castilho M. Neto sobre a Enciclopédia Francesa na apresentação da publicação na versão original (com tradução paralela ao português) do "Discours Prèliminaire des Editeurs". Bibliografia: **DIEDEROT, D E D'ALEMBERT, J.B.R- (1989).**

[4] LEHMANN, EH (1934), Pg.20.

3. A Enciclopédia Universal do Zedler

Conhecida através do nome de seu editor JOHANN HEENRICH ZEDLER (1706-1751), a "Grosse vollstaendige Universal-Lexicon Aller Wissenschaften und Kuenste"[6], ou seja, a Enciclopédia Universal do Zedler, foi publicada em Leipzig e Halle entre 1732 e 1754. A obra completa compreende 64 volumes e ainda 4 volumes suplementares[7], somando um total aproximado de 67 mil páginas. A Enciclopédia Universal do Zedler é considerada pioneira no sentido de apresentar biografias de pessoas que ainda viviam durante a época de sua publicação e, ainda nos dias de hoje, figura como importante obra literária devido aos verbetes genealógicos e biográficos. Porisso ela é encontrada nas estantes das grandes bibliotecas da Alemanha, tanto na edição original, como na edição publicada em versão original nos anos 1961 a 1964 pela editora austríaca "Akademi-sche Druck- und Verlagsanstalt" de Graz[8]. A organização desta monumental obra possui porém uma falha fundamental. Não há em seus 68 volumes nenhuma menção sobre os responsáveis científicos pelos diversos campos do conhecimento ali apresentados. A este respeito, a única informação contida na Enciclopédia Universal é sobre CARL GUENTER LUDOVICI (1707-1778) que assumiu a direção científica da obra a partir do volume 19. A partir de estudos realizados por outros autores sobre a obra[9], verificamos que mais dois outros redatores antecederam Ludovici, respectivamente JACOB AUGUST FRANCKENSTEIN (1689-1733) que faleceu logo no início da obra e PAUL DANIEL LONOOLIUS (1704-1779). Franckenstein era jurista, Longolius era filólogo e Ludovici era filósofo e teólogo. Não há indício nenhum de que algum deles tenha se dedicado à matemática. Neste sentido, colocamos a seguinte pergunta: "Quem foi o autor dos verbetes matemáticos da Enciclopédia Universal do Zedler ?"

Há de se ressaltar que esta c a primeira grande obra enciclopédica onde o figura do editor, cuja função é mais a nível comercial do que a nível intelectual, aparece com destaque. Outros editores, como Brockhaus e Larousse, adotaram o mesmo estilo e batizaram a obra com o próprio nome.

Grande e Completa Enciclopédia Universal sobre todas as Ciências e Artes

[7] Que abrangem verbetes somente até as letras "Caq".

Maiores detalhes sobre a história da Enciclopédia pode-se encontrar em: BLÜHM, E. (1962X JUNTKE, F. (1956), QUEDENBAUM, G. (1977), entre outros.

[9] Veja-se em BLÜHM, E. (1962X JUNTKE, F. (1956) e QUEDENBAUM, G. (1977) na bibliografia.

3.1. Sobre **a autoria** dos vebetes matemáticos da Enciclopédia Universal do Zedler

A pergunta sobre o autor, ou então sobre os autores, dos verbetes da Enciclopédia Universal do Zedler está até hoje em aberto. Sabe-se pouco sobre os redatores e sabe-se que no início da organização da obra eram 9 (nove) os responsáveis pelos verbetes[10]. Após infrutíferas pesquisas nos arquivos da Universidade de Leipzig e da cidade de Leipzig, à busca de algum documento relativo aos autores dos verbetes da Enciclopédia Universal, optamos pelo caminho da comparação com obras matemáticas[11] também publicadas no início do século XVIII, com o intuito de descobrir alguma relação entre tais obras e o conteúdo matemático apresentado na Enciclopédia. O melhor resultado foi obtido a partir da comparação com Enciclopédia Matemática[12] de CHRISTIAN WOLFF (1679-1754), matemático e filósofo alemão, Professor da Universidade de Haile. O resultado é o seguinte:

> *dentre 585 verbetes matemáticos[13] da Enciclopédia Universal do Zedler comparados, 50% são cópias idênticas da Enciclopédia Mate-mática de Christian Wolff.*

Após uma análise mais próxima nos verbetes copiados, distinguem-se 3 períodos diferentes na organização da obra:

1º Período: Volumes 1 **e** 2 - 61% dos verbetes são cópias
2º Período: Volumes 3 a 17 - não há verbetes copiados
3° Período: Volumes 18 a 64 - 85% dos verbetes são cópias

No prefacio da obra, publicado no volume I. existe a menção de que o editor havia deixado o trabalho científico nas mãos de 9 (nove) "musas": "Er hat/ nach der Anzahl der DC. Musen neuneriez gelehrte Leute auf siene Kosten/ ausgesuchet und gedinget/ an disem Gebaeude Hand anyulegen"[Zedler, JJL (ed.) (1732-54), Prefacio VolJ, pg. 6].

1 Foram comparadas as seguintes obras: FONTENELLE, B. (1727), MEISSNER, H. (1689), STURM, J. C. (1702-05X WOLFF, C. (1716 e 1734) e WOLFF, C. (1717 e 1750)

12 Edições de 1716 e 1734. Deve-se ressaltar que, embora conhecida como "Enciclopé dia Matemática do WoifT, as edições de 1734 e 1747 não foram por ele trabalhadas.

13 Foram escolhidos somente verbetes que possuem ligações diretas àquilo que hoje em dia é considerado "Matemática". Verbetes relativos à "mecânica", "óptica", "construção civil", etc., que também são apresentados na Enciclopédia Matemática do Christian Woü% não foram considerados para esta comparação.

A partir desta análise, devido às características de cada período, pode-se chegar à provável coclusão de que seus redatores foram:

1º Período: Franckenstein
2º Período: Longolius 3º
Período: Ludovici[14]

Isso resulta em duas conclusões principais:

1ª) O período sob a redação de Paul Daniel Longolius mostra-se de maior originalidade no campo da matemática. Para uma análise sobre a modernidade da Enciclopédia Universal do Zedler, o período em questão deve ser ressaltado. Felizmente encontra-se neste período a maior parte dos verbetes matemáticos que possuen ligações diretas com as novas descobertas matemáticas da época, ou seja, o Cálculo Infinitesimal.

2ª) Embora não se conheça nenhuma ligação direta entre ele e a Enciclopédia Universal do Zedler, Christian Wolff teve enorme influência durante a organização da obra. Isso nos fornece elementos para uma futura análise comparativa com sua obra matemática.

3.2. A modernidade da Enciclopédia Universal no campo da Matemática

Sob o nosso ponto de vista, existem três caminhos distintos para se analisar a modernidade relativa ao período de sua publicação de uma Enciclopédia:

1º) Análise nos verbetes matemáticos, especialmente naqueles que possuem relações direta com as então novas descobertas.

2º) Análise nas fontes que são citadas nos verbetes matemáticos.

3º) Análise nos verbetes biográficos.

Sabe-se que Ludovici assumiu oficialmente a direção da Enciclopédia a partir do volume 19, mas como a prática de cópias de verbetes não é característico do período sob a direção de Longolius, supomos que ele tenha iniciado os trabalhos já no volume 18 onde todos os vebetes matemáticos são cópias.

3.2.1. Verbetes matemáticos

Para a análise em verbetes matemáticos faz-se necessário novamente a comparação com outras obras. Devido à sua importância para a época e também o fato de que já se constatou ligações com a Enciclopédia Universal, utilizamos novamente a obra matemática de Christian WolfT. Desta vez estabelecemos a comparação com seu Livro Didático "Anfangsgruende aller Mathematischen Wissenschaften"[15] que teve a 1ª edição publicada em Leipzig no ano de 1710 e que até o ano de 1800 alcançou 11 edições e foi traduzido para o holandês, o polonês, o sueco e o russo.

Na história do Calculo Infinitesimal, o período entre as primeiras descobertas de Newton e Leibniz até os estudos de Bolzano e Cauchy, quando se chegou à "rigorosidade absoluta", é considerado como "um período de indecisões"[16]. Tanto a Enciclopédia Universal com a obra matemática de Christian WolfT foram produzidas neste período, por isso torna-se significativo uma análise nos conceitos matemáticos que na época ainda não estavam rigorosamente definidos. Como exemplo apresentaremos a comparação entre as duas obras da apresentação do *"conceito de grandezas infinitamente pequenas"*.

Christian WolfT define uma grandeza infinitamente pequena da seguinte maneira:

> *"Eine unendlich kleine Groesse ist diejenige / welche so ein geringer Theil von der anderen ist"*[17]

O que quer dizer em português: "Uma grandeza infinitamente pequena é aquela que é uma diminuta parte de outra"

Princípios básicos de todas as ciências matemáticas.

[16] O capítulo VI do livro de Carl Boyer "The History of The Calculus" [BoYER, CB. (1949)], onde é tratado este período, possui este título.

[17] Anfangsgruende..., ed. 1717, 4ª parte, pg. 253.

No verbete "Groesse" (grandeza) da Enciclopédia Universal aparece uma definição mais precisa e muito rnais moderna:

> *"... unendlich kleine Groessen, Lat. Quantitates infinite paruas, seu infinitesimae, welche kleiner sind als eine jede assignable Groesse,..."*[18]

Ou seja: " Grandeza infinitamente pequena é aquilo que é menor do que qualquer grandeza repartida"

Há de se considerar que esta mesma definição para "grandezas infinitamente pequenas" foi utilizada por BERNARD BOLZANO (1781-1845) no início do século XIX[19], o que significa que o autor deste verbete na Enciclopédia Universal possuia um pensamento matemático consideravelmente avançado para a época.

Ainda no que diz respeito ao conceito de "grandezas infinitamente pequenas", um segundo exemplo ilustra o quão avançada em relação ao pensamento matemático de Christian WolfT estava a Enciclopédia Universal do Zedler. Christian Wolff, ao tentar explicar o significado de uma "grandeza infinitamente pequena", exemplifica que uma montanha "fíca infinitamente menor" quando o vento lhe tira um grão de areia do topo, ou seja:

> *6.Mercket aber wohl/ daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein/ ihr wol=let die Höhe eines Berges messen und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret/ jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg umb den Dia=meter eines Sand=Körnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaf=fen ist/ daß die Höhe einerley gefunden wird/ ob das Sand=Körnlein liegen bleibet/ oder von dem Winde weggeja=get wird; so kan man das Sand=Körnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und seine Grösse in*

[18] Vd. 11, 1735, pg. 1018.

[19] Veja cm: DIEUDONNÉ, J. (1989), pg. 362 e WUSSING, H.(1989), pg. 212.

Ansehung der Hõhe des Berges für unendlich kleine hal= ten.

Um confronto direto à esta idéia é apresentado no verbete "Calculus differen-tialis" da Enciclopédia Universal. Após a apresentação do exemplo de Christian Wolff, é feita a ressalva de que "em rigor, o grão de areia, em relação à altura da montanha, não é infinito...", ou seja:

> *" ...Das Exempel quadriret nur in so weit hier her. um sich eine deutliche Vorstellung zu ma= chen. wie ein finitum das infinitum weder vermehren noch vermindern kōnne: obgleich in rigore zu reden, die Hõhe des Berges respectu des Sand=Kõrnleins kein infinitum ist; und man sich auch die Elementa nicht solcher Gestalt concipiren darf, indem sie an und vor sich unendlich kleine, das ist, quavis adsignabili quantitate minora sind, welches an dem Sand= Kõrnlein nicht Statt Findet."*[21]

Ainda outros conceitos matemáticos forarn pesquisados, como por exemplo os verbetes sobre Calculo Diferencial e Integral, Séries infinitas, Grandezas infini-tamente grandes, o conceito de Função, entre outros[22], e a conclusão que temos é a seguinte: Em algumas partes, a Enciclopédia Universal do Zedler é conside-ravelmente moderna para o seu tempo de publicação. Exemplos a isto é a apresentação do "conceito de grandezas infinitamente pequenas" exposto acima, ou então a apresentação da palavra "função" como parte consolidada à matemática.[23] Curiosamente o único ponto onde se estabelece confronto direto com o pensamento de Christian Wolff que encontramos na Enciclopédia Universal do

[20] Anfangsgruende... , ed 1717, 4ª parte, pg. 253/254

[21] Vol. 5, 1733, pg. 188.

[22] O trabalho completo sobre esta análise está previsto para ser apresentado no final do ano de 1993 como Dissertação de Doutoramento em História da Matemática na Universidade de Leipzig, Alemanha.

[23] Não existe na Enciclopédia Universal um verbete específico sobre "função", porém existe um sobre "função linear" e a palavra "função" aparece implicitamente em outros ver betes verbetes, por exemplo "Dimensio" e "Circuii superioris generis".

Zedler é o do exemplo acima sobre a altura da montanha. Este mesmo exemplo de Wolff é utilizado no verbete "Groesse" da Enciclopédia, porém nada é comentado ou acrescentado. Isto, acrescentado ao fato de que 50% dos verbetes apresentados na Enciclopédia Universal do Zedler são cópias idênticas da Enciclopédia Matemática de Christian Wolff, leva-nos a concluir que a Enciclopédia Universal do Zedler somente em partes é mais moderna que a obra de Christian WolfT. em outras partes ela mantém o mesmo pensamento matemático adotado por ele.

3.2.2. Obras matemáticas citadas

Como é característico em uma Enciclopédia, A Enciclopédia Universal do Zedler apresenta, além das devidas explicações conceituais de um certo conceito matemático, um resumo histórico relativo ao conceito em questão. Nem todos os verbetes matemáticos da Enciclopédia Universal são acompanhados de resumos históricos, porém alguns importantes como "Geometrie", Calculus differentialis", "Calculus integralis", "Mechanick", entre outros, são acompanhados de indicações históricas com várias obras e autores citados que merecem a devida consideração por todos aqueles que realizam pesquisas relativas Historiografia da Matemática. As explicações históricas que aparecem nos verbetes da Enciclopédia Universal do Zedler são pequenos tratados sobre a História da Matemática que foram escritos na primeira metade do século XVIII.

O relato histórico relativo aos verbetes matemáticos na Enciclopédia Universal é feito através de citações de autores e suas obras (alguns deles desconhecidos nos dias de hoje) cuja maioria são dos séculos XVI, XVII e início do XVIII. Para analisarmos a modernidade da Enciclopédia através das obras citadas, basta compararmos as datas de publicação de ambas, ou seja, da obra citada e do volume onde a obra é citada. Como exemplo à esta comparação, tomemos o verbete "Curvarum Constructio" que aparece no volume 6 da Enciclopédia Universal, cuja publicação deu-se no ano de 1733. No relato histórico sobre este conceito matemático são citadas obras de TSCHIRNHAUSEN (1651-1708), LETBNIZ (1646-1716), NEWTON (1643-1727) e outros, porém a obra citada que foi a mais recente para a época é a 2ª edição da obra de CHRISTIAN WOLFF (1679-1754) "Elementa marheseos universae", publicada em 1732, ou seja, apenas um ano antes da publicação do volume 6 da Enciclopédia Universal do Zedler. Outro exemplo é o verbete "Geometrie", publicado no volume 10 no ano de 1735. Neste verbete são citadas quase 60 obras diferentes e uma quantia acima de 60 autores. O destaque neste caso é a citação do livro "Elementa matheseos" do Professor da Universidade de Leipzig CHRISTIAN AUOUST HAUSEN (1693-1743) que havia sido publicado um ano antes, ou seja. em 1734. Existem ainda outros exemplos semelhantes, os quais nos leva a concluir que, em relação às obras citadas, a Enciclopédia Universal do Zedler era consideravelmente moderna.

3.2.3. Verbetes biográficos

Como já foi mencionado acima, a Enciclopédia Universal do Zedler possui como ponto principal seus verbetes genealógicos e biográficos. Em pesquisa nos 68 volumes que compõem a obra, listamos mais de 220 nomes de pessoas que se ocuparam com a matemática. Em comparação com livros da atualidade[24], que expõem biografias de matemáticos famosos, devemos dizer que, em consideração à época na qual foi publicada, a Enciclopédia Universal do Zedler apresenta uma listagem significativa e qualitativa dos principais personagens que existem na História da Matemática. A maioria das biografias são de europeus e gregos, porém existem também biografias de matemáticos do oriente. Faltam porém biografias de muitos matemáticos famosos do oriente, dos quais temos conhecimento nos dias de hoje.

Também foi mencionado que a Enciclopédia Universal foi pioneira em apresentar biografias de pessoas que ainda viviam na época da publicação. Vários matemáticos famosos viveram e produziram importantes trabalhos durante a época em que a Enciclopédia Universal foi publicada, como por exemplo: alguns membros da Família Bernoulli - DANIEL (1700-1782), JOHANN I (1667-1748X JOHANN II (1710-1790) e NKOLAUS I (1687-1759); LEONHARD EULER (1707-1783); EDMUND HALLEY (16567-1743), entre outros menos famosos. Dentre estes matemáticos, existem verbetes biográficos somente dos membros da família Bernoulli, porém estas só apareceram nos volumes suplementares, cuja função era justamente corrigir as falhas ocorridas durante a publicação normal da obra. Como os volumes suplementares alcançaram somente as letras "Caq", a falha da não publicação das biografias de Euler e Halley não pode ser corrigida. Um ponto curioso é que, apesar de não aparecerem com verbetes biográficos, vários matemáticos que ainda viviam na época da publicação da Enciclopédia Universal foram citados várias vezes em verbetes matemáticos. Halley, por exemplo, é citado em verbetes que até mesmo apareceram antes do volume que poderia conter sua biografia, o da letra "H", como "Approximatio" (vol.2, 1732), "Co-met" (vol.6, 1733), "Grenzen einer Gleichung" (voll 1, 1735), entre outros. De Euler porém não encontramos nenhuma citação em verbetes matemáticos. Há

Foram utilizados os seguintes livros biográficos nesta comparação: WUSSING, H. E ARNOUD, W. (1989) c GOTTWALD, S. (ED.) (1990).

ainda outros matemáticos da época que são citados mais que uma vez em verbetes matemáticos, e que não são agraciados com verbetes biográficos, por exemplo: JAKOB HERMANN (1678-1733), WILLIAN JONES (1675-1749), JOHN CRAIG (1650?-1731), FATIO DE DUILLIER (1664-1753), BERNARD FONTENELLE (1657-17571 BARTHÉLEMY INTERI (1676-1757), CHRISTIAN AUGUST HAUSEN (1693-1743), entre outros. Neste caso devemos reconhecer que houve ura certo desentendimento entre os responsáveis pelos verbetes matemáticos e os verbetes biográficos da Enciclopédia Universal.

4. Conclusão final

Após esta resumida apresentação da pesquisa realizada na Enciclopédia Universal do Zedler, ressaltamos alguns pontos que são importantes na análise sobre sua modernidade. No que diz respeito à apresentação do conteúdo matemático, os redatores tiveram grande influência. Tanto o primeiro redator (Franckenstein) como o terceiro (Ludovici) optaram, ou então permitiram, pela cópia da maioria dos verbetes matemáticos apresentados em seus períodos de trabalho à frente da equipe cientifica. Já o redator Paul Daniel Longolius atuou diferente e em seu período de direção foram apresentados verbetes matemáticos originais e de considerável modernidade para a época da publicação. Para a apresentação do conteúdo matemático, o período dirigido por Longolius salva a Enciclopédia Universal do Zedler de ser considerada em sua maioria como sendo "obra copiada de outra". Com relação às fontes citadas, ressaltamos novamente o período dirigido por Longolius, pois nele encontram-se a maioria dos verbetes onde são citadas as obras que eram relativamente novas quando da publicação do volume da Enciclopédia. No que diz respeito aos verbetes biográficos, como frisamos acima, houve uma desconexão entre os responsáveis pelos verbetes matemáticos e os pelos verbetes biográficos. Muitos matemáticos famosos do início do século XVIII são citados em verbetes matemáticos, porém não aparecem com verbetes biográficos. Se considerarmos que era norma da Enciclopédia publicar biografia de pessoas vivas, podemos concluir que isto foi uma falha, pois se os matemáticos foram citados em verbetes (alguns várias vezes) é porque eles desempenhavam uma certa importância para a matemática, porisso eles mereciam ter próprios verbetes biográficos. No entanto, acreditamos que estaremos sendo exigentes demais se considerarmos este fato como sendo grave. Concluimos que, apesar desta falha, por nós reconhecida, a Enciclopédia Universal do Zedler apresenta uma moderna e boa lista de nomes de personagens que ficaram famosos através da matemática.

Como conclusão final, assumimos que a Enciclopédia Universal do Zedler ofereceu ao público não especialista de sua época uma visão geral consideravelmente boa e moderna da matemática e de seus protagonistas.

5. **Bibliografia**

BLÜHM, E. (1962): *"Johann Heinnch Zedler und Sein Lexikon".* Em: "Jahrbuch der Schlcsischen Friedrich-Wilhelms-Universitãt zu Breslau", Band VII, Holzner Veriag, Würzburg/ Main. 184-200.

BOYER. C. (1949): *"The History of the Calculus and its Conceptual Development",* New YK Dover Publications.

COLLISON, R. (1964): *"Encyclopaedias: Their History Throughout The Ages",* Hafher Publishing Company, New York und London.

DiEDEROT, D E D'ALEMBERT, J.B.R. (1989): *"Encyclopédie ou Dictionncire raisonné des sciences, des arts et des mètiers - Discours Prèliminaire des Editeurs"*, reimpressão *m.* versão original e tradução para o português, São Paulo, Editora UNESP.

DlESNER, H.J. E GURST, G. (1976): *"Lexika Gestem und Heute",* Leipzig, VEB Bibliographisches Instituí.

DlEUDONNE, J. (1985): *"Geschichte der Kíathematik -1700/1900",* edição alemã traduada do francês sob direção de Ludwig Bofl, Beriin, VEB Deutscher Veriag der Wissenschaf-ten.

FONTENELLE, B. (1727): *"Elemens de Ia Geometrie de L Infira",* Paris, de LTmprimerie Royale.

GOTTWALD, S. (ED.) (1990): *"Lexikon bedeutender Mathematiker",* Thun-Frankfurt, Verlag Harri Deutsch.

JUNTKE, F. (1956): *"Johann Heinnch Zedlefs Grosses Vollstãndiges Universallexicon, Ein Beitrag zur Geschichte des Nachdruckes in Mitteldeutschland".* Em: "Schriften zum Bibliotheks- und Büchereiwesen in Sachsen-Anhalt" nr.16, editado por Universitãts-und Landesbibliomek Sachsen-Anhalt, Halle/Saale.

LEHMANN, E. H. (1934): *"Geschichte des Konversationslexikons",* Leipzig, Brockhaus, 1934

ME1SSNER, H. (1689): *"A rithmetische Kunst=Schule",* Hamburg, Druckts und verlãgts Esaias Schãfer.

QUEDENBAUM, G. (1977): *"Der Verleger und Buchhãvüer Johaxn Heinrich Zedler (1706-1751)",* Hüdesheim-New York, Georg Olms Veriag.

STURM, J. C. (1702-1705): *"Mathesis Juvemlis"*, Nümbcrg, veriegt von Johann Hofímanns und Engelbert Streck.

WoLFF. C. (1716 c 1734): *"Mahematisches Lexicon"*, Lcipzig, Joh. Fricdrich Gleditschcns. Edições de 1716 e 1734

WOLFF, C. (1717 e 1750): *"Der A nfangsgründe ailer mathematischen WissenschqfterT*, Halle im Magdeburgischerç Zufinden in der Rengerischen Buchhandlung. Edições de 1717 e 1750.

WUSSING, H. E ARNOLD, W. (1989): *"Biogrq/ten bedeutender Mathematiker"*, 4.Ed., Berlin, Volk und Wissen Volkseigener Veriag Berlin, 1989.

WUSSING, H. (1989): *"Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik"*, Leipzig, Deutscher Veriag der Wissenschaften, 1989.

ZEDLER, J.R(ed) (1732-54): *"Grosses Vollstãndiges Universal Lexikon*, Leipzig c Halle.

Trabalho apresentado no I Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática realizado em Coimbra em setembro de 1993.

Positivismo e a Matemática de Comte no Brasil no século XIX

Circe Mary Silva da Silva ______

Resumo

Este trabalho aborda três questões complexas. A primeira diz respeito a problemática referente a fundamentação filosófica da grande reforma da Universidade de Coimbra em Portugal em 1772 - a fundação da Faculdade de Matemática. A segunda questão aborda a concepção de matemática de Auguste Comte 11798-1857). especialmente a apresentada em sua Filosofia Positiva (1830) e livro-texto sobre Geometria Analítica (1843). A terceira pane trata da influência do pensamento de Comte sobre a matemática e concepção de matemática no Brasil.

Procura-se. a partir do presente estudo, pesquisar as relações entre positivismo. matemática e ensino, concentrando o interesse na interação entre positivismo e ensino da matemática no Brasil no século XIX.

Por que o tema "Positivismo e Ensino da Matemática"'? Muitos historiadores consideraram a influência do positivismo no Brasil como um fenômeno singular e afirmam inclusive que a matemática desempenhou um papel essencial na introdução e disseminação do positivismo no Brasil. Isso ocorre porque no Brasil houve uma instituição na qual a concepção de mundo positivista encontrou um fundamento sólido - Academia Militar do Rio de Janeiro. A partir daí. o positivismo pode influir sobre a vida política, social, pedagógica e ideológica do país. Os docentes de matemática desempenharam, na realidade, um papel muito importante. A matemática era a disciplina principal nesta escola, e durante mais de um século (1810-1920) a \cademia Militar do Rio de Janeiro foi praticamente a única instituição, onde os estudantes brasileiros podiam adquirir conhecimento matemático sistemático até a abtenção de um título de bacharel ou doutor em matemática. Há um número muito grande de trabalhos sobre o positivismo no Brasil, mas nenhum que estude aprofundadamente as relações do positivismo com a matemática. O presente trabalho precisou superar duas dificuldades: há uma bibliografia muito escassa sobre a concepção de matemática de Comte - até o momento não havia nenhuma análise sobre o único livro-texto de matemática que o filósofo escreveu, que abordasse a geometria analítica a duas e três dimensões; e a segunda dificuldade reside na limitada pesquisa sobre a própria história do ensino da matemática no Brasil.

O estudo da ação do positivismo e sua influência sobre a matemática no Brasil resultaria numa análise empobrecida se não considerassemos o problema como um todo e dentro do seu contexto histórico. Neste trabalho diferenciar-se-á duas etapas no desenvolvimento da história do positivismo: de um lado o positivismo do século XVIII. ou pré-positivismo. e do outro o positivismo do século XIX.

***

Entre os principais representantes do pré- positivismo ou positivismo do século XVIII diferencia-se duas gerações: na primeira nomeamos Condillac (1715-1780), D'Alembert (1717-1783) e Turgot (1721-1788); na segunda: Lagrange (1736-1813) e Lavosier (1743-1794). Uma raiz dessa filosofia encontra-se no empirismo. O empirismo está indissociável mente ligado ao desenvolvimento da filosofia inglesa. O pensador inglês. Roger Bacon (1214-1292) manifesta-se energicamente sobre o significado da experiência. Para Locke (1632-1794), o verdadeiro fundador do empirismo inglês, a fonte de todo conhecimento era a percepção (sensation). Todas as nossas idéias originam-se na experiência, que é em parte externa, isto é, sensation e, em parte, interna, isto é reflexion. As idéias de Locke irão influenciar fortemente os iluministas. De um lado a transmissão do empirismo inglês, que ocorreu através da obra de Condillac. e por outro lado a tradição cartesiana da análise algébrica francesa (representada através de D'Alembert e Lagrange) formaram as raízes francesas do positivismo do século XVIII. A obra de Condillac de certa forma superou Locke. Em seu Traité des sensations, Condillac concebe a sensação como forma fundamental de toda a atividade consciente. Misch. em seu trabalho de 1901, expôs uma descrição concisa das concepções filosóficas da matemática e ciências naturais do século XVIII. que podem ser entendidas com precurssoras do positivismo de Comte. Sua análise concentra-se principalmente nos trabalhos de Turgot e

D'Alembert. Na demonstração desse pensamento Misch persegue a continuidade e descontinuidade do movimento positivista do seculo XVIII e XIX. Neste sentido. D'Alemben e Turgot são considerados os verdadeiros fundadores ao positivismo e a filosofia de Comte teria o ponto culminante do trabalho de três gerações.

Uma primeira característica do espirito positivo surgido com D'Alembert é sua aversão à religião e à metafísica. De maneira resumida pode-se dizer que o sistema filosófico de D'Alembert é caracterizado por

1) O espírito todo do sistema é apoiado na experiência.
2) Todas as especulações metafísicas e todas as hipóteses vagas devem ser banidas da ciência.
3) Deve-se respeitar os limites do conhecimento.
4) As principais características do método para todas as ciências são: simplicidade, clareza. representações exatas e precisas e uniformidade.

No Discurso Preliminar da "Enciclopédia ou Dicionário Raciocinado das Ciências, das Artes e dos Ofícios" D'Alembert diz :

> "Nada é mais incontestável do que a existência de nossas sensações: assim para provar que são o princípio de todos os nossos conhecimentos, basta demonstrar que podem sê-lo: pois. em boa Filosofia, toda dedução que tem por base fatos ou verdades reconhecidas é preferível à que somente está apoiada em hipóteses, mesmo engenhosas. Por que supor que temos de antemão noções puramente intelectuais se. para formá-las. apenas precisamos refletir sobre nossas sensações?" (D'Alembert. 1751. 23).

***

Existe uma crença geral, que afirma que o ensino brasileiro, especialmente a matemática. sofreu uma influência unicamente francesa. Minha hipótese é. que em relação a matemática. especialmente, houve pelo menos dois fatores ou influências. Durante o período colonial e no inicio do império (início do século XIX) dominou uma concepção portuguesa, depois houve uma fone influência francesa. Ambas estiveram estreitamente ligadas ao Iluminismo e ao positivismo do século XVIII. A esta primeira denomino a influência do positivismo do século XVIII. transmitida pela metrópole portuguesa, e a segunda, a influência do positivismo francês de Comte.

Também em Portugal aflorou o positivismo. Ele é oriundo da França e Inglaterra e foi propagado principalmente por dois portugueses: um pedagogo, Verney (1713-1792) e um político. Marquês de Pombal (1699-1782). O positivismo do século XVIII. em Portugal, foi a filosofia que inspirou a Reforma da Universidade de Coimbra. Esta pode ser caracterizada como uma ruptura do sistema antigo e uma renovação nos estudos. No início do século XIX, essa experiência foi transportada para o Brasil e marcou a primeira fase da instrução matemática superior, na Academia Militar do Rio de Janeiro, que se caracterizou por um ensino preocupado com as ligações entre teoria e prática. Nesta instituição será preparado o "solo" para receber uma segunda onda - o positivismo de Auguste Comte.

Marquês de Pombal, reformador de Portugal e déspota do século XVIII, é até hoje um caso difícil para os historiadores. Estes concordam com a tese de que o Marquês de Pombal sustentava uma postura anti-clerical e que sofrerá uma forte influência do ilummismo. A reforma da Universidade foi conduzida por seu pulso firme, todavia o grande ideólogo da reforma foi Verney - sua obra o "Verdadeiro Método de Estudar" orientou a concepção da reforma. Fortemente influenciado pelo empirismo oriundo da Inglaterra, o Marquês de Pombal orientou uma concepção de ensino, a qual pode ser caracterizada como uma parte do positivismo do século XVIII. Em função disso, os estatutos da Universidade de Coimbra mostram-se fortemente impregnados de idéias positivistas.

Luís Antonio Vemey nasceu em Lisboa e fez seus primeiros estudos no Colégio dos jesuítas de Santo Antão, depois no Colégio dos Oratorianos e, por último, na Universidade de Évora, onde graduou-se em Teologia. Em 1736 viajou para Roma onde cursou Teologia e Direito. A mais conhecida obra de Vemey é o "Verdadeiro **Método** de Estudar", publicado, anonimamente, em 1746, embora ele tenha escrito muitas outras obras, algumas delas ainda inéditas (Grande Enciclopédia Brasileira, vol.34). O que nos interessa, principalmente, é a análise da obra "O Verdadeiro Método de Estudar", a qual foi escrita com a intenção clara de servir como orientação para uma reforma geral dos estudos em Portugal.

Para Verney a Filosofia Moderna desenvolveu-se a partir de Copernico. Bacon. Galileu. Descartes e Gassendi. Ate o inicio do seculo XVIII dominava em Portugal a Filosofia aristotelica. tanto nos colégios quanto nas universidades. Em outros países europeus as idéias modernas na estavam mais divulgadas. A Filosofia, para Verney. e o conhecimento das coisas que há no mundo. das nossas acões e do modo de as regular para conseguir o seu fim (Verney. .01.3.1950. 21). Verney atribui pouco crédito às conjecturas. Ele conclui, após ter apresentado uma exposição sobre os estudos filosóficos, que: "o verdadeiro filósofo deve persuadir-se que nós. neste mundo, sabemos pouquíssimas coisas com certeza, e das causas e os efeitos naturais sabemos ainda menos: e que é melhor saber pouco com certeza que acumular conjecturas e não concluir nada" (Verney. vol.3. 1950. 252).

A lógica que ele segue é a de Locke. O plano de uma lógica moderna que Vemey apresenta é um resumo das idéias contidas no "Essav Concerning Human Understanding" de Locke. A origem das idéias não é. conforme Descartes apregoa, inata: "Nós não trazemos da barriga da mãe conhecimento algum: todos os conhecimentos adquirimos depois de nascidos [...] São pois os sentidos as principais portas pelas quais entram as idéias na alma|...]".

O fato de Verney inclinar-se mais para o empirismo. aproximou-o mais das idéias de Newton do que das de Descartes. Esta mesma tendência será observada nos Estatutos de 1772. com relação a orientação dos conteúdos matemáticos. Segundo Salgado Júnior, as idéias de Newton propagaram-se em Portugal, em torno de 1737. com o livro de Jacob de Castro Sarmento "Theorica verdadeira das Marés, conforme Isaac Newton etc". Para Verney a Física é a ciência que examina a natureza do corpo e do espírito mediante efeitos conhecidos. Para o conhecimento dos fenômenos físicos Vemey pressupõe os conhecimentos aa matemática. Para o autor a matemática não é independente da física, ela é uma parte da física, estritamente falando.

Verney considera que os conhecimentos matemáticos tem um caráter exemplar: é através ca matemática que se aprende a expor bem em todas as matérias: sem ela não se pode entender os filósofos modernos e. é através dela que se alcança um entendimento pleno de todos os conhecimentos. O mesmo caráter de ciência "exemplar" está claramente exposto nos Estatutos. como justificativa para a criação de uma faculdade de matemática. Ainda no mesmo texto de Verney localizo aquilo que considero como o germe para a idéia da criação de um curso completo e independente para o estudo da matemática. "Além destas escolas (1) , deve haver uma escola de Matemática, na qual não só se explique a Geometria, mas todas as partes da Matemática, para que aqueles que não são filósofos, e que querem saber alguma coisa dela. o possam conseguir. Este mestre deve cada ano explicar sua matéria: por exemplo: Trigonometria. Astronomia, Náutica, Gnomonica. Arquitetura Militar. Mecânica, de sorte que em certo número de anos complete o curso de matemática" (Vemey, vol 5, 1950. 84). Os principais pontos da concepção filosófico-científica e pedagógica de Vemey são as seguintes:

- A metafísica dilui -se na lógica e na física.
- A parte central da filosofia encontra-se na física.
- Não há nenhum princípio especulativo inato. Todo o conhecimento é adquirido após o nascimento.
- Sobre as causas dos fenômenos naturais sabemos muito pouco.
- A fim de aprender necessitamos seguir o caminho da experimentação.
- Para obter algum conhecimento sobre a natureza precisamos prestar atenção ao que a experiência nos mostra.
- O método de ensino deve partir do geral para o particular.
- É importante observar a relação entre teoria e prática a fim de se aprender alguma coisa
- Sem os conhecimentos matemáticos não é possível entender a filosofia moderna.

Pode-se dizer, de forma ampla, que as idéias de Vemey foram precursoras, em Portugal, do movimento positivista surgido na França. Vemey foi um ideólogo que conhecia muito bem a situação do ensino em Portugal, por isso o seu trabalho mostra-se tão crítico e radical. Ele criticou duramente o abandono do ensino da matemática na Universidade, bem como a orientação ao ensino feita pelos jesuítas. Sua intenção era estimular sua pátria para um grande desenvolvimento. O Marquês de Pombal, que possuia uma visão muito prática para o conhecimento da sociedade, linha intenção idêntica. Este espirito pratico foi herança da Inglaterra. onde ele esteve entre 1740 e 1744 . Como politico ele podia colocar cm pratica suas ideias avançadas. para a época, sobre uma renovação da vida política, econômica e social de eu pais.

() dualismo entre teoria e prática, ou lógica e empirismo. ou subjetivo e objetivo, ou estrato e concreto é um tema com que sempre estiveram ocupados os filósofas. A fim de entender essa problemática, é preciso salientar antes qual o papel ou significado que ambos os conceitos complementares teoria e prática desempenharam nesse estudo.

O verdadeiro espírito que orientou a reforma de Portugal apoiou-se na tentativa de estabelecer uma nova relação entre teoria e prática. Era preciso estimular o surgimento de uma nova sociedade segundo o modelo inglês. Para isso necessitava-se de um novo tipo de aquisição do conhecimento, orientado pela experiência em comércio, navegação e atividade Industrial.

Podemos afirmar que a reforma pombalina e sua orientação na relação da teoria e prática fortaleceu a experimentação, e ainda, que esta relação foi amparada através da reforma institucional e organizacional. Este novo elemento desempenhou um papel significativo, no Brasil, na medida em que conduziu ao estabelecimento dos fundamentos institucionais, os quais permitiram que o positivismo de Comte pudesse se desenvolver e propagar.

Foi apenas na metade do século XIX. e em alguns países somente no início do século XX. que a matemática e as ciências naturais alcançaram uma certa independência e surgiram. em conseqüência disso, faculdades independentes para essas áreas do conhecimento. A fundação de uma Faculdade de Matemática em Portugal, no século XVIII. representa. portanto, um fenômeno inusitado, principalmente se considerarmos que. na Alemanha, a primeira faculdade para matemática e ciências naturais só surgiu em 1863. em Tübingen. Pombal tinha como objetivo transformar um país. até então constituido essencialmente pela nobreza e uma classe de agricultores, num Estado onde o capital de comércio seria fortalecido e uma nova classe de funcionários públicos seria criada. Tratava-se, para o Ministro, além de uma luta contra o analfabetismo, também do fomento do desenvolvimento de uma indústria. que tornasse o país independente do jugo estrangeiro, principalmente da Inglaterra. Durante o governo de Pombal, Portugal defrontava- se entre duas potências. França e Espanha, as quais ameaçavam a segurança do país. O ministro do rei Dom José procurava uma saída não por meios militares, mas tentava, antes de tudo, fortalecer Portugal econômica e culturalmente, julgando, por isso, importantes as relações com a Inglaterra. Ao mesmo tempo que procurava evitar a dependência econômica de Portugal em relação a Inglaterra, precisava dela para a segurança de seu país.

A reforma de Pombal no ensino foi ampla, mas onde ela alcançou realmente resultados profundos, foi com relação a reforma da Universidade de Coimbra. O desejo de Pombal era elevar o nível dessa universidade aos mesmos padrões de outras universidades de renome na Europa. Para tanto era preciso inovar, e isto foi feito.

Tanto para o Marquês de Pombal quanto para Verney a matemática tinha entre as ciências um lugar elevado, tanto que. nesta reforma a matemática passou a ser uma disciplina obrigatória para todos os cursos, inclusive para os cursos de teologia e direito. Na verdade, a implementação desta resolução, mostrou-se na prática pouco eficaz, e mais tarde, foram revistos os estatutos e modificadas as regras principalmente para os cursos teológicos e jurísticos.

A descrição do curso de matemática inicia mostrando a importância que é atribuída aos estudos matemáticos no campo dos conhecimentos humanos. Aqui percebe-se claramente o caráter "exemplar" da concepção de matemática que possuíam os autores do texto. "Tem as Matemáticas uma perfeição tão indisputável entre todos os conhecimentos naturais, assim na exatidão luminosa de seu método, como na sublime e admirável especulação das suas doutrinas que elas não somente em rigor ou com propriedade merecem o nome de ciências; mas também são as que tem acreditado singularmente a força, o engenho e a sagacidade do homem. Por isso é indispensavelmente necessário, ainda para segurança e adiantamento das outras faculdades, estas ciências tenham na universidade um estabelecimento adequado ao lugar que ocupam ao sistema geral dosconhecimentos humanos |...|" (Estatutos 1772, livro III. 141).

Essa mesma visão exemplar da matemática será encontrada nos positivistas franceses. -- principalmente D'Alembert. Lagrange e Comte. "The predominam characteristic of most nting on scientific method during the seventeenth and eighteentn centunes was a fundamental beneve in the unity of all the sciences" escreve Hankins na sua biografia sobre D'Alemben Hankins 1970.1041. Ao contrário destes. Cauchy vê na matemática um caráter especialista. onde a matemática é apresentada com o caráter de uma disciplina especifica, individual. Com cauchy. no início do século XIX. percebe-se uma radicai transformação da concepção de matemática.

Segundo os Estatutos Pombalinos foi para corrigir abusos, como a tirania dos escolásticos na Universidade, e para reconduzir a ciência ao lugar que ela merece, que criou-se e estabeleceu-se na Universidade de Coimbra a Faculdade de Matemática.

> '|...|Sou servido criar e estabelecer a Profissão Mathematica na Universidade de Coimbra em Corpo de Faculdade!...] para que sirva perpetuamente a todas as corporações de modello[...] E para que no Grêmio delia não somente se conserve, e perpetue o Ensino publico, e geral das Sciencias exactas: mas também se criem Mathematicos consummados. que possam suceder nas Cadeiras, e ser empregados no Serviço da Patria" (Estatutos de 1772, livro III. 145).

Cria-se. então, a profissão de matemático através dos estatutos. Os matemáticos seriam destinados não só ao ensino, como também poderiam servir na Marinha e Engenharia, sem exames prévios, e ainda poderiam ocupar cargos nos ofícios de Arquitetura e no ofício de medidores dos Conselhos. em todo o Reino e domínios.

Apesar das dificuldades iniciais a Faculdade pode finalmente se estabilizar, garantindo a formação de professores de matemática. Ela representa o início de uma especialização na área de matemática e pode ao mesmo tempo ser entendida como um elemento da ampla reforma política-mercantilista da sociedade portuguesa, que antecipa a concepção francesa de escolas especializadas após 1793.

A mesma concepção que orientou a criação dessa Faculdade será transmitida para o Brasil e servirá de modelo para a criação do curso matemático da Academia Militar do Rio de Janeiro. em 1810.

A reforma pombalina encontraria ressonância no Brasil, pela primeira vez, com a fundação da Academia Militar do Rio de Janeiro. Esta instituição constituiu-se num foco de propagação de uma nova mentalidade - ela inaugura no âmbito técnico um novo espírito - o utilitarista e positivista. Antes de discorrer sobre as relações entre o positivismo e ensino da matemática, é mister expor a concepção matemática de Comte.

***

Uma análise da concepção de matemática segundo Comte só é possível dentro do contexto de sua filosofia. Comte não pensa em matemática de forma dissociada de sua concepção filosófica. Comte tentou realizar em sua obra Filosofia Positiva (1830-1842) a síntese dos conhecimentos "positivos" (1) de sua época. Estudando cada ciência em seus princípios, regras e artifícios particulares ele sistematizou o que havia em comum nos métodos e princípios. A maioria dos autores que analisam a obra de Comte, esquecem ou não levam em conta um aspecto fundamental desta obra, que é o fato de que Comte tinha em vista uma "meta" social. A "Filosofia Positiva" é uma resposta a pergunta - qual é o princípio que deve orientar uma sociedade organizada? A Filosofia Positiva é considerada por Comte como a única base sólida da reorganização social. Para Comte a divulgação e propagação da Filosofia Positiva deveria servir para uma radical renovação do conjunto do sistema de ensino, no qual a formação científica constituiria a base do ensino.

Comte constroe sua Filosofia Positiva, baseada nas "Ciências". O ensino deve seguir a ordem com que ele classificou as ciências, ele considera essa obediência como indispensável para a renovação do sistema intelectual. Comte vive numa sociedade em que a ciência alcançou um relativo desenvolvimento, novas áreas do conhecimento surgiram, a técnica se aprimora com auxílio da ciência, e como resultado disso, a sociedade como um todo via a ciência como sinônimo de progresso. Por outro lado Comte percebe o perigo que representa a especialização gerada e clama contra ela. Não há ainda com Comte uma Verdadeira posição critica com relacão a ciência, mas já há uma postura muito clara que e o dilema entre "pesquisa" e "ensino".

pesquisa especializada faz com que se perca a visão do todo. Esta é uma afirmação que Comte irá repetir em todo o "Cours". em sua correspondência e em outras obras. Será .Natamente esta postura que ele salientará em sua abordagem da matemática.

Uma segunda fonte de sua Filosofia está na ligação do sistema de ciências com a função social da ciência e a própria concepção de ciência. Comte aspirou a uma síntese das ciências de seu tempo e ao mesmo tempo fixou os fundamentos para uma nova ciência: a Sociologia. O seu sistema tem dois pilares: de um lado está o método positivo e de outro a classificação Hierárquica. Esta dicotomia também está presente na ciência fundamental - a matemática - inclusive na divisão que estabelece desta em matemática abstrata (álgebra) e a matemática concreta (geometria e mecânica).

O positivismo do século XVIII foi iluminista.contudo a teoria do conhecimento esteve impregnada do empirismo inglês. Nesta orientação empirista Comte introduziu, entretanto, um segundo elemento histórico, que Mill conseguiu identificar tão bem. Enquanto o positivismo do século XVIII procurava uma "fórmula de mundo" ou "leis gerais", para Comte estava claro. que havia a necessidade de uma sintese subjetiva, a fim de ordenar a multiplicidade (variedade) de nosso conhecimento no mundo.

A meta de Comte em seu Curso de Filosofia Positiva não é apenas fazer um tratado sobre as ciências positivas, mas sim considerar as relações de cada ciência positiva com o sistema positivo como um todo. isto é. considerar a dupla relação entre método e princípios. Segundo Comte o verdadeiro espírito positivo surge na superação de um especialismo individualista. Comte apresentou quatro propriedades gerais que caracterizam a filosofia positiva: !) o estudo da ciência positiva nos fornece o único meio racional de por em evidência as leis ogicas do espírito:
2) a filosofia positiva deve conduzir a uma transformação do nosso sistema de educação; 3) o ensino científico pode ser considerado como a base da educação geral, verdadeiramente racional. O estudo das ciências em geral, não tem apenas o objetivo de transformar a educação, mas ela deve também ser o suporte para o desenvolvimento de ciências especializadas; 4) a filosofia positiva pode ser considerada como a única base sólida da reorganização da sociedade.

Comte acentua que não há unidade indispensável senão a unidade do método; quanto a doutrina, não é necessário que ela seja única, é suficiente que ela seja homogênea. A Filosofia Positiva baseia-se em duas leis: a primeira delas refere-se aos três estados do desenvolvimento do pensamento humano e a segunda, é a que classifica e hierarquiza as ciências.

A lei dos três estados é uma espécie de tipologia do pensamento e compreende 3 níveis. Conforme a formulação de Comte esta lei consiste no seguinte: cada uma de nossas concepções, cada ramo de nosso conhecimento, passa sucessivamente por três estados teóricos diferentes: o estado teológico ou fictício, o estado metafísico ou abstrato e o estado científico ou positivo. Ou seja. há três métodos diferentes de filosofar. O primeiro é o ponto de partida necessário à inteligência humana, o terceiro, seu estado fixo e definitivo e o segundo é o que se destina a servir de transição entre o primeiro e o terceiro.

A segunda lei, que classifica e hierarquisa as ciências, é a denominada lei enciclopédica. Para Comte a fim de se obter uma classificação natural e positiva das ciências fundamentais, é necessário que se proceda a uma comparação dos diversos fenômenos. É na dependência dos fenômenos que se encontrará a dependência dos diversos estudos científicos. Apoiado nessa premissa Comte procede, então, ao que poderíamos chamar de classificação das ciências, tendo como ponto de partida uma classificação dos fenômenos.

Comte mesmo observa que há uma lacuna nesta classificação. Falta determinar o lugar da matemática. Ele diz ter feito isso propositadamente, considerando-se a importância da matemática. Mas, parece que na realidade o problema não é bem este. Comte teve dificuldade de classificar a matemática, exatamente por causa de seu objeto. Via a matemática sob duas perspectivas: de um lado como uma física, como uma ciência natural, e de outro, como uma lógica, como um método, como a base para a Filosofia Positiva. Este duplo caráter da matemática se expressa terminologicamente na sua distinção entre matemática abstrata e matemática concreta. A matemática, portanto, é um caso especial dentro aa teoria classificatória de Comte. Embora para ele. ela seja uma física. e portanto uma ciência, e ao mesmo tempo uma lógica. ele precisa vê-la como um todo. a fim de que ela entre na classificação e hierarquização as ciências em seu sistema. Comte supera o problema colocando-a como o ponto de partida de da Filosofia Positiva. Ela é a mais simples e geral de todos as ciências. Então, as ciências herarquizam-se na fórmula enciclopédica em: matemática, astronomia, física, química. biologia e sociologia.

\ interessante propriedade desta lei enciclopédica reside no fato de que ela constitui-se um verdadeiro plano, totalmente racional, para a formação científica. Somente peia sua coservância e possível alcançar uma verdadeira instrução integral. Embora o método seja fundamentalmente o mesmo em cada ciência, cada uma delas desenvolve um processo caracteristico. de tal forma que só é possível alcançar o método positivo, quando cada ciência foi estudada segundo a ordem enciclopédica.

A propriedade mais interessante desta lei enciclopédica, segundo Comte. reside no fato de que é ela que determina o verdadeiro plano de uma educação científica, inteiramente racional. É somente através da observância desta ordem hierárquica, que se consegue atingir uma verdadeira educação integral. Embora o método seja essencialmente o mesmo em toda a ciência, cada ciência desenvolve processos característicos, de tal maneira que so se adquire o verdadeiro método positivo quando se estuda cada uma das ciências fundamentais segundo a ordem enciclopédica.

A concepção de Comte sobre o conhecimento pode ser entendida como uma concepção funcional do saber. O sistema de Comte se fundamenta sobre dois pilares: o método de um lado e a enciclopédia dos conhecimentos de outro lado. Uma concretização disto pode ser vista na matemática. quando ele a divide em abstrata e concreta.

Comte queria dar uma visão geral sobre o conjunto da matemática, a fim de que a pesquisa especializada não obscurecesse a visão da ciência como um todo. Esta tendência generalista de Comte justifica-se por causa de sua preocupação constante com o ensino: o importante é a aquisição de uma formação geral. A base segura desta formação reside no conhecimento de todas as seis ciências fundamentais, pelo menos nos seus aspectos mais gerais. Como base para o ensino ele elegeu a disciplina mais geral e mais simples, em sua concepção, ou seja a matemática.

Comte percebia que o constante desenvolvimento da matemática tomava-a cada vez mais especializada e que o progresso e a pesquisa faziam com que se perdesse a visão de conexão entre as partes desta ciência. O progresso, ao qual ele se referia, não se limitava apenas à teoria, mas também às suas aplicações. Em sua opinião, era necessário que as partes se unissem num sistema único a fim de que esta mesma ciência não perdesse o seu caráter filosófico e a fim de que esta ciência se preparasse para novos progressos.

De uma definição de matemática como "a ciência da quantidade", que é ainda uma concepção defendida nos séculos XVII e XVIII. vê-se uma transição para um conceito de ciência matemática, onde os objetos passam a ser relações, funções. A esta nova linha de pensamento pertence também Comte.

Para Comte a matemática como ciência positiva só iniciou com Descartes. O surgimento da ciência é marcado pelos nomes de Bacon, Descartes e Galileu. momento este em que o espírito positivo começou a se manifestar. A descoberta da Geometria Analítica por Descartes. segundo ele. mudou a face da ciência matemática. Na opinião de Boyer. esta revolução que Comte e Chasles viram é exagerada. Comte viu nesta descoberta o verdadeiro germe de todos os progressos posteriores, porque foi o resultado de uma aproximação que se estabeleceu entre dois saberes que anteriormente estavam isolados. Isto constituiu em na fantástica união do abstrato (álgebra) com o concreto (geometria). O mundo de Comte é ainda o mundo cartesiano. que rejeita todo o conhecimento provável e aceita somente aquelas coisas que podem ser conhecidas sem nenhuma dúvida.

A matemática abstrata é formada apenas pelo cálculo, ou seja. pela aritmética, álgebra e análise, enquanto que a matemática concreta compreende a geometria e a mecânica. O caráter esotico cia matemática concreta é essencialmente experimental, tísico c tenomenalístico. enquanto que o abstrato. ao contrario, é em primeira linha lógico e racionai.

Quando Comte pensa em termos de matemática abstrata, ele vê apenas uma lógica, uma linguagem, um método. portanto não tem um objeto matemático, todavia, na matemática concreta. ele tem objetos matemáticos, os quais são oriundos do mundo empírico.

Com o objetivo de facilitar a análise da concepção de matemática, segundo Comte. elegi inicialmente algumas categorias, tais como. a oposição entre "matemática abstrata e matemática concreta". termos introduzidos pelo próprio Comte. e uma outra polaridade, a qual denominei "Matemática exemplar versus matemática especializada". Ambos os pares de categoria não são meras abstrações, mas concebidas a partir de um ponto de vista que parece apropriado para entender o papel de dois matemáticos: Lagrange e Fourier. na obra de Comte. Fourier incorpora de modo exemplar a conexão entre "matemática abstrata e concreta", enquanto que a concepção de Lagrange é para Comte. do ponto de vista filosófico, perfeita e ideal. A concepção algebrista de matemática de Lagrange parece ser para Comte também a base ideal para o ensino. Isto insere-se numa tendência geral, na qual o ensino da matemática é essencialmente orientado por uma visão algebrista do século XVIII.

Na Filosofia Positiva o autor manifesta o seu entusiasmo pela simplicidade e perfeição lógica da concepção de derivadas de Lagrange. que conseguiu estabelecer a unidade filosófica no conjunto da análise matemática. Não há dúvidas para Comte quanto ao valor da fundamentação filosófica da concepção de cálculo de Lagrange. É neste trabalho que Lagrange conseguiu reduzir a análise transcendente a um sistema puramente algébrico. Não obstante reconnecer a importância da contribuição de Lagrange. não se furta de observar que este sistema não é apropriado para as aplicações (Comte. 1830. 109).

A idéia básica de Lagrange foi fundamentar o cálculo sobre uma base algébrica. Uma justificativa clara sobre a sua refutação em empregar os infinitamente pequenos ou seja sob o que ele entende sobre verdadeira metafísica de seus principios será dada no "Discours sur 1'objet de la théorie des fonctions analytiques" publicado no Journal de 1'École Polytechnique cm 1799. Neste artigo Lagrange critica a forma pela qual Euler. Maclaurin e D'Alembert empregaram as considerações sobre os limites, pois segundo ele. Euler para evitar os infinitamente pequenos considerou as diferenciais nulas, chegando assim a expressões vagas e absurdas como a divisão de zero por zero. Lagrange não exclui a possibilidade de que se possa fundamentar rigorosamente o cálculo através da consideração dos limites. Todavia, segundo ele. esse modo de proceder permite que elementos "estranhos" ao espírito da análise penetrem nos seus fundamentos. Ao contrário, a verdadeira metafísica do cálculo, segundo Lagrange, é de que façam parte dos fundamentos do cálculo apenas os primeiros princípios e as operações fundamentais destes princípios. O Cálculo Diferencial deve ser, portanto, reconduzido a uma origem puramente algébrica.

Comte partilha com Lagrange a mesma opinião: os infinitésimos são para ele "entes metafísicos" que não podem servir como fundamento de uma ciência. Todavia, Comte manifestará uma posição contrária à Lagrange com relação a alguns aspectos da mecânica racional: particularmente no que diz respeito a composição de forças.

> "O Cálculo das funções tem o mesmo objeto que o Cálculo diferencial tornado como mais amplo, [...].seria melhor associar o Cálculo diferencial imediatamente à Álgebra, da qual pode-se dizer que este foi, até o presente, uma ciência separada." (Lagrange, 1806. 7).

Uma concepção semelhante a Lagrange sobre a álgebra pode ser vista com Comte: "[...] viu-se que a álgebra pode ser definida, em geral, como tendo por objeto a resolução das equações aquilo que, ainda que pareça a princípio muito restrito, é contudo bastante abrangente, contanto que se tome tais expressões em toda sua acepção lógica, o que significa transformar as funções implícitas em funções explícitas equivalentes; da mesma forma, a aritmética pode ser definida como destinada à avaliação das funções. Assim, contraindo as expressões no grau mais elevado, creio poder dar claramente uma idéia de tal divisão, digamos, como farei para evitar as perifrases explicativas, que a álgebra é o cálculo das funções, e a aritmética é o cálculo dos valores" (Comte, 1930,89).

o

Até o século XIX a álgebra se limitava quase que exclusivamente a resolucão de equacões algébricas. Comte partilhava também dessa concepção, não tendo ainda uma visão geral da mesma. ,

Segundo Comte mais do que qualquer outro matemático, foi Fourier. aquele que conseguiu. de um modo muito amplo, penetrar na filosofia da matemática. Isto significa que foi ele que melhor entendeu a relação intima e contínua entre o abstrato e o concreto.) "relation intime et continue de 1'abstrait au concret"). A relação entre o concreto e o abstrato resume de uma forma simples e clara as idéias de Comte sobre a filosofia da matemática: ser um matemático-filósofo, significa "saber unir o abstrato ao concreto e ainda poder fornecer aplicações concretas para teorias abstratas e vice-versa. Isto significa, em última instância, poder produzir uma relação entre o objetivo e o subjetivo.

Comte via em Fourier um modelo de matemático-filósofo. por ter conseguido dar. no exemplo do fenômeno do calor, uma boa possibilidade de interpretação abstrata. Fourier estabeleceu o modelo teórico para o fenômeno do calor, ou seja estabeleceu equações diferenciais para traduzir o fenômeno. Além disso, propôs urna teoria geral sobre o desenvolvimento de funções em séries trigonométricas. que possibilitavam resolver estas equações. E não apenas isso. a teoria de Fourier era uma teoria que poderia ser aplicável em varias áreas da matemática.

A teoria do desenvolvimento de funções em séries trigonométricas de Fourier ainda não está colocada em bases rigorosas. Ele considera que qualquer função possa ser desenvolvida em uma série trigonométrica. Tanto Fourier quanto Comte e outros matemáticos da época ainda mostram dificuldades de compreender o que é uma função. Comte não consegue definir uma função abstrata, ele se contenta em enumerar um conjunto de funções analíticas. Para ele. assim como para Lagrange uma função é quase um sinônimo de uma equação. É mais precisamente com Dirichlet que discussões mais aprofundadas sobre o tema serão desenvolvidas. Em seu famoso artigo de 1829, publicado no Journal de Crelle levantará questões sobre a integrabilidade de funções e definirá uma função que é descontínua em todos os seus pontos. Tanto Fourier quanto Comte viam na matemática o modelo de ciência par excelence. Ambos partilhavam da crença que a análise matemática é o instrumento para se entender as outras ciências, é a ferramenta, sem a qual não se pode fazer progressos nas demais ciências.

Com o intuito de alcançar uma visão geral da concepção de matemática de Comte pode-se dizer, que para ele os objetos da matemática, e aqui me refiro a matemática concreta, não são construídos. Os objetos da matemática são dados, eles existem, são seres quase empíricos. Comte não formulou nenhuma teoria nova na matemática, seu mérito parece ter sido o de ter organizado os conteúdos de matemática de uma forma sistemática, de tal maneira que eles pudessem ser aplicados no ensino. Para concluir: as preocupações levantadas por Comte sobre a dicotomia entre pesquisa e ensino da matemática, quer me parecer, continuam atuais, e suas idéias sobre o assunto, merecedoras de nossa atenção.

***

Assim como o positivismo de Comte teve maiores repercussões na América Latina, e principalmente Brasil, do que na França, o mesmo aconteceu com o livro-texto de Comte sobre geometria analítica. Durante parte do século XIX, os livros-texto 1 utilizados nas academias militares do Brasil foram principalmente os de Lacroix. Com a infiltração do positivismo nas academias militares e escolas de engenharia, também o livro de Lacroix para a geometria analítica foi substituído pelo livro de Comte. Este só teve duas edições: a primeira em 1843 em Paris, e a segunda, em convênio com uma editora franco-brasileira, no ano de 1894, contando com um preâmbulo sui-generis - a "Géométrie", de Descartes. O livro de Comte sobre a geometria analítica foi muito utilizado na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, a ponto de em 1881 ter sido feita pelos próprios alunos da Escola uma tradução (incompleta) em língua portuguesa.

[1] Traité de caleul différentiel et integral; Traité de géométrie descriptive: Traité elémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de 1'Algèbre à la Géométrie.

Para Comte a geometria analítica era a parte mais importante da matemática e. o seu estudo o passo decisivo para a iniciação nos conceitos matemáticos. Minha interpretação para esta entusiástica preferência de Comte reside no tato de que Comte acreditava ter encontrado na geometria analítica a realização de seu princípio: " a íntima relação entre o abstrato e o concreto". Geometria analítica para ele significava a combinação do empirico com a lógica. Para Comte o cálculo nada mais era do que um meio de se obter conclusões lógicas e teríamos uma idéia errônea, se o utilizássemos como uma base segura para fundamentar fatos. Daí ele afirmar que a base da geometria analítica repousaria sobre a geometria euclidiana - essa é uma herança de Descartes. Por outro lado. ainda segundo Comte. a geometria ganharia através da aritmética e da álgebra uma generalização, ou seja. a geometria analítica só alcançaria um estágio de desenvolvimento generalizante quando a geometria utilizasse métodos algébricos.

Comte faz uma distinção entre a geometria analítica e a euclidiana. Para ele. a geometria euclidiana. ou elementar trata das indagações geométricas como casos particulares, como um estudo de casos, de soluções especiais. A geometria analítica, por sua vez. visa à generalização das indagações geométricas e dos métodos, além da criação de novos métodos gerais.

O verdadeiro espírito da geometria analítica consiste numa necessária interação do ponto de vista abstrato (álgebra) com o concreto (geometria). A relação da álgebra com a geometria consiste no fato de que a representação de linhas (curvas) permite ser determinada por equações, e. por outro lado. a relação da geometria com a álgebra, permite que as equações possam ser interpretadas como linhas.

Para Comte. a geometria analítica era um bom exemplo da aplicação de seu princípio de complementariedade entre o abstrato e o concreto: por isso. era imprenscindível mostrar que existia uma grande harmonia entre a álgebra e a geometria. isto é. que objetos geométricos teriam "sempre" um equivalente algébrico e vice-versa, isto é. toda equação deveria ser expressa por uma linha. Neste sentido. Comte via a geometria analítica como um paradigma para a matemática toda. Por outro lado estava claro para ele que esta harmonia não era completa. Ele reconhecia haver algumas lacunas ou imperfeições, as quais perturbavam a bela unissonância de ambas as áreas da matemática. Estas lacunas resultavam da dificuldade de representar curvas descontínuas por equações algébricas, bem como o problema da interpretação de soluções imaginárias para as equações. Uma outra lacuna, séria para Comte. residia na inexistência de um princípio classificatório das curvas. Ele rejeitava a classificação de Newton, e de Euler, através do grau da equação, como um processo empírico. Em lugar desse. ele procurou um outro princípio - de acordo com o número de termos da equação. Sobre este princípio classificatório Euler já havia se manifestado em 1748, dizendo tratar-se de um princípio totalmente insuficiente.

Um aspecto essencial da geometria analítica de Comte reside no papel relevante que ele atribui ao método. A generalidade é a fundamental característica do método. Todo método, que não conduza a uma generalização, tem um significado secundário, segundo Comte. Nisso. Comte se aproxima muito da tradição cartesiana, e mesmo do estilo de Euler. Todavia, Comte. muito mais que seus antecessores, atribuía à álgebra um valor muito grande (e talvez seja por isso que muitos classificam a matemática de Comte como a matemática do século XVIII onde a álgebra era a ciência "par excelence") e entendia que as concepções geométricas apenas poderiam alcançar uma generalização através dos conceitos analíticos.

Resumidamente, pode-se dizer que Comte considerava a geometria analítica como uma ciência fundamental e de extrema relevância. A geometria euclidiana era para ele apenas um ramo especial, sem o caráter de generalidade da geometria analítica. Neste ponto, Comte partilhava inteiramente das idéias de Poncelet e Chasles. Outro tipo de geometria praticamente não existia para Comte(não há referências a geometria projetiva, nem tampouco às recentes geometrias não-euclidianas). O núcleo da geometria analítica reside no método, o qual é oriundo da matemática abstrata.

Um exemplo da influência da concepção de Descartes sobre Comte é percebida logo no início de sua obra, quando Comte apresenta a construção de fórmulas. Esta característica é observável em todos os livros-textos de geometria analítica da época, por mim analisados (Bezout, Lacroix, de Fourcy e Biot). Mas, Comte afasta-se logo de Descartes, e. a exemplo de Euler, coloca no conceito de função um papel central de seu texto. Embora a concepção de lição dada por Comte diferencie-se muito pouco do conceito de equação, esta muito próxima das concepções de Euler e de Lagrange.

O mestre francês classificou as funções em concretas e abstratas. As funções abstratas em Numero de dez. foram enumeradas por ele como expressões analíticas, mais ou menos no mesmo sentido da classificação feita por Euler.

Comte estava muito bem informado sobre os desenvolvimentos da ciência da sua época e conhecia a fundo a teoria do calor, desenvolvida por Founer. Como é sabido Founer apresenta em sua obra teoria analítica do calor funções descontínuas desenvolvidas em séries trigonométricas. Comte mantinha-se um pouco reticente com tais funções e. como outros contemporâneos, via estas funções como expressões um tanto estranhas. No decorrer do seculo XIX. a compreensão do que é função será controvertida e evoluirá.

Assim como Euler. Comte soube reconhecer muito bem a grande importância do sistema de coordenadas, bem como das transformações de coordenadas. É por aí que ele iniciará a sua abordagem da geometria analítica. Quanto à transformação de coordenadas, não há novidades na obra de Comte. Ele segue aquilo que é usual nos livros-textos. ou seja. a utilização das relações trigonométricas para expressar as relações entre as variáveis. Mesmo no moderno e bem conceituado livro de Salmon (1848). "geometria Analítica das Cônicas". a transformação de coordenadas segue o mesmo estilo que o de Comte. O mestre francês chegou a perceber que uma transformação de coordenadas é uma aplicação, mas o que faltou a ele. como a outros contemporâneos, foi a notação matricial.

Como Comte concebeu a sua geometria analítica? Uma primeira perspectiva que se pode assumir é considerar os objetos geométricos como existentes e procurar os equivalentes analíticos para esses objetos, isto é. partir da geometria para a álgebra. Essa perspectiva Comte assume na primeira parte de seu livro acima referido. Exemplo extraído de seu texto: o círculo é um objeto geométrico, um objeto que possui uma descrição geométrica: com a ajuda de um sistema de coordenadas, é possível associar a este objeto uma fórmula $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, que é o seu equivalente analítico.

A segunda perspectiva é. partindo de equações, procurar o objeto geométrico correspondente, ou seja, procura-se responder à pergunta: como se pode representar geometricamente uma equação?

Como é possível considerar esta segunda perspectiva? São necessários, segundo Comte. métodos analíticos que sirvam de suporte para esse representação. Antes de Comte apresentar a segunda perspectiva da geometria analítica, ele formula uma série de teorias analíticas, as quais podem ser utilizadas para o estudo de quaisquer curvas. Para ele, a procura de tais métodos deveria ser um objetivo da geometria analítica. Comte formulou sete teorias a saber número de pontos para determinar cada tipo de curva, tangentes, assíntotas. diâmetros, pontos centrais. semelhança de curvas e quadraturas. Uma pergunta que surge imediatamente é: de onde se originam estes métodos? Quase todos eles já aparecem no "Introductio" de Euler. O tema "semelhança de curvas" é raramente encontrado nos livros-texto de geometria analítica da época. É na abordagem da semelhança de curvas que Euler dá uma benéfica contribuição para o desenvolvimento do conceito de transformação. Comte não vai muito além de Euler. Ele demonstra, analiticamente, a semelhança de várias curvas, como por exemplo, a semelhança de duas elipses.

A análise do livro de Comte sobre a geometria analítica, deixa claro que ele não era um matemático, mas sim um filósofo. Quando Comte aponta as lacunas da matemática, ele não está interessado em resolvê-las. mas sim em discuti-las, em ver que implicações elas trazem para o desenvolvimento desta ciência. Na sua opinião, o importante para se alcançar uma idéia do todo de uma teoria é através de um processo sistemático; a geometria analítica aperfeiçoa a ciência geométrica através de métodos analíticos. Em razão disto esta ciência se apóia em bases verdadeiramente racionais. Os objetos geométricos são dados. Isto significa que eles não serão construídos, e que nós precisamos apenas encontrar seus equivalentes analíticos, a fim de poder interpretar esses objetos. Ao mesmo tempo podemos ver os objetos da geometria analítica com uma visão puramente analítica, como posteriormente foi feita via teoria dos invariantes.

primeira questão a ser abordada trata da influência do positivismo sobre a matemática - tanto na fundação da Academia Militar quanto na orientação de seu curriculo - isto e. no fato de que a matemática tornou-se a disciplina principal nesta escola. A segunda concerne ao papel desempenhado por esta escola na propagação do positivismo e nos efeitos deste. Outra questão diz respeito a influência do pensamento de Comte sobre o ensino da matemática.

Naturalmente, estas relações ocorreram em diferentes etapas da história da matemática brasileira no século XIX. Por exemplo, a influência do pensamento de Comte ocorreu relativamente tarde, no início da segunda metade do século passado. O primeiro livro-texto em que se percebe uma influência ampla da matemática de Comte. especialmente de sua geometria analítica, só surgirá em 1904 com Roberto Trompowsky, professor da Escola Militar do Rio de Janeiro.

A fundação da Academia Militar do Rio de Janeiro foi sem dúvida uma herança da reforma pombalina. em Portugal. Relativo a esta questão há uma série de trabalhos com bons resultados: Torres (1943). Lins 1964). Costa (1967). Motoyama (1981), Tobias (1985) e Paim (1986).

Os historiadores defendem a tese de que o positivismo foi sem dúvida um fenômeno único no Brasil. A ligação do positivismo com a matemática ou melhor com os docentes das escolas militares é um fato histórico comprovado. Os historiadores brasileiros reconhecem o papel decisivo desempenhado pelos docentes de matemática e ciências tísicas para a introdução e propagação das idéias positivistas no meio acadêmico e intelectual brasileiro. Há também muitas pesquisadores da história da educação brasileira que buscam determinar que influência exerceu o positivismo sobre o ensino brasileiro. Segundo Tobias, a Academia Militar do Rio de Janeiro herdou a ideologia de Verney-Pombal. Nesta escola, que foi fundada com o objetivo de formar oficiais militares, imperou o cientificismo e o ensino foi fortemente orientado para a matemática e as ciências experimentais. Neste ambiente propício, as idéias de Comte importadas da França encontraram um solo fértil onde puderam germinar. Para justificar a aceitação do positivismo pelos docentes desta escola. Tobias diz o que segue:

> "Os oficiais não tinham naquela época nenhuma filosofia, mas eles conheciam muita matemática e ciências exatas, por isso a filosofia de Comte, que negava a metafísica e concentrava-se nas ciências positivas alcançou entre eles enorme aceitação" (Tobias. 1986. 185ff).

A Academia Militar do Rio de Janeiro e o Seminário de Olinda foram os responsáveis pela disseminação do cientificismo, que foi transportado de Coimbra para o Brasil.

A influência positivista manifestou-se, principalmente, nas disciplinas de matemática. ciências naturais e sociologia. No Brasil, a burguesia dividia-se em dois ramos, de um lado representada pelos tradicionais proprietários de terras e por outro, uma nova burguesia, onde no núcleo encontrava-se intelectuais, médicos, engenheiros, militares e comerciantes. O positivismo de Comte representava a ideologia da nova burguesia. Esta filosofia era contra a monarquia, contra a ligação do estado com a igreja, contra a igreja em si e, principalmente contra a orientação descentralista apoaida pelos latifundiários. A influência do positivismo de Comte expressou-se mais do que tudo na reforma do ensino realizada por Benjamin Constant. O cientificismo de Comte representava uma espécie de filosofia progressista desta nova classe burguesa. Benjamim Constant era o representante mais distinguido desta classe. Na opinião de Cruz Costa "o fato de o positivismo ter-se propagado no Brasil principalmente devido aos egressos da Escola Central e Colégio Militar, parece um fenômeno muito compreensível, uma vez que na doutrina positivista a matemática desempenha um grande papel. Este fato explica o êxito do positivismo no sul do Brasil, onde os matemáticos e engenheiros foram muito ativos. O enorme papel da matemática no quadro da filosofia positiva e o espírito positivo passado pela reforma pombalina, explicam em parte, como surgiu o interesse dos engenheiros militares pela filosofia de Comte. Outro fator decisivo para explicar esse entusiasmo residia no fato de que. a nova burguesia anticolonialista, aspirava um estado independente, e para tanto a orientação cultural viria de Paris e não de Lisboa ou Roma. O modelo da Inglaterra não fazia muito sentido, uma vez que ela como um estado economicamente forte se encontrava em ligação natural com os grandes proprietários de terra, que queriam introduzir na Inglaterra seus produtos agrícolas. "Os republicanos viam na filosofia de Comte, fundamentada na ciência, a ase de uma política racionai e antecipavam de alguma forma uma definitiva reconciliação da ordem e progresso" (Cruz Costa. 1967. 150).

Entre os muitos trabalhos sobre o positivismo no Brasil encontra-se o de Lins. Neste trabalho o autor defende a tese de que os docentes de matemática das escolas militares desempenharam um papel decisivo na propagação do positivismo no Brasil. A justificativa para isso. segundo ele. não se encontra na ligação da matemática com o positivismo, desde o século XVIII. mas sim no tipo de atração do trabalho de Comte: "por causa de sua clareza e superioridade pedagógica, os trabalhos de Comte exerciam uma enorme atração entre os docentes das escolas militares" (Lins. 1964. 254ff).

Assim como na França, nasceu também no Brasil uma contradição entre comtismo e cientificismo. e os adeptos mais ferrenhos da Filosofia Positiva dão as costas ao progresso científico. Uma vez que engenheiros militares não tinham praticamente nenhuma experiência em pesquisa científica, surgiu aqui como em outros países uma certa oposição entre a ciência como pesquisa e a ciência construída como uma prática técnica. O grupo destes práticos engenheiros, militares e médicos), que não eram ativos em pesquisa, procuravam por uma filosofia fechada na ciência, a qual lhes possibilitasse manter uma relação positiva e definitiva com a ciência. Este é possivelmente o motivo do êxito do positivismo nos meios acadêmicos militares (Motoyama. 1981.416).

Pode-se em resumo construir a seguinte imagem da situação: através da influência da reforma pombalina o Brasil estava maduro para um positivismo cientificista e para um ensino com acentuação nas ciências matemáticas e experimentais. Especialmente a Academia Militar do Rio de Janeiro herdou o espírito da reforma pombalina. Ao mesmo tempo tornou-se uma fonte de propagação do pensamento positivista no Brasil.

Entre 1832 até 1842 alguns brasileiros assistiram cursos livres com Comte (aulas particulares). Alguns nomes são: José P. de Almeida (1836-1837), Patrício d'Almeida e Silva. Agostinho Roíz Cunha (1837-1839), Antonio Campos Belos. Felipe de Araújo Pinho e Antonio Machado Dias. que tornou-se professor de matemática do Colégio Pedro II. Outros foram alunos ouvintes ("auditeurs externes") da Escola Politécnica no mesmo período: Pinho de Araújo (1839), recebeu o título de bacharel em matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Paris em 1842,Azeredo Coutinho (1829,1832), Antonio Machado Dias (1837), etc.

Em 1858 foi publicado na Bahia o livro intitulado "Elementos de Matemática" de Antonio Ferão Muniz de Aragão (1813-1887). Este é o primeiro livro de matemática em que a Filosofia Positiva de Comte é extensivamente comentada numa introdução de quarenta páginas. Segundo o sociólogo Nogueira, Aragão teria também freqüentado cursos com Comte e a partir de 1836 iniciado a propagar as idéias positivistas na Bahia, local onde foi docente de matemática (Nogueira, In: Ferri e Motoyama, 1981,186). No prefácio do livro já citado, Aragão acentua o objetivo de seu livro: "O meu objetivo é apresentar a matemática sob um ponto de vista filosófico. Será levado em consideração especialmente o método, sem contudo descuidar-se dos importantes princípios" (Aragão, 1858, xiv).

Aragão via a matemática como uma ciência útil pelas seguintes razões: 1) seu objeto é o mais simples. 2) os princípios dessa ciência são claros e evidentes, 3) ela está fundamentalmente definida, 4) suas demonstrações são rigorosas e lógicas; 5) ela é uma ciência verificável.

O estudo matemático é para Aragão, assim como para Comte. exemplar e instrumental, a matemática prepara para todos os demais estudos. Embora a obra de Aragão não tenha desempenhado um papel significativo no ensino, e a referência aqui justifique-se simplesmente pelo fato de seu livro ter sido o primeiro texto matemático fortemente influenciado pelo positivismo de Comte. de qualquer forma tentou implementar reformas no ensino público da Bahia, sem ter tido êxito ("Reflexões sobre o projeto de lei apresentado pela comissão encarregada da reforma da instrução pública"; Aragão, 1860).

Embora em algumas teses de doutoramento da Escola Central[1] haja alusão ao nome de Comte. no período de 1851 a 1869. não se pode afirmar que estas tenham sido muito influenciadas pelas idéias de Comte. Somente 25% do total de 24 teses durante este periodo fazem alguma alusão ao nome de Comte. O periodo mais importante do positivismo irá iniciar na década de setenta e se estenderá até a segunda década de nosso século, conforme Nogueira observa.

Pode-se dizer que no Brasil houve dois grupos positivistas distintos: o grupo ortodoxo. que aceitava a religião da humanidade, com os fervorosos adeptos Teixeira Mendes. Miguel Lemos e Licinio Cardoso, que seguia a orientação matemática da Synthese Subjetiva (1856) e um segundo grupo não ortodoxo, tendo como discípulos Benjamin Constant e Roberto Trompowsky. os quais seguiam a matemática conforme o Curso de Filosofia Positiva (1830) e a Geometria Analítica (1843).

As concepções matemáticas de Benjamin Constant e Roberto Trompowsky refletem exemplarmente a influência de Comte sobre o ensino da matemática no Brasil. Benjamin Constant tornou o livro de Geometria Analítica de Comte conhecido dentro das escolas militares, introduzindo-o em substituição ao livro-texto de Lacroix. até então um dos autores franceses preferidos pelos docentes brasileiros. Um depoimento de um ex-aluno da Escola Politécnica. Claudio Costa Ribeiro, ilustra de certa forma o clima na escola: "Eu li Comte. Na escola nós aprendemos geometria analítica com ajuda do livro de Comte. No início da república (1891-1893) todos os estudantes ou eram positivistas ou tinham alguma simpatia pelo positivismo" (Freire. 1957. 558).

De um lado. Trompowsky orienta-se fortemente em Comte. conforme ele próprio afirma no prefácio de seu livro Geometria Algébrica - "a fonte básica que inspirou este livro foi a Geometria Analítica de Comte". He segue claramente o princípio da relação complementar entre o abstrato e concreto formulado por Comte. Por outro lado. ele distancia-se em alguns pontos do mestre francês, um exemplo disso é que não aceita a estranha classificação das curvas que Comte propõe em sua geometria analítica.

Análises das obras dos autores acima mencionados encontram-se em minha tese de doutoramento (vide referência bibliográfica). Todavia, existem numerosos artigos, livros-texto e material ainda não selecionado merecedores de uma análise que identifique influências positivistas no ensino da matemática e matemática respectivamente. O trabalho de Clóvis Pereira da Silva representa um início desta tentativa. O autor defende a tese de que "no contexto da história da ciência brasileira, percebemos claramente que a doutrina positivista de Comte foi uma das variáveis que bloquearam a inserção de nosso País na corrente de desenvolvimento da Matemática que fluía naturalmente na Europa Ocidental do século XIX" (A. Comte: Suas Influências sobre a Matemática Brasileira, In: Bol. Soc. Paran. Mat. v. 12/13, 1991/2).

O tipo de matemática ministrada nas escolas militares e de engenharia e os trabalhos de pesquisas (teses de doutoramento, artigos publicados, livros-texto, etc), durante o século XIX. estiveram compatíveis com as características do meio intelectual brasileiro, com as características da sociedade, com as características de governo. Devido ao incipiente grau de desenvolvimento sócio-econômico e cultural de nosso país, não foi gerada uma demanda de atividades científicas e tecnológicas, como nos moldes europeus, o que explica, de alguma forma a situação da matemática na época considerada.

A visão generalista e enciclopedista da matemática positivista empolgou os professores de matemática das escolas militares e de engenharia, levando ao extremo de muitos deles só valorizarem aqueles conceitos apresentados na obra "Filosofia Positiva", que Auguste Comte escreveu em 1830 e que retratava bem a matemática do século XVIII. Todavia, a influência positivista foi positivamente maior na área política, onde o militar, político e educador Benjamim Constant recrutou, entre seus discípulos, os ardorosos defensores da república, culminando em 1889, com o fim da era imperial e início do período republicano. Benjamim

[1] Após sucessivas reformas a Academia Militar do Rio de Janeiro se transformou em Escola Militar, Escola Politécnica e, após a república, em Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

Constant é nomeado, então. ministro da instrução e procura pôr em prática sua ideologia cositivista na reforma que implanta em 1890. O ministério teve curta duração.

No período anterior e posterior a República o positivismo no Brasil era sinônimo de "comtismo". O ensino da Matemática servia para divulgar uma filosofia, e assim formou-se ma nova classe, constituída por militares que viam no Positivismo uma forma de realizar os seus anseios de "ordem e progresso". O estudo da matemática permaneceu associado às escolas de engenharia e às academias militares até 1934. quando foram criadas as faculdades de filosofia.

Referências Bibliográficas

Albuquerque. L. [o.J.]: In: Dicionário de Historia de Portugal. vol.II.
Almeida. R.T. [1904]: Lições de geometria Algébrica. Imprensa Nacional: Rio de Janeiro.
Aragão. A.(1858] : Elementos de Matemáticas. Tip. E. Pedroza: Bahia.
Boyer. C. [1956): History of Analytic Geometry. Scripta Mathematica: New York
Brandão. M. [1937): A Universidade de Coimbra. Esboço da sua história. Coimbra.
Carnot. L. [1797]: Reflexion sur la Metaphvsique du Calcul Infinitesimal. Gauthier-Villars: Paris 1921.
Castro. F. [1953] : A Matemática no Brasil. Editora da Unicamp. Campinas 1992.
Charlton. D.G. [1976] : Positivist Thought in France during the second empire 1852-1870. Greenwood Press: Connecticut.
Comte. A. [1830-1842]: Philosophie prémiere. Hermann Editeurs et des Artes: Paris 1975.
Comte. A. [1843]: Traité Élémentaire de Géométrie Analytique a deux et a trois dimensions. Paris und Rio de Janeiro 1894
Carvalho. R. [1986]: Historia do Ensino em Portugal. Fundação Calouste Gulbekian: Lisboa.
Costa. C. [1955].: Contnbuição à História das Idéias no Brasil. Zitierte Ausgabe: Editora Civilização Brasileira: Rio de Janeiro: 1967.
D'Ambrosio. U. [1980]: Secondary Mathematics Education in Brazil. In Comparative Studies *oi* Mathematics Curricula - Change and Stability 1960-1980: IDM. Bielefeld.
De Fourcy, L. [1827] : Leçons de Géométrie Analytique. comprenant la trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces des deux premiers ordres. Société Typographique Belge: Bruxelles 1838.
Descartes. R. [1664] : La Géométrie. Edição citada: In: La Géométrie Analytique d'Auguste Comte 1894.
D'Alembert, J. [1743] :Traité de Dynamique. Paris.
D'Alembert, J. [1751] : Discours Préliminaire de 1'Encyclopédie Einleitung zur Enzyklopàdie». Philosophie Fischer: Frankfurt 1989.
Euler. L. [1748]: Introduction à L'Analyse Infinitésimale. ACL- éditions Paris 1796.
Estatutos da Universidade de Coimbra (1772), Livros I, II, III; Coimbra, Arquivo da Universidade de Coimbra 1972.
Ferri. M e Motoyama. S. [1979-1981] : História das Ciências no Brasil. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo 3 Volumes.
Freire. G. [1957]: Ordem e Progresso. Editora Record: Rio de Janeiro 1990.
Guimarães. R. [1915]: Bosquejo Histórico sobre a Historiografia das Matemáticas. Imprensa da Universidade. Coimbra.
Guimarães. R. [1909]: Les Mathématiques en Portugal, Coimbra.
Lacroix. S.F.[1799] : Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique. et d'application de 1'algèbre a la géométrie. Mallet-Bachelier. Paris 1863.
Lagrange, J.L. [1797]: Leçons de Calcul de Fonctions. Novel Edition.1806
Lins. I. [1964].: História do Positivismo no Brasil. São Paulo. Companhia Editora Nacional.
Littré. E. [1876]: Principios de Filosofia Positiva. Editorial Paulista: São Paulo.
Locke. J. [1689]: Über den Menschlischen Verstand. Akademie Verlag, Berlin 1962.
Magalhães, B. [1868] : Teoria das Quantidades Negativas. Tip. Mercantil de B. Sudré: Petrópolis.
Martins, W. [1977-1978]: História da Inteligência Brasileira. Editora Cultrix, São Paulo.

Mendes. T. 11892|: Benjamin Constant- Esboço de uma apreciação sintética da vida e da obra do fundador da República Brasileira. Apostolado Pozitivista Brasiieiro: Rio de Janeiro 1913.
Mill. J. 11866|: Auguste Comte and Positivism. Ann Arbor Paperoacks: Michigan 1973.
Monge. G.| 1809]: Application de LAnalyse a la Géométrie. Bachelier: Paris 1850.
Newton. I. 11683-1684| : The Mathematical Papers of Isaac Newton. At the Universitv Press 1972 und vol.VII : Cambridge 1976..
Otte. M. u.A. [1986]: Funktionsbegriff und funktionales Denken. Aulis Verlag. Kõln.
Paim. A. [1967]: História das Idéias Filosóficas no Brasil. Grijaldo. São Paulo.
Prado Júnior. C. [1907] : História Econômica do Brasil. São Paulo: Brasiliense 16. Ed. 1973.
Salmon. G. [1848]: Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Druck und Verlag Teubner. Leipzig 1873.
Schubring, G. [19871 : On the Methodology of Analysing Histórical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. In: For the Learning of Mathematics 7. 3 (November 1987) Quebec. Canadá.
Silva. C. P. [1992]: A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento. Editora da Universidade do Paraná. Curitiba.
Silva. C. S. [1991]: Positivismus und Mathematikunterncht: Portugiesische und Franzòsische Einflüsse in Brasilien im 19. Jahrhundert. Bielefeld. Diss.
StockJer. F. [1819] : Ensaio histórico sobre a origem e progressos das Mathematicas em Portugal. Paris.
Tobias. J. [1987].: História das idéias no Brasil. São Paulo: EPU.
Vemey, L. [1746] : Verdadeiro Método de Estudar. Zitierte Ausgabe: vol.III e V, Lisboa. Livrana Sá da Costa. Lisboa 1950.

O tratamento da verdade matemática na escola

Prof. Mariano Moreira
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC -
Campus Universitário - Trindade - Florianópolis - SC

O presente texto representa um resumo de nosso trabalho de tese realizado em Bordeaux, intitulado "O tratamento da verdade matemática na escola" e se inscreve nas mesmas perspectivas dos trabalhos feitos pela prof. Pilar Orus Baguena(1992).

Em seus trabalhos, levando em conta o problema do ensino da lógica matemática, a preocupação era de determinar o que o professor pode fazer no interior de uma situação didática, o que ele pode controlar para permitir uma boa introdução ou **preparação** ao ensino da lógica.

Sua questão de fundo pode ser formulada da maneira seguinte: De quais meios de preparação (indícios, etc.) o professor deve dispor para permitir a passagem do raciocínio **"objetivo** de **ensino"** (raciocínio **pensamento natural)** ao raciocínio "objeto de **ensino"** (raciocínio **lógico)?** Para orientar o professor na preparação desta passagem dos alunos do raciocínio "pensamento natural" ao raciocínio "lógico", P. O. Baguena foi obrigada a identificar as diferentes formas do raciocínio que entram no contexto de objetivo de ensino. Tudo isso na tentativa de dar um lugar ao pensamento natural na relação didática e de permitir ao professor de a receber sem ser obrigado de a converter, de a identificar à lógica ou à matemática, mais deixando a possibilidade de o fazer em caso de necessidade.

A questão que se coloca é de saber se P.O.B. deu os meios essenciais que permitem a passagem do raciocíinio **"objetivo de ensino"** ao raciocínio **"objeto** de **ensino"** e sobretudo os meios permitindo de introduzir ou preparar a lógica na escola elementar.

O que é importante na escola elementar?

É a passagem do raciocínio **"objetivo"** ao raciocínio **"objeto"** de ensino? ou a preparação do ensino da lógica?

Sem entrar muito em detalhes, tendo em vista os programas oficiais e a idade dos alunos envolvidos, nos parece mais importante a. este nível de dar mais ênfase sobre o astecto preparação ao ensino da lógica no ensino primário.

É dentro deste contexto que nos situamos nosso trabalho. Essencialmente dentro da relação didática.

Levando em conta a relação didática, o estudo do tratamento da verdade matemática na escola nos leva a colocar as seguintes questões : - O que é a verdade matemática em sala de aula (em classe)?

- Que papel tem ela tia classe?
- O que é a verdade para o professor de matemática?
- O que *é* a verdade para o aluno?
- A que momento o professor e os alunos falarão da verdade em classe?
- O que é que o professor vai considerar como verdade do lado do aluno?
- Quando o aluno dirá que é verdade?

Todas estas questões mostram bem que quando falamos do tratamento da verdade matemática em classe, existe um vai e vem entre o aluno e o professor. Teoncamente. quando um deles diz que é verdade, ele o diz não por aceitação passiva, mas sim porque ele pode provar.

A realidade dos fatos mostra que certos pré-julgamentos são formulados sobre a convicção do aluno em classe. Segundo estes pré-julgamentos:

1. O aluno crê, sempre, no que o professor ensina, no que o professor diz;
2. A verdade, para o aluno, vêm do professor.

Por estas afirmações, dizer que o aluno crê no que o professor ensina ou diz ou dizer que a verdade para o aluno vêm do professor, deixa entender sua convicção naquilo que o professor ensina ou diz.

Nos podemos perguntar:

1. O aluno é convencido porque foi o professor que disse ou porque ele têm meios pessoais de se convencer? como saber?
2. O fato de dizer "sim" ao professor quer necessariamente dizer que o aluno esta convencido do que o professor disse?
3. Se este não é o caso, o que é que faz dizer que o "sim" do aluno se liga à crença que ele têm na pessoa do professor?
4. Em que medida o "sim" do aluno pode ser atribuido à crença que ele têm na pessoa do professor ou em seus meios pessoais?
5. Quais meios podemos nos dar para saber se o "sim" do aluno é ligado à crença no professor ou não?
6. O professor se dá estes meios? se afirmativo, quais são eles?
7. Estes meios, são pertinentes?
8. A que momento é necessário, para o professor, de os utilizar?

Partindo destas questões, nós formulamos as hipóteses seguintes:

H1. O aluno crê, (na maior parte dos casos), porque ele se convence.
H2. O fato de dizer que o aluno crê no que diz o professor, é sobretudo ligado à utilização freqüente da evidencia como meio de prova pelo aluno.
H3. O fato de dizer que o aluno crê no que diz o professor, é também ligado ao contrato didático e à relação de autoridade que o liga ao professor.

H4. Para conhecer o grau de dependência ou de independência do aluno no que diz o professor, é preciso se dar meios ao nivel de ensino e dos comportamentos dos alunos em classe. Estes meios passam pela negociação didática, quer dizer pela devolução.

Para verificar estas hipóteses, **primeiramente,** através de dispositivos de ensino, analisamos algumas **transcrições de lições** para poder identificar os diferentes momentos do ensino onde nós podemos falar do tratamento da verdade matemática.

Estes diferentes momentos permitiram a formulação **em termos de índices** de todo comportamento exprimindo (ou permitindo de falar) um tratamento da verdade matemática na escola.

Em seguida, na tentativa de analisar o estado dos alunos sobre o problema de convicção, foi confeccionado um questionário ao qual foram submetidos **os** alunos(curso médio).

Para analisar a posição dos professores sobre o assunto, foi confeccionado **um** questionário ao qual foram submetidos **1**1 professores.

Obs: (Deixamos de **anexar aqui a íntegra** dos questionário. Tais questões **se** encontram **em Moreira M.** (1993)).

No final **dos trabalhos, fizemos uma** análise **teórica, colocando-o dentro dos** moldes **da Teoria** de **Situações de Guy Brousseau, referência de base de nosso trabalho.**

A propósito das análises de transcrições de lições, por razões de probabilidade de encontrar os momentos do tratamento da verdade no ensino da matemática, nos escolhemos de tomar estas transcrições na escola Jules Michelet , em Talence-França, onde a Teoria de Situações está em experimentação.

Nós trabalhamos sobre uma situação de comunicação de mensagens onde a questão era de reproduzir uma figura segundo uma mensagem enviada.

Em seguida nós analisamos uma família de situações sobre a proporcionalidade onde a questão era de introdução à proporcionalidade, aplicação da proporcionalidade e introdução às aplicações lineares.

A título de exemplo, tomemos alguns momentos do tratamento da **verdade que nós anotamos, para mostrar o tipo de índice identificado.**

A propósito da seqüência sobre a reprodução de figuras nós vamos apresentar um momento onde a comunicação de mensagens coloca problemas.

Para explicar a situação, os alunos para a mesma seqüência, conheceram dois professores. O primeiro era muito severo a tudo que se referia a medidas. O segundo, que corrigiu as mensagens que fracassaram, era tolerante sobre certos pontos referentes a medidas.

Nos pareceu interessante aproveitar do fato que. nesta escola para observações, os alunos podiam confrontar (examinar) certos fatos segundo a opinião de dois professores diferentes, o que é excepcional.

Nós escolhemos uma lição onde se tratava, entre outros, de decidir qual tolerância é aceitável na reprodução efetuada das figuras em cartão.

Relembrando a primeira lição: se tratava, pelos emissores da mensagem, de medir os lados de uma figura em cartão e após escrever uma mensagem, sem desenho, ao receptor. Estes, que não conheciam a figura inicial deviam desenhar e depois recortar uma figura em cartão de acordo com a mensagem.

As duas figuras deviam se superpor exatamente.

O professor que fez a primeira lição avaliou que certas reproduções haviam fracassado.

O professor da lição seguinte vai ter uma posição diferente.

Como os alunos vão reagir a esta mudança arbitrária de regras? Três mensagens estão em discussão:

Transcrevemos abaixo uma pequena amostra do diálogo em sala de aula,que utilizamos para ilustrar nosso propósito.

(...)

Professor: Nós vamos verificar e propor as correções a fazer. Eu estou a fim de começar pelos retângulos porque não houve sucesso entre os retângulos. (...)

O professor afixa no quadro as mensagens em relação com o retângulo e incentiva um debate sobre a clareza dessas menagens. Nós levamos em conta aquelas que nos pareceram mais interessantes(mensagens **"A", "C"** e "F"). **A. É um retângulo, os lados pequenos medem l1cm e 7mm e os grandes medem 19cm e 5mm.**

Professor Nós vamos ver as outras duas mensagens. Esta apresentou algum problema, nós vamos ver as outras. Veremos se as outras são mais claras. **C.** É **um retângulo. Os dois lados maiores medem 19cm e** 5mm. **Os dois lados menores medem l1cm e 6mm.**

F. É um retângulo. Em largura ele têm l1cm e 7mm. **Em comprimento ele têm 19cm** e **4mm.**

Os alunos não sabem bem qual erro o professor esta prestes a aceitar. Eles aceitaram suas exigências no momento da correção: "se ultrapassa mais de lmm é falso". Os emissores afirmam que estão certos de suas medidas (para jogar a responsabilidade do erro sobre os receptores).

(...)

Aluno: E além disso eles afirmaram: nós estamos certos de nossas medidas.

Alunos: Oh!

Professor: Nós vamos ver se as outras são mais claras. A terceira mensagem é C. Eis aqui o que eles obtém. (A professora compara um retângulo com o gabarito) Aluno: Eu diria que é justo. (No fundo da classe um aluno diz: acertamos!) Aluno: A professora considerou:errado. Professor: Eu creio que este aqui eu posso aceitar. Aluno: E porque Monique disse que era falso?

A professora muda as regras: ela deve se explicar. Fica subentendido que deve haver acordo entre os professores, sobre o trabalho do aluno.

Professor: Porque ela estava muito exigente ontem. Heim Monique. eu creio que este aqui eu posso aceitar. De fato existe um retângulo bem sucedido. Aqueles que fizeram errado têm a esperança de sucesso. A mesma mensagem obtém sucessos e fracassos. A professora verifica separadamente as medidas:

- Figura / Medida do transmissor
- Mensagem / medida obtida
- Figura recortada / mensagem

Ela não faz a observação de aceitar os erros inferiores a lmm. sobre cada ação:

- Figura / medida do transmissor
- Mensagem / figura reproduzida
- Medida / recorte

e que então pode haver até 2mm de diferença entre o modêlo e a reprodução.

Aluno: E na mensagem A também.

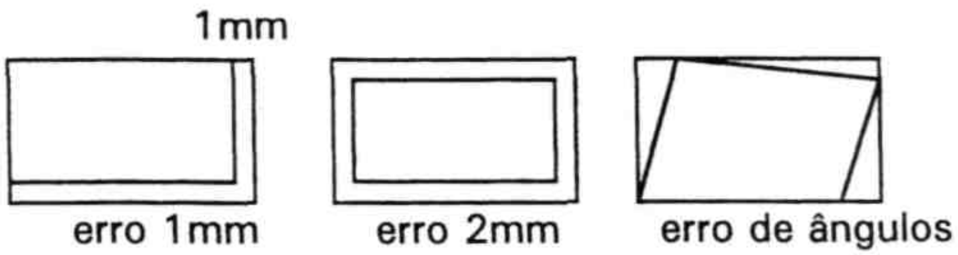
Professor: Não.

Aluno: Mas normalmente é a mesma figura.

Professor: É a mesma figura sim, mas...

Aluno: Não é lógico.

Professor: É um problema de medida. Eu penso que por lmm, se existe lmm por tudo de cada lado eu poderei aceitar. No entanto, neste aqui, ha uma parte de azul que você vê em somente um lugar, não por tudo.



O aluno acha injusto de julgar a equipe através do resultado
- se sua mensagem é correta (emissor)
- se sua figura é conforme a mensagem (receptor) (...)

Aluno: Mas é justo.
Alunos: É justo heim.
Aluno: E porque ela colocou zero?
uno: mas isso não é possível! aluno: O
que é que é isso? Aluno: Vire para eu ver!
Professor: Bem. então... Alunos: É justo.
Aluno: Como nós! é parecido! Professor: O
que é que vocês pensam? Alunos: É justo!
Professor: Monique é muito exigente. Eu aceito então?
Alunos: Sim!
Professor: Então, este aqui também está bom, a F, e eu lhe dou um ponto. Aluno:
Então o que é que é isso?
Professor: Finalmente, eu posso dizer que todos os retângulos fracassaram?
Aluno: Não!

A professora não lhes explica sobre suas decisões, os alunos chamam sua atenção mas não insistem. Conclusão: Julgamento sobre a pessoa, nenhuma articulação das noções em jogo: - correto - aceitável - sucesso - justo - lógico

A tendência do professor é de fazer admitir suas decisões sobre o modo da evidência, e de passar a verdade por contrato didático. Nós dizemos que houve um **"julgamento (justificado) de natureza pragmática".**

Será que esta estratégia é sem conseqüência?

Para julgar nós escolhemos um outro exemplo de quebra de contrato didático, apresentado em Grenoble e comentado por Chevallard e Brousseau.

Após haver resolvido problemas de proporcionalidade pela regra de três, **a** professora dá algumas situações problemas que não são de proporcionalidade para que os alunos resolvam:

Professor: Eis aqui três outros problemas de proporcionalidade a resolver:

1) Uma criança mede 115cm aos 10 anos. Qual será sua altura aos 20 anos?

2) Um barco leva 3 horas para fazer Havre-New York. Quantas horas levarão três barcos que navegam à mesma velocidade e que partem ao mesmo tempo, para fazerem o mesmo percurso?

3) Dois operários levam 4 dias para cavarem um fosso. Quanto tempo levará para fazerem o mesmo trabalho, uma equipe de 4 operários que trabalham com a mesma eficiência?

O alunos se metem a calcular.

Após um momento de trabalho pessoal eles partem para o debate dos resultados.

Eis o que eles dizem para o primeiro exercício: Professor: Nós vamos fazer a correção no quadro: peguemos o primeiro problema: Qual será a altura aos 20 anos? Alunos: "2,30m" Professor: E a 30 anos? Alunos: "3,45m" Professor: E a 40 anos? Alunos: "4,60"

Professor: O que é que vocês pensam destes resultados?

Alunol:"É justo. Mas na realidade não é verdade!" Aluno2:"É da matemática mas não da realidade!" Aluno3:"Nós não crescemos sempre da mesma maneira!" Aluno4:"Existem coisas que não são proporcionais!"

Professor:De fato existem coisas que não são proporcionais. Nestes momentos, é preciso responder...? Alunos: Não.

Nós vemos o aluno confundir a realidade matemática e o contrato didático.

Neste contra exemplo, nós procuramos ver se o aluno sabe distinguir aquilo que lhe foi ensinado, daquilo que não o foi. Muito raramente, ele procura encontrar a relação entre o que lhe foi ensinado e a realidade dos fatos. Nós chamamos este índice de **"julgamento (justificado) de reconhecimento ou de** identificação de **uma** situação **em relação ao saber em jogo"** (o aluno reconhece a situação de não proporcionalidade.

Dando seqüência ao trabalho expenmental.um questionário foi submetido aos alunos do curso médio (CM1 e CM2). Um total de 15 questões. 9 questões (III, VI, VIII, IX, XI. XII, XUI, XIV. XV) são comuns às duas classes e 6 questões (I. II. IV. V. VII. X) são somente para o CM2.

Com estas 15 questões, nós procuramos ver:

1. Se a verdade do aluno é ligada ao professor (relação entre a verdade e o professor).Para este grupo de questões existem 8 questões comuns (III, VIII, IX, XI, XII, XIII. XIV, XV) e 6 questões específicas do CM2 (I. II. IV. V. VII. X);

2. Se o aluno está em condições de prever logicamente a resposta esperada. Para isto. usamos somente a questão comum VI.

Para analisar o questionário dos alunos, nós partimos de três questões:

1) Será que a verdade é ligada ao professor?
2) Se não é. a que ela é ligada?
3) Qual é o grau de ligação?

Da análise destas questões nós chegamos aos resultados seguintes:

Para as questões onde nós deveríamos ver se a verdade do aluno é ligada ao professor, nos constatamos que:

Para o CM1

Dependência ao professor		
	CM1(EJM)	CM1 (EPL)
QIII(D)	7,7%	4,3%
QVIII(C)	0%	13.1%
QIX(D)	7,7%	0%
QXn(A)	15,4%	26.1%
QXIll(A)	32%	4,4%
QXIV(C)	3,8%	0%
QXV(C)	15,4%	32%
Soma	82%	79.9%
Média	11,7%	11,4%

Para as questões de convicção, nós constatamos que:

Convicção		
	CM1 EJM	CM1 EPL
QIII(A e C)	65.4%	82.6%
QVIII(B e E)	65.4%	78.2%
QIX(A)	42.3%	65.2%
QXI(A)	24%	30.4%
QXII(B e D)	80.8%	69.6%
QXIII(B e D)	36%	52.1%
Soma	313.86%	378.06%
Média	52.31%	63.01 %

Posição contrária a uma declaração falsa do professor

	CM1 EJM	CM1 EPL
QXV(B)	65.4%	91,4%

O professor pode se enganar

	CM1 EJM	CM1 EPL
QXIV(B)	57.7%	91,4%

CONCLUSÃO PARA A CLASSE **DE CM1**

Quanto ao **aspecto previsão** nós podemos dizer que:

Os alunos observados têm problemas de previsão, o que explica o recurso à evidência mesmo quando não é necessário, e isto, apesar da existência de um raciocínio sólido, elemento motor da prova, mostrado em suas respostas;

Quanto ao **julgamento,** êle **é categórico ou não:**

* No caso de julgamento "não categórico" os alunos manifestam duas atitudes:

a. Situação menos evidente: os alunos tomam a responsabilidade de um julgamento intermediário;

b. Situação nada evidente: os alunos preferem dividir a responsabilidade com o professor.

* No caso de julgamento "categórico" os alunos tomam, em quase todas as ocasiões, a responsabilidade como sua. sem interferência do professor.

Quanto ao aspecto **prova** nós constatamos que:

1. Os alunos respondem a 58% sobre a base de suas convicções pessoais e a 78% eles tomam posição contrária a uma declaração falsa do professor;
2. Os alunos que dependem do professor nas suas respostas são a 12%:
3. A 75% das opiniões dos alunos, o professor pode se enganar:
4. Em definitivo, nós constatamos que os alunos são. em sua maioria. conscientes do fato que o professor pode se enganar e que em suas respostas eles fazem prova de distancia em relação ao professor.

O que faz crer que a convicção dos alunos é submissa à autoridade do professor é o fato que este último só procura o apoio de fatos que são "evidentes" para o aluno, se reservando o raciocínio "oficial".

Para o CM2
Para as questões onde nós deveríamos ver se a verdade do aluno é ligada ao professor, nos constatamos que:

Dependência ao professor		
	CM2 EJM	CM2 EPL
QI inter QII	20%	3.7%
QIV inter QV	0%	25,9%
QIII(D)	0%	0%
QVII(B)	7,7%	3.7%
QVIII(C)	0%	0%
QIX(D)	8%	7,7%
QX(D)	3,9%	3,7%
QXII(A)	7,7%	7,7%
QXIII(A)	0%	0%
QXrV(C)	3,9	3.7%
QXV(C)	4%	22,2%
Soma	55,2%	78.3%
Média	5,01%	7,12%

Para as questões de convicção, nós constatamos que:

Convicção		
	CM2 EJM	1 CM2 EPL
QI inter QII	52%	81.5%
QIV inter QV	92%	55.6%
QII(A e C)	84%	1 92.6%
QVIII(Be *E)*	92%	96.3%
QIX(A)	44%	38%
QX(B)	26.9%	22.2%
QXI(A)	0%	11.1%
QXI(B e D)	80.8%	84.6%
QXII(B e D)	30.7%	33.3%
Soma	502.4%	515.2%
Média	55.8%	57.2%

Posição contrária a uma declaração falsa do professor

	CM2EJM	CM2 EPL
QXV(B)	84%	40.8%

OBS: No CM2 EPL, 37% dos alunos perguntaram se era verdade.

O professor pode se enganar

	CM2EJM	CM2 EPL
QX1V (B)	50%	51.9%

Para mostrar a prevalência da convicção do aluno em relação ao professor, nós fizemos um cruzamento de certas questões que são ligadas. A título de exemplo:

Crusamento QI x *QII* - CM2 - ESCOLA JULES MICHELET - 26 alunos

Questão I

Opção de resposta	N° do aluno
A	1-7-12-13-15-16-21-24-25
B	5-6-9-11-17-20-23-26
C	2-3-4-8-10-18-19-22

Questão II

Opção de resposta	N° do aluno
A	8
B	10-12-18-19-23-24
C	2-11-13-16-22
D	1-3-4-7.9.15-21-25-26
E	5-6-17-20

O aluno de nº 14 não respondeu as questões 1 e II

Xi — resposta X à questão i

	N° do aluno	efetivo	conclusão
A_1A_2	nenhum aluno	0	função do professor
A_1B_2	12-24	2	ao acaso
A_1C_2	13-16	2	convicção
A_1D_2	1-7-15-21-25	5	função do professor
A_1E_2	nenhum aluno	0	ao acaso
B_1A_2	nenhum aluno	0	ao acaso
B_1B_2	23	1	convicção
B_1C_2	11	1	convicção
B_1D_2	9-26	2	ao acaso
B_1E_2	5-6-17-20	4	convicção
C_1A_2	8	1	ao acaso
C_1B_2	10-18-19	3	convicção
C_1C_2	2-22	2	convicção
C_1D_2	3-4	2	ao acaso
C_1E_2	nenhum aluno	0	ao acaso

CONCLUSÃO

Em função do professor	5/25	20%
Respostas ao acaso	7/25	28%
Fruto da convicção do aluno	13/25	52%

CONCLUSÃO PARA A CLASSE DE CM2

A análise das respostas dos alunos do CM2 ao questionário nos permitiu de concluir o que segue:

Nos constatamos no CM2 a confirmação do que foi dito para o CM1:

* O aluno se responsabiliza por suas respostas, mesmo nas situações delicadas;
* O aluno prefere recorrer à evidência que ao professor, nos casos delicados;

Nos constatamos, também, que:

* A evidência se torna mais importante que no CM1:
* Os problemas de previsão continuam a existir, o que explica o recurso à evidência, mesmo quando não é necessário;
* O julgamento intermediário (não categórico) é reforçado;
* A preocupação de provar por si mesmo é reforçado:
* Nos vemos a diminuição da convicção que o professor pode se enganar e o aumento da convicção que o professor é suposto dizer a verdade por contrato; (CIME)
* Os alunos respondem à 57% sobre a base de sua convicção pessoal e a 62% eles tomam posição contrária à declaração falsa do professor;
* Os alunos que dependem do professor nas suas respostas são a 6%;
* A 51 % das opiniões dos alunos, o professor pode se enganar.

CONCLUSÃO - EVOLUÇÃO CM1 ao **CM2**

Esta conclusão é feita sob reserva, pois o CM2 analisado não é o CM1 do ano anterior (são alunos diferentes). A única intenção é de ter uma idéia da evolução de uma classe à outra, no que diz respeito à verdade.

Nos constatamos no CM2 a confirmação do que foi dito para o CM1:

* O aluno se responsabiliza por suas respostas, mesmo nas situações delicadas;
* O aluno prefere recorrer à evidência que ao professor, nos casos delicados;

Nos constatamos, também, que:

* A evidência se torna mais importante com o nível ;
* Os problemas de previsão continuam a existir o que explica o recurso à evidência, mesmo quando não é necessário;
* Reforço do julgamento intermediário (não categórico);
* Reforço da preocupação de provar por si mesmo;
* Diminuição da convicção que o professor pode se enganar e o aumento da convicção que o professor é suposto dizer a verdade por contrato; (CIME)
* Bem que conscientes dos erros do professor, a reação dos alunos não é brutal, eles preferem reagir em termos de um pedido de explicação. É a relação professor/aluno que entra em jogo (RIME).

CONCLUSÃO **PARA** O CURSO **MÉDIO**

Em definitivo, nos constatamos que os alunos observados (Curso Médio), são em sua maioria, conscientes do fato que o professor pode se enganar e que que em suas respostas, eles fazem prova de distância com relação às suas declarações. Para ficar convencido, o aluno só recorre ao professor em último recurso, ele prefere seus próprios meios de controle. O que faz crer que a convicção do aluno é submissa à autoridade do professor é o fato que este último só procura o apoio de fatos evidentes para o aluno, reservando a si próprio o raciocínio "oficial". Se a evidência é dominante nas respostas dos alunos, a tendência a crer que esta resposta depende do professor se toma importante.

Desta análise se destacam três fatores que são a base do julgamento (geralmente falso) sobre a atitude dos alunos em classe:

1. A evidência (EV)
2. O contrato institucional professor/aluno (C1ME)
3. A relação institucional professor/aluno (RIME) Isto quer dizer que o julgamento que nos examinamos: "O aluno crê porque o professor disse"

- Do ponto de vista da instituição, é o contrato professor/aluno que pode ser o responsável;
- Do ponto de vista do ensino, é:
  * A evidência, a memória da classe, ...
  * A relação professor/aluno.

Passamos agora ao questionário aos professores

Através deste questionário nos pretendemos responder às seguintes questões:

1. Em qual momento da lição, a prova é necessária?
2. Qual é a contribuição dos alunos no estabelecimento da verdade em classe?
3. Qual é a proporção de sua contribuição?

O questionário aos professores é composto de dois grupos de questões:

1. Questões onde o professor devia classificar as respostas segundo uma ordem de importância;
2. Questões de múltipla escolha onde o professor devia assinalar a resposta escolhida.

No grupo de questões de classificação, estava em questão como o professor gera (administra) a verdade em classe.

No grupo de questões de múltipla escolha, estava em questão ver a gestão da verdade em classe com relação ao tempo disponível pelo professor e de ver também o lugar dado à prova em seus ensinamentos.

CONCLUSÕES DO QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

Com relação ao questionário do professor nos podemos dizer que: 1) As questões de 1 a VI dão uma idéia global da gestão da verdade em classe pelo professor:

Caso 1. No momento do lembrete (recapitulação) (no contexto de resolução de um problema - situação de ação) o professor procede da seguinte maneira (QI):

1.1. Para o "bom aluno", seu comportamento difere segundo que ele tenha tempo ou não.

- Se ele têm tempo, ele o faz trabalhar;
- Se ele não têm tempo, ele dá a resposta.

Para o "aluno fraco", ele o faz trabalhar.

1.2. Para o "bom aluno" ou para o "aluno fraco", se ele têm tempo ele o faz trabalhar e se ele não têm tempo ele dá a resposta.

Notamos que para os dois tipos de alunos, o professor dá prioridade ao trabalho no caso de um "bom aluno" e a dar a resposta no caso de um "aluno fraco".

1.3. Fazer trabalhar o "bom aluno" e o "aluno fraco".

1.4. Com relação ao tempo didático, o professor, para o "bom aluno" como para o "aluno fraco" ele lembra a lição vista (em prioridade) e dá a resposta (como último recurso).

Caso 2. No momento de lembrar a verdade da classe (no contexto de uma declaração para uma devolução) o professor se comporta da maneira seguinte (QV):

2.1. Ele faz o aluno trabalhar;

2.2. Ele dá a resposta (apoiado por um desenho).

Caso 3. No momento da gestão de uma verdade provisória da classe (no contexto de um procedimento de resolução) o professor se comporta da maneira seguinte (QIII e QIV)

3.1. Ele faz o aluno trabalhar;

3.2. Ele dá uma resposta que é um julgamento não categórico;

3.3. Ele dá um julgamento categórico.

Caso 4. No momento da gestão de uma verdade provisória da classe (declaração para uma devolução) o professor se comporta da maneira seguinte (QVI):

- Ele faz o aluno trabalhar.

Caso 5. No momento de convencer o aluno de uma declaração verdadeira, o professor se comporta da maneira seguinte (QII):

5.1. Ele faz o aluno trabalhar;

5.2. Ele dá a resposta e para isso ele faz cálculos (algoritmo);

5.3. Ele dá uma prova contingente (desenho);

5.4. Ele dá uma demostração formal, uma prova intelectual.

2) As questões de VII à XXIV dão mais detalhes sobre a gestão da verdade conforme o professor tenha tempo ou não, sobre o lugar da prova no seu ensino e sobre a transposição didática. a. Quanto à gestão conforme o tempo disponível (QV1I e QVIII)

No grupo de questões de múltipla escolha, para a gestão em relação à falta de tempo, 55% dos professores se encarregam de dar explicações, somente 9% deixam a cargo dos alunos. 36% fazem os dois ao mesmo tempo.
Se existe tempo, 46% dos professores deixam o trabalho a cargo dos alunos. 27% ou se encarregam das explicações ou fazem os dois ao mesmo tempo.

Falta de tempo			
	Prof. explica	A cargo do aluno	os dois ao mesmo tempo
	55%	9%	36%

Existe tempo			
	Prof. explica	A cargo do aluno	os dois ao mesmo tempo
	27%	46%	27%

<u>CONCLUSÕES</u>
a.l. No caso onde não existe tempo disponível:
- Ele recorre ao desenho (contingência), ao cálculo (procedimento de resolução) ou transfere a um outro aluno; O professor se encarrega da explicação;
- Ele sugere um desenho (contingência) como meio de convicção pessoal do aluno, sob sua orientação. O professor leva o aluno a um trabalho pessoal;
- Ele recorre ao desenho (contingência) ou ao cálculo (procedimento de resolução), quando as duas possibilidades são possíveis.

a.2. No caso onde existe tempo disponível:
- Ele faz uma demostração formal ou explica a partir de um desenho (contingência). O professor se encarrega da explicação:
- Ele pede aos alunos procurar a compreender a partir dos cálculos feitos ou de desenhos, ou ainda, organizar um debate na classe à partir do trabalho pessoal dos alunos. O professor envia os alunos a um trabalho pessoal;
- Ele pede aos alunos de procurar e de encontrar a resposta sem indicações, de procurar à partir de um desenho ou cálculo para terem uma idéia e isto sob sua orientação. Ou então ele faz uma demostração formal e pede aos alunos de deduzirem à partir da demonstração formal feita. O professor se encarrega do trabalho ou envia o aluno a um trabalho pessoal (os dois ao mesmo tempo).

b. Quanto ao lugar da prova no seu ensino

	Freqüentemente	Algumas vezes	Jamais
QIX(Necessidade de prova para aprender)	72.7%	18,2%	
QX(Necessário,ao aluno, provar o que ele crê verdadeiro)	90.9%	9.1%	
QXVII(Afirmação falsa/manter atenção)	9%	45.5%	45.5%
QXIX(Eplicação difícil/razão incompleta)	18.2%	63.6	18:2%
QXX(Explicação difícil/razão aproximativa)	0%	45.5%	54.5%
QXX(Explicação difícil/razão falsa)	0%	0%	100%

	Indispensável	muito útil	sempre útil
QXI(Professor provar)	45.4%	27.3%	9.1%
QXII(Aluno provar)	54,5%	27,3%	18.2%
QXlII(Prova durante a aprendizagem)	9,1%	45,4%	9.1%
QXIV(Prova durante a execução de um trabalho)	18,2%	45,4%	0%
QXV(Prova no momento de tomar uma decisão)	63,6%	9,1%	9.1%
QXVI **(Prova no** fim de um debate)	72,7%	18,2%	9,1%
QXVII(Prova durante o debate)	18,2%	9%	9%

Obs:Tendo em vista que as questões dispunham de cinco ou mais possibilidades de resposta, percentuais não significativos foram abandonados.

CONCLUSÕES

A propósito das questões que têm relação ao lugar da prova no seu ensino, nós podemos dizer que:

A-priori, quer dizer, segundo os objetivos (QIX, QX, QXI e QXII) o ponto de vista prioritário do professor é de fazer freqüentemente a prova. Vêm em segundo lugar, fazer algumas vezes a prova.

Na realidade, quer dizer, estando em classe, o professor faz freqüentemente referência à prova quando se trata de um debate e algumas vezes quando ele ensina ou quando um aluno resolve um problema.

Ele utiliza raramente ou jamais uma afirmação falsa para levar os alunos a duvidarem do que é dito.

Com relação à verdade provisória, o professor prefere dar lugar à prova no caso de uma resposta incompleta (se bem que isto seja raro -QXIX) que a uma resposta aproximativa (QXX).

Ele não faz jamais alusão a uma contra-verdade (razão falsa).

Quanto à transposição didática, o professor quase nunca dá lugar à prova.

CONCLUSÕES GERAIS

Com relação às hipóteses verificadas em nosso trabalho nós podemos dizer que:

1. O aluno não depende do professor em sua convicção da verdade.
2. Se existe um problema de prova nos alunos da escola elementar, isto é devido ao fato que eles não conseguem prever ou antecipar.
3. O fato que a evidência assume lugar nas respostas dos alunos é a causa da confusão que existe entre a convicção do que eles dizem (à sua resposta) e à pessoa daquele que colocou a questão.
4. Os meios de mostrar (provar) que o aluno não depende do professor em suas respostas são:

- sua prova;
- seu pedido de prova.

Em outras palavras, resolver o problema da confusão entre a convicção do aluno e a pessoa do professor, passa por encontrar o equilíbrio entre a evidência e a prova dos alunos ou o pedido de prova pelos alunos.

Este equilíbrio permite também de definir a relação entre o professor e o aluno, conduzindo à identificação dos índices de convicção deste último.

5. O fato de dizer que o aluno crê no que o professor diz. pode, também, ser atribuído ao contrato que les ligam. Quer dizer, o contrato que liga o aluno ao representante da instituição, que é o professor, suposto dizer sempre a verdade.

BIBLIOGRAFIA

- Arsac, G. (1987): L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques 1982, Vol 3/3 (La Pensée Sauvage - Grenoble).
- Arsac, G. (1989): La Transposition Didactique en Mathématiques. (IREM de Lyon. 1989).
- Balacheff, N. (1982): Preuve et démonstration en mathématique au College. Recherche en Didactique des Mathématiques 1982, vol. 3/3 (La pensée Sauvage, Grenoble).
- Balacheff, N. (1987): Processus de preuve et situations de validations. Educational Studies in Mathematics, vol. 18, N° 2 may 1987.
- Balacheff, N. (1988): Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège. These. Université de Grenoble. 1988
- Baguena, O.Pilar (1986): L'enseignement des méthodes de classification. Mémoire de PEA. (IREM de Bordeaux I, 1986)

- Baguena. O Pilar (1992) Le raisonnement des eleves dans la relation didactique; effets d'une initiation a 1'analyse classificatoire dans la scolarite obligatoire. These. Université de Bordeaux I. 1992.
- Boudon. R. (1990): L'art de se persuader des idées douteuses. fragiles ou fausses - Librairie Arthème Fayard. Paris, 1990.
- Brousseau. G (1978): L'observation des activites didactiques. Révue Française de Pédagogie N° 45. 1978.
- Brousseau. G. (1986): Fondements et methodes de la Didactique des Mathématiques. These d'Etat. Université de Bordeaux I (IREM de Bordeaux , 1986)
- Brousseau. G. (1987): Etudes en Didactique des Mathématiques - Fondements et Methodes de la Didactique des Mathématiques. Pane 1 (IREM de Bordeaux. 1987).
- Brousseau. G (1990): Le contrat didactique: Le Milieu. Recherche en didactique des mathématiques. 1990 vol. 9/3. (La Pensée Sauvage, Grenoble).
- Brousseau, G. et Centeno, J. (1991): Role de la memoire didactique de 1'enseignant. Recherche en Didactique des Mathématiques. vol. 11/2.3. 1991.
- Brousseau. G. (1992) Problèmes de didactique de la mesure - Le poids d'un verte d'eau. - Grand N - CRDP - Grenoble, 1992.
- Brousseau, N et Brousseau. G. (1987): Rationnels et décimaux dans la scolarite obligatoire. (IREM de Bordeaux. 1987).
- Chevallard, Y. (1985): La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné (La Pensée Sauvage éditíons, Grenoble).
- Chevallard, Y. (1989): Le concept de rapport au savoir: Rapport personnel. rapport institutionnel, rapport officiel. IREM d'Aix-Marseille - Faculte de Sciences de Luminy
- D'Ambrosio, U. (1986): Les influences de l'environement-Etudes sur 1'enseignement des mathématiques. UNESCO 1986. Vol.4.
- Douady, R. (1986): Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherche en Didactique des Mathématiques. 1986, Vol 7/2. (La Pensée Sauvage, Grenoble).
- Duval, R (1992/1993): Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cogmtive ? IREM Strasbourg. Petit X n° 31, 1992/1993.
- Grenier, D., Legrand.M. et Richard, F. (1984): L'introduction du débat scientifique à 1'intérieur du cours pour provoquer chez les étudiants un pre :essus de découverte et de preuve. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de 1'Informatique. IMAG N° 48 à 59, Grenoble, 1983/1984.
- KJeene, S.C. (1973). Logique Mathématique; Collection U - Librairie Armand Colin, Paris. 1973.
- Lakatos, I. (1978): Pruebas y refutaciones. Ia lógica dei descubrimiento matemático. Alianza Editorial SA - Madrid, 1978.
- Legrand, M. (1983): Les cosmonautes. Petit X n° 1, 1983. (IREM de Grenoble)
- Legrand, M. (1990): Rationalité et démonstration mathématique. le rapport de Ia classe à une communauté scientifique. Recherche en Didactique des Mathématiques. 1990, vol. 9/3. (La Pensée Sauvage, Grenoble).
- Margolinas, C. (1989): Le point de vue de Ia validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématique. These - Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 1989.
- Modet, C. (1982): Les situations et les processus de 1'apprentissage d'une fonetion logique. These de 3ème Cycle. Université de Bordeaux I, 1982 (IREM de Bordeaux).
- Moreira, M. (1993): Le traitement de la vérité mathématique à 1'lécole. These, Université de Bordeaux I, 1993 (LADIST).
- Olerort P. (1977): "Le raisonnement". Collection "Que sais-je?" N° 1671 - Presse Universitaire de France, 1977.

- Oleron. P (1987): "Uargumentation" Collection Que sais-je[9] N° - Presse Universitaire de France, 1987
- Peres. J. (1979) Recherches sur Ia construction d'un code de designation a 1'école maternelle. PEA de Sciences de 1'Education Université de Bordeaux ll. 1979
- Piaget. J. (1971) Lejugement et le raisonnement chez !'enfant Delachaux et Niestlé Editeurs - Neuchatel. Suisse. 1971.
- Piaget. J. (1976): Le langage et Ia Pensee chez 1'enfant Delachaux et Niestlé Editeurs - Neuchatel -Paris. 1976.
- Quine, W.V.O. (1972): Logique Eiémentaire Collection U - Librairie Armand Colin, Paris, 1973.
- Russel. B. (1969): Signification et Vérité Flamarion. Paris. 1969.
- Vessereau, A. (1978): La Statistique Collection Que sais-je[9] N° 281. Presse Universitaire de France, J978.
- Wermus, H. (1983) Le sentier étroit. In: Les critères de vérité (M. Buscaglia et al eds) - Ed. Maloine, Paris. 1983
- Wermus, H. (1984): Relations entre procédures et significations cognitives. Compte rendu d'une communication aux Vlémes journées internationales sur 1'éducation scientifique. Chamomx. 1984.

PARA UMA ANÁLISE DO DISCURSO MATEMÁTICO

Seiji Harik
IME-USF

1. Introdução

Participamos, na vida cotidiana, de inúmeros processos de interação sócio-cultural! conversamos com os amigos e familiares; assistimos a aulas; "damos" aulas; participamos de seminários, reuniões e assembléias; discutimos com pessoas; escrevemos e lemos textos; telefonamos; xingamos os árbitros de futebol, motoristas e transeuntes; vociferamos pedimos; exigimos; clamamos; rogamos; pregamos; rezamos; falamos; ouvimos; calamo-nos.

Cada um desses processos de interação sócio-cultural pode ser encarado como um processo de comunicação, em que emissores e receptores, respectivamente, enviam e recebem mensagens.

É de grande interesse para a educação, e particularmente para a educação matemática, a investigação, tanto teórica como empírica, das interações didatico-pedagógicas que ocorrem dentro das salas-de-aula: negociações de conhecimentos, de valores, de comportamento, da noção de verdade, da noção de certeza, perspectivas, visão de mundo, etc. entre o professor e os alunos e dos alunos entre si.

Partindo da hipótese de que o processo didático-pedagógico dentro das salas-de-aula está muitas vezes fortemente condicionado pelo discurso dos livros didáticos, propus-me a "decifrar" as negociações que o autor do livro didático estabelece com os seus leitores, negociações essas que, de certa forma, irão se reproduzir na sala-de-aula.

Na tese de doutorado [1] dediquei-me ao estudo do discurso de livros-textos de matemática universitária, deixando aberta a perspectiva de uma análise análoga de livros didáticos de matemática destinados à escola secundária.

O resultado principal dessa tese foi, do meu ponto de vista, a construção de um quadro de referências que servisse de suporte teórico para a criação de um esquema de análise do discurso matemático.

2. Discurso e Texto

Discurso é um conceito utilizado em diversas áreas tais como lingüística, semiótica, retórica, crítica literária, filosofia, sociologia, psicologia social e educação. É um conceito controverso, talvez devido ao fato de que especialistas têm sempre perspectivas enviesadas, qualquer que seja o assunto focalizado.

Sustento que discurso e texto estão sempre associados a um processo de interação sócio-cultural. Mais precisamente:

(i) que todo processo de interação sócio-cultural pode ser encarado como um processo de comunicação, (ii) que a todo processo de comunicação podemos sempre associar um texto (escrito, oral ou figurai), (iii) que a todo texto corresponde um discurso.

Todo *texto* é o veículo de um *discurso,* cuja função é estruturar o processo de comunicação entre os emissores e receptores das *mensagens* contidas no texto.

Como tal processo de comunicação humana corresponde, de fato, a um processo real de interação sócio-cultural, o que se pretende atingir com a análise do discurso é, fundamentalmente, a análise dessa interação sócio-cultural. A análise do discurso que propomos é, portanto, um instrumento auxiliar, mas importante, da análise de interações sócio-culturais.

Todo *discurso* ou *processo discursivo* tem como pano de fundo uma *interação sócio-cultural* por meio de envio e recepção de mensagens. Embora o discurso corresponda, no fundo, a um processo sócio-cultural, vamos considerá-lo, por conveniência de expressão, como se correspondesse a uma interação entre duas "pessoas".

É por meio de um texto escrito, e através do seu discurso, que se estabelece a interação entre o escritor e o leitor, assim como é por meio de um texto oral, e através do seu discurso, que o locutor e o ouvinte interagem.

3. Discurso **Matemático**

Discurso matemático é o discurso que molda a negociação de conhecimento matemático.

Existem pelo menos três variedades de discurso que podemos chamar de discurso matemático e que são interdependentes:

(a) o discurso dos matemáticos, em seus tratados e monografias de matemática avançada e nos artigos científicos em revistas especializadas (que chamarei de *discurso cientifico),*

(b) o discurso da interação entre o professor e os alunos, e alunos entre si, dentro da sala de aula (que chamarei de *discurso de sala de aula)* e

(c) o discurso dos autores de livros didáticos ou livros-textos de matemática.

Como neste artigo será abordada apenas a terceira modalidade de discurso, reservarei o termo *discurso matemático* (DM) para me referir a esse particular discurso matemático.

Dessa forma, neste artigo, *análise do discurso matemático* significa análise das negociações que o autor do livro-texto de matemática universitária estabelece com os leitores.

4. Conflitos no Discurso Matemático

O discurso do livro-texto de matemática se interpõe entre o discurso científico e o discurso da sala de aula. Na verdade, é um amálgama complexo desses dois discursos.

Por um lado, o autor, assim como o matemático, tem que "administrar" **o** conflito entre as duas concepções de matemática: a matemática como produto e a matemática como processo, ou melhor, o conflito entre duas "lógicas": a lógica da demonstração (lógica formal) e a lógica da descoberta (heurística).

Por outro lado, o autor, assim como o professor na sala de aula, tem de utilizar uma terceira "lógica": a lógica da negociação social (retórica).

Dessa forma, o discurso dos livros-textos de matemática universitária reflete necessariamente as lutas entre as três lógicas: a lógica formal, a heurística e a retórica.

Um dos grandes problemas pedagógicos do discurso matemático é que, muitas vezes, é difícil para os estudantes, e talvez para os professores, perceber se o autor, em * - determinadas passagens, está utilizando esquemas da lógica, da heurística ou da retórica.

5. Macro-análise do Discurso Matemático

A organização do conhecimento matemático é tão importante para os matemáticos que alguns deles confundem a Matemática com a sua própria organização, utilizando metáforas tais como "a Matemática é uma grande cidade" (Bourbaki), "a Matemática é arquitetura" (Halmos), "a Matemática é um grafo linear tridimensional" (Begle).

É natural então olhar no texto *A Arquitetura Matemática* que nada mais é do que a maneira como o autor organiza a rede de axiomas, definições e teoremas que constam d texto. É dentro dessa arquitetura que se deve observar o fluxo das negociações.

6. Micro-análise do Discurso Matemático: Negociação do Conhecimento Matemátic O discurso matemático é um discurso através do qual o autor e leitor negociar significados, verdade, instituições, valores, comportamento, pontos de vista filosóficos ideológicos, etc. Analisar esse discurso é então investigar de que maneira essas negociações ocorrem.

6.1 Negociação do Objeto Matemático

Muitos objetos matemáticos podem ser "definidos" de maneiras diferentes, cada um: dessas definições correspondendo a uma "perspectiva" diferente do objeto, a análise da: definições permite checar como o autor "enxerga" esses objetos. Por exemplo, a definição d» número complexo adotada pelo autor de um livro-texto de análise complexa é um indicativo da "postura ontológica" do autor.

6.2 Negociação da Verdade Matemática

Como o discurso do livro-texto de matemática é um discurso intermediário entre c discurso da demonstração (discurso científico) e o discurso da negociação (discurso da sala de aula), é patente a diversidade com que os autores tratam a questão da verdade e da validação dos teoremas matemáticos. Aqui a retórica impera.

6.3 Negociação de Heurística Matemática

Além de transmitir informação, o autor tem a função de fornecer *know-how* e ajudar o leitor a construir o seu próprio conhecimento matemático. Daí a análise epistemológica dos exemplos, exercícios, problemas e lacunas deixadas pelo autor, permite avaliar a sua heurística e o seu grau de "construtivismo".

7. Conclusões

Muitos docentes de matemática, acreditam que a característica principal da matemática é a lógica, a dedução, e que por isso devem enfatizar os aspectos lógicos em suas aulas.

O esquema de análise do discurso matemático apresentado na tese [1] tem por objetivo dar aos professores a consciência do grande uso de recursos retóricos que os autores de livros-textos fazem em seu discurso.

As técnicas de análise de discurso desenvolvidas podem ajudar os professores e os educadores matemáticos a compreenderem que o ensino e aprendizagem de matemática é um processo de negociação.

Aprendizagem envolve aceitação, e aceitação significa persuasão: professores e autores de livros-textos estão ambos envolvidos mais em persuasão do que em raciocínio lógico. Em resumo, a educação matemática é essencialmente um processo retórico.

Bibliografia

[1] Hariki, S., Analysis of Mathematical Discourse: Multiple Perspectives, Ph.D. thesis, University of Southampton, 1992

BRASIL
UNIÃO DE TODOS

Campus da UnB – Acesso Sul – Asa Norte – 70910 – Brasília – DF
Tel.: (061) 347-8970 Fax: (061) 273-3233

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo