em aberto

(ISSN 0104-1037)

ORGANE DE DIVULGATION DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DU SPORT

Brasília
Année XIV
nº 62
Spécial
avril/juin
1994

Thème:

TENDANCES EN ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

INEP INSTITUT NATIONAL D'ÉTUDES ET RECHERCHES PÉDAGOGIQUES

BRASIL UNIÃO DE TODOS

Boîte aux Lettres 04662 — CEP 70312-970 — Brasília-DF

MEC

SOMMAIRE

présentation du problème: Quelle est la question?

points de vue: Qu'est ce que pensem d'autres spécialistes?

LES TENDANCES ACTUELLES DE UENSEIGNEMENT ET DE L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Tânia M.M. Campos*
Terezinha Nunes**

Introduction

Les mathématiques sont une science qui étudie les relations. Elles sont aussi une manière de penser. Au cours de l'histoire, les mathématiques ont développé des systèmes de représentation et des modèles d'analyse qui nous permettent de réfléchir sur les événemcnts et les phénomènes. et de construire des analyses qui ne seraient pas possibles sans ces systèmes de représentation. Pour cette raison, 1'enseignement des mathématiques n'intéresse pas seulement les mathématiciens ou les futurs mathématiciens; il intéresse tout le monde. L'interprétation des graphiques, 1'analyse des relations. Ia mesure, le modelage de phénomènes sont des techniques mathématiques courantes utilisées dans des contextes les plus varies. Dans les sciences et dans la technologie les mathématiques jouent un rôle fondamental comme instrument d'analyse et prévision. Même dans Ia vie quotidienne il faut connaítre la signification d'e.\pressions comme pourcentage, proportion, fractions, constantes et variables dans une situation, ou alors 1'effet sur le salaire des différentes formules de calcul de 1'inflation.

Les élèves né jouissent pas toujours de Ia même facilite à dominer ces systèmes de représentation et ces façons de penser développés par les mathématiques. Un système peut, par exemple, demander que des concepts utilisés de façon intuitive dans Ia vie quotidienne soient formalisés pour que 1'élève comprenne le système de représentation. Par exemple, beaucoup d'élèves comprennent intuitivement que 1'addition et Ia soustraction, Ia multiplication et Ia division sont, respectivement, inverses. Cependant, beaucoup d'élèves effectuent ces inversions de façon intuitive, à cause des embarras qu'ils éprouvent à comprendre Ia représentation algébrique et les manipulations des expressions algébriques, et rencontrent de fortes difficultés dans 1'usage de 1'inversion. Un autre problème couramment observe est celui de travailler les grandeurs intensives. Tandis que les grandeurs extensives et leurs Operations sont facilement comprises, les grandeurs intensives né le sont pas, malgré 1'utilité qu'elles ont dans Ia vie de tout le jour et dans les sciences.

Par conséquent, 1'éducation mathématique est une part essentielle de Téducation, aussi importante que Ia lecture et 1'écriture, même pour les élèves qui né souhaitent pas approfondir leur étude des mathématiques en tant qu'une science. Beaucoup de ses concepts primaires sont fondamentaux aussi pour d'autres sciences et sont importants pour le travail et dans Ia vie quotidienne. Nous né nous référons pas ici à 1'apprentissage des contenus mathématiques, consideres au niveau qu'intéresse les mathématiciens — comme par exemple 1'ensemble des nombres naturels entiers ou rationnels — mais aux concepts lies à Ia compréhension de ces nombres sur lesquels les mathématiciens fondent leur théorie.

Dans ce numero de Em Aberto nous discutons les différentes faces de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques. En proposant un numero de Em Aberto dédié à ce thème, nous avions plusieurs préoccupations, que nous allons décrire ci-dessous.

" Pontificali University Cttholique de Sâo P»uJo (PUC-SP).
"" Uruversité de Londres.

L'éducation mathématique et son rôle dans les sociétés **contemporaines**

On ne peut pas nier que les relations entre les gens d'un même pays et entre les pays du monde actuel sont marquées par des inégalités. On parle de pays développés et de pays en voie de développement comme on parle de classes dominantes et de classes dominées quand on se réfère aux inégalités du monde actuel. Les inégalités sont le produit d'un long processus historique qui comprend des facteurs économiques et politiques tant au niveau des relations entre les pays qu'au niveau des relations entre les classes. Dans ces inégalités se situent les différences éducationnelles. L'education ne doit pas être vue comme la cause de ces différences ni comme un remède qui puisse en permettre la guérison. Les différences éducationnelles entre les pays et entre les classes sociales font partie d'un ensemble de facteurs qui se renforcent mutuellement dans le maintien du Statu quo. L''c\istcncc de niveaux éducationnels inférieurs fait partie de la pauvreté dans n'importe quel pays, comme le maintien de systèmes éducationnels de différents niveaux de qualité et d'efficacité fait partie des différences entre des pays développés et en développement.

Cela signifie que l'éducation n'est pas tout à fait autonome ni auto-déterminante. Cependant, les changements éducationnels peuvent être stimulés et encouragés au Brésil sans qu'existent préalablement les conditions d'efficacité du système éducationnel. Ce qui n'arrive pas "naturellement" dans Ia société (comme, par exemple, Texposition de tous les jeunes à des situations qui les stimulent vers 1'apprentissage scolaire ou vers 1'accumulation d'un capital culturel importam pour le succès à 1'école) peut être provoque dans 1'espace scolaire. Quand on considere les inégalités à 1'intérieur du pays, les changements éducationnels sont essentiels à 1'implantation de propositions dans les pays qui visent Ia justice sociale et le développement dans le sens de 1'insertion du pays au plan international.

Plus spécifiquement, 1'éducation mathématique de riem un des aspects de 1'éducation primaire le plus important pour le développement techno-scientifique d'un pays. Cette importance appaiait nettement au niveau individuel, comme le montrent les voies d'accès aux cours des sciences exactes et aux cours d'orientation technologique, comme ceux d'ingénieur et d'informatique. Le succès en mathématiques est, aussi bien au Brésil que dans d'autres pays, Ia condition essentielle d'entrée à ces cours, oü aujourdhui les élèves des classes dominantes sont en proportion plus grande que les élèves des couches populaires, même quand ces proportions sont considérées dans le cadre des inégalités de 1'accès à 1'université (Weber, 1980). Uélitisme de ces cours, outre qu'il entrave Ia diminution de 1'inégalité sociale, est aussi un frein au progrès scientifique et technologique du pays. On discute aujourd'hui dans les entreprises des pays développés les modifications de Ia main d'oeuvre nécessaires à 1'adaptation à une nouvelle réalité produetive, qui comprennent Ia transformation des concepts de compétence et de responsabilité de ceux qui sont dans les lignes de produetion (Glick, 1993). Resnick (1993) suggère que, si né viennent pas de profonds changements dans le mode de produetion des pays en voie de développement, Ia produetion des biens manufacturés qui ont le plus bás coüt technologique de produetion será de plus en plus transférée des pays développés vers ceux en voie de développement, tandis que les produits qui requièrent Ia participation de haute technologie seront restreints aux pays développés, ce qui renforcera les inégalités technologiques et socio-politiques. Pour contrecarrer cette tendance, il est nécessaire que les pays en voie de développement mettent sur pied un mécanisme de qualification techno-scientifique de grandes proportions de façon à placer sur les lignes de produetion une main d'oeuvre bien plus qualifiée que celle qui existe aujourd'hui. D'après Resnick (1993), ce mécanisme de qualification doit commencer à 1'école primaire, par le moyen de 1'éducation mathématique et scientifique qui est offerte aux enfants et aux jeunes. Une education mathématique et scientifique aliénante, qui né stimule pas différentes manières de penser, mais se limite à encourager Ia reprodüetion des techniques de résolution des problèmes, constitue le premier obstacle au saut qualitatif que doivent faire les pays en voie de développenient vers Ia recherche de 1'égalité dans le domaine des rclations internationales.

En conclusion, l'éducation est une partie de Ia consteilation des facteurs qui caraclérisent ia société. Ccpcndant, 1'école possede un certain nivcau d'autonomie qui fait qu'elle soit l'un des élémcnts de déclenchcmcnt d'un processus de changement plus vaste visant Ia justice sociale dans le pays et le développcment seientifique et tcchnologiquc du pays dans le domaine international. Pour que 1'éducation puisse développcr ce rôlc, il scmble nécessaire de réfléchir sur 1'éducation ellc-mcmc.

Nouvelles conceptions de 1'éducation mathcmatiquc

Les élèvcs né pratiquem pas à 1'écolc reducation mathcmatiquc décrite dans 1'introduclion de cc travail. L'cnscigncmcnt des mathématiqucs a été et 1'cst toujours caraclérisé. dans le milieu officicl, par un programmc à accomplir, par une liste de lhemes à ctre étudiée et non pas par une manicre de penser. Dans Ia version officicllc de renscignement des mathématiqucs on né considere que les mathématiqucs. Cependant dans le milieu des chercheurs de 1'éducation mathématique les préoccupations au sujet de renscignement ont plusicurs origines. Nous allons discuter quetques uns de ces aspects de façon à illustrer Ia nature interdisciplinaire des études et des rechcrchcs en education mathcmatiquc.

Questions psychohgiqucs

Dcux grandes questions interessem Ia psychologie dans 1'éducation mathcmatiquc. La premièrc se refere aux apports de Ia psychologie pour Ia compréhension du mecanismo de 1'éducation. Ici, Ia psychologie apporte sa contribution dans le sens d'expliquer Ia nature des concepts mathématiques, leur organisation et leur développcment. La contribution de Piaget dans 1'analyse des invariants nécessaires à Ia compréhension des concepts mathématiques les plus divers a influencé Ia recherche dans ce domaine, en suggérant des investigations relativcs à Ia meilleure époque pour enseigner un concept à l'école et à 1'importance de Ia participation active des eleves dans Ia résolution des problèmes pour qu'ils puissent comprendre les invariants des concepts. Plus récemment. Ia théorie de Piaget a été perfectionnée par un psychologue français, Gérard Vcrgnaud, qui apporte une nouvelle vision de 1'idée de concept mathématique. Vcrgnaud considere comme point fondamental de l'analyse des concepts mathématiques, au-delà des invariants proprement dits, Ia considération des situations qui donnent une signification au concept, ainsi que les formes qu'on utilise pour leur représentation.

La dcuxieme question proposéc par Ia psychologie face à Léducation mathématique se réfère aux conséquences de 1'apprentissage des mathématiqucs. Lcnseignement des mathématiques, comme eclui du latin ou de Ia grammairc, a déjà été, à certaines époques, justifié par sa grande influencé sur le raisonnement des eleves. Cependant ce n'est que récemment qu'on fait des investigations systématiqucs sur les conséquences de l'apprcntissage des mathématiques. Ces analyses montrent que Ia question est plus complexe que ce que I'on avait imagine auparavant. D'un côté, plusieurs études sur des populations peu scolarisécs (comme chefs de chantiers, menuisiers, petits agriculteurs, marchands forains. pêcheurs.) montrent qu'il est possible d'enregistrer de façon Claire Ia compréhension d'innombrables invariants lies à des concepts mathématiques relativement complexes par des gens qui n'ont pas freqüente 1'école le temps sufllsant pour avoir appris ces concepts. D'un autre còté, leur représentation du concept a tendance à diverger de cellc qui est transmise à 1'école et à refléter les limitations spéciiiques de Ia forme de représentation utilisée.

Une des conséquences de ces résultats consiste à suggérer une plus grande flexibilité des formes de représentation utilisées à 1'école mais en essayant simultanément de promouvoir 1'adoption de formes de représentation plus énergiques. Cette analyse psychologique des aspects de 1'éducation mathématique doit répercuter dans le développement de nouveaux chemins pour 1'école. mais il y a encore beaucoup à analyser et à chercher. Les travaux de nature psychologique presentes dans ce numero de Em Aberto explorent quelques uns de ces aspects.

Questions sociologiques

Une autrc contribution des études recentes en education mathématique provient de 1'analyse de questions sociologiques. La relation proiesseur-élève a été analysée dans le passe seulement selon 1'aspect de Ia satisfaction personnelle des participants (et Ia motivation conseqüente des eleves pour 1'apprentissage), selon les mecanismes de controle de Ia discipline ou selon 1'aspcct directif ou non-directif dans Ia classe. Une nouvelle manière de comprendre les relations en classe est le résultat des études de ces dernières années sur Ia représentation sociale et ses conséquences pour 1'interaction quand les participants assument des roles determines. La necessite de considérer explicitement le contrat didactique qui resulte de telles représentations dans le systeme éducationnel actuel et de le modifier est le point focai de 1'investigation ainsi que le point de mire des transformations dans Ia plupart des efforts résultants des propositions pour Tamélioralion de 1'enseignement. On releve aujourd'hui le fait que les preuves mathématiques, par exemple, sont validées par une communauté scientifique, tandis que, dans Ia classe, le professeur semble être Ia seule autorité qui decide sur Ia validité des savoirs des élèves. II est nécessaire de modifier ce contrat implicite entre élèves et professeur, pour que les élèves puissent participer au processus de solution des problèmes en mathématiques en recréant Ia notion d'une communauté qui examine Ia validite des concepts scientifiques. Dans ce numero de Em Aberto on a aussi iiclu un travail qui examine les questions relatives à Ia représentation ociale de 1'élève et du professeur et ses conséquences sur 1'apprenti ;sage.

Anthropologie et education mathématique

Tout projet éducationnel qui né considere pas le milieu culturel le oü vivent les élèves est, par définition, aliénant. Lenseignement des mathématiques né será pas moins aliénant que l'enseignement d'une autre discipline, s'il né considere pas le contexte culturel des élèves.

Au Brésil, on peut constater 1'existence de réalités culturelles les plus contrastantes. Premièrement, il existe des groupes indigèr.cs, avec des langues et de représentations mathématiques propres et fréquemment inconnues. La recherche ethnomathématique est indispensable pour que l'enseignement puisse considérer les savoir des élèves dans ce cas. Deuxièmcment, les différentes habitudes et formes d'éducation informelle font que certains acquièrent hors 1'école un "fond culturel" valorisé par 1'école comme significatif à l'apprentissage des mathématiques, tandis que dautres disposent de savoirs non reconnus comme importants pour 1'apprentissage scolaire. Cette valorisation sélective du savoir mathématique diffusé dans Ia culture doit être reconnue et affrontée comme une des formes d'aliénation des élèves devant 1'apprentissage des mathématiques (Abreu, Bishopet Pompeu, 1994). Finalement, une analyse anthropologique pourra indiquer le rôle chaque fois plus importam de Ia technologie dans le monde actuel, en spécifiant les relations entre les mathématiques et Ia technologie dans les locaux de travail.

Dans ce numero de Em Aberto, on a inclu des travaux qui considérent certains aspects culturels de 1'apprentissage des mathématiques.

Epistémologie, histoire des mathématiques et education

Tandis que les aspects psychologiques, sociologiques et anthropologiques discutes ci-dessus analysent l'efficacité et les conséquences du processus éducatif, Ia considération des développementr historiques et épistémologiques est un outil pour Ia théorisation en education mathématique. L'épistémologie et l'histoire éclairent les aspects relatifs à Ia complexité des concepts et leurs relations reciproques, les difficultés que de nouveaux systèmes de représentations ont résolues à partir de leur introduction et les conséquences de l'introduction d'un nouveau concept ou d'une nouvelle forme de représentation pour le développement des sciences mathématiques. Ces considérations doivent éclairer les discussionsdes programmcs scolaireset constituem une sourcc d'hypothèses pour les investigations psychologiques et pédagogiques.

Le **nouveau rôle** du professour

Si on considere Ia signification de Téducation mathématique dans le monde actuel et Ia création et le développement d'une nouvelle discipline. 1'éducation mathématique, on doit conclure que le professeur né peut plus reproduire le modele d'éducation qu'il a vécu en tant qu'élève. Le monde, les objectifs et Ia conception de 1'enseignement ont changé — alors il faut que le professeur change aussi. Les considérations psychologiques suggèrent que le professeur doit avoir le role de conduire 1'élève à reconstruire des modeles mathématiques qu'il comprend dans d'autres situations, à les représenter de façon à pouvoir utiliser les systèmes symboliques les plus efficaces des mathématiques comme un instrument de Ia pensée, et à les utiliser dans une variété de situations ou ils acquièrent leur signification. Les considérations sociologiques discutem Ia représentation sociale du professeur et lui ouvrent des perspectives pour une nouvelle définition qu'il doit conquérir par de nouvelles manières d'interaction avec ses élèves. Les considérations anthropologiques doivent rendre le professeur conscient de qui sont ses élèves et de quel avenir il peut les aider à construire. Finalement, les considérations épistémologiques et historiques doivent engager le professeur dans un processus d'évaluation de ce qui est importam dintroduire dans les programmes scolaires.

Pour conclure, le professeur des mathématiques doit aussi s'engager dans l'enseignement critique des mathématiques. Les mathématiques créent des réalités pour 1'individu comme, par exemple, le choix social des modeles qui determinem le prix des services essentiels (comme 1'électricité) et les índices de 1'inflation. L'analyse de ces modèles qui créent des réalités est essentielle à Ia formation critique de 1'élève.

Références bibliographiques

ABREU, O, BISHOP, A., POMPEU, G. What children and teachers count as Mathematics. In: NUNES, T., BRYANT, PE. (Orgs.). *How do children learn Mathematics?* Palmer: Erlbaum, 1994.

D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática.* São Paulo: Ática, 1993.

GLICK, J. *What is different about adult development?* Lucca, 1993. Travail presente à Ia NATO Conference on Discourse Analysis, Technology and Situated Cognition, Lucca, Itália, nov. 1993.

RESNICK,L.B. *The new standardsproject.* Lucca, 1993. Travail presente à Ia NATO Conference on Discourse Analysis, Techno-logy and Situated Cognition, Lucca, Itália, nov. 1993.

SCHWARTZ, J.L. *Intensive quantity and referent transforming arithmetic Operations:* number concepts and Operations in the middle grades. [S.l.]: NCTM, 1988. p.41-52 NCTM.

WEBER, S. Universidade: sinal fechado. *Cadernos de Pesquisa,* São Paulo, n.33, p.3-28, maio 1980.

OUTIL INFORMATIQUE, ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET FORMATION DES ENSEIGNANTS

Michèle Artigue*
Equipe DIDIREM**

La recherche sur les questions cTenseignement des mathématiques en environnement informatique a débuté dans un climat fortement idéologique. Il s'agissait avant tout de montrer que 1'outil informatique apportait une efficacité nouvcllc à 1'enseignement des mathématiques, de soutenir et promouvoir son intégration. La recherche était avant tout celle de pionniers, convaincus et militants. L'ambiance était identique au niveau de Ia formation d'enseignants. Il fallait susciter 1'intérêt, le désir d'utili ser les nouveaux outils, on gommait les difficultés prévisibles, on calmait les inquiétudes, on né cherchait pas à cerner les limites de 1'outil, ni à mettre en évidence les ruptures et adaptations cofiteuses que son intégration impliquait. Aujourd'hui le corpus de recherches dont on dispose, Ia cohérence de certains des résultats obtenus permettent des approches plus rationnelles. Dans le me me temps, 1'évidence de Ia difficulté de pénétration de 1'outil informatique montre les limites de 1'action militante. La création de produits logiciels pour 1'enseignement apparait de plus en plus liée à Ia définition préalable de Cahiers de charge penses à Ia fois sur le plan didactique et informatique et l'on voit peu à peu s'imposer Ia volonté de comprendre en profondeur le fonctionnement des systèmes didactiques à composante informatique et de construire dans ce domaine des connaissances, fussent ?lles dérangeantes.

Cest dans cette perspective que se situe Ia réflexion menée ici. En nous référant à quelques recherches recentes, nous nous centrerons sur trois aspects qu'il nous semble importam de prendre en compte quand on s'intéresse aux apports potentiels de 1'outil informatique à 1'enseignement des mathématiques et aux questions liées à 1'intégration de cet outil dans le système scolaire donc, en particulier, à Ia formation des enseignants qui en est un élément décisif. Ce sont les suivants:

— environnements informatiques et objets de connaissance;

— environnements informatiques et interaction entre cadres de fonctionnement des concepts;

— environnements informatiques et fonctionnement du système didactique.

Nous né prétendons pas bien sur couvrir ici 1'ensemble des questions posées. La taille imposée à 1'article nous a imposé des choix, d autres auraient sans doute été possibles et tout aussi pertinents. Les nôtres ont été sans aucun doute guidés, au moins partiellement, par des manques ressentis au niveau de Ia formation des enseignants.

• IUFM *de* Rcims.
** Université Paris 7.

Environnements informatiques et objets de connaissance

Il est banal d'affirmer que les mathématiques sont affectées par les environnements informatiques dans lesquels on les rencontre, on les conceptualise, on les travaille. Des les débuts de 1'aventure LOGO, on a ainsi mis en évidcnce certaines différences entre Ia géométrie de LOGO et cellc de Ia fcuille de papier, en soulignant par exemple le fait que LOGO véhicule une conception différenticlle. globale, dynamique du cercle mettant au premier plan Tinvariance de Ia courbure, alors que Ia géométrie usuelle privilegie une conception ponctuelle, statique mettant au premier plan 1'invariance de Ia distance au centre. Au dela de cet exemple, le plus frcqucmmcnt cite, on a mis en évidcnce, à travers le role dominam joué par les angles, le repérage essentiellement local, une géométrie de LOGO par certains côtés plus proche de Ia géométrie du macro-espace, au sens defini dans (Brousscau, 1983), que de Ia géométrie du micro-espace' et ce, en dépit de Ia taille de Técran.

Mais il faut reconnaitre aussi que si 1'existence de différences est communément admise et affirmée — si, pour tel ou tel micro-monde, chacun peut citer comme je viens de le faire quelques exemples, quclqucs caractéristiques — 1'analyse de ces différences, des impacts qu'ellcs peuvent avoir sur le transfert de connaissances construites dans un environnement à d'autres environnements, reste le plus souvent três superficielle et sans cohérence globale. Elle n'est que rarement considéréc comme une question fondamentale et prioritaire dans Ia recherche sur ces environnements. Elle apparait plutôt au détour du chemin, du fait de réactions ou de difficultés non prévues, rencontrées au cours d'expérimentations, qu' il faut comprendre, interpréter. L'affirmation de différences fonctionne le plus souvent comme déclaration liminaire et né sert qu'à masquer le fait qu'au fond, Ia force dominante est celle qui tend à considérer comme transparents vis à vis du savoir les environnements informatiques.

Le repérage de ce phénomène, de ses raisons, 1'analyse de ses effets négatifs sur Tintégration de 1'outil informatique nous semblent cruciaux en matière de formation d'enseignants. L'ilIusion de transparence né se nourrirait-elle pas en effet de Ia croyance culturelle que l'environnement usuel en papier/crayon est Lenvironnement naturel et normal du fonctionnement mathémat ique, donc en fait le seul environnement a priori legitime? Dans ces conditions, tout repérage de déviance d'un logiciel constituerait une atteinte à Ia légitimité de 1'utilisation de ce logiciel dans 1'enseignement. On comprend bien alors que les concepteurs de produits logiciels et leurs promoteurs soient pris inconsciemment dans un système de double contrainte: d'une part mettre en évidence Ia nouveauté qui justifie le produit, d'autre part maintenir au moins un temps, le temps de lui assurer une place, 1'illusion de transparence.

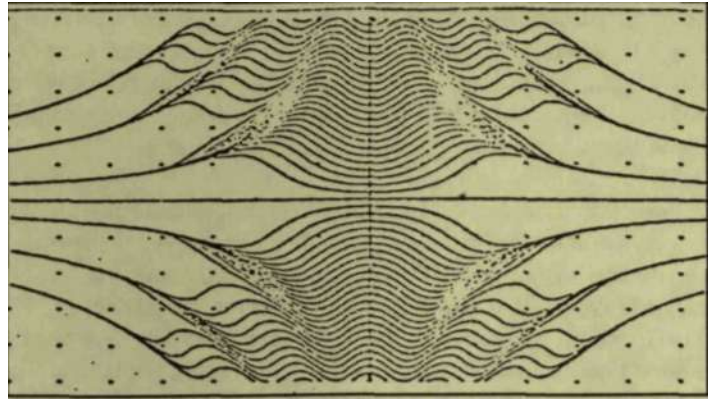
La façon dont sont poses les problèmes de transfert de connaissances est. elle aussi, révélatrice de ces questions de légitimité. Ils sont en effet toujours poses dans le même sens: on s'intcrrogc sur Ia transférabilité possible en environnement usuel de connaissances construites dans des environnements informatiques. Une réponse négative tend à disqualifier l'environnement informatique utilisé. En sens inverse, des difficultés à exploiter un environnement nouveau pour faire des mathématiques sont toujours imputées au produit logiciel, non à Ia trop forte dépendance contextuelle des connaissances construites dans Tenseignement usuel.

Prenons un exemple particulièrement banal, celui des représentations graphiques de fonetions. L'enseignement usuel se base sur une théorie, implicite en grande partia de Ia représentation graphique des fonetions:

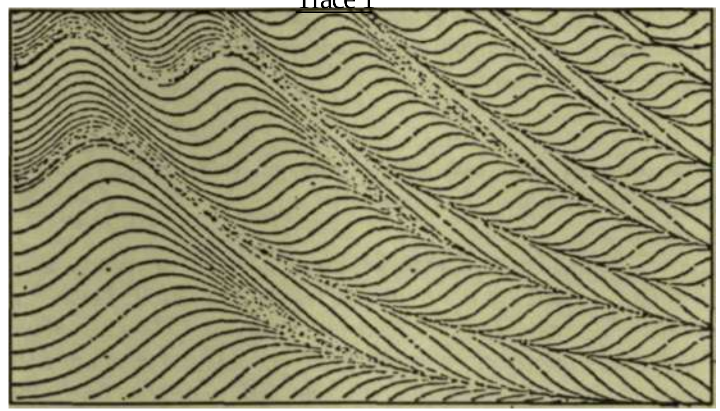
[1]**G. Brousseau distingue trois tailles d'espace présentant des caractéristiques sensiblement diflerentes: le micro-espace qui est celui de manipulabon de pênis objets et de Ia géométne de Ia feuille de papier. le méso-espace, espace des déplacements du sujet dans un domaine controle par Ia vue (objets fixes entre 0,5 et 50 fois Ia taiile du sujet) et enfin le macro-espace ou le controle dtrect n'est plus possible**

à une fonction correspond une représentation générique, respectant un certain nombre de conventions; ainsi le graphe trace sera-t-il le plus simple possible compatible avec les contraintes connues, toutes les propriétés mathématiques repérées devront y apparaitre de façon lisible, au prix éventuellement d'une déformation du dessin et l'on né tracera pas par exemple exactement de Ia même façon une branche infinie à asymptote verticale et une branche parabolique de direction verticale[2]. Ces conventions né se retrouvent pas dans les traces informatiques: à une même fonction correspondent en general une grande variété de représentations perceptivement différentes suivant le choix de Ia fenêtre de représentation, toute fonction continue peut même être représentée par une horizontale — lequel d'entre nous n'a pas été choque Ia premicre fois oú voulant tracer une sinusoide il a malencontreusement obtenu une droite horizontale? — et les courbes n'hésitent pas à rencontrer leurs asymptotes! Exploiter mathématiquement des traces informatiques de solutions d'équations diflerentielles par exemple, suppose que l'on prenne conscience de ces différences et donc, rétrospectivement, des conventions qui gèrent les représentations usuelles.

Il est significatif de ce point de vue que, Ia recherche que nous avons menée à 1'Université de Lille 1 sur Tenseignement des équations difTérentielles (Artigue, 1992) ait montré que, pour Pune des premières activités proposées aux étudiants, qui consiste à associer des équations et des portraits de phase. Ia seule difficulté résistante consiste à admettrc que 1'équation: y'= sin(xy) puisse aussi bien être associée au trace 2 qu'au trace 1:



Tracé 1



Exploiter eficacement 1'outil informatique dans 1'enseignement exige donc que l'on prenne au sérieux 1'analyse des rapports entre objets de savoir et environnements et le travail à faire pour permettre 1'adaptation à de nouveaux environnements ou Ia gestion simultanée de plusieurs environnements. Cela exige aussi que 1'on prenne conscience des implicites sous-jacents au fonctionnement dans les environnements usuels

[1] *1* **Rogalsld avait essayé d'expuciter ces caracténsüques dans un exposé à Ia 2ème École d'été de Didacbque (cf Actes difluses parlMREM dOiIéans)**

et que l'on soit prêt à remettre en cause Ia tendance naturelle à en faire les seuls legitimes dans Tcnseignement. Ce regard décentré sur nos pratiques les plus familiares peut d'ailleurs nous aider à prendre conscience de tous les implicites sur lesqucls reposent ces pratiques, des implicites que nos élèves n'ont aucune raison de partager d'emblée.

Une formation d'enscignants à 1'utilisation d'outils informatiques dans rcnscigncmcnt dcvrait être 1'occasion de poser ce type de problcmes à partir du travail sur des environnements précis, comme par exemple C.Laborde le fait dans quclques articles récents concemant le logiciel Cabri-Gcomètre — (Laborde, 1994) par exemple. Un tel travail peut être aussi 1'occasion de s'intcrrogcr sur raffirmation implicite d'unicité contenue dans le "Ia" souligné plus haut et de se demander qucllcs sont les géomctries de Tenseignement et comment le système gere les difllcultés liées aux diflcrcnces qu'elles présentent, dans leur utilisation simultanée ou successive.

Environnements informatiques et mise en relation de registres de repreesentation d'un même concept

Bcaucoup de recherches actuellcs exploitent, même si elles né font pas explicitement référence à Ia notion de cadre[3] (Douady, 1984) ou à celle de registre de representaiion introduite (Duval, 1988), Ia possibilite qu'ofTre Toutil informatique de gérer simultanément et économiquement plusieurs registres de representation d'un même concept, favorisant en cela 1'interaction entre cadres de fonctionnement de ce concept. Cest le cas par exemple de nombreuses recherches menées actuellement sur le concept de fonetion comme en temoigne par exemple Ia monographie récemment publiée sous le titre *Epistemology and Pedagogy of the Concept ofFunction* (Hard, Dubinsky, 1992): dans un nombre important des travaux presentes, on cherche à exploiter 1'outil informatique pour Ia conceptualisation mathématique. en particulicr via Ia gestion interactive de représentations algébriques et graphiques.

Un des premiers travaux largcment diflusés dans ce domaine fut celui de D. Tall (1986) base sur Ia réalisation du logiciel "Graphic Calculus" pcrmettant une approche graphique des débuts de Tenseignement de 1'analyse. Ce travail a eu un impact certain en Grande Brctagne puisque, par exemple, les notions de 'tangente pratique" (tangente obtenue en joignant deux points trés rapprochés de Ia courbe) et celle associée de dérivée numérique, qu'il introduisait dans sa thèse pour élaborer une premicre approche de 1'analyse sans le concept de limite, ont été reprises dans Ia reforme nationale des programmes de 1'enseignement secondaire en Grande Bretagne et ont inspire les approches informelles du Calculus développées dans plusieurs projets nord américains (Artigue, Ervynck, 1993).

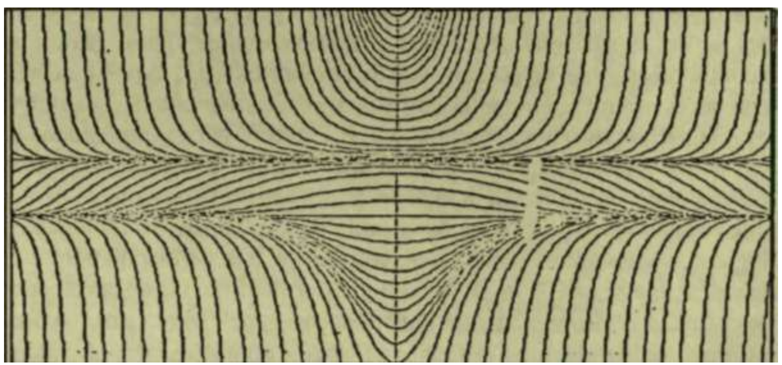
Il faut cependant reconnaitre que beaucoup de recherches menées dans ce domaine n'ont pas fourni des résultats à Ia mesure des attentes et esperances des chercheurs et concepteurs de logiciels.

Les recherches menées dans ce domaine des fonetions ont également contribué (avec bien d'autrcs menées dans divers environnements, cf. Leinhart, Zaslavsky et Stein, 1990, par exemple) à mettre en évidence Ia charge de savoir qui porte Ia lecture adéquatc des représentations graphiques et les illusions que pourraient nourrir les enseignants qui penscraient que les élèves voient dans une representation graphique ou dans une évolution dynamique de représentations les phénomènes qu'ils ont justement voulu montrer. J'en donnerai deux exemples, l'un extrait de Ia recherche déjà citée sur les équations différentielles, 1'autre de et Goldenberg, Lewis et 0'Keefe, (1992).

[1] R Douady définit dans sa thèse un cadre comme composé d'objets d'un domaine mathémabque, de relatíons entre ces objets. d'e.xpressions et images mentales associées à ces objets. Deux cadres peuvent contenir les mêmes objets mais difTérer par les images mentales et problémabques développées à leur propôs. La notion de registre ublisée par R Duval est, elle, liée á une analyse des représentations de rype sémiobque. Dans un même cadre, un objet est en general susceptbble de représentations diverses présentant des caracténsbques sémiobques diflerentes.

Le travail sur les équations différentielles met bien en évidence en effet les connaissances mises en jeu par une lecture graphique efficace. Ainsi, sachant que le portrait ci-après correspond à 1'équation différentielle suivante, $y' = x(y^2-l)$. le mathématicien voit sur ce trace deux solutions particulières correspondam aux droites d'équation y=-l et y=l qui partagent le plan en trois zones oü les courbes-solutions sont rcspectivement piégées car 1'équation satisfait les hvpothèscs du théorème d'existence et d'unicité sur tout le plan. Il sait que les courbes-solutions des zones 2 et 3 admettent des asymptotes horizontales puisqu'aucune solution né rencontre les deux solutions particulières mais. contrairement aux apparences, il sait qu'il né peut conclure directement du trace que les deux droites sont bien les asymptotes. Il voit aussi que les courbes-solutions de Ia zone 1 ont une direction asymptotique verticale mais sait qu'il né peut discerner perceptivement entre asymptote verticale et branche parabolique de direction verticale. Dans Ia zone 3, il sait encore une fois qu'il né doit pas se laisser piégcr par les apparences: a priori, il existe deux types de solutions, des solutions qui rencontrent 1'axe Oy, sont décroissantes puis croissantes et des solutions qui né le rencontrent pas, mais ceei peut n'être qu'une apparence liée à Ia fenêtre de représentation.

Que verraient un élève de lycée, un de premier cycle d'université, un artiste dans ces mêmes traces?



En fait, nous voyons ce que nous sommes prepares à voir avec notre connaissance du domaine et le deuxième exemple cite 1'illustre de façon encore plus élémentaire. Disposant d'un traceuret voulant illustrer l'effet du changement du y-intercept[4], à pente constante, Goldenberg a demande à ses élèves ce qu'ils voyaient lorsquMl faisait dynamiquement croitre ou decroitre ce y-intercept. Le mathématicien voit ici monter ou descendre Ia droite initiale parallèlement à elle-même. Cette interprétation est en fait complètemcnt pilotée par le savoir injecté dans Ia situation. Les élèves, eux, y voient, à juste titre, tout aussi bien une droite qui se déplace vers Ia gaúche ou vers Ia droite!

Il faut cependant souligner que les difllcultés mises en évidence par beaucoup de travaux, tout en tempérant les enthousiasmes naífs, ont eu un effet positif. Elles ont suscite des recherches plus fouillées cherchant à mieux comprendre comment s'établissent, dans un environnement donné, les connexions entre différents registres de représentation du concept de fonetion, voire d'autres concepts et quels processus les sous-tendent. quelles sont les difficultés et obstacles rencontrés dans cette articulation, donc à se donner les moyens de comprendre à Ia fois les rcussites et les échees et de mieux cerner, par contrecoup, les apports possibles d'environnements informatiques. Cest le cas de Ia recherche présentée par J.Kaput dans Ia monographie déjà citée par exemple mais aussi de divers travaux et nous évoquerons ci-après deux d'entre eux: une recherche pilotée par A.Schoenfeld (Schoenfeld, Smith, Arcavi, 1990), souvent citée ces dernières années, et Ia thèse d'A.Dagher (1993).

Ces recherches relèvent d'un point de vue méthodologique de 1'analyse qualitative de cas. Elles abordent les interactions élève/logiciel à un niveau microscopique d'analyse, en se basant notamment sur l'enregistrement systématique de toutes les interactions élève/logiciel. Il s'agit bien sur

' Le y-intercept designe Pordonnee du point d'intersection avec Taxe Oy

ensuite de remonter de ces informations microscopiques à une modélisation de 1'élève et de 1'apprentissage exprimables, au moins en partie, à des niveaux plus globaux: identification de connaissances, de théorèmcs en acte derricre les invariants repérés au niveau des actions de 1'élève, hiérarchisation et structuration des connaissances en réseaux évolutifs pertinentes. Ceei né va bien sur pas de soi.

La recherche citée d' A. Schoenfeld et al. illustre bien ces caractéristiques. Elle est basée sur Tétude du fonctionnement d'une seule étudiante (IN.) de 16 ans pendant 7 heures dans un environnement informatique (Black Globs). Ce travail met en evidence, de façon surprenante, Ia complexité cachée derrière Ia simple aflírmation: "Si y=mx+b est 1'équation d'une droite. b est le y-intercept et m est Ia pente". Ce sont des phrases que connait IN. quand elle commence Ia formation, comme elle sait trouver l'équation d'une droite passant par deux points, calculer sa pente .... Pour rendre compte de cette complexité, de Ia fragilité des connaissances de 1'étudiante, de leur dépendance contextuelle et de 1'évolution constatée au cours des 7 séances, les auteurs distinguem quatre niveaux de description des connaissances:

— un niveau de macro-organisation oii connaissances et perceptions sont organisées en schémas globaux;

— le niveau des concepts ou entités conceptuelles qui décrit les objets du domaine et leurs propriétés familiares;

— un niveau de structuration plus fine oíi se regroupent des éléments primitifs et leurs relations, dénommé "the Cartesian connexion";

— enfin, un niveau contextuel ou les éléments primitifs sont indexes par des contextes précis.

Ils montrent qu'il y a au début fonctionnement au niveau du schéma sans que ce schéma né soit ancré à des niveaux plus profonds sur des conncxions cartésiennes correctes. Par exemple, au départ, IN. fonctionne comme si elle décomposait le plan en deux demi-plans: positif et négatif, de part et d'autre de 1'axe horizontal. Une droite de pente négative est alors pour elle une droite qui vient de Ia partie négative du plan, connaissance implicite qui coexiste avec une technique correcte de caleul de Ia pente. Pour arriver à une conception de Ia pente correctement articulée entre les pôles algébrique et graphique, c'est en fait tout un réseau cognitif qu'il faut modifier. De Ia même façon. Ia conceptualisation de I.N. de Ia notion de y-intercept passe au cours de Ia formation par une évolution complexe.

Les auteurs soulignent également qu'ils né parviennent pas, contrairement à leurs attentes initialcs, à expliquer 1'évolution par une suecession de micro-apprcntissages; ils repòrent plutôt des connexions qui se renforcent ou s'affaiblissent dans un réseau complexe.

La thèse d'A.Dagher, que nous avons citée également plus haut, met quant à elle bien en evidence Ia spécificité de certains processus d'adaptation mis en jeu dans les cnvironncmcnts informatiques. Étudiant le fonctionnement d'élèves face à un logiciel (Fonctuse) demandant d'associer à des courbes affichées sur 1'écran (droites, paraboles, hyperboles), des expressions algébriques de forme spécifiée, il montre qu'une adaptation efficace, du point de vuc de 1'environnement logiciel, né met pas nécessairement en jeu les connaissances d'articulation algébrique-graphique visées par l'apprentissage. Il identifie par exemple, dans le cas de paraboles auxquelles doit être associée une équation sous forme polynomiale, qu'un certain nombre d'élèves arrivent assez rapidement à une connaissance perceptive de Ia taille de 1'ouverture (qui a, dans ce logiciel, nécessairement une valeur entière) qui leur permet d'en trouver Ia valeur exacte en 2, 3 essais maximum. Ceei leur permet de développer une stratégie efficace pour déterminer 1 'équation polynomiale demandée: estimer l'ouverture, lire 1'ordonnée à 1'origine pour déterminer Ia valeur du terme constant du polynôme, puis lire les coordonnées d'un point et écrire l'équation correspondante pour trouver Ia valeur du coefficient du terme de degré 1. En cas d'échec, utilisation du feed back donné (trace de Ia parabole associée au polynôme proposc) pour corriger l'estimation de Touverture, modification de 1'équation à résoudre ... Il apparait que ces mêmes élèvcs né sont pas nécessairement capables dans le post-test qui suit rexpérimentation. d'ordonner des paraboles tracées sur papier suivant Ia valeur de leur ouverture, comme si Ia connaissance construite dans Taction sur 1'ouverture né disposait pas d'ancragcs conceptuels suffisants pour être exprimable et exploitable dans une formulation en termes de rclation d'ordre.

A. Dagher met en évidcnce également certains facteurs qui pourraient expliquer 1'efficacité constatée d'une utilisation même courte du logicicl lors des prcmières expérimcntations. Ces expérimcntations ont été menées avec des eleves en fin de lycée, familiers avec les droites. paraboles et fonctions polynômes de dcgré 1 et 2 mais ayant cependant des compétences três limitées dans le domaine de 1'articulation graphique-algébrique. Les évolutions observées, contrairement aux observations faites dans Ia recherche précédemment citée, sont des évolutions brutales et stables (le fait que le jeu proposé à 1'élève varie peu explique sans doute en partie ces difierences): à un moment, un coefficient ou une caractéristique d'un coefficient semble prendre sens et il n'y a pas de rctour en arrière dans Ia suite de Ia séance. Ces phcnomèncs brutaux, qualifiés par 1'auteur de "cristallisations" né se produisent pas alcatoirement: Ia présence d'un catalyseur semble nécessaire. Le principal catalyseur idcntifié est Ia rencontre d'une situation particulière soit du point de vue algébrique. soit du point de vue graphique. Mais il faut reconnaitre aussi que tout catalyseur né provoque pas nécessairement de cristallisation. Ainsi. une situation particulière será statistiquement moins efficace si elle est três particulière (par exemple $y=x^2$) ou si elle est rencontrée três tôt dans Ia séance. Mais 1'analyse des enregistrements montre que, du fait de Ia rapiditéde finteraction informatique, le nombre de catalyseurs rencontrés dans une séance est suffisamment grand pour qu'un pourcentage d'efficacité même réduit puisse produire des effets réels.

Comment exploiter tout ceei au niveau de Ia formation? Je voudrais ici suggérer quelques pistes:

— il serait sans doute interessam d'utiliser 1'outil informatique pour renforcer Ia sensibilité des enseignants à 1'existence de différents cadres de fonctionnement, de différents registres de représentation pour les concepts mathématiques, au role fondamental joué par l'articulation de ces cadres et registres dans le travail mathématique, pour construire des ingénieries favorisant cette articulation;

— mais il est tout aussi importam de né pas laisser croire que l'articulation va devenir miraculeusement facile parce que l'on disposera d'outils logiciels qui Ia mettront économiquement et aisément en scène. L'articulation de cadres et de registres, comme tout articulation de points de vue est une opération mentale cognitivement três coüteuse et ce n'est pas un hasard si l'enseignement tend souvent à fuir cette complexité en compartimentant les domaines et les approches. Les articulations se construisent lentcment et cette construetion met en jeu, comme le montrent bien les recherches recentes, tout un réseau cognitif qui déborde largement les seules articulations visées;

— enfin il nous semble importam de sensibiliser les enseignants à Ia spécificité des processus d'adaptation mis en jeu par le milieu informatique et aux variables qui les conditionnent, de souligner aussi Ia prudence nécessaire dans 1'interprétation cognitive des comportements observes.

Environnements informatiques et fonctionnement du système didactique

Nous nous référerons plus particulièremcnt dans cette troisième partie à une recherche effectuée en collaboration avec J.Belloc dans un College de Ia banlieue parisienne de 1988 à 1991 (Artigue, 1991). Bien d'autres références auraient bien sur été possibles.

Dans 1'euphorie pionnière des débuts ou même lant que les débats ont tourné de façon récurrente autour du "pour ou contre rinformatiquc dans l'enseignement des mathématiques", les travaux qui pouvaient mettre en évidence, soit des résistances fortes du système d'enseigncment, soit des difficultés autres que matcrielles ou résultant de refus de príncipe, n'étaient pas forcément les bienvenus. Aujourd'hui me semble-t-il, le problème n'est plus là et nous sommes bien conscients que pour assurer 1'intégration de 1'outil informatique dans Tenseignement, nous avons certes besoin de bons produits — mais ceei n'est plus forcément le plus difficile — nous avons aussi besoin de comprendre comment 1'outil informatique affecte le fonctionnement du système didactique et comment on peut aider les enseignants à prendre conscience des adaptations nécessaires et à les mencr à bien.

La recherche menée avec J.Belloc sur le logiciel Euclide[5] en classe de 4ème, par son évolution même, illustre bien ce phénomène. Elle a démarré avec des objectifs précis,"des hypothèses a priori raisonnables et banales:

— Euclide peut aider à Ia formulation en géométrie, par les contraintes de langage qu'il impose, par Ia proximité de ces contraintes de celles du langage mathématique dans ce domaine, par 1'avantage didactique qu'il offre de mettre en scène ces contraintes comme des contraintes du milieu;

— Euclide peut aider à Ia conceptualisation en géométrie en obligeant à passer d'une géométrie perceptive, d'une géométrie du gesle, à une géométrie opératoire oü ces gestes sont décomposés, traduits en termes d'objets géométriques et de leur propriétés (pour tracer un parallélogramme, on né fait pas glisser sa règle, on trace des parallèles düment spécifiécs, par exemple);

— Euclide peut aider à approcher des situations plus complexes que celles gérables dans les environnements usuels et permettrc d'engager les élèves dans une approche expérimentale de Ia géométrie;

— Euclide peut enfin aider les élèves à entrer dans Ia rationalité mathématique en les aidant à prendre conscience de Ia généralité des énoncés mathématiques, du statut de Ia figure, des propriétés géométriques des configurations, invariants d'une classe infinie de figures.

L'expérimentation de Ia prcmière année a globalement confirmé ces hypothèses et dans le même temps attiré notre attention sur des problèmes préoccupants, d'autant plus préoccupants qu'ils tendaient à montrer que les situations construites n'étaient pas robustes et exigeaient, pour fonctionner, un enseignant véritablement expert. Les problèmes rencontrés étaient principalement de trois types:

— le parasitage récurrent du travail mathématique par des difficultés de nature informatique;

— ia difficulté à cerner Ia charge mathématique réelle de Tactivité développée par les élèves;

[3] Le logiciel Euclide réaüsé à TIREM de Grenoble est une extensión de LOGO integram des macro-procêdures adapte ã 1'enseignement delagêoméaie á partir du College: traces de parallèles, perpendiculaires, d'imagcs de pouits par les trans-(brmaaons usuelles...

— les difficultés rencontrées par 1'enseignante pour se conformer aux prévisions expérimentales faites en commun, lors du pilotage réel de Ia classe.

Nous nous sommes donc intéressées plus précisément dans Ia suite à ces questions. d'une part en introduisant certaines modifications à 1'ingénierie initialc pour micux prendrc en compte les difficultés rencontrées. d'autre part en mettant en place différents dispositifs expérimentaux pour étudier plus finement, et les difficultés, et reffet des modifications introduites: suivi de groupes d'élèves. enregistrements des phases collectives, organisation de courts controles après chaque synthèse.

Sans rentrer dans le détail des résultats obtenus, nous voudrions nous centrer ici sur deux aspects auxquels cette recherche nous a particulièrement sensibilisée: les changements dans les caractéristiques du milieu et dans les processus de gestion de Ia classe induits par renvironnement informatique. Nous pensons quMls jouent un role important dans les difficultés d'intégration de 1'outil informatique à í'enseignement, au dela. commc nous le soulignions plus haut. des problèmes matériels et institutionnels auxquels tout un chacun est sensible en príorité.

Environnement informatique et milieu

A un moment de 1'enseignement, dans 1'expérimentation menée, après Ia phase dinitiation au logiciel. les élèves étaient confrontes, à une tache de construetion de figure. Il s'agissait de Ia figure ci-dessous préparant 1'étude de Ia configuration des médianes dont plusieurs représentants variant par Ia taille, l'orientation étaient proposés aux élèves.

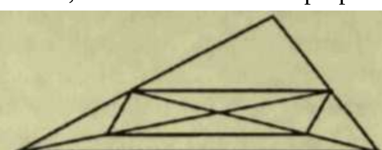


Fig. 1 - Configuration des médianes

Ils devaient en élaborer des programmes de construetion en langage mathématique usuel et en langage Euclide. Ces programmes n'utilisant pas toutes les propriétés de Ia figure, on leur demandait également de fabriquer un ou plusieurs problèmes de géométrie à partir de Ia construetion proposée.

Les résultats obtenus satisfaisaient sur le plan mathématique l'enseignante de Ia classe: ils traduisaient chez Ia grande majorité des élèves Ia capacite d'associer de façon cohérente une procedure de construetion géométrique à une figure de ce niveau de complexité, ainsi que Ia possibilite de distinguer entre les propriétés de Ia figure qui servaient d'hypothèse à Ia construetion (variables suivant les élèves) et celles qui restaient à prouver à Tissue de Ia construetion. Les formulations des élèves étaient mathcmatiquement correctes même si souvent il s'agissait de formulations intermédiaires entre le langage mathématique usuel et le langage Euclide. En revanche, parmi les programmes Euclide proposés, 3 seulement sur 21 étaient opérationnels.

Ceei nous a conduit à introduire une hiérarchie dans les erreurs rencontrées, en termes *áUmbrication maths/informatique.* Pour Ia tache de construetion proposée, vu les caractéristiques géométriques de Ia figure, nous avons distingue 5 classes d'erreurs:

— les erreurs mathématiques (non définition de certains objets ou double définition, ajoute de propriétés, confusions de termes mathématiques comme milieu et médiatrice...), code EM;

— les erreurs liées à 1'existence de formulations mathématiques directement intraduisibles dans le langage Euclide (ex: soit G tel que C soit le milieu de [GE]), code EF;

— les erreurs liées à des différences d'ordre dans les deux syntaxes (ex: "Soit M' le symétrique de M par rapport à O" se traduit par "SOIT "M' SYMP :0 :M"), code EO;

— les erreurs résultant d'une définition implicite en mathématiques (ex: en mathématiques, lorsque deux points ont été définis, Ia droite (AB), le segment [AB] le sont automatiquement, ce n'est pas le cas dans Euclide, ni d'ailleurs dans le Géomètre), code EDI;

— les erreurs de syntaxe locale concernant intervalles, guillemets, deux points, crochets..., code EIL.

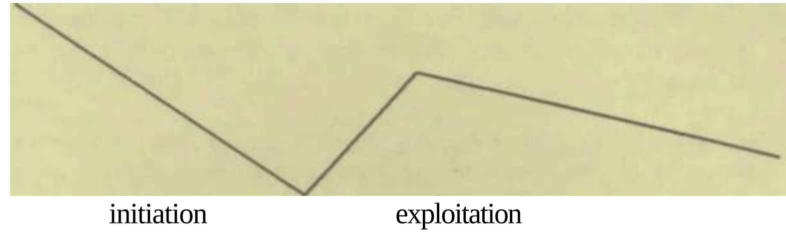
A ces catégories ayant servi à analyser les productions écrites, il faut ajouter lors de 1'entrée du programme en machine, Tédition, 1'execution, au moins une sixième catégorie concernant les erreurs de gestion des procedures, de gestion du système-éditeur...

Lorsque l'on opere cette distinction, on obtient les résultats suivants (pour 21 élèves, chacun ayant à coder cinq constructions):

Code erreur	EM	EF	EO	EDI	EIL
Nombre	4	7	32	56	28
Eleves	1	2	8	18	9

qui mettent clairement en évidence le décalage existant entre correction mathématique et correction Euclide.

Les problèmes associes ont persiste jusqu'à Ia fin de rexpérimentation, les conséquences s'en trouvant aggravées par le manque de convivialité du logiciel et le caractère sommaire des messages d'erreur. En dépit des modifications apportées à 1'ingénieríe, le parasitage persista les deux années suivantes et les moyens de recueil de donnccs mis en place mit en évidence le phénomène qualitatif suivant, concernant les erreurs les moins imbriquées aux mathématiques:



une décroissance nette pendant Ia phase d'initiation, une recrudescence lorsque l'on aborde les situations complexes, une légère décroissance par Ia suite, sans que l'on atteigne jamais un niveau raisonnable vis à vis du travail mathématique souhaité.

Comment, au dela de cette recherche precise, analyser didactiquement le phénomène? Nous reviendrons ici à Ia notion de "milieu". Cette notion a été introduite en didactique (Brousseau, 1988) dans le but de prendre en charge théoriquement les príncipes constructivistes selon lesquels 1'élève apprend en s'adaptant à un milieu, qui est facteur de contradictions, de difficultés, de desequilibres. Chez G. Brousseau, qui modélise les situations didactiques en terme de jeux, le milieu est defini comme système antagoniste de 1'élève dans le jeu a-didactique associe à Ia situation.

Sans rentrer explicitement dans cette modélisation, nous considérerons quant à nous le milieu comme:

— forme d'objets, outils, matériels ou conceptuels étant supposés avoir acquis une certaine transparence pour 1'élève soit du fait de Ia culture, soit du fait d'apprentissages antérieurs (ainsi des notions comme celled'équation du Seconddegré, de fonction exponentielle... peuvent être à un certain moment des éléments du milieu au même titre que des instruments de trace géométrique, un ordinateur, un logiciel...);

— support et environnement du travail mathématique de l'élève.

La situation didactique, si elle se veut moyen d'apprentissage, va nécessairement faire bouger le rapport de 1'élève au milieu: le milieu y será en un certain sens problématique. Ceei oblige à distinguer dans Ia modélisation deux composantes du milieu: Ia composante inerte et Ia composante active. La première est constituée de ce qui dans le milieu est supposé conserver le même niveau de transparence, né pas être problématisé à travers Ia situation et c'est 1'adaptation à Ia composante active qui doit provoquer 1'apprentissage.

II est clair que les milieux usuels en jeu dans 1'enseignement des mathématiques sont des milieux qui peuvent être riches en composants mathématiques mais que ce sont en general des milieux pauvres en composants externes. Lentrée d'outils informatiques dans le système éducatif vient bouleverser cet ordre des choses. Elle cree ainsi des problèmes auxquels les enseignants né sont pas habitues et qu'il serait dangereux de vouloir sous-estimer.

Si Íon revient avec ces outils d'analyse à Ia situation expérimentale décrite plus haut, 1'ordinateur et le langage LOGO (pour certains élèves), puis le logiciel Euclide entrent avec lexperimentation dans renvironnement didactique. Ils né sont bien sur pas d'emblée considères comme des éléments du milieu: Ia phase de familiarisation avec le logiciel Euclide qui oecupe 5 séances de travail en groupes et les séances de synthèse correspondantes, par exemple, a justement pour objectif de constituer le logiciel comme élément du milieu. On verra d'ailleurs des ce niveau intervenir de façon indirecte le problème de Ia légitimation d'un apprentissage externe aux mathématiques dans le cours de mathématiques: Ia familiarisation avec le logiciel est couplée avec des "révisions" sur les angles, les quadrilatères et triangles particuliers. En fait, ce qui peut être légitimement considere de façon durable au cours de l'apprentissage comme partie active du milieu informatique. dans ce cas précis, c'est Ia syntaxe du logiciel dans ses aspects imbriqués aax mathématiques, c'est Ia structuration de Ia programmation qui renvoie à Ia structuration mathématique des procedures de construetion de figures. Les autres aspects de l'apprentissage informatique doivent le plus rapidement possible gagner Ia transparence nécessaire à leur rattachement à Ia composante inerte du milieu. Malheureusement ce n'est pas le cas ici et l'enseignement va devoir assumer en permanence le parasitage de l'adaptation au milieu actif par Ia non-transparence du milieu théoriquement inerte.

Ces questions sont d'autant plus difficiles à résoudre que d'une part lenvironnement culturel des élèves, dans Ia majorité des cas, né suflit pas à faire gagner au milieu informatique "spontanément" le niveau de transparence souhaitée, d'autre part que les connaissances sous-jacentes tendent à être vécues comme hors-contrat par les diflerents protagonistes: élèves, enseignants mais aussi parents (diverses données de Ia recherche menée l'attcstent ici clairement).

Il est clair que Ia prégnance des difficultés rencontrées, les limites des modifications introduites sont pour partie liées au logiciel lui-même utilisé, aux choix didactiques que nous avons effectués, en particulier en matière de programmation par les élèves, au niveau des élèves concernes: le niveaH College. Mais on irait au devant de grandes désillusions si l'on en déduisait qu'il s'agit là d'un cas d'espèce et que, face aux environnements plus conviviaux dont on dispose maintenant, il n'y a pas lieu de sensibiliser 1'enseignant à ces questions, de s'attacher à lui donner les moyens de repérer et interpréter correctement les phénomènes associes, de lui fournir aussi certains outils pour les gérer. Sinon comment éviter que, obligés de faire face à mains nues à d'incontournables problèmes que personne né leur a pointés comme incontournables et réellement difficiles, ils n'attribuent leurs difficultés à leur seule incompétence!

Les problèmes poses par 1'intégration d'outils informatiques à 1'enseignement né se limitent pas bien sur à ces questions de non-transparence du milieu. Nous n'avons pas rintention d'aborder ici les problèmes d'ordre matériel et institutionnel auxquels nous sommes tous sensibles en priorité, nous voudrions plutôt nous centrer sur le point suivant: lutilisation denvironncments informatiques perturbe les systèmes de provision et de gestion de 1'enseignant, les deux né fonctionnant pas indépendamment. En eflet, Tordinateur, même conçu simplement comme élément du milieu par 1'intermédiaire duquel s'établit Ia relation de 1'élève au savoir, modifie les rapports existants dans le triangle didactique: maitre - élève - savoir.

Pour 1'enseignant. Ia situation informatique apparait d'emblée comme moins prévisible par le simple fait que se greffe sur le mathématique tout un ensemble de phénomènes annexes qu'il aura du mal à prévoir ou dont il tendra à sous-estimer Timportance. Par exemple, les provisions de 1'enseignante dans notrc recherche sous-estimaient systématiquement le temps passe dans Ia communication (même réussie) avec Ia machine. Le fait que les systèmes de provision de 1'enseignant soient largement intuitifs accentuc sans aucun doute Ia rcsistance dans Ia durée de cette imprévisibilité.

Dans un environnement informatique, quel qu'il soit, de plus, Ia médiation élève/savoir né passe pas uniquement par 1'enseignant. Un logiciel, même non tutoriel, fournit des feed back à l'élève et en ce sens a une dimension enseignante. Il devient en partie garant du vrai/faux, du possible/impossible. Cette composante est reconnue parfaitement par l'élève et rend les reprises en main, dans le cadre d'un travail en environnement multipostes, diíTiciles. Or cette capacite de reprendre facilement Ia main est essentielle à 1'enseignant. Elle lui permet d'accélérer quand il en ressent le besoin 1'avancée du temps didactique, en prenant appui sur les élèves qui ont déjà trouvé ou ont des idées pour démarrer. Elle lui permet de négocier les changements de tache et l'on sait bien qu'un même exercice mathématique necessite souvent de telles renégociations: on voudra passer d'une tache de construction à une tache d'émission de conjectures, de 1 'émission des conjectures à leur test, du test à des preuves plus formelles... Chaque changement implique en general une renégociation de Ia dévolution. La reprise en mains permet aussi à 1'enseignant d' homogénéiser au moins en apparence Ia classe, de démarrer le processus d'institutionnalisation au cours même de 1'activité au moyen d'institutionnalisations locales. S'il doit lutter pour reprendre Ia main, il perdra en liberte de manoeuvre et ceei changera Ia vision qu'il a de sa classe: il Ia verra active certes, mais plus éclatée, hétérogène, plus lente et les perceptions négatives peuvent l'emporter sur les positives, le mettant mal à 1'aise dans sa position d'enseignant[6].

On pourra dire bien sur que de tels phénomènes sont déjà présents dans une certaine mesure dans toute séance de travail en groupes, que les enseignants y sont donc déjà partiellement adaptes. Ce serait méconnaitre me semble-t-il le quotidien de l'enseignement.

Intégration de 1'outil informatique et formation des enseignants

Nous avons dans les paragraphes précédents, aborde un certain nombre de questions qui nous semblaient devoir être prises en compte lorsque l'on s'interroge sur les potentialités de 1'outil informatique pour l'enseignement des mathématiques et sur les problèmes d'intégration de cet outil. La formation des enseignants est Ia clé de 1'intégration et nous voudrions y revenir dans ce dernier paragraphe en nous appuyant sur Ia

[1] **Nous né faisons ici que dècrire des changements incontoumables Que Ia classe que voit ici 1'enseignant soit plus ou moins vnue que celle qu'ü voit usuellement, que õnaJement ü puisse être bénéfique qu'il né puisse pas Ia manoeuvrer à sa guise, n'entre pas dans notre propôs.**

thèse en cours de M. Abboud. Elle s'y est interrogée au départ sur les raisons qui conduisaient un enseignant à accepter ou rejeter un logiciel (en se limitam à des logiciels exploitables a priori pour l'enseignement des symétries orthogonales et centrales au College) ainsi que sur le type de scénario qu'un enseignant était susceptible de construire avec un logiciel choisi. Les grilles d'analyse de logiciels publiées dans Ia littérature 1'ont dans un premier temps frappée par leurs caractéristiques essentiellement externes (caractéristiques techniques, ergonomiques. de communication...). Sans aucun doute, le souci d'embrasser une large catégorie de logiciels avec une même grille n'y est pas étranger. mais ce faisant toute composante didactique tend à disparaitre de 1'analyse. Pour les besoins de Ia recherche, elle a donc elabore une grille plus spécifíquement adaptée à 1'analyse de logiciels pouvant être utilisés pour un premier enseignement des symétries au niveau College, incluant des éléments d'analyse didactique ainsi que, en cas d'acccptation. Ia prévision de scénarios et des éléments de comparaison avec des scénarios papier/ crayon.

Cette grille a été expérimentée avec différents publies ayant des rapports différents à Ia didactique d'une part, à 1'outil informatique d'autre part. Elle presente sans aucun doute des imperfections mais elle a donné des résultats trop radicaux pour être imputables à ces seules imperfections. Les résultats obtenus opposent en effet Ia facilite avec laquelle les personnes interrogées entrent dans 1'analyse externe de logiciels et Ia difficulté avec laquelle ils entrent dans une analyse plus didactique. A ce niveau. beaucoup de questions restent sans réponse ou sont éludées. Cest le cas aussi pour les questions demandam danticiper des difTcrcnccs au niveau du fonctionnement de Ia classe entre fonctionnement informatique et fonctionnement papier/crayon. De plus, on né note pas de différence sensible sur les pôles didactique et anticipation entre des enseignants interrogés à Tissue d'une formation à 1'outil informatique (né portant cependant pas directement sur les logiciels consideres) et des enseignants se preparam à Ia suivre.

Ceei a conduit M.Abboud, dans une seconde phase de Ia recherche, à essayer de cerner, à travers Ia littérature et des entretiens avec quelques enseignants impliques depuis plusieurs années dans des taches de formation, les pratiques de formation dans ce domaine et leur évolution. Mome si l'on peut noter une évolution, il semble bien que le modele toujours dominant consiste à présenter des logiciels que l'on estime intéressants pour l'enseignement, à familiariser les enseignants avec leur utilisation. puis à leur proposer des situations d'enseignement qu'on a soi-même conçu et/ou fait fonctionner et qui "tournent bien", sans réellement chercher à préciser ce qui récllement les fait marcher, se préoccuper de savoir quel niveau d'expertise elles exigent de Ia part de 1'enseignant qui doit les gérer, ou s'interroger sur leurs potentialités réelles en termes d'apprentissage. On proposera ensuite aux enseignants, si Ia durée de Ia formation le permet, d'essayer eux-memes ces situations dans leurs classes ou d'en construire de nouvelles et de les expérimenter, on organisera des séances de compte-rendu, mais sans pour autant fournir nécessairement des outils pour guider le recueil des observables et 1'analyse des expérimentations, sans attirer Ia vigilance sur tel ou tel point reconnu comme critique.

Il reste encore beaucoup de travail à faire, dans de domaine comme dans d'autres, pour articuler efllcacement recherche et formation.

Références bibliographiques

ABBOUD M., *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques: le cas de la symêtrie orlhogonale au College*, Thèse en cours, Université Paris 7.

ARTIGUE M., (1991), Analyse de processus cTenseignement en environnement informatique. *Petit.Y*. N° 26, 5-27, Ed.IREM Grenoble.

_________, (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognilive difficultics and tcaching practiccs, in The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, G.Harel & E.Dubinsky (eds), MAA Notes, Vol. 25, 109-132.

ARTIGUE M, ERVYNCK G. (eds), (1993), Proceedings of the Working Group 3, ICME 7, Quebec, 1992, University of Sherbrooke.

BROUSSEAU G., (1983), Etudes de questions d'enseignement, un exemple: la géométrie, Scminairc de Didactique des Mathématiques et de rinformatique de Grenoble, Ed. IMAG.

__________, (1988), Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 9.3, 309-338.

DAGHER A., (1993), *Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registresgraphique et algébrique de représentation desfonetions*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

DOU AD Y R., (1984), *Dialectique outil-objet et jeux de cadres: une réalisation dans tout le cursus primaire*, Thèse d'Etat, Université Paris 7.

DUVAL R., (1988), Graphiques et équations, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. I, 235-253, IREM Strasbourg.

GOLDENBERG P., LEWIS P, 0'KEEFE J., (1992), Dynamic representations and the Development of a Process Understanding of Function, in The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, G.HAREL & E.DUBINSKY (eds)., MAA Notes, Vol. 25, 235-260.

HAREL G., DUBINSKY E. (eds), (1992), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, Vol. 25.

KAPUT J., (1992), Patterns in Students' Formalization of Quantitative Patterns, in The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, G.HAREL & E.DUBINSKY (eds)., MAA Notes, Vol. 25, 290-318.

LEINHART G., ZASLAVSKY O., KAY STEIN M., (1990), Functions, graphs anf graphing: Tasks, Learning and Teaching, *Review of Educational Research*, Vol. 60, N°l, 1-64.

LABORDE C, (1994). Cabri-Géomètre constituam d'un milieu pour 1'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14.1/2, (à paraitre).

SCHOENFELD A., SMITH J., ARCAVI A., (1990), Learning: The microgenetic analysis of one studenfs evolving understanding of a complex subject matter domain, in R.GLAESER (Ed.), Advances in instructional psychology, Vol.4, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

TALL D., (1986), *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics*, Thèse, University of Warwick.

UENSEIGNEMENT CONSTRUCTIVISTE*

Beatriz S. D'Ambrosio et
Leslie P. Stefle**

Le modele de connaissance que Von Glasersfeld (1987) appelle constructivisme radical a établi ses origines dans 1'éducation mathématique à partir de 1980, et a eu son apogée dans 1'investigation de Ia nature de Ia connaissance mathématique et dans Ia méthodologie de recherche (Cobb, Steffc, 1983: Stefle. Cobb, 1988). Cest seulement récemment que 1'enseignement des mathématiques a été analysé par des constructivistes (Confrey, 1990; D'Ambrosio, Mewborn, préliminaire; Stefle, Tzur, préliminaire; Simon, 1992). En conséquence, Ia forme que prend l'enseignement des mathématiques dans une ligne constructiviste n'est pas encore déterminée. Beaucoup de constructivistes argumentem contre Ia notion d'existence d'un type d'enseignement appelé enseignement constructiviste (Konold, préliminaire; Simon, préliminaire; Janvier, préliminaire). L'argumentation Ia plus courante consiste à dire que chaque enfant construit un savoir indépendamment du type d'instruction utilisé dans le processus d'enseignement.

Mome sans être en désaccord avec cet argumentation, nous préférons dire que certains objectifs et actions du professeur peuvent fixer Ia nature des intcractions mathématiques des élèves et, par conséquent, de lcurs activités constructives. De toute façon, le professeur travaille toujours sous certaines conditions qui sont importantes pour notre définition de l'enseignement constructiviste. Ces condition peuvent refléter les limitations du savoir mathématique actuel de 1'élève aussi bien que les limitations de 1'action du professeur quand il crée certaines situations d'apprentissage. Le professeur pourra comprendre ces limitations à mesure qu'il examine le savoir mathématique de ses élèves. Le professeur qui étudie Ia construction mathématique de ses élèves et qui interagit avec eux dans un espace d'apprentissage dont le plan est base, au moins en partie, sur un modele des mathématiques de 1'élève, será appelé professeur constructiviste.

Un deuxième argument contre 1'idée d'un type d'enseignement appelé constructiviste se fonde sur Ia vision qu'un "bon enseignement" peut se produire même si le professeur né travaille pas dans une vision constructiviste du processus d'apprentissage (Kilpatrick, 1987; Konold, préliminaire). Encore une fois nous né sommes pas en désaccord avec cet argument, mais cela n'implique pas que nous né puissions pas definir un type d'enseignement qu'on puisse appeler constructiviste. Notre but dans ce travail est de commencer à caractériser le "bon enseignement" dans une ligne constructiviste. Nous né nous proposons pas de prescrire

* Dans ce travai! nous essayons de caractériser 1'enseigiiement constructiviste des mathématiques. Nous avons analysé ,its trois composantes de renseignement constructiviste que nous trouvons essentielles pour notre compréhension des acbons d'un professem constructiviste. Ces composantes tncluent Ia construcaon des mathématiques de 1'enfant par le professeur; Ia nature des activités utüisées par le professem pour definir 1'espace de 1'apprenussage, et le processus de communication entre professeurs et eleves dans une ambiance d'apprentissage constructiviste Notre but a été d'extraire quelques descnptions et ulustranons des composantes de l'enseignement constructiviste presentes dans nos expériences d'un *leachmg experiment* (une séquence d'épisodes d'enseignement) réalisé avec des enfants qui travaülaient dans le microcosme des fracúons. Ce projet a été finance par Ia National Science Foundation — NSF, n° RED-8954678. Toutes les opinions sont exclusivement des auteurs

•• Université de Geórgia, USA

les actions pédagogiqucs décrites et nous né garanlissons pas que de tellcs actions pcuvcnt assurer un bon enseigncnient. Nous pensons que c'cst Ia combinaison entre Ia manicre dont le professeur voit le processus dapprentissage et son action et son propre apprcntissage continu pendant Ia periodo denscignement qui nous permet de décrire le profil du professeur construcliviste. L'action du professeur est fonetion de ses connaissances, de ses crovances et de Ia confiance en soi. aussi bien que de son interprétation des actions et du Iangage des eleves.

Le projet des fractions

Dans cc travail nous décrirons quclqucs caractéristiques de Fenseignement construetiviste que nous considérons importantes et nous les illustrcrons par des épisodes d*enscignenicnt exlraits du projet "Childrcn's Conslructions of the Racional Numbcrs of Arithmctic". Nous Fappcllerons "Projet de Fractions". Le tcacliing experiment (une collcction d'cpisodcs denscignement) est un inslrunicnl de recherche que nous utilisons pour coinprcndrc les mathématiques des enfants et sa construction (voir Cobb, StcCTc, 1983). Lobjcctif principal du Projet des Fractions est de construire un modele des Operations mentalcs qui crécnt les nombres rationncls de rarithmétiquc. Dans ce but nous avons recherche les actions et Operations des enfants dans un microcosme appelé ST1CKS (bâlonncts). Toutcs les activités auxquclles nous nous référons dans ce iravail out etc proposécs aux enfants dans cc microcosme. Là, les enfants pcuvcnt operer Ia representaiion d'un bâtonnct de plusicurs manicres sur un modele lincairc. Parmi les Operations possiblcs. Fenfant pcut crécr, copicr, rasscmblcr. casser, marquer, couper, coloricr et mesurer. Le professeur peul activer ou freincr n'importc (aquelle de ces Operations, ce qui permet de manipulcr 1'cspace des actions possibles. Par exemple, supposons que Fobjectif d'unc lcçon soit d^ngager les enfants dans des situations qui exigent qu'ils fassent Festimation des fractions d'un bátonnet: il est probable que le professeur freinera Fopcration COUPER qui, une fois activéc, divise le bátonnet en parties égalcs. Les limitations de Fespace d'apprentissage ainsi produites par le defaut de certaines Operations mènent Fenfant à utiliser des actions et des Operations les plus primaires pour Ia solution de Ia situation proposée. Ces solutions pcuvcnt révéler certains aspects importants des Operations mentales et des schémas utilisés par Félève

Nous pensons que pour comprendre Fenseignement construetiviste, il est importam d'expliquer notre action et notre interprétation pendant les épisodes de Fenseignement dans le cadre du Projet des Fractions. L'auto-reflexivité — c'est à dire Fapplication des príncipes du construetivisme à Fanalyse de ses activités — est une caractéristique importante du construcliviste (Steier, préliminaire) et bien sur. du professeur construcliviste. Nous décrirons trois autres aspects de Fenseignement construetiviste. D'abord nous illustrerons le processus par Icqucl le professeur construit les modeles des mathéinatiqucs de Fenfant pendant un épisode d'enseigncmcnt. Ces modeles sont constammcnt modifiés pendant le travail avec Félève et pendant Fanalyse retrospectivo des épisodes d'enscignemcnt. Puis nous décrirons le processus de communication entre les participants d'un épisode d'enscignement et Finfluence du modele des mathématiques de Félève construit par le professeur dans les activités utilisécs pendant Fépisode.

Les mathématiques de Félève

Comprendre le savoir comme quelque chose en état de constante évolution et d'adaptation, voilà cc qui caractérise Ia vision du construetiviste. Lhistoirc pcrsonncllc et cullurcllc des individus modele son interprétation des activités, ses expériences et ses inleractions sociales. La compréhension des mathématiques de ce point de vue, en acceptant ces interprétations mathématiques qui né sont pas cellcs typiquement acceptées par Ia communaulé mathématique formelle, est un des aspects les plus délicats que Fon rencontre quand on cherche à comprendre le construetivisme.

Pour un professeur, Ia necessite cfaccepter une autre mathématique, diflerente de Ia sienne, pendant un épisode d'enseignement est un passage extrêmement difllcile. Il peut être amené à découvrir que son savoir des mathématiques né 1'aide pas à comprendre Ia connaissance mathématique de certains eleves, ni non plus à détcrminer comment aider 1'apprentissage de ses eleves. Quand il compare sa connaissance mathématique à cellc de ses élèvcs. Ia scule chose qu'il peut dire est que releve semble né pas savoir. Durant presque toute son expéricnce avec les mathématiques, le professeur les a vécues comme une discipline inflexible et rigide, oú 1'apprenti essaie de comprendre quelque chosc qui lui est présentéc sans discussion, quelque chose qui est dans les livres.

Un professeur construetiviste a une vision três différente de ce qu'est le savoir mathématique. Pour lui le savoir mathématique de n'importe quel individu, y compris le sien, est toujours en évolution et en changement. Linterprétation par 1'élève d'une situation mathématique proposée peut varier beaucoup selon son histoire pcrsonnelle et culrurelle. Uacceptation du savoir de 1'élève comme des mathématiques legitimes, meme avec son apparence étrange et peu familière peut crécr des mathématiques de 1'élève três différentes de celles du professeur.

Uobjectif d'un professeur construetiviste est de développer un modele de savoir mathématique de ses élèves. Ces modeles sont três importants puisquils donnent une orientation à 1'action du professeur quand il conçoit différentes situations d'enseignemcnt. En travaillant avec un élève, le professeur cherche à formuler explicitement son savoir mathématique et à le modifier. L'élève communique son savoir mathématique au professeur sous forme d'action ou de verbalisation (une forme d'action). En réfléchissant sur l'action des élèves, le professeur peut développer une hypothèse sur ses construetions passées et presentes. Le modele construit par le professeur sur les mathématiques de 1'élève dépend de ses inférences extraites au travers du processus d'interaction sociale et est fortement influencé par son propre savoir mathématique (Kieren, préliminaire).

Les professeurs construetivistes participem à Ia vie mathématique des élèves et sont ainsi engagés à étudier activement les mathématiques de ceux-ci. Comme apprentis des mathématiques de leurs élèves, les professeurs font face à des moments de perturbation et de desequilibre conformément à Piagct. Ces perturbations se produisent quand les hypothèses du professeur sont contrecarrées par l'action des élèves. En d'autres termes. 1'enfant agit de façon inattendue par le professeur. Une résolution particlle de ces perturbations aboutit à une nouvelle action de Ia part du professeur, au für et à mesure qu'il reformule ses hypothèses et les confronte en de nouvellcs situations d'enseignement.

Le compte rendu suivant sert à illustrer Ia modification de 1'hypothèse d'un professeur pendant un épisode d'enseignement. Le professeur, Deborah, a travaillé avec Pamela e Raimundo pendant deux ans. Les deux enfants, au moment de cet épisode, étaient en quatríème année du cours primaire. Ces épisodes d'enseignement, dans le cadre du Projet des Fractions, se déroulaient pendant une heure par semaine hors des activités normales de classe. Dans cet épisode, Deborah demande à Pamela de résoudre un problòme, qui reflete déjà une hypothèse initiale: les diflicultés de ces enfants avec le travail de fractions étaient en relation avec le manque de richesse dans 1'usage du langage de fractions. Cet épisode d'enseignement vise à aider les enfants à travailler avec un langage de fractions pour exprimer certaines situations et Ia relation entre les bâtonnets de différentes tailles. La façon de décrire les bâtonnets a été développée avec les enfants dans des épisodes antérieurs. Les enfants créent un bâtonnet qui sert d'unité et en construisent d'autres de tailles différentes et les idcntificnt par le numero de bâtonnet-unité utilisé dans leur construction. Par exemple, le bâtonnet-6 est un bâtonnet construit en répétant six fois le bâtonnet-unitc et en rassemblant les six morceaux.

Compte-rendu 1 (7:20-11:10; 29/10/92)

D: Qu'est-ce que tu aurais, si tu rassemblais deux bâtonnets-6?
P: Un bâtonnet-12.
D: Tu peu.x construire un bâtonnet-12 en utilisant deux bâtonnets/6? (Pamela construit le bâtonnet-12, en copiant et rassemblant deux bâtonncts-6. Deborah colorie un des morceaux)
D: Cette partie est à moi et celle-là est à toi. Quel nom donnerais-tu à Ia tienne?
P: Un demi (Ia moitié).
D: OK. Qu'est-ce que tu auras si tu rassemble trois bâtonnets-3?
P: 9(neuí).
D: OK. Construis maintenant le bâtonnet-9 (Pamela construit le bâtonnet-9).
D: Cette partie est à moi, ou alors, Ia partie violctte est Ia tienne. Ia rose est à moi et Ia bleue est à Dr. Stcffe. Quel nom donnerais-tu à ta part?
P: Un tiers.
D: Quel nom donnerais-tu à Ia mienne?
P: Un tiers.
D: Quel nom donnerais-tu à Ia mienne et à Ia tienne ensembles?
P: Je né sais pas.
D: Combienj'enai?
P: Un tiers.
D: Combien en as tu?
P: Un tiers.
D: Et combien on a ensemble?
P: Deux tiers.

Pendant tout 1'épisode, Deborah a renforcé 1'usage du langage de fractions avec les enfants. En meme temps elle a cherché à lier le langage de fractions et le langage naturcl des enfants, comme illustré au compte-rendu 2, qui est Ia continuation du compte-rendu 1.

Deborah demande à Pamela ce qu'on obtiendrait si on rassemblait quatre bâtonnets-2. Pamela dit: "un bâtonnet-8". Deborah poursuit, en demandant à Pamela qu'elle construise ce bâtonnet, ce qu'elle fait de suite. Après quelques questions qui né posent pas de difficultés à Pamela, on passe au dialogue suivant.

Compte-rendu 2 (11:10-14:04; 29/10/92)

D: Si on rassemblait trois de ces parties, combien en aura-t-on? (en montrant les trois-quarts du bâtonnet-8)
P: Un tiers.
D: Pourquoi?
P: Ce sont trois des quatre parties.
D: Quelle est sa taille?
P: Trois du deux.
D: Et c'est combien, trois du deux?
P: Un quatre et un deux, ce qui fait un tiers.
D: Combien c'est un quatre et un deux ensemble?
P: Huit, c'est à dire, six.
D: Alors, on a six parts des huit parties.

Pamela semble être attentive aux trois parties et essaie de nommer une des parties. Le dialogue entre les deux a amené Deborah à questionner son typothèse de travail. Deborah s'est forme une nouvelle hypothèse de travail, basée sur les commentaires de Pamela, selon lesquels Ia taille de chacune des quatre pièces (deux bâtonnets-unités) a brouillé Ia situation pour Pamela. Pamela a forme, en effet, quatre parties de taille deux, puis s'est rapportée à trois des quatre parties. Nous proposons deux explications du pourquoi elle s'est reportée à "trois des quatre parties" comme un tiers, puis s'est reportée à "trois des deux" comme un quatre et un deux. Premièrement, il est possible qu'elle ait considere le nombre entier comme "trois des deux", au lieu de le considércr comme huit. Deuxièmement, elle peut avoir créé trois nouvelles unités—une de valeur quatre et les deux autres de valeur deux, et appelé une des parties un tiers. Quoi qu'il en soit, Ia situation Ta amenée a utiliser le terme un tiers.

Dcborah, de son côté, à Ia recherche d'unc explication de ce que concevait Pamela, a essayé de se servir de Ia perspective de celle-ci, sclon laquelle il y avait une partic de valeur quatre et une autre de valeur deux pour essayer de redefinir Ia situation pour Pamela et 1'orienter vers 1'emploi du six-huitième mais sans succès. Pamela était süre pendant Ia durée de cette interaction que les trois pièces étaient, en effet, un tiers du bâtonnet-8, ce qui a créé une perturbation chez Deborah, qui n'avait aucune explication basée sur son hypothèse de travail, de ce qu'était 1'origine de diflícultés de Pamela dans le langage des fractions. Pamela avait déjà montré qu'elle pouvait utiliser le terme trois-quarts pour se référer à trois des quatre parties égales.

Hormis le fait que ses doutes sur 1'usage du langage (l'hypothèse de travail de Deborah au long de plusieurs séances) servent d'orientation à tout son travail avec les enfants, elle né perd pas de vue 1'hypothèse plus generale du projet, selon laquelle les schémas de travail avec les fractions sont des modifications des schémas de travail avec 1'unité.

Les schémas de travail des enfants avec les nombres réels offrent une ouverture pour comprendre leur savoir mathématique et c'était Tobjectif même du projet que de baser nos épisodes d'enseignement sur ce qui était révélé par cette ouverture.

Communication

Il y a plusieurs formes de communication verbale et non verbale qui se présentent pendant un épisode d'enseignement. Cest à partir de ces formes que les professeurs retirent 1' information qui conduit aa\ modeles des mathématiques de 1'enfant. La communication en tant qu'action produit des perturbations chez le professeur aussi bien que chez 1'élève. Nous nous referons ici au travail de D'Ambrosio (1991) dans lequel il décrit Ia communication comme une action commune. Pendant une interaction sociale, nombreuses formes d'action des participants se présentent. Qttelques d'entre elles sont intenlionnellcs et dirigées aux autres engagés dans 1'interaction. D'autres formes né sont pas intentionnellcs, mais transmettent nombre d'informations et de messages. Par exemple, un enfant qui s'assoit et pense en silence sur un problème pendant un épisode d'enseignement, peut né pas avoir comme objectif de transmettre qu'il est engagé dans le problème, mais le professeur peut concevoir ce que l'élève pense et anticiper un résultat. Même non verbalisée, il existe un type d'action commune entre le professeur et 1'élève, tout au moins dans le fait que Ia situation posée par le professeur a été acceptée par 1'enfant comme un problème. Un "bon professeur" déduit par inférence ce que pense 1'enfant et se met en harmonie avec Ia pensée de 1'enfant. Dans un autre exemple, 1'enfant se manifeste quand il résout les situations proposées. Dans ces cas, le professeur peut imaginer le sens de Ia manifestation par 1'élève et pourquoi 1'élève a choisi cette manifestation et non une autre quelconque. Le professeur peut poser une autre situation qui reflete ses hypothèses en cherchant à expliquer Ia necessite pour 1'enfant d'agir de cette manière.

Une action verbale ou non verbale transmet une signification et un message seulement si 1'autre individu s'engage à les interpréter. Ce sont ces situations que D'Ambrosio considere comme ayant une action commune. Les actions pcuvent né pas ctre identiques, mais présentent une forme de compréhension reciproque. Malheurcusement, peu de ce qui arrive dans une classe de mathématiques peut être considere comme action commune, c'est à dire, comme communication. Dans de nombreux cas, les actions verbales et non verbales des professeurs né sont pas écoutées ni même interprétées par les élèves. De même, les actions et verbalisations des enfants né sont pas recherchées, utilisées, interprétées ni même font partie d'une interaction sociale.

La compréhension de ce qu'est l'enseignement constructiviste implique Ia compréhension du processus de communication. Élèves et professeurs créent, pendant Ia communication, des signifiés soutenus par un répertoire d'actions communes et d'histoires personnelles. Interprétation et signifiés sont lies aussi aux expériences et histoires communes aux participants du processus de communication. Dans ce sens, le professeur constructiviste va au dela des observations et devient un participam actif et interprete des épisodes d'enseignement. La compréhension de 1'histoire des expériences communes au professeur et aux élèves est cruciale pour 1'interprétation de Ia communication entre eux.

Nous aimerions renforcer 1'usage de 1'action comme une forme de communication qui n'a pas besoin du langage. Souvent, pendant le déroulement du Projet des Fractions, nous avons eu des évidences de 1'usage fréquent d'une action par les enfants qui reflétait leur compréhension d'un problème sans qu'ils puissent utiliser le langage pour expliquer leur action.

Dans le compte-rendu suivant, Pamela résout un problème proposé par Dcborah, mais clle est incapable d'articuler clairement sa stratégie de résolution ou son raisonnement pas à pas vers Ia solution. Dcborah se sert de Ia voix de Pamela pour essayer daider Raimundo à comprendre Ia situation mais, en fin de compte, il na toujours pas compris Ia solution.

Compte-rendu 3

D: Le bâtonnet-8 est les deux tiers de quel bâtonnet?
P: 16. Cest deux tiers... (elle pense un peu et répond) 12.
D: (Attend un moment pour que Raimundo ait une chance de penser. Comme il hesite, Dcborah suggère qu'il mette le bâtonnet sur 1'écran).
R: (Met le bâtonnet-8 sur 1'écran).
D: Ce bâtonnet est les deux tiers d'un autre.
R: Je né sais pas.
D: Pamela, tu pcux nous expliquer comment tu est arrivée à Ia valeur 12?
P: Eh bien, quatre plus quatre. ça fait 8.
D: Et qu'est-ce que ça nous indique?
P: (Pense un peu) Je né sais pas.
D: Si le bâtonnct-8 est égal à deux tiers, combien vaut le bâtonnet-4?
P: Si le bâtonnet-8 est égal à deux tiers, c'est combien le bâtonnet-4? Un tiers?
D: Oui, est-ce que ça tient, Raimundo?
P: Tu as deux quarts plus un, ça fait trois.

Pamela avait assimile Ia situation proposée par Dcborah en utilisant ses schémas d'opérations avec les fractions. Pamela est süre de ce qu'ellc a fait (eh bien, quatre plus quatre font 8) mais n'arrive pas à analyser ses actions (et qu'est-ce que ça nous indique? Je né sais pas). Elle n'arrive pas à extérioriser verbalement pourquoi elle a raison, c'est à dire, Ia Structure des ses actions est juste, mais elle a Ia sensation que son action est juste. Certains diront que sa résolution est intuitive. Nous disons qif clle na pas conscience de Ia necessite de Ia logique interne des ses Operations. Mais Deborah, par ses observations a pu inférer que Pamela a construit, en effet, une solution pour le problème proposé.

Dans cet exemple de Ia richesse de 1'action, nous croyons que Pamela est consciente du résultat de ses Operations, mais pas du comment elle a opéré pour produire ce résultat. Dans ce cas, il naurait pas pu y avoir de richesse du langage pour se référer à cet action. De plus, Raimundo rTarrive pas à s'engager dans Ia communication avec Pamela. Il a certainement interprete le commentaire de Pamela (tu as deux quatre et plus un, ça fait trois) en utilisant ses schémas opératoires, mais ces schémas n'étaient pas ceux qu'il fallait pour 1'amener à comprendre ce que Pamela avait fait. Il n'avait pas encore produit sa propre résolution qui lui aurait permis d'interpréter les Operations de Pamela et de les comparer à sa résolution.

Nature des activités

Les activités constituent un moyen pour réaliser une action, créer une action commune. Dans un épisode cTenseignement constructiviste, les activités servent de moyen pour inciter 1'action et conséquemment Ia communication, à condition que des chemins s'ouvrent pour Ia communication entre les enfants et professeurs. Un professeur constructiviste modele les activités en prenant pour base son modele des mathématiques des enfants.

Les activités utilisées dans le cadre du Projet de Fractions ont été créées pour atteindre plusieurs objectifs. Premièrement, elles servent à révéler les mathématiques des enfants. Au für et à mesure que les enfants s'engagent dans les activités proposées par le professeur, celui-ci peut observer et réfléchir sur leur action et les siennes. Au für et à mesure que le professeur se communique avec les enfants dans 1'espace créé par le microcosme, il crée et reformule ses hypothèses sur les mathématiques des enfants. De nouvelles activités sont formulées pour tester les hypothèses.

Deuxièmement, les activités servent à tester Ia zone de construction potentielle de releve. Cette zone de construction potentielle est une hypothèse de travail qui indique ce que le professeur pense que 1'enfant pourra construíra en prenant pour base le modele de mathématiques de celui-ci. Le compte-rendu suivant montre comment Deborah concevait une activité qu'elle croyait appartenir à Ia zone de construction potentielle de Raimundo. (Note: Pamela avait déjà résolu une activité scmblablc indépendamment de Raimundo).

Compte-rendu 4 (5:35-11:19; 11/12/92)

D: Je vais construire un bâtonnet qui soit les deux tiers d'une autre. (Deborah dessine un bâtonnet-6 sur 1'écran). Quelle est Ia taille du bâtonnet le plus grand?
P: 18
D: Celui-ci (en montrant le bâtonnet sur l'écran) est les deux tiers d'un autre plus grand. De quelle taille est le bâtonnet le plus grand?
P: et R (pensent pendant un moment.)
P: Répète, s'il te plait.
D: Ce bâtonnet-6 est les deux-tiers d'un autre bâtonnet. Celui-ci est les 2/3 de quel bâtonnet? Raimundo, as-tu une idée?
R: Un bâtonnet de 18 petits morceaux... (apparemment il se sert du commentaire initial de Pamela.)
D: D'un bâtonnet-18.
R:Oui.
D: Pourquoi?
R: Parce que... (il hesite et né répond pas.)
D: Si cette partie correspond à deux tiers, tu pcux me dire ce que c'est un tiers?
P: Cest... (en montrant le bâtonnet-3.)
D: Tu peux me le montrer, en le construisant sur 1'écran?
P: (Pamela met le bâtonnet-3 à côté du bâtonnet-6).
D: Tu es d'accord, Raimundo? Si le bâtonnet rose est les deux tiers, alors le bâtonnet jaune est 1/3?
R: (Raimundo met le bâtonnet jaune sur le rose et die) Non, ça fait seulement deux. Il fallait en ajouter un autre (et met un bâtonnet jaune au bout)... alors ça serait juste.

D: Qu'est-ce que tu obtiendrais si tu ajoutais le jaune de ce côté?
R: Hmmm... J'obtiendrais un bâtonnet... Qu'est-ce que ça ferait?
D: Pamela, dis-nous pourquoi le bâtonnet-3 correspond à 1/3, alors que le bâtonnet-6 correspond à 2/3?
P: Parce que 6, non, 3 fois 2 font 6, alors 2 trois font 6.
D: Raimundo, ça a du sens pour toi?

Deborah continue d'expliquer, mais Raimundo communique par des expressions corporelles et verbales qu'il né comprend pas. Pamela, de son côté, peut verbaliser sa résolution, mais pas facilement.

On observe une nette dissonance entre Ia paire d'élèves. Pamela semble capable de résoudre le problème, mais Raimundo n'y parvient pas. L'inhabileté de Raimundo à résoudre Ia situation a produit initialement un conflit chez Deborah. La question de celle-ci, "si ça correspond à 2/3, tu peux me dire. ce que c'est qu'un tiers?" a été une tentative de modifier Ia situation vers Ia recherche d'une activité dans Ia zone potentielle de construction de Raimundo. La difficulté de Raimundo, même dans cette nouvelle situation, a conduit Deborah à formuler un modele de travail bien plus explicite de Ia compréhension de Raimundo sur les fractions. Les schémas opératoires de Raimundo semblent irréversibles, tandis que ceux de Pamela semblent être réversibles. Comme tout modele de travail represente une hypothèse, Deborah, par analyse rétrospective, a prepare une modification des activités de façon à assouplir les diílicultés de Raimundo. Le compte-rendu suivant montre qu'elle n'est pas certaine que les schémas de Raimundo sont vraimcnt irréversibles.

Compte-rendu 5 (13:25-16:07; 17/11/92)

D: Quel bâtonnet pourrait-on répéter 3 fois pour obtenir le bâton 18?
R: 3 fois 6 (il dessine trois bâtonnets-6).
D: Alors, c'est le bâtonnet-18. Si tu peints un des morceaux, qu'est-ce que tu auras peint?
R: Hm... (il hesite un peu)... un tiers.
D: Et si tu peignais les deux premiers morceaux?
R: Deux tiers.
D: Alors, comment un tiers et deux tiers correspondent-ils entre eux?
R: (il hesite) oui... je né sais pas.
D: Quelle est Ia taille de 2 tiers comparée à un tiers?
R. Cest le double.
D: Alors, si je te donne un bâtonnet et je te dis que c'est un tiers d'un autre quelconque. tu pourrais construire les deux-tiers?
R: Oui, on n'a qu'à en ajouter un autre ici.
D: Alors, fais-le toi.
R: (Raimundo le fait correctemenf).
D: Si je pose Ia question à 1'envers? Si je te donne un bâtonnet de 2/3 et je te demande d'en construire un autre de 1/3?
R: Ah! Je prendrais deux morceaux (sur 1'écran il y a un bâtonnet séparé en 3 morceaux égaux. Raimundo rapproche ce problème d'un autre qu'il a déjà rcsolu et montre 1/3 sur une figure, oú on voit 3/3)
D: OK. (Elle efíace tout 1'écran et dessine un nouveau bâton, entier). Et si je te dis que celui-ci est les 2/3, comment tu construirais un 1/3?
R: Je le diviserais en 3 parties.
D: En trois?
R: Oui, pour obtenir des tiers.

Raimundo, malgré les modifications faites par Deborah, né raisonne pas encore de façon réversible. Il né semble pas capable de construire le nombre entier à partir de Ia fraction. Même s'il arrive à résoudre avec succès Ia situation oü Deborah lui demande qu'il utilise une fraction unitaire pour reconstruire le nombre entier en ôtant le morceau donné. il semble incapable de partir d'une fraction non unitaire, construire Ia fraction unitaire et reconstituer le nombre entier. A ce moment, Deborah se persuade que Ia situation restera sans solution pour Raimundo, au moins temporairement. Le prochain pas de Deborah será de chercher à expliquer pourquoi cela arrive, ce qui pourrait améliorer encore son modele des schémas de fraction chez Raimundo. Il faut noter qu'il n'est pas suffisant de dire que ses schémas sont irréversibles dans Ia formulation du modele. Il faut ajler au dela et spécifier les Operations qui composent ses schémas et le niveau d'abstraction oü elles semblent opérer, ce qui est au-delà de 1'objectif de ce travail (voir Steffe et Cobb, 1988, pour un exemple type d'explication auquel nous nous référons).

Nous utilisons ici les comptes-rendus pour proceder à quelques observations sur ce que nous considérons comme des caractéristiques importantes de 1'enseignement constructiviste.

Commentaires (Inales

Nous sommes d'accord avec Edith Ackermann (préliminaire, p.2) quand elle dit: "Je crois que l'enseignement constructiviste est un maillon diiTicilc à comprendre".

Lessence du dilemme du professeur reside dans Ia question suivante: comment un professeur peut donner raison à un élève (Duckworth, 1977) en appréciant Ia nouveauté et Ia consistance de sa pensée, et en même temps, donner raison aux spécialistes, dont Ia pensée coincide avec les idées les plus avancées dans ce domaine (Ackermann, p. 1).

Ce dilemme est partiellement résolu par Ia réalisation explicite du fait que c'est le professeur qui donne raison à Ia pensée de 1'élève. Autrement dit, dans Ia perspective du professeur, les mathématiques de 1'élève sont construites à partir des éléments perceptibles par le professeur. Nous comprenons les mathématiques de releve comme un système conceptuel tenu par le professeur et qui, quand appliqué à un élève en particulier (ou à des élèves en particulier), forme une explication des mathématiques de cet élève (ou de ces élèves). La compréhension de ce fait est importante quand on considere le dilemme proposé par Ackermann.

Nous acceptons le fait que nos élèves ont un savoir mathématique propre, qui est different du notre. Mais ce que nous pouvons faire de mieux, c'est formuler un modele de son savoir base sur les éléments qui nous sont perceptibles. Nous né pouvons pas le connaitre indépendamment de notre propre manière de connaitre et comprendre. Ce modele n'existe pas à priori, il faut que nous le construisions et cette construetion implique que nous voyons certains élèves d'une certaine manière dans un contexte determine.

Qu'est-ce qui rend different notre connaissance des mathématiques de l'élève de notre propre savoir? Si un élève résolvait n'importe quel problème de fractions qifon lui proposait, il n'y aurait aucune raison de faire Ia distinetion entre le savoir de 1'élève sur les fractions et notre propre savoir. Les limitations existantes, comme celles des comptes-rendus 2 et 5 que nous avons vécues comme professeurs en interaction avec nos élèves nous forcent à faire cette distinetion. Nous trouvons des limitations semblables à mesure que les élèves cherchent à résoudre les activités qu'on leur propose sans notre intervention.

Nous né saurions pas cependant que ces limitations sont nécessaires si nous n'essayons pas de neutraliser les perturbations qui nous arrivent, quand les élèves n'arrivent pas à résoudre les situations que nous leur proposons. Nous modifíons les situations, demandons aux élèves qu'ils expliquem leur façon de penser aux autres élèves et nous créons des nouvelles situations d'enseignement. Ces interventions nous servent pour essayer de modifier les schémas daction et d'opération des élèves. Comme professeurs construetivistes, il faut que nous nous rappelions que ce sont les élèves qui doivent faire les modifications de leurs schémas, indépendamment de nos actions. D'une certaine façon nous, les professeurs, résolvons nos problèmes seulement à partir du moment oú les élèves résolvent les leurs.

Essayer d'aidcr 1'élève à s'aider lui-même est bien plus complique que de lui dire ce qu'il doit faire (ce que nous considérons extrêmement improductif). Même si nous né 1'avons pas illustré de façon adéquate. nous avons cherché pendant les périodes d'enseignement à organiser les activités proposées aux élèves de façon à ce qu'elles se trouvent à Ia limite du savoir de 1'élève. Nous les organisons de façon qu'elles puissent contribuer aux modifications des schémas des élèves. Nous considérons notre savoir inaccessible à nos élèves, mais c'est à nous quMncombe Ia rcsponsabilité d'apprendre commcnt agir comme professeurs pour créer un milieu apte à Ia communication. Dans ce sens, nous voulons reconsidérer le dilemme d'Ackermann.

Uesscntiel du dilemme du professeur reside dans Ia question suivante: comment un professeur peut donner raison à un élève en appréciant Ia nouveauté et Ia consistance de sa pensée, et en même temps donner raison à son propre savoir mathématique?

Malgré tout le travail qui a déjà été fait et qui cherche à spécifier les mathématiqucs des élèves, elles né sont pas prctes pour aucun professeur. Il est profitable de lire les travaux et de se communiquer avec les autres sur les formulations des mathématiques des élèves. Mais il est essentiel que chaque professeur entre en interaction avec ses élèves de façon à apprendre leur façon et leurs moyens d'opércr et connaítre. Un système conccptuel que nous appelons les mathématiques de 1'élève doit être construit sur 1'interaction avec 1'élève. Le professeur qui cherche à déterminer tout ce qu'il peut sur Ia pensée mathématique de ses élèves peut être appclé professeur construetiviste et le type d'activité qu'il utilise à cette fin, enseignement construetiviste. Pour nous, le dilemme, même modifié, disparait quand les mathématiques de 1'élève sont considérées comme mathématiques legitimes.

Dans 1 'enseignement construetiviste nous travaillons sur Ia proposition selon laquelle les mathématiques sont le résultat des Operations mentales. De ce point de vue, on né peut pas les voir comme une discipline élitiste réservée aux élèves qui ont du talent. Les mathématiques doivent être considérées une activité humaine, au même titre que le langage ou Ia musique. L'objectif de 1'enseignement construetiviste est de comprendre cette activité et ses résultats.

Rcfcrences bibliographiques

ACKERMANN, E. Construction and transference of meaning through form. In: STEFFE, L.P., GALE, J. (Eds). *Constructivism in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

COBB, P, STEFFE, L.P. The constructivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* n. 14, p.84-94, 1983.

CONFREY, J. What constructivism implies for teaching. In DAVIS, R. B., BAUER, CA., NODDINGS, N. (Eds.), Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education,* Reston, p. 107-122, 1990. Monografia n.4.

D'AMBRÓSIO, U. *Severa! dimensions of science education:* a Latin American perspective. Santiago: REDUC, 1991.

D'AMBRÓSIO, B., MEWBORN, D. Children's construction of fractions and their implications for classroom instruetion. *Journal of Research in Childhood Education,* [199-].

DUCKWORTH, E. *The having ofwonderful ideas, and other essays on teaching and learning.* New York: Teacher's College Press, 1987.

GLASERSFELD, E. von. *The construction ofknowledge:* contributions to conceptual semantics. Seaside, CA: Intersystem, 1987.

JANVIER, C. Constructivism and its consequences for training teachers In: STEFFE, L.P., NASHER, P. (Eds.). *Theories of Mathematics learning.* Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

KIEREN, T. Orthogonal reflections on computer microworlds, constructivism, play, and mathematical understanding. *Journal of Research in Childhood Education,* [199-].

KILPATRICK, J. What constructivism might be in mathematics education. In: ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 11, 1987. Montreal. Proceedings. Montreal, 1987. p.3-27.

KONOLD, C. Social and cultural dimensions ofknowledge and classroom teaching. In: STEFFE, L.P., GALE, J. (Eds.). Constructivism *in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

SIMON, M. Assessing teacher's development of a constructivist view of learning. Teaching and Teacher Education, n.8, p. 187-197, 1992.

__________. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* [199-].

STEFFE, L.P., TZUR, R. Interaction and children's Mathematics. Journal of Research in Childhood Education, [199-].

STEFFE, L.P., COBB, P *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer, 1988.

STEIR, F. From universing to conversing: an ecological constructionist approach to learning and multiple descríption. In: STEFFE, L.P., GALE, J. (Eds.). *Constructivism in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum, [199-]

EVOLUTION DU RAPPORT AU SAVOIR EN MATHÉMAT1QUES À UÉCOLE PRIMAIRE: une chronique en calcul mental

Régine Douady*

Introduction

Dans cet article, je m' interesse au rapport entre ce que le maitre se propose d'enseigner en mathématiques et ce que les eleves auxquels il s'adresse en classe sont susceptibles d'apprendre effectivement. Les mots enseigner, apprendre, savoir peuvent recouvrir diflerents sens. Je prcciserai le sens que je leur donne.

Toutefois en ainont des choix d'enseignement se pose une question cruciale, d'ordre sociologique mais qui conditionne le sens des actions didactiques envisageables.

Quelle est Ia place du savoir à 1'école pour 1'enseignant, pour les élèves? Est-il un enjeu de Ia relation didactique?

Dans Ia vie réelle, on sait bien que Ia réponse à ces questions est complexe et né peut s'exprimer en "tout ou rien" ou en "oui, non". Toutefois, dans ce qui suit, j'ai choisi de repérer et présenter les diflerents cas sclon Ia tendance principale.

Dans Ia premicre partie, j'envisage les effets sur les choix et decisions des enseignants suivant que le savoir mathématique est ou n'est pas le principal enjeu de Ia relation didactique. Dans Ia deuxième partie, je décris un exemple de réalisation didactique au cours de laquelle le sens de 1'école et en particulier le rapport au savoir mathématique évolue chez les élèves.

Le savoir mathématique dans Ia relation didactique

Qu'est ce que savoir des mathématiques? Qu'est ce qu'apprendre?

Lorsqu'un maitre et des élèves se retrouvent dans une classe. Ia règle veut que le maitre soit là pour enseigner un certain savoir et les élèves pour apprendre ce même savoir.

Je precise ci-dessous le sens que je donne aux mots "savoir, enseigner, apprendre".

Savoir des mathématiques revêt un double aspect. Cest d'une part avoir Ia disponibilité fonctionnelle de certaines notions et théorèmes mathématiques pour résoudrc des problcmcs, interpréter de nouvelles questions... Dans un tel fonctionnement scientifique, les notions et théorèmes mathématiques ont statut doutil. Les outils sont inscrits dans un contexte, sous 1'action et le controle de quclquun (ou d'un groupe) à un moment donné.

Les situations ou les problcmcs dans lesquels évoluent des notions mathématiques sont générateurs de sens pour ces notions d'un certain point de vuc que nous appellerons sémantique. Ils sont aussi générateurs de relations qui peuvent ctre partiellement externes aux mathématiques ou bien toutes internes aux mathématiques. Savoir des mathématiques, c'est aussi identifier des notions et des théorèmes comme éléments d'un corpus seientifiquement et socialement reconnu. Cest aussi formuler des définitions, énoncer des théorèmes du corpus et les démontrer. Je dis alors que les notions et théorèmes mathématiques concernes ont statut d'objct. Ils sont décontextualisés, dépersonnalisés (même s'ils sont designes par un nom propre) et a-temporels.

Le travail de décontextualisation et dépersonnalisation participe à Ia capitalisation du savoir. Le travail de recontextualisation et le traitement des problèmes qui en découlent permettent d'en élargir le sens. Ceei rTempêche pas de capitaliser des pratiques ou des connaissances particulières, voire provisoires.

Les notions, tout comme les théorèmes, peuvent être travaillés, modifiés selon les situations ou ils sont sollicités et déboucher sur de nouvelles notions, à leur tour matière à travail, interprétation, modification, généralisation... Pour les théorèmes, on peut explorer le domaine de validité: imaginer des variantes, les démontrer, ou au contraire construire des contre-exemples pour s'assurer que cela n'est pas possible... Dans tous les cas, on est amené à mettre en relation des notions différenles. Ces mises en relation sont source de sens pour ceux qui les réalisent.

Ce travail mathématique peut se faire sur les outils dans le cadre d'un problème, comme sur les objets pour en élargir Ia portée sans finalité precise ou par souci esthétique. Il necessite de respecter un enscmble de règles internes aux mathématiques et différents modes d'expression. Il s'agit là d'une autre composante du sens que nous appellerons syntaxique.

Enseigner, pour un maitre, c'est créer les conditions qui produiront à terme du savoir chez ses élèves.

Apprendre, pour un élève, c'est s'impliquer dans une activité intellectuelle dont Ia conséquence est à terme Ia disponibilité d'un savoir avec son double statut outil et objet. Pour qu'il y ait enseignement et apprentissage, il faut donc que le savoir soit un objet important, voire essentiel d'échange entre le maitre et ses élèves, que le savoir soit un enjeu important de 1'école.

La réalité peut effectivement être celle-là, et le travail du maitre est alors de choisir des scénarios et mises en scène du savoir acceptables pour les élèves et efficaces par rapport à 1'objectif d'apprentissage. Diverses modalités sont possibles qui peuvent nécessiter des connaissances et des compétences internes ou externes aux mathématiques, et aussi des comportements sociaux voire moraux à organiser et rendre possibles par un travail peut-être externe aux mathématiques.

Mais Ia réalité peut aussi être tout autre. Le savoir peut être un enjeu pour le maitre, mais né pas 1'être du tout, pour un certain nombre d'élèves ou au contraire, être un enjeu pour certains élèves et né pas pouvoir 1'être pour le maitre. Alors deux éléments vont influencer les décisions du maitre et en tout cas, moduler ses attentes:

1) Que represente pour de tels élèves le fait d'aller à l'école, qu'est ce qu'ils attendent de l'école? Qu'est ce qu'apprendre?

2) Quelle est Ia proportion d'élèves de Ia classe pour laquelle le savoir n'est pas un enjeu de l'école (resp. est un enjeu)?

Dans une mêmc classe, il se peut que certains viennent à l'école pour acquérir des connaissances alors que d'autres cherchent à passer de classe en classe, aller le plus loin possible pour avoir un bon métier. D'autres viennent en classe pour apprendre à vivre, à se socialiser, à se débrouiller dans Ia vie. Peu importe qu'on y fasse des mathématiques ou quoi que ce soit d'autre. La discipline est le support de Ia communication avec le professeur pour répondre à sa demande, et d'ailleurs aux moindres frais (Charlot et Bautier, 1993).

Il est à noter, paradoxalement par rapport aux idées recues, que les mathématiques peuvent être un domaine paradigmatique de Ia communication à 1'école. Je prends comme référence pour cela les travaux de B. Charlot et E. Bautier (1993) dans lesquels les mathématiques sont três volontiers pris comme support par les élèves interrogas pour décrire leur rapport à l'école. Mon hypothèse est que cela est possible si elles sont 1'occasion d'un immense dcfi intellectuel compris comme tel pour ceux auquel ils'adresse...

Toutefois quelles que soient les intentions en arrivant à 1'école, chaque élève va plus ou moins réussir ou échouer dans son projet. Par ailleurs, sclon 1'histoire personnelle de 1'enseignant, sa propre reprcsentation et sa propre connaissance des mathématiques. sa conception de Tapprcntissage des mathématiques, sa volonté de convaincre et Ia force des contraintes auxquelles il est soumis, il tentera de dcfendre et faire valoir ses convictions ou au contraire, il essaiera seulement de survivre. Et parfois ce né será déjà pas si mal!

Ainsi, s'offrent à 1'enseignant deux possibilites dont il pourra user effectivement ou qu'il pourra moduler, selon les circonstances:

— soit il maintient son exigence sur le savoir comme enjeu de sa relation avec les élèves;

— soit il y renonce. Cest Ia situation que nous envisageons dans le paragraphe qui suit.

Le savoir mathématique n'est enjeu nipour 1'enseignant, ni pour les élèves

Dans ce cãs, pour que 1'enseignant puisse faire son métier d'enseignant et pour que les élèves fassent leur métier d'élèves, Ia classe est contrainte de vivre une fiction didactique: 1'enseignant "enseignera" quelque chose et les élèves "apprendront" quelque chose. Ceux-ci seront évalués et auront des notes acceptables dans leur ensemble.

Mais ou sont les mathématiques? Que peut faire le maitre? Une réponse usuellc est Ia suivante: proposer aux élèves d'exécuter des taches, taches qui sont parcellisées en sous taches plus élémentaires algorithmisées selon les besoins des élèves, jusqu'à ce qu'un pourcentage acceptable d'élèves de Ia classe ait répondu de façon assez satisfaisante.

La conséquence d'un tel choix est que le sens de 1'activité mathématique est sacrific. Les élèves né disposent d'aucun moyen de contrôler leur produetion autre que de refaire le travail dans les mêmes termes. L'expéricnce des enseignants est qu'un tel controle est peu fiable. D ailleurs Ia question de Ia légitimité même du controle se pose. Corriger, cest le travail du maitre. L'aspect magique prend le pas sur Paspect rationnel. La mémoire est de plus en plus sollicitée mais avec peu de possibilite de Ia strueturer. Le recours aux exercices répétitifs est incontournable. Les élèves comprennent de moins en moins pourquoi on les oblige à faire des mathématiques. Dans ces conditions, il faudra sans doute parcelliser et algorithmiser de plus en plus. Mais le maitre pourra faire avancer ses leçons. A condition de bien choisir les épreuves d'évaluation — de petites questions conformes aux habitudes — assez d'élèves pourront passer dans Ia classe supérieure. Pour 1'enseignant et les élèves, Ia survie est assurée.

Reste le sort des élèves qui refusent ce jeu ou le sort de ceux qui sont en échec malgré leur bonne volonté.

Le savoir mathématique est un enjeu pour I 'enseignant mais non pour les élèves

Là encore, deux éventualités se présentent du moins au début de 1'année scolaire:

— 1'enseignant accepte d'entrer dans Ia logique des élèves au moins provisoirement et s'attache progressivement à faire évoluer le contrat;

— 1'enseignant engage tout de suite le conflit avec les élèves.

Il s'agit pour Tenseignant d'obtenir une modification du rapport aux mathématiques d'une majorité d'élèves de Ia classe. Alors, ce peut être un três grand défi pour 1'enseignant qui va se trouver engagé, à travers les mathématiques, dans un processus de modification du rapport à 1'école, de Ia relation maitre-élève et des relations entre élèves.

En effet, une modification du rapport aux mathématiques necessite pour ces élèves, une prise de sens des contenus de cette discipline et Ia disponibilité doutils de traitement sous leur controle. Cela demande que ces élèves puissent entrer dans une activité intellectuelle et qu'ils soient convaincus que cela en vaut Ia peine non seulement du point de vue de leur insertion à 1'école mais aussi d'un point de vue social et culturel. Cela veut dire que 1'enseignant met ses élèves en situation davoir à faire des choix, à en tester les effets, les contrôler, éventuellement revenir sur les premiers choix et en faire d'autres... Lenseignant doit alors s'assurer que ses élèves disposent d'un minimum de moyens pour ce faire. Cela veut dire au niveau du contrat, que les élèves acceptent de s'engager dans un role d'acteur et né se réfugient pas dans 1'unique role d'exécutant. Cest dans ce contexte d'apprentissage que le jeu de Ia dévolution (Brousseau, 1990) est incontournable pour l'enseignant (Perrin, 1993). Pour G. Brousseau, "La dévolution est 1'acte par lequel l'enseignant fait accepter à 1'élève Ia responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert". Cela veut dire aussi que le maitre reconnait les efforts des élèves et les legitime, même sils né sont pas couronnés de succès. Cela veut dire qu'il inscrit les efforts de chacun dans un contexte collectif ou les impasses analysées des uns sont des indications de choix meilleurs pour d'autres et par là même susceptibles d'être producteurs.

Il est important de prendre en compte três tôt et sur plusieurs années Ia nécessaire interaction entre prise de sens et capitalisation du savoir. M. J. Perrin a particulièrement travaillé cette question avec des élèves de milieu populaireen difficulté. Disons pour l'instant qu'il s'agit là d'une situation difficile à gérer et à faire avancer avec des élèves qui ont pris 1'habitude, au fil d'années déchec, de refuser le jeu mathématique.

Alors l'enseignant peut tenter de jouer sur Ia dimension affective. Cela marchera peut être un moment, voire une année, avec plus ou moins de bonheur selon l'âge des élèves, mais il n'y a pas Ia stabilité suflfisante pour assurer Ia construction d'une masse critique de connaissances propre à enclencher un nouveau rapport aux mathématiques.

La tentation est grande pour l'enseignant de renoncer au savoir et de se rabattre sur un apprentissage de techniques et algoríthmes plus ou moins bien mémorisés mais qui éloigne dauiant les élèves de ce qui pourrait faire sens pour eux.

Le savoir mathématique est un enjeu pour certains élèves mais non pour le maitre

Woublions pas le risque de décevoir des élèves qui viennent à 1'école apprendre quelquechose, qui sont interesses par les mathématiques lorsque c'est 1'objet de 1'enseignement. Ces élèves peuvent alors rejeter le cours de mathématiques mais aussi 1'école s'ils ressentent implicitement qu'elle né remplit pas sa fonction. Ils peuvent aller chercher de Ia connaissance ou d autres centres d'intérêt ailleurs s'ils en ont Ia possibilite, pour le meilleur et pour le pire, ou bien entrer en conflit avec les enseignants. Cette situation n'est pas utopique. Elle se rencontre dans des classes três hétérogènes. Et là, même si un enseignant est en mesure de repérer Ia difficulté, seul il n'a pas de prise sur Ia situation.

Le savoir mathématique est un enjeu et pour le maitre et pour les élèves

Cest Ia situation favorable du point de vue des mathématiques. Toutefois, Ia construction du sens n'implique pas nécessairement Ia capitalisation du savoir. Sous certaines conditions, elle en favorisc Ia structuration, condition de sa mémorisation. Cest tout le travail qui doit être conçu à cet effet.

Champs conceptuels (Vergnaud, 1991), théoriedes situations (Brousseau, 1987, 1990), dialectique outil-objet, jeux de cadres et fenêtres conceptuelles (Douady, 1984, 1987b, 1992), représentations métacognitives (Robert et Robinet, 1989, ...) sont des outils pour comprendre et/ou organiser le rapport au savoir mathématique des diflérents acteurs du système didactique et aider les élèves dans leur effort pour conceptualiser le réel.

Certes de nombreuses questions didactiques restent ouvertes et les problèmes d'adéquation entre ce qui est enseigné d'une part et ce qui est effectivement appris d'autre part sont loin d'être réglés. Cela conduit à envisager les études réalisées et les résultats obtenus à Ia fois avec modestie et optimisme.

Un exemple d'évolution du rapport au savoir: calcul mental au CM2 — une chronique

Les cireonstances

Uhistoire se passe dans une école toute neuve de banlieue, dans un groupe de grands immeubles tout neufs à vocation sociale, habites en priorité par de grandes families en situation sociale et économique difllcilc

Le maitre est nouvellement nommé dans cette école. Mais c'est un maitre experimente et un membre de notre equipe de recherche en didactique des mathématiques à 1'école élémentaire depuis plusieurs années.

Il prend contact avec sa nouvelle classe en septembre et s'adresse à ses 24 élèves selon ses habitudes. Il s'aperçoit três vite que 11 des 24 élèves né peuvent pas lire un texte relativement simple: ils n'ont pas compris le príncipe de 1'articulation des syllabes. Ils ont autant de diflícultés à écríre. Dans ces conditions, commcnt faire des mathématiques?

Un bon point de départ possible: le calcul mental. Il sagit d'une activité mathématique essentiellement pensée, dont les séances sont, en general, courtes et périodiques (tous les jours environ 10 minutes). En fait, c'est un véritable processus qui évolue dans le temps. Son expression est principalement orale avec une"toute petite place pour 1'écrit, écrit auquel on pourrait renoncer au début du processus dans des cas particuliers. Cest par ailleurs une três bonne voie d'acccs vers 1'écrit comme nous le verrons plus loin. Le maitre en a une bonne expérience comme méthode pour contribuer à Ia conceptualisation des nombres et de leurs propriétés opératoires. Cest une voie qui nous semble tout à fait adaptée aux diflícultés de Ia classe, porteuse d'espoir pour 1'expérience que nous en avons.

La méthode prévue

— Le maitre propose oralement une opération à faire.

— Les élèves écoutent et mémorisent Ia question. Ils effectuent mentalement 1'opération.

— A un signal du maitre, ils écrivent Ia réponse sur leur ardoise, puis Ia lèvent pour que le maitre puisse lire les réponses de tous.

— Certaines sont justes, d'autres fausses. Cest Ia situation standard.

— Le maitre interroge, à tour de role, plusieurs élèves (aussi bien parmi les réponses justes que parmi les fausses) sur leur procede de calcul.

— Chacun doit être en mesure de décrire sa suite de calculs. Le cas échéant, 1'élève interroge peut repérer une erreur et Ia corriger oralement à condition dexpliquer ce qui n'al lait pas et pourquoi. Les autres élèves écoutent, prêts à intervenir en cas de contestation.

— Le maítre appclle alors les élèves qui auraient calculer autrement à se manifester (ils lèvent le doigt) et à exprimer leur méthode.

— Les élèves, de façon collective, au cours d'échanges verbaux (entre élèves) régulés par le maitre, comparem les méthodes, leurs avantages, inconvénients, la rapidité, les possibilités de contrôle.

Au cours de ce travail, beaucoup de propriétés des nombres et des Operations, des propriétés de 1'ordre et de Ia compatibilité avec les Operations sont à 1'oeuvre, explicitement dans les usages mais sans dénomination théorique. Ces propriétés interviennent avec leur statut d'outil pour guider les calculs, faire des choix, justifier les réponses ou repérer des incohérences. Il se développe des pratiques explicites de calcul et de controle des résultats. Par exemple, "je suis süre que son résultat est faux parce que 12x11 c'est plus grand que 12x10, et il trouve moins de 120".

Par ailleurs, 1'attention et 1'écoute mutuei le sont sollicitées et développées ainsi que Ia mémoire, de manière intense mais pendant une durée qui, en general, né dépasse pas 10 minutes ou 1/4 d'heure.

La réalisation

En fait, ce beau programme s'est trouvé en défaut des Ia première étape. Pour un grand nombre d'élèves, il né faisait pas partie de leur contrat qu'ils devaient écouter le maítre lorsque celui-ci s'adrcssait à eux. Le seul rapport au maítre qu'ils concevaient à ce moment lá était un rapport base sur 1'autorité du maitre et Fobéissance — de fait Ia désobéissance — des élèves. Face à cette situation, le maitre avait le choix entre trois possibilites:

— accepter leur logique et s'engager avec eax dans un rapport de force base sur l'autorité que lui conférait sa position institutionnelle;

—tenter de les convaincre avec des arguments bases sur sa représentation de 1'école, siège du savoir, et de ce que 1'école pouvait leur apporter, qu'il valait mieux pour eux changer de logique;

— accepter leur logique seulement dans un premier temps et faire des choix didactiques propres à faire évoluer leur rapport à 1'école.

La première possibilite risquait d'amener à des affrontements d'oü le maitre serait sans doute sorti vainqueur mais au détriment de toute connaissance pour un bon nombre d'élèves et une grande fatigue nerveuse pour le maitre. La deuxième possibilite était, pour beaucoup de raisons que je n'exposerai pas ici, vouée à 1'échec. Finalement, les décisions du maitre relèveront de Ia dernière possibilite. Comme on voit, ce n'est plus un choix, mais Ia seule voie possible de communication avec Ia majorité des élèves.

Les objectifs

De façon globale, il s'agit pour le maitre de travailler à un déplacement de Fenjeu de 1'école pour ses élèves et à une modification de ce qu'ils viennent y chercher implicitement. Lambition du maitre est de faire en sorte ,que les mathématiques deviennent, pendant les moments institutionnels reserves à cette discipline, Fobjet principal de Ia communication entre les élèves et lui-même, le centre d 'intérct dans les échanges entre élèves.

Il s'agit aussi, pour les membres de 1'équipe, de nous interroger sur les facteurs dont dépendent un tel déplacement d'enjeu, sur Ia possibilite de repérer des facteurs déterminants, c'est-à-dire tels qu'en agissant sur eux on modifie le rapport aux mathématiques et, en relation avec cela, sur les moyens dont peut disposer un maitre pour agir efficacement sur ces facteurs dans le sens qu'il souhaitc.

De façon plus precise, les objectifs du maítre sont les suivants:

— écoute et respect dans Ia relation entre le maítre et les élèves ou dans les relations entre élèves: quand le maitre s'adresse aux élèves ou qu'un élève s'adresse aux autres élèves, ceux qui né parlent pas écoutent et essaient de comprendre ce que dit celui ou celle qui parle;

— le contenu des échanges est essentiellement mathématique.

Dans ('exemple qui suit, nous décrivons une suite de leçons centrées sur le calcul mental. Il s'agit de travailler avec des nombres et des Operations. Le choix des consignes et leur filiation traduit des intentions didactiques soutenues par l'objectif de déplacement d'enjeu vers les mathématiques assorti d'un objectif d'acquisitions de connaissances du côté des élèves: connaissanccs numériques, mais aussi de compétences dans 1'usage des symbolcs. dans Ia pratique des raisonnements et dans une certaine responsabilité de Ia validité de ce qui est produit.

Les connaissances supposées des élèves, et qui dans un premier temps vont suffir au maitre, sont des noms de nombres et les noms des Operations.

Première consigne ou I 'autorité du maítre

M (le maitre): Je vais vous proposer des Operations et je vais demander à certains d'entre vous de répéter ce que j'ai dit. Je né vous demande pas de calculer ou de trouver un résultat, mais seulement de répéter exactement.

Tout élève peut répondre à Ia demande du maitre, sauf s'il refuse le jeu de 1'école. Et d'ailleurs brouhaha et protestations parmi certains élèves.

Le maitre persiste et signe.

M:14 multiplié par 4 Pierre, 5 multiplié par 22 Paul, 40 divise par 8 Marie...

Des demandes analogues vont se renouveler pendant quelques jours en complcxifiant à chaque fois un peu plus les énoncés.

Les variables de situation à disposition du maítre sont ici.

— Pour les mathématiques:

- le champ des nombres sollicités (entre 0 et 100 au début);
- Ia nature des nombres: entiers ou non entiers;
- les Operations: familièrcs, moins familières;
- Ia complexité de 1'énoncé (une opération, plusieurs Operations).

— Pour Ia gestion de Ia classe:

- le nombre d'élèves interrogés;
- Ia durée de 1 'activité chaque jour;
- le nombre de séances.

Deuxième consigne et changement de contraí

M: Je vais vous proposer des Operations et je vais demander à certains d'entre vous de lês répéter autrement. Par exemple, pour 15x3 vous pouvez proposer 5x3x3 ou (10+5)x3 ou tout autre expression qui aurait le même résultat si on faisait le calcul mais on né fait pas le calcul. On né repete pas deux fois Ia même expression.

Celui qui est interrogé a le droit de se faire aider par un autre élève s'il n'a pas d'idée.

Les autres doivent bien écouter pour dire si on peut accepter 1'expression proposcc ou non et pourquoi.

Nouvelle variable à disposition du maítre: suggérer ou non aux élèves d'écrire leurs propositions.

Ainsi, après quelques séances sous le complet controle du maitre, ceux qui ont des connaissances numériques ont 1'occasion de les exprimer dans un contexte relativement peu contraignant, mais tout de même delimite. Ils ont assez de choix à 1'intérieur d'un cadre établi et somme toute sécurisant. Par ailleurs, ils doivent répondre à une demande du maitre, ils né risquent pas d'être pris pour des "petits prof' et rejetés par les copains moins armes mathcmatiqucmcnt.

Plusieurs séances, pendant deux ou trois semaines, seront consacrées à cette consigne.

Tmisième consigne etprise de responsabilité du côté des élèves: vers un nouvel objet d 'é tude

M: Je vais encore vous proposer des Operations et je vais vous demander de les répcter autrcmcnt mais chacun a le droit de proposer sa réponse. La seule condition est qu'elle n'ait pas déjà été dite. J'en veux une nouvelle à chaque fois.

Le maitre veut orienter le travail des élèves, d'une part vers 1'écrit, d'autre part vers 1'étude explicite des propriétés des nombres et des Operations. Pour cela, il compte sur une évolution du jeu de 1'oral vers 1'écrit et sur une interaction entre les deux modes. Il lui faut donc organiser cette évolution. Lanalysc qui suit explique ses décisions.

Lexpression orale est suffisante tant que ['information que les élèves doivent recueillir et traiter né dépasse pas leur capacite de mémoire. Pour que l'expression écrite soit nécessaire, il faut que l'expression orale soit mise en défaut, donc les capacites de mémoire largement dépassées. Il y a au moins deux raisons à cela: couvrir Ia diversité des élèves et rendre inopérant un efTort de mémoire. Ainsi, pour obtenir 1'évolution souhaitée, le maitre joue sur Ia valeur de Ia variable "nombre d'élèves interrogés". Il va lui faire subir un saut en changeant Ia règle du jeu: chacun a le droit de proposer sa réponse.

Le maitre compte sur Ia familiarité développée dans cette pratique du calcul mental pour obtenir beaucoup de propositions.

Pour que les élèves soient effectivement en mesure de répondre à 1'attente du maitre, ils ont besoin de savoir écrire des expressions numériques variées, portant sur un champ de nombres "raisonnable", incluam signes opératoires et parenthèses. Cest 1'objet d'une autre partie de 1'apprentissage qui s'est enclenchée et développée progressivement, parallèlement et en référence au travail oral à partir de Ia deuxième consigne et aussi à un travail sur Ia lecture et 1'écriture no rs mathématique.

Du côté des élèves, Ia réaction attendue se produit au bout de deux ou trois séances: "on né peut plus tout se rappeler, il faut écrire" ; "il faut se mettre d'accord sur les propositions qui sont pareilles et sur celles qui sont nouvelles".

Les propriétés opératoires sont ici outils implicites de classement, exprimées en terme d'action, dans un certain contexte. Lexplicitation orale demandée à chaque élève dans des conditions d'"écoute active" de Ia part des autres a pour but de favoriser Ia dépersonnalisation des procedures et d'avancer dans Ia conceptualisation des propriétés sous-jacentes.

Quatrième consigne et changement de problématique

M:Trouver des règles pour trier les propositions entre celles qui se ressemblent et celles qui sont diflerentes.

Du point de vue mathématique, les objets d'études se situent toujours dans le cadre numérique. Toutefois ce né sont plus directement les nombres et les rapports entre nombres et Operations qui sont à 1'étude mais les propriétés des Operations.

Bilan

La dévolution du calcul mental tcl qifil était conçu par le mailre et les interactions oral/écrit ont bien pris deux móis à se mettre en place à raison de 10 à 30 minutes selon les jours, cinq jours par semaine. Cette pratique s'est déroulée et enrichie dans ses modalités avec 1'évolution des connaissances des élèves, tout au long de 1'année. Des problèmes qu'il était inconcevable d'envisager d'aborder ont pu être étudiés: problèmes de géométrie et de mesures en coordination avec Tintroduction des nombres décimaux par exemple.

Conclusion

En ce qui concerne les objectifs du maitre, on peut dire que plusieurs facteurs se sont conjugues pour faire évoluer les relations sociales au sein de Ia classe d'une part, les relations au savoir d'autre part. Parmi ces facteurs. 1'activité de calcul mental, telle qu'elle a été vécue, a joué un role clé. Signalons un autre facteur qui a joué un role três important, c'est Ia prise en charge de Ia classe par deux enseignants en forte coordination, notamment dans le travail de symbolisation: un maitre pour les disciplines scientifiques et une maitrcssc ayant une formation psychologique et une expérience des élèves qui connaissent des difficultés en lecture pour les autres champs disciplinaires (pour respecter les règles institutionnelles, ces deux enseignants ont pris deux classes en responsabilité, avec Ia mcme répartition des taches).

Calcul mental et resolution de problèmes

A propôs des perspectives quWrent le calcul mental, une question plus large se pose: celle du réinvestissement dans Tétude d'un problème, des compétcnces numériques issues du calcul mental. Nous avons observe, dans le cadre de nos rechcrches, que Ia pratique régulière de calcul mental tel qu'il a été dccrit, entrainait pour Ia quasi totalité des élèves une grande rapidité de calcul. De plus Ia facilite de certains élèves à calculer mentalement et rapidement intervenait effectivement à plusieurs occasions lorsqu'ils étaient confrontes à un problème:

— au début de l'étude, pour recueillir assez d'information pour se faire une idée de Ia situation à traiter. Donnons un exemple: étant donné un rectangle, chercher un autre rectangle de périmètre plus grand et d'aire plus petite.

Pour répondre à cette question, nous avons observe une première méthode 1'oeuvre. Elle consistait à choisir plusieurs rectangles de périmètre plus grand et à calculer 1'aire, ou plusieurs rectangles d'airc plus petite et à calculer le périmètre, avant de pouvoir envisager les variations conjointes. La possibilite de faire de nombreux calculs mentalement et rapidement était un atout dans cette étude.

— en cours d'étude pour éviter de poser les Operations simples et aller plus vite, par exemple les multiplications ou division par 2, ou encore pour optimiser les choix numériques dans des situations d'encadrement;

— à Ia fin pour contrôler les résultats d'un algorithme. Par exemple, résoudre une équation en appliquant un algorithme, puis tester Ia validité du résultat en le substituam dans 1'équation.

En fait, cette disponibilité du calcul mental en tcrmc de pratique de calcul semble liée à Ia légitimité que lui a donné le maitre dans Ia classe et dans ces occasions d'emploi. Cest-à-dire que Ia compétence seule né suflít pas, il faut aussi que son usage soit reconnu par le maitre. Cela veut dire que le maitre sollicitait un tel calcul en cours de travail dans un problème, dans les différentes occasions décrites plus haut.

Une question se pose: Ia calculatrice peut-elle se substituer au calcul mental.

Sinon, qu'est ce qui est spécifique de chacun des modes de calcul: mental, écrít, calculatrice et comment peuvent-ils se conjuguer dans un travail oú le numérique est importam?

Rcférences bibliographiques

ARTIGUE, M., (1989), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, n.9.3, p.281-308.

BAUTIER, E., ROBERT, A., (1988), Réflexions sur le role des représentations métacognitives dans 1'apprentissage des Mathématiques, *Revue Française de Pédagogie,* Paris, n.84, p. 13-19.

BROUSSEAU, G., (1987), Fondements et méthodes de Ia didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, n.7.2, p.33-115.

____________, (1990), Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, n.9.3, p.309-336.

CHARLOT, B., BAUTIER E., (1993), Rapport à 1'école, rapport au savoir et enseignement des Mathématiques, Repères IREM, n. 10.

DOUADY, R., (1984), Jeux de cadres et Dialectique outil-objet, *Cahier de Didactique,* Paris, n.3.

____________, (1986), *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, n.7.2, p.5-32.

____________, (1992), Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir... Repères IREM, n. 15.

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN, M. J., (1989), Un processus d' apprcnti ssagc du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics,* n.20, p.387-424.

PERRIN-GLORIAN, M.J., (1993), Questions didactiques soulevées à partir de Tenseignement des Mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, n. 13.1.

ROBERT, A., ROBINET, J., (1989), Représentations des enseignants de Mathématiques sur les Mathématiques et leur enseignement, *Cahier deDIDIREM,Pans,n.l.*

VERGN AUD, G., (1991), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Grenoble, n. 10.2.3.

UN EXEMPLE D'EXPLOITATION D'UNE ANALYSE **IMPLICATIVE POUR LE DEPOUILLEMENT DE QUESTIONNAIRES**

Regis Gras*
Annie Larher**

Problématique didactiquc

La didactique, tant du côté de 1'enseignant que du côté du chercheur et à lexclusion de certains domaines, né dispose pas actuellcmcnt de réponses tranchées relativement aux qucstions qui lui sont posées. Or. pour se fondcr scientifiqucment, en dépassant Ia simple opinion. elle doit pouvoir formuler et avancer des hypothòses correspondam à ces qucstions. Elle doit pouvoir mcttrc en place un dispositif fiable et fidèlc de recucil et de traitement de donnóes susceptibles de conforter ou infirmer les hypothèses, de tirer des conclusions. Certes. cette stratégie ambitieuse niais rigourcuse né peut pas s'enclencher des les premières approchcs des phénomènes à observer et d'oú surgissent les questions. Elle s'impose, cependant, ultérieurement si l'on souhaite que les décisions didactiques s'appuient sur des régularitcs. sur une stabilité et une pertincncc de réponses et gagnent ainsi adéquation et validitc.

Par exemple, à travers une analyse a priori d'une situation-problème, on conjecture Tapparition de certaines procedures de rcsolution et une hiérarchie d'efficacité. Lobservation fait apparaitre un écart entre le modele a priori et 1'ensemble des procedures effectivement observées. Quelles conclusions peut-on tirer de Ia distorsion?

• Du I RM A R, Univtrsité de Rennes et I R E S T E, Univcrsité de Nuites.
** Du IR MAR., Université de Rennes.

Autre exemple, un questionnaire est presente à une vaste population d'élèves, portant sur une partie hctérogène d'un cursus scolaire. On presume des complexités spécifiques, 1'indépendance de certains items, de certains champs de savoirs, des compétences particulières de certaines families d'élcves, etc. Lobservation met en évidence 1'existence de certains factcurs discriminants. Quels sont-ils? Quelle est leur hiérarchie effective? Comment se positionnent les families d'élèves par rapport à ceux-ci?

Autre exemple, ayant observe des stratégies de résolution de problèmes, peut-on leur associer des conceptions consistantes? Sont-elles évolutives et comment?

Dernier exemple, en psychologie cognitive, est-il possible de mettre en évidence, à travers un questionnaire adapte, un segment d'une épistémologie génétique différentielle?

Des difficultés surgissent à tout moment et le chercheur isole se trouve dcmuni devant les choix presentes et les décisions à prendre. Par exemple, comment traiter les informations quantitatives? Comment coder les données? A partir de quel effectif d'élèves Ia crédibilité d'un résultat est-elle assuréc? Quelle méthode statistique peut-on adopter? Comment interpréter les résultats? Il s'agit de trouver un juste equilibre, dans Ia recherche d'une validation d'hypothèses, entre Ia péjoraüon des méthodes statistiques, le refus d'investissement dans ce domaine et Ia "statisticomanie" qui conduit à une pléthore de résultats inexploitables, accompagncc de 1'illusion de Ia transparence.

Rupture cpistémologique de Ia statistique classique: 1'analyse des données, ses possibilites de réponse

Une double conjoncture va permettre d'apporter des réponses satisfaisantes à notre problématique:

— d'une part, Ia formalisation de 1'algèbre linéaire, de Ia géométrie, des probabilitcs va permettre d'élaborer de nouvelles méthodes de traitement de données;

— d'autre part, 1'ordinateur va permettre de les engranger, de pratiquer des caiculs sur des structures complexes sans mutiler Ia taille des tableaux à traiter et de fournir des représentations variées de T information obtenue.

En effet, 1'analyse des données, méthodologie de traitement des données en vuc de modéliser des phénomènes, fournit à ce jour de multiplcs méthodes, dites analyses de données, qui permettront d'obtenir, contrairement à leur désignation, des synthèses des données, en vision holographique, des facteurs discriminants, des typologies, des hiérarchies, etc.

La rupture épistémologique concerne donc à Ia fois les objectifs vises et atteints, les moyens techniques pour y parvenir (informatique), les données traitées (nombre, nature, variété,...), les modes de restitution de 1'information, les demarches (al ler des données vers les modeles et non 1'inverse), les méthodes mathématiques employees, les concepts en jeu dans celles-ci, etc. En ce sens, 1'analyse des données se distingue donc à Ia fois de Ia statistique infércnticllc et décisionnelle et de Ia statistique descríptive.

Mais les nouvelles perspectives offertes, apparemment dithyrambiques sans reserve, créent ou entretiennent Ia fiction que des données recueillies et traitées sans choix opportun de Ia méthode et sans hypothèses préalables, vont fournir des informations en clair et des résultats organisés. Trop de chercheurs qui ont dailleurs ensuite abandonné cette méthodologie pour cette raison, se sont retrouvés avec des amas de papier non exploitables. Gâchis économique et intellectuel! Il me parait indispensable, près de vingt années après mes premières rencontres avec 1'analyse de données, de proceder ainsi:

— formuler des hypothèses, sans entrer dans 1'illusion quelles seront réfutables ou définitivement acquises, mais seulement mises en doute ou confortées;

— choisir une méthode d'analyse adaptée; par exemple, si l'on cherche à mettre en évidence:

- les principaux facteurs discriminants dans une population à travers des variables: une analyse factorielle;

- une partition parmi des variables: les nuées dynamiques;

- une typologie ou une cia ss ifi cátion: une classifi cátion hiérarchique des similarités;

- une implication entre variables ou classes de variables: un arbre implicatif ou une hiérarchie implicative, etc.

— connaître suecinetement les concepts mathématiques à Ia base des synthèses (distance du x^2 par exemple), connaissance qui controle et facilite 1'interprétation;

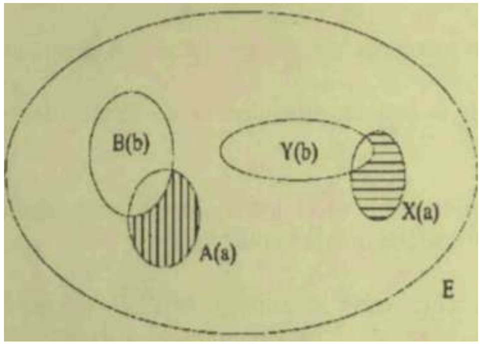
— interpréter les résultats numériques et graphiques de façon synthétique par une certaine distanciation et savoir étendre ou restreindre les données sur lesquelles un deuxième passage apparait nécessaire pour confirmer ou critiquer les premières interprétations.

Eventuellement, dans ce cas, pratiquer une méthode inférentielle.

Il será nécessaire, pour le chercheur, de dépasser les évidences de certains résultats, de se servir de cet accord pour crédibiliser les interprétations plus cachoes, plus surprenantes qui justifient à elles-seules 1'emploi d'une méthode sophistiquée.

Implication entre variables

Contrairement aux méthodes citécs ci-dessus, oú distance et Índice de similaritc sont symétriques, Ia méthode implicative, que nous avons créée et dévcloppée, est non symétrique. La problématique qui l'introduit est Ia suivante. dans le cas oíi les variables considérées sont binaires (un individu satisfait ou non une variable):



Si A et B sont les sous-populations des sujets ayant respectivement satisfait les variables a et b, dans quelle mesure peut-on afllrmer: "si a alors b" , 1'implication né devant pas être connotée a priori de causalité.

Si A C B, Ia proposition est vcrifiée; mais généralement les cas courants présentent une intersection ADB non vide.

Uindice dMmplication mesure, d'une façon comparablcchez I.C. Lerman à Ia similarité, le degré d'"étonnement" devant Ia petitesse de A ("IB, eu égard à 1'indépendance a priori et aux effectifs observes. Ainsi on dirá, par exemple, que X et Y étant dcux parties aléatoires de E demêmes cardinaux respectifs na et nb que A et B , décrivant de façon indépendante Tensemble des parties de E:

" a =* b " est admissible au niveau de confiance ou avec 1'intensité implicative 0,95 si et seulement si:

Prob [card (XflY)< card (A DB)] < 0,05.

Cette notion est étendue, depuis Ia thèse d'A. Larher, à des variables modales et numériques, unifiées en variables fréquentielles.

Un arbre implicatif rend compte de 1'ordre partiel induit par cette intensité d'implication. S. Ag Almouloud, H. Ratsimba-Rajohn et A. Totohasina, dans leurs thcses d'universitc, mcttent en évidence un ordre partiel entre des procedures employees par des étudiants dans le traitement d'exercices, procedures rentrant dans Ia définition de conceptions ou de modeles plus ou moins fonctionnels. Ils soulignent les apports respectifs des méthodes d'analyse qu'ils emploient. H. Londeix, dans sa thèse de 3ème cycle, reconstruit, à partir d'un test, une hiérarchie de stades selon Piaget et montre un décalage diflcrentiel du fait des contextes des exercices du test.

Implication entre classes de variables

Insuffisamment synthétique, 1'implication entre variables est conceptuellement prolongeable en une implication entre classes de variables. fexamen d'une tclle relation entre deux classes n'ayant véritablement un sens que dans le cas d'une "bonne fermeture" des classes, on définit le concept de cohésion d'une classe comme antinomique à celui de "désordre implicatif (au sens de 1'entropie dans Ia théorie de 1'information). De là, 1'implication entre deux classes bien "cohésives", i.e. déjà ordonnées en leur sein, traduit Ia force implicative de 1'une sur 1'autre.

Un exemple d'analyse en géométríe (A. Larher, 1991)

Des observations et quelques études plus approfondies de productions d'élèves, de 12-14 ans en particulier, sur les problèmes à démonstration géométrique, ont montré Ia multitude et Ia grande variété des procedures erronées des élèves. Ia Structure de Ia solution étant pourtant déjà découverte. Certes, les erreurs puisent leur origine profonde dans 1'absence de signification de Ia preuve mathématique et dans une carence de maitrise du lexique nécessaire (puisque, donc, or, car...), mais également de façon ou conseqüente ou conjointe:

— dans une absence de rigueur dans rarticulation dissymétrique des trois éléments-clés de l'inférence: hypothèse - théorème - conclusion;

— dans Ia prise en compte d'indicateurs extrinsèques pour choisir l'un quelconque de ces éléments-clés:

- indicateurs formeis (Structure, rythme,...);
- indicateurs sémiotiques (mot, lettre, symbole,...);
- indicateurs sémantiques (un sens voisin, une utilisation antérieure,...)-

Tout enseignant sait bien qu'il lui est difficile, voire impossible, de repérer à chaque fois dans une copie d'élève le type d'erreur commise et surtout sa répétition chez releve, sa fréquence dans Ia classe et les conditions dans lesquelles 1'erreur s'élabore et apparait. De plus, il lui est encore plus difficile de trouver pour chaque élève les situations qui permettraient de faire prendre conscience et déséquilibrer les procedures, voire les conceptions. Uordinateur, en revanche, permet un travail plus individualisé et, surtout, une sanetion immédiate de 1'erreur et donc un retour de 1'élève sur ses demarches.

Méthodologie retenue

Il semble donc important, pour mieux traiter ensuite ces procedures chez chaque élève, de les identifier et d'en repérer les circonstances d'apparition.

Notre tache didactique et informatique' consistera alors, à plus ou moins long terme:

— à construire des situations ou les variables sont contrôlables;

— à identifier et interpréter les erreurs et les conditions de leur emergence;

— à construire un modele prédictif de procedures erronées;

— à élaborer des logiciels satisfaisant les objectifs didactiques.

Schématiquement, compte-tenu de ces objectifs, le micro-ordinateur est integre sous deux aspects:

— aide tutorielle de 1'élève dans une situation de problème à démonstration (logiciel DEFI: "Démonstration et Expiration de Ia Figure Interactives" que nous développons);

— aide pour 1'enseignant à mieux comprendre les erreurs commises par 1'élève et donc si possible à les corriger (logiciel presente plus loin).

Il apparait nécessaire de limiter les variables en interaction dans une démonstration et pour cela de fournir à 1'élève des situations oú le sens entretenu par le but lointain de cette démonstration n'est pas le moteur essentiel et ou le lexique est réduit.

[1] **Dans te cadre du Groupement de Recherches du C.N.R.S. : "Didactique et acquisition des connaissances scienú6ques".**

Pour ce faire, on établira une liste de faits mathématiques (géométriques en 1'occurence) pouvant tenir lieu, suivant les situations, (Thypothèses ou de conclusions et une liste de théorèmes. Une inférence incomplète (voire un problème à démonstration) étant proposée, 1'élève devra, de façon pertinente, choisir un ou plusieurs faits, un ou plusieurs théorèmes pour que soit validées 1'inférence ou les inférences successives. La tache de 1'élève será exécutée sur micro-ordinateur, à 1'aide d'un logiciel permettant un travail personnel, puis une analyse individuelle de ses réponses (après éventuellement deux essais).

Ce logiciel n'est pas à proprement parler un didacticiel mais plutôt un outil de diagnostic qui a trois fonctions:

— renforcement de 1'apprentissage des règles de déduction à un pas;

— bilan des acquis sur le point précédent;

— révélation et moyen d'analyse des erreurs pour étude diagnostique.

Suivant le choix fait au départ par Penseignant, 1'élève dispose de plusieurs essais ou non et Ia bonne réponse lui est donnée ou non.

Présentation du questionnaire

Un ensemble de 6 questions est donc proposé à des élèves de Ia 2ème année de College (12-13 ans) après l'enseignement de quelques propriétés de Ia symétrie par rapport à un point. A chaque question correspond une inférence que 1'élève doit compléter en choisissant un des 11 faits suivants à titre de conclusion :

Faits

1 (EF) et (CD) sont symétriques par rapport au point I
2 [MN] est le symétrique de [PR] par rapport au point I
3 (AB) et (CD) sont symétriques par rapport au point O
4 (MN) // (PR)
5 (CD) // (EF)
6 (AB) // (CD)
7 (AB) // (EF)
8 MN = PR
9 CD = EF
10 AB = CD
11 AB = EF

Théorèmes

1 La symétrie centrale conserve les longueurs.
2 Si (D) // (D') et (D') // (D"), alors (D) // (D").
3 La symétrique d'une droite (D) par rapport à un point est une droite (D')//(D)
4 Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors cllcs sont parallcles.
5 Deux segment symétriques par rapport à un point ont même longueur.
6 La symétrie centrale conserve les directions.

Question: Hypothèse et théorème des listes ci-dessus étant donnés. trouver Ia conclusion tirée de Ia liste des faits (deux essais sont possibles à chaque question).

Démonstrations		HYPOTHESES	THEOREME	?CONCLUS10N àtrouvar
Q_1	Hypothese : 1 Théorème : 3 Conclusion : 5	(EF) «t (CD) iymétriquet par rapport à I	Le eymétrique de (D) par rapport à un point •at (D') // (D)	(EF) // (CD)
Q_2	Hypothése : 4 Théorème : 4 Conclusion : 6	(AB) at (CD) symétriques par rapport àO	Si 2 droitei eont eymé-tjriquee par rapport à un point alon ellea eont //	(AB) *II* (CD)
Q_3	Hypothése . 2 Théorème : 6 Conclusion : 8	IMN1 aat eymétrique de [PR] par rapport al	2 legmenu eymétriquee par rapport à un point oot méme longueur	MN= PR
Q_4	Hypothése : 3 Théorème : 6 Conclusion : 6	(AB)et(CD) tymétriquei par rapport àO	La lyToetrie central* oomerve lei directiont	(AB) // (CD)
Q_5	Hypothéee 6 et 5 Théorème : 2 Conclusion : 7	(AB) // (CD) et (CD) // (EF)	Si (D) // (D) at (D)//(D") alori (D) // (D')	(AB) // (EF)
Qg	Hypothèie : 2 Théorèine : 1 CoDcluiion : 8	(MN) eat eymétrique de [PR] par rapport al	La tymétrie centrale oomerve lei longueuri	MN« PR

A travers le qucstionnairc, nous cherchons à contrôler 1'efTet des variables didactiques suivantes:

— le concept: 5 des 6 questions portent sur Ia symétrie centrale, une question porte sur Ia transitivité du parallélisme (question n° 5);

— Ia spécification ou instanciation des théoremes (exemple: théorème 1 vs théorème 4);

— le degré de généralilé de 1'invariant relationnel (exemple: théorème 1 vs théorème 5);

— Ia complexité lexicale (exemple: "conserver") ou conceptuelle (exemple: "direction");

— Ia formulation en "si ... alors" (théorème 2)

— Ia symétrie de Ia relation entre les objets dénommés (exemple: fait 1 vs fait 2);

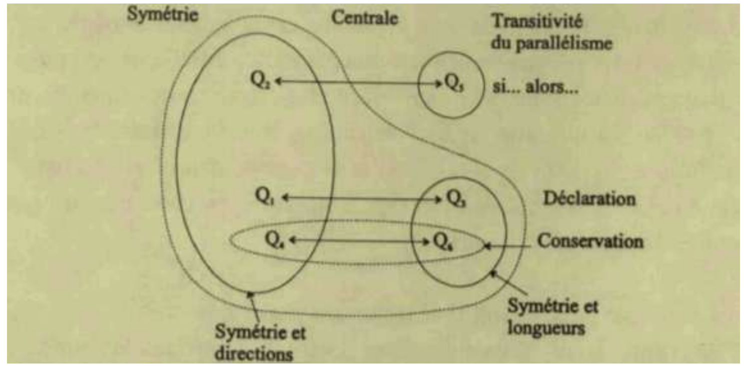
— Ia confusion entre // et = (exemple: fait 4 vs fait 8)

— 1'expression de propriétés (exemple, théorème 1)

Une analyse a priori de Ia complexité nous incite à prévoir les hiérarchies suivantes entre les différentcs réussites R :

$$R_2>R_1>R_4:R_3>R_6;R_2>'R_3;R_6>R_4$$

On peut schematiser les proximités formelle, sémantique et référentielle, a priori, de ces six questions



Nous avons uurepris pour cc questionnaire le iraiu.uu.nt statistique des données rccueillies suivant deux méthodcs danalyse: Ia classification hiérarchique (selon I.C. Lerman) et Ia classification implicative (selon R. Gras). Nous verrons plus loin les résultats que nous avons déduits de Ia seconde.

D'ores et déjà. nous pouvons nous demander sur quoi s'appuie Ia stratégie de décision de Téléve dans cet exercice três particulier qui consiste à faire un choix parmi un ensemble fermé de solutions. Elle est nécessairement fort proche de celle déployée dans les Q.C.M. (Question à Choix Multiples) et, en revanche, três différente de celle qui est suivie dans les démonstrations à plusieurs pas, dans les problèmes ouverts et mêmedans le logiciel D.E.F.I. Ici releve doít seulement retenirou rejeter un élément d'une liste. Il n'a pas de véritable activité créatrice. De plus, le sens global n'est pas mobilisable; les seuls points dappui sont le sens du pas de démonstration et 1'ensemble langagier des assertions ou théorèmes dont 1'élève dispose. Nous avons cependant remarque, grâce à Ia répétition et à Ia concomitance d'erreurs, Ia stabilité de certaines procedures qui correspondem à des modeles de fonctionnement en equilibre aussi bien chez un élève particulier que chez 1'élève en general. Les erreurs, que géncralement nous appelons "erreurs de raisonnement", relèvent de causes profondement ancrées et pas seulement d'ordre logique. Elles tiennent aussi à Ia mcconnaissance des objets traités (quand ce n'est pas du vocabulaire utilisé); et aussi, três fortement, lors de 1'articulation hypothèse — théoreme —> conclusion, au pouvoir attracteur de certains mols, certains signes ou symboles, certaines formes (struetures de phrases, rythmes,...).

L'élève assemble plus, quand il se trompe, à partir d'un critère "signe" que d'un critère "sens". Il va puiser dans les solutions offcrtes les índices formeis les plus vraisemblables, les plus pertinents pour lui.

Résultats: paramètres des réussites

Moyennes

On retrouvé Ia hiérarchie présumée a priori entre les réussites Raux 6 questions: R, (96,25 %), R, (78,75 %) et R_4 (72,5 %).

De plus: R, = R_6 (87,5 %).

Le taux de réussite de Q_5 (85 %) est un peu inférieur aux taux de réussite de Q_3 et Q_6 (Q_5 né fait pas référence à Ia symétrie centrale; son théoreme est instancié). Il est nettement inférieur à celui de Q_2 malgré Ia même formulation du théoreme en "si... alors ..." ; est-ce en raison de Ia double hypothèse?

Coeffícients de Corrélation entre les Modalités "Réussites" des 6 Questions

Les plus fortes liaisons positives sont observées entre:

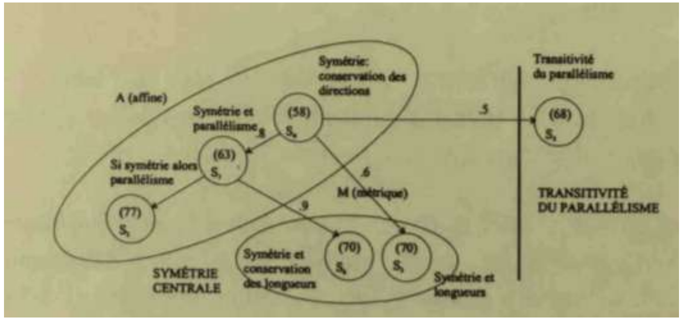
— R, et Rj (formulation différente du théoreme mais même contenu): P = 0.38
— R, et R_6 (P = 0,358): sont-ce les mêmes élèves qui ont des difficultés à commencer (Q,) et à soutenir leur attention (Q_6)?

— Rj et R, ont avec toutes les autre réussites un coefficient de corrélation três proche de 0 et même négatif sauf avec R_4.

Analyse implicalive des 6 réussites

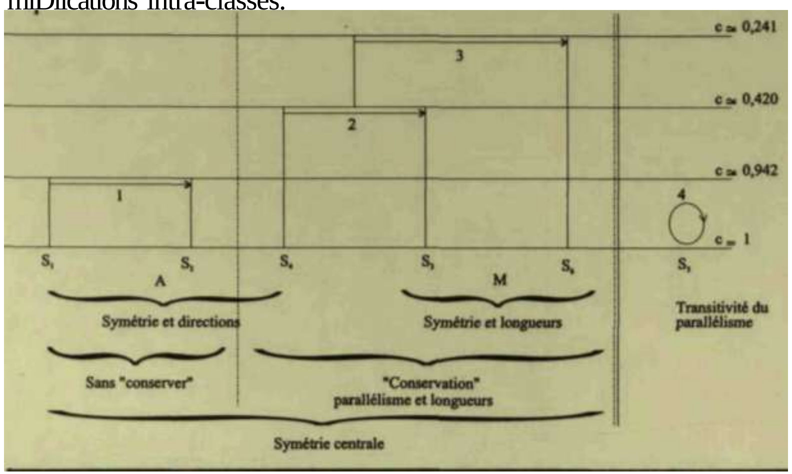
Le tableau des implications permet de construire le graphe implicatif suivant oriente transitif, pondere, associe à Ia relation de quasi-implication.

Arbre Implicatif de Réussite



Hiérarchie Implicative

Reprcnant Ia méthode développée par R. Gras et A. Larner, on pcut constituer des classes de réussites qui sorganisenl ainsi en fonetion des míDlications intra-classes.



Nous retioii"ons des similitudes assez frappantes avec les classes formées a priori à partir des proximités íbrmelle, sémantique et référentielle des 6 questions:

— séparation très nette de R_5, réussite à Ia scule question relative à Ia transitivité du parallélisme;

— classe (R, , Rj): les questions Q, et Q_2 né diflêrent que par les expressions de leurs théorèmes; aucun de ceux-ci né contient le mot "consener" de compréhension ambiguê et, de toute manière, difllcile pour les eleves;

— classe (R_4, R,, R_6) regroupant les rcussites aux dcux questions (Qj) et (Q) relatives à Ia propriété métrique de Ia symétrie centrale et Ia réussite à Ia question (Q_4), de nature affine mais dont le théorème, comme celui de (Q_6), est exprime en terme de conservation.

Ce dernier point placerait-il les 3 items à un mcme niveau de complexité?

En conclusion, est-il besoin de souligner Ia puissance exploratrice de cctte méthode d'analyse des faits didactiques? On constate qu'elle permet et pcrmettra, grâce à son implémentation informatique, des décisions en tcmps réel à partir de stratégies, voire de conceptions, extraites de Ia concomitance répétée de comportements. Elle s'impose comme outil nouveau et complémentaire des méthodes symétriques, offrant aux questions didactiques des hypothèses de lois générales qif elles recherchent.

Referentes bibliographiques

AG ALMOULOUD, S., (1992). *Uordinateur, outil d'aide à 1'apprentissage de Ia démonstration et de traitement des données didactiques,* Thèse (Doctorat), I.R.M.A.R., Université de Rennes 1.

GRAS, R., *Contribution à l'ètude expérimentale et à 1'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques,* Thèse (Post-Doctorat). Université de Rennes 1.

________, Data analysis: a method for the processing of didactic questions, *Research in Didactic o/Mathematics,* Grenoble. v. 12, n. 1, p.59-72

GRAS. R.. LARHER. A., (1992). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analy se des données. *Mathématique, Informatique et Sciences Humaines,* n. 120.

GRAS. R.. TOTOHASINA, A.. AG ALMOULOUD, S., RATSIMBA-RAJOHN, H., BA1LLEUL. M.. (1994). *La méthode d''analyse implicative en didactique:* applications, Grenoble, La Pensée Sauvage, R.D.M., 14/1.

LARHER, A., (1991), *Jinplicátion statistique et applications à I 'analyse de démarche depreuve mathématique,* Thèse (Doctorat), I.R.M.A.R., Université de Rennes 1.

LERMAN, I.C., GRAS, R., ROSTAM, H., (1981), Elaboration et évalualion d'un indice d'implication pour des données binaires, *Mathématiques et Sciences Humaines,* n. 74/75.

RATSIMB A-RAJOHN, H..(1992). *Contribution à I 'étude de Ia hiérarchie implicative:* application à 1'analyse de Ia gestion didactique des phénoménes d'ostention et de contradiction, Thèse (Doctorat), I.R.M.A.R.. Université de Rennes 1.

TOTOHASINA. A., (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application à 1'analyse de conceptions d'étudiants sur Ia notion de probabilité conditionnelle,* Thèse (Docrorat), Université de Rennes 1.

APPRENDRE A VOIR ET MANIER L'OBJET GEOMETRIQUE AU DELA DU TRACE DANS CABRI-GÉOMÈTRE

Colette Laborde et
Bernard Capponi*

La didactique des mathématiques a consacré une partie importante de scs travaux à 1'étude des situations problème dans lcsquelles lapprenant doit construire des outils de solution (présentant un caractère de nouveauté pour lui) pour résoudre le problème qui lui est pose. La thcorisation proposée par Brousseau (1986) décrit ccs situations comme celles d'une interaction entre un milieu et 1'apprenant. En termes de système, si le système didactique est celui construit autour du triangle enseignant, savoir. apprenants. le milieu est au sein de ce système, le sous-système antagoniste de Lapprenant. Cest par des actions sur le milieu, par 1'interprétation de rétroactions du milieu susceptibles de fournir des éléments de validation de sa solution (Margolinas, 1993, chap.l et 2), dans Ia répétition d'essais de résolution d'un même problème, que 1'apprenant elabore des adaptations nouvelles à Ia situation qui lui pose problème. Ces adaptations pcuvent être Ia source de connaissances nouvelles. Une hypothèse importante en didactique postule que le milieu doit être organisé pour pcrmettre de tclles adaptations de 1'apprenant.

Les EIAO (environnemcnts interactifs d'apprcntissage avec ordinateur) pcuvent servir à Ia constitution de milieux organisés pour Tapprentissage et doivent être analyses de ce point de vue. En effet, ils offrent particulièrement cette possibilite de confrontation longue et répétée à une situation problème et cette dualité d'actions et de retours du dispositif aux productions des élèves, comme le confirme un grand nombre d'observations d'élèves travaillant sur ordinateur (Gras, 1987; Artigue, 1991; Bellemain et Capponi, 1992). Les spécificités des EIAO tiennent en particulier à ce que:

— un EIAO contient des connaissances (mathématiques en 1'occurrence);

— ces connaissances en raison de contraintes de représentations en machine et à 1'interface pcuvent avoir un fonctionnement particulier, different en certains aspects de celui des connaissances de référence.

La première spécificité entraine en particulier que:

— des actions conceptuellement complexes peuvent être rendues directement possibles à 1'utilisateur du dispositif;

— Ia machine est susceptible d'offrir des rétroactions fondées sur des connaissances;

— Ia machine a un comportement en partie autonome de 1'apprenant.

Lobjectif de cet article est d'analyser les spécificités d'un EIAO et leur role sur Ia conception et le fonctionnement de situations adidactiques. Lexemple choisi est le logiciel Cabri-géomètre en tant que constituam d'un milieu organisé pour 1'apprentissage de Ia notion de figure géométrique. Cet apprentissage est en effet un point clé de Lapprentissage de Ia géométrie au College, comme nous chercherons à le montrer ensuite. Nous présenterons ci-après le logiciel, et le reste de 1'article será consacré à l'étude du milieu adidactique susceptible d'être organisé autour du logiciel et au caractère adidactique de situations mettant en jeu les rapports entre dessin et objet géométrique.

• DidaTcch - LSD2 IMAG-CNR.S, Universilé Joseph Founct

Les rapports entre dessin et objet géométrique

La géométrie enseignée traite d'objets theoriques mais met aussi en jeu des representations graphiques dont le role dans 1'apprentissage de Ia géométrie n'est plus à souligner.

La figure en tant que rapport entre dessin et objet géométrique

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considere comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de Ia géométrie euclidienne, ou de Ia géométrie projective). La figure géométrique consiste en rappariemcnt d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme 1'enscmble des couples formes de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le represente; le dcuxième terme est pris dans 1'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à 1'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses representations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou produeteur du dessin, constituent le signifié de Ia figure géométrique associe pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle/Jgwra/ *concept*.

Les rapports entre dessin et objet géométrique peuvent être grossièrement caractérisés par le fait que des propriétés de 1'objet géométrique se traduisent graphiquement par des rclations spatiales. Par exemple, une trait rectiligne qui touche un trace circulaire peut être interprete dans une théorie géométrique comme une droite tangente à un cercle.

Il importe cependant de souligner Ia complexité des rapports entre dessin et objet géométrique: en eflet le passage du dessin à 1'objet géométrique est 1'objet d'une interprétation par un sujet humain. Il s'ensuit que:

— d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprete par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique;

—d'autre part les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons: Ia première tient à ce que les interprétations dépendent du lecteur et de ses connaissances ainsi que du contexte. Ia deuxième tient à Ia nature même du dessin; à lui seul il né pcut caracteriser un objet géométrique.

Précisons ces afllrmations qui servent de points de départ à notre cadre théorique.

Un dessin renvoie aux objets théoriques de Ia géométrie dans Ia mesure oü celui qui le lit decide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de Ia théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un role fondamental dans le choix du type d'interprétation. La Figure 1 peut ainsi être interprétée comme le dessin d'une pomme à laquelle reste attaché un bout de tige. Dans un contexte de mathématiques, un malhématicien y reconnaitra sans nul doute un cercle.

Mais il será plus réticent pour le faire pour le dessin de droite (Figure 2) alors que 1'ensemble des marques d'encre sur le papier du dessin de droite est probablement une meilleure approximation aux moindres carrés d'un cercle.

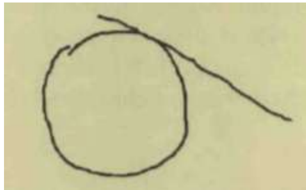


Fig. 1

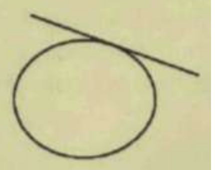


Fig 2

Ce comportement trouve une explication si l'on prend en compte le choix du type d'interprétation du lectcur. Le mathématicien dans son contexte de travail considere ces dcssins dans une interprétation totalement géométrique et parcc que dans cette interprctation les dcssins doivcnt rcnvoyer à des objcts établis de Ia théoric. tenant compte du trace à main levec. il cherchera à voir un ccrclc dans le premicr. tandis qu'il hésitera entre une ellipse et un cerclc dans le Second, compte tenu de Texactitude apparcnte du trace.

Un dessin même géométrique peut être interprete de multiplcs façons et en particulicr Ia perception intervient dans Ia construetion d'une interprctation lorsquc le lectcur né dispose pas de fortes connaissances théoriques géométriqucs qui lui permettcnt de depasser Ia premicre lecture perceptive. On a pu ainsi montrer que les aspects perceptifs (Duval. 1988; Mesquita, 1989; Padilla, 1990) du dessin pcuvcnt gener ou au contraire favoriser Ia lecture gcométrique par des eleves de College, en attirant 1'attcntion sur des éléments du dessin non pertinents pour cette lecture. La configuration de Thalès (Figure 3) n'est ainsi pas reconnue avec le même degre de facilite par des élèves de troisieme dans les deux dcssins ci-dessous (Cordicr et Cordier, 1991).

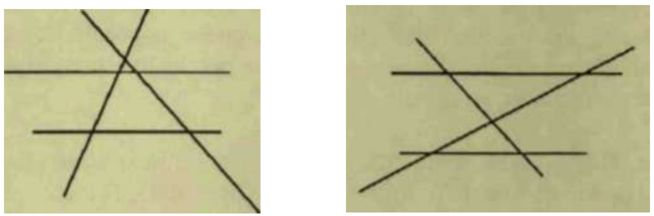


Fig. 3

Des dcssins prototypiques d'objets geométriques (Noirfalise. 1991) se sont constitués au fil du temps, resultam d'influences à Ia fois perceptives et culturelles (au sens large et scolaire). Certains sont bien connus (carréV losange), d'autrcs moins commc celui du parallclogrammc: le dessin prototypique d'un parallélogramme est, du moins en France, celui oíi Ia diagonalc AC est perpendiculaire au côté AD (Figure 4); nous avons justement débusqué ce cas de typicalité en utilisant Cabri-géomètre.

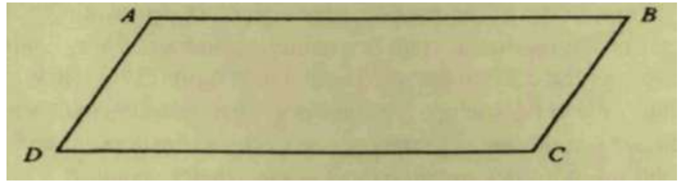


Fig 4

En tant que signifiant, d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais né le fait que partiellement. On peut attacher un *domaine de fonctionnement* au dessin (ensemble des propriétés geométriques représcntées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin né rend-il pas compte du domaine de variation des élémcnts de 1'objet géométrique. A partir d'un dessin, il est impossiblc d'inférer si un point d'un segment appartient au seul segment ou à Ia droite support du segment, si deux cercles sécants le sont par hypothèse ou peuvent être dans une position relative quelconque. *Une descripíion discursive caractérisant I 'objet géométrique est nécessaire* pour lever les ambiguités inhérentes au dessin (Duval, 1988; Parzysz, 1988).

Inverscment toutes les propriétés spatiales du dessin né peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de 1'objet, au dessin est attaché un *domaine d interprétation*. La position du dessin dans Ia feuille de papier par exemple est en dehors du domaine d'interprétation des dcssins en tant que signifiants d'objets de Ia géométrie euclidienne. Certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu'ils fonctionnent avec un domaine d'interprétation different de celui de Ia géométrie euclidienne.

Les rapporís entre dessin et objet géométrique dans l 'enseignement de Ia géométhe

L'enseignement de Ia géométrie ignore les rapports entre objet géométrique et dessin en passant sous silence Ia distinction entre les deux. ou en faisant comme si un lien naturel les unissait. Nous voudrions reprendre Ia thèse défendue par Berthelot et Salin (1992) et le cadre théorique aflerent développé à propôs des rapports entre connaissances spatiales et connaissances géométriques: 1 'écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques aboutit à ce que Ia géométrie enseignée s'appuie sans controle sur un rapport privilegie à 1'espace reserve au traitement de petits objets ou de traces tenant sur une feuille de papier, sur 1'évidence perceptive: "on voit bien que..." (Bessot, 1993).

Nous interprétons 1'ignorance par 1'enseignement des rapports entre dessin et objet géométrique en liaison avec cet écrasement: 1 'enseignement négligé Ia possibilite d'une lecturc spatiale du dessin et nc considere que Ia seule lecture géométrique du dessin, il méconnait 1'existcnce du domaine d'interprétation d'un dessin: 1'évidence perceptive y est naturcllement et immédiatement interprétée en termes géométriques. Il faut dire que le langage facilite cette confusion spatial géométrique, souvent le même terme designe Ia propriété spatiale et cellc géométrique qui Iui est attachée. De par cette indifférenciation, l'enseignement méconnait Ia spécificité des rapports entre dessin et géométrie et né les prend pas pour objet d'apprentissage.

On pourrait décrire brièvement ces rapports en disant que d'une part Ia géométrie peut être considérée comme le résultat d'une modélisation du dessin, et qu'ainsi elle peut servir d'instrument de production et de controle du dessin, ou même de prédiction. Mais inversement. le dessin en géométrie peut être considere comme modele de 1'objet géométrique (Laborde, 1992), en cela il offre un lieu d'expérimentation graphique (Chevallard, 1990). Parce que l'enseignement ignore les rapports entre dessin et objet géométrique, ce caractère d'expérimentation n'est pour ainsi dire pas perçu par les élèves et encore moins utilisé (ajouter à un dessin des élémcnts non mentionnés par 1'énoncé ou 1'enseignant né releve pas de décisions priscs spontanément par les élèves mais necessite un apprentissage). En tant que modele de Ia géométrie, le dessin se prête à des expérimentations rendant compte de questions posées à Ia théorie, traduites ensuite dans le dessin dont Ia réponse dans le dessin né donne pas une réponse dans Ia théorie mais fournit des suppositions, des pistes pour le travail théorique. On peut ainsi tracer un grand nombre de triangles et remarquer 1'inclination au concours de ses hauteurs.

Ces rapports sont subtils et cela signifie que pour que les élèves en prcnnenl conscience. il faudrait développer dans l'enseignement des situations problème:

— portant sur les dessins dans lesquelles Ia géométrie est un outil eflicace de modélisation et de solution, par exemple dans lesquelles elle permet de produire de dessins satisfaisant à des contraintes données, de façon moins coüteuse que le tâtonnement controle par Ia perception et elle garantit Ia correction du résultat: par exemple, Ia géométrie assure du caractère tangent d'une droite à un cercle lorsquc cclle ei est perpendiculaire au rayon;

— des siruations en géométrie, oii le recours et rexpérimentation sur le dessin évitent de se fourvoyer dans des solutions théoriques trop longues.

Cest dans cet esprit qu'ont été développés depuis quelques années des environnements informatisés ofírant un système de représentation d'objets géométriques par des dessins à 1'écran de 1'ordinateur qui peuvent être produits par 1'intermédiaire de commandes données dans un langage géométrique. Ces objets à 1'écran présentent un domaine de fonctionnement plus étendu que les dessins en papier crayon et permettent de disqualifiercertaines interprétations illicites. Cabri-géomètre est l'un dcux. Il est presente dans le paragraphe suivant.

Caractéristiques de renvironnemcnt Cabri-gcomètre

Deux caractéristiques importantes de cet environnement informatique'[1] résidcnt dans Ia coexistcnce de *primitives de dessin pur* et de *primitives gèométriques* et dans Ia manipulation directe du dessin.

Si l'on dcplace à 1'aide de Ia souris un des éléments de base du dessin, celui-ci se deforme en respectant les propriétés gèométriques qui ont servi à son trace et celles qui en decoulent ; par suite si un dessin a été réalisé à 1'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un de ses éléments.

La Figure 5 presente un parallélogramme obtenu par le trace de 4 segments poses au jugé sur 1'écran (les sommets sont des points de base) à Tétat original à gaúche, puis après déplacement de A à droite.

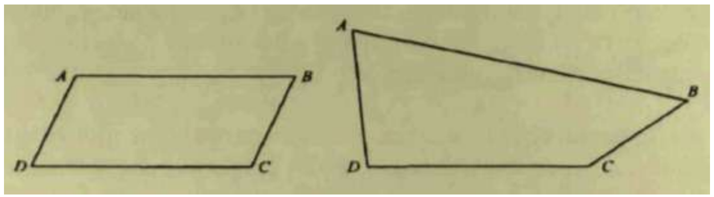


Fig.:

[1] Pour une descnpaon de 1'environnement cf Bellemain et Capporu. 1992. Laborde et Stjàsser, 1990

Le trace à 1'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement scs proprictcs spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet, il necessite donc d'être produit par les primitives gométriques (tclles milieu, médiatricc, droite parallèle, droite pcrpendiculaire etc). L'e.\igence de communiquer au logiciel un procede géométrique de construction permet ainsi de caractériser 1'objet géométrique (on retrouvé Ia necessite que nous avons mentionnée plus haut de Ia dcscription discursive de 1'objet géométrique pour sa caractérisation).

Dans le trace à 1'écran du dessin d'un objet géométrique, c'est donc 1'interaclion entre les deux caractéristiqucs du logiciel qui entraine le rccours aux primitives géométriques, comme 1'indique le schéma ci-dessous (Figure 6). Le logiciel a été conçu avec 1'idée que ce passage par des primitives géométriques devrait favoriser 1'usage de connaissances géométriques.

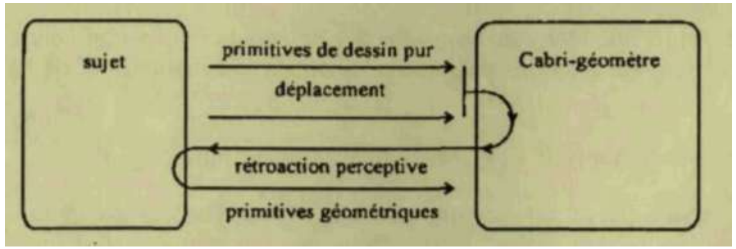


Fig 6

L'environnement répond donc à 1'intention d'olTrir un système de signifiants ayant un plus grand domaine de fonctionnement par rapport à Ia géométrie et rendant plus apparentes les limites du domaine d'interprétation. Parce que le déplacement du dessin est controle par une théorie géométrique *(grosso modo* celle de Ia géométrie euclidienne), I 'environnement rend compte en particulicr de Ia variabilité des éléments de 1'objet géométrique et de leur domaine de variation (extensión du domaine de fonctionnement) et permet de disqualifier des interprétations non pertinentes (mise en évidence des limites du domaine d'interprétation); en effet les propriétés attribuées à 1'objet parce que lues sur un dessin statique le representam ont de fortes chances de n'être apparemment plus vérifiées lors de Ia déformation du dessin.

Le champ d'expérimentation offert par le dessin dans le dessin papier crayon est limite pour des raisons matériclles (imprécision du trace, impossibilite de rendre temporairement invisible une partie du dessin, limitation du nombre d'éléments à gérer). L'environnement Cabri-géomètre, non seulement par ses fonctionnalités d'éditeur graphique mais aussi par les *connaissancesgèomêtriques* qu'il integre, élargit le champ d'expérimentation possible. Les actions possiblcs autant que les retours tout en étant étendus sont de nature différente puisque fondés sur des connaissances gèomêtriques. Le type de représentation graphique fourni par renvironnement diffère donc du dessin papier crayon. Pour marquer cette différence, dans Ia suite on appellera *Cabri-dessin* une représentation graphique sur 1'écran de Cabri-géomètre.

On peut s'attendre à de nouvelles possibilites d'organisation pour des situations adidactiques et à des modifications de conduites des élèves.

Les rétroactions de 1'environnement informatique

Le déplacement par manipulation directe est une des composantes importantes de Cabri-gcomctre offrant une rétroaction aux actions de Télève.

L 'importance du caractère extérieur des rétroactions

Cest parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une même production du sujet. Prenons Texemple d'un élève ayant à résoudre une tache que nous décririons en termes classiques comme une tache de construction d'une figure satisfaisant à des conditions données (dans nos termes, ce serait une tache de trace d'un dessin d'un objet géométrique donné issu d'un procede controle par des connaissances gèomêtriques).

Dans un contexte papier crayon Télève peut tourner sa feuille de papier et voir le dessin dans différentes positions mais il né peut faire varier les éléments variables qu'en traçant à nouveau un dessin, c'est-à-dire en engageant une nouvelle action fondée sur des connaissances.

Il n' y a pas alors rétroaction extérieure sur Ia *même* production du sujet qui peut très bien changer de façon implicite, voire inconsciente, son procede de trace dans Ia production de nouvelles oceurrences du dessin. Le recours au déplacement contient en lui-même 1'usage de connaissances; 1'avantage est que ces rétroactions sont issues d'un dispositif externe au sujet et independam de Tenseignant: elles sont ainsi susceptibles de faire évoluer le sujet.

L 'interprétation des rétroactions

La richesse des rétroactions dues au déplacement permet des interprétations à différents niveaux par le sujet utilisateur du logiciel. Citons ci-dessous les niveaux que nous distinguons a priori dans une tache de construction d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données, dans un ordre qui correspond à un controle croissant par les connaissances gèomêtriques du sujet:

— par le déplacement on place le Cabri-dessin dans une position particulière (prototypique par exemple) qui permet de reconnaitre si 1'apparence du dessin recherchée a été obtenue; à ce niveau 1'interprétation releve essentiellement de Ia perception;

— on s'assure que le Cabri-dessin reste solidaire dans le déplacement.

Remarquons que 1'interprétation d'une absence de liaison entre constituants d'un Cabri-dessin peut elle-même être interprétée à deux niveaux différents:

— comme une absence de liaison de type phvsique ou mécanique au niveau du Cabri-dessin. 1'interrogation du sujet nc porte pas sur 1'objet géométrique mais sur le Cabri-dessin. Ia rectification se fera certes par Tusage de primitives géométriques du logiciel mais pour satisfaire une finalité liée à 1'apparence du Cabri-dessin;

— comme une absence de relation géométrique entre éléments de Tobjct géométrique represente par le Cabri-dessin; Ia rectification se fera aussi par 1'usage de primitives géométriques mais pour satisfaire à une Finalité géométrique.

On cherche à analyser géométriquent Ia trajectoire de certains éléments du Cabri-dessin dans le déplacement:

— pour valider ou invalider Ia construction par rapport à Ia satisfaction des conditions demandées;

— ou pour chercher les eireurs dans les cas ou Ia production serait reconnue comme invalide.

Utilisation en interaction des possibilites d'acíion et de rètroaction

Comme dans toute situation. les rétroactions du milieu peuvent être sollicitées par le sujet qui decide de se livrer à certaines actions dont Ia sanction par le milieu fournira des éléments d'information sur sa production. Il s'agit en quelque sorte d'une *expérimentation dans le modele* fourni par l'environnement informatique.

Uenvironnement Cabri-géomètre permet ce genre d'expérimentation par Ia conjugaison de l'usage des primitives géométriques et du déplacement: pour vérifier ainsi que deux droites sont perpendiculares, on trace Ia pcrpcndiculaire à 1'une des droites et l'on vérifie que dans le déplacement elle reste confondue avec Tautre droite.

Le sujet peut niême se livrer à une expérimentation fondée sur un calcul infcrcnticl: il montre Téquivalence de Ia propriété P à vérifier et d'une autre propriété P' qu'il peut vérifier par le procede presente ci-dessus. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien construit un losange, il peut tracer Ia médiatrice dune diagonale et vérifier Ia coincidcncc de cette médiatrice avec Tautre diagonale au cours du déplacement.

Dans une analyse d'un Cabri-dessin donné ayant pour finalité de repérer les dépendanccs géométriques entre propriétés de l'objet géométrique, un autre type d'expérimentation possible consiste à supprimer des relations géométriques entre éléments et à vérifier si les relations qu'on supposait dépcndantes né sont plus satisfaites.

La répétition

Margolinas (1993, p. 117) a mis en évidence rimportance de Ia répétition du problème dans les travaux d'ingéniérie, qui jusqu'alors n'avait pas été prise en compte au plan théorique. Elle montre bien qu'il né s'agit nullcment d'une conséquence d'une option behavioriste dans laquelle Ia répétition de Ia confrontation à des stimuli permettrait un apprentissage par renforcement mais bien d'une conséquence d'une option construçliviste: Ia répétition de Ia confrontation au même problème permet à Télève de construire un sens au problème (processus de dévolution). le '"rend de plus en plus conscient de ce qui le pousse à agir". La répétition est interessante quand les rétroactions né sont pas simplement en juste ou faux mais sont de nature riche. Cest justement ce que tendait à montrer 1'analyse des deux paragraphes précédents. Dans l'usage régulier de

Cabri-géomètre sur un long terme dans des classes de 4ème et de 3ème d'un des auteurs (B. Capponi). on a pu constater lors de résolution de problèmes une absence de rcnoncement de Ia part des eleves, presque toujours un engagement importam fait de Ia succession de nombreuses tentatives de solutions, et — certes un peu moins souvent — une évolution des solutions.

Un nouvel apprcntissage?

Les situations adidactiques en géométrie visent à ce que:

— les stratégiesde solution fondées surdes connaissances géométriques apparaissent comme plus efficaces que des stratégies empiriques ou fondées sur Ia pcrception. "La géométrie resulte d'une ruse, dun détour dont Ia route indirecte pennet d'accéder à ce qui dépasse une pratique immédiate" (Serres, 1993, p.196);

— ces stratégies né soient pas Ia réponse à des attcntes externes au problème que Télève croit deviner par exemple chez Tenseignant ou Tauteur du problème.

Notre attention se porte ici sur les situations qui donnent sens à Ia notion de figure géométrique; ces situations mettent donc en jeu un dessin qui peut être interprete comme representam un objet géométrique à 1'aide d'une analyse géométrique. Pour que cette intcrprétation ait lieu, il faut qu'elle soit sollicitée par le problème à résoudre, c'est-à-dire que Ia résolution du problème conduise à un traitement géométrique. Nous chcrchons dans le paragraphe suivant à déterminer les modifications apportées par Cabri-géomètre dans les caractéristiques des situations: quels nouveaux types de demarches un environnement comme Cabri-géomètre est-il susceptible de favoriser chez les élèves? Quel nouveau type de situations adidactiques est il rendu possible?

Quels problèmes dans l 'environnement Cabri-géomètre?

On peut distinguer deux types de problèmes suivant Ia production demandée aux élèves:

— des problèmes de production de Cabri-dessins;

— des problèmes de preuve.

Dans le premier type de problèmes, Ia production demandée est, comme on Ta vu, de nature nouvelle: il né s'agit pas de fournir un trace mais un dessin à Fécran gardant certaines propriétés spatiales imposées lors du déplacement dun des points de base du dessin. La tache consiste donc pour Télève à élaborer un procede de production du Cabri-dessin fondé sur les primitives géométriques disponibles.

Outre le caractère nouveau de Ia production demandée, le déplacement introduit de plus des nouveaux types de problème:

— production de Cabri-dessins ayant un comportement contraint au niveau de leur déplacement;

— Ia recherche de Ia généricité du procede de construetion;

— Ia reproduetion d'un Cabri-dessin donné à 1'écran que Pon peut explorer grâce au déplacement.

Un Cabri-dessin est un dessin dynamique; outre 1'invariance de propriétés spatiales, on peut imposer des contraintes spécifiques de mouvement. Par exemple, on peut demander de produire un triangle équilatéral tournant autour de son centre. Cela revient à imposer les points fixes, les points mobiles du Cabri-dessin, et certaines trajectoires. On joue ici sur Ia nature nouvelle du Cabri-dessin, c'est un dessin dont les éléments décrivent des trajectoires, ces trajectoires étant soit réduites à un point du plan, un sous-ensemble de points du plan, ou le plan tout entier. La géométrie devient dans ce problème un outil de modélisation des relations spatiales du dessin au cours du mouvement. Ce type de situation requiert donc une analyse en termes géométriques.

Certains procedes de construction dcpcndcnt des positions respectives de certains éléments de base et sont profondcment modifics si ces positions changcnt. Que l'on pense par exemple au procede dobtention d'une tangente à un cercle de centre O passant par un point P donné: le procede habituei diflêre suivant que le point est sur le cercle ou à rextcricur: dans le prcmier cas. on trace Ia pcrpcndiculaire au rayon. dans le dcuxième un cercle de diamètre PO. Si l'on déplace P, Ia tangente oblenuc reste tangente au cercle jusqu'à disparaitre lorsque P est amené sur le cercle. La production de Cabri-dessins conduit donc à un nouveau type de problèmes, celui de Ia généricité d'un procede de construction.

Dans Ia reproduction de dessins en papier crayon, les connaissances géométriques sont susceptibles d'être un outil efficace mais I'on sait aussi que le trace empirique controle simplement par Ia perception peut foumir un trace visuellement satisfaisant. La reproduction de Cabri-dessins disqualifie le trace empirique controle par Ia visualisation. Ellc exige de plus Ia reconnaissance d'invariants géométriques de ce Cabri-dessin lors du déplacement. ou à proprement parler elle necessite que 1'on reconnaisse des propriétés géométriques à 1'aide des invariants spatiaux du dessin dans le déplacement. Ce type de problème met donc particulièrement 1'accent sur Ia correspondance entre visualisation d'invariants spatiaux et leur description géométrique. Nous appelons *boite noire* ces situations problèmes dans laquelle les élèves ont à reproduire un Cabri-dessin donné à 1 'écran de façon à obtenir un Cabri-dessin ayant un comportement identique lors du déplacement (pour Ia validation d'une telle production. De telles activités peuvent être utilisées dans 1'apprentissage des transformations géométriques.

La preuve est susceptible de prendre un autre statut dans Cabri-géomètre en ce qu'elle permet d'e.xpliquer des phénomènes visuels ou raême 1'impossibilité de phénomènes visuels. Ainsi des élèves de 5ème (Bcrgue, 1992) se sont demandes si un triangle pouvait avoir deux angles obtus. La précision du logiciel et le dcplacement continu assure aux yeux des élèves de rimpossibilitédobtcnirun tel triangle. Ils sont alors en mesure de sappropricr Ia question de 1'explication d'une telle impossibilite. Il y a devolution (Brousseau, 1986) du problème de Ia preuve mathématique de Tincxistence de tels trianglcs. La preuve prend de ce fait un autre statut, celui d'expliqucr des propriétés spatiales en contradiction avec les attentes des élèves. Une autre source de problèmes menant à une preuve consiste à demander de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire un objet géométrique pour obtenir à 1'écran un cas particulier résistant au dcplacement. Par exemple. A. B. C étant trois points fixes, à quelles conditions sur D les médiatrices du quadrilatère ABCD se coupent-clles en un meme point? (Figure 7). Les élèves ont Ia possibilite d'obtenir manucllement Ia trace du point D en essayant de satisfaire visuellement aux contraintes d'intersection des quatre médiatrices. Ils obtiennent ce qu'un de nos collègues J.F. Bonnet appelle un *lieu mou*. A nouveau. Ia démonstration apparait comme un moyen de s'assurer de Ia nature de ce lieu mou.

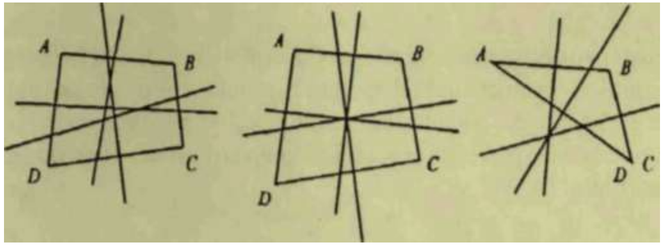


Fig 7

Discussion du caractère adidactique de situations de production de Cabri-dessins

Le caractère adidactique de production de Cabri-dcssin peut paraitre plus facile à satisfaire pour dcux raisons:

— il s'agit de faire faire et non de faire un dessin; les élèves doivent communiquer un procede de trace au dispositif et non faire le trace eux mcmes. Le dispositif obligc à Ia dislinction entre trace et procede de trace. D'autre part 1'enseignant est abscnt du processus de communication au dispositif;

— un Cabri-dcssin est par dcfinition un dessin qui garde au cours du déplaccment les propriétés spatiales rendant compte des proprictes geometriques attachées à 1'objet géométrique qu'il represente; les procedes de trace au jugé sont disqualifies par le dispositif même. Le logiciel par le déplaccment oíTre une invalidation des traces au jugé et les eleves sont conduits à effcctivemcnt utiliscr des primitives geometriques pour obtenir le trace à 1'écran d'un Cabri-dcssin d'un objet géométrique.

Mais est-il possible à partir de cctte constatation de faire dcux h>pothèses supplémentaires selon lesquelles:

— demander aux élèves de produire un Cabri-dcssin en fixant 1'ensemble de primitives geometriques disponiblcs n'ouvrirait pas Ia possibilite à une recherche des attentes de 1'enseignant et par là favoriserait Ia recherche par les élèves de procedes s'appuyant sur des connaissanccs geometriques?

— le recours à des primitives geometriques s'appuierait nécessairement sur un traitement géométrique?

Evidemment non!

Nous voudrions nuancer ces hypothèses qui fournissent un tableau trop contraste des rapports entre élèves et machine.

D'une part. des phcnomèncs de contrat sont susceptibles de se produire. ainsi certaines primitives geometriques peuvent apparaitre aux yeux des élèves comme cfutilisation plus souhaitée que d'autres par 1'enseignant.

D'autre part. nous faisons 1'hypothèse que les stratégies empiriques des élèves sont renforcées par le fait que les commandes de construetion sont en nombre restreint: il leur est loisible de chercher à construire le Cabri-dessin demande par 1'essai suecessif de diverses combinaisons de menus, et cela d'autant plus que le nombre de primitives geometriques est réduit. Ce n'est pas 1 'usage de connaissances geometriques qui controle le processus de trace mais Ia recherche d'une suite de menus conduisant à un Cabri-dcssin qui será valide par le déplaccment. La conception de situations adidactiques de construetion géométrique avec Cabri-géomètre doit prendre en compte 1'accentuation de cette dimension empirique, en choisissant des traces à réaliser pour lesqucls de tclles stratégies sont coüteuses et né conduisent pas au succès.

On a pu de plus constater qu'un jeu s'établit entre une activité perceptive favorisée par le déplaccment. une stratégie combinatoire et 1'usage de connaissances de géométrie dans les situations oü les élèves ont à produire un Cabri-dessin à partir d'une caractérisation discursive. Les élèves abordent le problème par des combinaisons systématiques de menus sur les objets existants mais il peut arriver qu'ils découvrent lors du déplacement un des invariants geometriques demandes mais reliant d'autres objets que ceux souhaités. Ils se placent alors dans une problématique géométrique en cherchant à réobtenir cet invariant entre les objets souhaités et à cctte fin, ils analyscnt géométriquement ce qu'ils ont fait de façon empirique: Ia géométrie devient un moyen qui leur permet de contrôler Ia reproduetion d'un invariant obtenu de façon aléatoire.

Validation de Ia production d un Cabri-dessin

L'environnement offre aussi une validation pragmatique d'un Cabri-dessin satisfaisant à des conditions données. Il suffit pour cela que 1'enseignant crée une macro-construction d'arguments les objets donnés du problème et réalisant Ia construction donnée. Par exemple dans le problème du traced'un carré de côté donné [AB|, releve voulant vérifier sa production appelle une macro-construction préenregistrée de Ia construction d'un carré de côté donné. lapplique à [AB] et peut vérifier si sa production reste en coincidence avec le carré solution lors du déplacement de A ou de B. La superposition de deux dcssins identiques du papier crayon est remplacée ici par Ia superposition lors du déplacement de deux Cabri-dessins. superposition qui assure três probablemcnt de 1'identité des objets géométriques associces. Cctte possibilite de validation s'est avérée relancer les élèves dans 1'activité lorsque leurs productions né satisfont pas aux conditions dcmandées.

Conclusion

La reconnaissance visuelle est donc susceptible de jouer un role importam dans l'environnement Cabri-géomctre. Orla reconnaissance visuelle de propriétés spatiales associées aux propriétés géométriques n'est pas spontanée et doit être 1'objet d'un apprentissage. L'association entre visuel et géométrique prend difllcilcment du sens dans renvironnement papier crayon qui écrase Ia distinetion entre visuel et géométrique (étroitesse du domaine de fonctionnemcnt et absence de limites apparentes du domaine d'interprétation). Comme il a été dit, renvironnement Cabri-géomètre a été conçu pour permettre Ia distinetion entre visuel et géométrique. Lobservation des élèves montre que de plus le géométrique peut apparaitre dans Cabri-géomètre comme *un moyen de reproduire du visuel ou de l 'expliquer* (explication du comportement d'un Cabri-dessin). Le géométrique né serait pas seulement construit dans cet environnement pour pallier les limites du visuel mais aussi en lien avec le visuel; le géométrique est un outil de modélisation du visuel. Cest une dimension qui nous parait interessante dans Ia mesure ou Ia géomélrie trouve son origine dans le controle des phénomènes spatiaux.

Entre d'une part récrasement entre visuel et géométrique et d'autre part Ia rupture entre ces aspects, une voie différente nous semble possible dans laquelle lapprentissage de Ia géométrie dans ses débuts consisterait en Tapprentissage du controle des rapports entre visuel et géométrique. L'environnement Cabri-géomctre offre des possibilites dorganisation d'un milieu pour l'apprentissage de ce controle pour trais raisons:

— les phénomènes visuels prennent de rimportance de par Ia dimension dynamique du Cabri-dessin;

— ces phénomènes sont controles par Ia théorie puisqu'ils sont le résultat dune modélisation graphique d'un modele analytique de propriétés géométriques;

— les possibilites sans fin de situations géométriques qui peuvent être visualisées avec un grand nombre d'objcts et de façon precise.

Rcfcrences bibliographiqucs

ARTIGUE, M., (1991), Analyse de processus en environnement informatique, *PetitX,* n.26, p.5-27.

BELLEMAIN, F., CAPPONI, B., (1992). Spécificité de Torganisation d'une séquence d'enseignement lors de Tutilisation de 1'ordinateur, *Educational Studies in Mathematics,* v.23, n.l, p.59-97.

BERGUE, D., (1992), Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5éme, *PetitX,* n.29, p.5-13.

BERTHELOT, R.. SALIN, M.H., (1992). *L 'enseignement de I 'espace et de Ia géometrie dans Ia scolahté obligatoire,* Thèse, Université Bordeaux 1.

BESSOT, A.. (1993), *Représentations graphiques et maitrise des rapports avec l'espace,* Montreal. Canada, Université du Quebec à Montreal, Publications du RADE.

BROUSSEAU, G„ (1986), Fondements et méthodes de Ia didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.7, n.2, p.33-115.

CAPPONI, B., (1993). Modifications de menus dans Cabri-géomètre: des symétries comme outils de construetion, *Petit X,* n.33, p.37-68.

CHEVALLARD, Y, (1990). Autourde l'enseigcnment de Ia géometrie, *PetitX, n.ll,* p.41-76.

CORDIER. F, CORDIER, J., (1991), Uapplication du théorème de Thalès. Un exemple du role des représentations rypiques comme biais cognitifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.ll, n.l, p.45-64.

DUVAL, R., (1988), Pour une approche cognitive des problèmes de géometrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, v.l,p.57-74.

FISHBEIN, E., (1993), The theory of figurai concepts, *Educational Studies in Mathematics,* v.24, n.2, p. 139-162.

FISHER., (1978), Visual influences of figure orientation on concept formation in geometry. In: RECENTE Research concerning the development of spatial and géometrie concepts, Colombus, Òhio, ERIC Center for Sciences, Mathematics and Education, Ohio State University, p.307-321.

GRAS, R.. (1987), Une situation de construclion géométrique avec assistance logicielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.8, n.3, p. 195-230.

LABORDE. C. (1992), *Enseigner Ia géometrie:* permanences et révolutions. Conférence pléniére au 7éme Congrés International sur 1'Enseignement des Mathématiques, ICME 7, Quebec, Canada, 1992.

LABORDE. J. M.. STRÀSSER, R.. (1990). Cabri-géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning, *Zentralbalt für Didactik der Mathematik,* v.90, n.5, p. 171-90.

MARGOLINAS. C, (1993), *De I 'importance du vrai et dufaux dans Ia classe de mathématiques*, La Pensée Sauvage, 256p.

MARIOTTI, A, (1991), Age variant and invariant elements in the solution of unfonding problcms. In: FURINGHETT1, F. (Ed.), *ProceedingsofPMEXV,* Assisi, Ilaly, v.2, p.389-396.

MESQUITA, A.L., (1989), *L'influence des aspects figuratifs dans I 'argumentation des éléves:* éléments pour une typologie, Strasbourg, Thèse (Doctorat), Université Louis Pasteur.

NOIRFALISE, R., (1991), Figures prégnantes en géometrie? Repères — IREM, n.2, p.51-58.

PADILLA, V., (1990), Les figures aident-elles à voir en géometrie? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM de Strasbourg, v.3, p.223-252.

PARZYSZ. B., (1988), Knowing vs sceing: problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics,* v.19, n.l,p.79-92.

SERRES. M. *Les origines de Ia géometrie,* Paris, Flammarion, 1993.

COMMENT LES ENFANTS COMPRENNENT-ILS LA NOTION DE ROTATION ET D'ANGLE?*

Sandra Magina**

Entre le savoir et 1'apprcntissagc

Une vieille question de Ia Psychologic Cognitive tourne autour du role de rapprentissage et du savoir dans Ia formation des concepts. Beaucoup de chcrchcurs de 1'éducation mathématiquc ont adopté le construetivisme comme position théoriquc, mais cette appcllaTion "parapluie" recouvre des positions qui vont depuis les plus psychologiques jusqu'aux plus épistémologiques. La recherche ici decrite a été guidéc par le construetivisme sous une perspective de Ia psychologic qui s'est appuyéc sur les théories de Piaget et de Vygotsky et qui a été mise en évidence, en particulier, par les travaux de Vergnaud et Nunes. Le construetivisme propose principalement que 1'enfant construise sa propre version de Ia réalité par le moyen de ses expériences, et que. dans ce processus, il joue un role actif dans Ia création de nouvclles rclations entre les idées existantes et 1'incorporation de nouvcaux fragments d'information. Ceei permet Tapparition de nouvelles struetures. Piaget (1960), le plus connu pcut-être des construetivistes, défcnd que rapprentissage est le résultat de dcux processus interdépendants, 1'action et l'intériorisation de cette action, qui se déroulent pendant le développement de 1'enfant. \fygotsky (1962), partisan lui aussi de Ia théorie du développement, souligne 1'action de lindividu dans le processus d'apprentissage. Il défend comme point central de sa théorie que le savoir est determine par des facteurs sociaux et culturcls. Par conséqucnt, même s'ils furent similaires en quelqucs aspects primaires, ces dcux auteurs ont construit leurs théories sous des points de vue distinets: Piaget met 1'accent sur 1'aspect biologique/ individucl et Vygotsky sur le social/culturel.

Une autre différence entre les deux théoriciens se situe au niveau du role de renseignement dans le développement de 1'enfant. Piaget (ibid) assure que renseignement joue un role limite dans l'acquisition du savoir et du développement, tandis que Nfygotsky assure que 1'enseigncment est le principal catalyscur de 1'appropriation des concepts, étant donné qu'il établit Ia direction du développement mental de 1'enfant. Cette position est clairement démontréc dans sa nolion de "zone de développement proximal" qui établit un contraste entre le niveau effectif du développement de 1'enfant — Ia fonetion psycho-intellcctuelle atteinte par 1'cnfant — et son potcntiel de développement (V^gotsky 1991).

D'après Piaget (Piaget et al., 1968; Furth, 1969, 1977). le savoir recouvre plus qu'une simple description des objets, il est Hé à 1'opération de ces objets. Le premier aspect du savoir— Ia description des objets, que Piaget appellc le savoir figuratif— est present dans n'importe quclle perception, tandis que le deuxième aspect — l'opération de ces objets, que Piaget appellc le savoir opératoire — est lié à Ia transformation des états de Ia réalité; il concerne Ia pcnsée logiquc. Furth synthétise le savoir opératoire de 1'enfant comme "sa propre activité dans le monde extérieur" (Furth, 1977, p.70). Dans Ia perspective de 1'éducation mathématique, Laborde (1993, dans 1'annonce pré-parution) montre une différence cruciale entre le dessin — qui est lié aux aspects visuels, et qui exprime à pcine quelques propriétés du problème à résoudre — et Ia figure — qui, bien que représentation matérielle, est surtout liée à des concepts théoriques. Dans le langage de Piaget, on peut dire que le "dessin" se rapporte au savoir figuratif et Ia "figure" se rapporte à l'opératoire.

" Ce travaü fait parte d*un projet plus vaste, qui avait comme but d"étudier le caraetêre mulddúnensionnel de Ia conception d'angle chez 1'enfant, au moyen de 1'analyse des réponses à des taches réaüsées dans une variété de contextes qui comprenaient ia construetion et rinteiprélation des angles Comme Tinterél portait surtout sur les quesdons de développement, on a adopté un abordage "cross-secnonal", dans leque! 54 enfants, divises en 9 groupes d'âge compns entre ó et 14 ans, ont réalisé les mêmes taches On né présentera et né discutera ici que les tésultats issus d'un seul contexte, celui de 1'horloge analogique, en considérant seiúement sa réalisahon dans Ia situabon quoudienne

"• Ponhficale Univeisité Catholique de Sào Paulo (PUC-SP).

Aussi bien Vergnaud (1984-1987) que Nunes ont base leurs études de conception mathématique sur ces importantes théories. Vergnaud afllrme que le savoir est le pivot de 1'apprentissage, en argumentam qu'il dépend de façon significative du contenu à être enseigné. Il suggère que 1'enfant doit interagir avec le contenu dans des situations problèmes, oü les concepts importants doivent être significatifs pour lui. Il dcfend encore que le savoir se construit dans ce qu'il appclle le "domaine conceptuel" — un lien consistam entre un ensemble de situations qui demandent des concepts et actions divers (invariants, qui peuvent se rapporter à Ia compctence ou à Ia conception), et le domaine de Ia représentation symbolique.

Nunes (1991, 1993, dans 1'annonce pré-parution) souligne rimportance de ce qu'elle appelle les "situations sémantiques" — un lieu d'apprentissage riche (pas nécessairement dans le monde réel) oü il est possible à 1'enfant d'apprécier le sens et le but de ses activités.

L'étude que je mène, dont une partie est décrite ici, vise à identifier les schémas de 1'angle chez 1'enfant[1]. c'est à dire, les invariants de leurs actions dans des situations oü 1'angle est present. Cette étude a été planifiée de façon à détecter dans les réponses des enfants les signifiés par lesquels les invariants, implicites ou explicites, sont exprimes. Aussi bien les réponses des enfants que les explications subsequentes des stratégies utilisées ont été considcrées. Ainsi, le comportement des enfants a été considere, non pas simplement comme une manifestation de Ia cognition individuelle, mais surtout comme le produit des faces multiples qu'un individu presente dans un monde socialement construit.

[1] Le teime "schéma" suit U descriptjon de Vergnaud (1984, 1987), qui a un sens similaúe à celui de Piaget. Le schéma se refere à une action organisee qui peut être transférée ou généraiisee par Ia repètibon dans des situations analogues. En d'autres teimes un schéma est Ia formation d*un concept encore de forme limite, paice qu'ü est utiksé en un seul sens.

La conception de 1'angle chez 1'enfant

La plupart de dernières recherches sur les conceptions de 1'angle chez 1'enfant est solidement attachée au paradigme des "conceptions trompeuses". Les études ont identifié une série de "fausses" réponses des enfants aux questions sur les angles et ont explique leurs observations par Ia référcnce à certains éléments de Ia situation-travail (voir par exemple Close, 1981; APU, 1987). Ces conceptions trompeuses se réfèrent à Ia diflículté à reconnaitre les angles droits, aigus et obtus dans d'autres orientations que Ia verticale et l'horizontale; à Ia confusion entre un angle et Ia taille de ses rayons et à Ia diflículté à identifier les angles dans une figure complexe. Dans toutes ces études les questions ont été posées dans le contexte du papier et du crayon et aucune importance ou presque a été donnée aux interprétations par 1'étudiant de Ia situation travail.

Un autre contexte dans lequel on peut explorer des problèmes présentant 1'angle est celui du quotidien. Malheureusement, il existe peu de recherches qui explorent 1'angle dans ce contexte, ce qui implique qu'on comprend peu comment les notions spontanées des enfants sur 1'angle coexistent-elles avec le concept formei issu de 1'école. En comparant ce qui a été dit plus haut à Ia position de Freudenthal (1973) qui défend que Ia géométrie doit être vue comme un acte d'appropriation de 1'espace oü on vit, on respire et on se déplace, il est raisonnable de penser que Ia compréhension de 1'angle chez 1'enfant surgit, au moins en partie, de ses propres expériences d'interaction avec le milieu. Il existe, bien sur, plusieurs contextes dans le quotidien oü 1'enfant pourrait travailler avec Ia notion d'angle. Lun est celui de l'horloge analogique, qui a été 1'objet de cette étude.

L'étudc

Êchantillon

L'étude actuelle a été réalisée à Recife, une ville du nord-est du Brésil, oü 54 enfants de 6 à 14 ans. issus d'une écolc privce de classe moyenne[2] ont été divises d'après 1'âge et le nivcau de scolaritc en neuf groupes de six enfants. Ainsi six enfants de 6 ans. en cours d'alphabétisation, formaient le groupe le plus jeunc de Téchantillon; six enfants de 7 ans en cours de lcre année formaient le groupe suivant et ainsi de suite jusqu'à six enfants de 14 ans en cours de 8cme année.

•

Pourquoi I 'horloge?

Des raisons diverses nous ont menés à explorer Ia notion de Tangle chez 1'cnfant à 1'aide de Thorloge analogique. La premicre provient du scns sémantique que 1'horloge exerce dans le quotidien. En effet, Thorloge est un outil present et familier dans le monde entier, ce qui crée forcément un potcnticl suffisant pour évoquer un ensemble de stratégies spontanées chez 1'enfant, par son action de donner un sens au temps. De plus, même si Thorloge digitale est devenu Ia plus courante de tous les modeles, les analogiques sont encore beaucoup utilisées, surtout dans les écoles.

Une deuxième raison est d'aspect pragmatique, c'est à dire que nous trouvons que des questions posées aux eleves "sur le temps" créent des situations plus faciles à modeler — à cet effet, nous utilisons des horloges en papier carton. Comme troisièmc raison, on remarque le fait que Ia mesure de 1'angle par rotation fait partie de Ia manière par laquelle le temps peut être represente dans ce type d'horloge.

Finalement, le facteur culturel est vu comme raison supplémentaire. Les chiffres sur le cadran de Thorloge ont une grande importance pour Ia mesure des heures pour n'importe quelle nationalité, mais au Brésil le chiffre 6 a une signification spéciale. Chez nous, le chiffre 6 est intuitivement lié à Ia valeur d'une dcmi-douzaine et est métaphoriquement utilisé comme "demi" dans des expressions comme "mon numero de téléphone est deux, "demi", huit, un, "demi" trois, zero (à propôs d'un tclcphonc dont le numero est 268-1630). Par conscquent, le chiffre 6, à cause de son sens culturel, peut être un élément d'information de plus pour cette étude.

Il faut souligner que quant à 1'influence de 1'école. on sait qu'elle n'est pas rcsponsable cTenseigner à ses eleves Ia lccture des heures et le fonctionnemcnt des horloges, bien que certaines le font. L'école concernéc par cette étude né travaillait pas avec Thorloge dans Ia classe, ce qui nous pcrmct d'affirmer que tout ce que les élèves connaissaient sur Thorloge ils Tavaient appris hors de 1'école. À 1'aide d'activités, en utilisant des horloges de tailles variées, fabriquées en papier, nous nous sommes aperçus qu'on pourrait créer un contexte riche pour explorer une série de questions relatives à Ia notion d'angle. Comme par exemple: "Comment Tenfant mesure-t-il le temps à Thorloge: par des chiffres ou par des mesures spatiales?", "Ses stratégies sont-elles affectées par les caractéristiques physiques de Thorloge: le format. Ia taille. Ia présence ou Tabscnce de chiffres sur le cadran?", "Les deferentes représentations de Thorloge (le changement dans le signifiant ou dans le milieu oú clle a élédessinée) influencent-elles les réponsesdes enfants?" et finalement, "Est-il possible d'identifier les progrès des groupes d'enfants et, dans le cas positif, quels sont les changements observes — par exemple, les enfants de 6 ans construisent-ils et comparent-ils les angles différemment de ceux de 13 ans? Ce progrès est-il lié à Tinstruction scolaire?"

Description des activités dans Ia situation quotidienne: (horloges en carton)

Dans cette situation on a utilisé 9 horloges divisées en trois groupes, à savoir: trois grande horloges circulaires, de couleur bleue; trois petites

[1] **Le critcre ublise pour classer 1'échantiUon comme classe moyenne est celui du prix mensuel de 1'école.**

Dans cette situation on a utilisé 9 horloges divisées en trois groupes, à savoir: trois grande horloges circulaires, de couleur bleue; trois petites horloges également circulaires de couleur rouge et trois horloges de couleur noire et de format ovale. Deux des horloges de chaque groupe n'avaient pas de chiffres; 1'autre en avait. Les couleurs différentes de chaque groupe d'horloges aidaient à distinguer les réponses des enfants. Les activités ont été dévcloppées suivant 1'orientation horaire.

a) Activités de Prédiction

Les cinq premières activités demandaient à 1'enfant de prédire Ia position de 1'aigiiille des minutes un demi tour/une demi heure après le temps indique sur le cadran de 1'horloge. Dans chaque cas. on demandait à 1'enfant de placer 1'aiguillc des minutes là oü il trouvait que c'était juste et, cnsuitc, de justifier son action. Dans les trois premières activités (Figure 1) on demandait à 1'enfant de tourner 1'aiguille un demi tour et dans les deux dernicres activités, une demi heure (Figure 2). Le temps initial. le format. Ia taillc. Ia présence ou 1'absence de chiffres marquês sur 1'horloge changeaicntd'une activité àl'autre.comme dans 1'excmple ci-dessous:

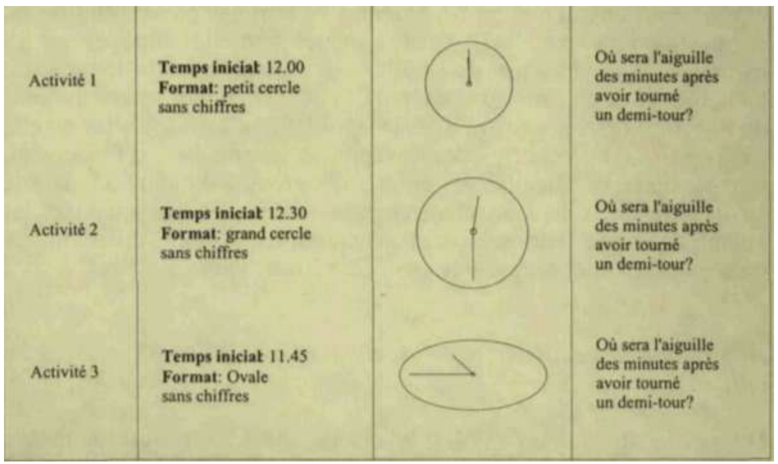


Figure 1: Activités comprenant ia prédiction du demi-tour

À cause de l'absence des chiffres sur les horloges et parce que les questions se rapportaient aux tours des aigmlles et non pas des heures, ces trois activités demandaient un faible niveau de compétence; aucune connaissance sur Ia métrique de 1'horloge ni sur 1'angle était nécessaire aux enfants; il leur fallait seulement, pour résoudre le problème, connaître Ia signification de demi tour et être capables de produire une rotation sur les aiguilles. Nous avons donc considere que les activités 1, 2 et 3 étaient plus faciles que les suivantes.

— Activités 4 et 5: trois horloges, une grande et une petite circulaires et une ovale, toutes marquant 12 h (activité 4) et 12:10 h (activité 5) ont été présentées simultanément à 1'enfant:

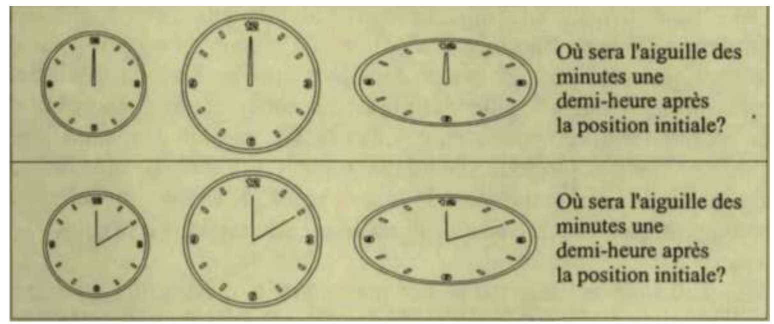


Figure 2: Activités comprenant Ia prédiction d'une demi-heure

Nous avons considere que 1'introduction des chiffres sur les horloges représentait une nouvelle variable pour les enfants. De plus, le fait d'avoir introduit simultanément trois formes d'horloge indiquant Ia même heure pouvait causer quelque confusion s'ils prenaient le format pour un invariant. D'un autre côté, s'ils savaient utiliser Ia métrique de Fhorloge, ils n'auraicnt aucun problème pour mcner à bicn ces activités, mcmc quand on ait introduit ccs variables. Un autre point à considérer ici était Ia possibilite de quclque confusion avec le chiffrc 6 qui prcnd quelqucfois le scns de "dcmi". Si oui, ils résoudraient F activité 4, mais non pas Ia 5.

b) Activités de Comparaison

Les trois activités de comparaison de temps entre les horloges préscntaient soil des horloges avec des aiguillcs en position initiale différente. soit des horloges de taillcs et formats diíTérents. Comme nous avions Tintention de "jouer avec les horloges" et non pas de provoquer des situations ou les hcures seraicnt precises, nous né tournions pas 1'aiguille des heures en parfaitc syntonie avec celle des minutes.

— Activité 6: on a utilisé horloges (deux de chaque format), présentées simultanément à renfant, toutes sans chiffres et indiquant 12 heures. On disait à Fcnfant que chacune des horloges avait été donnée à un élève pour marquer le temps qu'il mettait pour réaliser son travail à Ia maison. Cétail le chcrchcur qui tournait les aiguilles de chaque horloge jusqu'à 1'heure ou le travail de chaque élève supposé serait fini. On posait alors deux qucstions à renfant:

1) Quel élève a mis le plus de temps à réaliser le travail (montrer I'horloge de Félève);

2) Quel élève a mis le moins de temps à réaliser le travail (montrer 1'horloge de 1'élève).

À chaque fois qu'il s'avérait nécessaire, le chercheur répétait Faction de tourner les aiguilles des horloges. La position finale des six horloges est rcncontrée sur Ia figure ci-dcssous:

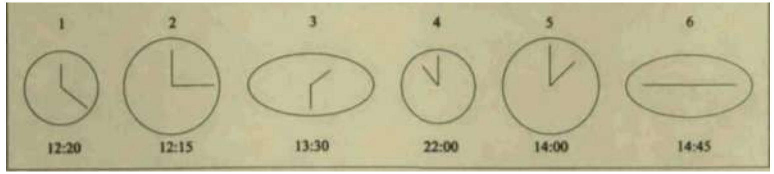


Figura 3: Comparaison de six horloges simullanément

Par le moyen de Factivité 6 nous pourrions observer si Ia rotation est importante pour renfant ou si d'autres variables insignifiantes, telles que le format des horloges. 1'espace entre ses aiguilles en position finale, influencent plus fortement ses réponses.

— Activités 7 et 8: les comparaisons ici proposées étaient entre des horloges qui toutes avanceraient une demi heure, mais qui auraient leur position initiale et par conséquent leur position finale différentes d'une horloge à Fautre. Le chercheur racontait Ia meme histoire de travail à Ia maison qu'à 1'activité antérieure. mais changeait Ia question qui devenait maintenant: si les élèves avaient mis les même temps à réaliser leur travail à Ia maison et comment pourrait-on le savoir. Pour F activité n° 7, les horloges utilisées étaient une circulaire petite et une ovale, tandis que pour F activité n° 8, ont été utilisées une horloge circulaire petite et une circulaire grande. Toutes avaient des chiffres comme sur Ia Figure 4.

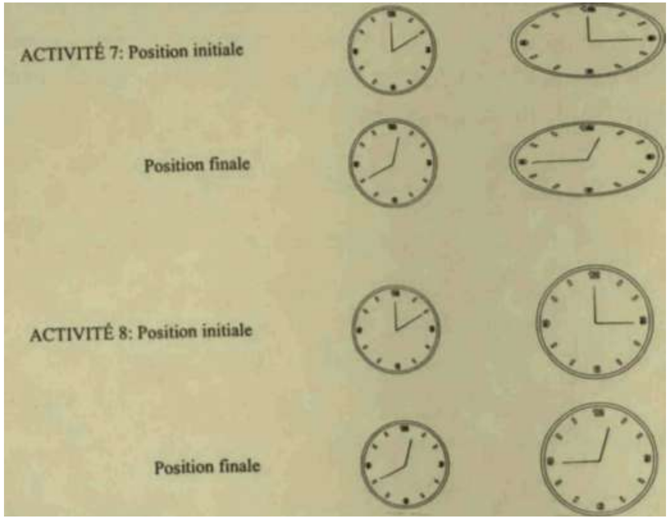


Figure 4: Comparaison ue IM ncure entre 2 horloges qui montrent des heures différentes

La nouvcllc variable mtroduite dans ccs dernicres activités était Ia différence qu'une horloge montrail par rappon à lautrc. aussi bicn dans les positions initialcs que finales. Pour réussir ici, Tenfant devait avoir conscience que Ia place oü Taiguille des minutes se trouverait une demi heure apres dépcndait de sa position initiale. Si 1'enfant considérait seulemént Ia position finale, il répondrait que 1'horloge ovalc (de 1'activité 7) et Ia circulaire grande (de l'activité 8) avaient travaillé d'avantagc.

Résultats des activités de prédiction

Prédiction du demi-tour: Les résultats des activités 1, 2 et 3 montrent que les enfants, exceptés ceux de 6, 7 et peut-être 8 ans. n'ont pas de diíTicultés à résoudre ces activités. Cela signific que les enfants de plus de 8 ans savaient faire un demi-tour. cest à dire, quils étaient capables de faire une rotation correctement.

Prédiction de Ia demi-heure: Le premier résultat importam à noter est que les enfants ont donné Ia même réponse pour les trois formais d'horloges, tant au cours de l'activité 4 qu'au cours de Ia 5, c'est à dire, qu'ils ont trouvé Ia bonne ou Ia mauvaise réponse de façon consistante, mais que les réponses pouvaient difTérer de 1'activité 4 à Ia 5.

Le tableau n° 1 montre le nombre de réponses incorrectes à chaque âge, pour les 5 premicres activités.

Table 1 — Nombre de réponses incorrectes pour Ia prédiction du demi-tour et de Ia demi-heure

Nombre de réponses incorrectes pour la prédiction du demi-tour et de la demie heure.

		Demi- tour			Demie heure	
		Activ. 1	Activ. 2	Activ. 3	Activ. 4	Activ. 5
		Temps initial	Temps initial	Temps initial	Temps initial	temps initial
	Age	12:00	12:30	11:45	12:00	12:10
Cours Primaire	6	6	4	6	3	6
	7	5	5	4	3	6
	A ,	0	0	2	0	3
	9	1	1	1	0	4
	10	1	0	0	0	2
Cours Moyen	11	0	0	0	1	3
	12	0	0	0	0	1
	13	0	0	0	0	1
	14	0	0	0	0	0
TOTAL		13	10	13	7	26
% incor.		24.1	18.5	24.1	13	48.1

Discussion

Âge: Lanalyse des donnés du point de vue de 1'âge montre une forte tendance à 1'amélioration de Ia performance avec 1'âge; les enfants de 6/ 7 ans ont eu bcaucoup de diíTicultcs dans toutes les activités; les enfants de 12 à 14 ans pratiquement n'ont pas fait d'erreur et les enfants entre 8 et 11 ans ont bicn réalisé quelques activités mais pas d'autres. Ces résultats pointcnt vcrs un facteur du au développcmcnt, mais Tinfluence de 1'enseignement des angles, surtout au cours moyen, doit aussi être considéréc.

Stratégie: Au cours des activités de 1 à 3, les chiíTres n'étaient pas présents sur les cadrans des horlogcs. cc qui "forçaif les enfants à utiliser Ia rotation comme seule mélriquc disponible. De plus, il leur a été spccifiqucmcnt demande de tourncr laiguillc des minutes dun demi-tour. Les enfants de plus de 10 ans ont eu une performance praliquement parfaite. tandis que les enfants de 6 à 7 ans ont presente bcaucoup de difficultés. Les enfants entre 8 et 10 ans ont eu des performances variées.

Au cours de 1'activité 4, il y a eu pcu d'errcurs en general. Les enfants plus jcunes ont commis Ia majorité des erreurs, ce qui confirme notre hypothèse du facteur du au développcmcnt. mais le nombre derreurs tant des enfants plus jeunes (6 à 7 ans) que des enfants en l'âge intermédiaire (entre 8 et 10 ans) a été considérablcment réduit. Lors de 1'activité 5. il y a eu une considérable augmcntation des erreurs non pas simplcmcnt de Ia part des enfants plus jcunes, mais aussi du groupe de Tâge intermédiaire, et même du groupe des plus âgés. À partir des réponses des enfants des activités 4 et 5, on peut distinguer quatre typcs de stratégies:

Sans stratégie: quand 1'enfant donne des explications sans fondement. Cela sest produit en 5 sur 6 réponses du groupe de 6 ans et en 3 réponses du groupe de 7 ans. Quelques exemples de ce type de réponsc:

"Cest ici parce que 1'aiguille le veut" (6 ans);

"Moi. je n'ai pas encore appris 1'heure" (6 ans);

"Après Ia demi-heure 1'aiguille doit être autre part, n'importe oú" (7 ans).

Représentation fixe: quand 1'enfant associe Ia place de Ia demi-heure avec celle du chiffre 6 de 1'horloge. La stratégie de représentation fixe apparait quand 1'cnfant utilise 1'aspect figuratif du savoir, oú Ia place du chiffre 6 apparait comme une marque pour Ia demi-heure. Dans ce cas, 1'enfant peut réussir à 1'activité 4, mais non pas à Ia 5. Ce type de stratégie a été rencontrée avec les enfants de 6 à 13 ans. Trois exemples de ce type de stratégie:

"Moi, je dois m'arrêter au numero 6, parce que Ia demi-heure c'est Ia demie et Ia demie c'est 6" (7 ans);

"Demie, c'est sur le numero 6" (11 ans);

"Le chiCTre 6 signifie Ia demie et toi, tu m'as demande une demi-heure" (13 ans).

Erreur de comptage: quand 1'enfant commence à associer 1'idée de demi-heure au fait de sauter un certain nombre d'espaces sur le cadran. Mais il n'est pas sur de comment le faire. Lenfant ici se trouve à un niveau de transition entre le savoir figuratif et l'opératoire. Du point de vue de Ia compétence des enfants. on peut distinguer deux sous-niveaux. Dans le sous-niveau le plus faible, Lenfant semble mélanger Ia stratégie de représentation fixe avec celle de comptage, c'est à dire, qu'au cours de 1'activité 4, il associe Ia demi-heure à Ia position du chiffre 6; et lors de 1'activité 5, d'après 1'cxpéricnce de 1'activité antéricurc il compte du 12 jusqu'au 6 (y compris le 12) et saute alors 7 chiíTres, comme sur 1'exemple suivant:

"Au dernier travail j'ai sauté 7 chiffres pour m'arrctcr sur le demi et maintenant j'ai fait Ia même chose... j'ai compté 7 chiffres" (10 ans);

"J'ai compté et j'ai sauté... j'ai compté 7" (9 ans).

Au deuxième sous-niveau les enfants essaient d'éviter Ia niarque du chiffre 6 et passent maintenant à utiliser seulement 1'idée du saut. Cepcndant, ils né sont pas sürs si le chiffre initial participe ou non au comptage ou combicn de chiffres doivent être sautcs. Les exemples suivants illustrcnt ces deux doutes:

'Tai comptc six chiffres et alors j'ai mis 1'aiguille sur le sixicmc (en comptant aussi le chiffre oü se trouvait initialcment 1'aiguille)";

"Pour avoir Ia dcmi-heure il faut passer 1'aiguille par trois chiffres". Stratégie coordonnée: quand un enfant arrive à associer Ia demi-heurc au fait de sauter six chiffres, cela signifie qu'il s'est passe 30 minutes. Pour ces enfants, Ia demi-heure est Ia même chosc que le demi-tour. dans Ia situation de lhorloge et par consequent il faut considérer Ia position initiale de 1'aiguille. Ces enfants montrent quils ont une comprchension Claire de Ia rotation, en accord avec Ia métrique de lhorloge, ils utilisent le savoir opératoire. Tous les enfants de 14 ans avec en plus Ia majorité de ceux de 13 et de 12 ans ont explique leurs prédictions, utilisant ce type de stratégie. comme sur 1'exemple ci-dessous:

"1 heure est 60 minutes. Ia moitié c'est 30 minutes. Si je compte six chiffres, j 'arrive à Ia moitié, parce que sur 1'horloge il y a 12 chiffres qui forment 1 heure et Ia moitié est 6" (14 ans);

"La demi heure est Ia même chose que le demi-tour, 1'aiguille doit s'arrcter au milieu du tour complet, mais ça dépcndra d'oú cllc a commcncé à tourner" (13 ans).

Résultats des activités de comparaison

Tablc 2 — Nombrc de réponses incorrectes des activités de comparaison

Table 2

Nombre de repenses incorrectes des activités de comparaison

		Activ. 6		Acnv *1*			Acttv. 8		
		Temps + long	Temps - long	A travoille d'avantage		Total incor.	A travaillé d'a.vantMfl		Total incor.
	Age	Répons selon	incorrec l'age	Circ. pettte Temps init. 13:10	Ovale Temps init. 13:15		Circ. grande Temps init. 13:10	Circ petite Temps init. 13:16	
Cours Primaire	6	5	5	0	5	5	2	3	5
	7	4	3	1	5	6	1	5	6
	8	4	3	1	4	8	1	3	4
	9	4	3	0	5	5	0	5	5
	10	3	3	0	5	5	0	3	3
Cours Moven	11	3	5	0	3	3	0	2	2
	12	2	1	0	1	1	0	1	1
	13	1	1	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		26	24	2	28	30	4	22	26
% incor		48.1	24 4			55 5			48 1

Le prenuer rcsultat à discuter est que les enfants ont fait moins d'erreurs lors de 1'activité 6 (comparaison simultanée de six horloges) que lors de Ia 7, oü il y avait seulement deux horloges, plus particulièrement chez les enfants de moins de 10 ans. À Ia première vue ce résultat pcut sembler étrangeet l'on pourrait penser que comparer six horloges ayant parcouru des temps différcnts est un travail beaucoup plus difficile que de comparer seulement deux horloges. Cepcndant, si on regarde plus soigneusement les deux activités en question on pcut voir deux grandes différences entre elles, qui conduisent au raisonnement opposé. La première se rapporte à Ia position initiale des aiguillcs, tandis que pour 1'activité 6, toutes les horloges commençaient sur Ia même position et de plus. elles commençaient sur le numero 12 (une position symétrique). Pour 1'activité 7 les aiguilles commençaient sur des positions distinetes et non symétriques. La deuxième différence est que pour 1'activité 6 aucune des six horloges n'avait de chiffre sur le cadran. ce qui permettait à 1'enfant de penser (s'il le voulait) seulement sous le point de vue de Ia rotation, ignorant ainsi Ia métrique de lhorloge De plus, pour 1'activité 6. chaque horloge parcourrait de différentes durées et leurs aiguilles s'arrêtaient à des endroits diíférents. ce qui coíncidait avec le raisonnement intuitif. Autreinent dit: vous avez diíTérentes positions finales si vous avez travaillé avec diflcrentes durécs. Pour Lactivité 7. lcsdeux horloges se sont arrctées sur des positions différcntes. mais elles ont travaillé Ia mcme quantité de temps.

Nous suggérons alors que Ia diflcrence de performance entre les activités 6 et 7 sont duesà Ia posilion initiale de Lhorloge. particulièrcmcnt quand ccllc-ci nc montrc pas 12:00 hcures. Qucllcs sont les implications de cette intcrprélation? Elle nous conduit forcémcnt à penscr que les cnfants né raisonnaicnt pas sous le point de vuc de Ia rotation. ou de Ia mcsure dynamiquc du dcmi-tour — mcme si cela leur était montré par les nombrcuscs fois que les aiguilles ont été tournées par le chcrchcur — au contraire, ils focalisaient d'autrcs aspects de Ia situation. tcls que: sculcmcnt Ia posilion initiale: seulcment Ia position finale, ou encorc Ia rclation spatialc des aiguilles.

Pour explorer plus profondément notre hypothèse. il faut analyser prcmicrcment Lactivité 6. Dabord. en dépit de Lamclioration avec 1'âge, nous avons eu encore que 13 parmi les 50 réponscs incorrectes provenaicnt denfants qui fréquentaicnt le cours moyen. alors qu'on espérait qu'à cet âge, les enfants jouissaient d'une familiarité totale avec Ia métrique de 1'horloge. Des 26 réponscs incorrectes rclativesà Ia part de Lactivité qui demandait qucllc horloge avait travaillé d'avantage. 23 ont répondu que c'était 1'ovale (oü on lisait 14:45). Pour ces enfants. nous suggérons que ce qui a été considere, c'est Ia position finale des aiguilles et plus particulièrcmcnt Ia distance entre les deux aiguilles, comnie le montre cette explication d'un enfant de 9 ans ayant choisi Lhorloge ovale comme ccllc qui avait travaillé d'avantage: "Je le sais, à cause des aiguilles; ellcs sont três loin Lunc de Lautre. Rcgarde, cette aiguille-ci (en montrant Laiguille des minutes) est de 1'autre côtc". De mcme, un enfant de 12 ans a choisi L ovale. en argumentam que "c'élait à cause de Ia diflcrence entre les aiguilles". Il nous semble donc qu'en plus de Ia position finale des aiguilles, le formal des horloges a aussi contribué à ce choix. Ces enfants utilisaient Ia métrique de 1'espace et ignoraient Ia métrique du mouvement. Il convient de souligner que seulcment cinq enfants du cours moyen ont commis des erreurs, ce qui nous oriente probablement vers un effet de 1'âge et/ou de Lenscigncment scolaire.

En observant maintenant Lactivité 7. nous remarquons que parmi 30 réponses incorrectes. 28 eleves ont répondu que l'horloge ovale avait travaillé davantage. En examinam les explications de leur choix. nous suggérons trois interprétations possiblcs: selon Ia première, quelques enfants ont simplement regardé Ia position finale des aiguilles sur les horloges. et ont remarque que sur 1'ovale les aiguilles des minutes se sont arrctées sur le numero 9 alors que sur Ia circulaire petite, sur un numero avant. Ces enfants ont conclut implicilement que le point initial des horloges était le même. La réponse d'une filie de 10 ans montre bien cette interprétation: "Cclle-ci (lhorloge ovale) a marche pendant 45 minutes et celle-là (1 horloge circulaire petite) a marche pendant 40 minutes".

Deuxième interprétation: quelques enfants ont été influencés par Ia forme des horloges, comnie le montre Ia réponse d'un garçon de 8 ans qui a choisi L ovale: "Dans cette horloge. 1'aiguille-ci (en montrant Laiguille des minutes de Lhorloge ovale) s'est arrêtée plus loin de 1'autre (aiguille des hcures du mcme horloge) que celle-là (aiguille des minutes de Lhorloge circulaire petite) de cette aiguille-ci (aiguille des hcures de Ia circulaire petite)".

La troisieme interprétation est que quelques enfants ont considere dans leur réponse les angles formes par les aiguilles apres le parcours d'une demi-heure (le chercheur a tourné seulement les aiguilles des minutes). Par exemple. Ia réponse d'une petite filie de 6 ans, qui a justifié que Lhorloge ovale a marche d'avantage "parce qu'elle s'est arrêtée três ouverte". Toutes ces réponses pointent vers des difficultés à reconnaitre Ia valeur de 1'influence de Ia forme ou de Ia taille des aiguilles en question, ou encore vers de difficultés à considérer le point final par rapport au point initial. Il semble clair que ces enfants né considéraient pas le mouvement d'un point à 1'autre. En d'autres tcrmes, ces enfants ont réalisé leurs activités à 1'aide du savoir figuratif.

On retrouvé un profil similaire dans les résultats de 1'activité 8. ou, selon 22 de 26 réponses incorrcctes, Thorloge circulaire petite a travaillé plus que Ia grande. Encore une fois. on pcut dire que ce type de réponse a été influencé par les positions finales des aiguilles, comme le montre Ia réponse dune petite filie de 8 ans: "lei c'est 9 et 9 est plus que 8; il vient apròs", ou celle d'un garçon de 10 ans: "ici (circulaire petite) c'est 45 minutes et ici (circulaire grande) c'est 40, alors ce qui était 45 a marche d'avantage)".

Il est important de souligner que Ia taille et/ou Ia forme des horloges. qui n'a pas été considéréc par ces enfants au cours des cinq premières activités, sont devenues importantes lors des trois dernières.

Conclusion

La première conclusion est en rapport avec le facteur développement. En effet, bien qu'on né puisse pas negliger 1'effet de 1'enseignement scolaire sur Ia performance de ces enfants, nous nous apercevons qu'il est possible de les diviser en trois sous-groupes: groupe 1, composé d'enfants de 6 à 7 ans, qui a eu beaucoup de difficultés à réaliser toutes les activités. Ce groupe a presente une performance un tout petit peu meilleure lors des activités de prédiction qu'au cours de celles d'identification des tours d'aiguille. Le groupe 2, composé d'enfants de 8 à 11 ans, a presente de claires difficultés lors des activités de comparaison, tandis qu'au cours de celles de prédiction, ils s'en sont mieux sortis. Finalement, le groupe 3, composé d'enfants de 12 à 14 ans, a été celui dont les enfants s'en sont sortis aussi bien lors des activités de comparaison qu'au cours de celles de prédiction. Différemment des deux groupes antérieures, oíi des enfants de différents ages ont eu des performances similaires. à 1'intérieur du groupe 3, les résultats des enfants de 12 ans ont été clairement infcrieurs à ceux de 13 à 14 ans, mais, d'un autre côté. leurs résultats ont été deux fois supérieurs à ceux du groupe 2.

Pour conclure, on peut dire que Ia principale variable du groupe 1 a été Ia non-connaissance de Ia métrique de 1'horloge; pour le groupe 2, Ia variable Ia plus importante a été Ia condition des activités, c'est à dire, comparer les heures a été plus difficile que les prédire. On doit considérer ici deux facteurs: le premier c'cst que c'est aa\ environs de ces ages que les enfants apprcnnent à reconnaitre les heures sur le cadran, c'est à dire, qu'ils sont en train de former les invariants de ce concept; le deuxième facteur est que Ia geometrie enscignée aux élèves jusqu'à Ia 4ème année s'appuie fondamcntalcment sur 1'étude des formes des figures. Avec ces deux facteurs à 1'esprit. on peut dire que les enfants du groupe 2 sont en general capables de prédire les tours d'aiguille en termes de rotation, et cependant, par rapport à Theure, ces enfants sont fortement influencés par quelques variables sans importance, telles que le format, Ia distance finale entre les aiguilles ou représentation fixe. Enfin. il nous semble qu'aucune de ces variables n'ont été suffisantes pour influencer Ia performance des enfants du groupe 3, excepté, peut-être, les enfants de 12 ans.

Quand au système de signaux, nous avons remarque que le numero 6 a represente non seulement un numero — un référant — mais aussi Ia place de Ia demi-heure — savoir figuratif, lié à Ia mémoire des enfants — ou encore Ia quantité de chiffres à être sautés pour arriver à Ia demi-heure — transition entre les savoirs figuratif et opératoire — pour finalement être intériorisé comme un invariant de conception. La façon par laquelle les enfants des différents groupes on travaillé avec le chiffre 6 nous a montré 1'importance de Ia représentation interne pour Ia formation symboliquc du concept. Ainsi, il a été possible de révéler trois stages de cctte formation: dans le premier, le chiffre 6 est associe à Ia demi-heure. mais commc une marque. Autrcmcnt dit. Ia demi-heure a sa placc fixe sur le cadran. Au dcuxièmc stage, les enfants se sont aperçus que le chiffre 6 est lie à Ia demi-heure. et que cela signifie sauter six chiffres. Cepcndanl. il n'est pas encore clair si Ia position ou se trouve Taiguille doit ou non ctre considerce. Enfin. au troisième stage les enfants lient le chiffre 6 au demi-tour daiguillc. ce qui. dans Ia situation de Ihorlogc. signifie une demi-heure et cela implique qu'il faut sauter six chiffres à partir du chiffre qui suit eclui ou se trouve 1'aiguille dans sa position initiale. Ici le referant nest plus le chiffre 6. mais six números: le signifiant du chiffre 6 continue à ctre Ia "demic", mais dans le sens de moitié. de demi: et Ia signification de cctte quantite n'est plus cclle d'unc vue stalique. mais cellc dunc perspective dynamique, oü Ia rotation de 1'aiguillc devient le point principal.

En rclation à 1'influence de Ia scolarité. nous croyons qu'clle existe certainement. puisqu*il est presque impossiblc à 1'enfant d'apprcndre Ia metrique de Lhorloge sans savoir Ia table de multiplication par 5. Ncanmoins. ce fait scmble avoir rcçu rinflucnce aussi bien du facteur de dcveloppement. que de Ia question culturcllc'. issuc de rexperience de 1'enfant dans son milieu.

' Nous considérons comme facleur culturet, par exemple. Ia signification du chiflre 6 pour Ia société bréstlienne: si nous quesnonnons 1'enfant sur le "demi" (soit un detni-tour d'aiguille ou une demi-heure) et si le 6 signifie demi dans notre société, alors ó devient un uwanant unportant a être appropne par ces enfants dans Ia direction de leur formation des concepts

Rcfcrcnccs bibliographiqucs

APU. *Primary and Secondary sur\>ey:* report n. 1. London: HMSO, 1987.

CARRAHER T.N.. CARRAHER. D.W.. SCHLIEMANN, AD. Mathematies in the strccts and in schools. *British Journal of Developmental Psychologv,* v.3, p.22-29. 1985.

CLOSE, G.S. *Childrens understanding ofangle al the primary/ Secondary transfer stage.* London: Polythecnic of South Bank. 1982.

FREUDENTHAL. H. *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Rcidel, 1973.

FURTH. G. *Piaget and knowledge:* theoretical foundations. London: Prentice-Hall. 1969.

HIELE. PM. van. *Structure and insight:* a theory of mathemalics education. London: Acadcmic Press, 1986.

NUNES, T. *Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts.* London: Institute of Education. 1991.

PIAGET, J., INHELDER, B.. SZEMINSKA. A. *The childs conception o/Geonietry.* London: Routledgeand Kegan Paul, 1960.

PIAGET, J., INHELDER B., SINCLAIR. H. *Mémoire et intelligence.* Paris: Prcsse Universitairc de Francc, 1968.

VERGN AUD, G. *Didactics as a content-oriented approach to research on the learning ofPhysics, Mathematics and natural language.* New Orlcans: AERA, 1984.

________. Conclusion. In: JAVIER, C. (Ed.). *Prohlem of the representation in the teaching and learning of Mathematics.* London: LEA, 1987.

VYGOTSKY. L.S. *Thought and language.* Cambridge: MIT Press, 1962.

VYGOTSKY, L.S., LURIA, AR., LEONTIEV, A.N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: ícone, 1991.

ÉVALUATION ET PERSPECTIVES DU DOMAINE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMAT1QUES AU BRÉSIL*

João Pitombeira de Carvalho**

L'historique de 1'éducation mathcmatique au Brésil

En premier lieu, le dévcloppemenl de l'éducation mathématiquc au Brésil s'insère dans le contexte plus vaste du renouvellement de tout lenscigncmcnt des scicnces dans notre pays. Ainsi. avant dentrer spécifiquement dans le domaine de l'éducation mathématiquc nous désirons faire un bref résumé du développement de 1'enseignemcnt des sciences dans sa totalité. Pour cela, nous partirons des données réunics pour le travail *Evaluation et Perspectives du Domaine de I 'Enseignement des Sciences et Síathématiques au Brésil.* (Carvalho, 1993). De plus. en embrassant cette vue d'ensemble de tout le domaine de renscigncment des scicnces. et en y incluant les mathématiques. on né peut pas oublier qu'une des taches importantes de ceux qui travaillcnt avec 1'éducation mathématiquc est celle de leur insertion dans le domaine de 1'éducation; c'est à dire, leur perception qu'ils né sont pas isoles, mais font partie d'un tout auquel ils doivent participer. Cury (1993), en se rapportant spécifiquement aux domaines de 1'cnseignement des scicnces, des mathématiques, de 1'informatique et de 1'éducation, dit:

> *Considérer I 'enseignement des sciences et mathématiques et Ia corrélation informatique-éducation comme des sous-domaines ou même comme des thématiques de produetion de Ia connaissance c 'est se montrer present aux réalités les plus avancées et les plus contemporaines du monde actuel...*

• Texte de Ia conférence d'ouvntuie du Premier Sémuiaire Brésilien de Recherche sur Education Mathématique, réalisc par 1'INEP ei por Ia PUC-SP, à Águas de Sào Pedro, Sâo Paulo, pendant Ia pénode de 1-6 de mai de 1994.

" PUC-Rio de Janeiro d Université Santo Úrsula

> *D 'un autre côté, Ia thématique de I 'enseignement des sciences et mathématiques, soit comme sous-domaines thématiques des programmes de "mestrado " en education, soit comme domaines spécifiques, est déjà presente sur tout le territoire national...*
>
> *S'il existe encore des Índices d'une relation "nous et eux" il existe aussi des signes positifs de vie commune, surtout dans Ia recherche d 'interdisciplinarité. Mais il existe encore un chemin pour qu 'aussi bien "nous " qu' "eux "puissions nous rencontrer non seulement dans Ia reconnaissance reciproque, mais aussi dans Ia pratique de Ia recherche...* (Cury, 1993).

En accord avec cette idée que l'enseignement des mathématiques n'est pas isole, nous présenterons fréquemmcnt, dans cet exposé, des faits, des données et des commentaircs sur le domaine de l'enseignement des sciences et mathématiques dans sa totalité.

Nous citerons tout d'abord, comme un fait importam du renouvellement de l'enseignement des scicnces et mathématiques au Brésil, Ia création, en 1946, de 1'Institut Brésilien d'Éducation, Sciences et Culture (IBECC), lié au Ministère des Affaircs Étrangères comme Commission Brésilienne de riíNESCO. À partir de 1950, 1'IBECC, par 1'entremise de sa commission de 1'État de São Paulo, a développé de nombreuses activités au bénéfice du renouvellement de l'enseignement des sciences et mathématiques, particulicrcmcnt auprès des élèves, avec des activités hors classe et auprès des professeurs, avec des cours de formation sur le terrain.

Plus tard. entre 1963 et 1965. le Ministère de 1'Éducation (MEC) a créé six Centres des Sciences, situes dans les capitales des États de São Paulo, Minas Gerais, Bahia, Rio Grande do Sul, Guanabara (ancien Distrito Federal, aujourd'hui partie de 1'État de Rio de Janeiro) et Pernambuco. D'après Krasilchick (1987, p.12), *Leurflexibilité d'organisation leur a permis de s'adapter aux locaux oü ils ont été designes. A Minas Gerais, à Bahia, à Pernambuco et à São Paulo, ils sont situes dans les Universités et itiaintiennent de fortes liaisons avec Ia communauté académique, tout en ser\>ant aux systèmes éducationaux de I 'enseignement et en réalisant des programmes conjoints avec les secretariais d 'education. Dans les Etats de Rio de Janeiro et de Rio Grande do Sul, les Centres des Sciences aujourd 'hui font partie du système éducationnel de I 'enseignement et sont inseres dans des fondations de formation de ressources humaines.*

En 1967.1'IBECC de São Paulo a créé Ia Fondation Brésilicnnc pour le Développcment de TEnscignement des Sciences (FUNBEC) et a reçu conimc patrimoinc les installations et les équipcments appartenant à 1'IBECC. Encore que formeilement indépendants. 1'IBECC et Ia FUNBEC travaillcnt ensemblc. en contribuam énormément à lamélioration de 1'enscignement des scicnccs et des mathématiques au Brésil. En particulicr. à Ia fin des annécs 60, Ia FUNBEC a participe à un projet qui a distribuo dans tout le pays, par 1'intermcdiaire des kiosques à journaux, des kits d'expéricnces seientifiques primaires.

En 1968. a été créé au MEC le Programmc dExpansion et d'Amélioration de l'Enseigncment Moycn (PREMEM), avec lobjcctif d'cncourager le développcment quantitatif. Ia transformation structurelle et le pcrfectionncment de 1'enseignement fondamental et moyen.

Quatre ans plus tard, le MEC a créé le Projet d'Amélioration de F Enseignement des Sciences, un programmc execute par le PREMEM. De 1972 à 1980, le projet a agi dans dcux domaines bien définis: 1'élaboration et 1'expérimentation du matériel didactique pour 1'enseignement des seiences et mathématiques au ler et 2ème degrés; Ia formation des ressources humaines pour 1 'enseignement des seiences au ler et 2ème degrés.

Dans le domaine de Ia formation des ressources humaines, les activités du projet se sont diversifiées entre cours de préparation sur le terrain, licences, séminaires etc. Une mention spéciale doit êtrefaite du Projet Multinational pour l'Amélioration de I'Enseignement des Sciences et Mathématiques, avec Ia collahoration de l 'OEA, dont I 'objectif ètait I 'Identification et Ia préparation, au niveau de "mestrado ", des directions competentes pour promouvoir I 'amélioration de I 'enseignement des Sciences et Mathématiques dans leurs régions d'origine. Cette initiative première a eu lieu à I 'UNICAMP. (Krasilchik, 1987)

En 1977, 1'ancien DAU-MEC (actuel Secrétariat de 1'Enseignement Supéricur - SESU) a créé, à Ia Coordination du Perfectionnement du Personnel de Niveau Supéricur (CAPES), le Programme d'Appui au Développcment de l'Enseignement Supéricur (PADES), avec 1'objectif d'améliorcr Ia qualité de 1'enseignement du 3ème degré.

Les objectifs de ce programme visaient le développement du corps enseignant, instrueteur et organisationnel de I 'enseignement supérieur.

Uidée primaire du PADES ètait d'introduire des innovations dans 1'enseignement supérieur, par Vaction d'une equipe multidisciplinaire qui identifiait, dans leurs respectives localités, les changements ncessaires. (Krasilchik, 1987)

Leprogrammeafinance.de 1977 à 1981,plusieursprojetsavecrobjectif d'améliorer 1'enseignement des seiences et des mathématiques.

En 1982, le SESU a lance le Programme d'Intégration de 1'Université avec 1'enseignement de ler et 2ème degrés. Ce programme, quoiqifil n'était pas limite à 1'enseignement des seiences et mathématiques, a appuyé plusieurs projets dans ce domaine.

En 1983, le Ministère de 1'Education, par 1'intermise de de Ia CAPES, a créé le Projet pour 1'Amélioration de 1'Enseignement des Sciences et Mathématiques, instituo avec les ressourccs du propre Ministère. L'année suivante, en 1984, il a été incorpore au Programme d'Appui au Développcment Scientifique et Technologique (PADCT), sous le nom de Sous-programme d 'Education pour Ia Science (SPEC) sans modifier son objectif primaire d'améliorer 1'enseignement des scicnces et des mathématiques surtout au ler dcgré.

Dans sa première phase, de 1983 à 1990, dans une action vigourcuse, le programme a finance 169 projets en 86 institutions de 56 villes de 21 états brésiliens. Ces projets ont été réunis en quatre grands groupes d'activité: recherche sur 1'enscignement des scicnces et mathématiques; formation des professeurs (professoral licence et "mestrado"): des activités de préparation; des activités hors programme (appui à des Centres de Sciences, à de Foircs de Sciences, à des périodiques dédiés à l'enscignement des scicnces et mathématiques. à des olympiades etc). De plus, le SPEC a distribué des bourses détudes pour le "mestrado", doctorat et post-doctorat. dans le pays et à 1'étranger, et a promu des visites de groupes de professeurs (y compris des professeurs des ler et 2ème degrés) à des centres importants d'enseignement des scicnces et des mathématiques à l'étranger. Cinquante-cinq bourses ont aussi été concédées pour des stages de courte durée et des participations à des congrès à l'étranger. Le total de boursiers de "mestrado", doctorat et post-doctorat dans le pays et à l'étranger, financés par le SPEC, dans cette première étape, a été de 111. Jusqu'à 1992, 54 boursiers du pays avaient obtenu le titre de "mestre". A l'étranger, les titres obtenus avec lcsboursesduSPEC,jusqu'à 1992, ont été: spécialisation - 1 ; "mestrado" - 3; doctorat - 29; post-doctorat - 6. De plus, plusieurs autres docteurs ont reçu des bourses à l'étranger par le CNPq ou directement par Ia CAPES, surtout dans le domaine de 1'informatique dans l'enseignement des mathématiques.

Dans sa première phase, oü ont été dépensés environ 14 millions de dollars. Ia politique du sous-programme a été de créer une communauté, dans tout le pays, dans le domaine de l'enseignement des sciences et des mathématiques. Dans une phase intermédiaire, entre Ia première et Ia deuxième (cette dcrnière encore en cours) le SPEC a appuyé quelques programmes de recherche coopérative dans l'enseignement des sciences et des mathématiques. engageant des groupes de compétence renommée dans les universités brésiliennes et dans les centres à l'étranger. De plus, ayant considere qu'une fois créée une communauté dans ce domaine, distribuée dans presque tous les États, le SPEC a décidé que, dans sa deuxième phase, 1'appui serait concentre sur les groupes ayant Ia possibilite réelle d'influer sur l'enseignement des sciences et des mathématiques dans les systèmes publies d'enseigncment. Il a aussi décidé de stimulcr le travail conjoint de tels groupes, engageant universités et secretariais d'education.

Récemment, le SPEC a décidé d'investir dans Ia création de musées vivants des sciences au Brésil, en comptant avec Ia collaboration de Ia Fondation VITAE. Le sous-programme a commencé aussi à évaluer. dans le but de diífusion, les matériaux instruetifs déjà elabores dans des projets qu'il avait financés. Le SPEC cherche à revigorer les licences et se procure les moyens d'appuyer les licences-pilotes. Le renouvellement des bibliothèques universitaires dans le domaine d'enseignement des sciences et mathématiques est un autre domaine d'activité du SPEC. Dans cette deuxième phase, pour laquelle est réservée Ia somme de 22 millions de dollars. le sous-programme se tourne aussi vers des projets sur Ia question de l'environnemcnt et des rapports sciences-technologie-société, dans Ia Philosophie generale de

> *Préparer le citoyen pour agir dans une société complexe, chaque fois plus pénéírée par les Sciences et par Ia Technologie.* (MEC, CAPES, 1989)

Cette perception que 1'enseignement des sciences et mathématiques est destine à préparer des citoyens pour agir de façon critique et consciente dans une société três complexe est recente. Dans les années 50, les nations industrialisées. emballées par 1'illusion que souvrait à 1'humanité une nouvelle époque de prospcrité et de consommation illimitécs. voyaicnt les sciences comme Ia clé qui ouvrirait les portes du paradis terrestre. Plus tard. déjà dans les années 60. en pleine guerre froide. avec le sueces tcchnologique inattendu des soviétiques. les Etats-Unis se sont réveillés du reve ou ils étaient les seigneurs incontestés du monde et se sont tournés vers les sciences comme vers un outil qui garantirait leur survie et leur suprématie. A cette époque apparticnnent les grands projets de renouvellement de renseignement des sciences et des mathématiques, bases sur Ia croyance simpliste qu'unc révolution des programmcs. dirigee du haut vers le bás. associée à Ia produetion de textes écrits par de grands noms des sciences et des mathématiques pourrait renouvelcr renseignement de ler et 2ème degrés. L'objectif explicite de ces projets était de motiver et de préparer les jeunes vers le Chenuil des sciences. de lingénierie et des mathématiques. L'idée de donner une formation scientifique et mathématique fondamentale à tous les citoyens était subsidiaire à Ia tache de former des bataillons de scientifiques et malhématiciens. prêts à aflronter les ennemis de Ia démocratie. Pour avoir une idée de 1'idéologie sous-jacente à cet effort d'amélioration de renseignement des sciences et mathématiques. il sufílt de regarder les volumes "Le Scientifique", "LIngénieur" et "Les Mathématiques" de Ia collection scientifique Life.

Il né vaut pas Ia peine de parler ici des raisons de 1'échec de ces projets de reformes, quelques uns d'cntre eux ingénus et romantiques et qui, en general, n'ont pas fonctionné. Dans le cas spécifique de 1'éducation mathématique, on peut avoir une vision des idées sous-jacentes au mouvement en lisant 1'article: "Les Idées Fondamentales des Mathématiques Modernes. (Carvalho, 1985)"

En general, d'un premier abord, on pourrait dire que ces grands programmes se caractérisaient par Ia préoccupation du "quoi enseigner". D'après Fiorentini (1993, p. 183),

> *Au Brésil, jusqu aux débuts des années 70, les expériences et les études relatives à l 'enseignement des mathématiques ont été marquées par Ia préoccupation dominante du "quoi enseigner". Les questions d'ordre méthodologique ou pédagogique — du "comment enseigner", "pourquoi enseigner" et à "qui enseigner" — sont ignorées ou reléguées à un plan inférieur, subjuguées à Ia "nature " du contenu en tant que savoir logiquement Structure. Cette caractéristique de né voir que le contenu serait exacerbée lors de Ia pèriode d'implantation des mathématiques modernes au Brésil.*

Cependant, 1'un des mérites de ces mouvements a été de préparer les leaders qui, plus tard. déjà dans les années 70, plus experimentes et réalistes, dédieraient leurs efforts à 1'enseignement des sciences et mathématiques de façon plus avantageuse, en écartant les espoirs de solutions rapides et miraculeuses et en se tournant vers un travail lent et patient de formation et de recyclage des professeurs. de Félaboration du matériel didactique en association avec les professeurs du ler et 2cme degrés et d'expérimentation de séquences didactiques.

En même temps. les progrès de Ia psychologie cognitive, avec Ia diffusion des travaux de Piagct, Vigotsky et d'autres ont apporté des contributions essentielles à Ia compréhension du processus d'enscigncmcnt-apprentissage des enfants et des adolescents.

Comme a dit Fávero (1993, p. 150-151) en se référant aux rapports entre 1'enseignement des mathématiques et Ia psychologie cognitive:

Defaçon generale, on peut dire que ce qui caractérise ce rapport dans les 20 dernières années, c 'est I 'effort commun de I 'analyse expérimentale et théorique des problèmes relatifs au rapport entre le contenu spécifique des mathématiques et Ia cognition humaine. Le rèsultat est le fait qu 'aujourd'hui on se réfère à une "psychologie du développement de Ia pensée mathèmatique " ou à une "psychologie des mathéniatiques ".

AujourcThui. tous se disent constructivistes, même si dans Ia pratique ils né le sont pas. Cela montre les infiucnces de Piaget. D*après Fávero (1993, p. 152-153),

... les investigations centrées sur le rapport entre le contenu spécifique des mathéniatiques et Ia cognition humaine sont fortement influencées par les travaux de Piaget et par conséquent se développent à partir de concepts consensuels sur le type de savoir qui est engagé dans le développement du concept de nomhre. (...) La conception predominante, alors, des recherches basées sur les idées de Piaget est I 'existence d 'une progression inévitahle en direction de Ia compréhension des concepts arithmétiques et mathéniatiques, dont Ia base se trouve dans I 'esprit des enfants, et qui requiert seulement de 1'abstraclion pour éclore. Il est donc certain que les mathéniatiques sont un produit nature/ de l 'esprit humain.

Au cours des années 70 et 80 les interactions entre les psychologues et les éducatcurs du domaine des scicnces et mathématiqucs se sont multipliées. Quelques-uns parmi ceux-là ont donné des contributions essentielles à Ia compréhension de comment Tenfant elabore certains concepts ou Operations mathéniatiques. avec des résultats précieux pour le professeur qui travaille dans Ia classe. Par exemple, les travaux de Vergnaud sur les structures additives et multiplicatives expliquem une grande part des dificultés rencontrées par 1'enfant du premier degré quand il travaille Ia somme et le produit. Dans un sens global, cette recherche du comment et du pourquoi a conduit à des formulations telles que Ia Theorie de Van Hiele pour 1'apprentissage de Ia Géométrie, qui veut. peut-être inspirée par les stages de développement sclon Piaget. montrer les difTérents stages par lesquels passe un élève dans sa compréhension progressive de Ia Géométrie. depuis Ia perception intuitive et ingénue des formes géométriques, jusqu'à Ia sophistication du maniement des démonstrations formelles et abstraites. Parallèlement, les investigations sur Ia gcnèse de Ia pensée algébrique ont beaucoup avance.

En même temps, comme dit encore Fávero (1993, p. 153):

D 'un autre còté, les années 50 ont été marquées aussi par Ia proposition de I 'utilisation du traitement des informations et on a commencé à utiliser les termes du langage de I 'informatique, comme matériel et logiciel, en référence à des structures et stratégieshumaines. Cet abordage soutenu surtout par Newell a eu et mantient encore un grand impact sur I 'étude sur Ia résolution des problèmes et a mis en évidence I 'importance de Ia représentation, et par conséquent, l 'importance du langage.

Dans un sens três general, on pourrait dire que toutes ces investigations ont rapport à Ia manière dont se passe le processus enseignement/ apprentissage dans de divers contextes.

Pcu à peu, le long des années 70 et 80. quelques thèmes importants en education mathèmatique se sont cristallisés.

D'abord, Ia perception que les mathématiques servent à résoudre des problèmes. Elle sont non pas un champ d^rudition mais plutôt une activité qui exige une participation active. Les mathématiques né sont pas un sport pour des spectateurs. EUes exigent que tous y participem et Ia pratiquem.

Hors de ce que, généralement. on appelle 1'éducation mathématique. deux mathématiciens du XX siècle, Gerg Polya et Paul Halmos, ont toujours attiré 1'attention sur le fait que faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes. Le premier entre eux. créateur de l'heuristique de Polya, a essayé de diriger Lactivité de résoudre des problèmes. aux diíTcrcnts niveaux de 1'apprentissage mathématique, dans des livres rcmarquables qui. encore aujourd'hui, méritent dêtrc lus et appréciés. Le deuxième a toujours pratique . dans ses cours. dans ses conférences et articlcs 1'habitudc de résoudre les problèmes. Il a été le rédacteur de collections de livres dédiés aux problèmes de mathcmatiques. à plusicurs niveaux.

Plus spécifiqucmcnt dans le domaine de 1'éducation mathématique, les études sur Ia résolution de problèmes s'oricntcnt vers deux directions, qui né pcuvent pas être dissociées: Ia prcmièrc essaic de comprendre commcnt 1'enfant et 1'adolesccnt resolvem les problèmes. qucllcs sont les caractéristiques d'un expert en Ia résolution des problèmes etc. Uautre essaic d'élaborcr des sequences didactiques basées sur Ia résolution des problèmes. en opposition à 1'enseigncment classique.

On peut peut-être dire que le modelage est issu de Ia résolution de problèmes. En modelage, on essaie de décrire en termes mathématiques une situation plus ou moins complexo. Ainsi. le modelage peut être interprete, sansaucun déshonncur, comme Ia mathématisation d'unc situation-problème. Quelqucs uns des grands faits de Ia seience sont dans le domaine du modelage, comme par exemple les modeles de Ia gravitation universellc d'Isaac Newton et de Ia Theorie de Ia Rclativité d'Albert Einstein. L'enscigncment par modelage essaie de faire 1'élève participer, à un nivcau bien plus modeste. à cette activité d'cxpliqucr mathématiqucmcnt des phénomèncs bien définis dans leur contexte.

Quoique les mathématiques soient une seience et un langage universe), chaque groupe social les a traduites et les utilisc de façon bien spécifique. L'étude des mathématiques utilisées et créécs pour chaque groupe social est rethnomathématique, dont un des créateurs est un brésilien, Ubiratan D'Ambrósio (Ferreira, 1993, p. 137-140). Dans ces mathématiques on essaie de récupérer comment chaque groupe culturel travaille les mathématiques pour pouvoir racheter ces savoirs et les utiliser dans l'enseignement-apprentissage des gens de ce groupe. Dans un certain sens, rimportance de cette action était déjà sentie par Saint Thomas d'Aquin, quand il a aüirmé que le professeur doit parler Ia langue de ses eleves.

On remarque dans tout le mouvement de renouvellement de Tenseignement des mathématiques, au cours des derniers dix ans. Ia préoccupation dinsérer les mathématiques dans un contexte et de montrer qu'ellcs sont um: création culturelle de groupes humains et non pas d'esprits privilegies et isoles. La méthode logico-déductive des mathématiques, de plus en plus déclamée pendant le XX siècle. s'est étendue aux manucls seolaires avec le mouvement des mathématiques modernes. Ainsi. le modele rigoureux et formei par lcquel on cnscignait déjà Ia géométrie euclidienne s'est étendu à d'autres domaines du programme des mathématiques. La perception que ce modele n'est pas pédagogiquemcnt adapte àl'éIèved'aujourd'hui a augmenté. Demanière croissanlc on fuit Ia linéarité strietc du discours mathématique classique dans 1'enseignement des mathématiques. Dans un certain sens, Freudenthal s'y était déjà référé en parlant de Ia necessite des "axiomatisations locales", quoique ses mols né doivent pas être interpretes comme une défense des fragmentations post-moderne du discours mathématique. Pour lui, les mathématiques ont toujours gardé son caractèrc d'épistèmc dans le sens classique du mot.

Comme résultat de cette recherche du contexte et de 1'insertion des mathématiques dans un milieu, à une époque bien définie, Tintérct pour 1'Histoire des Mathématiques comme outil d'enseignement s'est aceru, au point d'avoir été créée une associalion internationale dédiéc aux rapports entre Ia Pcdagogie et 1'Histoire des Mathématiques.

La perception de 1'importance d'insérer les mathématiques dans un contexte a mené Régine Douady à Ia création du concept de dualité outil-objet: les concepts mathématiques sont d'abord un outil pour Ia résolution des situations-problèmes bien spécifiques, dans un contexte. Des qu'ils ont atleint ce statut d'outil, ils sont explicites par le professeur et 1'élève, et sortent de leur contcxte, acquièrent le statut de savoir mathématique et peuvent êtrc appliqués à d'autres situations. La. ils sont déjà transformes en mathématiques, abstraites, hors du contexte, ce qui paradoxalement leur donne une grande applicabilité et versatilité. Un des défis de 1'école est exactement de racheter le savoir-outil que les élèves apportcnt de chez eux, de Ia rue. et de le transformer en savoir-objct, riche et producüf.

On a développé aussi les études sur Ia métacognition avec des recherches dans trois directions distinetes. quoique connexes:

1) Votre connaissance de vos propres schémas de pensée. Combien exact etes-vous quand vous décrivez votre manière de penser?

2) Controle ou autorcgulation. Combien précisémcnt enregistrez-vous ce que vous êtes en train de faire quand. par exemple, vous résolvez un problèmc. et comment utilisez-vous le résultat de ces observations comme oricnlation pour votre conduite a posteriori?

3) Croyances et intuitions. Quelles idées sur les mathématiques apportez vous vos activités mathématiques et comment modèlent-elles Ia façon dont vous faites les mathématiques? (Schoenfcld, 1987, p.l90)

À mon avis, elles méritent d'être soulignées — les tentatives de théorisation entrepriseses par les chercheurs français à partir des idées de Brousseau. avec leurs concepts de dialétiques outil-objet, de génie didactique. contrat didactique. situation didactique. situation fondamentale, etc. et qui ont apporté beaucoup de lumière d'un côté sur ce qui se passe dans Ia classe et d'un autre côté sur Ia compréhension de certains blocagcs et du comment travailler pour les enlcver. Cette "école". au lieu d'essaycr de construirc une "théorie d'éducation mathématique" in abstracto, cherche à théoriser des situations bien spécifiques sur Jesquellcs il est possible de faire une analyse soigneuse. construire des théories locales et planifier des "expériences didactiques" qui renforceront ou refuseront Ia théorie.

Un autre domaine de recherche active est centre dans Ia sociologie des mathématiques et de Ia classe (Baldino, 1993, p. 132-136). Quel est le contrat explicite ou implicite établi entre le professeur et les élèves? Quelle est Ia gestion de Ia classe? Quelle est Ia participation des élèves à leur évaluation, au choix du contenu etc?

Dans cette direction, on souligne Ia perception et Ia compréhension croissante que renseignement des mathématiques né se fait pas dans le vide. 11 est conditionné à plusicurs contraintes institutionnelles. politiques et socioculturelles. Cunha (1993, p. 178) souligne Timportance des aspects sociaux de Tenseignement des mathématiques:

> *L examen des textessur I 'education mathématique montre qu 'ils né tiennent pas compte des conditions concrètes d 'education, ni des destinataires principaux — les élèves des écoles publiques. Peut-être pour cette raison, finissent-ils par se polariser autour de questions épistémologiques ou de questions didactiques et psychopédagogiques. Aíalgré I 'importance de ces questions, je veux appeler I 'attention, né serait-ce que de façon préliminaire, sur les aspects sociaux de I 'enseignement des mathématiques dans I 'écolepublique de ler et 2ème degrès. Sans prétendre èpuiser le sujet, on peut nèanmoins ajfirmer, par ce qu 'on connait des pratiques scolaires dans notre pays, que le manque de respect envers les dimensions sociales de l enseignement, prises en compte les considérations ci-dessous, empêchera le succès de toute solution didactique et psychopédagogique, pour plus ingénieuse qu 'elle soit.*

Parallèlcment à tous ces larges fronts de recherche, et parmi eux, les revigoram parfois. et les modifiant profondément, nous avons Ia présence de Fordinateur dans 1'éducation mathématique. Il a force à une nouvelle évaluation des contenus signifícatifs, à une recherche de nouvelles manières de les présenter, et, peut-être, de façon plus produetive à long terme, a permis de nouvelles perceptions de Ia façon dont se construit le savoir mathématique, outre que d'apporter un nouveau langage. de nouveaux problcmes et de nouvcaux schémas conceptuels à plusieurs domaincs de recherche. Au Brésil, les rccherches sur 1'informatique dans Téducation mathématique progrcsscnt de façon vigoureuse. Il y a dcxcellcnts groupcs à Rio Grande do Sul. dans le contexte plus vastc de rinformatique et de Téducation. finformatique dans Téducation mathématique est aussi étudiée à TUFRJ. à TUNESP à Rio Claro, à Ia PUC à Rio de Janeiro et à Ia PUC à São Paulo. L'étude de Tutilisation de Tordinateur dans Téducation mathématique. hormis certaincs exagérations et déviations initialcs. s'est afTcrmi comme Tun des domaines les plus actifs et les plus importants de Téducation mathématique. d'unc part comme outil de Tinvcstigation cognitivc. d'autre part comme moyen de renouvcler les cours traditionnels expositifs et linéaires.

La question du pourquoi enseigner les mathématiques se pose de plus en plus souvent. Au début des annécs 90. le Documcnt Primairc du SPEC affirmait déjà que Tobjectif c'e Tenseignement des mathématiques doit ctre de "préparer le citoyen p< ur agir dans une société complexe, chaque fois plus pénétrée par Ia Scicm:e et par Ia Tachnologic". (MEC, CAPES 1989)

Récemment, le National Council of Tcachers of Mathematics a essayé de répondre à cette question en dressant une liste des objectifs de Tenscignement-apprentissage des mathématiques de façon à préparer les citoyens pour agir dans une société moderne et complexe. De par une traduetion un peu libre, ces objectifs sont les suivants:

> *Parmi les compétences primaires a\>ec lesquelles I 'enseignement des mathématiquespeut contribuer à préparer les citoyens pour une société moderne, nous avons:*
>
> — *Ia capacite de planifier les actions et de projeter les Solutions à des problèmes nouveaux, qui exigent de 1'initiative et de Ia créativité;*
> — *Ia capacite de comprendre et de transmettre des idées mathématiques, par écrit ou oralement;*
> — *Ia capacite d'utiliser indépendamment le raisonnement mathématique, pour Ia compréhension du monde environnant;*
> — *savoir appliquer les mathématiques dans des situations quotidiennes;*
> — *savoir évaluer si les résultats ohtenus lors de Ia résolution des situations-prohlèmes sont ou né sont pas raisonnables;*
> — *savoir estimer mentalement des résultats ou des calculs approximatifs;*
> — *savoir appliquer les techniques primaires du caleul arithmétique;*
> — *sa\'oir employer lapensêe algéhrique, y compris I 'utilisation de graphiques, de tahleaux, de formules et d'équations;*
> — *sawir utiliser les concepts fondamentaux des mesures dans des situations concrètes;*
> — *connaitre les propriétés des figures géométriques planes et solides, en les rapportant aux ohjets d 'utilisation commune dans le quotidien ou au travail;*
> — *savoir utiliser Ia notion de probabilité pour prévoir les événements.*

Cette notion, selon laquellc Tenseignement des mathématiques vise. en fin de compte, à habiliter le citoyen à agir avec conscience critique dans un monde chaque fois plus complexe. oü des décisions vitales à Tespèce humaine sont prises, est três presente dans plusieurs axes de recherche en education mathématique. En general, on peut affírmer quaujourd^ui le professeur de mathématiques a conscience de sa responsabilité sociale. Les mathématiques né doivent ctre ni un jeu intellcctuel inconséquent. ni un outil de domination et de controle de Ia société. Comme construction sociale, elles appartiennent à toute Ia société, pour son bien.

Un autre axe de recherche se rapporte encore aux príncipes historiques et philosophiques de 1'éducation mathématique. Dans ce sens, on rencontre des tentatives de théoriser 1'éducation mathématique dans sa totalité, et qui essayent de 1'encadrer dans certains modeles, préexistants ou créés spécifiquement pour elle.

L'education mathématique est une activité essentiellement pluridis-ciplinaire et intcrdisciplinaire. Elle forme un grand are, oü il y a de Ia placc pour les rcchcrches et les travaux des genres les plus divers. Il y a de Ia place pour les travaux de recherche académique purê en psychologie, pour les activité de recherche et daction pour Ia formation des professeurs. pour 1'élaboration des testes. Ia recherche en histoire de renseignement des mathématiques et nombre d*autres. Ce qu'il faut comme point Commun à tous ces chercheurs, tels que mathématiciens, psychologues, éducateurs. philosophcs, historiens etc, c'est d'abord Ia rcconnaissance que le travail de tous a un but commun — 1'amélioration de renseigncmcnt-apprcntissage des mathématiques, à tous les niveaux, et le respect du travail des autres.

Comme nous 1'avons déjà dit, insérées dans le développement general du domaine de renseignement des sciences et mathématiques au Brésil. nous avons Ia croissance et Ia consolidation du sous-domaine de renseignement des mathématiques, ou de 1'éducation mathématique.

D'abord, on né dirá jamais assez du role des pionniers de 1'éducation mathématique au Brésil. Déjà dans les années 30, Euclides Roxo a été le portc-parole des mouvements de reforme préconisés par Félix Klein et par 1'IMUK. Son livre *V Enseignement des Mathématiques dans I 'Enseignement Secondaire* a encore aujourd'hui un goüt moderne. De même, dans Ia longue polemique qu'il a entreprise avec Joaquim Inâ^o de Almeida Lisboa, dans les années 30 et qu'en ce moment même est en étude par 1'équipe que je coordonne, on remarque cet aspect rénovateur, qui le pose comme le précurseur de 1'éducalion mathématique au Brésil.

Les graines lancées par plusieurs pionniers au milieu de rincompréhcnsion generale ont germe petit à petit et aujourd'hui on pcut voir, éparpillés par le Brésil, les fruits cueillis apres quatre décennies du travail de Ornar Catunda, Ubiratan D'Ambrósio, Maria Laura Leite Lopes, Martha de Souza Dantas et beaucoup d'autres, et entre eux je veux inclure le nom de Luiz Alberto Brasil, un des pionniers brésiliens à perccvoir 1'importance des idées de Piaget pour 1'enseignement des mathématiques.

En 1955, Martha de Souza a organisé, à Salvador, le Premier Congrès Brésilicn dÉducation Mathématique. Ont suivi les Congrès de 1957 au Rio Grande do Sul, de 1959 à Rio de Janeiro, de 1962 à Belém do Pará, de 1966 à São José dos Campos. São Paulo, b: congrès suivant aurait du être à Paraíba, mais n'a pas eu Iieu. La tradi íon de ces congrès né serait reprise qu'avec les Rencontres Nationales d'Éducation Mathématique, déjà dans les années 80, et elles se sont rt alisées dans 1'ordre suivant: Ia prcmière à Ia PUC de São Paulo, à São Pai Io, organisée par le professeur Tânia Campos, en 1987, Ia deuxième à Maringá, en 1988; Ia troisieme à Natal, en 1990 et Ia quatrième à Blumenau. Pendant le II ENEM, a été créée Ia Société Brésilienne d'Éducation Mathématique, SBEM.

Les premiers groupes de travailleurs et chercheurs en education mathématique se sont réunis en associations. Les trois principaux ont été le GEPEM, à Rio de Janeiro, le GEMPA, à Porto Alegre et le GEEM, à São Paulo, dont les membres ont traduü plusieurs volumes de Ia collection School Mathematics Study Group, l'un des mouvements réformateurs de 1 'enseignement des mathématiques aux États-Unis, dans les années 60.

Situation actuellc

Actuellement, le domaine de 1'enseignement des mathématiques augmente et se consolide rapidement au Brésil. On peut dire que Ia periodo 1985-1995 será vue, dans le futur, comme celle de Ia substitution progressive des amateurs par des professionnels. Le mot amateur n'a pas ici une connotation péjorative. Nous 1'utilisons pour definir des gens dont Ia formation initiale était scientifique (Physique. Mathéniatiques. Chiniie, Biologie), qui peu à peu se sont interesses aux problèmes éducationaux lies à leurs domaines. et ont commencé à travailler prioritaireinent dans renseignement des seiences ou des mathématiqucs. Quelqucs unsdentre eux sont três competents et créatifs et ont une reputation intcrnalionale.

Les professionncls sont les chcrchcurs du domaine, dont Ia formation est dejà dans l'enseigncment des seiences et des mathématiqucs.

On pcut dirc. avec Krasilchik (1987. p. 14-15), qu'il y a aujourd'hui au Brésil une

> *... nouvelle communauté académique — celle des éducateurs en seiences — un domaine de frontière entre I 'education et les seiences, et qui se préoccupe en priorité du signifié des disciplines scieniifiques du programine. Ce domaine de connaissance en formation est aujourd 'hui appuyé sur des associations de classe, des publications périodiques et des cours de formation de professionnels, au niveau de formation universitaire et de "mestrado ".*

De 1971 à 1990. 189 thèses de "mestrado", de doctorat ou de "livre docência"* sur Fenseignement des mathématiqucs (education mathématique) ont ctédéfenducs au Brésil (Fiorcntini, 1992). On estime qu'il y a actuellemcnt, en 1994, plus de 30 boursiers à Fétranger, suivant des programmes de doctorat dans le domaine de renseignement des seiences et des mathématiqucs. Dans les institutions avec des programmes formeis de "mestrado" dans cc domaine, étaicnt inscrits, en 1993, 55 eleves de "mestrado" et 9 de doctorat. A ces nombres on doit ajouter les élèves inscrits dans les institutions sur lesquelles nous n'avons pas reçu les données, et dans cclles qui présentent une produetion éventuelle de "mestres" ou docteurs (UFRJ, PUC-RIO. PUC-SP, UFF, UFMG, UnB etc), généralcment au moycn de leurs propres programmes de "mestrado" en education ou en cooperation avec eux, comme dans le cas de 1'USP Des 11 docteurs enumeres par les institutions consultées, en 1993, et qui travaillcnt dans renseignement des seiences et mathématiques, plus de Ia moitié travaillc certainement sur F education mathématique.

La region Sud-est brésilienne contient Ia plus grande concentration des centres qui ont des programmes formeis de "mestrado" dans le domaine de renseignement des mathématiques. Plus précisémcnt. FUnivcrsité de São Paulo, de longue tradition, surtout dans Fenseignement de Ia Physique et de Ia Biologie, compte aussi avec des chcrchcurs en education mathématique. Une grande part des recherches qui y sont produiles est réalisée à Ia Faculte cF Education. et FInstitut de Physique est celui qui a Ia plus grande tradition dans ce domaine. L'UNICAMP a plusieurs groupes qui travaillcnt dans 1'éducation mathématique. dans Fenseignement de Physique et de Ia Chimie, avec Ia participation de Ia Faculte d'Education. A FUNESP. à Rio Claro, fonctionncnt un "mestrado" et un doctorat en education mathématique, qui reçoivent périodiquement des chcrchcurs étrangers. Récemment, FUniversité Méthodiste de Piracicaba a ouvert, dans son programme de "mestrado" en education, un domaine de concentration en énscignement des seiences. La PUC de São Paulo possede un groupe vigoureux d'activités en education mathématique, et ses programmes de "mestrado" en education et psychologie ont vu défendre des thèses et des dissertations sur Féducation mathématique.

À Rio de Janeiro, un "mestrado" en education mathématique opere à FUnivcrsité de Santa Ursula. UUniversité Fédéralc de Rio de Janeiro, oü il y a plusieurs groupes de chercheurs dans les domaines de Fenseignement de Physique, de Biologie et surtout en education mathématique, a ouvert un cours de spécialisation en education mathématique. Le divers groupes dédiés à Fenseignement à FUFRJ

N.T.: Titre obtenu aprês le doctorat. au Brésil

s'intègrent dans le fameux "Projet Fundão", lequel, ayant prévu Ia prcoccupation du SPEC d'appuyer des activités relatives à l'environnement, a de façon pionnière inclus dans son premier projet un groupe de Géographie et d'Environnement. La PUC-Rio de Janeiro est en train d'ouvrir un programme interdisciplinaire de "mestrado" en 1'enseignement des seiences et mathématiques, qui engage les Départements de Mathématiques et dÉducation. UUniversitc Fcdcrale Fluminense a plus de tradition dans renseignement de Physique, mais compte aussi avec des chercheurs en education mathématique. surtout dans renseignement de Ia Géométric.

Dans Ia region Sud, 1'Institut de Physique de 1'Université Fédérale de Rio Grande do Sul se dedie traditionncllement à des recherches dans renseignement de Physique et a déjà forme plusieurs "mestres" dans ce domaine. Dans cette University opèrcnt aussi des chercheurs qui se dedient à renseignement de Ia Chimie et à léducation mathématique. Dans 1'État de Santa Catarina, le programme de "mestrado" en Education possede un axe de concentration dans 1'enseignement des seiences et mathématiques. qui forme des "mestres" et des docteurs.

Dans Ia region Nord-est, le "mestrado" en psychologie de 1'Univcrsité Fédérale de Pernambuco se dedie depuis longtemps déjà à des recherches qui concernent 1'éducation mathématique et de nombreuses dissertations ont déjà été soutenues sur ce sujet.

Quclques groupes de recherches maintiennent 1'échange avec 1'étranger et reçoivent des visiteurs-chercheurs. Comme exemple on peut citer, entre autres, le "mestrado" en Psychologie de rUFPE, les groupes d'éducation mathématique de rUFRJ. de Ia PUC-RJ, de Ia PUC-SP. de l'UNESP-Rio Claro, de Santa Úrsula. de 1'UNICAMP et de FUFSC, les divers groupes d'enseignement des seiences de 1'USP et UNICAMP, le groupe d'enseignement de Physique de 1'UFRGS. Actucllcment, il existe un accord de cooperation internationale en recherche sur 1'éducation mathématique, qui comprend Ia PUC à São Paulo, Ia PUC à Rio de Janeiro et 1'Université Fédérale de Pernambuco.

Il existe au Brésil plusieurs périodiques à publication régulière dédiés à Ia divulgation de travaux sur 1'enseignement des mathématiques: *Revista de Ensino de Ciências*, dirigée par des professeurs du premier degré; le *Boletim do GEPEM* qui public des articles de recherche et traduit parfois des articles importants de périodiques étrangers; Ia revue *Temas e Debates*, de Ia Société Brésilienne en Education Mathématique, le *Bolema*, du programme de "mestrado" et de doctorat en education mathématique de Rio Claro. On a publié récemment le premier numero da Ia *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, dédiée à l'ethnomathématique. La *Revista do Professor de Matemática* de Ia Société Brésilienne d'Éducation Mathématique, dirigée aux professeurs du deuxième degré, s'est déjà affermie et dans ses articles montre un contenu qui se préoccupe du problème de méthodologie.

On voit déjà au Brésil des réunions traditionnelles sur 1'enseignement des seiences et des mathématiques: le Congrès Sud-Brésilien de 1'Enseignement des Sciences; le Congrès Nord-Nord-est de 1'Enseignement des Sciences et Mathématiques; les Rencontres Nationales d'Éducation Mathématique; les Rencontres Paulistas d'Éducation Mathématique; le Congrès de 1'Enseignement de Ia Physique; les Rencontres Perspectives de 1'Enseignement de Biologie; les Rencontres Nationales des Professeurs de Chimie. On a réalisé, en 1993, à Rio de Janeiro, le Premier Séminaire International de 1'Education Mathématique, avec Ia présence de conférenciers invités de divers pays.

Outre les réunions spécifiques organisées par Ia Société Brésilienne dÉducation Mathématique, les réunions régionales de Ia Société Brésilienne des Mathématiques ont ouvert un espace pour les activités de 1'enseignement et offrent des mini-cours à des professeurs du 2ème degré et des possibilites de discussion sur 1'enseignement. De même, aux réunions annuelles de Ia SBPC de ces dernières annécs, on voit croitre le nombre d'activités sur 1'enseignement des seiences et mathématiques.

Dans les dernières années, les demandes de bourses ou d'aidcs présentées au Comitê de 1'Éducation du CNPq dans le domaine de 1'enseignement des sciences et mathématiques se concentrent en education mathématique, suivies par cellcs du domaine de 1'Enscignement de Ia Physiquc, de Ia Biologic et de Ia Chimie, dans cet ordre. Le total de demandes comprenant tous les domaines de l'enseignement des sciences et mathcmatiques a di mi nuc. Dans le domaine de 1'éducation mathématiquc, Ia majorité des demandes sont pour des sujeis concernant rinformatique et 1'cnscigncmcnt des mathcmatiques. Au Comitê de 1'Éducation il y a un rcprésentant du domaine de 1'enseignement des sciences et mathcmatiques.

Il est impossible de dresser Ia liste de tous les axes spécifiques de recherche en education mathématiquc en cours au Brésil. La liste suivante donnc les indications sur les recherches dans le domaine, foumie en 1993 par Ia plupart des inslitutions consultccs:

— programme des mathcmatiques au premier et deuxième degrés;
— programme des liccnccs en mathcmatiques;
— education mathématique comme domaine de connaissance,
— formation initiale des professeurs (cours de professoral et de licence);
— formation continue de professeurs des mathématiques;
— dcveloppement des concepts mathcmatiques dans le processus enseignement-apprcntissagc;
— renseigncment-apprcntissage de Ia Géométrie;
— Ia théorie de Van Hicle;
— informatique et education mathématique;
— processus d'acquisition de concepts mathématiques au cours d'expéricnces de renscignement. du point de vue construetiviste;
— epistémologie de Ia pcnséc algébrique;
— vision intégrée entre les mathématiques. Ia Physique et TAstronomie selon une perspective ethnographique;
— gestion de Ia classe: les groupes d'assimilation solidaire;
— genèse de Ia pensée différenticlle;
— ethnomathématique;
— résolution de problèmes et créativité;
— mathématiques et langage;
— fondements philosophiques et seientifiques de l'éducation mathématiquc;
— rhistoire comme proposition méthodologiquc;
— créativité dans Ia perspective de Ia Psychologie cognitive visant à rcnscigncmenl-apprentissage des mathématiques;
— rhistoire de renscignement des mathématiques au Brésil;
— analyse, du point de vue du contenu et du dévcloppement cognitif de lélève. des livres textes du premier, dcuxièmc et troisieme degrés;
— analyse et expérimentation de nouvellcs struetures pour des cours universitaires comprenant 1'actualisation des programmes et Futilisation de tcchnologics de I'informatique;

Pour conelure cc travail. jc retourne à Farticle de Cunha, déjà cite. De manicre heurcuse et cristallinc, il caractérise les dcux priorités pour F education mathématiquc au Brésil. En premier lieu:

> *L'école normale* est 1'élèment plus important d'une action polilique éducationnelle visant à l 'amélioration de 1'enseignement des mathématiques, cequi, d'ailleurs, vautpour I 'alphabétisation. Il né s 'agit pas simplement d 'augmenter Ia charge horaire des mathématiques dans le cours normal ni dencourager les enseignantes à dominer des techniques didactiques non conventionnelles. Il s 'agit de quelque chose de plus difficile: c 'est de changer les valeurs qu 'elles ont envers les mathématiques comme une "vocation masculine ", c 'est à dire, de briser Ia chaine de reproduetion et de discrimination. Pour en arriver là, itfaudra apprendre à connaitre ces valeurs et leur relations a\>ec d'autres, ce qu 'on né peutfaire qu 'a\'ec beaucoup de recherche, non pas sur les mathématiques elles-mêmes, mais sur les postulantes au métier d 'enseignement et leur "mentalité ".* (Cunha, 1993, p.180-181)

[1] N.T.: Cours de formation de professeurs

ce qui nos renvoie aux études sur Ia métacognition et au fait que Tobjectif principal de 1'éducation mathématique au Brésil doit être d'amcliorer 1'activité du professcur dans le processus d'enseignement-apprentissage. Le problème primaire de l'éducation mathématique dans notre pays devrait être celui de Ia formation du professeur.

A ce sujct, on a beaucoup appris avec les projets développés avec 1'aide des ressources du SPEC. dans les années 80. Aujourd'hui les cours fondés uniquement sur le contenu et pour des classes de courte durée n'ont plus Ia confiance de Ia communauté. Comme disait plus haut Cunha, Timportant c'cst de changer Tattitude du professeur. Quelques projets, comme celui finance par Ia Fondation VITAE en cooperation avec les Secretariais dÉducation de plusieurs États, se proposent à réaliser un travai! à long termc avec des groupes de profcsseurs, justemcnt pour essaycr d'arriver à ce changement d'attitude; en même temps, ce projet elabore des livres pour 1'utilisation des profcsseurs engagés et pour être adoptés dans les disciplines mathématiques des cours de licença

Cunha continue dans le même article:

> *Il/aut changer radicalement le point de vue: s 'arracher à Ia 3ème annêe du 2ème degré (qui est surtouí interessante, réellement ou censément, pour les élèves qui feront un cours technique ou des cours supérieurs en sciences exactes) pour se mettre à laplace des élèves qui quittent I 'école, pour une raison ou pour une autre, a\>ant d'arriver à ce Slade, ce qui arrive à 88% de ceux qui entrent ensemble à I 'école chaque année. Pour cette grande majorité, ilfaut que les mathématiques aient une application pratique et que celle-ci soil immédiatement et directement perçue des que possible, comme, d'ailleurs, I 'apprentissage de Ia lecture et de I 'écriture. Il/aut pour cela ahandonner I 'altitude de ceux qui dominent l 'ensemble des mathématiques en tant que corps du savoir, pour lequel Ia déduction est I 'opérationfondamentale, pour entrer à I 'intérieur du processus d 'enseignement-apprentissage, ou I 'induction doit être le point de départ du développement de Ia pratique de Ia déduction, oüjustement les mathématiques contribuent le plus al'education en general. Alors, comment partir des pratiques quotidiennes pour arriver aux mathématiques est le thème de recherche à proposer, qui peut reunir des mathématiciens et d 'autres professionnels, à I 'exemple des psychologues, des pédagogues et sociologues.*

ce qui nous fait plonger au plus profond de rinterdisciplinarité de T education mathématique, et rachète en même temps toute notre responsabilité sociale.

Le défi pose est d'enseigner des mathématiques utiles et importantes pour le citoyen. Comme dit Frank Lesler, en se référant au titre d'un livre de E.T. Bell, *Les Mathématiques, Esclaves et Reines des Science,* tout élève de mathématiques. au ler, au 2ème et au 3ème degrés. doit avoir ropportunité de connaitre Ia reine, de sentir son enchantement et son pouvoir, ses mathématiques, sa capacite organisatrice des structures logiques, sa versatilité prodigieuse.

Referentes bibliographiques

BALDINO, Roberto Ribeiro. Balanço da assimilação solidária no 3[9] grau. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3. *A nais.* Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 1993. p. 132-136.

BRASIL. MEC. CAPES. *Documento básico para a segunda fase do Subprograma Educação para a Ciência.* Brasília, 1989.

CARVALHO. João Pitombeira de. As idéias fundamentais da Matemática Moderna. *Boletim do GEPEM,* Rio de Janeiro, n.23, p.7-15, 1985.

_________. Avaliação e perspectivas da área de ensino de Ciências e Matemática no Brasil. In: CURY, C.R.J. (Ed.). *Avaliação e perspectivas na área de Educação,* 1982-1991. Porto Alegre: ANPED: CNPq, 1993.

CUNHA, Luís Antônio. Ensino da Matemática na escola pública de 1^{B} e 2^{9} graus: pela mudança de ponto de vista. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 3. *Anais.* Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 1993.

CURY, Carlos Roberto Jamil. Avaliação e perspectivas na área de educação 1982-91: documento síntese. In: CURY, C.R.J. (Ed.). *Avaliação e perspectivas na área de Educação,* 1982-1991. Porto Alegre: ANPED: CNPq, 1993.

FÁVERO, Maria Helena. A relação entre a Psicologia Cognitiva e a educação matemática: alguns aspectos teóricos e metodológicos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. *Anais.* Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 1993. p. 150-157.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. Etnomatemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. *Anais.* Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 1993. p. 137-140.

FIORENTINI, Dario. A relação ensino-pesquisa em educação matemática no Brasil. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. *Anais.* Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 1993.

____________(Org.). *Banco de teses e dissertações de mestrado, de doutorado ou livre-docência, produzidas ou defendidas no Brasil e que tratam da educação matemática.* Blumenau: Sociedade Brasileira de Educação Matemática: UNICAMP, FE, CEMPEM-DEME, 1992.

KRASILCHIK, Myriam. *O professor e o currículo das ciências.* São Paulo: EPU: USP, 1987.

SCHOENFELD, Alan H. What's all the fuss about metacognition? In: SCHOENFELD, A.H. (Ed). *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.

LMMPORTANCE DU SAVOIR ETHNOMATHÉMATIQUE INDIGÈNE À L'ÉCOLE DES NON-INDIENS

Eduardo Sebastiani Ferreira*

Introduction

Mon engagement dans P education indigène au Brésil a commencc il y a huit ans. quand jai été invité à assister le travail éducationnel en mathématiques à 1'école du village indien Tapirapé, dans TÉtat du Mato Grosso et ceei parce que je faisais dejà un travail dans les "favelas" et dans les regions rurales voisines de Ia ville de Campinas. Ce commencement. encore timide. a été suivi par une grande quantité d'invitations d'autres régions: j'étais à cctte époque, d'après ce que je sais, le seul mathématicien interesse à 1'éducation indigène. Fetais assiste par des collcgues indienistes, anthropologues et linguistes et j'ai commencé comme j'ai pu le travail chez quclques tribus en cherchant toujours à respecter Ia culture indigène, avec le soucis constant de né pas Ia détruire, mais au contraire, de Ia valoriser.

Education indigène

Un panorama actuel de Ia situation indigène au Brésil et une Philosophie de Ia façon dont on doit penser leur scolarisation se trouve dans le *Cahier d'Education Èlèmentaire,* série Institutionnclle, volume 2:

> *// existe aujourd'hui, au Brésil, environ 200sociétés indigènes diffèrentes qui parlent près de 180 langues et dialectes et habitent dans des centaines de villages situes dans des différents États brésiliens. Subsistants d 'une grande population, dont les estimatives historiques indiquent avoir eu environ 6 rnillions d individus à I arrivée des eurvpéens au Al II siècle, les sociétés indigènes ont des traditions culturelles spécifiques et ont vécu des processus historiques distinets. Chacun de ces groupes est uni que et a une i den ti té propre, spécifique, fondée sur sa propre langue, sur le territoire habite et exploité; sur ses croyances, habitudes, histoires et organisation sociale.*
>
> *D 'un autre côté, les sociétés indigènes partagent un ensemble d'élémentsprimaires qui sont connnuns à toutes les sociétés et qui les rendent diffèrentes de Ia société non-indigène. Ainsi, les peuples indigènes ont des rnanières propres d 'occupation de Ia terre et d'exploitation des ressources qu 'on y rencontre, elles ont leurs propres rnanières de vivre en communauté, et ont leurs propres rnanières d enseigner et d'apprendre, basées sur Ia transmission orale du savoir collectif et du sa\'oir de chaque individu.* (MEC, 1993, p.10)

Ces premisses nous amènent à considérer que "les écoles indigènes, par conséquent, devront ètre spécifiques et différenciées, c'est-à-dire que les caractéristiques de chaque école, dans chaque communauté, né pourront surgir que du dialogue, de l'attachement et de 1'engagement des groupes respectifs, comme agents et coauteurs du processus". (MEC, 1993, p. 11)

Je me suis trouvé, une certaine époque, assesseur de plus de 10 tribus, à Ia charge d'orienter et de former les professeurs-indiens qui donnaient des cours dans les villages, ou qui allaient prendre en charge 1'école. Avec toute Ia diversité au devant de laqucllc je me suis trouvé des Ia phase de recherche ethnographique (langues diffèrentes, cultures diffèrentes et même des histoires qui avaient três peu en Commun), j'ai décidé de travailler avec un groupe d'étudiants au niveau de "mestrado". Chacun d'entre eux assumait le travail ethnographique et 1'assistance aux écoles, et moi, je commençais chaque recherche et j'orientais ces élèves.

' IMECC-UN1CAMP

Nous avons alors forme à 1'UNICAMP, à 1'Institut des Mathématiques, Statistiques et Sciences de Flnformatique, un groupe interesse à 1'éducation indigène et spécifiquement à 1'éducation mathématique des indigènes. Comme résultat nous avons eu 1'implanlation d'écoles dans les villages avec un programme spécifique, le changement d'attitudc des professeurs non-indiens qui travaillaient dans les écoles des villages indigènes. sclon une Philosophie que nous croyons Ia meillcure pour ce type d'action.

Une des qucstions les plus freqüentes qui mest posée quand je parle de mon travail est Ia suivante: Pourquoi une école de blancs dans un village indigène? Faut-il une école qui aille enseigncr en particulier aux indigènes une science dévcloppéc par Ia société européenne? Je reviens ici au cahier du MEC pour répondre à ccs inquiétudes:

> *L 'école indigène a pour objectif Ia conquète de I 'autonomie socio-éconoinique-culturelle de chaque peuple, dans le contexte de Ia récupération de sa mêmoire historique, de Ia réqffirmation de son idenliíé ethnique, de I 'étude et de Ia valorisation de sa propre langue et de sa propre science, synthétisée dans ses ethno-connaissances, aussi bien que dans I 'accès aux informations et aux connaissances techniques et scientifiques de Ia société majoritaire et des autres sociétés, indigènes ou non-indigènes. L 'école indigène doit faire partie du système d 'education de chaque peuple dans lequel, en même temps qu 'on assure et fortifie Ia tradition et Ia façon d 'être indigène, on fournit les èlèments d'une relation positive avec les autres sociétés, relation qui présuppose de Ia part des sociétés indigènes le plein controle de leur réalité: Ia coinpréhension du processus historique ou elles sont engagées, Ia perception critique des valeurs et contre-valeurs de Ia société qui les entoure et Ia pratique de I 'autodétermination.*
>
> *En conséquence, I 'education indigène doit être nécessairement spécifique et dijférenciée, interculturelle et bilingüe.* (MEC, 1993, p. 12)

Quelles mathématiques construire dans une école avec ces caractéristiques? Ou bien en explicitam ce questionnement: Comment fournir à 1'élève indigène Ia construction de concepts des mathématiques formelles appelées aussi académiques? Je suis allé assistcr Técole indigène en raison de mon travail d'ethnomathématique dans les écoles des banlieues et des régions rurales. Finalement, ma formation et mes croyances (dans le sens de Kuhn) d'enseignant des mathématiques est dans le Programme Ethnomathématique et de 1'Histoire des Mathématiques.

Programme d'cthnomathcmatiques ou alphabétisation en "mathématiques maternelles"

On né peut pas aujourd'hui ignorer des changements existants dans les mathématiques qui, nous le croyons, sont les reflets des changements dans Ia vie sociale de notre planète. Dans *The Sociologv ofkíathematics Revisited: a Personal Note,* D.J. Struik affirme: "Un changement radical dans Ia nature de notre relation sociale aboutira à un changement dans Ia façon d'organiser le faire mathématique — **et** ce changement modifiera notre pensée par rapport au contenu mathématique" (Struik. 1986, p. 280). Notre relation sociale à Ia fin de ce siècle semble être plus critique et tolerante. Le paradigme rationaliste-cartésien est mis en doute.

Le reflet de tout cela se fait sentir dans les mathématiques... "Ia nature des mathématiques est en train de changer: on en voit de nombreux Índices. Chaque jour, de plus en plus de gens questionnent le modele infaillible et absolu des mathématiques. éloigné de 1'intuition empirique et de Ia réalité terre à terre qui a domine jusqu'à maintenant urbi et orbi. Chaque fois, on aperçoit mieux l'intime relation entre les mathématiques et Ia société. Chaque fois plus d'espaces s'ouvrent pour un nouveau paradigme sur Ia nature des mathématiques, un paradigme empirique et construetiviste, un paradigme qui a recours à Tintuition sensorielle, un paradigme qui integre en son sein les influences sociale£%t culturelles; qui recourt à Thistoire des mathématiques et des sciences comme inspiration, non pas seulement pour des anecdotes, mais aussi pour établir Ia logique qui soutient Ia pratique éducative d'une façon plus correcte". Ces mots ont été dits par AR. Zuftiga à Ia Confcrence Les Mathématiques Modernes dans les Amériques: Philosophie d'une Reforme, au VIII CIAEM, Miami. USA, 1991 (Zuftiga, 1992. p. 13-14).

Pour mieux comprendrc cette nouvclle vision des mathématiques, il faut qu'on fasse une nouvelle interprétation de son "histoire officiellc", exposée dans Ia majoritc des livres. Dans cellc-ci, peu sont les cxccptions qui voient les mathématiques comme une création humainc qui né se développe pas indépcndammcnt des facteurs socioculturels. Uhistoire des mathématiques qui y est décrite est linéaire, internaliste, évolutionniste, imprégnée d'curocentrisme et ignorante des mathématiques développccs en culturcs non dominées par Thomme blanc occidental.

"Aux historiens des sciences Ia charge de récupérer les connaissances, les valeurs et les attitudes, souvent reléguées à un plan inférieur, ignorées ou meme réprimées et éliminées. qui pourront être décisives dans Ia recherche de ces nouveaux chemins", a aflírmé D'Ambrosio en se référant à Ia recherche de "nouveaux chemins pour rhumanité. avec 1'objectif de survivance de Ia planète et de Ia Civilisation". Et il poursuit: "Ia recherche de nouvelles voies pour le progrès a été dominée par des modeles académiques rigides, soutenus par une Histoire et une Philosophie des Sciences qui suggèrent un progrès seientifique linéaire, cumulatif, au sein d jquel il n'y a pas de possibilite d'échapper au désavantage actuel... La recherche d'alternatives historiographiques qui puissent conduire à une histoire que né soit pas imbue d'un déterminisme eurocentrique souteneur du maintien du status-quo est essentielle dans le processus qu'on vit maintenant, de questionnement de 1'ordre international". (D'Ambrosio, 1993, p.7)

Quel est le reflet de cela dans 1'école et surtout dans les cours de mathématiques? Pour Zuftiga, à Ia conférence citée ci-dessus, "... je dis toujours que les enseignants des mathématiques sont ceux qui peuvent le mieux percevoir les problèmes de Ia vision rationaliste, platoniquc et formaliste des mathématiques. Précisément, parce que Ia classe est un laboratoire vivant ou fonctionnent Ia tentative et 1'erreur, un laboratoire formidable oü on voit les vertus et les défauts plus rapidement". (Zuftiga, 1992. p. 14)

Le modele technologique dominant dans L education actuelle n'a pas apporté d'améliorations significatives pour Ia classe, de meme qu'il né répond pas aux questions de cette société emergente. Il faut donc chercher d'autres sorties de secours pour 1'éducation mathématique. qui accueillent aussi bien les expectatives des professeurs et eleves que cclles de Ia société.

Neil Postman tisse des considérations qui apportent une lumière dans ce sens. Il dit:

> *Ouandje regarde les principaux problèmes actuels, je vois qu 'ils n 'ont rien à voir avec Ia technologie. S 'il existe des enfants qui meurenl de faini en Somalie, si Ia criminalitè sème Ia terreur dans nos villes et si les families se fragmentent, ce n 'est pas parce qu on dispose de données, dlnformations ou mème de connaissances insujfisantes. Il manque une autre chose.* A/o/, *je né contredirais pas une seconde l 'affirmation au sujei de Ia possibilite d 'utiliser des ordinateurspour un apprentissage plus ejjicace ou plus intéressant. Mais Ia question qu 'on doit se poser, continuellement, c 'est: à quoi ça sert d 'apprendre? C 'est ici que vient le problème. Les seules réponses que lesgens ojfrent dernièrementsont: "lousdevezallerà I'écolepour trouverde meilleurs emplois ". Cela signifie clairement penser aux Etats-Unis comme une économie, au lieu de les voir comme une culture. Il doit y avoir d 'autres raisons pour que les écoles existent. On a besoin de récits unificateurs, c 'est à dire, des* mythes partagés *par tous (c 'est nous qui soulignons), qui donnent le*

> *sens, les buts et Ia direction à une culture. C 'est cela que les écoles doivent fournir. Il existe une grande différence entre acquérir Ia connaissance pour gagner sa vie et acquérir Ia connaissance pour construire une vie.* (Postman, 1993, p.21)

Le programme ethnomathématique est une tentative baignée par Ia recherche des mythes partagés par tous qui soient mathématiquement significatifs. Il proposc "un point de vue épistémologique altcrnatif associe à une historiographic plus vaste. Il part de Ia réalité et arrive, de façon naturelle et à travers une vision cognitive à forte base culturelle. à 1'action pédagogique". (D'Ambrósio, 1993, p.6)

Paulus Gerdes. dans son livre *Études Ethnomathématiques* définit rethnomathématique quand, en transposant Ia caractérisation de Favrod d'ethnolinguistique à rethnomathématique, il écrit: "L'ethnomathématique essaie détudier les rapports mathématiques (ou idées mathématiques) dans ses rapports avec 1'ensemble de ia vie culturelle et sociale". (Gerdes, 1989, p.2)

Le programme ethnomathématique rachète les mathématiques existantes sous différentes formes d'expression culturelles presentes dans le quotidicn de releve et quoiqu'on né parte pas de ce qu'on appelle les mathématiques académiques (ou occidentales), par besoin, on emploie Ia terminologie académique au cours de sa discussion. Nous créons des modeles mathématiques comme tentatives de solutions aux questionnements soulevés par l'ethnologie dans une réalité donnéc.

Avec les schemas n°s 1 et 2 on cherche à traduire graphiquement Ia situation décrite. Dans le schéma n° 1, on montre les étapes à suivre lors de 1'utilisation du programme ethnomathématique en classe. Le schéma n° 2 montre comment ce programme est inséré dans un contexte plus vaste, mais dans Ia classe, appelé par quelques enseignants de modelage mathématique.

Notre processus commence par ralphabétisation mathématique que, pour utiliser Ia terminologie de Ia linguistique pour exprimer le savoir ethno de 1'enfant, nous appcllerons "mathématiques maternelles". Lexpression de ce savoir est passée à 1'écrit au moycn de Ia terminologie des mathématiques occidentales. Il faut comprendre le terme mathématiques maternelles comme le savoir mathématique que 1'enfant apporte à 1'école.

On a deux raisons pour appeler "mathématiques maternelles" rethnomathématique que 1'enfant apporte à 1'école. D'abord le terme suggcre une analogie avec 1'alphabétisation de Ia langue materncllc; Ia deuxième raison est Ia grande quantité de concepts recouverts sous le titre dethnomathématique. Celle-ci est utilisée, aujourd'hui, pour nommer le savoir mathématique construit par un groupe ethnique, c'est à dire, depuis les mathématiques du maçon, par exemple, aux mathématiques des chercheurs.

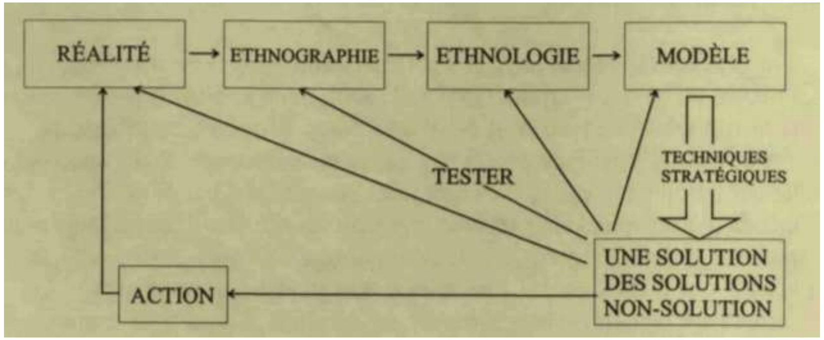


Schéma I

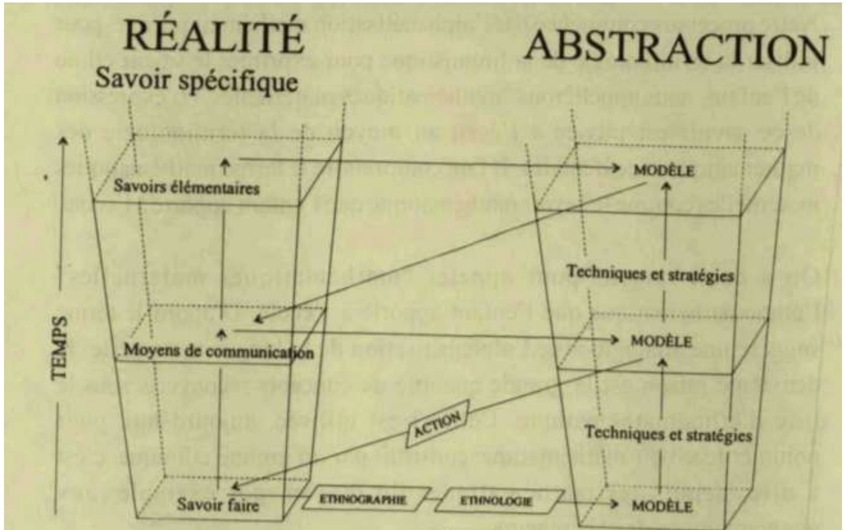


Schéma 2

Le savoir indigène dans 1'éducation du non-indigène

J'ai déjà écrit quelques articles sur 1'éducation indigène et le travail en villages indigènes (Ferreira, 1990a, 1990b), mais je n'avais pas encore écrit comment ce savoir peut collaborer avec l'éducation mathématique des non-indigènes. Pour cela il faut que je me situe face à l'éducation et 41'éducation mathématique comme jc les vois aujourd'hui. Nous sommes passes par une phase três recente, qui peut encore être détectée dans Ia majorité des écoles, quoique contestée par tout éducateur mathématique actuel, qui a été celle du formalisme. On peut Ia résumer ainsi: "Le formalisme demandait Ia suppression du signifié de 1'objet pour ordonner le travail exclusif avec Ia 'forme' et avec le rapport entre les objets, qui étaient derives des bases axiomatiques des théoríes... Des qu'un résultat mathématique est découvert, il faut qu'il soit 'justifíé' par une Structure formelle et alors il est écrit pour être enseigné" (Moreno-Anella/Waldegg, 1983, p.655). La survalorisation de Ia forme au détriment de Fobjct a fait que 1'enseignement se revêtait d'un enchainement théorique de définitions et démonstrations logiquement constituées et que les mathématiques soutenaient un discours Structure incontestable de vérités dites universelles, qui né permettait à 1'élève aucune contestaïon et qui né lui laissait que Ia purê et simple répétition du même discours.

Depuis Platon et Aristote, en passant par Descartes, les objets mathé-matiques, épistemologiquement constituas sont indépendants de Ia réalité. Cest Piaget, appuyé sur des idées kantiennes, qui a changé cette con-ception des objets mathématiques. ... "Pour Jean Piaget — Les objets mathématiques n'habitent plus un monde interne ou externe pour le savoir, mais sont les produits construits par le savoir lui-même au moyen d'un processus continu d'assimilation et d'accommodation qui se déroule dans ses structures cognitives". (Moreno-AnellaAValdegg, 1993, p. 657)

Base sur ce processus cognitif nait le constructivisme dans 1'éducation ou dans le cas des mathématiques, Ia forme perd son statut d'importance au profit de 1'action qui, contextualisée, donne Ia signification aux objets mathématiques.

Le savoir, du point de vue constructivisme, est toujours contextualisé et jamais separe du sujet; dans le processus c e connaissance, le sujet designe une série de signifiés pour Fobjet. Connaitre c'est agir, mais connaitre implique aussi comprendre de quelle manièie le savoir peut être reparti avec les autres... Les mathématiques sont alors reconnues comme une activité essentiellement abstraite oü 1'abstraction réflexive est 1'axe de 1'activité et 1'intériorisation des actions est son point de départ...

Les mathématiques travaillent avec les structures d'un monde ideal dont Ia "matière première" est 1'intériorisation de 1'action du sujet. Un langage formei est requis pour décrire ce monde ideal. Dans Ia version de Ia didactique dérivée du formalisme, il existe une tendance à identifier les objets mathématiques (qui sont des objets épistémiques avec leurs éléments constitutifs du savoir) par le nom qui nous utilisons dans le langage formei. De cette manière. Ia réalité épistémologique est cachée, mais Ia necessite de créer un signifié Ia met en lumière. Pourquoi né pas profiter des avantages de cette situation inévitable? (Moreno-Anella/ Waldegg, 1993, p.658-600).

Si l'on pense 1'école du point de vue constructiviste, il faut Ia restructurer dcpuis le programme jusqu'à Taspect physique. Avec Taction qui prend 1'espace de Ia forme... "L'expérience dans 1'école et hors 1'école est constituée par des actions et des interactions qui forment toutes elles le développement de 1'individu. Ainsi. on né peut pas parler d'expérience extra-scolaire et d'cxpéricnce scolaire comme antagoniques. Un des aspects importants pour Ia définition du programme d'une école est Ia connaissance de Ia pratique culturelle du groupe vers lequcl 1'école se dirige, puisque ces pratiques definissem certaines stratégies d'action et modeles d'interaction entre les gens, qui sont determinantes dans le processus de développement de 1'individu" (MEC, 1993, p. 13). Cetexte se refere aux écoles indigènes, mais je crois qu'il est importam pour n'importe quelle école, quand on respecte 1'ethnosavoir du groupe vers lequel 1'école se dirige. Je continue à citer le même texte: "Pour une action éducationnelle effective, sont nécessaires, non seulement une intense expérience de développement des programmcs, mais aussi des méthodes d'investigation et recherche pour comprendre les pratiques culturelles du groupe" (MEC, 1993, p. 13). On aura ici contemple tout le programme ethnomathématique, avec sa recherche sur le terrain (ethnographie). 1'analyse (ethnologie). Ia construetion du modele mathématique. Ia recherche de ses solutions, les controles de chaque phase et à Ia fin, à mon avis le plus importam, le retour de Ia recherche à Ia communauté. Au-delà du respect à Ia culture du groupe Iui-même, il est três importam que 1'école n'oublie pas les autres cultures. puisque: "L'interculture, c'est-à-dire, 1'échange positif et mutuellement enrichissant entre les cultures des diverses sociétés, doit être Ia caractéristique de base de 1'école..." (MEC, 1993, p. 11). Le texte complete Ia phrase par: "de 1'école indigène", mais je réaffirme quaussi enrichissante est 1'interculture dans n'importe quelle école.

Après tout ce que j'ai dit, je pense qu'il est clair que je trouve importam que 1'ethnomathématique indigène soit exposée aax eleves non-indigènes. En dehors de toute valeur du rapport interculturel d'un savoir construit dans notre pays, de Ia valorisation de Ia culture d'une autre société qui est dominée par Ia société qui 1'entoure; c'est chez les mathématiques elles-mêmes que je veux relcver cette valeur.

Aujourd'hui les mathématiques perdent leur statut de "mathesis universalis", c'est à dire de vérité universclle et d'existence indépendante des êtres humains qui né font que les redécouvrir pour assumer leur role d 'une science créée par nous, donc sans vérités absolues et contextualisécs. Rien de mieux pour montrer cette nouvclle vision de cette science que de voir comment d'autres sociétés Ia construisent. Quand 1'unité dans ces tribus brésiliennes telles que les Tapirapé, Krahó et Mynky est le chiffre 2 et non pas le chiffre 1, on sent limportance sociale de Ia création mathématique. Cette conception du chiffre 1 comme unité pour les mathématiques dites occidentales vient de Parmenides en Grèce au IV siècle AC. quand il se refere à 1'unité de 1'être (voir Szabó, 1977, p. 282, 287). Un exemple simple comme celui-ci "fait s'écrouler" toute conception d'une mathématique universclle, et 11 création des objets mathématiques sont perçus comme contextualisés avec une histoire et un signifié social.

Jaurais nombre d'exemples à citer, comme Ia conception des fractions pour les Krahó, 1'importance des diagonales des rectangles pour les Tapirapé, Ia symétrie de rotation dans Ia peinture corporelle des Kadawel et beaucoup d'autres que mon travail ethnographique m'a apportés. Pour les professeurs du cycle secondaire, je pense que nous devrions — aujourd'hui nous sommes déjà une dizaine de mathématiciens qui assistem 1'éducation indigène — écrire spécifiquement soit un livre para-didactique ou alors collaborer avec les livres textes des mathématiques dans le sens d'apporter à 1'école des non-indigènes le savoir cthnomathématique de 1'indien brésilien. Quelques livres didactiques donnent Ia numération égyptienne. babylonienne, romaine et même maya. mais aucun né parle de Ia numération de nMmporte quclle tribu brésilicnne.

Ce n'est pas Ia faute spécifiquement aux autcurs des livres textes. S'il y a faute. celle-ci revient à nous qui travaillons avec des écoles indigenes et qui jusqu'à maintenant n'avons pas encore pensé à 1'importance d^pporter ce savoir aux écoles de nos enfants.

Rcfcrences bibiographiques

BRASIL. MEC. *Diretrizes para a política nacional de educação escolar indígena.* Brasília, 1993. (Cadernos educação básica. Série institucional, 2).

D'AMBRÓSIO, U. *Historiografia e a história das ciências nos países periféricos.* Caxambu, 1993a. Apresentado no IV Seminário Nacional de História das Ciências e da Tecnologia.

__________. Etnomatemática: um programa. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,* v.I, n.l, 2.sem. 1993b.

FERREIRA, E. Sebastiani. *Construción de Ia casa indígena:* una proposta de ensefianza de Matemática. In: EDUCACIÓN matemática en Ias Américas III. Paris: UNESCO, 1990a.

__________. The teaching of Mathematics in Brazilian native communities. *International Journal of Mathematics Education Science Tecnologv,* v.21, n.4, p.545-549, 1990b.

GERDES, P. *Sobre o conceito de Etnomatemática.* (SI.), 1989. Tradução da primeira parte da introdução ao livro Estudos Etnomatemáticos, em alemão, ISP (Maputo) - KMU (Leipzig).

MORENO-ANELLA, L., WALDEGG, G. Constructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematics Education Science Technology,* v.24, n.25, p.653-661, 1993.

POSTMAN, N. A escola que você conhece está com os dias contados. Entrevista à World Media. *Folha de S. Paulo,* São Paulo, 6 jun. 1993.

STRUIK. D. The sociology of Mathematics revisited: a personal note. *Science andScociety,* v.50, n.3, 1986.

SZABÓ, A. *Les débuts des mathématiquesgreeques.* Paris: J. Vrin, 1977.

LE GEEMPA, UNE DYNAMIQUE ONG

Esther Pillar Grossi*

Le GEEMPA, qui est né comme Groupe d'Études sur I'Enseignement des Mathématiques de Porto Alegre, et qui s'est transforme en Groupe dÉtudcs sur 1'Éducation. Ia Méthodologie de Recherche et TAclion sans changcr de sigle. revele de prime abord dans cette mutation tout son dynamisme. Il existe depuis presque 24 ans, puisqu'il fut fondé le 10 septembre 1970, et se presente aujourd'hui avec nombre de projets interessants.

Le GEEMPA est une ONG — organisation non-gouvcrnementale, qui a pour objectif Ia recherche et 1'action en education. Il faut bien expliquer qu'il s'occupe de 1'éducation scolaire, c'est à dire, de **r** education qui vise à des apprentissagcs complexos dans les domaines des sciences et de Ia culture. Ces apprentissages n'aboutissent de façon spontanée dans le quotidien sans des stratégies intcntionnellement organisées. Ceei puisqu'il y a d'autres apprentissages hors 1'école, qui sont à Ia charge de Ia famille, de 1'église, des moyens de communication, des sociétés civiles, des partis politiques ou, de façon plus large, des espaces physiques, tcls que Ia nature et les villcs. Notrc Groupe d'Études est né de Ia préoccupation commune à beaucoup de professeurs — cinquante à 1'Assemblée de fondation du GEEMPA — d'améliorer 1'enseignement des mathématiques. Nous étions tous professeurs de cette discipline car on peut considérer que les professeurs des écoles maternelles (appelées creches ou pré-écoles) ou les maitres de Ia lère à Ia 4ème année scolaire sont aussi des professeurs de mathématiques. En outre, le GEEMPA s'est donné des le début une vaste tendance interdisciplinaire, puisqu'il a admis entre ses associes tous les interesses à Tamélioration de 1'enseignement tels que parents d'élèves ou professionnels d'autres domaines.

Nous avons travaillé énormément pendant presque une décennie tournés plus spécialcment vers les mathématiques, appuyés par des recherches, formant professeurs ou parents et produisant des textes publiés en livres, revucs ou journaux. Mais surtout, nous n'étions pas isoles dans notre petit coin à nous regarder le nombril. Nous avons fait des échanges avec des collègues du monde entier, soumettant nos produetions aux considérations et aux critiques des spécialistes de tous côtés. Nous nous sommes presentes en des congrès, nous avons envoyé à des destinataires exigeants nos publications et nous nous sommes integres à des groupes internationaux de recherche; enfin, nous nous sommes associes à Ia communauté scientifique intcrnationale en partant de Tintuition explicitée peu après en 1'assertion qu'on apprend essentiellement par 1'interaction et par le dialogue.

Nous avons organisé des Journées d'Études à Porto Alegre avec Zoltan Dienes, Tamás Vargas, Claude Gaulin, Maurice Glaymann et d'autres, au cours desquelles nous allcrnions l'approfondissement des cours avec 1'abordage plus vaste d'une nouvelle pédagogie et didactique mathématique, pour un grand public, aussi bien que Ia présence dans les média, afin de garantir 1'appui des parents, des personnes qui influencent 1'opinion et de toute Ia communauté pour Ia transformation qu'on réalisait dans les classes.

• Du Groupe d'Études sur l'Enseignement des Mathématiques de Porto Alegre — GEEMPA

Nous avons participe, au cours de ces premières dix années du GEEMPA au mouvement appelé "des mathématiques modernes" dont le but était 1 'organisation des mathématiques comme science, à partir de 1'élaboration de Ia Theorie des Ensembles. On peut caractériser cette période, du point de vue de 1'education, comme un temps de dcpuration des livres-textes de mille incorrections mathématiques, en mcme temps qu'une phase oü de bons mathématiciens se sont occupés de l'enseigncmcnt. en créant des activités didactiques logiquement en accord avec les contenus vises, ce qui a marque un progrès extraordinaire. Papy. Dienes. Freudhental et beaucoup d'autres dans presque le monde enticr, enchantés par le plaisir d'enseigner les mathématiques, ont provoque ce progrès. Ccpendant, du point de vue construetiviste, il représentait un niveau socio-psychogénétique du cheminement de Ia didactique mathématique marque par une incomplétude due à Ia méconnaissance du processus d'apprcntissage de 1'élève. Il y a plus de dix ans que des chercheurs se penchent de ce côté et de nouveaux apports bouleversent de façon marquante les voies de 1'enseignement, et non pas seulement des mathématiques. Des doctorats sur Ia Didactique surgissem en nombre d'universités. lis s'appuient sur les études de Piagct, Wallon, Vigotsky, Brunner et beaucoup d'autres qui se sont penchés sur Ia recherche de 1'explícation des príncipes essentiels de Ia pensée humaine.

Comment le GEEMPA a-t-il ressenti Ia lacune des années 70 et comment y a-t-il reagi? Il s'est penché pendant 10 ans sur le domaine surtout de l'alphabétisation. Et cela pourquoi? Fondamentalement pour deux raisons: parce que l'alphabétisation est le plus grave défi de 1'éducation nationale et parce que pour l'alphabétisation, Emilia Ferreiro, spécialement, apportait une contribution significative sur le processus d'appientissage qui permettait Ia construetion d'une proposition didactique engageant cet aspect au dela de Ia logique du contenu à enseigner. Cest sur cette base que nous avons produit les Didactiques de rAlphabétisation, qui permettent actuellement dans plusieurs endroits du Brésil de passer les índices de 30% d'admission dans les classes d'alphabétisation à 90%, ce qui revêt une signification extraordinaire.

Il s'agit dunc intervention didactique et pédagogique capable de fairc face à l'un des plus graves attentats à Ia démocratie: 1'exclusion de millions de brésiliens à 1'accès à Ia lecture et à 1'écriture, exigence minimale pour Ia citoyenneté.

La proposition didactique et pédagogique du GEEMPA pour l'alphabétisation est le résultat du concours. pendant presque dix ans. de spécialistes en différents domaines de Ia connaissance. tels que pédagogues. médecins. psychologues, psychanalystes. sociologues, anthropologues, philosophes etc. Cette composition multiple de 1'équipe, associéc à Ia certitude que Ia didactique est un nouveau domaine scientifíque et non pas seulement le simple résultat des applications intuitives d'autrcs domaines, mènent 1'actucl travail du GEEMPA au dclà de l'alphabétisation.

Il est três important de souligner que le GEEMPA s'est rendu compte qu'on né fait efficacement de Ia formation des professeurs que si celle-ci est continuellement alimentée par des recherches et associée immédiatement à 1'action d'enseignement vers laquelle elle est dirigée. Cest pour cette raison que dans ses cours de spécialisation ou d'extension, on exige Ia présence de 70% des maitres de Ia classe vers laquelle Ia formation est dirigée. Ils garantissent aux classes Ia liaison immédiate avec Ia pratique. En outre, s'il n'y a pas de recherche qui crée Ia théorie et absorbe 1'activité de formation de professeurs, celle-ci reste complétement sans effet. Le slogan "seuls ceux qui apprennent enseignent waiment", formule pendant les 4 ans oü j'étais Ia Secrétaire de 1'Éducation de Porto Alegre, revêt un sens profond. Sans cette interrelation dynamique entre Ia théorie et Ia pratique. Ia formation ou 1 'actualisation de professeurs n'aboutit pas aux améliorations de 1'apprentissage de 1'élève à 1'école qui sont son but. Cette douloureuse constatation se confirme au sein du GEEMPA lui même chaque fois qu'on s'éloigne de ce príncipe.

Le projet" Avant-Gardes Pédagogiques". en développement depuis 1991, est le résultat de cette découverte. Il se produit pendant toute 1'année scolaire, en réunissant de deux en deux semaines des centaines de professeurs de classe. Ceux-ci se divisent en petits groupes, menés par un coordinateur qui s'appelle "super avant-garde". Theorie et pratique sont ici confrontées à Ia chaleur des demandes issues des classes elles-mêmes dans le quotidien. Ce projet est réalisé en collaboration avec l'ULBRA et Ia PUC et reçoit 1'appui financier du Ministére de 1''Education. Il en est déjà à sa 4ème phase et agrandit chaque année son domaine daction. En 1994, nous avons 400 professeurs engagés dans ce projet. divises en equipes de formation d'enseignants. depuis P education maternelle (de 0 à 6 ans 9 móis) jusqu'à Ia 4ème année. produisant des résultats três satisfaisants. Son approbation est de 90% environ, et il faut dire que ce projet réunit surtout les professeurs des écoles publiques de 1'état et des municipalités, y compris plusieurs villes proches de Porto Alegre. Dans les écoles publiques, comme chacun le sait, on rencontre les enfants d'ouvriers de revenus plus modestes ainsi que des chômeurs et marginalisés de notre communauté. On voit fréquemment sortir de ces écoles les brésiliens qui augmentent chaque année les contingents d'analphabètes de notre pays. Ce sont des projets tels que celui-ci, des "Avant-Gardes Pédagogiques", qui pointent vers Ia sortie de 1 "impasse oîi se trouve le pays dans le domaine de Téducation scolaire. Les Avant-Gardes Pédagogiques, aussi bien que toutes les activités du GEEMPA incluent dans leurs visccres Ia conception de domaine conceptuel qui touche à toutes les dimensions des nouveaux paradigmes post-Piaget. Aujourd'hui on se rend compte qu'apprendre est un phénomène qui concerne beaucoup plus que Ia dimension cognitive des concepts. Ceux-ci sont compris dans 1'espace, dans le temps et dans les représentations symboliques de sujcts réels et concrets qui apprennent, et qui né peuvent pas vivre isoles, parce qu'ils sont "génétiquement sociaux". Cela veut aussi dire que 1'apprentissage impregne le désir, ou mieux, que sans désir on n'apprend pas. Et c'est pour cela que Ia formation des professeurs n'arrive pas par convocation obligatoire. Uoption de désir du professeur est absolument essentielle. Et, dans ce sens, les Avant-Gardes Pédagogiques concrétisent cet aspect puisqifcllcs accucillcnt des professeurs qui s'y engagent par décision et initiative propre. Cependant, cette marque essentielle de 1'être humain d'être "génétiquement social" determine aussi les limites de Ia gucrilla éducationnelle, c'est à dire, de I 'initiative de petits groupes constitués sans 1'aval des coordinations plus amplement responsables dans les réseaux d'enseignement. La volonté politique qui oecupe légitimement 1 espace de coordination, surtout dans les rangs gouvernementaux, est un élément décisif pour 1'avance des possibilites d'enseigner pour de vrai dans les écoles de notre pays. Il reste cependant qu'il faut préserver Ia démocratie, au moment de 1'adhésion volontaire aux propositions présentées par ces coordinations. II est nécessaire de séparer "proposer" d' "imposer" dans le domaine de renscignement-apprentissage.

Finalement, l'insertion du temps et de 1'espace dans 1'enseignement represente le respect et 1'approche de Ia façon qu'a chaque groupe humain d'envelopper les concepts qui lui sont importants. Cet engagement singulier est Ia source de Ia socio-psychogenèse de chaque domaine conceptuel. Cest à dire que les niveaux socio-psychogènes de 1'appréhension des connaissances né sont rien de plus que Ia configuration que prennent les savoirs dans chaque groupe humain. Ces savoirs representem Ia manière selon laquelle. séquentiellcmcnt et existentiellement, une communauté s'approche d'un ensemble de concepts qui lui sont signifícatifs. La circulation entre les savoirs et les connaissances est ce qui constitue Ia fonetion s;jécifique de 1'école, y compris les universités, et cette circulation, on peut 1'appeler Didactique. Et Ia proposition didactique devient alors 1'ensemble des activités qui donnent 1'opportunité à cette circulation et qui déchainent donc l'apprentissage.

Mieux que les faits ou les réalisations, les idées qui se répandent dans les groupes d'étude du GEEMPA peuvent le décrire et le caractériser. D'un autre côté, en les exposant. nous espérons qu'elles déclencheront encore plus de contacts féconds avec toute Ia communauté scientifique de notre pays.

GEPEM — GROUPE D'ÉTUDES ET DE RECHERCHES EN EDUCATION MATHÉMATIQUE

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes*

Comment situer le GEPEM, créé le 24 février 1976 à Rio de Janeiro, dans le contexte national et international de 1'éducation mathématique? Quelles ont été ses activités pendant ses 18 années d'existence?

Cest en cherchant les réponses à ces questions qifun bref historique de ce groupe pourra être dessiné.

La préoccupation des politiciens de trouver les moyens de doter Ia société, après Ia Seconde Guerre Mondiale, d'instruments pour accélérer le développement technologique, dont le support est le savoir scientifique, a determine une reforme de renseigncment des sciences à tous les niveaux. Devant cet objectif, les mathématiciens et politiciens réunis à Ia Convention de 1'OECE (Organisation Européene de Cooperation Economique) de 1959 ont trouvé Ia solution: Ia reforme de l'enseignement des mathématiques d'oü découlerait celle de 1'enseignement scientifique, comme le désiraient les politiciens. Cette reforme, connue comme des mathématiques modernes, serait réalisée au moyen de Ia reforme des programmes, basée sur les contenus et appuyée sur les idées structuralistes du groupe Bourbaki, de si grand prcstige.

Les mathématiques devraient être vivantes, dans leur contenu, comme dans leur enseignement; 1'activité de 1'élcvc a mérité une attention spéciale pour que 1'abstraction des concepts mathématiques soit atteinte.

• Du Groupe d'Études et de Recherches en Education Mathématique — GEPEM.

Des innovateurs comme Dienes, Nicole Picard et Papy ont développé une pédagogie de 1'action et de Ia découverte, dont les bases sappuyaient sur les travaux de J. Piaget sur les structures de rintelligence.

Le changement, qui devrait donner plus d'attention aux méthodes de l'enseignement des mathématiques, a mis en évidence, non seulement les connaissances de Ia psychologie (du développement et de 1'apprentissage) mais aussi d'autrcs disciplines du domaine de 1'Education et, surtout des mathématiques elles-mêmes.

Les études et Ia recherche se sont avérés nécessaires pour essayer de résoudre les graves problèmes de l'enseignement des mathématiques dans ce complexe contexte, ce qui a consolide cette branche de Ia connaissance: 1 ''education mathématique.

Des professeurs universitaires aux Etats-Unis se sont montrés sensibles à Ia reforme de l'enseignement des mathématiques comme le montre Ia création, en 1951, de 1'University of Illinois Commitee School Mathematics (U1CSM) et a posteriori, du projet SMSG (School Mathematics Study Group) de TUniversité de Chicago, dans les années 60. En 1969, le Gouvernement Français a fondé, à côté des principales universités du pavs, les Instituts de Recherches sur rEnscignement des Mathématiques (IREM).

Au Brésil quelques groupes se sont associes au mouvement, parmi lcsqucls se dégagent le GEEM de São Paulo qui a entrepris le recyclage des professeurs en abordam le contenu et le GEEMPA de Porto Alegre, qui aborde Ia méthodologie. A Rio, quelques professeurs idéalistes, sous Ia coordination du professem Arago Backx, ont fondé, en 1970, le Groupe d'Études des Mathématiques de 1'État de Guanabara (GEMEG). Par insuffisance de ressources financières, le GEMEG n'a pas réussi à développer son programme. A partir de l'expérience du GEMEG, après plusieurs réunions préliminaires oú ont été accordées les intentions et ont été fíxées les bases d'une action future, 32 professeurs ont signé le procès-verbal de 1'assemblée generale de création du GEPEM, réalisée à 1'École Israélite Brésilienne Eliezer Steinberg le 24 février 1976.

Il faut souligner au moment de Ia création du GEPEM 1'appui à Ia fois décisif, discret et desinteresse du professcur José Carlos de Mello e Souza, un des défenseurs, depuis les années 40, de 1'amélioration de 1'enseignement au Brésil. L'appui de Mello e Souza a été marquant lors de 1'organisation de Ia CADES. organe du MEC destine à Ia préparation des professeurs secondaires de toutes les disciplines au moyen de cours de vacances dans plusieurs états du pays.

La première activité du GEPEM a été l'organisation d'un séminaire national les 12, 13 et 14 avril 1976. pour Ia préparation du Congrès International d'Éducation Mathématique de Karlsruhe au móis d'aoüt.

Ce séminaire a compté sur 1'aide financière du PREMEN et de 1'Académie Brésilienne de Sciences qui a aussi procure tout 1'appui logistique. On y comptait 200 professeurs de 20 unités de Ia Fédération dont 40 étaient obscrvateurs.

En décembre de Ia même année, 1976, paraissait le Bulletin n° 1 du GEPEM dont ont été publiés 30 números, distribués à 850 associes. Aux dernières années il compte sur 1'appui financier du sous-programme Education pour Ia Science (SPEC/PADCT/CAPES).

Durant ces trois premières années. Ia plus importante activité du GEPEM était de donncr des cours de formation à des publics divers (professeurs de 1'école maternelle; du premier et du deuxième degré, employés de Ia Petrobrás). D'un autre côté, on né perdait pas 1'occasion d'inviter des spécialistes brésiliens ou étrangers de passage à Rio à donner des confcrences au GEPEM. Ainsi, on a eu de três bons conférenciers tels que: Luiz Alberto Brasil, Esther Grossi, Claude Gaulin, Charles Roumicr. Georges Glaeser, Peter Hilton, Jean Dieudonné, entre autres.

Cest à cette époque qu'a débuté Ia tradition, toujours en vigueur, d'offrir une conférence par móis aux associes, ouverte au public interesse.

En 1978, a surgi l'occasion de soumettre à 1'Institut National d'Études et Recherches en Education (INEP/MEC) un projet de recherche intitule "Binôme Professeur-Élève dans 1'Initiation à 1'Éducation Mathématique" qui a été approuvé et développé avec 1'appui technique-financier de cet organe du Ministère de l'Éducation pendant les années de 1979 et 1980.

Le contenu de cette recherche a été publié dans le Bulletin n° 11 du GEPEM. et tels ont été 1'intérêt éveillé et l'importance pour le Groupe d'Éducation Mathématique qui commençait à se former à 1'Institut de Mathématiques de 1'UFRJ. que Ia Fondation Universitaire José Bonifácio, grâce à Ia compréhension du regretté professeur Frota Moreira, à 1'époque Sccrétaire General, en a patronné une deuxième édition.

A l'occasion de Ia commémoration de 10 (dix) ans du GEPEM, sous Ia présidence du professeur Moema Sá Carvalho, un séminaire a été réalisé avec Ia participation de 200 professeurs du ler au 3ème degrés de Rio et des autres 12 états. UUniversité Santa Úrsula (USU), le CNPq et Ia FINEP ont contribué avec 1'appui logistique et/ou financier.

Pour développer n'importe quelle activité, surtout 1'activité éducationnelle, Ia formation de ressources humaines est fondamentale. Dans cet esprit, le GEPEM a toujours cherché à apporter aux éducateurs mathématiques Ia capacite de qucstionner et de trouver des réponses à ces questionnements face à Ia recherche, qui, au sens large, ont rapport avec:

— Ia connaissance et 1'évaluation de ce qui se passe dans une classe pour pouvoir projeter le contenu spécifique et Ia méthode;

— Ia compréhension du processus d'appréhension de 1'élève pour pouvoir orienter 1'acte d'enseigner ce contenu.

Les resultats des recherches et les réponses aux plusieurs questions doivent avoir comme objectif 1'apport au professeur de mathématiques des éléments qui permettent d'améliorer Ia performance dans Ia classe. Cest cet objectif qui a été Ia force qui a conduit Ia direction du GEPEM, en 1981, à implanter pour Ia première fois au Brésil, un cours de pcrfcctionnement en education mathématique en cooperation avec 1'USU. Ce sont ces memes motifs qui ont conduit Mère Maria de Fátima Ramos à assumer les défis de crecr à TUnivcrsitc Santa Úrsula, sous lassistance tcchnique du GEPEM. le cours de "mestrado" en education mathé-matique, sous Ia coordination du professeur Esteia Kaufman Fain-guelernt, actuel président du GEPEM.

Toujours avec le souci de développer des activités qui visent 1'amélioration de 1'enscignement/apprentissage des mathématiques, le GEPEM, encore en cooperation avec l'USU, est en train d'installer un laboratoire des mathématiques pour 1'utilisation des élèves et des professeurs des ler, 2ème et 3ème degrés. Cette année, le GEPEM et 1'Université Santa Úrsula organisent Ia 5ème Semaine des Mathématiques du 27 juin au 2 juillet pour les professeurs, chercheurs et professionnels interesses en education mathématique ou en mathématiques. Pour Ia deuxième fois, le professeur Abraham Arcavi. PhD de Tlnstitut Weizmann d'Israèl, participera à Ia Semaine des Mathématiques et dirá quelques mots. Les professeurs Arcavi et Rina Hershkovitz, aussi de 1'Institut Weizmann, collaborent avec les professeurs visiteurs du cours de "mestrado", ainsi que le professeur norvégien Otto B. Bekken, dont le livre sur 1 *'Histoire de l 'A Igèbre,* thème du cours qu'il a donné, est en cours dMmpression pour être lance durant Ia 5ème Semaine des Mathématiques.

BALACHEFF, N., VIVET, M. (Eds.), *Didactique et intelligence artificielle*, Grcnoble, Éditions La Pensée Sauvage, 302p.

Cet ouvragc est Fédition pour diffusion en libraric du numero double 14 1/2 de Ia revue *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*sur le thènie des environnements informatiques dapprentissage des Mathèmatiques.

La recherche en didactique des mathèmatiques et celle sur les Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur (EIAO) ont à peu près le même âge. En effect, c'est au début des années 70 que G. Brousseau (1972) publie son texte fondateur de Ia théorie des si tua t íons didactiques, et c'est à cette même époque que J.R. Carbonell (1970) publie un article généralement reconnu comme précurseur des problématiques communes de rintelligence Artificielle (IA) et de F Education[1]. La rencontre de ces deux lignes de recherche aura lieu, en France, vers le milieu des années 80, periodo de développement intense des recherches communes à TIA et à 1'Education au plan international.

L'EIAO apparait ainsi comme un lieu de convergence pour 1'IA et Ia didactique sur les questions liées à Ia modélisation des connaissances et des processus didactiques reconsidérés comme des processus organisant les interactions entre systèmes connaissants naturels et artificieis. Des coUaborations étroites ont été engagées entre informaticiens et didacticiens autour d 'act íons de recherche concrètes, telles: APPLUSIX à Orsay, Cabri-géomètre à Grenoble, DEFI et MENTONIEZH à Rennes, ELISE et STUDIA au Mans. Le tournant majeur de cc rapprochcmcnt est Ia création en février 1991 d'un groupe national commun EIAO réunissant chercheurs en didactique et chercheurs en IA. La caractéristique essentielle de ce groupe est de développer une collaboration permettant 1'évolution d'une relation de service vers une relation de cooperation oríentée vers Ia production commune de connaissances nécessaires au progrès de 1'EIAO. Les articles réunis dans cet ouvrage présentant 1'état le plus avance des questions communes aux chercheurs en didactique et en intelligence artificielle, en attestent.

Pour le didacticien, il né suffira pas d'afflrmer que les dispositives informatiques "tournent", pour reprendre une expression familière aux informaticiens, pour assurer quils sont Ia réalisation d'un processus didactique pertinent. Il faudra encore pouvoir décrire Ia spécificité de ces dispositifs au regard de Ia connaissance à enseigner et de Ia connaissance de référence, décrite Ia nature des interactions qu'ils permettent, pour quels apprentissages, et finalement dire les conditions de leur insertion dans un processus didactique. Ces questions, qui relevem fondamentalement d'une problématique épistémologique, s'adressent aussi au chercheur en intelligence artificielle dans Ia mesure oü ce demier est assez rapidement conduit à une interrogation sur ce qu'il advient de Ia connaissance dans le processus de modélisation et de représentation qu'il met en oeuvre.

Les exigences de modélisation formelle de 1'IA appellent à un développement et une précision plus forte des concepts de didactique, et peut-être à un nouvel examen de leur significition. En particulier, Ia prise en charge par Ia machinc d'un processus didactique conduit à poser sous des formes nouvelles Ia question de Ia modélisation calculable de Ia dévolution, de 1'institutionnalisation, voire du contrat. Si, comme beaucoup le suggèrent, il apparait qif une part seulement de ces processus est modélisable au point de pouvoir être calculée, quelle en será Ia conséquence pour Ia didactique? D autres questions entrent dans le champ commun de 1'EIAO: les coopérations entre environnements d'apprentissage informatisés et enseignants, les conditions de ces coopérations, Ia nature du controle possible de Ia part de 1'enseignant, passage d'information, gestion de Ia mémoire de Ia classe comme

[1] **Pour quelques indkatkms historiqucs von: Dülenbouig P**

problcme de Ia continuité des processus didactiques mais aussi comme problème des choix explicites d'informations à conserver par le système... Cette richesse de l'interaction entre IA et didactique va au-delà des questions partagées dans le champ de 1'EIAO, ses conséquences atteignent chacune des disciplines impliquées dans ce qu'elle a d'essentiel. Cela fait de ce domaine fondamentalement interdisciplinaire un lien d'émergence exemplaire des sciences cognitives.

Le chapitre introductif de N. Balacheff s'attache à montrer comment cette perspective renouvelle des questions de didactique et suscite des interrogations originales.

La question de Ia dépendance ou de 1'indépendance des processus d'apprentissage relativement au domaine de référence est 1'objet de débats difficiles. Le point de vue de 1'informatique, par souci de transférabilité, est en general de garantir 1'indépendance du modele au regard du domaine. La contribution de M. Rogalski, au terme d'une cooperation longue avec E. Delozanne à 1'occasion de Ia réalisation du système ELISE, met en évidence des points fondamentaux de Tanalyse des contraintes liées au contenu et avance quelques thèses sur le sujet.

Des échanges complexes et soutenus entre chercheurs en didactique et en IA ont été suscites par les questions liées à Ia représcntation des connaissances. Afin de positionner Ia communication entre chercheurs sur les objects d'enseignement, J.F. Nicaud, dans son article, suggère un cadre general qui reprend l'hypothèse du niveau connaissance de Newell; niveau qui aurait toute Ia rigueur du computable mais qui resterait accessible au controle et à Ia mise en oeuvre par 1 'agent humain. La connaissance sous-jacente à un EIAO doit être exhaustivement présentée, y compris Ia métaconnaissance comprise comme Ia connaissance permettant d'assurer le controle du raisonnement.

La prise en compte de releve est indispensable à Ia conduite dune interaction permettant un apprentissage. Ainsi, Ia modélisation de releve est un sujet clé en EIAO. D. Py Taborde sur le thème de Ia Géométrie et montre comment du sein du projet MENTONIEZH elle indentifie le plan suivi par 1'élève pour élaborer une démonstration.

S. Ag Almouloud, aujourd'hui professeur associe à Ia PUC de São Paulo, et I. Giorgiutti abordent ces questions dans le contexte de DEF1, un logiciel d'aide à 1'exploration de Ia figure en Géométrie et à Ia construetion d'une démonstration. Ils montrent 1'intérêt de Ia construetion d'outils pour analyser ia produetion des élèves et, par exemple, pour déterminer une typologie des comportements.

C. Laborde et B. Capponi présentent 1'etude d'un milieu adidactique organisé autour d'un EIAO. Cabri-géomètre, en vue de 1'apprentissage par des élèves de College de Ia notion de figure géométrique. Ils cherchent, en particulier, à déterminer les contraintes théoriques sur les situations construites autour de Cabri-géomètre pour qu'elles nécessitent un recours à des connaissances géométriques et quels processus conduisent à ce recours. Des travaux expérimentaux les conduisent à souligner Timportance des interactions entre les aspects visuels et les aspects géométriques dans le contexte de manipulation directe des objets de Géométrie rendu accessible par le dispositif informatique.

E. Delozanne, pour sa part, presente 1'exemple d'un processus de collaboration entre un chercheur en IA et un chercheur en didactique. Elle explicite Ia genèse du système ELISE — portam sur Ia recherche de primitives d'une fonetion d'une variable réelle — depuis les idées originelles liées à Ia création, autour du résolveur de problèmes CAMÉLIA, d'un système capable d'expliquer des mathématiques jusqu'aux revisions de problematique resultam de sa collaborations avec M. Rogalski.

L'analyse, voire le controle, des apects temporels lies à Ia dynamique dune situation d'apprentissagc soulève de nombreux problèmes. La possibilite de confronter certames approches utilisées en IA pour aborder formellement le raisonnement temporel avec les travaux de didactiquc touchant 1'analyse fine des effets du déroulement du temps dans une session d'apprentissage, est une question recente et largement ouverte. Le chapitre de R. Gras et S. Ag Almouloud montre le type de travail qui peut ctre fait dans cette voie.

La conception des EIAO, dans les approches initiales, partait volontiers d'une analyse des connaissances dans un domainc. complétée par celle des connaissances de 1'élève et une approche de type pédagogique largement basée sur une logique de transmission de connaissances. Dans les recherches actuelles, Ia conception part d'une analyse de ce que seront les situations didactiques crées incluant les dispositifs informatiques. Il s'agit alors de prendre en compte les interventions du maitre et des élèves, et de se placer davantage dans une logique de re-création ou reconstruction des connaissances. LMntérêt et les conséquences de ce renversement méthodologique sont examines dans le chapitre rédigé par E. Bruillard et M. Vívet.

De Ia modélisation des connaissances objets d'enseignement et de celles de 1'élève, aux conditions de pertinence d'un EIAO dans le système didactique, les questions abordoes dans ce livre forment une ensemble complexe et vaste. La vue offerte est certes partielle au regard du dynamisme des recherches dans le domaine, mais elle montre bien Ia fécondité d'une cooperation entre chercheurs en didactique et chercheurs en IA.

Références bibliographiques

BROUSSEAU, G., (1972), La mathématique à 1'école élémentaire, Paris, APMEP, p.428-442: Processus de mathématisation.

CARBONELL, JR., (1970), Al in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction. IEEE Transaction on Man-Machine Systems, v.ll, n.4, p.l90-202.

DILLENBOURG, P, Évolution épistémologique en EIAO, Ingcnierie Éducative, sous presse.

Nicolas Balachcff
DidaTech, Grenoble

MEIRA, Luciano, SCHLIEMANN, Analúcia, CARRAHER, David, SPINILLO, Alina, FALCÃO, Jorge da Rocha. *Études en psychologie de I 'education mathématique.*

Lhistoire des rapports entre les sciences de Ia cognition et Ia pratique de l'enseignement à 1'école, est, le moins qu'on peut en dire, problématique. En fait, il n'existe pas de liaison triviale entre les théories de 1'apprentissage ou du développement cognitif et les modeles denseignement pour les disciplines spécifiques. A propôs de ces complexes rapports, on attribue à Ulric Nasser, psychologue renommé, cette critique à Ia Psychologie: "si x est un probléme socialement important, x a été rarement étudié par Ia Psychologie". De même, un autre representam important des sciences cognitives de 1'actualité Andréa di Scssa, défend avec droit que, si une théorie cognitive est articulée et solide, son "application" directe dans Ia pratique éducationnelle est non triviale, voire inapplicable.

Toute exagération mise à part, les théses les plus avancées dans les diverses tendances de Ia Psychologie (expérimentale, du développement et cognitive) étaient vues jusqu'à três récemment comme un domaine périphérique aux intérêts plus vastes de 1'Éducation. L'influence de Ia Psychologie dans l'Éducation était presque exclusivement celle du domaine béhavioriste, par le moyen des études de 1'apprentissage qui se penchaient sur certains comportements d'importance douteuse pour 1'apprentissage humain dans des situations hors du laboratoire. Les analyses de concepts complexes comme ceux qu'on rencontre tous les jours dans les classes de mathématiques, par exemple, if claient pas fréquents dans le domaine de Ia littérature psychologique, ou alors, divergeaient beaucoup des analyses faites par les mathématiciens. Dans d'autres cas les concepts étaient traités comme des mcsures de tests d'intelligence, ou alors comme des réponses mécaniques à être acquises par 1'élève suite à une situation de renfort.

D'un autre côté, le psychologue qui avait un contact direct avec le professeur — le psychologue scolaire — se préoccupait des questions relatives aux difficultés émotionnelles, affectives et d'intelligence ou aptitude. Ce professionnel avait à 1'école un role semblable à celui du psychologue clinique: il diagnostiquait les élèves supposés "porteurs" de problèmes, identifiait leur origine possible et conseillait le professeur, Ia famille et Ia direction de 1'école sur les solutions convenables. Fréquemment. on concluait que c'était chez 1'élève lui-même que résidait Ia cause de ses problèmes, ou que le probléme était situe dans Ia famille, dans les conditions de vie de l'élève, dans Ia société. Rarement, le role de 1'école était questionné à l'apparition de ces problèmes. Au cours des dernières années, il est devenu évident que cette manière d'agir n'était qu'une façon de devier Ia discussion des questions fondamentales relatives aux formes d'enscigner et d'apprendre, vers des questions oíi 1'école né pourrait pas être responsabilisée. Il est à remarquer que l'élève "normal" aussi bien que "1'apprentissage normal" n'étaient pas des sujets pour le psychologue.

Bien sur, Ia psychologie a beaucoup évolué ces dernières années. Le rapport entre Ia Psychologie et 1'Éducation est entre dans une nouvelle période de définition, avec Ia divulgation des travaux de Jean Piaget et Lev \fygotsky, entre autres. Les recherches de Piaget et de \fygotsky ont fourni un appui à une idée relativement simple et três importante, dont les répercussions continuem encore: le développement et 1'apprentissage sont profondément importants pour 1'enseignement. Il est vrai que cette notion avait déjà été anticipée dans les conceptions philosophiques de Rousseau et Dewey. Mais Piaget, par exemple, a conduit pour Ia première fois des études empiriques détaillées et a formule des analyses théoriques complexes sur une enorme variété de concepts mathématiques et scientifiques, tels que nombre, espace, temps, causalité, probabilité, force, vitesse, accélération, réaction chimique, raison et proportion, relation, fonction etc. Même si ces analyses n'indiquent pas directement ce qui devrait être fait en classe, elles ont été importantes pour qu'on commence à comprendre comment 1'enfant pense et quelles sont les difficultés qu'il éprouve dans 1'apprentissage des concepts. Avec Vygotsky, aujourd'hui mondialcment reconnu, on a du reconnaitre Ia necessite d'entreprendre des études plus directement lies aux contextes socioculturels de l'école et de 1'activité professionnelle et à 1'apprentissage de contenus spécifiques, qui pourraient être travaillés à 1'école. Les concepts de Zone de Développement Proximal (qui montre de façon intrínsèque les relations entre 1'apprentissage et le développement) et d'Action Interposée (l'utilisation des outils cognitifs et culturels dans l'activité humaine) contribuent de façon inestimable à cette entreprise.

Pour ce qui concerne 1'éducaüon mathématique, Ia Psychologie contribue de façon três particulière. Il y a quarante ans, si on demandait à des professeurs de Mathématiques didentifier les domaines du savoir qui composent 1'éducation mathématique, Ia plupart certainement citerait 1'Éducation et les Mathématiques, mais peu feraient mention de Ia Psychologie. Ce n'est qu'en 1976, au cours du III Congrès International d'Éducation Mathématique (ICME3) en Allemagne, qu'a été créé un grou-pe international d'études sur Ia Psychologie de l'Éducation Mathématique (PME) avec le but de promouvoir 1'échange scientifique et les recherches interdisciplinaires, dans le sens dapprofondir Ia compréhension des aspects psychologiques de 1'enseignement et de 1'apprentissage des mathématiques. Cest un fait significatif que le PME n'ait pas defini ce nouveau domaine comme appartenant exclusivement à l'Éducation, aux Mathématiques ou à Ia Psychologie, mais comme un domaine d'intersection entre ces disciplines.

Bien que Ia recherche en Psychologie de l'Éducation Mathématique existe au Brésil dcpuis des années, sa désignation n'est pas amplcment reconnue. Le livre *Études en Psychologie de l 'Education Mathématique* represente une tentative de promouvoir au Brésil Ia reconnaissance explicite de ce domaine éminemment interdisciplinaire et d'importance théoríque et pratique indiscutable.

Les *Études en Psychologie de I 'Education Mathématique* montrent Ia préoccupation de plusieurs chercheurs du domaine de Ia Psychologie Cognitive au sujet de l'approfondissement des réflexions à propôs du comment 1'enfant développe Ia compréhension de concepts mathématiques à l'école et hors l'école; quelles sont ses difficultés et quelle est Ia meilleure façon de procurer des opportunités à 1'acquisition et au développement de ce savoir. Le livre réunit quatre articles bases sur des études réalisées par des chercheurs du "Mestrado" en Psychologie Cognitive de 1'Université Fédérale de Pernambuco (UFPE) sur Ia compréhension des concepts mathématiques. Abordant différents thèmes de grande importance pour I'education mathématique, ces articles ont Ia conception commune que le savoir mathématique est le résultat des constructions que les individus réalisent dans des contextes spécifiques. Dans ce sens, les articles partagent aussi le point de vue que 1'élaboration de situations adéquates en classe exige du professeur aussi bien Ia connaissance des contenus mathématiques, que Ia connaissance du comment 1'enfant développe sa compréhension des concepts mathématiques, quelles sont ses difficultés et quelles sont les caractéristiques des conceptions qu'il développe. Les divers chapitres analysent différents types de contenus mathématiques et les différents types d'activités qui peuvent procurer un progrès des stratégies intuitives (de protée limitée, mais bien comprises par 1'élève) vers des stratégies d'application plus efficaces et plus générales qui soutiennent Ia compréhension des relations engagées dans les problèmes.

Au chapitre 1, Analúcia Schliemann & David Carraher montrent comment Ia compréhension des raisons et des proportions pcut se produire indépendamment de l'enseignement scolaire, mais que c'est par 1'instruction que des stratégies plus efficaces et plus générales peuvent être apprises. Dans ce but, les auteurs discutem les caractéristiques de Ia compréhension de Ia proportionnalité que 1'enfant ou que 1'adulte développe hors l'école, quels en sont les point forts et quels en sont les limites. Les enfants qui travaillent dans le commerce de sucreries hors 1'école utilisent une stratégie scolaire d'additions successives en introduisant des transformations parallèles dans les variables qui composent Ia raison. Cependant, les autcurs observem que ces enfants né découvrent pas spontanément que les rapports entre le prix et le nombre d'objets achetés, par exemple, sont de même nature que les rapports entre d'autres types de variables. La construction de ce rapport exige l'expérience de nouvelles variables pour que les analogies mathématiques puissent émerger. Il s'agit ici d'une question éducationnelle interessante puisque, si nous nous limitons à des situations déjà dominées par 1'élève, celui-ci résout les pfoblèmes mais n'augmente pas son savoir. D'un autre côté, si on utilise de contextes étrangers et des relations numériques difficiles. 1'élève pourra né pas comprendre les problèmes. L'enseignement et 1'apprentissage comprennent donc une tension entre Ia continuité et Ia discontinuité. D'après Schliemann & Carraher, 1'école essaie fréquemment de minimiser les erreurs associées à ce dilemme, en organisant et en systématisant de nouveaux contenus de façon à ce que 1'élève réussit les problèmes, non parce qu'il a compris le concept, mais parce qu'il y avait des pistes qui le guidaient dans Ia résolution des problèmes. Les auteurs concluent en assurant que 1'enfant développe certainement une compréhension de Ia raison et de Ia proportion hors 1'école. mais que le raisonnement proportionnel comprend aussi des savoirs qui peuvent être dans 1'école: c'est à 1'école qu'on peut apprendre comment analyser des situations, comment exprimer des relations et comment dériver des valeurs. Le travail de relier le savoir acquis hors 1'école avec le savoir que 1'école a le devoir d'essayer de développer doit constituer 1'objectif omniprésent des activités de 1'éducateur.

Au chapitre 2, Alina Spinillo analyse les premiers pas de l'enfant dans le développement de Ia compréhension des raisons et des proportions et Ia nature des rapports engagés dans cette compréhension. Comme suite à Ia discussion proposée par Schliemann & Carraher, cet auteur considere que 1'enseignement des proportions est important à 1'école puisqu'il procure le soutien aux programmes des mathématiques et des sciences (Ia Physique, Ia Chimie, Ia Biologie) et puisqu'il est à Ia base de Ia compréhension de concepts divers comme ceux des fractions, des pourcentages, de densité, de vitesse etc. De même, en psychologie, le concept de proportionnalité est lié au développement cognitif, dont 1'acquisition marque le passage de Ia période des Operations concrètes aux Operations formelles. Uobjectif de 1'auteur est de montrer que malgré que plusieurs investigations pointent vers Ia compréhension des proportions comme une acquisition tardive, il existe des évidences, comme quoi les enfants sont capables de faire des jugements proportionnels à partir de 6-7 ans et d'apprendre queique chose sur les proportions grâce à des situations d'entrainement. Cependant, cela arriverait seulementquand les rapports de premier ordre entre les termes de Ia proportion seraient faciles à établir (en termes de part-part) et quand les problèmes permettraient 1'usage du référentiel "moitié" comme stratégie pour décider sur les équivalences. Lusage de comparaisons part-part signifie travailler le problème en termes de raison, tandis que lusage de comparaisons part-le tout signifie travailler le problème sous 1'aspect des fractions. En consideram ces caractéristiques, 1'auteur propose les recommandations suivantes pour 1'enseignement des proportions dans les premières séries du premier dégré: (1) moins dimportance à Ia quantifícation numérique; (2) capitalisation sur des expériences de perception et d'estimation; (3) utilisation de problèmes de comparaison, ainsi que de problèmes d'inconnues et (4) attention à 1'importance de points de repère.

Au chapitre 3, Luciano Meira montre comment Ia compréhension de fonetions emerge de situations d'interaction entre les enfants, et au cours de discussions appuyées sur de différents types de matériaux. Cet article discute Ia complexité du concept de fonetions et les multiples connexions entre ce concept et ses représentations, outre qu'il pointe quelques unes des nombreuses difficultés qui peuvent être presentes à son apprentissage telles que: (1) Ia reconnaissance de fonetions non-linéaires; (2) Ia différenciation entre les graphiques des fonetions continues et discrètes; (3) Ia représentation algébríque de fonetions à partir de graphiques et vice-versa; (4) Ia compréhension du concept de variable. Cependant, 1'auteur considere que, malgré toutes ces difficultés. Ia compréhension de fonctions linéaires comprend des notions mathématiques que les cnfants du premier degré peuvent comprendre, quand ils sont confrontes à des situations et à des problèmes adéquats. Trois études sont présentées, oü on décrit des recherches qui se réfèrent à: (1) des expériences avec des modeles physiques de fonctions linéaires; (2) le savoir sur des tablqs de paires ordonnécs; et (3) des activités avec des graphiques et, en particulier, des équations algébriques. En conclusion, 1'auteur recommande que: (1) 1'étudc de fonctions doive englober, aussi simultanément que possible, des activités avec de multiples rcpréscntations de ce concept; (2) les activités avec les tables et les suites doivent être incluses dans 1'étudc introduetive des fonctions, comnie matéricl de repere dans 1'invcstigation des rapports entre les quantités; à cc sujet 1'autcur critique 1'usagc tmditionncl des tables seulement comnie une "banque" de coordonnécs à être rapportées sur le plan cartésien; (3) 1'étude des représentations algébriques des fonctions doive comprendre Ia recherche constante de signifiés pour les symbolcs representes sur le papier. Finalement, 1'autcur considere que ces objectifs sont complexes, mais qu'ils peuvent être graduellement atteints au für et à mesure que 1'cnseignement engage les eleves dans des activités de discussion qui monlrcnt le rapport entre les symbolcs algébriques et les quantités rcprésenlées sur des graphiques, tables et systèmes physiques.

Enfin, au Chapitrc 4, Jorge da Rocha Falcão presente une analyse des difficultés qu'ont les élèves quand ils adoptent Ia représentalion algébrique pour Ia résolution de problcmes. Pour Falcão, 1'algèbre se refere à un en^emble de concepts et procedes (algorithmcs) mathémaliques qui permettcnt Ia rcpréscntation préalable et Ia solution d'un certain type de problcme, pour lcquel les procedes arithmétiques se montrent insuffisants. Dans cc sens. 1'algcbrc, ainsi que beaucoup d'autres contenus des Mathématiques, se caractérisc par une double nature épistémologique: cllc est objet d'étude (en tant qu'objet mathématique ôté de son contexte) mais est également outil de travail au service d'autres domaines. En plus de que d'observcr sa nature épistémologique, Falcão propose que 1'enseignement introduetif de 1'algèbre doive considérer Ia dialectique de *rupture* versus *continuité* de 1'algèbre par rapport à l'arithmétique. Différemment de 1'arithmétique, 1'algèbre demande des changements dans 1'abordage des problèmes quand elle inclut une formalisation préalable au caleul proprement dit. En même temps, l'enseignement de 1'algèbre demande de considérer les éléments de continuité, vu que beaucoup des problèmes trouvés dans Ia didactique de 1'algèbre trouvent leur origine dans l'arithmétique. Les recommandations suivantes sont proposées par 1'auteur: (1) Ne pas restreindre 1'enseignement introduetif de 1'algèbre à 1'utilisation d'algorithmes à partir des équations prêtes; (2) Demander fréquemment aux élèves 1'effort préalable d'écrire les équations à partir de situations, en prévoyant des activités d'appui didactique dans ce sens (par l'usage de feuilles de caleul électroniques par exemple); (3) Explorer des activités interdisciplinaires comprenant 1'observation de phénomènes physiques, Ia construetion de tables et graphiques et Ia tentative de construetion de modeles algébriques.

Pour conclure cette révision résumée des études publiées en *Études en Psychologie de l 'Education Mathématique*, les auteurs soulignent que le professeur a un role fondamcntal dans Ia création des taches et d'un contexte d'activités qui puissent guider Ia participation de 1'élève et le processus de construetion de savoirs en classe. Pour cela il faut que le professeur examine ses possibilites pédagogiqucs et qu'il cherche à connaitre les résultats des recherches réalisées dans les domaines de Ia Psychologie Cognitive et de 1'Éducation Mathématique. Ce livre represente, pour le professeur surtout, une source de matériel d'inspiration pour Ia programmation d'activités qui procureront à l'élève 1'occasion de découvrir des rapports, de résoudre de problèmes et d'apprendre de nouvellcs formes de représenter plus efficacement ses conceptions, dans le sens de comprendre leur signifié.

Les Auteurs
Université Fédérale de Pernambuco

RELATIÔN DE THÈSES AU BRÉSIL (1971 a 1994)*

ABREU, Guida Maria Correia Pinto de. *O uso da Matemática na agricultura: o caso dos produtores de cana-de-açúcar.* Recife, 1988. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

ABREU, Rosane de Albuquerque dos Santos. *Uma avaliação sobre o uso da linguagem LOGO no processo de construção de noções topológicas.* Rio de Janeiro, 1990. 226p. Dissertação (Mestrado) — CTCH, PUC-RJ.

ACIOLY, N.M. *A lógica do jogo do bicho:* compreensão ou utilização de regras? Recife, 1985. 13 lp. Dissertação (Mestrado em Psicologia) — UFPE.

AGUAYO, Rolando Luna. *Aplicación de un método de aprendizaje activo ygrupai de matemática en 89 alumnos de um primer ano de ensefianza média.* Campinas, 1979. 81p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

AGUIAR, M.C.A. *Formação dos conceitos de fração e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.* Recife: 1980. 91p. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

ALCURE, Leila P.P. Áudio-visual: *meio auxiliar no treinamento de professores.* Campinas, 1982. 134p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

ALDANA, Leonel Morales. *Ensino de ciências e minicomputadores.* Campinas, 1980. 204p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

' Orgarusée par Dano Fiorcntini, du CEPEM/FE-UNICAMP. Les originaux de ces travaux peuvent être trouvés auprès de Ia Banque de Thèses EDUMAT du CEPEM, Faculte d'Éducation de 1' UNICAMP. Campinas, São Paulo - Brésil.

________________________. *Um modelo computacional para a resolução de problemas.* Campinas, 1990. Tese (Doutorado) — DEME, FE, UNICAMP.

ALENCAR, Célia Cury de. *Um estudo experimental de um modelo de recuperação, para oitava série em Matemática.* Rio de Janeiro, 1978. 20lp. Dissertação (Mestrado) — PUC-RJ.

ANASTÁCIO, Maria Queiroga Amoroso. *Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.* Rio Claro, 1990. 103p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

ANDRETTA, Edson. *Estudo demonstrativo da influência da percepção dos espaços euclidianos, lobatschewskiano e riemannianos na execução da perspectiva:* nova proposta de currículo de desenho. Curitiba, 1985. 79p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

ARAÚJO, Antônio Pinheiro *de. A formação pedagógica na Licenciatura Plena em Matemática:* um estudo avaliativo na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Porto Alegre, 1979. 114p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

________. *Formação do professor de Matemática:* realidade e tendências. São Paulo, 1990. 220p. Tese (Doutorado) — FE, USP.

ARAÚJO, Áurea Castilho de Albuquerque. *O rendimento escolar em Matemática dos alunos da sétima série do primeiro grau, da Escola Normal Menna Barreto — São Gabriel (RS) — depende da inteligência e aptidão especial do aluno e da fluência verbal do professor.* Santa Maria, 1974. 56p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade Interamericana de Educação, UFSM.

ARAÚJO, Maria Auxiliadora Sampaio. *Um levantamento das condições atuais para a realização do estágio de Matemática FECEB-UFBA, zona urbana de Salvador.* Salvador, 1979. 265p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFBA.

AZEVEDO, Angela Maria G. de. *Dificuldades no ensino da Matemática:* um estudo da percepção do professor. São Carlos, 1988. 143p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSCar.

BARBOSA, Alice Soares. *Prática pedagógica na UFV:* análise de um caso: Cálculo I. Viçosa, 1984. 148p. Dissertação (Mestrado em Extensão Rural) — UFV.

BARBOSA JR., Raimundo. *Aprendizagem receptiva-significativa:* uma aplicação no ensino da Matemática. Fortaleza, 1985. 114p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFC.

BARCO. Luiz. *Escola: um bem ou um mal?* São Paulo. 1989. 127p. Tese (Livre Docência) — EÇA, USP

BARREIRO. Aguida Celina de Méo. *Estudo do processo de ensino da unidade "área das figuras geométricas".* São Carlos, 1987. 368p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSCar.

BERG AMO, Geraldo Antonio. *Ideologia e contra-ideologia na formação do professor de Matemática.* Rio Claro, 1990. Dissertação (Mestrado) — IGCE-UNESP.

BERTIELLI, Rosângela. *Análise do ensino da Matemática em uma sala de aula de I* série do Iª grau.* São Carlos. 1985. 60p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSCar.

BERTONHA, Regina Aparecido. *O ensino de Gometria e o dia-a-dia na sala de aula.* Campinas: 1989. 225p. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

BEZERRA, Albene de M. *Articulação entre o ensino de primeiro grau (quinta a oitava séries) e segundo grau (primeira série) em termos de objetivos seqüenciais de Matemática.* Santa Maria, 1978. 274p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade Interamerícana de Educação, UFSM.

BEZERRA, Paulo César. *Extensão para um grande número de alunos e um modelo dinâmico probabilístico para o método keller.* Brasília, 1972. 63p. Dissertação (Mestrado) — ICE, UnB.

BIEMBENGUTT, Maria Salctt. *Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de Iª e 2ª graus.* Rio Claro. 1990. 210p. Dissertação (Mestrado) —IGCE, UNESP

BLUMENTHAL, Gládis Renate W. *Análise das diferenças relacionadas com o sexo no desempenho de Matemática no concurso vestibular unificado e na escolha profissional do estudante.* Porto Alegre, 1983. 135p. Dissertação (Mestrado) — UFRGS.

BOLDRIN. Maria Inês. *Resolução de problemas aritméticos simples envolvendo adição e subtração por escolares de /* série:* influência da manipulação de materiais. São Paulo, 1986.109p. e 149p. Dissertação (Mestrado) — FE. USP.

BORBA, Marcelo de Carvalho. *Um estudo de Etnomatemática:* sua incorporação na elaboração de uma proposta pedagógica para o "Núcleo Escola da Favela da Vila Nogueira/São Quirino". Rio Claro. 1987. 266p. Dissertação (Mestrado) — IGCE. UNESP.

BORGES, Pedro Augusto Pereira. *Uma experiência de produção de currículos de Matemática junto a professores de Iª grau e Universidade.* Campinas. 1988. 17 lp. anexos. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

BREUCKMANN. Henrique. *Inovações no ensino de Ciências (incluindo Matemática):* estudo de um projeto. Porto Alegre, 1990. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

BRITO, Antonio Olinto Lassance. *Teste com referência a critério em Matemática:* diferenças no atributo do estímulo influenciam o rendimento? Rio de Janeiro: 1983. 99p. Dissertação (Mestrado) — FE,UFRJ.

BURAK, Dionísio. *Modelagem matemática:* uma proposta alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série. Rio Claro, 1987. 186p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

BURI ASCO, Regina Luzia Corio de. *Matemática de fora e de dentro da escola:* do bloqueio à transição. Rio Claro, 1989. 185p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

BÜRIGO, Elizabete Zardo. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil:* estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. Porto Alegre, 1989. 208p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

CALANI, Maria Cecília. *Conceitos geométricos através de linguagem LOGO.* Campinas, 1981. U7p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP.

CAMPOS, Celina L. de M. *Atividades de ensino para a aquisição de conhecimentos matemáticos:* uma proposta pedagógica. Curitiba,1983. 114p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

CAMPOS, Ely Machado de. *Estudo sobre a gênese do conceito de fração na cfianca segundo Piaget e com vistas a interferências metodológicas.* Porto Alegre, 1975. 225p. Dissertação (Mestrado) — PUC-RS.

C ARRAHER, Terezinha Nunes. *O construtivismo e a educação matemática.* Recife, 1988. Dissertação (Mestrado em Psicologia) — UFPE.

__________*O desenvolvimento dos conceitos de operações numéricas.* Recife, 1986. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — Universidade Federal de Pernambuco.

CARRILLO, Wenceslao R. de Rios. *Execução e avaliação de um projeto de ensino programado para a melhoria do ensino de Cálculo na Universidade do Panamá.* Campinas, 1980. 113p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *A concepção de matemática do professor também se transforma.* Campinas. 1989. 153p. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

CARVALHO, Maria Vicente de Brito. *Aprendizagem da Matemática ao final da 4* série do Iªgrau:* rendimento mínimo em competências básicas. Rio de Janeiro, 1981. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRJ.

CASTANEDA, José R.C. *Analisis de Ia enseüanza-aprendizaje en Matemática de primergrado:* Escola de Área Santa Maria - RS. Santa Maria, 1973. 130p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade Interamericana de Educação, UFSM.

CASTRO, Mônica Rabello de. *O avesso da lógica:* aspectos da relação ensino-aprendizagem na escola Tia Ciata. Rio de Janeiro, 1990. Dissertação (Mestrado) — IESAE, FGV.

CERQUEIRA, Maria de Lourdes Carvalho B. *Programa de reforço do ensino da Matemática para a 5* série do Iª grau:* uma proposta de estágio supervisionado. São Paulo,1988.180p. Dissertação (Mestrado em Supervisão e Currículo) — PUC-SP.

CÉSAR, Leila Vasconcelos de Albuquerque. *A resolução de problemas de adição e subtração na escola de 1ªgrau.* Recife, 1990. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE, CEVALLOS, Galo Nino. *Uma alternativa metodológica para o melhoramento do ensino de Matemática através de módulos.* Campinas. 1981. 2v. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

CHAMIE. Luciana Mancini Stella. *A relação aluno-matemática:* alguns dos seus significados. Rio Claro, 1990. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

COCENZA. Iaracilda de Andrade. *Sobre o perfil pedagógico e a formação do professor I no Estado de São Paulo.* Rio Claro, 1990. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

COSTA, Walkiria Perez. *Desenvolvimento cognitivo segundo Piaget e a aprednizagem em Português e Matemática de alunos de 5ª série.* Rio de Janeiro, 1980. 157p. Dissertação (Mestrado) — CTCH. PUC-RJ.

CURY, Helena Noronha. *Análise de erros em demonstrações de Geometria plana: um estudo corn alunos do 3ª grau.* Porto Alegre, 1988. 186p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

DAMKE, lida Righi. *Avaliação das atividades curriculares do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria.* Santa Maria, 1983. 182p. Dissertação (Mestrado) — UFSM.

DANTE, Luiz Roberto. *Incentivando a criatividade atra\>és da educação matemática.* São Paulo. 1980. 247p. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) — PUC-SP.

________. *Criatividade e resolução de problemas na prática educativa de Matemática.* Rio Claro, 1988.192p. Tese (Livre Docência) — IGCE, UNESP.

DANYLUK, Ocsana S. *Um estudo sobre o significado da alfabetização matemática.* Rio Claro, 1988. 364p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

DENIGRES, Regina Helena Zerbini. *Avaliação de um programa com conteúdos curriculares integrados de Ciências e Matemática.* São Paulo. [19—]. 118p. Dissertação (Mestrado) — Centro de Educação, PUC-SP.

DI PIERRO NETO. Scipione. *Uma contribuição ao ensino da Geometria elementar.* São Paulo, 1972. 205p. Tese (Doutorado) — FE, USP.

DIAS, E.G.S. *Incapacidade de expressão ou adaptação a novos padrões?* Campinas, 1977. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP.

DOLIS. Maria. *Ensino de cálculo e o processo de modelagem.* Rio Claro, 1989. 34p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

DOMENICO, Etticne C. Guérios de. *Metodologia de ensino para a iniciação matemática fundamentada na pedagogia montessoriana.* Curitiba, 1988. 153p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

DOMINGUES, Cilce Agne. *Atitude dos professores de Matemática das escolas de 1º e 2ª graus de Santa Maria (RS) em relação ao método de ensino individualizado.* Santa Maria, 1985. 175p. Dissertação (Mestrado) — CE, UFSM.

DONO, Manuel A.Y. *Estratégia modular para o ensino da Matemática.* Campinas, 1981.132p. Dissertação (Mestrado) — EMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

DRECHSEL, Elisabeth M. Adriano. *Organização e seqüência de conteúdos para o ensino de Matemática no 2º grau:* proposta de currículo. Curitiba, 1987. 75p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

DUARTE, Newton. *A relação entre o lógico e o histórico no ensino da Matemática elementar*. São Carlos, 1987. 185p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSCar.

ELIAS, Maria Angela Dias. *Geometria Descritiva nas Faculdades de Arquitetura:* uma questão de ensino? Rio de Janeiro, 1983. 92p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRJ.

ELLIOT. Lígia Gomes. *Nivel de integração dos currículos de Ciências e Matemática no ensino de primeiro grau oficial no município do Rio de Janeiro.* Rio de Janeiro, 1976. 97p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRJ.

ESTACIO, Maria Aloenina F C C . *LOGO e a ativação do funcionamento cognitivo.* Rio de Janeiro, 1988. 243p. Dissertação (Mestrado) — Centro de Educação e Humanidades, UERJ.

FAGUNDES. Léa da Cruz. *A psicogênese do conceito de superfície unilateral.* Porto Alegre, 1977. 91p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

FAINGUELERNT, Esteia Kaufman. *Um modelo matemático para o estudo das dificuldades apresentadas pelos alunos do 2^S grau na resolução de sistemas lineares.* Rio de Janeiro, 1981.171p. Dissertação (Mestrado) — COPPE, UFRJ.

FARIA, Amália Rodrigues de. *Relação entre estádios da noção de conservação e desempenho em Matemática:* estudo com crianças de 1* série do l^fi grau. São Paulo, 1979.136p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Psicologia, USP.

FARIA, Maria Elizabeth Dantas de. *Conteúdos básicos de Matemática:* um estudo com alunos dos cursos da área tecnológica da UFRN. Natal,1983. 133p. Dissertação (Mestrado) — UFRN.

FERREIRA, Dirce Almeida. *A Prática de Ensino na formação de professores de Matemática pela Universidade do Amazonas diante da realidade manauara.* Campinas, 1980. 166p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

FERREIRA, Mário Lúcio da Costa. *Uma tentativa de introdução da mini-calculadora eletrônica na escola de I^a grau, como instrumento de ensino.* Campinas, 1979. 119p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

FIGUEIRA, Raul Pedro. *Um ensino individualizado sobre a derivada de funções algébricos.* Niterói, 1979. 204p. Dissertação (Mestrado em Métodos e Técnicas de Ensino) — FE, UFF

FIGUEIREDO, Ana Maria Cruz. *Resolução de problemas de Matemática na escola de I^a grau e o uso de "palavras-chaves" como método de ensino.* Recife, 1985. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

FILOMENO, Antônio. *Um estudo sobre a eficácia dos módulos na aprendizagem da Matemática.* Rio de Janeiro, 1975. 281p. Dissertação (Mestrado em Educação) — CTCH, PUC-RJ.

FLORIANI, José Valdir. *Da prática à teoria:* reflexões de um professor de Matemática. Florianópolis, 1989.13 lp. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSC.

FRAGA, Maria Lúcia de A.T. *Observando a prática pedagógica da Matemática nas classes elementares.* Rio de Janeiro, 1986. 185p. Dissertação (Mestrado) — CTCH, FE, PUC-RJ.

FRANCHI, Anna. *O problema do ensino de subtração na primeira série do primeiro grau.* São Paulo, 1977.135+118p. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP.

FREIRE, Sandra Luiza. *Estudo descritivo do ensino da Matemática em uma sala de I* série do 1^{B} grau de alunos repetentes.* São Carlos, 1987. 93p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSC.

FREIRE, Vanda Lima Bellard. *Comparação entre o ensino tradicional e o ensino tradicional com reforço por módulos com ênfase na possível influência de valor e características sócio-econômicas no rendimento escolar.* Rio de Janeiro, 1980. 99p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Filosofia da Educação, IESAE, FGV.

FREIRE, Zaida Meirellcs. *Efeito da recuperação paralela no rendimento em Matemática, de alunos de primeira série do segundo grau.* Rio de Janeiro, 1976. 47p. Dissertação (Mestrado) — FE. UFRJ.

GANNAN, Abdala. *Uma proposta metodológica para treinamento de professores de Matemática do 2^{S}'grau, em serviço.* Campinas, 1981. 177p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

GASPARIN!, João Batista. *A lei dialética da negação na busca de superação da dicotomia entre o conhecimento prévio do aluno e o saber escolar:* da análise dessa dicotomia no Projeto Noturno a uma experiência de ensino de porcentagem no curso supletivo de 2^{fi} grau). São Carlos, 1990. 257p. Dissertação (Mestrado) — CECH, UFSCar.

GAZIRE, Eliane Scheid. *Resolução de problemas: perspectivas em educação matemática.* Rio Claro, 1989. 169p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP

GAZZETTA, Marineusa. *A modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores.* Rio Claro, 1989.150p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

GERALDI, Corinta M. G. *Subsídios para a análise de contradições presentes no ensino da Matemática (5^{a} a 8^{a} série do l^{s} grau).* Campinas, 1980. 282p. Dissertação de Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

GONÇALVES, Tadeu Oliver. *Ensino para a independência intelectual do aluno: subsídios metodológicos para o ensino da Matemática no l^{s} grau.* Campinas, 1981. 97p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

GOULART, Lenir Joaquina. *O que é Geometria?* Por que ensiná-la? Rio Claro, 1989. 130p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

GRANDO, Neiva Ignês. *A Matemática na agricultura e na escola.* Recife, 1988. 104p. Dissertação (Mestrado em Psicologia) — UFPE.

GUEDES. Enildo Marinho. *A Matemática na pré-escola.* Recife, 1989. 105p. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

GUILHERME. Marisa. *A ansiedade matemática como um dos fatores geradores de problemas de aprendizagem matemática.* Campinas, 1983. 93p. Dissertação (Mestrado) — DEPE, FE, UNICAMP.

HARTWIG, Dácio Rodney. *Uma estrutura para as operações fatoriais e a tendência da utilização de fórmulas matemáticas:* um estudo exploratório. São Paulo, 1988. 296p. Tese (Doutorado) — FE, USP.

HEES, Martha Pereira das Neves. *Freqüência ao Programa de Ampliação da Educação Pré-escolar — PAEPE— e rendimento na I^{a} série do l^{s} grau.* Niterói. [19-]. 15lp. Dissertação (Mestrado) — FE, UFF

HIGINO, Z.M.M. *Por que é difícil para a criança aprender afazer continhas no papel?* Recife, 1987. Dissertação (Mestrado em Psicologia) — UFPE.

CONGRESSO NACIONAL DO ENSINO DA MATEMÁTICA, 2,1957. Porto Alegre. *Anais.* Rio de Janeiro: MEC, 1957.

CONGRESSO NACIONAL DO ENSINO DA MATEMÁTICA, 3,1959. Rio de Janeiro. *Anais.* Rio de Janeiro: MEC, 1959.

CORNU, B. *L 'ordinateur pour enseigner lesMathématiques.* Paris: PUF, 1992. 328p.

COSTA, Aldo Gomes da. *Dificuldade no ensino da Matemática nas escolas públicas de Iª e 2ª graus Aldo Gomes da Costa.* Manaus: Secretaria da Educação e Cultura, 1981. Up.

COSTA, M. *Amoroso. As idéias fundamentais da Matemática e outros ensaios.* São Paulo: EDUSP, 1981.

COSTA, Newton CA. da. *Ensaios sobre os fundamentos da lógica.* São Paulo: Hucitec: EDUSP, 1980. 155p.

_________. *Introdução aos fundamentos da Matemática .2.*ed. São Paulo: Hucitec, 1977. 65p.

_________. *A natureza dos juízos matemáticos.* Curitiba: Ed. Prata da Casa, 1954.

CREPALDI, Celi, WODEWOTZKI, Maria Lúcia. A avaliação da aprendizagem matemática através da análise de erros. *Didática,* Marília, v.24, n.87-99, 1988.

CRUSIUS, Maria Fialho. Uma alternativa metodológica para melhoria da qualidade de ensino de Matemática. *Cadernos da UPF,* Passo Fundo, v.2, n.8, p.7-31, jul. 1984.

_________(Org.). *Sistema de operação e operações em diversas bases.* Passo Fundo: UFP, [199-].

CRUZ, Rubens Moreira da. Geometria. *Revista Pedagógica,* Belo Horizonte, v.5, n.29, p.37-39, set./out. 1987.

CUNHA, Nina Maria Vernes Tempone da. Criatividade no ensino da Matemática. *Escola Viva,* Rio de Janeiro, n.5, p.26-34, mar./maio 1974.

CURSOS de licenciatura de curta duração (graduação). *Boletim Informativo CECINE,* Recife, n.l3,p.2-6, jul. 1971/dez. 1972.

DA PIEVE, Josefina Thereza, MOREIRA, Teresinha Mendes. Planejamentos de 2[8] grau. *AMAE Educando,* Belo Horizonte, v.13, n. 129/130, p.29-35, nov./dez. 1980.

D'ÀMBRÓSIO, Beatriz S. Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições,* Campinas, v.4, n. 1 [10], p.35-41, mar. 1993.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação*: reflexões sobre Educação e Matemática. São Paulo, Summus; Campinas: Ed. da UNICAMP, 1986. 115p.

_________. *Desenvolvimento nacional e estratégia para a educação científica.* Campinas: UNICAMP, 1977.

_________. Educação matemática: uma visão do estado da arte. *Pro-Posições,* Campinas, v.4, n.l[10], p.7-17, mar. 1993.

_________. A educação matemática na década de 1990: perspectivas e desafios. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1987. São Paulo. *Anais do IENEM.* São Paulo: PUC, 1988. p.3-10.

LORENZATO, Sérgio A. *Subsídios metodológicos para o ensino de Matemática: cálculo de áreas de figuras planas.* Campinas, 1976. 2v. Tese (Doutorado) — FE, UNICAMP.

LOURENÇO, Marcos Luiz. *A prática de ensino de Matemática na universidade: sua influência e sugestões.* Rio Claro, 1989. 153p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e realidade: uma tentativa de caracterização da relação que transcenda uma visão formal.* Sào Paulo, 1981. 158p. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP.

________. *Matemática e língua materna:* uma impregnação essencial. São Paulo, 1989. 252p. Tese (Doutorado) — FE, USP.

MAGALHÃES, Verônica Pereira de. *A resolução de problemas e proporção e sua transferência entre diferentes conteúdos.* Recife, 1990. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

MAGINA, Sandra Maria Pinto. *O computador como ferramenta na aquisição e desenvolvimento do conceito de ângulo em crianças.* Recife, 1988. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

MANSILLA, Carlos Alberto. *A calculadora eletrônica de bolso e a escola de 2^{S}grau.* Campinas, 1979. 163p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEN.

MARCHELLI, Paulo Sérgio. *LOGO e a gênese das estruturas elementares da programação do computador.* São Paulo, 1990. 24 lp. Dissertação (Mestrado) — FE, USP.

MARTINS, Maria Antonieta Mcneghini. *Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no Paraná, em ênfase na disciplina de Matemática.* Curitiba, 1984. 276p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

MAZULO, Antônio de Pádua Raposo. *Relação entre o desempenho de crianças em tarefas piagetianas de seriação e inclusão de classes e os resultados escolares em Matemática.* Fortaleza, 1990 98p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFC.

MEDEIROS, Cleide Farias de. *Educação matemática: discurso ideológico que a sustenta.* São Paulo,1985. 233p. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP.

MEIRA, Luciano R. de Lemos. *Geometrias em ação na programação em "LOGO".* Recife,1987. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

MELO, Magda Ivonete Montagnini. *Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da Matemática Elementar.* Rio de Janeiro, 1980. 353p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Psicologia da Educação, IESAE, FGV.

MELO. Sebastião Barbalho. *Estudo preliminar sobre avaliação dos cursos de licenciatura de curta duração em Ciências e Matemática realizados na Universidade Federal de Pernambuco, regime intensivo nos anos de 1971 a 1976.* Campinas, 1982. 174p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

MENDES, Maria Dolores Ceccato. *Aprendizagem da noção de comprimento:* idiossincrasias determinantes. São Carlos, 1985. 246p. Disssertação (Mestrado) — CSCH, UFSCar.

MENDES, Maria Dolores Ceccato. *A noção de área:* possíveis modos de aprender. Campinas, 1989. 17 lp. Tese (Doutorado) — DEPE. FE, UNICAMP.

MENDES FILHO, Josué. *Modelos estocásticos de comportamento de indivíduos submetidos ao método de instrução personalizada.* Brasília, 1973. 81p. Dissertação (Mestrado) — ICE, UnB.

MICHELOTTO, Regina Maria. *O trabalho pedagógico do professor,* *em Matemática:* uma análise do ciclo básico do Paraná. Curitiba, 1988. 115p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

MIGUEL, Antonio. *Era uma vez... aquela Matemática.* Campinas,1984. 2v. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

MIRANDA, Elisabete Maranhão de. *Contas de vai-um e pedir emprestado:* o que as crianças precisam saber? Recife, 1987. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPR.

MOLINARI, Irio. *Um estudo sobre as estratégias de ensino usadas pelos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal* *Fluminense.* Niterói, 1976. 147p. Dissertação (Mestrado) — UFF.

MORALLES, Lenise Martim João. *Processos de aprendizagem em noções matemáticas: aprendendo como se aprende.* São Carlos, 1986. 256p. Dissertação (Mestrado) — UFSCar.

MORO, Maria Lúcia Faria. *Interação social na aprendizagem operatória e iniciação em matemática a partir da teoria de Piaget.* São Paulo,1984. 513p. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) — PUC-SP.

MOURA Anna Regina L. de. *Ensino de Matemática:* uma proposta para orientação de área. Campinas, 1984. 107p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. *Uma proposta para uma Matemática* *vivencial.* Campinas, 1983. 179p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

MÜHL, Vera J. Lourenzi. *Uma proposta alternativa para o ensino de "Introdução à Lógica Matemática ".* Campinas, 1988.84p. Dissertação (Mestrado) — IMECC. UNICAMP.

MULLER, Maria Cândida. *Modelos matemáticos no ensino da* *Matemática* Campinas, 1986 I30p. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

MUXFELDT. Gilberto Martins *Prospecções sobre o ensino da* *Matemática:* análise do Parecer 853/71 do CFE. Porto Alegre, 1989. 252p. Dissertação (Mestrado) — PUC-RS.

NASSIF, L.A.L. *O conceito de Ciéncias veiculado por materiais* *didáticos.* São Paulo, 1976. Dissertação (Mestrado) — PUC-SP.

NEME, Adia. *Condições básicas para a aprendizagem da Matemática.* São Paulo, 1972. llOp. Tese (Doutorado) — FE, USP.

NÓBREGA, Ana Maria Vieira da. *Análise do índice de discriminação da prova de Matemática no vestibular da UFC.* Fortaleza, 1987. 58p. Dissertação (Mestrado) — UFC.

NOBRE, Sérgio Roberto. *Aspectos sociais e culturais no desenho curricular* *da Matemática.* Rio Claro, 1989. 155p Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

NORONHA, Diva Maria B. de. *Proposta de solução para atualização de professores da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro em Matemática utilizando video-tape.* Campinas, 1980.172p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

NUNES, Regina Maria Robatto. *Disposições do professor e rendimento dos alunos em Matemática (primeiro grau-nivel I).* Salvador, 1975. 84p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFBA.

OLIVEIRA, Ana Maria N.de. *Laboratório de ensino e aprendizagem em Matemática:* as razões de sua necessidade. Curitiba, 1983. 138p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR

OLIVEIRA, João Barbosa de. *Estratégias para o domínio da aprendizagem da Matemática no curso de Economia da UFPE - área profissional.* Campinas 1983.133p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

PARTICHELI, Maria Lúcia Hartel. *Características do cliente que freqüenta o "Centro de Estudos Supletivos de Porto Alegre e sua relação com as dificuldades apresentadas nas provas de Matemática.* Porto Alegre, 1984. 133p. Dissertação (Mestrado) — PUC-RS.

PAVANELLO, Regina Maria. *O abandono da Geometria:* uma visão histórica. Campinas, 1989.196p. Dissertação (Mestrado) — DEME, FE, UNICAMP.

PEDCOTO, Maria Solange S. *Influência das características psicológicas dos professores de Matemática — colégios oficiais — sobre o rendimento dos alunos da primeira série do segundo grau -1977.* Rio de Janeiro, 1978. HOp. Dissertação (Mestrado) — CTCH, PUC-RJ.

PENA Jorge J.P. *Uma alternativa de solução parcial para o melhoramento escolar em Matemática.* Campinas, 1980. 61p. Dissertação (Mestrado)—IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

PINHEIRO, Ivanilde Montezuma de Carvalho. *Matemática, privilégio de alguns?* Um estudo à luz da epistemologia genética. Fortaleza, 1990. 91p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFC.

PERRONE, Maria Antonieta. *A atitude científica em Matemática nas terceira e quarta séries do 1 'grau:* um estudo de caso. Niterói, 1990. 155p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFF.

PONTES, Maria G. de O. *O ensino da Matemática da I* série:* uma experiência de treinamento de professôres. Fortaleza, 1986. 222p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFC.

PRADO, Emma Luiza Beraldo. *História da Matemática:* um estudo de seus significados na educação matemática Rio Claro, 1990. 77p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

QUEIROZ, Amélia M. N. Pessoa de. *A construção de conceitos básicos de Matemática para o ensino de 2*grau.* Rio de Janeiro, 1987. 448p. Dissertação de (Mestrado em Educação) — CTCH, PUC-RJ.

RAGAZZI, Nilva. *Uma escala de atitude em relação a Matemática.* São Paulo, 1976.156p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Psicologia, USP.

RANGEL, Ana Cristina Souza. *A educação matemática e a construção do número pela criança:* uma experiência na 1* série em diferentes contextos sócio-culturais. Porto Alegre, 1987. 348p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

RIBEIRO, Maria Judith Sperb. *Livro texto de Matemática de 2ª grau:* grau de importância de critérios e indicadores para a sua seleção. Porto Alegre, 1983. 161p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

ROBATTO, Regina Maria. *Disposições do professor e rendimento dos alunos em matemática (primeiro grau — nivel I).* Salvador, 1975. 84p. Dissertação (Mestrado) — UFBA.

RODRIGUES, Augusto César S. *La organizacion dei currículo para Ia ensehanza de Matemática em Ia primeira série dei segundo grado de los colégios estatales Santa Maria, RS, y ei rendimiento escolar dei alumno.* Santa Maria, 1974.63p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade Interamericana de Educação, UFSM.

RODRIGUES, Maria Helena W.L. *Construção e validade de módulos instrucionais em Geometria Descritiva.* Rio de Janeiro, 1984. 33 lp. Dissertação (Mesfado) — FE, UFRJ.

ROITMAN, Riva. *Adoção e implementação de um programa inovador em escola da rede pública do Estado do Rio de Janeiro:* uma experiência e muitas lições. São Paulo, 1989. 22 lp. Tese (Doutorado) — FE. USP.

ROMANATTO, Mauro Carlos. *A noção de número natural em livros didáticos de Matemática:* comparação entre textos tradicionais e modernos. São Carlos, 1987.152p. Dissertação (Mestrado) — UFSCar.

RUGGIERO, Maurício Carlos. *Operações matemáticas necessárias para a resolução de provas de rendimento escolar em Física no 2ªgrau, na cidade de São Carlos, e sua participação no resultado da avaliação.* Campinas, 1979. 145p. Dissertação (Mestrado) — FE, UNICAMP.

RUIZ, Adriano Rodrigues. *Ensino do conceito de proporcionalidade.* São Paulo, 1986.171p. Dissertação (Mestrado) — FE, USP.

SABAK, Maria do Socorro O. *O desenvolvimento cognitivo e o desempenho em Cálculo na universidade:* um estudo de caso. Rio de Janeiro, 1980. Dissertação (Mestrado) — CTCH, PUC-RJ.

SAMPEDRO, César Huilcap'. *Dinamização de atividades extra-curriculares na província de Chimborazo (Equador) como motivação no ensino de Cálculo na escola secundária.* Campinas, 1977. 61p. Dissertação (Mestrado) — 1MECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

SANCHEZ, Jorge E.P *Estratégia combinada de módulos instrucionais e modelos matemáticos interdisciplinares para ensino-aprendizagem da Matemática a nível de 2ªgrau:* um estudo exploratório. Rio de Janeiro. 1979. 28 lp. Dissertação (Mestrado em Educação) — CTCH, PUC-RJ.

SANTOS, Albany Mendonça. *Compreensão e uso de números relativos na agricultura e na escola.* Recife, 1990. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) — UFPE.

SANTOS, Djalma Francisco dos. *Componentes cognitivos que influem na aprendizagem da matemática:* uma investigação sobre suas estruturações em crianças da série inicial do l9 grau de uma unidade escolar pública da cidade de Salvador. Salvador, 1990. 175p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFBA.

SANTOS, Eliana M. C. Frezzatto. *O ensino de problemas aritméticos na 2* série do Iªgrau.* São Paulo, 1987. Dissertação (Mestrado em Psicologia da Educação) — PUC-SP.

SANTOS, Ernestino F. V. *O efeito de uma técnica de jogo sobre o rendimento da aprendizagem em Matemática superior.* Porto AIegre,1978. 182p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFRGS.

SANTOS, Maria Antonieta Pires de. *A construção do número e das figuras geométrias na programação LOGO.* Rio de Janeiro, 1990. 214p. Dissertação (Mestrado) — CTCH, PUC-RJ.

SANTOS, Sônia Muniz. *Subsídios para levantamento de indicadores objetivando o planejamento e a avaliação de uma intervenção no processo ensino-aprendizagem de Matemática.* Salvador, 1979. 224p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFBA.

SANTOS, Vinicio de Macedo. *A Matemática no l^s grau:* significado que pais. alunos e professores conferem à Matemática. São Paulo, 1990. 142p. Dissertação (Mestrado) — FE. PUC-SP.

SILVA, Aldo Marques da. *Um modelo de ensino de Cálculo Diferencial e Integral utilizando aplicações às disciplinas: Biologia, Física e Química.* Campinas, 1980. 89p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

SILVA, Beatriz H. A. Magno de. *Efeitos de uma revisão de revisão de Matemática através de módulos instrucionais no desempenho das ali/nas de cursos deformação de professores da I^a a 4* série.* Rio de Janeiro, 1982. 306p. Dissertação (Mestrado) — CEH, UERJ.

SILVA, José Geraldo Acioly M. da. *O ensino da Matemática:* da aparência à essência Rio Claro, 1987. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

SILVA, Lúcia Saraiva Johnstone da. *"95 Teses" sobre o ensino de Matemática na era tecnológica.* Salvador, 1979. 516p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFBA.

SILVA, Maria Aparecida Lemos. *Um estudo diagnóstico na escola pública de I^s grau, no município de Florianópolis - SC.* São Paulo, 1989. 112+49p. Dissertação (Mestrado em Supervisão e Currículo) — PUC-SP.

SILVA, Maria Helena Braga Rezende de. *Estudo experimental sobre a eficácia didática dos módulos instrucionais no ensino de Matemática, em nível de segundo grau.* Rio de Janeiro, 1975. 187p. Dissertação (Mestrado) — CTCH, PUC-RJ.

SILVA. Maria Lígia Dias da. *A prática pedagógica de Matemática na 2* série do ensino de l^B grau numa escola urbana de Londrina.* Curitiba, 1987. Dissertação (Mestrado) — FE, UFPR.

SILVA, Miriam Godoy Penteado da. *Resolução de problemas:* uma perspectiva de trabalho em sala de aula. Rio Claro, 1990. 157p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

SILVA. Zélia Maria Monteiro Higino da. *Por que é difícil para a criança aprender a fazer continhas no papel?*Recife, 1987. lOOp. Psicologia Cognitiva - UFPE.

SILVEIRA, Ladir Anchietia. *Análise e nova perspectiva do ensino-aprendizagem da Matemática no ensino de I^a grau:* quatro últimas séries. Santa Maria, 1971.199p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade Interamericana de Educação, UFSM.

SIMON, Heloísa Sírio. *Uma alternativa para melhorar o processo ensino-aprendizagem de Matemática, através do método da descoberta.* Campinas, 1982.152p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.'

SIZO, Maria Cleyde. *Estudo comparativo de modalidades de recuperação paralela em Matemática.* Niterói, 1979.115p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFF.

SMITH, Dorrit M. *Investigação conduzida sobre o ensino de funções a alunos do quarto, quinto e sexto anos.* São Paulo, 1972. 156p. Tese (Doutorado) — PUC-SP.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática:* influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Rio de Janeiro: Globo, 1946.

HUSEN, Torsten (Ed.). *Internationalstudy of achievement in Mathematics:* a comparíson of twelve Countries. Stackholm: Almqvist & Wiksell, 1967. 2v.

IFRAH, G. *Os números:* história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IKIEZAKI, Iracema Mori. Como está o ensino de Matemática hoje no Brasil. *Revista Pedagógica*, Belo Horizonte, v.2, n.8, p.6-9, mar./abr. 1984.

IMENES, Luiz Márcio Pereira et al. *Matemática aplicada.* São Paulo: Moderna, 1980.

INHELDER, B. Alguns aspectos da abordagem genética de Piaget à cognição.In: FURTH, H.G. (Org.). *Piaget e o conhecimento:* fundamentos teóricos. Rio de Janeiro: Forense, 1974. p. 34-64.

INHELDER, B., BOVERT, M., SINCLAIR. H. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B., PIAGET, J. *De Ia logique de l 'enfant à Ia logique de Vadolescent.* Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

INITIATION à 1'approche logique et au calcul. Paris: François Maspero, 1973. 127p.

iNSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PEDAGOGIQUE (França). Equipe de Recherche Mathématique à L'École Elementaire. Aprendizagem da Matemática na escola elementar. Trad. por Maria Aparecida Neves Blandy. *Revista de Ensino de Ciências,* São Paulo, n.6, 1982.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Dificuldades dos alunos de 1* série — Matemática.* Rio de Janeiro, 1976. 46p. (Série Pesquisas e monografias, 15)

INTER-AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION, 2, 1966. Lima. *Educação matemática nas Américas:* relatório. São Paulo: Ed. Nacional, 1969. 341p.

INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 2, 1972. Exeter. *Proceedings.* Cambridge: University of Cambridge, 1973. 318p.

INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 3. 1976. Karlsruhe. *Proceedings.* Germany: University of Karlsruhe, 1977. 398p.

IRDP. *Connaissances mathèmatiques à 1'école primarie.* Berne, 1991.

IRVING, Robert. *Matemática e desenvolvimento mental.* São Paulo: Cultrix, 1970. 152p.

ISSACS, N. *El desarrollo de Ia compreension en ei nifio pequeno según Piaget.* Buenos Aires: Paidós, 1967.

JACOBSEN, Eduardo. *Los módulos y ei mejoramiento de Ia educación matemática:* los módulos en Ia ensenanza y ei aprendizaje de Ia Matemática en Ia escuela secundaria. Montevideo: UNESCO, 1976. 269p.

JAPIASSU, H. *Omito da neutralidade científica.* Rio de Janeiro: Imago, 1975.

________. *Introdução ao pensamento epistemológico.*2.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977.

VALENTE, Flanir. *Uma metodologia de avaliação de programas de computador para o ensino de Matemática de l^s e 2^S graus.* Brasília, 1986. Dissertação (Mestrado) — FE, UnB.

VARIZO, Zaira da Cunha Melo. *História de vida e cotidiano do professor de Matemática.* Goiânia, 1990. 2v. Dissertação (Mestrado) — FE, UFC

VIANNA, Claudia Coelho de Segadas. *O papel do raciocínio dedutivo no ensino da Matemática.* Rio Claro, 1988. 127p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

VILA, Maria do Carmo. *Um modelo de metodologia operatória como alternativa para a melhoria do ensino de Matemática nas séries iniciais do I^a grau.* Campinas, 1982. 26 lp. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

VIZCARRA CADERÓN, Graciela. *Fatores relevantes no rendimento da Matemática do l^B ano de educação secundária de Lima-Peru.* Brasília, 1986. Dissertação (Mestrado) — FE, UnB.

WILMER, Celso Braga. *Modelos na aprendizagem da Matemática.* Rio de Janeiro, 1976. 14 lp. Dissertação (Mestrado em Matemática) — PUC-RJ.

ZACARIAS, Tânia M. M. *Determinação do grau de penetração do Programa de Treinamento de Professores de Ciências Experimentais e Matemática - PROTAB, com vistas à melhoria do ensino de Ciências.* Campinas, 1979.174p. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP. Convênio OEA-MEC-PREMEM.

RELAÇÃO DE TESES E DISSERTAÇÕES DEFENDIDAS EM 1991

AGRANIONIH, Neila T. *O ensino e a aprendizagem matemática:* uma intervenção construtivista. Porto Alegre, 1991. Dissertação (Mestrado em Educação) — UFRGS.

ARAÚJO, Expedito Azevedo. *O uso de material concreto na aprendizagem matemática:* um estudo e proposta para a 5ª série. Rio Claro, 1991. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

BASSO, Marli. *Geometria, educação e sociedade.* Santa Maria, 1991. 167p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSM.

BROLEZZI, Antônio Carlos. *A arte de contar:* uma introdução ao estudo do valor didático da história da Matemática. São Paulo, 1991. Dissertação (Mestrado) — FE, USP.

CARVALHO, Nelson Luiz Cardoso. *Etnomatemática:* o conhecimento matemático que se constrói na resistência cultural. Campinas, 1991. Dissertação (Mestrado) — FE, UNICAMP.

COSTA, Eliane Moreira da. *Linguagem e Matemática no ensino de l^B grau.* Niterói, 1991. 98p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFF.

CRESCE, Leia Luzia Pierri de. *"Na Universidade cada um acaba sendo seu principal mestre...":* dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática no terceiro grau. São Carlos, 1991. 194p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFSCar..

FONSECA, Maria da conceição Ferreira Reis. *O evocativo na Matemática:* uma possibilidade educativa. Rio Claro, 1991. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

GONÇALVES, Marilene Ribeiro Resende. *O ensino de Matemática na escola normal:* uma busca de compreensão. Rio Claro, 1991. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

GUSTINELI, Odesnei Aparecida Pastori. *Modelagem Matemática e Resolução de Problemas:* uma visão global em educação matemática. Rio Claro, 1991. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

JARDINETTI, José Roberto Boettger. *A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da Geometria Analítica a nivel do 1ª e 2ª graus.* São Carlos, 1991. 298p. Dissertação (Mestrado em Educação) — CECH, UFSCar.

KOGUT, Marianne. *Informática ao encontro das crianças de rua:* uma proposta. Rio de Janeiro, 1991.141p. Dissertação (Mestrado) — COPPE, UFRJ.

MENDES, Clayde Regina. *Do necessário ao possível:* a criança e sua familiaridade com algumas noções de lógica modal. Campinas, 1991. 165p. Tese (Doutorado) — FE, UNICAMP.

PEREZ, Geraldo. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de Geometria para as camadas populares.* Campinas, 1991. 348p. Tese (Doutorado) — FE, UNICAMP.

RIBEIRO, Silvia Regina S. *As representações sociais da Matemática na Imprensa.* Niterói, 1991.258p. Dissertação (Mestrado) — FE, UFF.

SANCHES, Lucilia Bechara. *O desenvolvimento da noção de semelhança na resolução de questões de ampliação e redução de figuras planas.* São Paulo, 1991. 226+163p. Dissertação (Mestrado) — FE, USP.

RELAÇÃO DE TESES E DISSERTAÇÕES DEFENDIDAS EM 1992

ALMEIDA, Nilze Silveira de. *Uma experiência didática deformação matemático-epistemológica com professores do segundo grau.* São Paulo, 1992. Dissertação (Mestrado) — FCMF, PUC-SP.

BARBOSA Daniel de Freitas. *O ensino de Matemática no 1ª e 2ª graus:* o quadro institucional e a relação professor-aluno em sala de aula. São Paulo, 1992. 404p. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) — PUC-SP.

BURAK, Dionísio. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo ensino-aprendizagem.* Campinas, 1992. 329+130p. Tese (Doutorado) — FE, UNICAMP.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. *Uma proposta pedagógica em Etnomatemática na zona rural da fazenda Angélica em Rio Claro (SP).* Rio Claro, 1992. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

CARRASCO, Lúcia Helena Marques. *Jogo versus realidade:* implicações na educação matemática. Rio Claro, 1992. 305p. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

COELHO, Marília Martins. *Escola pública de 1ª grau:* tendências didáticas do ensino de Ciências e Matemática. Campinas, 1992. 334+161p. Tese (Doutorado) — FE, UNICAMP.

CORREA, Roseli de Alvarenga. *A modelagem:* o texto e a história inspirando estratégias na educação matemática. Rio Claro, 1992. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

LOURENÇO, Marcos Luiz. Por que ensinar Matemática? *Didática*, São Paulo, n.28, p. 131-135, 1992.

LOVELL, K. Dessarrollo dei pensamiento formal operacional. In: WAL, W.D., VARMA, V.P *Avances en psicologia de Ia educaciôn*. Madrid: Morata, 1975.

MACHADO. Nilson José. A alegoria em Matemática. *Estudos Avançados*, São Paulo, v.5, n.13, p.79-100, set/dez. 1991.

_________. Interdisciplinaridade e Matemática. *Pm-Posições*, Campinas, v.4, n.l[10], p.24-34, mar. 1993.

_________. *Lógica?* É lógico? São Paulo: Scipione, 1989. 40p.

_________. Matemática e educação. *Estudos Leopoldenses*, São Leopoldo (RS), v.28, n. 129/130, p. 149-150, set./dez. 1992.

_________. Matemática, senso comum e dasamparo. *Cadernos CEDES*, Campinas, n.21, p.47-54, 1988.

_________. *Matemática e língua materna:* análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990. 169p.

_________. *Matemática e língua materna:* uma impregnação essencial. São Paulo, 1989. 252p. Tese (Doutorado em Educação) — USP.

_________. *Matemática e realidade:* [análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de Matemática]. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1987. 103p.

_________. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão.* São Paulo: Scipione, 1989.

_________. *Polígonos, contopéias e outros bichos.* São Paulo: Scipione, 1988. 55p.

_________[Entrevistado por Luiza de Andrade e Silva]. A Matemática não é exata. *Sala de Aula*, Rio de Janeiro, v.3, n.26, p.28-29, dez. 1990.

MAGNUSSOR JÚNIOR, Mário. A Matemática que deve ser ensinada às crianças. *SESI Escola*, São Paulo, v. 12, n.39, p. 15-30, jan/abr. 1979.

MACLANE, S., BIRKHOFE, G. *Álgebra*. New York: MacMillan, 1968.

MAGNO, Beatriz Helena, NISKIER Arnaldo. *Manual de didática da Matemática.* Rio de Janeiro: Signum. 1978. 140p.

MANNO. AG. *A filosofia da Matemática.* São Paulo: Edições 70, [19-].

MANTELLI, Gladis C. et al. *Subsídios de relação sobre a estrutura da Matemática.* Porto Alegre: Fundação de Recursos Humanos, 1978.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque. *Subsídios para ensino da Matemática.* Brasília: MEC, [1988?]. 149p.

MARQUES, Klcber Cruz et al. *Estudo nacional do ensino-aprendizagem de Matemática.* João Pessoa: UFPB: INEP, 1982.

MÁRQUEZ, Ángel Diego. *Didática das matemáticas elementares.* Rio de Janeiro: Livros Escolares, 1967.

MARQUEZ, Kleber Cruz et al. *Estudo nacional do ensino-aprendizagem na Matemática.* João Pessoa: UFPB: INEP, 1982.

MARTINEZ MONTEIRO, J. *El curriculum matemático en Ia educaciôn infantil:* desarrollo y actividades. Madrid: Escuela Espaflola, 1991, 206p.

MARTINS, Marcondes Diniz. A história da Matemática. *Revista Pedagógica*, Belo Horizonte, v.4, n.23, p.3-6, set./out. 1986.

MARX, K., ENGELS, F. *Cartas sobre Ias Ciéncias de Ia natureza y Ias Matemáticas.* Barcelona: Anagrama, 1985.

MASETTO. Marcos T., ABREU, Maria Célia de. *Planejar, pensando.* São Paulo: Balieiro, 1986. 29p. (Coleção Ensinando-aprendendo).

MATHEMATICAL models in educational planning: technical repports. Paris: OECD, 1967. 295p.

MEDEIROS, Cleide Farias de. Por uma educação matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, Maria Aparecida de (Coord.). *Educação matemática.* São Paulo: Moraes, 1988. p. 13-44.

MEIRA, Luciano R de Lemos. Explorações em compreensão matemática: o uso e produção de representações materiais. In: SEMINÁRIO sobre novas perspectivas da educação matemática no Brasil. Brasília: INEP, 1994. lv. (Série Documental. Eventos, 4. Parte 2).

MENDES, Rosa Emilia de Araújo. Percentagem de juros pela compreensão — l[9] grau. *AMAE Educando,* Belo Horizonte, v.20, n.192, p.24-32, nov. 1987.

MENDONÇA, Erasto Fortes. A prática da avaliação por objetivos. *Tecnologia Educacional*, Rio de Janeiro, v. 17, n.83/84, p.27-37, jul./out. 1988.

MIALARET, G. *A aprendizagem da Matemática*. Coimbra: Almedina, 1975.

MICHEL, Margarida Magda Machado. Planejamento Matemática para o jardim de infância. *AMAE Educando*, Belo Horizonte, v.7, n.61, p.30-33, mar. 1974.

MIGUEL, Antônio. *O ensino de Matemática no primeiro grau* .2.ed. São Paulo: Atual, 1986. 179p.

________. *Evolução do ensino secundário público de Matemática no Brasil.* Campinas: UNICAMP, Faculdade de Educação, 1979.

MIGUEL, Antonio, FIORENTINI, Dario, MIORIM. Maria Ângela. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndalo? *Pró-Posições,* Campinas, v.3, n.l[7], p.39-54, mar. 1992.

MIGUEL, Antonio, MIORIM, Maria Ângela. *Ensino de Matemática no primeiro grau.* São Paulo: Atual, 1986. 179p.

MILLER, J.A. *Maternas.* Buenos Aires: Manantial, 1987.

MOELLWALD, Francisco Egger. Matemática e cultura. *Espaços da Escola*, Ijuí, v.3, n.8, p.39-54, abr./jun.l993.

MORAES, Ceres Marques et al. *Didática especial de Matemática.* Rio de Janeiro: MEC, 1961. mimeo.

MOREIRA, Manoel Pinto. E os alunos não aprendem a somar... *Multimeios*, Salvador, n.2, p.3-5, 1984.

MOREIRA, Marco et al. *Aprendizagem:* perspectivas teóricas. Porto Alegre: Ed. da Universidade, 1985.

MOREIRA, Marco, MASINI, Elcie. *Aprendizagem significativa.* São Paulo: Moraes, 1982.

MOREIRA, Plínio Cavalcante. Ensino de Matemática nas escolas: uma discussão sobre conteúdos e métodos. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n.15, p.40-43, jun. 1992.

JAHN, Ana Paula. *Números relativos:* construção e estudo do funcionamento de um processo de ensino sobre o caso aditivo. São Paulo, 1994. Dissertação (Mestrado) — FCMF, PUC-SP.

MARTINELLO, Darci. *Modelação matemática:* uma alternativa para o ensino de matemática no 1º grau. Blumenau, 1994. Dissertação (Mestrado) — FURB.

M1GGNONI, Ednéia Poli. *Ideologia e o livro didático de Matemática.* Campinas, 1993. Dissertação (Mestrado) — FE, UNICAMP.

MISKULIN, Rosana S. *Concepções teórico-metodológicas baseadas em LOGO e em resolução de problemas para processo ensino-aprendizagem da Geometria*. Campinas, 1994. Dissertação (Mestrado) — FE, UNICAMP.

OLIVEIRA, Tela Alves de. *Análise não-standard:* uma apologia ao seu ensino. Rio Claro, 1994. Dissertação (Mestrado) — IGCE, UNESP.

RESENDE, Wanderley Moura. *Uma análise histórico-epistêmica da operação de limite.* Rio de Janeiro, 1994. Dissertação (Mestrado) — Universidade Santa Úrsula.

VILLELA, Lúcia Maria Aversa. *É preciso ser preciso:* a importância da construção de significados no cotidiano **e** na Matemática. Rio de Janeiro, 1994. Dissertação (Mestrado) — Universidade Santa Úrsula.

EM ABERTO, en avant

1994 — Jusqu'à la fin de 1'année, nous publierons deux números encore:

n* 63: Education Scolaire Indigène

n* 64: Education Compare.

1995 — Est dèjá defini un numero sur le thème **Education, Travail et Développement.**

BIBLIOGRAFIA BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO

1994 — Jusquàla fin de 1'annèe, nous publierons l'année de 1989, avec 550 pages.

1995 — Jusqu'à le móis de mars nous publierons 1'année de 1990, avec environ 600 pages.

REVISTA BRASILEIRA DE ESTUDOS PEDAGÓGICOS

1994 — Jusqu'à la fin de 1'annèe, nous publierons les números 176 et 177, avec un'image neuve et plus de qualité:

— nouveau dessin;

— Section Question en Dèbat, continuant sur le thème Paradigmes en Education;

— Section Deuxième Edition;

— Section Traductions;

— et plus les sections traditionnelles: Études, Notes de Recherches, Exposès Critiques de Publications et Communications et Renseignements.

1995 — Jusqu'á le móis de mars, nous publierons le numero 178, encore sur le thème Paradigmes en Education dans la Section Question en Dèbat.