

MEC  
INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS

MEC  
INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS

---

SEMINÁRIO NOVAS PERSPECTIVAS  
DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 de maio 1994

---

Série Documental: Eventos, n.4, 3ª parte, maio/1994

---

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**SEMINÁRIO NOVAS PERSPECTIVAS  
DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL**  
Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 maio 1994

Série Documental: Eventos, n.4, 3ª parte, maio/1994

DIRETOR  
Divonzir Arthur Gusso

COORDENADORA DE PESQUISA  
Margarida Maria Souza de Oliveira

COORDENADOR DE ADMINISTRAÇÃO  
Luís Carlos Veloso

COORDENADOR DE AVALIAÇÃO  
Orlando Pillatí

COORDENADOR DE ESTUDOS DE  
POLÍTICAS PÚBLICAS Tancredo  
Maia Filho

GERENTE DO PROGRAMA EDITORIAL  
Arsênio Canísio Becker

SUBGERENTE DE DISSEMINAÇÃO E CIRCULAÇÃO  
Sueli Macêdo Silveira

GERENTE DO CENTRO DE INFORMAÇÕES  
BIBLIOGRÁFICAS EM EDUCAÇÃO Gaetano  
Lo Mônaco

RESPONSÁVEL EDITORIAL  
Cleusa Maria Alves

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA  
Celi Rosalia Soares de Melo

APOIO GRÁFICO  
Maria Madalena Argentino  
Mirna Amariles Beraldo

Série Documental: Eventos, n.4

Tiragem: 100 exemplares

INEP - Gerência do Programa Editorial  
Campus da UnB, Acesso Sul  
Asa Norte  
70910-900 - Brasília - DF  
Fone: (061) 347 8970  
Fax:(061) 273 3233





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO - MEC INSTITUTO  
NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS

**SEMINÁRIO NOVAS  
PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA NO BRASIL**

Águas de São Pedro/SP, 01 a 06 maio 1994

O evento foi organizado pela Coordenadoria de Pesquisa do INEP, juntamente com a PUC/SP, através da Diretora-Geral de Informática e Física, Tânia Campos, contando com o apoio do CNPq e CAPES. Esta publicação, com tiragem reduzida, fora das normas editoriais desta Série Documental, contém textos de expositores, sem nenhuma revisão pelo INEP.

Brasília/1994

## APRESENTAÇÃO

Uma das funções institucionais do INEP consiste em prover e estimular a disseminação e discussão de conhecimentos e informações sobre educação, visando seu desenvolvimento e domínio público, através de sua produção editorial.

Com o objetivo de contribuir para a democratização de parte desses conhecimentos, de modo mais ágil e dinâmico, o INEP criou recentemente as *Séries Documentais*, com o mesmo desenho de capa: elas formam um novo canal de comunicações, diversificado quanto a público, temática e referência; abrangendo vários campos, elas podem alcançar, com tiragens monitoradas, segmentos de público com maior presteza e focalização; cada série poderá captar material em diferentes fontes (pesquisas em andamento ou concluídas, estudos de caso, *papers* de pequena circulação, comunicações feitas em eventos técnico-científicos, textos estrangeiros de difícil acesso, etc).

São as seguintes as séries:

1. *Antecipações* tem o objetivo de apresentar textos produzidos por pesquisadores nacionais, cuja circulação está em fase inicial nos meios acadêmicos e técnicos.

2. *Avaliação* tem o objetivo de apresentar textos e estudos produzidos pela Gerência de Avaliação.

3. *Estudo de Políticas Públicas* tem o objetivo de apresentar textos e documentos relevantes para subsidiar a formulação de políticas da Educação.

4. *Eventos* tem o objetivo publicar textos e conferências apresentados em eventos, quando não se publicam seus anais.

5. *Inovações* tem o objetivo de apresentar textos produzidos pelo Centro de Referências sobre Inovações e Experimentos Educacionais (CRIE).

6. *Relatos de Pesquisa* tem o objetivo de apresentar relatos de pesquisas financiadas pelo INEP.

7. *Traduções* tem o objetivo de apresentar traduções de textos básicos sobre Educação produzidos no exterior.

# Um Modelo Para Compreensão Que Os estudantes Têm Em Um Ambiente De Representações Múltiplas<sup>1</sup>

Marcelo C. Borba<sup>2</sup>

Departamento de Matemática Pós-Graduação  
em Educação Matemática  
UNESP-Rio Claro, SP

## 1. Introdução

Representações múltiplas tem sido abordada com freqüência nos últimos anos (Wenzelburger, 1992; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Rizzuti, 1991, Rubin, 1990; Arcavi & Nachmias 1989; Kaput, 1987). Em diversas instâncias (Borba, 1993a; Borba, no prelo-a; Borba, no prelo-b; Borba & Confrey, 1993; Borba & Confrey, 1992) tenho apresentado exemplos específicos de como os estudantes lidam com o aspectos do conceito de função em um ambiente computacional onde existem representações múltiplas. Neste artigo eu apresentarei um modelo de como acontece o processo de compreensão matemática quando os estudantes lidam com aplicativos que envolvem representações múltiplas. Embora eu não vá descrever exemplos em detalhes, eu farei uma breve síntese de alguns exemplos que fundamentem o modelo a ser apresentado no final deste artigo. Como os exemplos e o modelo não podem ser descritos em um vácuo, eu iniciarei este artigo com uma breve descrição do aplicativo Function Probe© (Confrey, 1991), o qual utilizei em algumas pesquisas, assim como um enfoque para o ensino de transformações de funções que é o tema que os estudantes, entrevistados por mim, estavam trabalhando.

## 2. O Aplicativo Function Probe (FP)

O aplicativo FP, como o nome sugere, lida principalmente com funções e no presente momento só pode ser usado em computadores Macintosh. Este aplicativo tem três janelas: gráfica, tabelas e calculadora. Estas janelas "se comunicam" entre si e possuem alguns recursos algébricos. A janela gráfica permite que o usuário faça um gráfico através da expressão analítica da função, através de um "lápiz" que permite que o gráfico seja feito como um desenho à mão livre, ponto a ponto, usando o rato para tal fim ou ponto a ponto através de pares ordenados armazenados na janela das tabelas ou através de uma função

<sup>1</sup> Este artigo é parte de um projeto integrado de pesquisa patrocinado pelo CNPq (processo520107/93-4) intitulado Pensamento Matemático, Funções Computadores e Outros Meios de Comunicação.

<sup>2</sup>Embora a responsabilidade sobre o escrito seja minha eu gostaria de agradecer os comentários feitos, em versões preliminares desse texto, pela professora Telma de Souza, aluna da Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro.

armazenada na janela da calculadora. Na coluna situada à esquerda da figura 1, podem se ver, de cima para baixo, os diversos ícones de FP que, quando ativados, desempenham as seguintes operações: a seta permite que um determinado gráfico seja selecionado dentre os muitos que por ventura estejam grafados; o segundo ícone permite que uma expressão analítica como  $x^2$  ( $x^2$ , na sintaxe do computador) seja grafada; o terceiro, que tem uma mão desenhada, permite que um ponto seja grafado e o quarto, "o lápis" de desenho que permite que um gráfico seja rascunhado à mão livre. Os três ícones da parte de baixo dessa coluna permitem que transformações sejam feitas "diretamente" no gráfico. Usando o rato, o usuário pode coordenar suas ações feitas neste rato com as transformações no gráfico sem a utilização de equações ou tabelas. Nesse sentido o gráfico pode ser transladado vertical ou horizontalmente quando o ícone abaixo do lápis for usado (vide figura 1, por exemplo). O próximo ícone permite que o gráfico seja refletido em torno de qualquer linha vertical ou horizontal e em torno da linha  $y=x$ . Finalmente o último ícone permite que o gráfico seja esticado vertical ou horizontalmente. Esse esticamento pode ser feito, usando-se qualquer linha como a linha central do

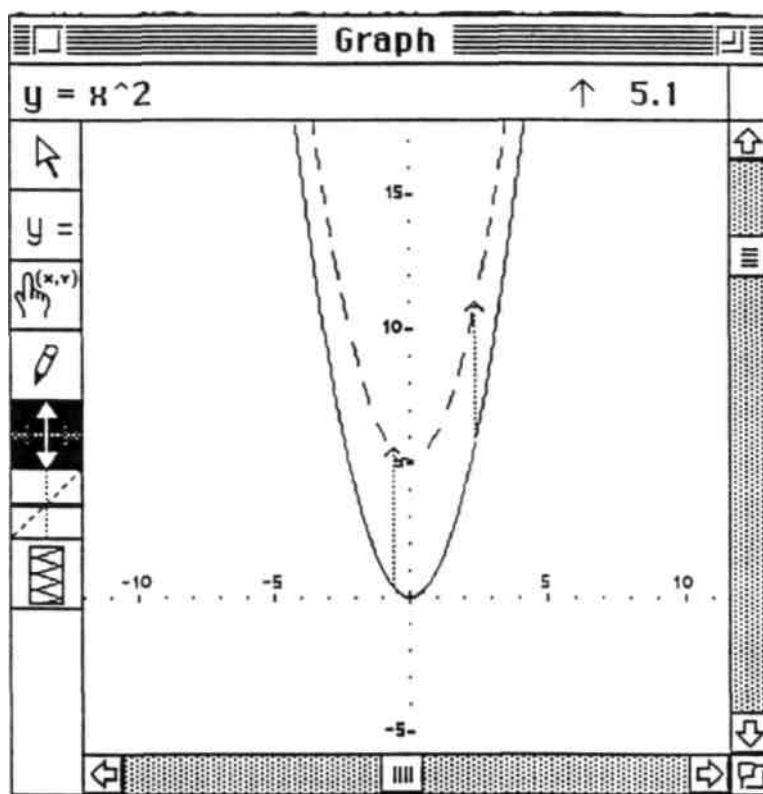


Figura 1 - Uma translação vertical de 5,1 unidades sendo executada em FP. Observe que, devido ao comando "esconder transformações" estar ativado, a expressão analítica do gráfico transformado não será mostrada. Caso se queira, pode-se fazer com que uma dada expressão seja mostrada.



esticamento, que se torna uma linha de invariância nessa transformação. Essa linha é chamada de "âncora" no aplicativo devido ao fato de a reta não se mover, mantendo-se invariante, portanto, durante o esticamento realizado. Em termos algébricos, pode ser dito que o gráfico de  $f(x)$  ao ser esticado horizontalmente duas unidades, com a âncora na linha  $x=0$  seria descrito como  $f(x/2)$ . O leitor pode tentar identificar o que acontece quando há um esticamento e âncora não se encontra na reta  $x=0$ .

De um determinado gráfico, como  $y=x^2$ , podem-se selecionar pontos através do comando ("sampling command") que, dentre diversas opções, permite que em todo intervalo de "m" unidades no eixo dos "x" um ponto seja selecionado em um dado intervalo. Por exemplo, pode-se selecionar o intervalo  $[-3,3]$  com  $m=1$ , e isso levará o aplicativo a selecionar no gráfico os pontos  $(-3,9)$ ,  $(-2,4)$ ,... e  $(3,9)$ . Esses pontos selecionados e em destaque no gráfico podem ser remetidos para a janela das tabelas onde aparecerão como na figura 2.

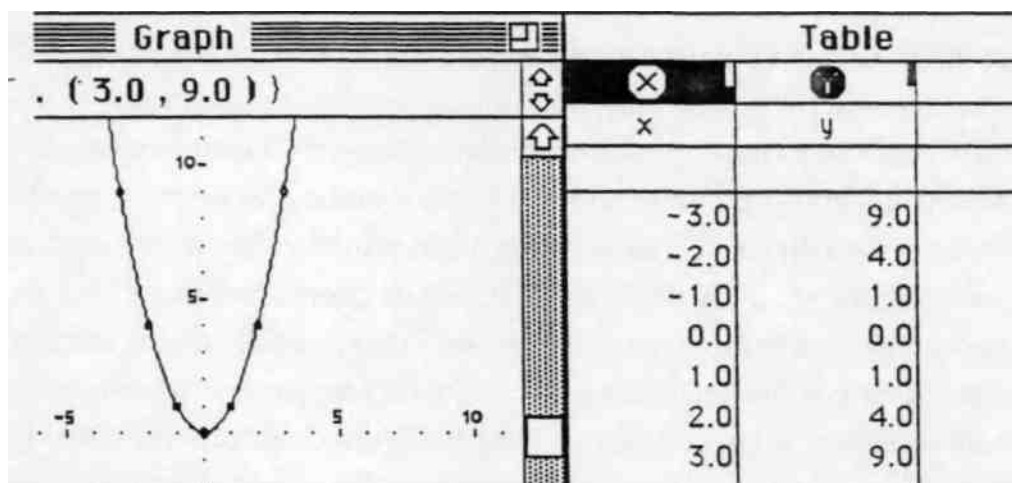


Figura 2 - Pontos selecionados na janela gráfica remetidos para a janela da tabela.

A representação tabular pode ter inúmeras colunas, e os pontos podem ser preenchidos um a um ou através de algoritmos desenvolvidos pelo usuário. Também, se já houver uma coluna, como a coluna x na figura 2, uma nova coluna poderá ser gerada através de uma equação como  $z=x+3$ , listando na coluna "z" os valores 0,1,2,..., 6. Se houver necessidade, qualquer conjunto de pares ordenados, "armazenados" em duas colunas quaisquer da janela tabular, pode ser remetido para o gráfico.<sup>3</sup> Para efeito deste artigo, é fundamental observar que as possibilidades algébricas das tabelas permitem que uma translação horizontal de 5 unidades para a direita seja expressa por uma coluna  $x'=x+5$  e  $y'=y$ , onde x e y representam a função original e x' e y' a função horizontalmente transladada.

<sup>3</sup> A calculadora não será descrita aqui, visto que ela não é relevante para este artigo. Para uma discussão mais completa acerca do funcionamento de FP, o leitor deve se referir à documentação de FP (Confrey et al., 1991).

### 3. Um Modelo Para a Aprendizagem de Transformações de Funções

A pesquisa, que inspirou o modelo de como os estudantes compreendem em um ambiente de representações múltiplas, foi realizada de acordo com a metodologia "experimento de ensino" (Cobb & Steffe, 1983), que é uma variação da entrevista clínica de Piaget. No experimento de ensino (teaching experiment), é entendido que o entrevistador interage com o aluno, mesmo que não o queira. Mais do que isso, a intervenção é vista como positiva, embora não seja esperado que a intervenção do entrevistador seja diretiva a ponto de ofuscar o pensamento do aluno. Em outras palavras, embora não se espere que o entrevistador direcione o raciocínio do aluno insistentemente com a sua agenda, é assumido que uma não intervenção, por parte do entrevistador, é impossível na medida em que, por exemplo, as tarefas propostas "têm" a sua própria agenda que expressam a intenção daquele que desenhou tais tarefas.

Nesta pesquisa em particular, o entrevistador estava preparado para intervir, sem hesitação, em casos em que o desconforto do aluno com uma dada questão fosse muito grande e também estava preparado para propor ao aluno um retorno às questões relevantes do experimento de ensino, após um longo tempo em que o aluno tivesse investigado um dado caminho alternativo que não o estivesse levando a um caminho que o entrevistador entendesse como produtivo. É claro que a subjetividade destes critérios é imensa, e estas decisões, nesta pesquisa, foram tomadas no momento da entrevista ou no intervalo durante duas entrevistas, quando o entrevistador teve chance de assistir aos vídeo-teipes das entrevistas e refletir com o seu grupo de pesquisa sobre um determinado tema da entrevista. No caso particular das entrevistas realizadas nesta pesquisa, o entrevistador é o autor desse artigo.

Nestas entrevistas, o tópico abordado foi transformações de funções. Transformações de funções são vistas como essenciais na medida em que problemas ligados à modelagem matemática de uma dada situação podem ter seus parâmetros ajustados através de transformações, se uma dada função "prototípica" ( $y=x$ ,  $y=x^2$ ,  $y=\text{sen}x$ , etc.) já foi vista como apropriada para descrever um dado fenômeno (Confrey, 1992; Confrey & Smith, 1991).

Nesse experimento, todavia, não foi usado um exemplo de modelagem. Trabalhou-se no que foi chamado de "contexto do computador" (Borba, 1993a), no qual o computador e o aplicativo são vistos como a situação que ajuda a dar significado à matemática que é construída para modelar uma dada situação. No caso do computador e de um aplicativo como FP, várias situações podem ser criadas com o intuito de gerar uma dada construção de

conhecimento matemático. Entendo que, embora as situações de modelagem, no sentido pedagógico matemático comumente usado no Brasil (Queiroga, 1990; Borba, 1993b), sejam fundamentais para a educação matemática, na medida em que estabelecem relações entre matemática, no sentido restrito<sup>4</sup>, e fenômenos, observados por aquele que conhece no mundo que o "circunda", não são suficientes para proporcionar aprendizagem matemática na totalidade de assuntos que tenho considerado importantes de serem abordados (Borba, 1993a). Neste sentido, embora transformações de funções possam ser introduzidas e desenvolvidas através da modelagem matemática de um fenômeno estudado, as transformações de funções podem, em si, tornar-se o fenômeno a ser estudado, como no caso da pesquisa discutida neste artigo.

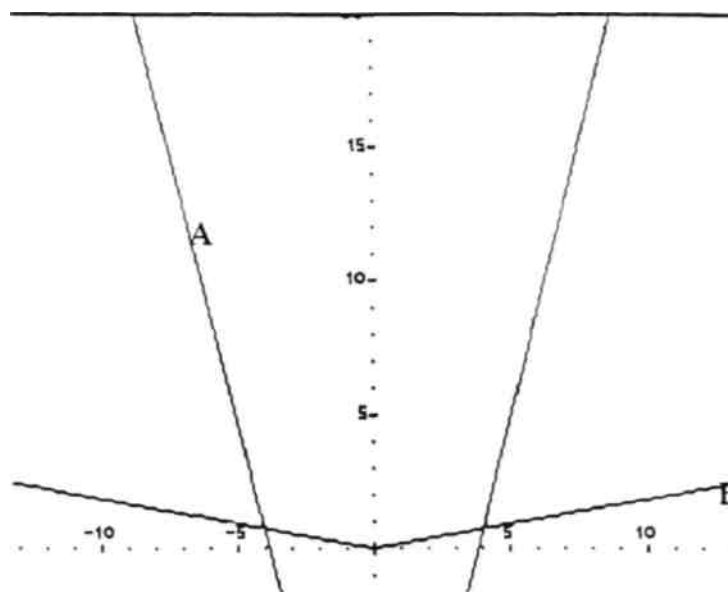


Figura 3 - Um dos pares de funções apresentados aos estudantes que participaram do experimento de ensino. O gráfico A foi gerado da seguinte forma:  $y = |x|$  foi gerado através da parte algébrica do aplicativo, em seguida, usando-se os ícones de transformações, esta função foi "comprimida (esticamento "s" com  $0 < s < 1$ ) horizontalmente" e em seguida foi transladada verticalmente para baixo. O gráfico B depois de marcado no gráfico sofreu um esticamento horizontal com  $s > 1$ .

Tenho argumentado que, embora esse processo de modelagem seja importante, tanto no sentido defendido por Confrey (1992) quanto na tradição brasileira (Queiroga, 1990), é artificial restringir toda a prática educativa em matemática a esta abordagem, na medida em que pode se tornar artificial estudar determinadas partes de matemática com essa abordagem. Embora o tema transformações de funções seja importante no processo de

Por sentido restrito quero me referir ao conjunto de expressões matemáticas que são vistas como objetos, expressões que foram criadas ao longo da história e que são re-criadas e transformadas pelos significados atribuídos a elas ao longo da história.

modelagem, como já se argumentou anteriormente, pode se tornar importante o aprofundamento deste tema. tornando-se ele próprio, então, o ponto central de uma

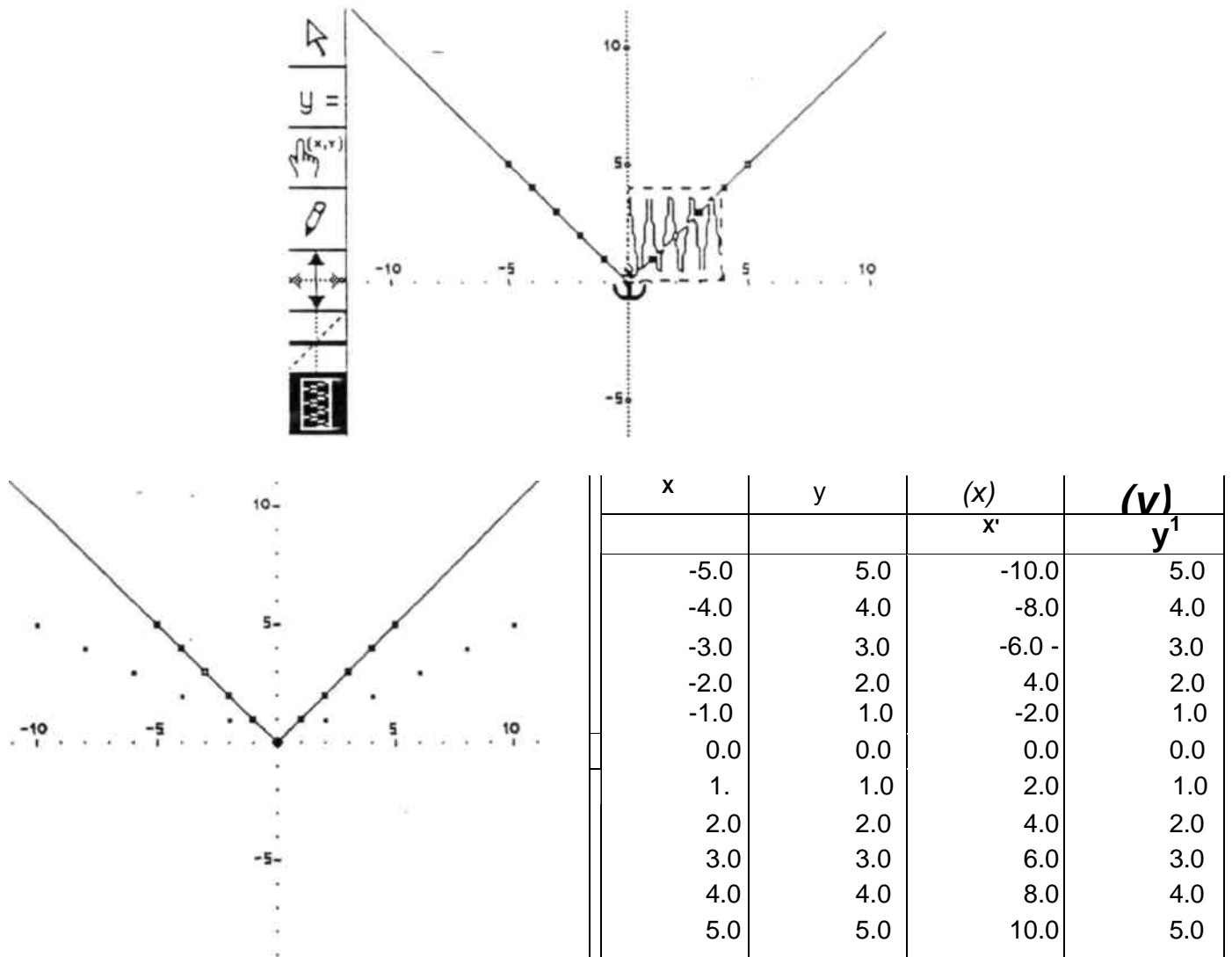


Figura 4 - Na parte superior da figura, a função  $y = |x|$  foi grafada através de facilidades algébricas. Os pontos em negrito foram selecionados neste gráfico, para que fique "evidente" o que acontece com os pontos quando o aplicativo é acionado para efetuar um esticamento horizontal. Neste caso, a "âncora" ou linha de invariância permaneceu na reta  $x=0$ . O pequeno quadrado em forma de mola "tem" a intenção de pictoricamente ajudar na compreensão do esticamento. No momento anterior ao que resultou na figura de baixo à esquerda, a mola era um retângulo de  $2 \times 1$  (largura  $\times$  altura) "mostrando" o esticamento horizontal de duas unidades. Em seguida, ambos os conjuntos de pontos, os originais de  $y = |x|$  e os esticados horizontalmente foram remetidos para a tabela. Analisar as diferenças e as semelhanças entre estes conjuntos de pares ordenados era no que consistia a segunda tarefa do experimento. Esta tarefa pode se tornar bastante complexa quando a âncora não se encontra no eixo dos  $y$ .

investigação. Para um estudo como esse, o contexto do computador pode se tornar fundamental na medida em que possibilita a quebra da "hegemonia" das expressões algébricas, valorizando-a visualização, o uso de pontos discretos e servindo de "apoio" para os significados que venham a ser dados por aqueles que venham a estudar estes temas.

Nesse sentido, os problemas desenhados por mim<sup>5</sup> para esse experimento de ensino foram baseados num modelo com três passos fundamentais. No primeiro, o estudante tinha que, usando apenas os ícones de transformação da janela gráfica (que serão descritos na próxima seção), fazer com que um dos gráficos dados coincidissem com um segundo gráfico, como mostra a figura 3.

Esta atividade visava basicamente engajar o aluno em um trabalho com transformações a partir de visualização e ações físicas (no rato). O próximo problema exploratório convidava o estudante a estabelecer conexões entre a visualização e o discreto através da pergunta central: o que acontece com um determinado ponto desse gráfico quando este sofre uma determinada transformação (translação, reflexão e esticamento)? Esse problema estimula o uso do selecionador de pontos (sampling command) e da remessa (send command) de pontos entre a janela gráfica e a tabular. Esse problema também estimula a análise das transformações sob um ponto de vista discreto, ou seja, vão se analisar as transformações através de comparações das coordenadas de um determinado conjunto de pontos antes e depois de uma dada transformação (vide figura 4). O terceiro e último problema exploratório (que era seguido por outros 4 problemas menos abertos) estimulava o estudante a estabelecer conexões entre transformações gráficas feitas através dos ícones de transformação e equações das funções escritas na forma  $y=f(x)$ . Nesse experimento foram usadas as "funções prototípicas" (Confrey & Smith, 1991)  $y=x^2$ ,  $y=|x|$  e  $y=[x]$  devido à diversidade que elas podem proporcionar em problemas ligados a transformações e devido aos diferentes graus de familiaridade que os estudantes, com os quais trabalhei, tinham com as mesmas.

#### 4. Uma Sinopse dos Exemplos

Devido a problemas de espaço não apresentarei protocolos e uma análise mais detalhada como fiz em outras ocasiões (Borba, 1993a; Borba, no prelo-a; Borba no prelo-b). Entretanto se faz necessário que um resumo de algumas experiências vividas por alunos sejam relatados para que o modelo a ser apresentado no próximo item seja substanciado por eles. Para uma descrição mais detalhada, favor se dirigir à bibliografia mencionada acima.

Esses problemas contaram com a determinante influência do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da Cornell University, em particular de Dr. Jere Confrey e Dr. Erick Smith.

O primeiro exemplo a ser relatado se refere a Ron, um aluno de 16 anos. Quando Ron estava na 3ª fase do experimento de ensino, ou seja, estudando a relação entre gráficos e coeficientes, o desenvolvimento de suas atividades o levou de encontro a um obstáculo. Embora Ron tivesse feito com sucesso as duas fases anteriores e fosse um aluno com qualidades excepcionais, Ron previu que ao transladar o gráfico de  $y=x^2+3x+5$  horizontalmente para a direita em 5 unidades a expressão analítica do gráfico se modificaria para  $y=(x+5)^2+3(x+5)+5$ . A tentação de associar um movimento para a direita no plano cartesiano com o sinal de "+" é bastante comum quando este tema é abordado em sala de aula. Esta tentação é bem razoável, em especial se levarmos em conta que no mundo das "tabelas" ela é satisfatória, ou seja, uma translação horizontal (TH) de 5 unidades corresponde a uma adição de 5 unidades às abscissas mantendo-se as ordenadas constantes.

Ron percebeu então uma discrepância com a sua experiência anterior no mundo das tabelas assim como outra no próprio mundo dos gráficos. Ron tinha através de métodos não algébricos, usando os ícones de FP, achado um resultado que contradiz o resultado achado neste momento no mundo "algébrico". Ron tinha calculado "c" para a equação transformada na forma  $y=ax^2+bx+c$  usando métodos gráficos. Agora com o seu resultado de  $y=(x+5)^2+3(x+5)+5$  o "c"

$$y = (H)^2+3(H)+5$$

após a equação ser reduzida para a forma  $y=ax^2+bx+c$  era diferente

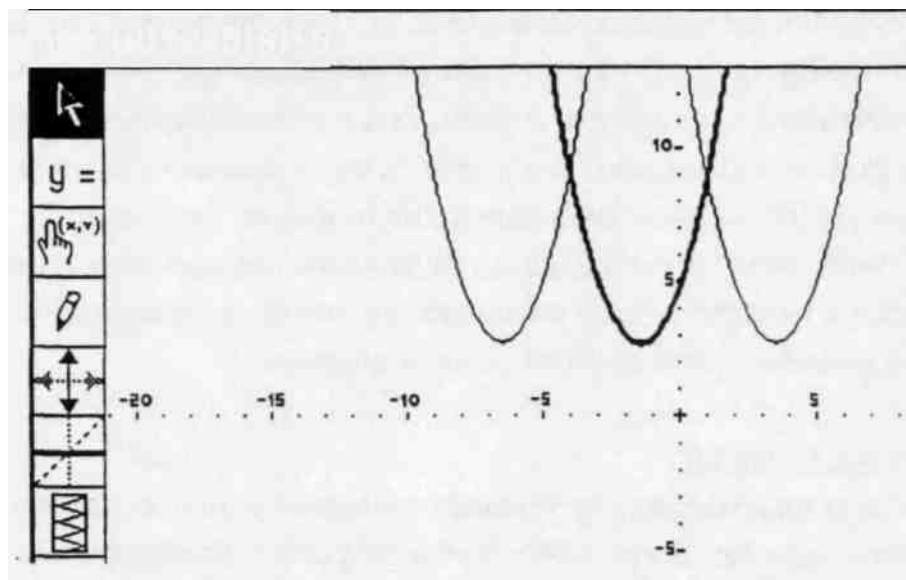


Figura 5 - Da esquerda para a direita  $y=(x+5)^2+3(x+5)+5$ ,  $y=x^2+3x+5$  e  $y=(x-5)^2+3(x-5)+5$ . A equação mostrada é do gráfico central que foi "selecionado". Ron tinha estes 3 gráficos à sua frente na parte do experimento de ensino que está sendo discutida.

do encontrado anteriormente por ele mesmo. A tensão provocada por estas discrepâncias entre resultados atingidos em diferentes representações aumentou ainda mais quando foi

mostrada o que o aplicativo Function Probe mostrava como equação da função transformada:

$$y=(x-5)^2+3(x-5)+5.$$

Este problema levou Ron a desenvolver 3 soluções: uma visual, uma parentética algébrica e uma "transformadora". A primeira solução encontrada por Ron, era baseada em um argumento visual com sólidas raízes nas tabelas geradas por ele em Function Probe. Ron argumentava que se o gráfico da direita fosse, ponto a ponto, de volta para a esquerda até que ele se encontrasse com o gráfico original ( $y=x^2+3x+5$ ) as coordenadas "x" seriam subtraídas de 5 unidades e as de y ficariam constantes. Ron usou para descrever esta linha de argumentação uma linguagem visual e gestual. Esta linha de raciocínio parecia dar-lhe uma primeira explicação para a questão do sinal de "-" mas não resolvia a discrepância entre o sinal e o movimento para a direita.

Em um outro momento do experimento, Ron desenvolveu uma explicação algébrica para a discrepância que tinha ocorrido. Ele argumentava, usando uma notação parentética, que dada a função inicial ( $x, x^2+3x+5$ ), uma TH de 5 unidades para a direita representaria uma mudança em "x" e portanto em uma mudança do "par ordenado" anterior para  $(x+5, x^2+3x+5)$ . Como, Function Probe não aceita funções nessa forma, uma mudança de variáveis (minha linguagem) poderia ser feita mantendo-se a relação anterior. Esta mudança de variáveis teria como expressão  $(x, (x-5)^2+3(x-5)+5)$ . Resumindo, a função original  $(x, f(x))$  ao ser transformada por uma TH de 5 unidades para a direita, se transformava na função  $(x, f(x-5))$ . A solução de Ron pode ser mais facilmente entendida se na hora da mudança de variáveis denominarmos a nova função como uma função de  $x'$ . Neste caso, a passagem de  $(x+5, x^2+3x+5)$  para  $(x, (x-5)^2+3(x-5)+5)$  pode ficar mais fácil de ser entendida. Se no primeiro par ordenado tomarmos  $x'=x+5$  temos que  $x=x'-5$ . Com esta equivalência, podemos substituí-la no primeiro par ordenado e teremos  $(x'-5+5, (x'-5)^2+3(x'-5)+5)$  que é equivalente a  $(x', (x'-5)^2+3(x'-5)+5)$ . Esta mudança de variáveis, embora não tenha sido usada no experimento aqui descrito, foi utilizada depois em cursos para professores como um caminho para abordar um problema que é comum em educação matemática, sejam elas como computadores ou sem computadores. Esta solução, convencia Ron, algebricamente, de que a expressão analítica mostrada pelo computador estava correta, mas ainda não coordenava o movimento que Ron fazia para a direita, com o rato do computador, com o sinal de "-" que insistia em aparecer.

Deve ser notado que o entrevistador já estava satisfeito com as respostas obtidas por Ron. Apesar disso, Ron não estava satisfeito e quando já estava trabalhando com um outro problema, embora relacionado a este, veio com uma solução que "transformava" ou

"superava" os limites do aplicativo que estava sendo usado. Ron propôs que uma TH de 5 unidades para a direita não deveria ser entendido como uma transformação na função, mas como uma "transformação em x". Com isto, ele propunha que a ação física também deveria ser pensada como uma ação no eixo dos x e não no gráfico, "porque era antes da função". Com isto ele propunha que uma TH de 5 unidades deveria ser pensada como um movimento de 5 unidades do eixo dos x para a direita mantendo-se o gráfico de uma função como  $y=x^2$  centrado no eixo dos x por enquanto. Mas como isso acarretaria que a "origem" do plano estaria em (-5,0) e não (0,0) isto acarretaria em que com a volta do eixo no sentido que a origem voltasse a ser (0,0) o gráfico da função seria "empurrado" para a esquerda e teria como equação  $y=(x+5)^2$ . Ou seja, Ron usou uma linha de raciocínio semelhante a usada na solução parentética para coordenar o sinal de "+" ou de "-" com uma ação física, no caso, uma ação nos eixos dos x. Ron depois generalizou esta solução para outros casos, incluindo o complexo caso do esticamento, e usou metáforas no sentido descrito por Goldenberg & Kliman (1990) e Borba (1993a) para solidificar a explicação dada por ele.

Doug, um outro estudante, trabalhou com esticamento de forma bastante intensa. Este aluno desenvolveu uma lei bastante sofisticada para explicar o que acontece com um ponto qualquer de um gráfico quando este gráfico é esticado horizontalmente, estando a âncora (linha de invariância) em qualquer reta com equação  $x=a$ . Doug estava trabalhando na segunda tarefa do modelo para a aprendizagem de transformações de funções, ou seja, ele estava estudando a relação entre transformações no gráfico e mudanças em pontos discretos, na tabela. Neste tipo de problema, um esticamento horizontal de duas unidades como o mostrado na figura 4 levaria a equações de co-variação (Borba, 1993a) no mundo da tabela do tipo  $x'=2x$  e  $y'=y$ , onde  $(x,y)$  é um par ordenado da função original e  $(x',y')$  é o par ordenado que foi transformado como é mostrado também na figura 4. Neste caso, a âncora foi deixada nos eixos do y (reta  $x=0$ ). Quando a âncora fica em outra reta, o problema fica mais complexo como foi dito. Embora não vá ser discutido aqui como Doug chegou à sua lei, vale dizer que após várias tentativas, Doug concluiu que equação  $x'=sx-a(s-1)$  - considerando que  $y'=y$  em transformações horizontais permanece constante - descreveria de forma geral os esticamentos estudados por ele. Na equação acima, "s" é o coeficiente de esticamento e "a" é a posição da reta vertical onde se localiza a âncora.

Eu deixo para o leitor a escolha da sua solução e análise da solução dele embora uma análise seja oferecida em Borba (1993a). O que importa para este artigo é o fato que mesmo depois de ter alcançado este resultado a pergunta "Por que este resultado descreve a situação estudada?", feita pelo entrevistador, provocou um novo processo de investigação. Doug terminou por gerar uma explicação que relacionava a âncora com translações, usando duas



mídias diferentes - papel e lápis e computador - e as diversas representações de Function Probe como mediadoras das suas explicações.

5. O modelo para o Entendimento dos Estudantes em Ambientes de Representações Múltiplas

**EPISTEMOLOGIA DAS REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS**

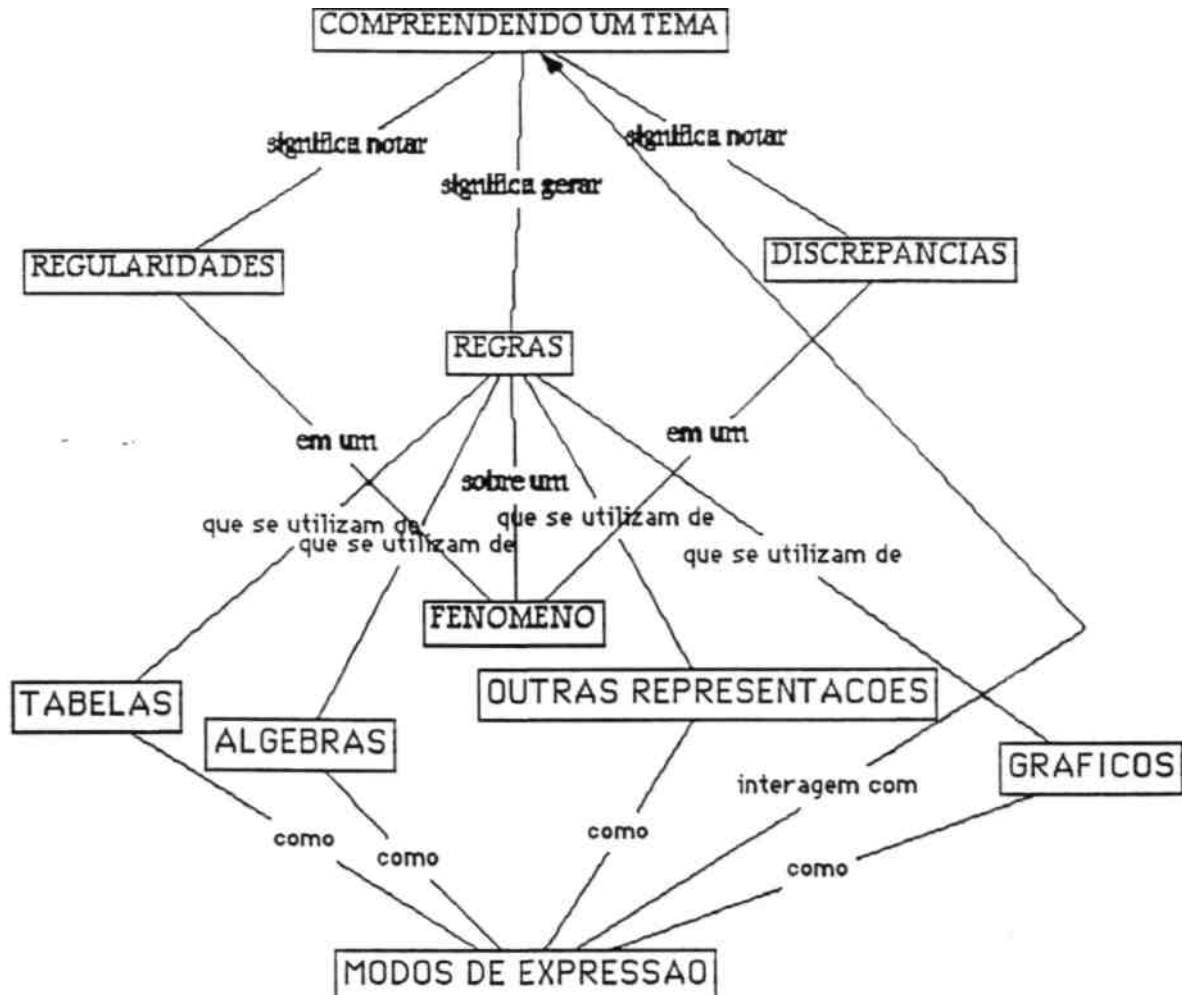


Figura 6 - Mapa Conceitual mostrando a primeira parte do modelo. Esta parte enfoca as regularidades e/ou discrepâncias encontradas na análise de um fenômeno.

Nos exemplos brevemente discutidos acima e em muitos outros discutidos em detalhes em Borba (1993a, no prelo-a, no prelo-b) duas características aparecem constantemente nas investigações feitas por estudantes em ambientes de representações múltiplas. A primeira é a discrepância. Sempre que há uma discrepância entre resultados encontrados em diferentes representações, isso gera uma tensão que só é relaxada com a mudança da conjectura existente anteriormente ou com uma nova coordenação entre as representações que supere a discrepância (aparentemente) existente. Como "alavanca epistemológica" (Borba, 1993a)

principal aparece a pergunta "Por que?" tais como: "por que tal regularidade acontece?; por que tal discrepância acontece? ou por que a lei achada em uma dada representação é válida?"

Perguntas como estas, permitem que resultados empíricos, achados nas diversas

### SEGUNDO PASSO DO MODELO: A PERGUNTA "POR QUE" E FEITA

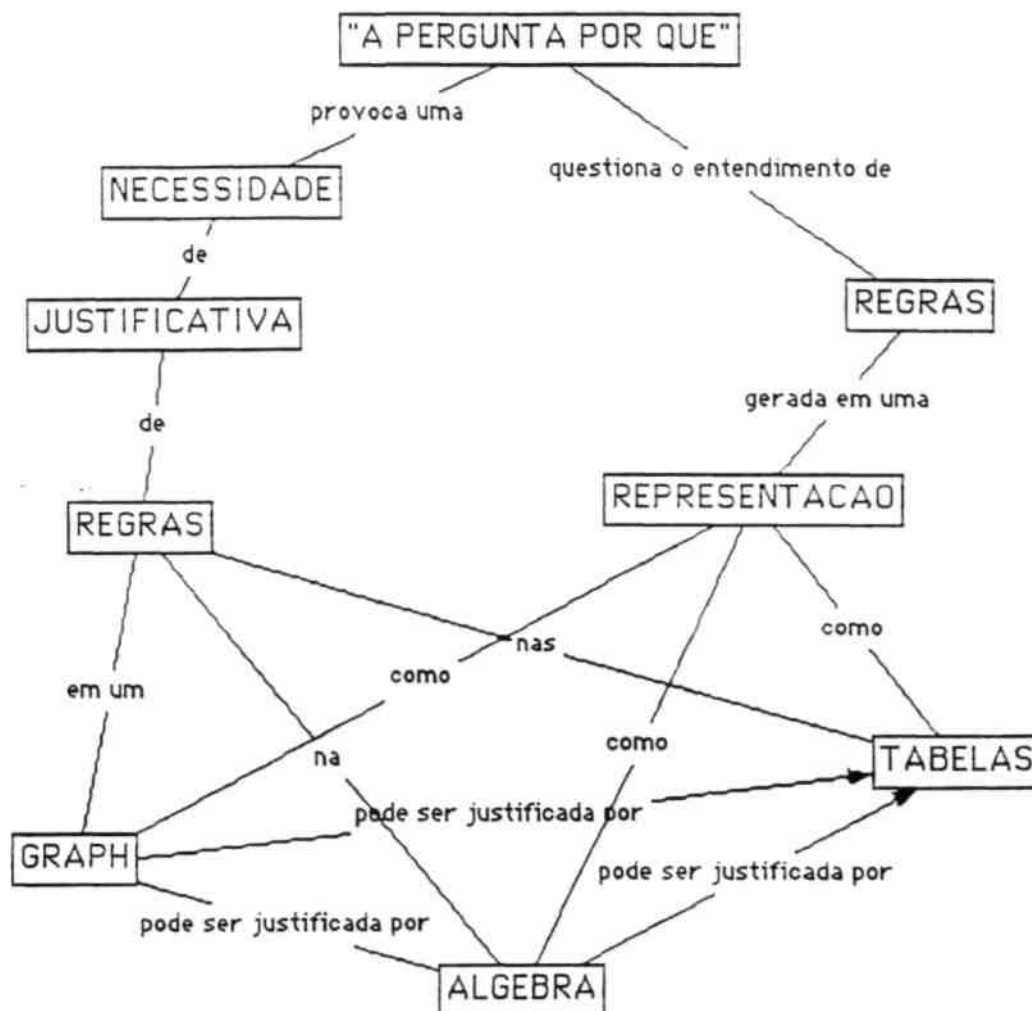


Figura 7 - O segundo passo enfatiza o papel da pergunta "Por que". Realça também o processo desencadeado por esta pergunta, que geralmente inclui uma explicação que está "presente" em uma representação para justificar um resultado encontrado em outra representação.

representações de um aplicativo, não pareçam de todo satisfatório para estudantes, mesmo que estes tenham se esforçado demasiadamente para achar uma determinada regularidade em um fenômeno. Esta insatisfação gera, na maioria dos casos, novas investigações matemáticas no "contexto do computador" (Borba, 1993a). Para sistematizar as características da construção do conhecimento em ambientes de representações múltiplas foi elaborado um modelo.

Este modelo pode ser melhor compreendido se forem observados os dois quadros sintéticos das figuras 6 e 7. A figura 6 enfatiza as regularidades observadas em uma investigação de um dado fenômeno. Enfatiza também as discrepâncias que aparecem quando o fenômeno é analisado usando diferentes representações. Já a figura 7, focaliza o papel desempenhado pela pergunta "por que?" assim como o papel que as diferentes representações exercem na explicação de uma regularidade/discrepância que é encontrada em uma outra representação estabelecendo uma dinâmica dialética no processo de compreensão.

Este modelo consegue sintetizar as experiências de Ron e Doug, brevemente resumidas no item anterior. Ron buscava superar as discrepâncias encontradas por ele nas suas investigações e usou sempre uma representação como um meio de justificar um resultado encontrado em outra. Embora diversas perguntas do tipo "Por que?" tenham sido levantadas, naquela ocasião, tanto por Ron como pelo entrevistador, esta pergunta aparece mais enfaticamente no exemplo de Doug, que após construir um resultado bastante abrangente acerca dos esticamentos, engajou-se em outro problema ao enfrentar a pergunta "Por que?".

Este modelo parece bastante razoável para compreender a compreensão dos estudantes com outros tópicos matemáticos, embora mais pesquisas sejam necessárias para que se possa detalhar as especificidades que, por ventura, existam neste modelo devido ao fato dele ter suas bases em um trabalho com o tema funções. Vale também ser realçado que novos estudos poderão refinar este modelo na busca de uma compreensão de como se conhece. Finalmente, encerrarei este artigo levantando a conjectura de que se este modelo conseguir, na medida em que os computadores se tornem mais acessíveis, descrever grande parte da atividade matemática nas entrevistas, sala de aula, da academia e outros cenários, estará se criando um novo padrão do que uma prova venha a ser, se entendermos prova como Henderson (1992), ou seja, como um argumento convincente a uma pergunta "Por que?". Neste sentido, um jogo entre representações seria a base de um argumento convincente.

## 6. Bibliografia

**Arcavi, A. and Nachmias, R. (1989)** - Familiar concepts with a new representation. Anais do Psychology of Mathematics Education, Vol. I, July 9-13, Paris, França, pp. 77-84.

**Borba (no prelo-a)** - Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas, BOLEMA, UNESP-Rio Claro.

**Borba (no prelo-b)** - Funções, Representações Múltiplas e Visualização na Educação Matemática, Anais do I Encontro Internacional de Educação Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, Julho de 1993).

- Borba, M. C. (1993a) - Students' unacrstanding of transformations of functions using multi-representational software - Tese de Doutorado, Corneil University, Ithaca, Nova Iorque, EUA.
- Borba, M. C. (1993b) - Etnomatemática e a cultura da sala de aula. Educação Matemática em Revista. Revista da SBEM. Ano I, N° 1,2° Semestre, 1993, pp. 43-58.
- Borba, M. C. and Confrey, J. (1993) - The role of teaching experiment: students' construction of transformations in a multiple representational environment. Um artigo apresentado no encontro anual do American Education Research Association, Atlanta, Georgia, USA, Abril, 12-16,1993.
- Borba, M. C. and Confrey, J. (1992) - Transformations of functions using multi-representational software: visualization and discrete points. Um artigo apresentado no encontro anual do Psychology of Mathematics Education Group, New Hampshire, USA, Agosto, 6-11, (Resumo nos Anais pp 149, vol. 3).
- Cobb, P. and Steffe, L. (1983) - The constructivist researcher as teacher and model builder. Journal for Research in Mathematics Education, 14 (2), pp. 83-94..
- Confrey, J. (1992) - Workshop: "Using computers, contextual problems, and multiple representations in mathematics instruction." In: Shriley Malcom, Linda Roberts & Karen Sheingold, *This Year in school science 1991*. Washington, DC, U.S.A: American Association for the Advancement of Science, 1992).
- Confrey, J. (1991) - Function Probe© [programa de computador]. Santa Barbara, CA, USA: Intellimation Library for the Macintosh
- Confrey, J. and Smith, E. (1991) - A Framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. Anais do Thirteenth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, Vol. I, October 16-19, Blacksburg, VA, USA, pp. 57-63.
- Confrey, J., Rizutti,J., Scher, D., and Piliero, S.** (1991) - Documentation of Function Probe. Unpublished manuscript, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- Eisenberg, T. and Dreyfus, T. (1991)** - On visualizing functions transformations. Relatório Técnico, The Wezmann Institute of Science, Rehovot, Israel.
- Goldenberg, E. P. and Kliman (1990) - What you see is what you see. Relatório Técnico, Newton, Massachussets, MA, USA: Educational Technology Center.
- Henderson, D.** (1992). Proof as a convincing argument that answers: Why? Um artigo apresentado no Seventh International Conference of Mathematics Education (ICME-7), August 17-21, Quebec, Canada.
- Kaput, J. J.** (1987) - Representation systems and mathematics. In Claude Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ, USA: Erlbraum Associates.
- A. Queiroga, M. (1990)** - Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática. Dissertação de Mestrado, UNESP-Rio Claro, São Paulo.
- Rizzuti, J. (1991)** - Students' conceptualizations of functions: Effects of a pedagogical approach involving multiple representations. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- Rubin, A. (1990)** - Concreteness in the abstract: Dimensions of multiple representations in data analysis. In Barbara Browen (Ed.), Design for learning: Research based design for learning. Cupertino,CA, USA: Apple Computer, Inc.
- Wenzelburger, E. (1992)** - The learning of trigonometric functions in a graphical computer environment. Proceedings of Psychology of Mathematics Education, Vol. III, New Hampshire, USA, pp. 106-113.

# Um quadro de referência para entender-se o que é o pensamento algébrico

Romulo Campos Lins <sup>1</sup>

## Resumo

*Neste artigo apresento o plano geral e as principais conseqüências do trabalho de pesquisa que resultou na tese de PhD "A framework for understanding what algebraic thinking is." Não se trata de um artigo de pesquisa. Além disso, é um pressuposto do autor que este artigo sirva apenas de primeira apresentação da tese. cuja leitura posterior é imperativa para o interessado nos detalhes metodológicos e nas conclusões mais específicas.*

## Introdução

Querer resumir em dez ou quinze páginas um trabalho que apenas com muitas revisões e disciplina pude apresentar em cerca de 370 páginas, é uma tarefa impossível: não se deve esperar aqui. portanto, uma apresentação reduzida da tese completa. Neste artigo farei uma exposição abrangente, porém com poucos detalhes, do trabalho de pesquisa que é apresentado em *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Lins, 1992). O plano central deste artigo é descrever uma abordagem metodológica, mais do que apresentar resultados específicos, que podem ser encontrados no texto acima referido; onde, no entanto, se fizer necessário para ilustrar os tipos de evidências produzidas neste estudo, resultados específicos serão brevemente citados. Considero que este artigo pode servir apenas como introdução à leitura da tese completa, sem a qual o presente texto não assume sua verdadeira função. Alerto também o leitor que este não é um "artigo de pesquisa."

Este trabalho foi desenvolvido no período entre janeiro de 1988 e junho de 1992, período em que estive no Shell Centre for Mathematical Education, sob a supervisão do Dr Alan W. Bell. Cabe observar que no sistema inglês o candidato a PhD não cumpre créditos, não tem cursos, o que cria uma interessante e desafiadora liberdade de trabalho. A destacar, em relação à infraestrutura disponível ao pesquisador, é notável o acesso a livros e outras referências bibliográficas. Faço esta observação no sentido de ressaltar que uma tal facilidade é certamente fundamental na construção da autonomia do pesquisador: depender das referências que o supervisor possa fornecer funciona no sentido de formar um

<sup>1</sup> Departamento de Matemática-UNESP, Av24A. 1515, CEP 13500 Rio Claro SP

pesquisador que demora mais em se desvencilhar do papel de aluno, exatamente por favorecer que se estabeleça, na relação de supervisão, uma relação de troca e de colaboração.

## Visão geral da tese: o índice

### Capítulo 1: Introdução

- 1.0 problema a ser investigado
- 1.1 A natureza da Matemática
- 1.2 Dois casos
  - De estudos culturais em Psicologia Da sala-de-aula
- 1.3 O que é o pensamento algébrico

### Capítulo 2: Um estudo da pesquisa anterior

- 2.1 Introdução
- 2.2 Revisão crítica da pesquisa anterior
  - A taxonomia SOLO
  - O estudo do CSMS
  - Z.P. Dienes sobre o ensino da álgebra
  - Pesquisa sobre a aprendizagem da álgebra apresentada no PME
    - (A) Dificuldades causada pelo uso de notação literal
    - (B) Dificuldades causadas por compreensão insuficiente da aritmética
    - (C) Caracterizações da atividade algébrica
  - Aprendizagem e o desenvolvimento histórico da álgebra
    - Eon Harper e os três usos de letras em álgebra
    - Anna Sfard e o processo de reificação
    - Rolando Garcia e Jean Piaget
  - Investigação soviética sobre o ensino da álgebra
    - Um artigo de V. V. Davydov
    - Freudenthal e a pesquisa soviética sobre o ensino da álgebra.
- 2.3 Conclusões do capítulo

### Capítulo 3: Estudo histórico

- 3.1 Introdução geral ao estudo histórico
  - A necessidade e adequação do estudo histórico
  - Objetivos e metodologia
  - Justificação da metodologia empregada
  - A relevância global do estudo histórico para a tese
- 3.2 Aspectos da cultura matemática grega
  - Doutrinas gregas de número Euclides
    - Análise e síntese em Euclides
    - A suposição de uma álgebra geométrica na Matemática grega
  - Os Livros Aritméticos
  - Diofanto Conclusões 33
  - Álgebra Islâmica Introdução
  - Al-Khwarizmi
    - Desenvolvimentos posteriores na álgebra islâmica Uma nota sobre al-Khayyam e a tendência geométrica na álgebra islâmica
    - Conclusões
- 3.4 Álgebra e aritmética hindus no período entre os anos 200 e 1200
- 3.5 Aspectos da Matemática chinesa
  - Introdução
  - Alguns aspectos do "conhecer" chinês
  - Alguns aspectos da Matemática chinesa
  - Conclusões

- 3.6 Aspectos do desenvolvimento da álgebra na Europa
  - Introdução
  - A noção de número e a solução de equações
  - O desenvolvimento da notação algébrica e a Arte Analítica de Vieta
  - Conclusões
- 3.7 Conclusões do capítulo
  - Significado na atividade algébrica
  - Operações na atividade algébrica
  - Estrutura algébrica e estrutura de ordem

#### Capítulo 4: O estudo

##### experimental 4.1

##### Introdução

- O estudo exploratório

- O estudo principal

##### 4.2 Os problemas *ticket* e *Dirigindo*

- Os problemas

- Descrição Geral

- Discussão de possíveis soluções

- Análise geral dos dados

- Soluções dos estudantes

- Resumo dos resultados; conclusões

##### 4.3 Os problemas *Gangorra*, *Liquidação*. *Número Secreto*

- Os problemas

- Descrição Geral

- Discussão das possíveis soluções

- Análise geral dos dados

- Soluções dos estudantes

- O problema NS1 (número secreto)

- O problema Gangorra 11 -5

- O problema Gangorra 4-vezes

- O problema Liquidação 11-5

- O problema Liquidação 4-

- vezes

- Resumo dos resultados:

- conclusões

##### 4.4 Os problemas *Carpinteiro*. *Chocolates*. *Sistemas de Equações*

- Os problemas

- Descrição Geral

- Discussão das possíveis soluções

- Análise geral dos dados

- Soluções dos estudantes

- O problema Sistema 1-1

- O problema Sistema 1-3

- O problema Carpinteiro 1 -1

- O problema Carpinteiro 1-2

- O problema

- Chocolates

- Resumo dos

- resultados: conclusões

##### 4.5 Os problemas *Baldes* e *Número Secreto*

- Os problemas

- Descrição Geral

- Discussão das possíveis soluções

- Análise geral dos dados

- Soluções dos estudantes

- O problema Baldes

- O problema Secreto+

- O problema Secreto-

- Resumo dos resultados:

- conclusões

##### 4.6 Os problemas *Padrão*. *Vendedor* e *Número Secreto*

- Os problemas

- Descrição Geral

- Discussão das possíveis soluções

- Análise geral dos dados

Soluções dos estudantes  
O problema Padrão  
O problema Vendedor  
O problema Número Secreto  
Resumo dos resultados: conclusões 4.7  
Conclusões do capítulo  
Capítulo 5: Discussão Geral  
Anexo 1: Problemas usados no estudo exploratório  
Anexo 2: Problemas usados no estudo principal  
Anexo 3: Dados sobre os grupos do estudo principal  
Anexo 4: Tabelas de frequências para os problemas no estudo principal  
Anexo 5: Níveis de facilidade para todos os problemas no estudo principal

Bibliografia

### **Visão geral da tese: a estrutura em capítulos**

A estrutura da tese deve ser entendida da seguinte forma.

Há um primeiro capítulo onde esclareço não apenas o problema da pesquisa—o estabelecimento de uma caracterização de pensamento algébrico—, mas também ofereço a própria resposta que dou àquela questão. A decisão de adotar esta estrutura pouco usual deve-se basicamente à percepção de que a resposta que eu havia encontrado em minha pesquisa era também pouco usual, contrariando, de fato, alguns bem estabelecidos mitos relativos à álgebra e ao pensamento algébrico. Enquanto a apresentação tradicional abriria a tese com a questão de pesquisa, fechando-a com a resposta que "emergiria" como resultado do trabalho de pesquisa, tomei a decisão de forçar o leitor a interpretar o texto, desde o início, segundo a perspectiva que a resposta que eu propunha indicava. É possível argumentar que tal "indução" fere a possibilidade de uma leitura isenta, mas este é apenas um outro mito: em todos os casos o que se quer é que o leitor conclua junto com o autor, e em muitos casos a ordem canônica força muitas leituras para que o leitor possa apreciar devidamente o encadeamento de idéias apresentado. Da mesma forma que no plano geral da tese, foi necessário, no capítulo do estudo histórico, advertir o leitor de que ele deveria ser lido como um estudo bem informado sobre a produção de conhecimento matemático.

Quanto à caracterização de *pensamento algébrico* que ofereço, ela é a seguinte. Pensar algebricamente é: (i) pensar aritmeticamente; (ii) pensar internamente; e (iii) pensar analiticamente. Cada um destes aspectos é discutido em detalhe no Capítulo 1, mas também retomados ao longo de toda a tese.

É tarefa da tese esclarecer de que modo este é apenas um—entre outros—modos de se produzir significado para a álgebra, mas também esclarecer de que



modo esta caracterização de pensamento algébrico lança luz sobre aspectos importantes da atividade matemática dos alunos.

O segundo capítulo, uma revisão da literatura, foi completado apenas após a conclusão do corpo principal da tese. E para que serviria, então? Argumento que o que se apresenta da literatura relevante não deve ser um descritivo de tudo que se leu relativo ao assunto. Optei por um estudo crítico que ao invés de criar u a massa intragável de informação, delineasse precisamente o terreno no qual eu estava trabalhando: como consequência a revisão da literatura que apresentei ficou extremamente concisa.

Os dois capítulos seguintes—o estudo histórico e o estudo experimental—formam, na verdade, um único bloco. Além das conclusões explicitamente consideradas na tese, esse duplo estudo representa um substancial esforço no sentido de refutar a tese de que a psicogênese recapitula a sociogênese do conhecimento, ou em sua forma original, de que a ontogênese recapitula a filogênese. Na tese eu discuto de que modo estas duas formulações se apresentam e como atuam na formação de crenças a respeito do desenvolvimento intelectual de indivíduos. Mostro ainda que há apenas uma forma na qual a tese da recapitulação pode ser sustentada: *é verdade tanto para "indivíduos" quanto o é para culturas matemáticas, que todo conhecimento é construído dentro de um conjunto de modos de produzir significados, modos estes que a um mesmo tempo permitem a produção de conhecimento enquanto impõe limites epistemológicos ao que pode ser este conhecimento.* Fica bastante claro que o uso de "motivação histórica" na escolha de temas ou seqüências para a sala-de-aula de Matemática não carrega *em si* nenhuma base epistemológica sólida.

O estudo histórico precede o estudo experimental, precisamente porque— como digo na tese—nos textos históricos vamos encontrar informantes muito mais competentes do que o que podemos esperar de nossos alunos: os que escreveram os textos históricos eram profissionais," de quem se esperava apresentações referenciadas nas culturas matemáticas a que pertenciam, de modo que podemos avaliar com razoável precisão em que consistia esta demanda de precisão, bem como de que forma se conduzia a justificação das afirmações feitas, e é aí que vamos nos encontrar com os mundos (epistemológicos) daqueles a quem queremos compreender. Procuo mostrar, no estudo histórico, de que modo a compreensão do conhecimento matemático de uma cultura—e, portanto, de indivíduos, já que estes são sempre *indivíduos de alguma cultura*—só se dá na medida em que investigamos os pressupostos mais amplos destas culturas. Embora reconhecendo o interesse e a importância de incluir num tal estudo temas ligados à organização social e

econômica das culturas estudadas, optei por fazer um estudo mais centrado no que conservadoramente chamaríamos de aspectos epistemológicos: no caso da Matemática Islâmica a referência ao Corão é inevitável, e dado o papel constitutivo desta obra naquela cultura, foi natural que me aprofundasse um pouco nos aspectos mais amplos da organização social do Islã Medieval. Este tratamento, de evitar temporariamente as possíveis ligações entre a produção de conhecimento e os aspectos mais amplos de uma cultura, Rashed chama de "fechamento epistemológico." metodologia que defende como passo intermediário antes que se possa buscar as relações mais abrangentes entre conhecimento e organização social e econômica (Rashed, 1984). Embora reconhecendo o interesse próprio desta abordagem, é preciso indicar também que qualquer aprofundamento do estudo histórico implicaria, à altura onde havia chegado, um trabalho de pesquisa sistemática que ultrapassaria em muito as possibilidades da tese então em preparação.

O estudo histórico apontou para diversos aspectos cruciais da produção de significado para a álgebra: (i) as concepções de número subjacentes à atividade algébrica, em particular a distinção entre número *ontológico* e número *simbólico*; (ii) a *arimetização* da atividade algébrica como aspecto característico de um modo de produzir significado para a álgebra; (iii) o papel e o lugar da notação literal na atividade algébrica, em particular quando analisados estes aspectos em relação aos subjacentes modos de produção de significado; e, (iv) a imperativa necessidade de se considerar, na análise da atividade algébrica, os objetos constituídos nesta atividade, o que equivale dizer que é necessário investigar de que modo se constitui a lógica das operações com estes objetos.

O estudo experimental tentou seguir os passos do estudo histórico, embora eu já anteviesse que as dificuldades com os "informantes—os alunos e alunas—não permitiriam evidenciar mais que indícios do quadro que queria investigar. A opção natural pareceu ser a princípio, trabalhar com entrevistas clínicas, nas quais eu poderia investigar em detalhe as concepções dos alunos. Após uma bateria de entrevistas-piloto. no entanto, ficou claro que mesmo neste ambiente os alunos tinham tremendas dificuldades em ir além de descrever o que haviam feito, tocando apenas muito raramente e indiretamente nos tipos de considerações que me interessavam. Uma opção seria fazer um estudo vertical com um grupo muito reduzido de alunos, mas o contato prolongado com um mesmo sujeito se transtornaria, com toda a probabilidade, em um processo de treinamento a respeito dos tipos de justificações que me interessavam.

A decisão que tomei foi a de trabalhar com testes escritos, mas não como fonte de dados para inferência estatística. O leitor da tese vai verificar que nenhum

tratamento estatístico é aplicado aos dados tabulados, exatamente porque deles não se espera mais que indícios que a leitura dos scripts vai informar melhor. Os dados tabulados deram indício, por exemplo, de que os alunos das 7as. séries brasileiras tinham uma performance mais flexível em um dado grupo de problemas que as Sas. séries brasileiras (escolha mais variada de estratégias), o que nos levou a examinar os scripts correspondentes com particular interesse no modo pelo qual os alunos das 7as. séries constituíam os objetos com os quais trabalhavam nos problemas: a conclusão foi de que os alunos das 7as. séries moviam-se progressivamente para estratégias mais "algébricas" (o uso de equações, neste caso) apenas na medida em que outros modos de produzir significado—por exemplo, todo e parte—não podiam ser usados. Houve casos de alunos das 8as. séries resolvendo, com equações, problemas equivalentes ao de calcular o troco numa compra simples, o que deixa a indicação de que o ensino pelo qual haviam passado e estavam passando havia tido o perverso efeito de substituir o processo de dar significado pelo processo de responder padronizadamente ao estímulo "problema."

O estudo experimental exploratório, no entanto, indicou que havia um problema fundamental com o uso de testes escritos, já que na falta de explicações mais precisas dos alunos—as justificações para o que haviam feito—ficava difícil ir além da mais vaga especulação a respeito da constituição dos objetos sendo manipulados: em particular, eram problemáticas as soluções em que os alunos apresentavam apenas as contas. Embora em todos os problemas propostos incluíssemos a advertência de que uma "explicação" deveria ser oferecida, constatei que a própria noção de "explicação" parece, para os alunos em geral, referir-se mais a uma descrição dos passos tomados do que a oferecer justificações para estes passos.

Para contornar estas dificuldades da melhor maneira, desenvolvi uma alternativa metodológica, na qual as "unidades de atividade" seriam grupos de problemas, e não problemas isolados. A característica dos grupos de problemas é que em cada um deles temos problemas com a mesma "estrutura algébrica", mas apresentados em contextos diferentes, com parâmetros numéricos diferentes ou com grau de complexidade diferentes. Apresento mais abaixo os problemas de um dos grupos. *Ticket e Dirigindo*, que é analisado na seção 4.2 da tese.

A apresentação dos problemas foi feita em seis baterias. Cada aluno envolvido resolvia, em dias separados, duas destas baterias, que foram elaboradas de modo que cada aluno recebeu, por exemplo, Ticket 4 e Dirigindo 2,7, ou Ticket 2,7 e Dirigindo 4. Cada bateria tem cinco ou seis problemas, e os alunos poderiam usar calculadoras—onde fossem disponíveis—, ou apenas indicar as contas que queria fazer, ou ainda usar aproximações. Os problemas foram apresentados a alunos ingleses e brasileiros de 7a. e 8a. séries, ou equivalente: cada problema foi

resolvido por aproximadamente o mesmo número de alunos de cada série em cada país. Ticket 4: Sam e George compraram tickets para um show de música.

Como Sam queria um lugar melhor, seu ticket custou quatro vezes mais que o de George.

Juntos eles gastaram 74 libras nos tickets.

Quanto custou cada ticket?

(explique como você resolveu o problema e por que resolveu deste jeito)

Ticket 2.7: Sam e George compraram tickets para um show de música.

Como Sam queria um lugar melhor, seu ticket custou 2.7 vezes mais que o de George.

Juntos eles gastaram 74 libras nos tickets.

Quanto custou cada ticket?

(explique como você resolveu o problema e por que resolveu deste

jeito) Dirigindo 4: O Sr Sweetman e sua família devem viajar 261 milhas para ir de

Londres a Leeds.

A certa altura eles decidem parar para o almoço.

Depois do almoço eles ainda têm que viajar quatro vezes mais do que já viajaram.

Quanto eles viajaram antes do almoço? E depois do almoço?

(explique como você resolveu o problema e por que resolveu deste

jeito) Dirigindo 2,7: O Sr Sweetman e sua família devem viajar 261 milhas para ir de

Londres a Leeds.

A certa altura eles decidem parar para o almoço.

Depois do almoço eles ainda têm que viajar 2,7 vezes mais do que já viajaram.

Quanto eles viajaram antes do almoço? E depois do almoço?

(explique como você resolveu o problema e por que resolveu deste

jeito) \_\_\_\_\_ *Problemas do grupo Ticket e Dirigindo*

Esta minha escolha metodológica fundamenta-se na noção de *campo semântico*, um instrumento teórico que desenvolvi como parte de um modelo

epistemológico que permita a compreensão de certos aspectos do processo de produção de significado em Matemática. Não vou, aqui, aprofundar a discussão do modelo, em particular porque esta discussão também não é feita na tese: o leitor encontrará esta discussão nos artigos indicados ao final deste texto.- O ponto básico em um grupo de problemas é poder estudar em que medida certas características dos problemas propostos interferem no processo de constituição de objetos, isto é, no processo de solução, e inferir daí prováveis características dos modos de produzir significado sendo empregados..

No grupo *Ticket e Dirigindo*, por exemplo, o uso do multiplicador 2.7 tornou bastante difícil—muito improvável, poderíamos dizer—a interpretação dentro de um *campo semântico de todo e partes*, que apareceu em quase todas as soluções informadas.<sup>3</sup> Notável é o fato de que nos problemas 2.7 em que se tentou uma "conta" esta era, na maioria das vezes,  $74 \div 2,7$  ( $261 \div 2,7$ ), enquanto que nos problemas 4 as soluções apenas com conta eram invariavelmente feitas por  $74 \div 5$  ( $261 \div 5$ ). O que isto indica é que o emprego do ticket mais barato (trecho mais curto) como unidade não foi feito, isto é, *este objeto não foi constituído*. Este resultado parece também fornecer um elo importante com modelos e resultados de pesquisa que lidaram com a escolha de operações aritméticas na solução de problemas, já que na ausência de um modelo não-numérico e de um modelo algébrico (equação), na ausência de objetos que podem ser manipulados no global do problema, os alunos optaram por dividir os números envolvidos; em particular neste caso, parece que prevalece a noção de que "divisão fez diminuir," junto com a percepção de cada uma das partes resultantes—cada um dos tickets ou cada um dos trechos—deve ser menor que o total.

A análise das soluções oferecidas foi feita com a utilização de categorias bastante standard: solução algébrica correta (uso de equação), solução não-algébrica correta (sem uso de equação), solução algébrica incorreta, solução não-algébrica incorreta, e outros tipos de solução. Em diferentes grupos há variações nas categorias, mas esta é sua forma básica. Estas categorias certamente não refletem o tipo de distinções que eu queria levantar na investigação, mas elas foram adotadas com o fim de oferecer ao leitor uma referência mais confortável. A análise

principal motivo para que a discussão mais completa do modelo não apareça na tese foi a absoluta falta de tempo para prepará-la devidamente. O leitor da tese, em particular o que também consultar os artigos indicados ao final deste texto, vai poder perceber que a coerência global do trabalho de pesquisa é garantida exatamente pelas premissas do modelo, em particular pela noção de que diferentes modos de pensar correspondem a operar dentro de diferentes *campos semânticos*.

<sup>3</sup>Por "solução informada" indico aquelas em que algum tipo de explicação ou referência clara aos objetos constituídos é feita, como, por exemplo, diagramas.

segundo estas categorias e constantemente complementada pela análise dos scripts. que é feita segundo características dos problemas e das soluções.

Para fechar este comentário sobre a estrutura global da tese. cito diretamente a seção 4.7, das conclusões ao Capítulo 4. do estudo experimental:

"O principal resultado do estudo experimental foi confirmar que há diferentes modelos subjacentes às soluções dos alunos. Além disso, mostrou também que nossa distinção entre soluções algébricas e não algébricas, baseada em nossa caracterização de pensamento algébrico, oferece um quadro de referência claro e útil para distinguir e caracterizar estas soluções.

Do ponto de vista da metodologia adotada—o uso de grupos de problemas ao invés de problemas isolados—esta escolha mostrou-se correta e útil, já que muitos aspectos dos modelos adotados podiam apenas ser compreendidos através da comparação de sua utilização em problemas com diferentes contextos e diferentes parâmetros numéricos. A decisão de não usar entrevistas significou que não pudemos investigar em profundidade alguns aspectos na base destes modelos, mas. por outro lado. reasegurou-nos de que é de fato possível entender, através do exame do trabalho escrito dos alunos, muito destes modelos subjacentes, uma característica importante da metodologia, tanto por causa da possibilidade de conduzir o estudo com um número maior de alunos, quanto para o professor, que via-de-regra não tem o tempo necessário para acompanhar a discussões dos alunos tão de perto quanto gostaria.

Para os alunos, o aspecto mais problemático apareceu com os alunos que não eram capazes de lidar algebricamente com problemas do tipo 'número secreto,' já que a tarefa de interpretar estes problemas em modelos não-algébricos mostrou-se impossível de ser realizada, ou no mínimo muito difícil. O fato de que a maioria dos alunos pode lidar com as versões contextualizadas dos problemas de 'número secreto,' levou-nos a concluir que há duas fontes prováveis de dificuldades no caso de problemas de 'número secreto': (i) dificuldades em interpretar os elementos de uma expressão aritmética em termos de outros modelos: em particular no caso dos modelos de todo e parte, expressões do tipo  $ax+b=c$  e  $b+ax=c$  eram mais fáceis de interpretar que expressões do tipo  $b-ax=c$ . Sugerimos que a razão para isto é que as primeiras fornecem uma representação

muito mais direta de um todo e suas partes, enquanto que no caso da última os elementos têm que ser separadamente identificados, e a articulação todo-parte constituída: e. (ii) esta dificuldade é ressaltada pelo fato de que a noção geral de um modelo todo-parte parece, em grande medida, não pertencer ao conjunto do que os alunos vêem como um conhecimento aplicável àquele tipo de problema: como consequência, produzir significado para os problemas de número secreto descontextualizados implica, em cada caso, procurar uma interpretação adequada, possivelmente em termos de um outro problema com uma estória, possivelmente em termos de experiência com contas.

Um outro aspecto relevante que pudemos identificar, foi o uso de indicadores' (pointers), na manipulação dos modelos não-algébricos, por exemplo o fato de que não se deve somar um peso com um comprimento, ou que uma balança estará equilibrada apenas se pesos iguais são postos de cada lado. Como já indicamos, mas queremos enfatizar, este aspecto sugere que o uso de modelos não-algébricos para facilitar a aprendizagem de aspectos específicos da álgebra—usar, por exemplo, balanças—deve ser examinado cuidadosamente, para se evitar a associação dos procedimentos aprendidos com aqueles indicadores, uma associação que pode, e provavelmente vai, constituir um enorme obstáculo para o desenvolvimento de um modo algébrico de pensar, particularmente no caso do uso de modelos concretos.'

De um ponto de vista mais geral, ficou claro que a noção central sendo examinada em nosso estudo é a noção de *significado*. Neste sentido, a distinção que utilizamos entre *elementos* do problema e *objetos* do modelo mostrou-se muito útil em ressaltar a escolha e interpretação dos *elementos* dos problemas que estavam envolvidos no processo de estabelecer e manipular um modelo.

Os modelos não-algébricos que identificamos nos scripts quase sempre envolveram uma subjacente articulação todo-parte. Manipulação hipotética do contexto e modelos geométricos apareceram apenas em uns poucos scripts.

O modelo da máquina estado operador (máquina de função), que apareceu apenas no grupo *Padrão...* de problemas, representa um caso especial, já que é nitidamente um modelo numérico mas não algébrico, pois lhe falta *analiticidade*. O fato de que foi usado por tantos alunos sugere que operar num ambiente puramente numérico.

e usar operações aritméticas como *objetos*, isto é, manipular um modelo informado por elas. não está além da capacidade daqueles alunos, o que oferece suporte para nossas afirmações de que o desenvolvimento de um modo algébrico de pensar deve ser entendido como um processo de imersão cultural, a partir da qual o desenvolvimento de uma intenção é produzido, e que este processo é bastante dependente da exposição àquele modo de pensar. O fato de que entre alunos brasileiros nós pudemos identificar muitos mais exemplos de modelos algébricos que entre alunos ingleses, também apoia esta posição, dada as distintas ênfases no ensino da álgebra— muito maior no Brasil—nas séries em questão." (pp 323-325)

### **Direções em que o trabalho de pesquisa apontou**

Uma fundamental consequência do trabalho de pesquisa foi indicar a necessidade de uma profunda reconceitualização do ensino da álgebra, e no centro desta reconceitualização está a discussão do papel da utilização de modelos não-algébricos—balança, áreas, reta numérica, por exemplo. Até aqui estes modelos têm sido usados como forma facilitadora do aprendizado, mas *do aprendizado de que?* Uma vez que não se trata apenas de memorizar frases, somos levados a concluir—de maneira um tanto óbvia—que o que se aprende são uma *álgebra da balança*, uma *álgebra das áreas*, uma *álgebra dos segmentos*. Ora, é a tarefa maior da tese mostrar exatamente que a cada uma destas álgebras correspondem diferentes modos de produzir significado, diferentes modos de constituir objetos; como resultado, a tentativa de facilitar a vida do aluno (ou será a do professor e do autor de livros didáticos?) termina por exigir dos alunos que vejam como semanticamente ligados procedimentos que foram constituídos como semanticamente isolados.

O que meu trabalho de pesquisa sugere é que é preciso que, na sala-de-aula os diferentes modos de se produzir significados sejam explicitados, que se tornem objeto de atenção pelos alunos. O crucial, aqui, é que esta recomendação se choca frontalmente com o que tem sido tradicionalmente adotado, que é esconder os saltos entre diferentes *campos semânticos* e confiar numa passagem suave" entre, por exemplo, uma *álgebra da balança* e uma *álgebra algébrica*. A posição epistemológica que suporta esta posição didática caracteriza-se por duas premissas principais: (i) que a cognição é um processo descontextualizado, mesmo que se admita que ela acontece, "é óbvio," em "contextos"; e, (ii) que *conhecimento* é algo do domínio do enunciado, do texto, e não da enunciação, isto é, que *conhecimento* não tem sujeito. embora, curiosamente, esta posição freqüentemente se associe a outra, a de que "o indivíduo constrói seu próprio conhecimento."



Juntas, estas duas posições garantem que é legítimo supor que se um aluno aprende a fazer produto de binômios com áreas." e por haver transcrito isso em letras, isto . esta transcrição, constitui-se em *conhecimento do aluno*, e naturalmente. é legítimo supor que os procedimentos desenvolvidos possam *ser falados* com relação ao produto de quaisquer duas expressões literais. O trabalho de pesquisa relatado na tese indica de que forma esta posição é equivocada.

Em Lins (no prelo) eu apresento uma abordagem de sala-de-aula na qual estas considerações são contempladas. Temos também, em andamento, um projeto de pesquisa e desenvolvimento em ensino-aprendizagem de álgebra, em colaboração com uma equipe do Instituto de Educação da Universidade de Londres; este e um projeto que parte dos resultados da tese e de resultados similares obtidos por Rosamund Sutherland. trabalhando com planilha de cálculo em computadores.

Ligado à necessidade de reconceitualizar o ensino da álgebra, vamos nos defrontar com o problema de fazer com que esta reconceitualização atinja a sala-de-aula sem que tenha antes se transformado em cosmético das abordagens até aqui disponíveis. Neste aspecto a mudança de perspectiva que meu trabalho sugere enfrenta um foco de "resistência," a crença de que há essências, muitas delas agrupadas sob o título de realidade, e que estas essências são essencialmente acessíveis. Entra aqui o realismo enquanto posição filosófica, mas também. enquanto senso-comum; entram aqui todas as buscas de "origens," em particular as que desde o início se fazem dirigir por uma teleologia obsessiva, como é o caso dos que insistem em ver em Euclides uma álgebra geométrica, mas se recusam a ver Euclides em Platão e Aristóteles porque a cronologia não combina. Enfrentar este essencialismo não é tarefa simples.

Por fim, a indicação de maior importância que o trabalho de pesquisa indicou, é que a noção de *campos semânticos* deveria ser aplicada a áreas outras que a álgebra. Temos até aqui aplicações à epistemologia do cálculo e primeiras aproximações ao caso das frações. Acredito que outras aplicações do modelo epistemológico dos *campos semânticos* devam abrir uma rica linha de pesquisa nas relações entre cognição, epistemologia e Educação Matemática, cada uma delas entendida como aspectos da produção incessante de culturas.

**Referências Bibliográficas:** Lins, R.C. (1992) *A framework for understanding what algebraic thinking is*, PhD Thesis, University of Nottingham. Inglaterra (cópias disponíveis do autor, ao preço do xerox e custo de postagem)

----- . (no prelo) *Eliciting the meanings for algebra produced by stucients: knowledge.*

*justification and semantic fields.* Anais do PME XVIII. Lisboa

Rashed. R. (1984) *Entre Arithmétique et Algèbre: recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.* Société d'Editions Les Belles Lettres. Paris

### **Outros artigos do autor, de interesse relacionado à tese**

(no prelo) *Álgebra e pensamento algébrico na sala-de-aula.* A Educação Matemática em Revista (Soc Bras de Educ Matem), nº 2

(no prelo) *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica não-essencialista da álgebra e do pensamento algébrico.* Revista Dínamis (FURB)

(1993) *Epistemologia. História e Educação Matemática: tomando mais sólidas as bases da pesquisa.* Revista da SBEM-SP. nº 1

(1993) *Understanding what algebraic thinking is: analysis and Synthesis.* Cadernos do PME Working Group on Algebraic Processes and Structure. Tsukuba. Japão

(1992) *Algebraic and Non-algebraic Álgebra.* Anais do PME XVII. Durham. USA

(1991) *On algebraic thinking.* Caderno do PME Working Group on Algebraic Processes and Structure, Assisi, Itália

(1990) *A framework for understanding what algebraic thinking is.* Anais do PME XVI, Oaxtepec, México

(1988) *The process of symbolising and the learning of mathematics.* Anais da Day Conference da British Society for Research into the Learning of Mathematics. Nottingham. Inglaterra



**Campus da UnB – Acesso Sul – Asa Norte – 70910 – Brasília – DF**  
**Tel.: (061) 347-8970      Fax: (061) 273-3233**

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)