

Capítulo 6

Problemas

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

2 é igual a 3?

Provar que $2 = 3$ e mostrar o erro.

Solução

Há várias “demonstrações”. Uma bem antiga é:

$4 - 10 = 9 - 15$; some $25/4$ a ambos os membros:

$4 - 10 + 25/4 = 9 - 15 + 25/4$; cada membro é um quadrado perfeito:

$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$; extraia a raiz quadrada:

$2 - 5/2 = 3 - 5/2$ e, daí, $2 = 3$.

O erro

- Na verdade, $\sqrt{a^2} = |a|$ para qualquer número real a , isto é, a raiz quadrada de um número real positivo é por definição um outro número real **positivo**, cujo quadrado é igual ao número inicial.

Por exemplo, $\sqrt{(-2)^2}$ é igual a 2 e não -2; $\sqrt{4} = 2$ e não ± 2 .

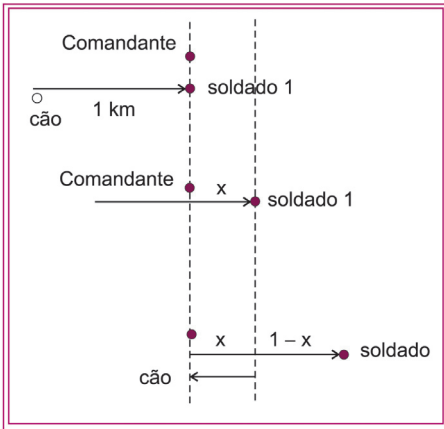
O mascote

Uma coluna de soldados, com 1 km de comprimento, está marchando em linha reta, com velocidade constante, desfilando diante do comandante, que permanece parado. No exato momento em que o primeiro homem passa pelo comandante, um cachorro que estava ao lado do último homem sai correndo em direção ao primeiro, também com velocidade constante. Ao chegar onde ele está, começa a voltar (suponhamos que instantaneamente) em direção ao último. Quando chega no último novamente, ele está passando em frente ao comandante. Qual a distância percorrida pelo cão?



Solução

Sejam v_c e v_s , respectivamente, as velocidades do cachorro e dos soldados. Lembrando que “espaço = velocidade \times tempo”, temos:



O cachorro sai correndo e os soldados marchando. Enquanto o cachorro anda $1 + x$, o primeiro soldado anda x .

$$\frac{1+x}{v_c} = \frac{x}{v_s} \Rightarrow \frac{1+x}{x} = \frac{v_c}{v_s} \quad (1)$$

Os soldados seguem e, o cachorro volta. Enquanto o cachorro anda x , o soldado 1 anda $1 - x$.

$$\frac{x}{v_c} = \frac{1-x}{v_s} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{v_c}{v_s} \quad (2)$$

De (1) e (2):

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1-x}, \text{ de onde } 2x^2 = 1 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, o cachorro andou $1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$ km.

Uma mosca e três pontos de vista

Uma colega, do Rio de Janeiro, RJ, conta-nos uma história dos seus tempos do ensino médio, mostrando as diferentes soluções dadas para um conhecido problema que seu pai lhe propôs.



Mais tarde ela encontrou esse mesmo problema, classificado como “difícil”, na Seção Superdivertido da revista *Superinteressante*. Trata-se do seguinte problema:

Dois carros estão em rota de colisão, viajando um em direção ao outro, cada um a 60 km/h. Inicialmente estavam afastados a uma distância de 60 km. Uma mosca frenética voa a 120 km/h entre os carros sem parar, de forma que, encostando em um carro, inverte o sentido do vôo. Qual a distância efetivamente percorrida pela mosca até o momento da colisão?



**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

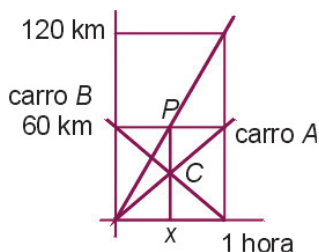
Nossa colega diz que sua solução foi considerar cada percurso da mosca, de um carro, que ela chamou de *A* para o carro *B*, em seguida de *B* para *A* e assim por diante. Partindo de *A*, ela considerou a velocidade relativa da mosca em relação ao carro *B* (velocidade de *B* + velocidade da mosca) para calcular o tempo em que a mosca encontraria o carro *B*: distância/velocidade = $60/(120 + 60) = 1/3$ de hora, que significa que a mosca percorreu $120/3 = 40$ km, até encontrar o carro *B* e, nesse instante, os carros estavam já a uma distância de $60 - 2 \times 60/3 = 20$ km um do outro.

A mosca irá de *B* até *A* num intervalo de tempo igual a $20/180 = 1/9$ de hora, tendo andado $120/9 = 40/3$ km, nesse percurso. Não foi difícil desconfiar que essas distâncias formavam uma PG de primeiro termo igual a 40 e de razão igual a $1/3$, o que, no limite, daria uma soma igual a $40/(1 - 1/3) = 60$ km.

O pai de nossa colega, depois de assistir a esse esforço da filha, comentou:

“Bem se vê que você é matemática, bastava ter calculado o intervalo de tempo que os carros levaram até a colisão, que é de $60/(60 + 60) = 1/2$ hora, e então a mosca, a 120 quilômetros por hora, terá percorrido 60 km!”

A carta prossegue “Meu pai, que é físico, me contou também que um colega seu, engenheiro e que fazia muito bem gráficos a mão livre, assim que soube do problema fez o seguinte desenho e achou a mesma resposta:



No gráfico, *C* é o ponto de colisão entre os carros, que ocorre no tempo *x*, e *P* a posição da mosca no tempo *x*, o que dá os 60km percorridos.”



A colega termina a carta com o seguinte comentário: “Existem várias formas de se resolver o mesmo problema...cada pessoa procura pela solução mais adequada com sua personalidade. Não foi à toa que eu escolhi fazer Matemática, meu pai, Física e o colega de meu pai Engenharia.”



Nota

Essa é uma boa observação para o professor de Matemática, que, além de conhecer as soluções que mais lhe agradam, precisa também conhecer, respeitar e saber analisar as soluções de seus alunos, comparando as vantagens e desvantagens de cada uma!

No caso citado, por exemplo, a solução “matemática” envolve uma misteriosa passagem ao limite, enquanto a solução “engenheira” mistura, perigosamente, gráficos em que as variáveis não são as mesmas.



Repare só: o primeiro eixo significa o tempo contado a partir do instante em que os carros estavam a 60 km um do outro, mas o segundo eixo indica variáveis diferentes— nas retas relativas aos dois carros, essa variável é o espaço percorrido, medido em relação ao ponto em que estava o carro A no instante $t=0$; já na reta relativa ao movimento da mosca, esse eixo está significando espaço percorrido a partir do instante 0.

No caso do carro A , o segundo eixo pode significar uma coisa ou outra. Por isso, o aparente ponto de encontro entre a mosca e o carro B , que aparece no gráfico num instante entre 0 e x , não tem esse significado; por outro lado, no instante x , os dois carros e a mosca estão idealmente no mesmo ponto, ao contrário do que o gráfico sugere.

Felizmente, na ocasião, o engenheiro fez a leitura certa, tirando os dados que interessavam.

Talvez por ser engenheiro!



Por que não dá certo?

Resolvi a equação $\cotg x - \operatorname{sen} 2x = 0$ de dois modos, e as respostas não bateram:

$$1) \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

2) $\frac{\cos x}{\sin x} - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow$

$$\cos x(1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Observei que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ é solução da equação dada. Por que essa solução não apareceu na primeira resolução?

Solução

Na primeira resolução, no lugar de $\cotg x$ foi colocado $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Acontece

- que $\cotg x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ apenas para os valores de x para os quais **ambas** as
- funções estão definidas, ou seja, para valores de x diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Também $\operatorname{sen} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ somente se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Por isso, na primeira resolução será necessário examinar, separadamente, o que acontece com os múltiplos (inteiros) de $\pi/2$, o que fará aparecer a solução aparentemente perdida.

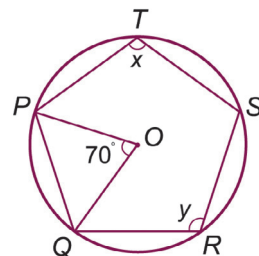
Pentágono

No pentágono desenhado abaixo, considere x e y as medidas dos ângulos $P\hat{T}S$ e $S\hat{R}Q$.

Quanto vale $x + y$?

Solução

Tanto x quanto y são ângulos inscritos na circunferência, de modo que, pelo teorema do ângulo inscrito, temos



$$x = \frac{1}{2} \text{arco}(\widehat{SRP}), \text{ e } y = \frac{1}{2} \text{arco}(\widehat{QPS})$$

Como $\text{arco}(\widehat{SRP}) = \text{arco}(\widehat{SRQ}) + 70^\circ$, segue que

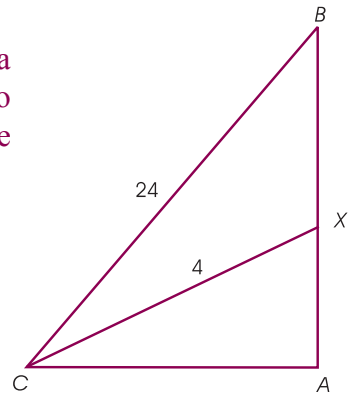
$$\begin{aligned} x + y &= \frac{1}{2} \text{arco}(\widehat{SRP}) + \frac{1}{2} \text{arco}(\widehat{QPS}) = \\ &= \frac{1}{2} [\text{arco}(\widehat{SRP}) + 70^\circ] + \frac{1}{2} \text{arco}(\widehat{QPS}) = 35^\circ + \frac{1}{2} [\text{arco}(\widehat{SRQ}) + \text{arco}(\widehat{QPS})] = \\ &= 35^\circ + \frac{1}{2} \cdot 360^\circ + 180^\circ = 215^\circ. \end{aligned}$$

Triângulo

Seja ABC um triângulo retângulo em A , CX a bissetriz do ângulo, sendo X um ponto do lado AB . Se $CX = 4$ cm e $BC = 24$ cm, quanto mede AC ?

Solução

No ΔAXC temos $\cos \alpha = \frac{AC}{4}$ e no ΔABC temos $\cos 2\alpha = \frac{AC}{24}$.



Logo, $6\cos 2\alpha = \cos \alpha$ ou

$$6(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 6(\cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha) = 6(2\cos^2 \alpha - 1) = \cos \alpha.$$

Fazendo $\cos \alpha = t$, obtemos a equação $12t^2 - t - 6 = 0$, que tem raízes $t = 3/4$ e $t = -2/3$.

Como α é um ângulo de um triângulo retângulo, temos $\cos \alpha > 0$, e

$$\cos \alpha = \frac{AC}{4} = \frac{3}{4} \text{ ou } AC = 3.$$

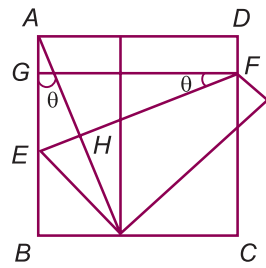
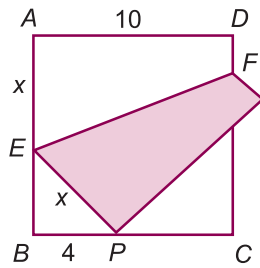
De um Vestibular em uma universidade do Japão

Um quadrado $ABCD$ de 10 cm de lado é dobrado como na figura, de forma que $BP = 4$ cm. Calcule AE e EF .

Solução

Por construção, $AE = EP$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo EBP , obtém-se $EP = 5,8$ cm, donde $AE = 5,8$ cm.



Do fato de o triângulo AEP ser isósceles, e de $AH = HP$ (devido à dobradura), temos que EH é a mediana e também a altura do triângulo.

Logo, $EF \perp AP$.

Traçando FG paralelo a AD , observamos que os triângulos retângulos ABP e FGE são congruentes, pois ambos têm um cateto de 10 cm e $\hat{P}AB = \hat{G}FE$, por serem ângulos de lados respectivamente perpendiculares.

Então, $EF = AP = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \approx 10,77$.

Quantos existem?

Quantos triângulos obtusângulos existem cujos lados são três números inteiros consecutivos?

Solução

Supondo que as medidas dos lados sejam $a - 1$, a e $a + 1$, é necessário que

$$a + 1 < a + a - 1, \text{ isto é, } a > 2.$$

A lei dos cossenos nos diz que nos triângulos obtusângulos

$$(a + 1)^2 > a^2 + (a - 1)^2.$$

Efetuando os cálculos, obtém-se $a < 4$.

Portanto, $a = 3$ e os outros lados medem 2 e 4.

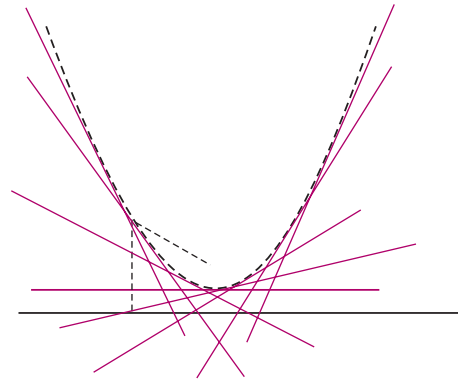
Construindo uma parábola através de dobraduras

Sejam d uma reta e F um ponto fora de d . Para cada ponto seja t a reta mediatriz do segmento \overline{FR} . Mostre que t é tangente à parábola de foco F e diretriz d .

Solução

Numa folha de papel fino (papel manteiga, por exemplo) com cerca de 30 cm por 22 cm, trace uma reta e marque um ponto fora dela. A seguir dobre a folha de modo que o ponto considerado se sobreponha a um ponto qualquer da reta.

Finalmente vinque a dobra para que esta fique gravada no papel como uma linha visível. Repita esta operação muitas vezes, quantas a sua paciência permitir. Ao observar a folha aberta contra uma superfície escura surgirá uma parábola lindamente emoldurada por envoltórias de tangentes.

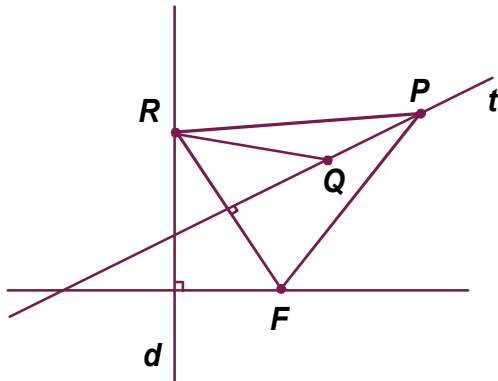


P
R
O
B
L
E
M
A
S
.

Podemos formular matematicamente a atividade anteriormente proposta.

Entenderemos a reta tangente a uma parábola como sendo a reta que intercepta a parábola num único ponto (chamado ponto de tangência) e que não é paralela ao seu eixo. Os leitores familiares com a noção de derivada de uma função podem mostrar a equivalência entre a definição acima e a usual apresentada nos cursos de Cálculo.

Como $F \notin d$, segue que a reta t , mediatriz de \overline{FR} nunca é perpendicular à reta d , qualquer que seja a escolha de $R \in d$. Em outras palavras, t não é paralela ao eixo da parábola. Traçemos, a partir de R , a perpendicular à reta d , e seja P a interseção dessa perpendicular com t .



Lembrando que os pontos de t são eqüidistantes de F e R , temos $\text{dist}(P, d) = PR = PF$, ou seja, P pertence à parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d . **eixo da parábola**

Seja agora $Q \in t$, Q distinto de P . Mostraremos que $Q \notin \mathcal{P}$, de modo que t intercepte \mathcal{P} apenas no ponto P .

Como Q é distinto de P , temos que \overline{QR} não é perpendicular à reta d e, portanto, $QR > \text{dist}(Q, d)$. Por outro lado, $QF = QR$, pois $Q \in t$.

Logo, $QF > \text{dist}(Q, d)$, isto é, $Q \notin \mathcal{P}$.

Temos assim provado que t é tangente à parábola \mathcal{P} no ponto P .

Equação

Resolver a equação $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$.

Solução Gráfica

Pode-se perceber que $x = 4$ é uma solução dessa equação. Resta saber se existe alguma outra solução.

Como a equação também pode ser escrita $x^2 - 18 = -\sqrt{x}$, podemos olhar para os gráficos das funções $y = x^2 - 18$ e $y = -\sqrt{x}$, e procurar os pontos de encontro.

Desse modo verifica-se que há apenas uma solução (real) da equação.

Logo, a solução encontrada é única.

Solução Algébrica

$$x^2 + \sqrt{x} - 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 16 = 2 - \sqrt{x}$$

$$(x - 4)(x + 4) = 2 - \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4) = 2 - \sqrt{x}$$

Então $2 - \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2 = 0$, que implica $x = 4$, ou $(\sqrt{x} + 2)(x + 4) = -1$. Mas como $x \geq 0$, logo, $(\sqrt{x} + 2)(x + 4) \geq 0$, implicando que $\left\{ \begin{array}{l} a \\ a \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} b \\ b \end{array} \right. = -2^2$ não tem solução real.

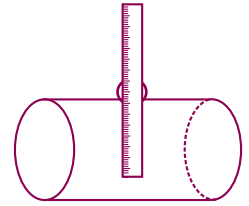
Sendo assim, a única solução real é $x = 4$.

O problema do tanque de combustível

Como os donos dos postos de gasolina medem a quantidade de combustível que possuem em seus depósitos enterrados? É comum um

**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

dono de posto medir a quantidade de combustível dos seus tanques com uma régua graduada, colocada verticalmente na boca do tanque enterrado.



Se o depósito enterrado for cilíndrico (a grande maioria o é):

(a) existe uma régua-padrão graduada para qualquer medida de tanque (caso variem altura e raio da base)?

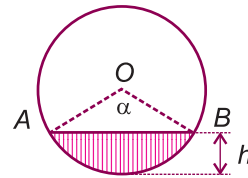
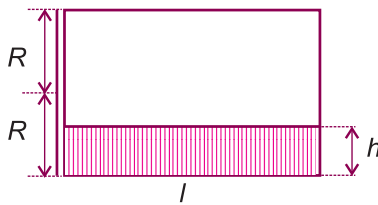
ou,

(b) para cada tanque existe uma régua graduada que acompanha o tanque?

Solução

Fica claro que a dificuldade está em calcular a área de um segmento circular. É evidente que a área que queremos calcular é a diferença entre a área do setor AOB e a área do triângulo AOB .

- Para calcular a área do setor, seja α o ângulo central \widehat{AOB} . Se o setor fosse o círculo todo, a área seria πR^2 . Portanto, se para o ângulo 2π a área é πR^2 , para um ângulo α qualquer, por regra de três simples, chegamos a $\alpha R^2/2$.



Como a área do triângulo AOB é $\frac{1}{2}OA \times OS \times \text{sen}\alpha$, ou seja ,

$\frac{1}{2}R^2 \times \text{sen}\alpha$, chegamos, para a área da seção transversal do líquido, ao valor

$$A = \frac{R^2}{2} (\alpha - \text{sen}\alpha)$$

O volume do líquido seria então $V = \frac{R^2}{2} (\alpha - \text{sen}\alpha)l$

Parecia que o problema estava resolvido. Lembramos, então, que α não é conhecido. O que se pode medir com facilidade é h . Mas, com um pouco de trigonometria, foi fácil chegar a

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{R-h}{R} \quad \text{e, daí, } \alpha = 2 \arccos \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

Logo, a resposta da primeira pergunta (a) é NÃO. O volume do líquido no tanque depende não só de h , mas das dimensões do reservatório.

Para a pergunta (b), se tivermos apenas uma régua graduada em centímetros, as fórmulas anteriores permitem um rápido cálculo do volume.

Por exemplo, se o tanque tiver 2 m de diâmetro e 4 m de comprimento, suponha que foi encontrado $h = 60$ cm.

Temos, então

$$\alpha = 2 \arccos \left(1 - \frac{0,6}{1} \right) \approx 2,1386 \quad \text{e}$$

$$V \approx 3,1707 \text{ m}^3 \quad \text{ou, aproximadamente, 3170 litros.}$$

Resolva a equação $(x + 1)^6 = x^6$.

Solução

Vamos utilizar, na solução, as igualdades seguintes, bastante conhecidas:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$\begin{aligned} (x + 1)^6 - x^6 &= [(x+1)^3 - x^3][(x + 1)^3 + x^3] \\ &= (3x^2 + 3x + 1)[(x + 1)^3 + x^3] \\ &= (3x^2 + 3x + 1)(2x + 1)[(x + 1)^2 - x(x + 1) + x^2] \\ &= (3x^2 + 3x + 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Segue-se então que

$$(x + 1)^6 - x^6 = (2x + 1)(x^2 + x + 1)(3x^2 + 3x + 1) = 0 \quad \text{se, e somente}$$

P
R
O
B
L
E
M
A
S

se, $2x + 1 = 0$ ou $x^2 + x + 1 = 0$ ou $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Logo, o conjunto solução da equação $(x + 1)^6 = x^6$ é

$$\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{6} \right\}.$$

Equação do 2º grau

Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

Solução

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c inteiros e $a \neq 0$.

Suponhamos $b^2 - 4ac = 23$.

Segue-se que $b^2 = 4ac + 23$ é ímpar e portanto b é ímpar.

Se b é ímpar, $b - 1$ e $b + 1$ são pares, e portanto $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$ é múltiplo de 4.

Mas $b^2 - 1 = 4ac + 22$ e, como 22 não é múltiplo de 4, segue-se que $b^2 - 4ac$ não pode ser igual a 23.

Múltiplos

Escreva o número 512 como uma soma de dois números inteiros positivos, um dos quais é múltiplo de 11, e o outro é múltiplo de 13. Seria possível resolver o problema se fosse solicitado que um fosse múltiplo de 15 e o outro múltiplo de 21? Justifique sua resposta.

Solução

Supondo que existam inteiros positivos, a e b tais que

$$512 = 11a + 13b = 11(a + b) + 2b,$$

concluimos que $a + b$ é um número par.

Além disso, $512 - 2b = 11(a + b)$ e, então, não é difícil verificar que o maior valor possível para $512 - 2b$ é 506, e o menor é 440, o que implica $40 \leq a + b \leq 46$.

Resultam as possibilidades:

$$a = 43 \text{ e } b = 3; \quad a = 30 \text{ e } b = 14; \quad a = 17 \text{ e } b = 25; \quad a = 4 \text{ e } b = 36.$$

A resposta para a pergunta: “Seria possível resolver o problema, se fosse solicitado que um fosse múltiplo de 15, e o outro, múltiplo de 21?” é:

Não existem a, b inteiros positivos tais que

$$512 = 15a + 21b = 3(5a + 7b),$$

pois 512 não é divisível por 3.

Sistemas

Sejam x e y inteiros positivos tais que

$$xy + x + y = 71 \text{ e } x^2y + xy^2 = 880.$$

Determine $x^2 + y^2$.

Solução

$$\text{De } \begin{cases} xy(x + y) = 880 \\ x + y = 71 - xy \end{cases} \text{ temos } (xy)^2 - 71xy + 880 = 0,$$

logo $xy = 55$ ou $xy = 16$.

Para $xy = 16$ temos $x + y = 55$; porém não existem inteiros x e y que verifiquem essas duas equações.

Para $xy = 55$ temos $x + y = 16$; logo x e y são as raízes 11 e 5 da equação $\lambda^2 - 16\lambda + 55 = 0$.

$$\text{Assim, } x^2 + y^2 = 11^2 + 5^2 = 146.$$

Equação

Mostre que quaisquer que sejam os números inteiros a, b, c, d, e , a equação

$$x^7 + 2x^6 + 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

não pode ter todas as raízes reais.

Solução

Sejam r_1, r_2, \dots, r_7 as sete raízes da equação.

Temos então:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_7 = -2 \text{ e}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_6 r_7 = 3.$$

Segue-se que $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_7^2 + 6 = 4$, e portanto

$\sum_1^7 r_i^2 = -2$, o que mostra que nem todas as raízes podem ser reais.

Determinante

Mostre que o determinante de Vandermond

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},$$

com a, b, c e d inteiros, é múltiplo de 12.

Solução

Considere D o valor do determinante acima.

Separando os números a, b, c e d pela sua paridade, temos 5 casos a considerar:

os quatro números a, b, c e d são pares;

três deles são pares, e um é ímpar;
 dois são pares, e dois são ímpares;
 um é par, e três são ímpares;
 os quatro são ímpares.

Como a diferença –tanto de dois pares quanto de dois ímpares –é par, segue que, em cada um dos casos acima, D é múltiplo de 4.

Por outro lado, qualquer número inteiro é de um dos seguintes três tipos: $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, cada um dos quatro números a , b , c e d é de um desses tipos. Sendo quatro, temos que necessariamente dois deles serão do mesmo tipo. Como a diferença de dois números do mesmo tipo é sempre um múltiplo de 3, concluímos que D é múltiplo de 3.

Portanto, D é múltiplo de 12.

Progressão aritmética

São dadas duas progressões aritméticas distintas, cujos termos são números inteiros positivos. Determine condições que devem ser satisfeitas para que existam termos comuns às duas progressões.

Solução

Sejam (a_1, r) e (a_1', r') as duas progressões.

Se $a_1 = a_1'$, as duas progressões terão termos em comum.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 > a_1'$.

Para que existam termos em comum, é necessário que existam inteiros positivos m e n tais que $a_1 + nr = a_1' + mr'$.

Portanto, $a_1 - a_1' = mr' - nr$. Para que existam soluções inteiras, é necessário que $a_1 - a_1'$ seja múltiplo do máximo divisor comum de r e r' .

Será que isso é possível?

Transformar $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$ numa soma do tipo $u \pm \sqrt{v}$, com u e v naturais.

Solução

Vamos olhar para $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = x$.

Usando a igualdade $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, temos:

$$x^3 = 10 + 10 + 3\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} \times \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} \times x \quad \text{ou} \quad x^3 = 20 - 6x,$$

isto é, x é a raiz de $x^3 + 6x - 20 = 0$; mas a única raiz real desta equação é 2.

Portanto,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} \times \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = -2. \quad (2)$$

As equações (1) e (2) fornecem o sistema:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=-2 \end{cases} \text{ e obtemos } a=1+\sqrt{3} \text{ e } b=1-\sqrt{3}, \text{ isto é,}$$

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 1+\sqrt{3}.$$

Qual dos dois números é o maior:

$$101^{50} \text{ ou } 99^{50} + 100^{50}?$$

Solução

Vamos provar que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Provar essa desigualdade equivale a provar que $101^{50} - 99^{50} > 100^{50}$

ou, dividindo a inequação por 100^{50} , provar que $\left(\frac{101}{100}\right)^{50} - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} > 1$.

Observe que
$$\left(\frac{101}{100}\right)^{50} - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{50} - \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{50}.$$

Usando a fórmula do binômio de Newton e juntando os termos semelhantes, obtém-se:

$$2 \left[\binom{50}{1} \frac{1}{100} + \binom{50}{3} \frac{1}{100^3} + \dots \right] > 2 \times 50 \times \frac{1}{100} = 1.$$

Qual o número?

Numa classe com 12 alunos, o professor escreveu na lousa um número natural menor que 50 000 e pediu que os alunos falassem alguma coisa a respeito desse número. O primeiro aluno disse que o número era múltiplo de 2, o segundo disse que o número era múltiplo de 3, e assim sucessivamente até o último, que disse que o número era múltiplo de 13. Em seguida o professor disse que, com exceção de dois alunos consecutivos que erraram, todos os demais acertaram.

(a) quais foram os alunos que erraram?

(b) qual foi o número que o professor escreveu? Justifique suas respostas.

Solução

Analisando os pares de números consecutivos, 2 e 3; 3 e 4; 4 e 5; 5 e 6; 6 e 7; 7 e 8; 8 e 9; 9 e 10; 10 e 11; 12 e 13, é fácil verificar que se dois alunos consecutivos erraram ao afirmar que o número era múltiplo de um desses pares, então o número de alunos que erraram seria maior que 2.

Restam, portanto, os pares 8 e 9 e 7 e 9. O par que produz um número menor que 50 000 é o par 7 e 8, ao qual corresponde o número 25 740.

**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

Qual é o maior fator primo?

Qual é o maior fator primo de $3^{14} + 3^{13} - 12$?

Solução

$$3^{14} + 3^{13} - 12 = 3^{13} (3 + 1) - 3 \times 4 = 3 \times 4(3^{12} - 1) =$$

$$3 \times 4(3^6 - 1)(3^6 + 1) = 3 \times 4(3^3 - 1)(3^3 + 1)(3^6 + 1) = 3 \times 4 \times 26 \times 28 \times$$

$$730 = 2^6 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 73.$$

Quantos zeros?

Um múltiplo de 17, quando representado na base 2, tem exatamente 3 dígitos iguais a 1. Qual é o número mínimo de zeros que essa representação deverá conter?

Solução

Suponha que para $m \in \mathbb{N}$:

$$17m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} \quad \text{com } 0 \leq a_1 < a_2 < a_3.$$

Temos
$$m = \frac{2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3}}{17} = q_1 + q_2 + q_3 + \frac{r_1 + r_2 + r_3}{17},$$

onde q_i e r_i são o quociente e resto da divisão de 2^{a_i} por 17.

A tabela a seguir fornece resto r_n da divisão de 2^n por 17:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8	1

obtemos a menor solução para $a_1 = 0$, $a_2 = 5$ e $a_3 = 8$.

Logo, $17m = 2^0 + 2^5 + 2^8$, cuja representação na base 2 tem seis zeros.

O resto é o que importa!

Os números inteiros 1, 2, 3, ..., 1000 são escritos em ordem, em volta de um círculo. A partir do número 1, marque todo décimo quarto número, isto é, marque 1, 15, 29, 49, ..., parando no momento em que for atingido um número já marcado. Determine quantos números não marcados restam.

Solução

Na primeira etapa são marcados os números 1, 15, 29, ..., isto é, todos os números menores do que 1000 e que divididos por 14 deixam resto 1. O último número desse conjunto é 995, o que nos permite concluir que, na segunda etapa, serão marcados todos os números que divididos por 14 deixam resto 9. Um raciocínio análogo nos permite determinar o que ocorre nas etapas seguintes.

Etapa	Começa com	Termina em
2 ^a	9	989
3 ^a	3	997
4 ^a	11	991
5 ^a	5	999
6 ^a	13	993
7 ^a	7	987

É fácil ver que a próxima etapa começaria com o número 1, repetindo assim a primeira, o que nos permite concluir que o processo termina após sete etapas. Para determinar a quantidade de números marcados, a maneira direta seria somar os números de termos de cada uma das progressões aritméticas da tabela e subtrair o total de 1000. O mais simples é observar que qualquer número ímpar dividido por 14 deixa resto ímpar e, portanto, estará incluído em uma das progressões. Nenhum número par dividido por 14 deixa resto ímpar e, portanto, existem exatamente 500 números não marcados.

P O baile

R Numa festa, um grupo de homens e mulheres decide dançar da seguinte
O maneira: o primeiro homem dança com 5 mulheres, o segundo homem
B dança com 6 mulheres e assim sucessivamente, até que o último homem
L dança com todas as mulheres. Se há 10 homens, quantas vezes, em média,
E cada mulher dançou?

Solução

M Na festa há 10 homens: h_1, h_2, \dots, h_{10} .

A h_1 dança com $5 = 4 + 1$ mulheres;

S h_2 dança com $6 = 4 + 2$ mulheres;

.....

h_{10} dança com $4 + 10 = 14$ mulheres, que são, segundo o enunciado, todas as mulheres.

Ao todo ocorreram $5 + 6 + \dots + 14 = 95$ danças. Portanto, em média cada mulher dançou $95/10 = 9,5$ vezes.



A ligação

Um rapaz esqueceu o último algarismo do telefone da namorada e resolveu tentar falar com ela, escolhendo ao acaso o último dígito. Se ele está num telefone público e só tem duas fichas, qual é a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada?



Solução

a) A probabilidade de que o rapaz acerte na primeira tentativa é igual a $1/10$, uma vez que ele escolheu ao acaso um dos dez dígitos possíveis.

b) Para que ocorra a segunda tentativa é necessário que ele tenha errado na primeira, e a probabilidade de isso acontecer é igual a $9/10$. Dado que errou na primeira tentativa, a probabilidade (condicional) de que ele acerte na segunda é igual a $1/9$, uma vez que, agora, o número de dígitos possíveis

é igual a 9. Logo, a probabilidade de que ele acerte na segunda tentativa é $(9/10)(1/9) = 1/10$.

Segue que a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada é igual a $(1/10) + (1/10) = 1/5$.

Falemos de moedas

500 moedas são distribuídas entre três pessoas: *A*, *B* e *C*, em círculo.

Inicialmente a pessoa *A* receberá 1 moeda, a *B* receberá 2 moedas, e a *C* receberá 3 moedas. Na segunda rodada *A* receberá 4 moedas, *B* receberá 5 moedas, e *C* receberá 6 moedas, e assim por diante.

No momento em que o processo de divisão não puder ser efetuado por falta de moedas, as restantes ficarão com a próxima pessoa.

Pergunta-se:

- (a) Quantas foram as moedas restantes, e quem as recebeu?
- (b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

Solução

Foram distribuídas $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ moedas. Qual deve ser o valor de n para que essa soma fique o mais próxima possível de 500, porém menor do que 500?

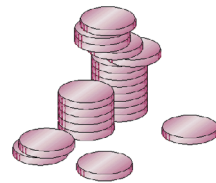
Como $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, queremos

$$\frac{n(n+1)}{2} \approx 500 \text{ ou}$$

$$n(n+1) \approx 1000, \text{ o que implica } n = 31.$$

De fato, $1 + 2 + 3 + \dots + \frac{31 \times 32}{2} = 496$. Portanto, a “penúltima” pessoa que receberá 31 moedas, e a “última” receberá as 4 restantes.

Quem são essas pessoas?



P
R
O
B
L
E
M
A
S

O número de moedas que *A* recebe, $1, 4, 7, \dots$, é um número da forma $3k + 1$;



O número de moedas que *B* recebe, $2, 5, 8, \dots$, é um número da forma $3k + 2$, e o número de moedas que *C* recebe, $3, 6, 9, \dots$, é um número da forma $3k$.

O número 31 é da forma $3k + 1$; logo, *A* receberá as 31 moedas e *B* receberá as 4 restantes.

Quantas moedas receberá cada uma?

A receberá $1 + 4 + 7 + \dots + 31$ moedas. Temos um problema de PA com $a_1 = 1, a_n = 31, r = 3$. O número de termos é 11, e a soma dos termos é 176.

- *C* receberá $3 + 6 + 9 + \dots + 30$ moedas. O número de termos dessa PA é 10 e a soma 165.

B receberá $2 + 5 + 8 + \dots + 29$ moedas mais as quatro restantes. O número de termos dessa PA é 10 e a soma, 155.

Portanto, *B* receberá, ao todo, 159 moedas.

Por que meu tio não ganha na Mega Sena?

O meu tio Flávio joga na Sena fazendo 25 apostas distintas, de 6 dezenas cada uma, escolhidas ao acaso. Ele vem observando que há muito tempo todas as dezenas sorteadas pela Caixa aparecem nos seus cartões mas, infelizmente, não todas no mesmo cartão. Por quê?

Solução

O fato de os números sorteados pela Caixa estarem presentes nos cartões do tio Flávio não é de modo algum surpreendente, uma vez que, ao escolher 25 conjuntos distintos de 6 dezenas para preencher seus cartões, existe uma probabilidade razoável, cujo cálculo está longe de ser trivial, de que seu tio acabe utilizando todas as dezenas possíveis de serem sorteadas. Observe que com escolhas



convenientes das dezenas, poderíamos usar as 50 dezenas em apenas 9 cartões, uma vez que $6 \times 9 = 54 > 60$.

Entretanto, não há nenhuma maneira de garantir que as 6 dezenas sorteadas vão aparecer num único cartão. Jogando 25 cartões, qualquer que seja a escolha das dezenas, a probabilidade de acertar a sena principal é

$$\frac{25}{C_{50,6}} = \frac{25 \times 6! \times 44!}{50!} = \frac{1}{635628},$$

uma vez que o número de casos favoráveis é 25, em um total de $C_{50,6}$ (combinações simples de 50 objetos em grupos de 6, que é o número de possíveis escolhas de 6 dezenas nas 50 possíveis).

Como $C_{50,6} = 15890700$, para ter certeza que o tio Flávio vai ganhar, só mesmo jogando todos esses quase 16 milhões de combinações possíveis, o que seria um péssimo investimento.

O custo, considerando o preço de cada aposta igual a R\$ 1,50, ficaria em torno de 22 milhões de reais, e, convenhamos, quem tem esse dinheiro disponível não deve perder tempo jogando em loterias.

Festa

Todos os convidados de uma festa trocaram apertos de mãos. Um mordomo mais atento notou que foram 528 cumprimentos e que $\frac{2}{3}$ dos convidados eram mulheres. Quantos homens foram convidados?



Solução

Vamos indicar por x o número total de convidados.

Cada pessoa dá $x - 1$ apertos de mãos, porém, quando A cumprimenta B , B também cumprimenta A .

Logo, o número de apertos de mão é igual a $\frac{x(x-1)}{2}$.

**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

Assim, $\frac{x(x-1)}{2} = 528$, ou seja $x^2 - x = 1056$.

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - x - 1056 = 0$, obtemos $x = 33$ ou $x = -32$.

Como x é positivo, temos $x = 33$.

Concluimos que 11 homens (1/3 dos convidados) e 22 mulheres foram convidados para a festa.

Os problemas seguintes envolvem números primos.

- Um número natural é *primo* se ele é maior do que 1 e é divisível apenas por si próprio e por 1. Da definição, decorre a seguinte seqüência de números primos:
-

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...)

e, como podemos observar, com exceção do 2, todos os demais números primos são ímpares.

Soma

Escreva o número 91 como soma de dois números primos.

Solução

Os alunos não deverão ter dificuldade em perceber que como a soma de dois ímpares é par, e como 2 é o único primo par –os números são 2 e 89. Aliás, esse pode ser um bom momento para recordar com os alunos os testes de primalidade para verificar que 89, efetivamente, é primo.

Idades

Meu irmão caçula e eu temos idades entre 10 e 20 anos, e hoje nossas idades são expressas, ambas, por números primos, fato que se repetirá pela próxima vez daqui a 18 anos. Determine minha idade, sabendo que a

idade de nosso irmão mais velho, que hoje também é um número primo, é uma unidade maior do que a soma das nossas idades.

Solução

As duplas de primos entre 10 e 20 são

11 e 13, 11 e 17, 11 e 19, 13 e 17, 13 e 19 e 17 e 19.

Como a soma dos números, adicionada de 1, deve resultar um primo, descarto as duplas 11 e 13 e 13 e 19. Como daqui a 18 anos as idades voltam a ser representadas por números primos, descarto as duplas que incluem o 17. Resta apenas uma possibilidade: minha idade é 19 anos e a do meu irmão é 11 anos.

Raízes

Uma equação do 2º grau, cujos coeficientes são todos números primos, pode apresentar duas raízes iguais?

Solução

Para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com a , b e c primos) admita duas raízes iguais, devemos ter $b^2 - 4ac = 0$ ou $b^2 = 4ac$, o que implica b^2 par.

Logo, b também é par e, como é primo, $b = 2$. De $b^2 = 4ac$ temos $ac = 1$, o que é absurdo para a e c primos.

Portanto, a resposta é *não!*

Coordenadas da reta

Quantos pontos da reta $y = x + 51$ são tais que as suas duas coordenadas são números primos?

Solução

Se $x = 2$, temos $y = x + 51 = 53$, que é primo. Se x for qualquer outro primo, será um número ímpar, implicando y par maior que 2, logo, não-primo. Assim, existe um único par, $(2, 53)$, da reta de equação $y = x + 51$ que tem ambas as coordenadas dadas por números ímpares.

P
R
O
B
L
E
M
A
S

Nota

Observe-se que, trocando o número 51 por outro valor, o problema pode tornar-se muito mais difícil. Para a reta $y = x + 2$ somos conduzidos ao conceito de “primos gêmeos” (diferem por 2 unidades). Até hoje é um problema “em aberto” saber se existem ou não infinitos pares de “primos gêmeos”.

Triângulo

As medidas dos lados de um triângulo retângulo (numa mesma unidade) podem ser números primos?

Solução

A resposta é *não*. Do teorema de Pitágoras temos a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. Sendo a , b e c primos, não podem ser todos ímpares (pois a soma de dois ímpares é par) e, como $a > b$ e $a > c$, devemos ter $b = 2$ ou $c = 2$. Digamos $c = 2$.

$$\text{Teremos então: } a^2 + b^2 = 4, \text{ ou } (a + b)(a - b) = 4$$

e analisando os possíveis valores de $a + b$ e $a - b$, que são 1, 2 ou 4, concluímos que a situação é impossível.

Circunferência

Para quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 361$ as duas coordenadas são números primos?

Solução

Se x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 361$, sendo 361 ímpar, devemos ter x par, e y ímpar ou x ímpar e y par. Se x é par e primo, então, $x = 2$; logo, $y^2 = 357$, e y não é, então, um número inteiro. Do mesmo modo verificamos ser impossível ter y par e x ímpar; logo, nenhum ponto da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 361$ tem ambas as coordenadas dadas por números primos.

Triângulo acutângulo

Determine as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo acutângulo, sabendo que estas são expressas por números primos.

Solução

Se $a + b + c = 180$, com a , b e c primos, não é possível ter a , b e c ímpares; logo, pelo menos um deles, digamos o a , deve ser igual a 2, o que implica $b + c = 178$. Podemos ter $b = c = 89$, que é primo e, por verificação direta, mostra-se que não há outra possibilidade, já que o triângulo, sendo acutângulo, implica $b < 90$ e $c < 90$.

Nota

A mesma pergunta sem a hipótese de ser acutângulo, exige um pouco mais de trabalho. Sem a hipótese de o triângulo ser acutângulo, obtemos, por tentativa, as possibilidades: 5 e 173, 11 e 167, 29 e 149, 47 e 131 e 71 e 107.

Divisores

Quantos divisores possui o número 2 420?

Esse exercício é uma aplicação clássica do Teorema Fundamental da Aritmética e do Princípio Fundamental da Contagem.

Solução

$2420 = 2^2 \times 5 \times 11^2$ e um divisor qualquer é obtido por um produto dos primos 2, 5 ou 11, elevados aos expoentes:

primo 2 \rightarrow expoente 0, 1 ou 2;

primo 5 \rightarrow expoente 0 ou 1;

primo 11 \rightarrow expoente 0, 1 ou 2.

Pelo Princípio da Contagem obtemos $3 \times 2 \times 3 = 18$ divisores.

Números naturais

Quantos são os números naturais, de 1 a 100, que podem ser escritos como um produto de dois números naturais distintos entre si e diferentes de 1?

Solução

De 1 a 100 temos 100 números. Para obtermos a resposta à nossa pergunta, subtraímos de 100 o número de primos entre 1 e 100, que é 25; o número de quadrados de números primos, que é 4, e o número 1. A resposta é 70.

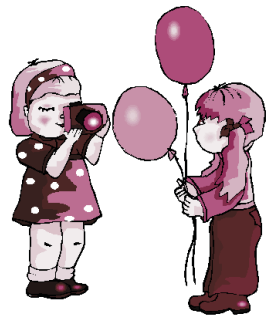
Aniversário

Há dois anos, ano em que finalmente concluí meu Doutorado em Matemática, nasceu meu segundo filho, e ocorreu uma notável coincidência: meus dois filhos e eu passamos a fazer aniversário no mesmo dia do ano. A partir daí, outras coincidências aconteceram. No ano passado nossas três idades foram representadas por quadrados perfeitos e hoje, dia em que estamos comemorando mais um aniversário, percebo que nossas idades são representadas por três números primos. Supondo que vivamos cem anos cada um, pergunto: qual é minha idade hoje? Nos próximos anos, quantas vezes todas as nossas idades voltarão a ser representadas por números primos?

Solução

No ano passado meu filho caçula certamente tinha 1 ano de idade. Meu outro filho tinha 4 ou 16 anos e eu, o pai, 36 anos. Portanto, hoje, minha idade é 37 anos.

Quando a minha idade é ímpar, a do meu caçula é par e vice-versa; portanto, nunca mais nossas idades voltarão a ser todas simultaneamente representadas por números primos.



...Probleminhas

1. Marly diverte-se, observando os passarinhos voando em torno de um arbusto. Ela notou que, quando há uma ave em cada galho, uma das aves fica sem galho, e quando ficam duas aves em cada galho, um dos galhos fica sem ave. Quantos galhos há no arbusto? E quantas aves?



2. Uma torneira enche um tanque em 4 horas. O ralo do tanque pode esvaziá-lo em 3 horas. Estando o tanque cheio, abrimos simultaneamente a torneira e o ralo. O que acontece com o tanque?

3. Divida um bolo circular em 4 partes iguais, sem tirar a faca do bolo e sem percorrer duas vezes o mesmo corte.



4. Uma determinada espécie de alga se reproduz, dividindo-se em 2 a cada dia. Assim, no primeiro dia temos 1, no segundo, 2, no terceiro 4, no quarto, 8, e assim por diante. Se, começando por uma dessas algas, precisamos de 30 dias para preencher determinado volume, em quanto tempo preenchemos o mesmo volume, se começarmos com duas das referidas algas?

5. Esta manhã, após minhas aulas, desci a escada, pois o elevador estava quebrado. Eu já havia descido 7 degraus, quando vi o prof. Zizoloziz começando a subir a escada. Continuei no meu passo usual, cumprimentei o professor quando ele passou e, para minha surpresa, faltando 4 degraus para eu acabar de descer, o professor tinha chegado ao topo da escada. “Enquanto desço 1 degrau, ele sobe 2”, eu pensei. Quantos degraus tem a escada?

6. Um industrial produz uma máquina que endereça 500 envelopes em 8 minutos. Ele deseja construir mais uma



**P
R
O
B
L
E
M
A
S**

máquina, de tal forma que ambas, operando juntas, endereçarão 500 envelopes em 2 minutos. Determine o tempo que a segunda máquina sozinha deve gastar para endereçar 500 envelopes.

7. 36 alunos de uma determinada escola prestaram exames vestibulares em duas universidades, A e B , sendo que, desse grupo de alunos, todos os aprovados em A também foram aprovados em B e o número de aprovados em B foi o triplo do número de aprovados em A . Se foram aprovados menos da metade e mais de um terço desses alunos, quantos não foram aprovados em nenhuma das duas universidades?

8. João, parado na porta de sua casa, conta as pessoas que passam em ambas as direções. Pedro caminha ida e volta no quarteirão da casa de João e conta as pessoas com as quais cruza, em ambas as direções. Quem conta mais?



9. Dispomos de quatro cores distintas e precisamos colorir o mapa da figura com os países P , Q , R e S , de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor. De quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:

(a) P e S forem coloridos com cores distintas?

(b) P e S forem coloridos com a mesma cor?

P	Q
R	S

10. É possível colocar inteiros positivos nos 21 espaços vazios da tabela abaixo, de modo que os números em cada linha e em cada coluna estejam em progressão aritmética. Determine o número assinalado com o asterisco.

			*	
	74			
				186
		103		
0				

Respostas dos probleminhas

1. 4 aves e 3 galhos
2. o tanque esvazia em 12 horas
3. partindo do centro do bolo de raio r , descreva um “oito” com a faca, de modo que as duas circunferências que formam o “oito” tenham raio $R/2$.
4. 29 dias. É como se começássemos no 2º dia.
5. 22 degraus
6. $8/3$ min
7. 21
8. Contam o mesmo número.
9. (a) 48.
(b) 36.
10. 142.



Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)