Ce document est extrait de la base de données textuelles Frantext réalisée par l'Institut National de la Langue Française (InaLF)

Traité de mécanique [Document électronique]. Tome premier / par S. D. Poisson,...

p11

De l'équilibre d'un point matériel. li lorsqu'un point matériel est soumis à l'action simultanée de plusieurs forces qui agissent sur lui dans des directions différentes et qui ne se font point équilibre, il est évident qu'il doit se mouvoir dans une certaine direction, et que rien n'empêche d'attribuer le mouvement qu'il prend à une force unique, agissant sur lui dans cette direction. Cette force est ce qu' on appelle la résultante de celles qui ont mis le corps en mouvement, et celles-ci sont nommées les composantes de la première. La propriété caractéristique de la résultante est de pouvoir remplacer identiquement les composantes, et par conséquent, de leur faire équilibre, quand on l'applique au point matériel, en sens contraire de sa direction ; car alors ce point est dans le même état que s'il était sollicité par deux forces égales et directement opposées. Déterminer en grandeur et en direction, la résultante de plusieurs forces données, est

p12

un point fondamental de la statique dont nous allons d' abord nous occuper.

p18

I 6 maintenant supposons que les directions des deux composantes fassent un angle quelconque Amb / Fig 4 /, et soient toujours Mpetmq les lignes qui représentent ces forces. Construisons sur ces deux lignes le parallélogramme Mprq ; par le point M, menons la perpendiculaire (..) à la diagonale Mr ; abaissons des points Petq, les perpendiculaires (..) sur (..) , et (..) sur Mr ; nous aurons les deux rectangles (..) , dont les côtés (..) , sont égaux comme étant les hauteurs de deux triangles égaux, Mpretmqr

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

; et en vertu du dernier théorème, la force Mp sera la résultante des forces (...) , et la force Mq sera celle des forces ; de sorte que nous pouvons substituer les quatre forces (...) , aux deux forces données Mpetmq ; or, (...) se détruisent, puisqu' elles sont égales et contraires ; (...) s' ajoutent, parce qu' elles agissent suivant la même droite ; et leur somme est égale à la diagonale Mr, car il est aisé de voir que (...) ; par conséquent Mr est la résultante des deux forces Mpetmq. Concluons donc que la résultante de deux forces

p19

quelconques, appliquées en un même point et représentées par des lignes prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces . I 7 au moyen de ce théorème, toutes les questions qu' on peut proposer sur la composition de deux forces en une seule, et sur la décomposition d'une force en deux autres, sont ramenées à la résolution d'un triangle. En effet, la résultante et les deux composantes sont représentées par les trois côtés Mr, Mpetpr du triangle Mpr; les angles de ce triangle sont les angles compris entre la résultante et les composantes, et le supplément de l' angle compris entre les deux composantes ; il s' ensuit donc que trois de ces six choses, les trois forces et les trois angles compris entre leurs directions, étant données, on trouvera les trois autres en résolvant le triangle Mpr; ce qui suppose une force au moins au nombre des données. Par exemple, soient Petq les valeurs des deux composantes, M l'angle compris entre leurs directions ; on demande leur résultante et l'angle qu'elle fait avec la force P. On trouvera d'abord cette équation (..) qui fera connaître la résultante R ; et appelant X l' angle demandé , on aura pour le déterminer, cette proportion (..) . I 8 si l' équilibre a lieu entre trois forces P, Q, S

p20

appliquées au point M / Fig 5 /, suivant les directions Mp, Mq, Ms, il faut que l' une quelconque des trois soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres ; et comme cette résultante est comprise dans le plan de ces deux forces, il s' ensuit d' abord que les trois forces doivent être dans un même plan. Soit Mr le prolongement de Ms ; la résultante Rdepetq sera dirigée suivant Mr, et l' on aura (..) . Mais d' après le N précédent, on a, en comparant cette résultante à chacune de ses composantes, (..) ; de plus, (..) ; on aura donc (..) ; résultat qui nous montre que *quand trois forces* se font équilibre autour d' un même point, chacune d' elles peut être représentée par le sinus de l' angle compris entre les directions des deux

autres . I 9 la résultante de deux forces étant connue, il est aisé d' en déduire celle d' un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, et situées ou non situées dans un même plan : on prendra d' abord la résultante de deux de ces forces, ensuite on composera cette résultante avec une troisième force, puis cette seconde résultante avec une quatrième force ; on continuera ainsi jusqu' à ce qu' on ait épuisé toutes les forces données : la dernière résultante que l' on obtiendra, sera celle de toutes ces forces. Cette

p21

règle donne lieu à une construction géométrique qui mérite d' être remarquée. Représentons les forces données par des lignes . etc., prises sur leurs directions à partir du point d' application, qui est ici le point M / Fig 6 /. Par le point A, menons une ligne Ab égale et parallèle à (..); par le point B, menons une ligne Bc, égale et parallèle à (..) ; par le point C, menons de même une ligne Cd, égale et parallèle à (..); et ainsi de suite. Nous formerons de cette manière une portion de polygone dont le nombre de côtés sera égal à celui des forces données : en joignant l'extrémité de son dernier côté et le point M par une droite, cette ligne représentera en grandeur et en direction la résultante cherchée. En effet la ligne Mb exprime la résultante des forces (..) : la ligne Mc représente celle des forces (..) , ou des trois forces (..) ; la ligne Md représente la résultante des forces (..), ou celle des quatre forces (..); et ainsi de suite. L' ordre dans leguel on prend les forces est absolument indifférent; on pourra former, en changeant cet ordre, différens polygones ; mais la ligne qui joint l'extrémité du dernier côté au point M, sera la même en grandeur et en direction dans tous ces polygones. Dans le cas particulier où les forces données sont au nombre de trois, non situées dans un même plan, la résultante est en grandeur et en direction, la diagonale du parallélépipède construit sur ces trois forces, comme côtés adjacens. Ainsi, par exemple,

p22

il est aisé de voir que la ligne Mc, qui représente la résultante des trois forces (..), est la diagonale du parallélépipède que l' on construirait en prenant ces trois lignes pour côtés adjacens. 2 o cette construction est peu propre à donner la valeur de la résultante d' un nombre quelconque de forces, et les valeurs des angles qui déterminent sa direction, en fonction de ces mêmes forces; mais on y parvient très-simplement, en considérant en particulier le cas de trois forces rectangulaires, auquel on peut ramener tous les autres, comme nous le ferons voir ensuite. Soient X, Y, Z, les

trois composantes; R, leur résultante; A, B, C, les trois angles que fait la direction de la force R, avec celles des forces X, Y, Z. D' après ce qu' on vient de voir, R est la diagonale du parallélépipède dont X, Y, Z sont les trois côtés; or, ce parallélépipède étant rectangle, il s' ensuit qu' on aura (..) . Il s' ensuit aussi que si l' on joint l' extrémité de la diagonale R, à celles des trois côtés X, Y, Z, on formera trois triangles rectangles dont R sera l' hypothénuse commune; d' où l' on conclura (..); équations qui s' accordent avec la précédente, à cause que A, B, C sont liés entre eux / N 8 / par cette équation de condition (..) .

p23

Lorsque les composantes X, Y, Z seront données, l' équation fera connaître la valeur de la résultante, et les équations en détermineront la direction, au moyen des angles A, B, C. Si, au contraire, la force R est donnée, et qu' il s' agisse de la décomposer en trois forces rectangulaires X, Y, Z, qui fassent avec elle des angles donnés A, B, C, les valeurs des forces demandées seront immédiatement déterminées par les équations. Si l' une des composantes, par exemple, la force Z, est nulle, R n' est plus la résultante que des deux forces Xety; elle est comprise dans leur plan, et sa direction dépend seulement des deux angles Aetb. Ces angles et la valeur de R sont alors déterminés par ces équations (..), qui se déduisent des précédentes en y faisant (..), et que l' on peut aussi obtenir directement par la considération du parallélogramme rectangle dont Xety sont les côtés et R la diagonale.

p34

De l'équilibre d'un corps solide. 27 ce qui précède renferme toute la statique d'un point matériel. Nous allons, dans ce chapitre, chercher les conditions d'équilibre d'un système de points liés entre eux d'une manière invariable, et soumis à l' action de forces quelconques. Mais pour procéder du plus simple au plus composé, nous examinerons d'abord deux cas particuliers : celui où les forces données sont toutes parallèles entre elles. et celui où elles sont toutes dirigées dans un même plan. Nous ferons voir ensuite que le cas général peut toujours se ramener à ces deux systèmes de forces. I composition et équilibre des forces parallèles. 28 maintenant que nous allons considérer des forces agissant sur différens points, nous aurons souvent besoin de déplacer les points d'application d'une ou de plusieurs de ces forces. Or, on ne change rien à l'action d'une force en transportant son point d'application en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce second point soit censé attaché au premier par une droite inflexible, et que l'intensité

et la direction de la force soient restées les mêmes. Ainsi, par exemple, si une force donnée P

p35

agit au point M, suivant la direction Ma / Fig 7 /, on peut lui substituer une force égale et de même direction, appliquée au point (...) que je prends au hasard sur la ligne Ma, et que je suppose lié au point M par la droite inflexible (..). En effet, il est permis d'appliquer au point (..), deux forces égales entre elles et agissant en sens contraire, savoir, l'une dans la direction (..), et l' autre dans la direction (..); car ces deux forces se détruisent immédiatement, et le système dont la force P fait partie reste le même qu' auparavant ; mais si l' on suppose de plus que chacune des forces ajoutées est égale à la force P, il arrivera que la force ajoutée qui agit au point (..) suivant la direction (..), détruira la force donnée qui agit au point M dans la direction (..), puisque ces deux forces égales agissent en sens contraires aux extrémités d'une droite inflexible; il restera donc l' autre force ajoutée, agissant au point (..) suivant la direction (..), et qui peut être considérée comme étant la force donnée P dont on a transporté le point d' application de M en (..) sans changer sa direction. Nous avons supposé que le point (..) était pris sur la ligne Ma ; il pourrait se trouver sur son prolongement, comme le point K, par exemple, et l'on prouverait, par un raisonnement semblable, qu' il est permis d'y transporter le point d'application de la force P : la direction de cette force serait alors la ligne Ka. Dans un grand nombre de cas, les forces agissent sur les corps qu' elles mettent en mouvement ou qu' elles tendent à mouvoir. soit en les tirant par le

p36

moyen d'un fil qui leur est attaché, soit en les poussant par l' intermédiaire d'une droite inflexible, appuyée sur leur surface ce fil ou cette droite représente alors la direction de la force, et ne change rien à son action qui reste la même, d'après ce que nous venons de prouver, que si la force était immédiatement appliquée au point du mobile auguel le fil ou la droite vient aboutir. 29 en déplaçant ainsi les points d' application, nous pouvons étendre la règle du parallélogramme des forces au cas de deux forces dirigées dans un même plan et appliquées aux extrémités d'une droite inflexible. En effet. soient Mn cette droite / Fig 7 /, Maetnb les directions des deux forces données ; je les prolonge jusqu' au point K où elles se coupent, et en supposant ce point fixement attaché à la ligne Mn, je puis le prendre pour le point d'application commun aux deux forces ; portant donc à partir de ce point, sur les directions Kaetkb, des lignes Kaetkb qui soient entre elles comme les forces données, et achevant le parallélogramme Kacb,

la diagonale Kc représente, en grandeur et en direction, la résultante demandée. Le point O, où le prolongement de cette ligne coupe la droite Mn, est le point d'application de cette résultante sur cette droite, et la ligne Oc représente sa direction. 3 o désignons par Petq les deux composantes ; la proportion supposée (...)

p37

peut être changée en celle-ci (..); mais si l' on abaisse du point O de la résultante, des perpendiculaires Opetog sur les directions des forces Petq, on aura (..); d' où l' on conclut ; donc les deux composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d'un point quelconque de la résultante. On démontrerait semblablement que la résultante et l'une des composantes sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, d' un point guelconque de l' autre composante. 3 i ce théorème ayant lieu, quelque petit que soit l'angle Akb des deux composantes, il s' ensuit qu' il subsiste encore à la limite, où l'angle devient nul et où les forces deviennent parallèles. Ainsi, supposons que la direction de la force Q tourne autour du point N, jusqu' à ce qu' elle tombe sur la ligne (...) parallèle à la direction Ma de la force P; de sorte que ces forces soient maintenant parallèles et dirigées dans le même sens ; dans cet état la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction (..) sera le prolongement (..) de la perpendiculaire Op, abaissée du même point sur la

p38

direction Ma; et il sera toujours vrai de dire que les forces Petq sont entre elles comme les perpendiculaires (..); de manière que le point O partage la ligne (...), en deux parties réciproguement proportionnelles à ces forces. On conclut de là. cette proportion : (..); si donc on appelle A la droite (..) qui mesure la distance mutuelle des deux parallèles (..), on aura (..), et par conséquent (..); or, cette ligne (..) exprime la distance d'un point quelconque de la résultante à la droite (..); sa valeur, qui ne dépend que des quantités données A. P. Q. est la même quel que soit ce point ; il s' ensuit donc que la direction de la résultante est une droite (..), parallèle à (..), ou à la direction des composantes. La valeur de cette force est une conséquence de sa direction. En effet, les lignes (..) étant parallèles, la ligne (...) perpendiculaire à la première, l' est aussi à la seconde ; mais en étendant le théorème du numéro précédent au cas des forces parallèles, la résultante et la composante P doivent être entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées du point (...) de la composante Q, sur

leurs directions ; d' où l' on conclut, R étant la résultante, ; donc à cause de (..), cette proportion comparée à la précédente , donne (..). On voit donc, I que la résultante de deux forces parallèles, agissant dans le même sens, partage la distance mutuelle des composantes en deux parties réciproquement proportionnelles à ces forces ; 2 que cette résultante est parallèle aux composantes ; 3 qu' elle est égale à leur somme

p44

35 considérons actuellement un nombre quelconque de forces parallèles dont une partie agit dans un sens et l'autre dans le sens opposé, qui sont situées ou non situées dans un même plan, et appliquées à des points invariablement liés entre eux, par exemple, à différens points d'un corps solide. En composant deux de ces forces en une seule, puis celle-ci et une troisième encore en une seule, et ainsi de suite, on parviendra à déterminer la grandeur et la position dans l'espace de la résultante de toutes les forces données, à moins que les deux dernières forces qu' on aura à considérer, ne tombent dans le cas d'exception du numéro précédent. Cette résultante sera évidemment parallèle à la direction commune des composantes ; de plus, elle sera égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire, et elle agira dans le sens de la plus grande somme. Si donc on regarde les unes comme positives et les autres comme négatives / Nio /, et qu' on les représente toutes par (..), etc., et leur résultante, par R, on aura toujours (..) . 36 si les forces données viennent à tourner autour

p45

de leurs points d'application, sans cesser d'être parallèles, la résultante tournera pareillement autour d'un des points de sa direction; car son point d'application qu'on trouve en composant deux à deux les forces données, ne dépend en aucune manière de la direction commune de ces forces; de sorte qu'il reste le même quand cette direction vient à changer. Ainsi, par exemple, supposons que les forces parallèles sont au nombre de trois, (..), dirigées suivant les droites (..) / Figio /; soit d'abord Nb la direction de la résultante de (..), qui sera égale à; soit ensuite (..) la direction de la résultante des forces, et observons que la figure suppose que (..) agit en sens contraire de (..), et qu'on a (..). Maintenant, concevons que les trois forces (..) tournent autour des points (..), en conservant

leur parallélisme et le sens dans lequel chacune d'elles est dirigée, et soient (..), leurs nouvelles directions. Dans ce nouvel état, la résultante des forces (..) rencontrera la droite au même point N qu' auparavant, puisque la position de ce point ne dépend que du rapport des composantes et est indépendante de l'angle que la droite (..) fait avec leur direction / N 32 /. Par la même raison, la résultante de (..) rencontrera toujours le prolongement de la droite (..) au même point (..); par conséquent les trois forces données, tournant autour des points (..), leur résultante tournera de même autour du point (..).

p49

39 on appelle moment d'une force par rapport à un plan, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de son point d'application sur ce plan. Ainsi, (...), etc. Sont les momens des forces (..), etc., par rapport au plan Xoy, et l' équation qu' on vient de trouver renferme ce théorème : le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan choisi arbitrairement, est égal à la somme des momens de ces forces, par rapport au même plan . Ces momens peuvent être positifs ou négatifs : ils sont positifs, quand la force et l' ordonnée de son point d' application sont de même signe ; négatifs, dans le cas contraire. 4 o en prenant de même les momens des forces (..), etc., par rapport aux plans des X, Z et des Y, Z, on aura (..). Ces deux équations, jointes à la précédente, détermineront, d'une manière fort simple, la position du centre des forces parallèles, c'està-dire. les valeurs

p50

de ses trois coordonnées X, Y, Z. En menant, par ce point, une parallèle à la direction commune des forces, on aura la position de leur résultante ; le signe de la valeur trouvée plus haut / N 35 /, fera connaître le sens dans lequel elle agit suivant cette ligne. La somme des momens des forces (..), etc. Est nulle par rapport à tout plan passant par le centre des forces parallèles ; car en prenant ce plan pour celui des X, Y, on devra avoir (..); d' où l' on conclut (..). Au reste, le centre des forces parallèles suppose toutes les forces données, réductibles à une seule ; il n' existe pas quand ces forces se réduisenn à deux, égales et contraires, mais non directement opposées ; et en effet , le calcul donne, dans ce cas, des valeurs infinies pour les coordonnées X, Y, Z, puisqu' alors la somme des quantités (..), etc. Est égale à zéro, ce qui rend nul le dénominateur R commun à ces valeurs.

p66

52 nous ferons souvent usage, dans la suite de cet ouvrage, d' une espèce de momens dont nous n' avons pas parlé jusqu' ici, et qu' il ne faut pas confondre avec les momens que nous avons définis dans le N 39. En attendant que nous en donnions une théorie complète, nous exposerons ici celles de leurs propriétés, qui sont relatives à la composition des forces dirigées dans un même plan.

p67

On appelle moment d'une force par rapport à un point, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction ; le point d'où l'on abaisse la perpendiculaire se nomme le centre des momens . Les momens par rapport à un point, diffèrent essentiellement des momens par rapport à un plan / N 39 /. Ceux-ci dépendent du point d' application de la force, et sont indépendans de sa direction ; les momens par rapport à un point dépendent, au contraire, de la direction, et sont indépendans du point d'application. Les premiers ne s' emploient que dans la théorie des forces parallèles ; ils peuvent être positifs ou négatifs ; leurs signes se déterminent d'après ceux de la force et de l'ordonnée du point auguel elle est appliquée, puisqu'ils sont le produit de ces deux quantités. Au contraire, dans les momens par rapport à un point, les deux facteurs, savoir, la force et la perpendiculaire abaissée sur sa direction, sont des quantités qu' on regarde toujours comme positives ; par conséquent ces momens sont aussi toujours positifs. 53 d'après cette définition, il nous sera aisé de démontrer que le moment de la résultante de deux forces, pris par rapport à un point de leur plan, est égal à la somme ou à la différence des momens des composantes, pris par rapport au même point ; à la différence, quand ce point est compris dans l'angle des composantes, ou dans son opposé au

p68

sommet; à la somme, quand ce point tombe hors de ces deux angles . En effet, soient (..), ces deux forces; (..) / Figi 5 eti 6 /, leurs directions; Q leur r 2 sultante! Agissant suivant Mb; C, le centre des momens; (..), les perpendiculaires (..), abaissées de ce point sur les directions de (..). Décomposons chacune de ces trois forces en deux autres, dirigées suivant la droite Mc, et suivant la perpendiculaire (..) élevée sur cette droite; et considérons les composantes perpendiculaires à Mc. On a évidemment (..), en désignant par C, la longueur de la ligne Cm; donc la composante de la force Q, suivant Mk, sera égale à (..). De même les composantes perpendiculaires à Cm, de (..)

sont égales à (..); elles sont dirigées en sens contraires, quand la ligne Cm traverse l' angle (..) / Figi 5 /, et dans le même sens, quand cette ligne tombe hors de cet angle / Figi 6 /. Or, la somme de ces composantes de (..), dans le second cas, et l' excès de la plus grande sur la plus petite, dans le premier, doit reproduire la composante de Q, puisque Q est la résultante de ; on aura donc, en supposant la composante de P, plus grande que celle de (..), (..);

p69

le signe (..) se rapportant à la Figi 6, et le signe (..), à la Figi 5 ; supprimant le dénominateur C, commun à tous les termes , il vient (..) ; ce qu' il s' agissait de démontrer. 54 si l' on imagine que le point C soit fixe, et que les perpendiculaires , soient des droites inflexibles, les forces (...) , qui peuvent être censées agir aux extrémités de ces droites, ne pourront produire qu' un mouvement de rotation autour de ce centre fixe. Or, l'inspection de la Figi 6 suffit pour montrer que quand le point C tombe hors de l'angle (...), et de son opposé au sommet, les forces (..) et leur résultante Q tendent à faire tourner leurs points d'application, dans le même sens autour de ce point C; au contraire, lorsque ce point tombe dans l'un de ces deux angles, la Figi 5 fait voir que les forces (...) tendent à faire tourner les points (...) en sens opposés ; et l'on voit aussi que, dans ce cas, la résultante Q tend à faire tourner son point d' application, dans le même sens que celle des deux composantes qui a le plus grand moment. D'après cette remarque, nous pouvons énoncer, de la manière suivante, le théorème que nous venons de démontrer. le moment de la résultante de deux forces est égal à la somme ou à la différence des momens de ces forces, selon qu' elles tendent à faire tourner leurs points d'application dans le même sens ou dans des

p70

sens opposés, autour du centre des momens qui est pris dans leur plan et regardé comme fixe. ce théorème ayant lieu pour des forces qui font entre elles un angle quelconque, doit encore subsister, quand elles deviennent parallèles ; c' est en effet une conséquence facile à déduire de la composition de ce genre de forces / N 32 /.

p72

57 l' équation fournit un énoncé fort simple de la loi de l' équilibre dans le levier . En effet, un levier est en général une ligne inflexible, droite ou courbe, fixée par un de ses points qu' on appelle le point d' appui ; en supposant donc le levier que l' on considère, formé par une courbe plane, et les forces qui lui sont appliquées, toutes dirigées dans le plan de cette courbe, il faudra, pour l' équilibre, que ces

p73

forces aient une résultante qui vienne passer par le point d' appui; si donc on prend ce point pour le centre des momens, le moment de la résultante sera égal à zéro : donc en vertu de l' équation (..), et en conservant les suppositions du N 55, on aura ; c' est-à-dire, que pour l' équilibre, la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, doit être égale à la somme des *momens de celles qui* tendent à le faire tourner dans le sens opposé, les momens des unes et des autres étant pris par rapport au point d'appui. 58 comme il existe réellement un point fixe dans le levier, il est naturel de faire entrer la considération du mouvement de rotation autour de ce point, dans l'énoncé de la condition d' équilibre, et de la faire servir à distinguer les momens qui doivent être pris avec le signe (...), et ceux qui doivent avoir le signe (..) . Mais quand il s' agit d' un système de forces appliquées à un corps qui n'est retenu par aucun point fixe, la considération d'un mouvement de rotation hypothétique est tout-à -fait indirecte et d'ailleurs peu commode. Il vaut mieux alors, ainsi que nous l' avons pratiqué précédemment, introduire à la place des forces données, leurs composantes parallèles à des axes rectangulaires, et à la place des perpendiculaires abaissées sur leurs directions, les coordonnées de leurs points d'application ; car ces composantes et ces coordonnées ont

p74

l' avantage que leurs signes sont donnés en même tems que leurs valeurs, sans qu' on ait besoin de recourir à aucune règle particulière. Au reste, l' équation (..) du N 5 i et l' équation que nous venons de trouver, exprimant, l' une et l' autre, la condition d' équilibre des forces (..), etc., autour d' un point fixe, il est évident que ces deux équations doivent être équivalentes ; et, en effet, si l' origine des coordonnées (..), etc., qui entrent dans la fonction L, coïncide avec le centre des momens, d' où l' on abaisse les perpendiculaires (..), etc., on a identiquement (..). On pourrait vérifier cette équation, en observant que les différens termes (..), etc. De la fonction L, sont les momens des composantes de (..), etc., pris par rapport à l' origine des coordonnées, et en montrant que ces termes sont assemblés dans L par les signes (..), selon le sens dans lequel chaque composante tend à faire tourner autour de ce point ; mais

on obtient plus simplement l' équation (...) , de la manière suivante. Supposons que (...) , etc. Ont une résultante R ; son équation sera, d' après le N 46, (...) ; et d' après les formules connues, la longueur de la

p75

perpendiculaire abaissée de l' origine des coordonnées sur cette droite, sera exprimée par (..), en prenant le signe (..) ou le signe (...), selon que L est positive ou négative, car cette longueur doit toujours être positive. Donc, R étant cette perpendiculaire, et observant que (..), on aura (..); équation qui est la même en vertu de l'équation (..), que celle qu'on veut vérifier. Si les forces (..), etc. N' ont pas de résultante, on ajoutera à ce système une force S de grandeur et de position arbitraires, et alors il existera une résultante. L'équation (...) aura donc lieu, en comprenant S au nombre des forces données ; or, en supposant que sa direction passe par l' origine des coordonnées, les deux membres de cette équation seront les mêmes que si la force S n' existait pas ; donc l' équation (..) subsiste entre les seules forces (..), etc.; par conséquent elle est vraie, soit que ces forces aient ou n' aient pas de résultante.

p80

6 i ces six équations suffisent pour l'équilibre des forces (...), etc.; car il est évident que si l'équilibre existe séparément dans les deux systèmes qui remplacent les forces données, il existera aussi entre ces forces. Mais pour que ces équations soient nécessaires, il faut qu'il soit démontré que ces deux systèmes de forces ne peuvent se détruire, sans qu'il y ait équilibre séparément dans chaque système; c'est en effet ce qui a lieu. Supposons, pour le prouver, que les deux systèmes puissent être en équilibre, sans que les forces

p81

parallèles à l' axe des Z se détruisent entre elles. Il est évident qu' on ne troublera pas cet équilibre en fixant une droite choisie au hasard dans le plan des X, Y; mais alors toutes les forces situées dans ce plan seront détruites, soit parce qu' elles rencontrent cette droite, soit parce qu' elles lui sont parallèles : au contraire, les forces perpendiculaires à ce plan, qui ne se détruisent pas entre elles, produiront un mouvement de rotation autour de l' axe fixe ; d' où il suit que l' équilibre que l' on suppose, ne peut pas avoir lieu. Ainsi les

forces perpendiculaires au plan des X, Y, et par conséquent aussi les forces dirigées dans ce plan, se détruisent séparément quand l' équilibre a lieu entre toutes les forces données. Concluons donc que les six équations du N précédent sont nécessaires et suffisent pour l' équilibre d' un système de forces quelconques, appliquées à différens points d' un corps solide libre, c' est-à-dire, à des points matériels liés entre eux d' une manière invariable, et dont aucun n' est supposé fixe, ni retenu sur une surface donnée. 62 occupons-nous maintenant de l' équilibre d' un corps solide qui n' est pas entièrement libre. Supposons d' abord que le corps auquel sont appliquées les forces (..), etc., renferme un point fixe, autour duquel il soit obligé de tourner. En plaçant l' origine des coordonnées en ce point, et en substituant aux forces données les deux systèmes du N 59, on démontrera, comme dans le cas

p82

d'un corps libre, que l'équilibre ne peut avoir lieu entre les forces (...), etc., à moins qu'il n'existe séparément entre les forces dirigées dans le plan des X, Y, et entre les forces parallèles à l'axe des Z. Or, pour l'équilibre de ces dernières forces, il faut, d'après ce qu' on a démontré dans le N 43, que les équations (..) aient lieu, et pour l'équilibre des forces dirigées dans le plan des X, Y, il résulte du N 5 i, que l' on doit avoir l' équation (..) . Les trois équations (..) du N 6 o, sont donc celles de l'équilibre d'un corps solide, fixé par un de ses points. L' équation (..) exprime / N 5 i / que les forces dirigées dans le plan des X, Y, ont une résultante dont la direction passe par l'origine des coordonnées ; en vertu des équations (..), les forces parallèles à l'axe des Z ont aussi une résultante / N 43 / passant par la même origine : si l' on suppose ces deux résultantes appliquées en ce point commun à leurs directions, et si on les compose en une seule force, celleci sera la résultante de toutes les forces (..), etc.; d'où il suit que quand les trois équations (..) ont lieu ensemble, les forces données ont une résultante unique, qui vient passer par l' origine des coordonnées ; cette origine étant supposée un point fixe, la résultante est détruite par sa résistance, et elle exprime la pression que ce point supporte.

p87

67 considérons enfin le cas où plusieurs des points du corps solide qui doit rester en équilibre, sont assujétis à demeurer dans un plan fixe, donné de position. Conservons toujours les notations du N 59, et prenons le plan donné, pour celui des coordonnées Xety. Substituons aux forces données, les deux mêmes systèmes de forces que dans ce N. II

est évident que les forces parallèles à l'axe des Z, ou perpendiculaires au plan fixe, seront détruites par la résistance de ce plan ; il ne restera donc que les forces dirigées dans ce plan, et pour leur équilibre, il faudra que les équations (..) du N 6 o soient satisfaites : elles seront donc les trois équations d'équilibre dans le cas que nous examinons. Mais si le corps est seulement posé sur le plan fixe, par exemple, s' il s' agit d' un polyèdre posé sur une de ses faces, il sera nécessaire que la résultante des forces perpendiculaires au plan fixe, soit tellement dirigée qu' elle appuie le corps sur ce plan. Il faudra donc, avant d'assurer que l'équilibre existe en vertu des équations (..), faire attention au signe de cette résultante, et examiner s' il est le même que celui des composantes qui tendent à appuyer le corps sur le plan fixe. De plus, il faudra encore que cette force vienne couper le plan fixe dans l'intérieur de la face sur laquelle est posé le polyèdre ; car on conçoit sans peine que si elle tombait hors de cette base, elle détacherait le polyèdre du plan, en le faisant tourner autour d'un des côtés de cette même base. Cette condition d'équilibre ne peut être exprimée par une équation. Dans chaque cas particulier, on verra si elle est remplie, en déterminant, d'après la théorie des forces parallèles, les coordonnées du point où la résultante des forces perpendiculaires au plan fixe, rencontre ce plan. Or, le plan fixe étant celui des coordonnées X, Y, ce système de forces comprend les composantes (..),

p89

etc., des forces données, et les couples de forces ajoutées, (...), etc. / N 59 / ; la résultante de toutes ces forces parallèles est égale à leur somme, et en la désignant par Z, on a (..) . De plus, si l' on suppose qu' elle rencontre le plan des X, Y, au point K / Figi 7 / que l' on prendra pour son point d' application, et si l'on appelle (..), les coordonnées de ce point parallèles aux axes Oyetox, on aura (..), pour son moment par rapport au plan des X, Z, et Zx, pour son moment par rapport au plan des Y, Z; or, le moment de la résultante par rapport à chaque plan, est égal à la somme des momens des composantes par rapport au même plan / N 39 / ; d' ailleurs les sommes des momens des forces (..), etc.; (..), etc., par rapport aux plans des X, Z et des Y, Z, ont été trouvées dans le N 6 o ; égalant donc ces sommes aux quantités (..), nous aurons pour déterminer les valeurs de (...), les équations (...). Ainsi, dans chaque cas particulier, on devra s' assurer si le point K, qui répond à ces coordonnées, est compris dans l'intérieur de la base sur laquelle le corps est posé. Si le corps ne touche le plan fixe que par deux

points, ou bien si tous les points d'appui sont rangés sur une même droite, il faudra que le point K appartienne aussi à cette ligne, sans quoi la résultante Z ne serait pas détruite, et le corps tournerait autour de la droite de contact. En la prenant donc pour l' axe Ox, on devra avoir (..), ce qui change la première de nos deux équations, dans l'équation (..) du N 6 o ; donc dans ce cas, on aura une quatrième équation d'équilibre, savoir, cette équation (..), à joindre aux trois équations (..). Enfin, il peut arriver que le corps n' ait qu' un seul point d' appui sur le plan fixe, et alors l'équilibre exige que la résultante Z vienne passer par ce point ; si donc nous prenons ce point de contact pour l'origine des coordonnées, il faudra qu' on ait (..) ; par conséquent les deux équations précédentes deviendront les équations (...) du N 6 o. Donc, dans ce dernier cas, on a cinq équations d'équilibre, savoir, les équations (..). Dans tous ces cas, la résultante Z des forces perpendiculaires au plan fixe, exprimera la pression que ce plan supporte. 68 lorsque les forces (..), etc., ne se font pas équilibre, on peut demander de les réduire au moindre nombre possible. Pour y parvenir, nous substituerons encore aux forces données, les deux systèmes de forces du N 59. Si chacun de ces systèmes se réduit à une force unique, et que les deux résultantes se trouvent dans un même plan, on

p91

pourra les composer en une seule qui sera la résultante de toutes les forces données ; dans le cas contraire, il faudra conserver ces deux résultantes pour remplacer l'ensemble de ces forces. On a coutume de regarder comme évident que deux forces dirigées dans des plans différens, ne sauraient être remplacées par une force unique; mais pour ne rien supposer de ce qui peut être démontré, j' observe que si ces deux forces avaient une résultante, il s' ensuivrait qu' en rendant fixe un point pris au hasard sur sa direction, les deux forces données seraient en équilibre autour de ce point. Or, cet équilibre est impossible ; car on peut mener par ce point une droite qui coupe la direction de l' une des forces, sans être comprise dans le plan de l'autre ; de sorte qu' en rendant fixe cette ligne, la force qu' elle rencontre serait détruite, et rien n' empêcherait l' autre de produire un mouvement de rotation autour de l'axe fixe ; donc les deux forces n' étant point en équilibre avec l' axe fixe, cet état n' a pas lieu, à plus forte raison, autour du point fixe, et par conséquent il est impossible qu' une seule force leur soit équivalente.

p97

position de la résultante dans l'espace : mais il reste encore à déterminer sa grandeur et même le sens dans leguel elle agit ; question qui ne présente aucune difficulté. Pour la résoudre, il faut composer en une seule force, la résultante des forces dirigées dans le plan des X, Y, et celle des forces perpendiculaires à ce plan ; or, la seconde est égale à Z, les composantes de la première, parallèles aux axes des Xetdesv. sont Xety; donc X, Y, Z, sont les composantes parallèles aux trois axes, de la résultante définitive ; en l'appelant donc R, et désignant par A, B, C, les angles qui déterminent sa direction par rapport aux trois axes, nous aurons / N 2 o / (...), et de plus (..) ; équations qui déterminent complètement la grandeur et la direction de la résultante. On peut remarquer, en faisant attention aux valeurs de X, Y, Z / N 69 /, que cette grandeur et cette direction sont les mêmes que si toutes les forces (..), etc. étaient appliquées en un même point / N 2 i / parallèlement à leurs directions respectives ; de manière que la véritable résultante ne diffère de celle qui aurait lieu dans ce cas, que par sa position absolue dans l'espace. 73 si les forces (...), etc. N' ont point une résultante unique, on peut au moins, dans tous les cas, les réduire à deux forces qui ne seront

p98

plus déterminées de grandeur et de direction, comme le serait une seule résultante. Cette proposition se vérifie sans peine, en examinant tous les cas que peuvent présenter le système des forces dirigées dans le plan des X, Y et celui des forces parallèles à l'axe des Z, lesquels systèmes ont toujours, ou chacun une seule résultante, ou chacun deux résultantes parallèles et non réductibles ; mais on peut la démontrer directement de la manière suivante. Sans rien changer au système des forces (..), etc., on peut y ajouter deux forces égales et directement opposées. Pour fixer les idées, supposons que ces forces sont appliquées à l'origine des coordonnées. Soit S leur intensité commune ; (..), les angles que l'une d'elles fait avec les trois axes, et par conséquent, (..), les angles qui se rapportent à l'autre / N 7 /. Il est permis de supposer que le système des forces données, augmenté de la première force S, a une résultante unique ; car l'existence de cette résultante ne dépend que d'une seule équation de condition, à laquelle on peut satisfaire, d'une infinité de manières différentes, au moyen des quantités (..). Désignant donc cette résultante par (..), les forces données se trouveront réduites à deux, savoir, (..) et la

seconde force S. D' où il suit qu' un nombre quelconque de forces, dirigées comme on voudra dans l' espace, peuvent toujours être remplacées par deux forces qui leur sont équivalentes, et qui se réduiront elles-mêmes à une seule, quand les forces données admettront une résultante unique.

p99

Théorie des momens. 74 les quantités que nous avons désignées dans le chapitre précédent, par L, M, N / N 69 /, dépendent de la position des plans des coordonnées par rapport aux forces , etc. ; souvent on a besoin de changer la direction de ces plans, dans la vue de simplifier, et même de rendre possible, la solution d'un problème ; or, il existe entre les valeurs de L, M. N. relatives à un même système de forces et à des plans différens, des relations d'après lesquelles on déduit ces valeurs les unes des autres, et qui renferment des théorèmes remarquables. C' est la démonstration de ces théorèmes que je me propose de donner dans ce chapitre. 75 nous avons appelé moment d'une force par rapport à un point / N 52 /. le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction, et centre des momens, le point d'où l'on abaisse la perpendiculaire. Si donc l'intensité de la force est représentée par une ligne Ab / Figi 9 /, prise sur sa direction, et que le centre des momens soit le point C, le moment sera égal au double de l' aire du triangle Abc, qui a pour base cette ligne et son sommet au centre C. La projection de ce

p100

triangle sur un plan mené arbitrairement par son sommet, est un autre triangle (...), qui a même sommet que le premier, et pour base, la projection (...) de la ligne Ab sur ce plan ; donc la projection du moment de la force Ab est égale au moment d' une autre force représentée en grandeur et en direction par (...); mais si l' on transporte la force Ab au point (...), parallèlement à sa direction, de sorte qu' elle soit représentée maintenant par la droite (...), égale et parallèle à Ab ; et si on la décompose ensuite en deux, l' une dirigée dans le plan de projection et l' autre perpendiculaire à ce plan, il est évident que la première composante sera la force (...) ; par conséquent nous pouvons dire que la projection du moment d' une force quelconque est égale au moment de cette même force, que l' on aurait décomposée suivant le plan de projection, de la manière que nous indiguons.

86 appliquons maintenant à la théorie des momens, ces propriétés des projections des surfaces planes. Si nous supposons que les aires (...), etc. Sont doubles des triangles qui ont pour bases les forces (...), etc., représentées par des lignes prises sur leurs directions, et pour sommet commun. l'origine des coordonnées de leurs points d'application, ces aires seront les momens de ces mêmes forces pris par rapport à cette origine / N 75 /. La partie de la quantité L, relative à chacune de ces forces, sera la projection sur le plan des X, Y, du double du triangle qui correspond à cette force / N 76 / ; par conséquent L représentera la somme des projections, tant positives que négatives, des aires (...), etc. Sur le plan des X, Y; et de même Metn représenteront les sommes des projections de ces aires sur les plans des X. Zetdesy, Z. Ces trois quantités L. M. N, et en général les quantités analogues, relatives au même système de forces et à d'autres plans, jouiront donc des mêmes propriétés que les sommes des projections de (..), etc. Sur ces plans. Dans l'énoncé de ces propriétés, nous supposerons

p112

l' origine des coordonnées invariable, et nous y placerons toujours le centre des momens. Nous appellerons une quantité telle que L, la somme des momens des forces (...), etc., décomposées suivant le plan des X, Y; mais on ne devra pas oublier qu' avant sa décomposition, chaque force doit être transportée, parallèlement à elle-même, en un point de sa projection sur ce plan, ainsi qu' on l' a vu dans le N 76. relativement à la force P. Nous désignerons semblablement les sommes M, N, et toute autre quantité analogue à L. Cela posé : I lorsque les sommes des momens des forces (..), etc., décomposées suivant les trois plans des coordonnées, sont connues la somme des momens des mêmes forces, décomposées suivant un plan quelconque, mené par le centre des momens, est donnée par cette formule (..); dans laquelle D représente la somme cherchée ; (..), les angles que fait la perpendiculaire au plan quelconque, avec les axes des Z, des Y et des X. 2 parmi toutes les positions que peut prendre le plan mené par le centre des momens, il en existe une pour laquelle la somme des momens des forces données, décomposées suivant ce plan, est la plus grande possible , et égale à (..) . Par rapport à tout plan perpendiculaire à celui -là, la somme des momens est égale à zéro ; et généralement

p113

elle est égale à (..), relativement à un plan dont (..) est l'inclinaison sur celui de la plus grande somme. 3 enfin, en désignant par (..), les angles que la perpendiculaire à ce dernier plan fait avec les axes des Z, des Y et des X, on a / N 84 /,

pour déterminer sa position, (..); d' où l' on peut conclure que si l' on prend sur la perpendiculaire au plan relatif à chaque somme de momens, une ligne proportionnelle à cette somme, la ligne qui représente la plus grande somme sera en grandeur et en direction, la diagonale du parallélépipède construit sur les trois sommes L, M, N. La composition des momens suit donc les mêmes lois que celle des forces, la plus grande somme des momens et la perpendiculaire à son plan remplaçant la résultante et sa direction. 87 avant de quitter ce sujet, nous rapprocherons, en peu de mots, la théorie des momens de ce que nous avons trouvé dans le chapitre précédent, sur les conditions d' équilibre et sur les résultantes des forces (..), etc. Pour abréger, nous appellerons

p114

plan principal, le plan qui répond à la plus grande somme des momens des forces décomposées, et moment principal, cette plus grande somme. 88 les conditions d'équilibre d'un corps solide peuvent à présent s' énoncer d' une manière fort simple. Si le corps e libre, il est nécessaire et il suffit que le moment principal et la résultante des forces données soient nuls. Ces deux conditions donnent en effet les six équations d'équilibre démontrées dans le N 6 o ; car la résultante R / N 72 / ne peut être nulle sans que ses trois composantes rectangulaires X. Y, Z, ne soient aussi nulles ; et de même le moment principal ne peut être égal à zéro, sans qu' on n' ait séparément (..). Le centre des momens peut être placé en un point quelconque ; mais d'après la transformation qu'on a faite dans le N 7 i, il est évident que si ces trois dernières équations ont lieu pour un point déterminé, elles subsistent également pour tout autre point , lorsque l' on a en même tems (..) . Quand le corps est retenu par un point fixe, il suffit que le moment principal soit nul, en plaçant le centre des momens en ce point. Enfin quand le corps est retenu par un axe fixe, il suffit que le plan principal renferme l'axe, le centre des momens étant placé en un point quelconque du même axe. En effet, supposons que l' axe fixe soit celui des Z; si le plan principal le renferme, l' angle (...)

p115

du N 86 sera droit, et l' on aura par conséquent (..); ce qui est l' équation d' équilibre trouvée dans le N 63.

p119

Application des principes précédens aux corps pesans. ler

définition de la pesanteur et conditions d'équilibre de ces corps. 92 on nomme indifféremment pesanteur ou gravité, la force qui précipite les corps vers la surface de la terre, aussitôt qu'ils cessent d'être soutenus. Son action s'exerce sur toutes les parties de la matière, dans des directions perpendiculaires à cette surface, ou suivant des lignes verticales. Les directions prolongées de la pesanteur en différens lieux, iraient donc concourir au centre de la terre, à cause de sa forme, à très-peu-près sphérique ; mais en ayant égard à la grandeur du rayon terrestre, relativement aux dimensions des corps que l' on a ordinairement à considérer, on peut supposer, sans erreur sensible, la pesanteur parallèle à elle-même dans toute l'étendue d'un même corps. Des expériences que nous ferons connaître quand nous traiterons du mouvement des corps pesans, ont prouvé que l'intensité de la pesanteur varie à la

p120

surface de la terre : elle est la plus petite à l'équateur ; lorsqu' on s' approche du pôle, elle croît proportionnellement au carré du sinus de la latitude. On sait encore qu' à la même latitude, elle diminue à mesure qu' on s' élève sur la verticale, et qu' elle suit la raison inverse du carré de la distance du corps pesant au centre de la terre. Ainsi, à parler rigoureusement, la gravité n' est pas la même pour toutes les parties d'un même corps, à raison de la différence de leurs distances à l'équateur et au centre de la terre. Néanmoins on conçoit que dans une aussi petite étendue, la variation de l' intensité de cette force peut être négligée, comme celle de sa direction. Un corps pesant sera donc pour nous un assemblage de points matériels auxquels sont appliquées des forces égales, parallèles et dirigées dans le même sens : la direction de chacune de ces forces est indiquée par celle du fil à-plomb qui serait suspendu à son point d'application. 93 toutes ces forces ont une résultante égale à leur somme et parallèle à leur direction commune. Cette résultante forme ce qu' on appelle le poids du corps. Il est évident, d'après cette définition, que le poids d'un corps homogène, ou entièrement de la même matière, est indépendant de sa forme et proportionnel à son volume. Deux corps homogènes et équivalens en volume sont donc égaux en poids ; de sorte qu' étant placés dans les deux plateaux d' une

p121

balance, ils doivent s' y faire équilibre. C' est ce que l' expérience confirme journellement ; mais elle nous montre en même tems que les corps hétérogènes n' ont pas le même poids sous

des volumes égaux ; et pour cette raison, nous nous représentons ces corps comme renfermant sous le même volume, des nombres différens de parties matérielles douées d'une pesanteur égale. On a coutume d'exprimer cette différence de composition, en disant que les corps sont plus ou moins denses, selon qu'ils contiennent, à volume égal, un nombre plus ou moins grand de parties matérielles également pesantes. La densité relative de deux corps n' est donc autre chose que le rapport de leurs poids sous le même volume ; par conséquent, si l' on veut former une table des densités des diverses espèces de corps, solides ou fluides, on prendra pour unité la densité d' une substance convenue, et l' on déterminera par l' expérience le rapport du poids d'un volume quelconque de chaque corps. à celui d'un volume égal de cette substance. L'eau distillée est le corps que l' on prend ainsi pour terme de comparaison : mais comme sa densité varie avec sa température, on prend pour unité la densité de ce fluide au point de sa plus grande condensation, qui répond à environ (..) du thermomètre centigrade. Ainsi guand on dit, par exemple, que la densité de l' or est l 9, cela signifie que le poids d' un volume quelconque de ce métal est égal à I 9 fois celui d' un égal volume d' eau distillée et prise au maximum de densité.

p122

C' est aussi le poids d' un centimètre cube de cette eau qui forme notre unité de poids, ou le gramme ; de manière que le poids d'un corps. évalué en grammes, est égal au produit de sa densité par son volume évalué en centimètres cubes. 94 lorsque I' on transporte un corps d' un lieu dans un autre, son poids varie proportionnellement à la pesanteur ; mais il est impossible de s' en apercevoir au moyen d' une balance, puisque les poids de tous les corps croissent ou décroissent dans le même rapport. Il faudrait, pour manifester directement cette variation, comparer le poids d'un corps à une force qui ne dépendît point du changement de pesanteur ; or, le moyen le plus simple, serait d' employer à cet usage la force élastique de l' air, ainsi que nous l'expliquerons dans la suite. Observons seulement ici que si nous désignons par P le poids d' un corps, par V son volume, sa densité par D, et par G la gravité au lieu où l' on considère le poids P : nous aurons (..) . Dans cette équation, où les quantités P, V, D, G, ne sont pas de même nature, il convient de remarquer que ces lettres représentent des nombres abstraits. savoir, les rapports des quantités correspondantes, à des unités arbitraires de l'espèce de chacune d'elles. Ainsi V exprime le nombre d'unités cubiques que renferme le volume du corps que l' on considère. D le rapport numérique de sa densité à

celle de l' eau que l' on prend pour unité, G le rapport de la pesanteur relative à l'endroit de l'espace qu'occupe ce corps, à la pesanteur que l' on choisit pour unité de force et qui se rapporte à un lieu déterminé : l' unité de poids est alors celui d'une unité cubique d'eau, transportée en ce dernier lieu, et P désigne le nombre de ces unités que contient le poids du corps . 95 puisque tous les points d'un corps pesant sont sollicités par des forces parallèles, il s'ensuit que si on lui fait prendre successivement diverses positions par rapport à la direction de ces forces, leur résultante passera constamment par un certain point de ce corps. Ce point que nous avons appelé, en général, centre des forces parallèles / N 37 /, prend ici le nom particulier de centre de gravité. Sa propriété caractéristique, dans les corps solides pesans, consiste en ce que, s' il est supposé fixe, le corps auquel il appartient reste en équilibre dans toutes les positions possibles autour de ce point, parce que, dans toutes ces positions, la résultante des forces appliquées aux points du corps, vient passer par le point fixe. On conçoit aussi que quand un corps solide pesant est retenu par un autre point fixe, il est nécessaire et il suffit pour l'équilibre, que la droite qui joint ce point et le centre de gravité, soit verticale ; ce centre pouvant d'ailleurs se trouver au-dessus ou au-dessous du point fixe. En effet, le poids du corps étant une force verticale, appliquée

p124

à son centre de gravité, sa direction coïncidera, dans notre supposition, avec la droite qui joint ce centre et le point fixe ; par conséquent cette force sera détruite par la résistance de ce dernier point, comme si elle y était immédiatement appliquée. 96 par la même raison, si l'on considère un corps solide pesant , suspendu par un fil Ca, à un point fixe C / Fig 22 /, il est évident que dans le cas de l'équilibre, ce fil sera vertical, et que le prolongement Ab de sa direction ira passer par le centre de gravité du corps ; ce qui fournit un moyen connu pour déterminer, par l'expérience, le centre de gravité d'un corps solide, hétérogène et de figure quelconque : on le suspend successivement à un point fixe, dans deux positions différentes, c' est-à-dire, qu' après avoir attaché le fil de suspension en un point quelconque A, on l' attache en un autre point (..); dans ces deux positions, on attend que l'équilibre se soit établi ; puis on trace dans l'intérieur du corps, le prolongement du fil de suspension, savoir, Ab dans la première position et (...) dans la seconde : ces deux droites se coupent en un point G qui est le centre de gravité cherché. 97 en général, les conditions d' équilibre que nous avons trouvées précédemment, et les équations qui les renferment, s' appliqueront sans peine à un corps solide pesant, sollicité d'ailleurs par d'autres forces quelconques : il suffira de comprendre au nombre des forces données, une force verticale.

égale au poids du corps et appliquée à son centre de gravité. Ainsi, par exemple, les équations (...) du N 6 o, et la condition relative à la direction de la résultante / N 67 /, renfermeront toutes les conditions d'équilibre d'un corps pesant posé sur un plan fixe ; mais au lieu de les déduire de ces équations générales, je crois qu'il sera plus utile de considérer directement ce cas particulier. J' observe d' abord que si le corps est soumis à la seule action de la pesanteur, et que le plan fixe soit horizontal, l'équilibre aura lieu, pourvu seulement que la verticale menée par le centre de gravité, vienne couper le plan fixe dans l'intérieur de la base du corps ; condition nécessaire pour que son poids ou la force qui le sollicite, soit détruite par la résistance du plan fixe, et sans laquelle le corps serait renversé sur ce plan. Mais si le plan fixe est un plan incliné, le corps glissera le long de ce plan en vertu de sa pesanteur, et il faudra qu' une ou plusieurs autres forces lui soient appliquées pour le maintenir en équilibre. Afin de simplifier la question, je supposerai qu'il n' y ait qu' une seule force, ou que, s' il y en a plusieurs, elles ont une résultante unique que j' appelerai Q. Soit aussi P, le poids du corps. Il sera nécessaire, pour l'équilibre, que ces deux forces aient une résultante, et qu'elle soit perpendiculaire au plan incliné ; il faudra donc que leurs directions soient comprises dans un même plan; par conséquent la direction de la force Q devra se trouver dans un plan vertical mené par le centre de gravité du corps, lequel plan contient déjà la direction de

p126

la force P. Quand cette condition ne sera pas remplie, l' équilibre sera impossible, quel que soit le rapport des deux forces Petq; supposons-la donc satisfaite, et cherchons le rapport de ces forces, nécessaire à l' équilibre.

p127

li détermination des centres de gravité. 99 occupons-nous maintenant des moyens de déterminer, par le calcul, la position du centre de gravité, et proposons-nous ce problème général : un corps étant partagé en un nombre quelconque de parties dont les centres de gravité sont connus, trouver celui du corps entier? Pour le résoudre, je considère le poids de chaque partie comme une force verticale, appliquée à son

centre de gravité ; ensuite je cherche, au moyen des formules du N 4 o, les coordonnées du centre de ces forces parallèles, qui sera le centre de gravité demandé. Soient donc (...), etc., les poids des diverses parties du corps ; X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du poids P; (..), les coordonnées de celui du poids (..); etc.; soient aussi X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du corps entier, et P son poids, ou la somme des poids (...), etc.; en faisant attention que P est la résultante des forces (..), etc., nous aurons, d'après le N cité , (..) , pour déterminer les valeurs de (..) . Ces coordonnées seront indépendantes de l'intensité de la pesanteur ; car cette quantité entrant comme facteur commun dans les valeurs des poids , etc. / N 94 /, on en peut faire abstraction. Il s' ensuit donc que le centre de gravité ne change pas de position dans les corps, lorsqu' on les transporte d' un lieu dans un autre, quoique la pesanteur soit différente en ces deux lieux. Lorsque les centres de gravité de tous les poids partiels (..), etc., se trouveront dans un même plan, celui du corps entier se trouvera aussi dans ce plan ; et quand tous ces points seront rangés sur une même droite, on pourra être certain que le

p129

centre de gravité qu' on cherche est un des points de cette droite / N 4 i /. loo si le corps que l' on considère est homogène, de manière que la densité de toutes ses parties soit la même, les poids (..), etc., seront simplement proportionnels aux volumes, et en désignant ceux-ci par (..), etc., on aura (..). Ces formules ont lieu, quel que soit le nombre de parties dans lequel on a divisé le volume V; elles subsisteront donc encore, si l' on suppose que ce nombre devient infini, et qu' en même tems les portions (..), etc. De ce volume, deviennent infiniment petites; par conséquent on peut toujours dire que le volume entier d'un corps, multiplié par la distance de son centre de gravité à un plan quelconque, est égal à la somme de tous les élémens infiniment petits de ce même volume, multipliés *respectivement* par leurs distances à ce plan . à proprement parler, cette somme d'un nombre infini de quantités infiniment petites, n'est qu' une limite dont on peut approcher d'aussi près qu'on veut, en augmentant le nombre de ces quantités. Ainsi, par exemple, que l' on partage le volume donné en un très-grand nombre de portions très-petites, (..), etc., qu' on multiplie ensuite chaque portion par la distance d'un de ses points au plan

des X, Y, et que ce point soit pris au hasard dans l'étendue de cette portion de volume : la somme de tous les produits ne sera pas la valeur exacte de Vz, car il faudrait, pour cela, que le point pris dans chaque volume partiel, fût le centre de gravité de cette partie du corps ; mais comme ces deux points différeront de moins en moins, à mesure que la portion de volume à laquelle ils appartiennent, deviendra plus petite, on conçoit que la somme des produits approchera aussi de plus en plus de la valeur de (..) : de telle sorte que cette valeur peut être regardée comme sa limite dans le sens du décroissement des volumes (...), etc. Il ne s'agira donc que de trouver, dans chaque cas particulier, l'expression de cette limite, qui s'obtiendra par les règles du calcul intégral, ainsi qu' on va le voir dans les N suivans. loi quoique les lignes et les surfaces, telles qu' on les considère en géométrie, soient denuées de pesanteur. il arrive néanmoins qu' on demande souvent leurs centres de gravité; mais pour donner un sens à cette question, il faut entendre que l' on regarde alors tous leurs points comme chargés de poids égaux, ou tirés par des forces égales et parallèles. D' après cela, cherchons le centre de gravité d'une ligne à double courbure, donnée par ses deux équations. Partageons la longueur de la courbe en une infinité d'élémens infiniment petits ; la longueur de l'élément qui répond aux coordonnées quelconques

p131

X, Y, Z, sera, comme on sait, (..); le produit de cet élément par sa distance au plan des X, Y, sera donc (..); et d'après les principes du calcul intégral, on aura la somme de tous les produits semblables, pour une portion déterminée de la courbe, en prenant l'intégrale (..), depuis le premier point jusqu' au dernier. Or, en vertu du théorème du N précédent, qui convient aux lignes et aux surfaces, comme aux volumes, cette somme de produits doit être égale à (..), L étant la longueur de la courbe , et Z, la distance de son centre de gravité au plan des X, Y ; donc on aura (..) . On aura de même, par rapport au plan des X, Z et des Y, Z, (...); (...), représentant les coordonnées du centre de gravité, parallèles aux axes des Xetdesy. Ces trois équations donneront les valeurs de (..), quand celle de L sera connue ; or, celle-ci dépend d' une intégrale prise entre les mêmes limites que les précédentes, savoir : (..) . On voit donc que pour déterminer le centre de

p132

gravité d' une courbe quelconque, il faudra prendre séparément quatre *intégrales définies* dont les *limites* communes correspondent aux points extrêmes de la courbe. Pour cela, il sera d' abord indispensable de ramener chacune des intégrales

précédentes à la forme (...), T étant une fonction d'une seule variable T; ce qu' on fera en substituant dans ces intégrales, à la place de deux des trois coordonnées X, Y, Z, et de leurs différentielles, leurs valeurs en fonction de la troisième, déduites des équations de la courbe proposée, ou plus généralement, en exprimant ces trois coordonnées et leurs différentielles, en fonction d'une nouvelle variable T. Cela fait, si la formule Tdt est intégrable sous forme finie, par les règles connues, on prendra son intégrale complète ; d' où l' on déduira ensuite l' intégrale définie dont on a besoin, en v mettant successivement à la place de T, les valeurs de cette variable relatives aux deux limites, et en retranchant l'un de l' autre, les résultats de ces deux substitutions. Quand la formule Tdt ne sera pas intégrable sous forme finie, il faudra recourir aux diverses méthodes que le calcul intégral enseigne. et qui donnent par approximation les valeurs des intégrales définies.

p154

li 5 la décomposition d' un solide en tranches cylindriques, d' une épaisseur infiniment petite et parallèles entre elles, sert à trouver, non-seulement

p155

le centre de gravité d'un solide de révolution, comme on l' a vu précédemment / Nii 2 /, mais encore celui d' un solide quelconque, symétrique par rapport à un axe. C' est ce que nous allons expliquer, en prenant pour exemple l'ellipsoïde. Soient A, B, C, ses trois demi-diamètres principaux, on aura (..), pour l'équation de sa surface, rapportée à ces diamètres. Décomposons cet ellipsoïde en une infinité de parties, par des plans parallèles à celui des X, Y; l'élément qui répond à la coordonnée quelconque Z devra être regardé comme un cylindre à base elliptique, dont la hauteur infiniment petite est la différentielle Dz ; en désignant donc par Z la surface de sa base, on aura Zdz pour son volume ; par conséquent l'intégrale , prise depuis (..) jusqu' à (..) , exprimera le volume de la portion d'ellipsoïde comprise entre les deux sections perpendiculaires à l' axe des Z, qui répondent à (..) . De même, si l' on prend entre ces mêmes limites, l' intégrale (..), on aura la somme de toutes les tranches qui composent ce volume, multipliées par les distances de leurs centres de gravité, au plan des X, Y. Cette intégrale sera donc égale au volume (...), multipliée par la distance de son centre de gravité, au même plan ; de sorte qu' en appelant (..) l' ordonnée de ce point, parallèle à l' axe des Z, on aura (..).

Il ne reste plus, pour déterminer (..), qu' à substituer dans cette équation, à la place de Z, sa valeur en fonction de Z, et à effectuer les intégrations qui sont indiquées ; et comme le centre de gravité du volume (..) doit se trouver sur l' axe des Z, à cause de la symétrie de l' ellipsoïde par rapport à cet axe, il s' ensuit que la position de ce centre sera déterminée quand la valeur de (..) sera connue. Or, la section de l' ellipsoïde, parallèle au plan des X, Y, et correspondante à l' ordonnée Z, est une ellipse dont l' équation est (..); ses deux demi-axes sont donc (..); on sait de plus que la surface d' une ellipse est égale au produit de ces deux quantités, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre; en désignant donc ce rapport par (..), on aura (..). On conclut de là (..); (..) étant des constantes arbitraires. On aura

p157

donc, pour les intégrales définies, prises depuis (..) jusqu' à , (..) . Substituant ces valeurs dans l' équation (..) , et réduisant, on trouve (..) . Cette expression nous fait voir que la position du centre de gravité d' une portion d' ellipsoïde, comprise entre deux plans perpendiculaires à l' un des trois diamètres principaux, est indépendante des valeurs des deux autres diamètres : de sorte que si l' on décrivait une sphère sur le diamètre 2 c, le centre de gravité du segment sphérique compris entre ces deux plans, coïnciderait avec celui du segment de l' ellipsoïde donné, quels que soient les deux autres diamètres 2 aet 2 b. Si l' on veut avoir le centre de gravité du demi-ellipsoïde, il faudra faire (..) ; ce qui donne (..) . Ainsi le centre de gravité de ce solide se trouve sur le demi-diamètre perpendiculaire à sa base, aux trois huitièmes, à partir de cette base, ou bien, aux cinq huitièmes, à partir du sommet.

p162

li 9 comme tout polyèdre est décomposable en pyramides, on pourra maintenant déterminer le centre de gravité d' un polyèdre quelconque, au moyen des formules du Nioo. Relativement aux prismes à bases parallèles, la décomposition en pyramides est inutile ; car il est évident que le centre de gravité d' un tel corps doit se trouver au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases ; et de même pour un cylindre quelconque, pourvu que ses deux bases soient parallèles. I 2 o pour compléter ce que nous avons à dire sur les centres de gravité, nous donnerons les formules générales d' après lesquelles on déterminera celui d' un corps de forme quelconque,

et celui de telle portion qu' on voudra de sa surface.

p163

Représentons par (..), l' équation d' une surface quelconque, et supposons qu' en la différentiant, il vienne (..); ensorte que Petq sont des fonctions de X, Y, Z qui désignent ici les différences partielles de Z, par rapport à Xetày: on démontre dans le calcul différentiel, que l' élément de cette surface est exprimé par (..); d' où il suit que S étant l' aire d' une portion quelconque de cette même surface, sa valeur est donnée par cette double intégrale (..), prise entre des limites convenables. De même (..) désignant les coordonnées du centre de gravité de cette portion de surface, les valeurs des produits (..), résultant du théorème du Nioo, seront aussi données par de doubles intégrales semblables à la précédente, savoir: (..). Ainsi les valeurs de (..), dépendront de quatre doubles intégrales qui devront être prises,

p164

dans chaque cas particulier, entre des limites telles, qu'elles comprennent toutes la portion de surface que l' on veut considérer. I 2 i si l' on coupe un volume quelconque, par une première suite de plans infiniment rapprochés et parallèles au plan des X, Y; par une suite semblable de plans parallèles à celui de X, Z; et enfin, par une troisième suite de plans parallèles à celui des Y, Z, le volume se trouvera décomposé en parallélépipèdes rectangles, infiniment petits dans leurs trois dimensions, et qui auront leurs côtés parallèles aux axes des coordonnées. Les côtés de celui qui répond aux coordonnées quelconques X, Y, Z, seront les différentielles Dx, Dy, Dz ; son volume sera donc égal au produit Dxdydz, et V étant le volume entier que l'on considère, sa valeur sera donnée par cette triple intégrale (..) . De plus (..) désignant les coordonnées de son centre de gravité, on aura, d'après le Nioo, (..). Mais si le corps dont on demande le centre de gravité, n' est pas homogène, il ne faudra pas, comme dans le Nioo, substituer les volumes aux poids. Supposons que la densité varie d'une manière continue, dans toute l'étendue du corps, de sorte qu'on puisse la regarder comme une fonction des variables X, Y, Z, donnée dans chaque cas particulier; soit (..) cette densité variable; le poids de

p165

l' élément dont le volume est Dxdydz, sera égal au produit / N

94 / (..), G désignant la gravité ; donc le poids entier du corps sera donné par cette intégrale triple (..) ; ou bien, à cause que G est un facteur constant, ce poids sera égal à Gm, en faisant, pour abréger, (..). Cela posé, les formules du N 99, appliquées à des poids infiniment petits, deviendront, en supprimant le facteur G commun aux deux membres de chaque équation, (..); (..), étant toujours les coordonnées du centre de gravité. Dans chaque cas particulier, ces intégrales triples devront être prises entre des limites qui comprennent tous les points du corps dont on cherche le centre de gravité. Ces formules générales, relatives aux centres de gravité des surfaces et des corps hétérogènes, renferment, comme cas particuliers, toutes celles dont nous avons fait usage dans les N précédens ; mais nous ne nous arrêterons point à les en déduire.

p166

I 22 dans ces formules, les points du corps sont supposés déterminés de position par trois coordonnées rectangulaires X. Y. Z. et l'élément du volume est exprimé au moven de leurs différentielles Dx, Dy, Dz; quelquefois il est nécessaire, pour rendre les intégrations possibles, de donner une autre forme à cet élément ; nous allons donc substituer aux variables X, Y, Z, un autre système de coordonnées, et nous chercherons l' élément du volume, en fonction des différentielles de ces nouvelles coordonnées. Considérons le point quelconque M / Fig 33 / qui répond aux coordonnées X, Y, Z, parallèles aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; joignons ce point à l' origine O, et abaissons du point M, la perpendiculaire Mp sur le plan des X, Y: soit ensuite (..). Il est évident que quand le rayon vecteur R et les deux angles (...) seront donnés, le point M sera déterminé de position ; de plus, il est aisé de s' assurer que ces nouvelles coordonnées pourront convenir à tous les points de l'espace, en regardant R comme une quantité positive qui peut croître indéfiniment, depuis zéro jusqu' à l' infini ; en donnant à (..), toutes les valeurs comprises entre zéro et (..), et à (..), toutes les valeurs, depuis zéro jusqu' à (..) seulement. On peut donc employer les variables (..), au lieu des variables X, Y, Z ; et l' on trouve, sans difficulté, pour les valeurs de celles-ci , en

p167

fonctions des premières, (..) . Ainsi lorsque l' équation d' une surface sera donnée, entre les coordonnées X, Y, Z, on en déduira l' équation de la même surface, entre les coordonnées (..) , en y substituant ces valeurs de X, Y, Z. I 23 menons dans le plan Zop, qui contient déjà le rayon Om, un second rayon Ok ; soit (..) ; prenons (..) , et décrivons du point O comme centre,

l' arc de cercle Mk. Prolongeons ensuite les rayons Ometok; soit (..), et traçons l' arc de cercle (..), concentrique au premier. On aura (..); et le quadrilatère (..) qui est la différence des deux secteurs (..), sera égal à (..). Imaginons enfin que le plan Zop tourne autour de l' axe Oz, et que l' angle Pox devienne (..), de sorte qu' on ait (..). Dans ce mouvement, tous les points du quadrilatère (..) décrivent des arcs de cercle dont les centres sont dans l' axe Oz, et le quadrilatère engendre une portion de volume, telle que (..). D' après le théorème de Guldin / Nii 4 /, ce volume est égal au produit de l' aire génératrice, multipliée par l' arc de cercle que décrit le centre de gravité de cette aire; appelons donc U, la distance inconnue de ce centre à l' axe Oz; l' arc de cercle correspondant à

p168

ce point, sera égal à (..), et en le multipliant par la quantité , nous aurons (..) , pour l'expression du volume engendré. Maintenant supposons que ce volume devienne infiniment petit dans ses trois dimensions, ou, ce qui est la même chose, que les trois différences (..), se changent dans les différentielles (..). Son expression deviendra d' abord (..) ; et l' on devra négliger dans le facteur (...), les termes dépendans de ces différentielles, c' est-à-dire, les termes infiniment petits. Or, le centre de gravité du quadrilatère (...) est un point compris dans son intérieur ; lors donc que ses côtés deviennent infiniment petits, sa distance à l'axe Oz, ne peut différer que d'une quantité infiniment petite, de la distance du point M au même axe, ou de la perpendiculaire Mf, abaissée du point M sur cet axe ; et comme on a, dans le triangle Mfo, (..), il s' ensuit qu' on doit prendre (...) . On prendra en même tems 2 r, aulieu de (...) ; donc en négligeant ce qu' on doit négliger, on aura (..),

p169

et le volume infiniment petit aura pour valeur (..) . Telle est l'expression différentielle de l'élément du volume d'un corps qui répond aux trois coordonnées (..) ; en la multipliant par la densité (..) de cet élément, et par la gravité G, on aura le poids du même élément ; et le poids entier du corps sera égal à Gm, en faisant, pour abréger, (..) . Cette triple intégration suppose la quantité (..) donnée en fonction de (..) . Quant aux limites des intégrales, elles seront différentes selon que le point O, origine de ces coordonnées, sera situé dans l'intérieur ou à l'extérieur du corps. Pour fixer les idées, nous le supposerons situé dans son intérieur ; et alors, afin d'y comprendre tous les élémens du corps, on devra prendre les intégrales, I depuis (..) , jusqu' à la valeur de R qui se

rapporte à la surface du corps, et qui sera, en général, une fonction de (..), donnée par l'équation de cette surface; 2 depuis (..), jusqu' à (..); 3 depuis (..), jusqu' à (..). Si l'on faisait abstraction du facteur (..), ces trois intégrations successives donneraient le volume du corps.

p173

Du frottement. I 26 toutes les fois que des forces appliquées en différens points d'un corps solide, satisferont aux équations d' équilibre que nous avons précédemment trouvées, le corps restera en repos, pourvu que l' on ait eu soin de comprendre au nombre des forces données, le poids du corps considéré comme une force verticale, appliquée au centre de gravité. à la rigueur, cet équilibre devrait se rompre aussitôt que, par un changement quelconque dans les directions ou dans les intensités des forces, ces éguations ont cessé de se vérifier ; car non-seulement elles suffisent pour l'équilibre, mais encore elles sont nécessaires, ainsi que nous l' avons démontré. Mais quand il s' agit d' un corps posé sur un plan fixe, ou gêné par guelqu' autre obstacle fixe, une circonstance physique, dont nous avons fait abstraction jusqu' à présent, s' oppose à ce que cette ruption instantanée d' équilibre ait effectivement lieu dans la nature. Je veux parler ici du frottement du corps contre l' obstacle fixe, que l' on doit regarder comme une force passive, incapable de produire le mouvement par elle-même, et seulement capable de détruire le mouvement communiqué par d'autres forces.

p174

On conçoit qu'il est indispensable d'avoir égard à cette force, lorsqu' on veut appliquer les lois générales de l'équilibre à des questions particulières ; mais on ne doit pas s' attendre à trouver, dans ce traité, de grands développemens sur une matière qui appartient plutôt à la pratique qu' à la théorie de la mécanique. Je me bornerai donc à faire connaître, d'une manière succincte, ce que l'expérience a appris de plus certain sur la mesure du frottement, et à montrer, par un exemple, comment on doit tenir compte de cette force dans la recherche des conditions d'équilibre. I 27 considérons un corps pesant posé sur un plan horizontal. Ce corps restera en repos, et il exercera sur le plan une pression égale à son poids, que je désignerai par P. Dans cette situation, le frottement ne contribue en rien à l' équilibre ; mais supposons que l' on incline le plan donné sur le plan horizontal, et soit (..), l'angle Bac / Fig 23 /, formé par ces deux plans ; le poids P, appliqué au centre de gravité G du corps, se décomposera en deux forces, l'une perpendiculaire au plan incliné et dirigée suivant Ge, l' autre parallèle à ce plan et dirigée suivant Gh. Les composantes

seront exprimées par (..), la ligne Gf étant la direction verticale du poids P; et à cause que les angles Egfethgf sont complémens l' un de l' autre, et qu' on a évidemment (..), ces deux forces seront égales à (..). La première exprimera la pression que supporte le

p175

plan incliné ; quant à la seconde, il est évident que, sans le frottement, elle ferait glisser le corps le long de ce plan ; par conséquent, si le corps continue de rester en repos, il en faudra conclure qu'il existe un frottement capable de détruire la force . Si nous continuons d'incliner de plus en plus le plan donné sur le plan horizontal, ou si nous augmentons l'angle (..), la force (...) augmentera en même tems, et au contraire, la pression et le frottement du corps contre ce plan, diminueront ; car, sans connaître le rapport du frottement à la pression, on ne peut cependant pas douter que le frottement ne doive diminuer quand la pression diminue. La composante du poids P, parallèle au plan incliné, finira donc par vaincre le frottement, et par mettre le corps en mouvement ; or, si l' on fait croître l' angle (...) assez lentement pour qu' on puisse saisir avec exactitude l'instant où l'équilibre commence à se rompre, et si l'on désigne par (..) la valeur de (...), qui répond à cet instant, il est clair que la force (...) donnera au même instant la mesure du frottement du corps contre le plan incliné. Soit donc F le rapport de ce frottement à la pression, qui est égale à (...), à l'instant dont nous parlons; nous aurons (..); d'où l'on tire (..). Ainsi la tangente du plus grand angle, pour lequel un corps pesant posé sur un plan incliné, puisse

p176

s' v tenir en équilibre, ou, si l' on veut, la tangente du plus petit angle pour lequel il commence à glisser le long de ce plan. exprime le rapport du frottement à la pression que supporte ce même plan. I 28 c' est d'après ce théorème que l' on détermine par l'expérience, la mesure du frottement des différentes espèces de corps solides, les uns contre les autres. On a constaté de cette manière les résultats suivans : I le frottement est d'autant plus faible, que les surfaces frottantes sont mieux polies. 2 il est plus grand, toutes choses d' ailleurs égales, entre des corps de même matière qu'entre des corps de matières différentes. 3 les surfaces frottantes restant les mêmes, il augmente ou diminue dans le même rapport que la pression, c' est-à-dire, que l' on trouve l' angle (..) du N précédent, indépendant du poids du corps que l' on soumet à l' expérience. 4 enfin, ce poids ne changeant pas, l'étendue de la surface frottante n' a aucune influence sur le frottement.

Ainsi, par exemple, un polyèdre dont toutes les faces sont également polies, éprouve toujours le même frottement, quelle que soit la face sur laquelle il est posé ; ensorte que l' angle (..) reste le même, quand on pose ce corps successivement sur différentes faces. I 29 de ces deux derniers résultats, on peut conclure que si plusieurs corps pesans sont posés sur

p177

un même plan incliné, le plus petit angle pour lequel ils commenceront à glisser sur ce plan, sera le même pour tous ces corps, quoique leurs poids et l'étendue de leurs surfaces de contact soient différens, pourvu seulement que ces surfaces soient toutes également polies. En effet, appelons Aetb deux de ces corps, et considérons un troisième corps C, qui ait le même poids que A et une surface frottante, de même étendue que celle de B ; d'après le troisième résultat, l'angle (...) sera le même pour les deux corps Betc, et en vertu du quatrième, cet angle sera aussi le même pour Aetc ; donc les deux corps Aetb commenceront à glisser pour le même angle d'inclinaison, et il en sera de même de tous les corps posés sur le plan incliné. I 3 o maintenant examinons comment les conditions d'équilibre dans le levier, se trouvent modifiées par le frottement. Il ne sera pas question ici d'un levier géométrique, qui consiste en une ligne retenue par un point fixe / N 57 /, mais bien d' un levier physique que nous supposerons formé par une barre inflexible, percée d'un trou cylindrique, au travers duquel on fait passer un axe fixe. Nous supposerons aussi que cet axe est un cylindre d'un diamètre à très-peu-près égal à celui du trou ; de sorte que les sections du trou et de l'axe fixe, faites par un plan perpendiculaire à l'axe, sont des cercles dont les rayons diffèrent très-peu l'un de l'autre. Ces deux cercles se touchent en un point, lorsque la barre s'appuie

p178

sur l' axe fixe en vertu des forces qui lui sont appliquées ; le contact physique a sensiblement lieu dans une petite étendue, de part et d' autre de ce point, et dans cette étendue, la barre éprouve un frottement contre la surface du cylindre fixe, suivant toute la longueur de cette surface ; or, il s' agit de déterminer dans quelles limites ce frottement peut empêcher la barre de tourner autour du cylindre, quoique les forces qui la sollicitent ne se fassent pas équilibre. Afin que ce frottement ne dépende pas de la position du point de contact, nous regarderons les surfaces frottantes comme également polies dans toute leur étendue. Cela posé, soit Efgh / Fig 35 / une section du levier par un plan perpendiculaire à l' axe fixe ; Anb et (..), les sections circulaires de l' axe et du trou, faites par ce plan ;

N leur point de contact, et C le centre de la première. Appliquons à ce levier, des forces (..), etc., agissant aux points, etc., suivant les directions (..), etc., qui sont toutes comprises dans le plan de la section Efgh. Calculons les momens de ces forces (..), etc., par rapport au point C, en observant que, dans ce calcul, on peut, sans erreur sensible, prendre le point C pour le centre du cercle (..), vu le peu de différence qu' on suppose entre les rayons de (..) et de Anb. Si nous trouvons la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, égale à la somme de ceux qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé, il en faudra conclure que la résultante passe par le point C / N 57 /;

p179

par conséguent elle coupera le cylindre fixe, perpendiculairement à sa surface, et l'équilibre existera sans que le frottement y contribue. Mais si, au contraire, l'une des deux sommes l' emporte sur l'autre, le levier tendra à tourner dans le sens des forces qui auront donné la plus grande somme, et il n' v aura que le frottement qui puisse empêcher ce mouvement d'avoir lieu. Pour fixer les idées, supposons que le levier tende à tourner dans le sens de la force P qui agit suivant la direction Ma, désignons par L. la différence des deux sommes de momens, et imaginons que cette différence augmente de plus en plus, jusqu' à ce que l'équilibre soit sur le point de se rompre, si, toutefois , cette ruption n' est pas impossible ; à cette limite, les forces données (...), etc., sont encore tenues en équilibre par le frottement, qu' on doit considérer comme une force tangente au cylindre fixe, appliquée au point de contact N, et agissant suivant la direction Nb, c' est-à-dire, tendant à faire tourner le levier en sens contraire de la force P. En appelant donc F, cette force, et la joignant aux forces données, il faudra que la résultante de (...), etc., soit perpendiculaire à la surface du cylindre fixe, ou, ce qui revient au même, il faudra qu' elle passe par le point C ; ce qui exige que le moment de F, pris par rapport à ce point, soit égal à L. Ainsi, nous aurons (..), H étant le rayon du cercle Anb, ou la perpendiculaire abaissée du centre C sur la tangente Nb. De plus, la pression que supporte

p180

la surface du cylindre fixe, et qui s' exerce au point de contact N, suivant la normale Nc, sera la résultante de toutes les forces (..), etc. : nous la désignerons par Q, et comme nous savons que le frottement est proportionnel à la pression / Ni 28 /, nous aurons (..), F étant un coefficient donné et indépendant des forces (..), etc., appliquées au levier. Substituant cette

valeur dans celle de L, il vient (..); mais on ne peut rien conclure de cette équation, sans avoir auparavant déterminé la valeur de Q. I 3 i menons donc arbitrairement dans le plan qui contient toutes les forces (..), etc., deux axes rectangulaires, tels que Cxetcy; soient (..), etc., les angles donnés que font les directions de (..), etc. Avec l' axe Cx; (..), etc., les angles aussi donnés que font ces mêmes directions avec l' axe Cy; Aetb, les angles inconnus qui se rapportent à la direction Nc de la force Q, et qui sont les supplémens des angles Ncxetncy; enfin (..), les angles relatifs à la direction Nb de la force F. Puisque Q est la résultante de (..), etc., nous aurons (..). Si l' on fait, pour abréger, (..);

p181

on aura (..); et si l' on appelle R la résultante des forces (..), etc., on aura aussi (..); d' où l' on conclut, en employant pour F, sa valeur Fq, (..). Mais on a / N 9 / (..); d' ailleurs les directions Nbetnc du frottement F et de la pression Q, étant perpendiculaires l' une à l' autre, on a en outre / N 78 / ; donc en vertu de ces équations, la valeur de (..) se réduit à ; ce qui donne (..). Or, en représentant par R, la perpendiculaire abaissée du point C sur la direction de R, nous aurons, d' après le théorème du N 55, (..); substituant ces valeurs de Letq dans l' équation (..), elle devient (..).

p182

Ce résultat nous apprend que la limite où l'équilibre commence à se rompre, dépend uniquement de la distance de la résultante des forces données, au point C : tant que cette distance est plus petite que (..), les forces données, ou leur résultante, sont tenues en équilibre par le frottement ; aussitôt que la même distance dépasse cette limite, les forces données l'emportent sur le frottement, et l'équilibre est rompu. La valeur de Q fait connaître la pression que supporte l'axe fixe ; et l'on voit qu' à raison du dénominateur (...), le frottement contribue toujours à la diminuer. Si l' on voulait savoir en quel point cette pression s' exerce, il faudrait déterminer, au moven des éguations précédentes, les valeurs des angles Aetb : leurs supplémens sont les angles Nexetney, relatifs à la direction du rayon Cn qui aboutit au point de contact N, et c'est en ce point que le levier s' appuie sur le cylindre fixe. I 32 la quantité F varie avec la matière du levier et de l'axe fixe, le degré de poli et l'étendue des surfaces frottantes. Sa valeur peut être aussi grande que l' on voudra ; mais la fraction (..), sera toujours plus petite que l'unité; d'où il suit que quand l'équilibre existe, la distance R de la résultante R au point C, est toujours plus petite que le rayon H du cylindre fixe.

Ainsi cette force ne peut être tenue en équilibre par le frottement du levier contre le cylindre fixe, qu' autant que sa direction vient

p183

couper ce cylindre; et toutes les fois que cette condition ne sera pas remplie, on pourra assurer, sans examiner si le frottement est plus ou moins considérable, que l' équilibre est impossible. Mais on ne doit pas perdre de vue que ce résultat est subordonné à l' hypothèse dont nous sommes partis, savoir, que le levier et le cylindre fixe ne se touchent qu' en un seul point, ou du moins, dans une très-petite étendue : il ne serait plus vrai, si le levier touchait le cylindre et frottait contre sa surface en plusieurs endroits à la fois.

p184

De l'équilibre d'un corps flexible. I 33 si l'on considère un assemblage de points, liés entre eux d'une manière quelconque et sollicités par des forces données, et que l'équilibre ait lieu dans ce système, il est évident que cet état ne sera pas troublé. en joignant tous ces points les uns aux autres par des droites inflexibles, de manière à changer le corps que l' on considère, en un corps solide. Les conditions d'équilibre relatives à un système de forme invariable, doivent donc se retrouver parmi celles de tous les systèmes. Ainsi, les six équations du N 6 o sont nécessaires pour l'équilibre de tout corps qui ne renferme aucun point fixe, ni aucun point astreint à rester sur une surface ou sur une courbe fixe, quelle que soit d'ailleurs la liaison mutuelle des parties de ce corps. S' il renferme un point fixe, les équations (..) de ce N, seront seules nécessaires ; s' il en contient deux, une seule de ces trois équations continuera de subsister : car alors, en joignant les points du corps par des droites inflexibles, celle qui joint les deux points fixes. deviendra un axe fixe, autour duquel le corps, devenu solide, sera forcé de tourner, et dans ce cas nous savons / N 63 / qu' il n' existe plus qu' une

p185

seule équation d' équilibre. Enfin, lorsque le système contiendra trois ou un plus grand nombre de points fixes, qui ne seront pas rangés sur une même droite, nos six équations deviendront inutiles, et la considération du corps solide ne fera connaître, dans un pareil cas, aucune des équations d' équilibre du système proposé; et effectivement, trois points fixes, non en lignes

droites, suffisent pour rendre un corps solide, tout-à-fait immobile ; de sorte que les forces qui lui sont appliquées, sont détruites, sans qu'il en résulte aucune équation de condition. Mais outre ces équations d'équilibre, communes à tous les systèmes, et qui suffisent pour les corps solides, il en existe d' autres, qui dépendent du mode de liaison des points où les forces sont appliquées, et dont le nombre augmente à mesure que ces points sont plus indépendans les uns des autres. C'est la recherche de ces équations particulières, qui va nous occuper dans ce chapitre. I équilibre du polygone funiculaire : équation de la chaînette. I 34 on appelle, en général, machine funiculaire, tout assemblage de cordes liées entre elles par des noeuds fixes, ou simplement passées dans des anneaux qui peuvent couler le long des cordes. Le nombre des cordons qui viennent aboutir à un même noeud, peut être quelconque; mais pour simplifier

p186

la question, nous supposerons que chaque noeud n' assemble iamais que trois cordons, et en premier lieu, nous exclurons les anneaux mobiles. Prenons donc une corde parfaitement flexible et inextensible, d' une longueur quelconque et dont (..) / Fig 36 / soient les deux points extrêmes. Soient (..), etc., différens autres points de cette corde : attachons à ces points des cordons , etc., suivant lesquels agiront des forces données (..) , etc. ; appliquons aussi au point M, une force donnée A, agissant dans la direction du cordon Km, et au dernier des points (..), etc., une autre force donnée (..), dirigée vers le point (..). Dans l' état d'équilibre, la corde inextensible formera un certain polygone, que nous appellerons spécialement le polygone funiculaire, et dont les sommets seront les points ou noeuds . Il s'agit de trouver les conditions que les forces données , doivent remplir pour que cet équilibre soit possible, et de déterminer la figure du polygone qui convient à cet état. Pour découvrir ces conditions, je pars de ce principe évident, que si l'équilibre existe, chacun des cordons (..), etc., doit être tiré à ses deux extrémités, par des forces égales, dirigées suivant ses prolongemens. Il s' ensuit d' abord, que la résultante des deux forces Aetp, appliquées au point M, doit coïncider avec le prolongement Mf, du cordon (..) . On

p187

peut donc / N 28 / transporter le point d'application de cette force, au point (..) situé sur sa direction ; en la composant ensuite avec la force (..) , appliquée au même point suivant la direction (..) , il faudra que cette seconde résultante, qui sera celle des trois forces (..) , coïncide avec le prolongement (..) , du

cordon (..): donc il est permis de transporter son point d' application, au point (...) qui se trouve sur sa direction. Je prends encore la résultante de cette force et de la force (..) appliquée au même point (..) ; j' ai de cette manière la force qui tire le cordon (..) à son extrémité (..), et qui doit être dirigée suivant son prolongement (...). Cette force est, comme on voit, la résultante des quatre forces (..) ; un raisonnement semblable prouverait que la force qui tire le même cordon à son extrémité , et qui doit coïncider avec l'autre prolongement (..), de ce cordon, est la résultante des forces (...) : ces deux résultantes sont donc égales et directement opposées, et par conséquent la résultante de toutes les forces données (..), est égale à zéro. On parviendrait évidemment au même résultat, en considérant les forces qui agissent aux extrémités de tout autre cordon. Ainsi, les forces appliquées au polygone funiculaire, doivent être telles, qu' en les transportant en un même point parallèlement à elles-mêmes, elles s' y fassent équilibre ; ce qui donne, comme on sait, trois équations entre ces forces et les angles que

p188

font leurs directions avec trois axes rectangulaires menés par ce point. Ces équations sont / N 22 / (..); (..), etc., désignant les angles relatifs à l' un des axes; (..), etc., les angles relatifs à un second axe; (..), etc., ceux qui se rapportent au troisième.

p194

I 4 o ce que nous disons, relativement à un anneau obligé de glisser le long d'un fil inextensible, peut s'étendre à tous les points d'un système en équilibre, quelle que soit la liaison de ces points entre eux. On ne troublera pas cet équilibre en fixant tous les points du système, excepté un seul : or, si la liaison de ce point avec les autres est telle qu'il puisse encore décrire une surface ou seulement une ligne courbe, autour de ces points fixes, il est évident que le point mobile sera dans le même cas que si la surface ou la ligne courbe existait réellement : par conséquent la direction de la force qui lui est appliquée, doit être normale à cette surface ou à cette ligne. Concluons donc que dans tout système en équilibre, la force appliquée à chaque point du système, est perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle ce point serait obligé de rester, si tous les autres points auxquels il est lié, étaient regardés pour un moment comme des points fixes . Quand cette condition relative à la direction des forces et à la liaison des parties du système n' est pas remplie, on peut être certain que l'équilibre n'existe pas ; mais elle ne suffit pas, à elle seule, pour assurer l'équilibre du système. I 4 i considérons

p195

toutes les forces (..), etc., appliquées au polygone funiculaire, sont des poids, et où les deux points extrêmes (...) sont supposés fixes. Pour plus de simplicité, supposons aussi qu'il ne se trouve aucun anneau mobile parmi les noeuds (...), etc. Dans ce cas , l'équilibre est toujours possible / Ni 38 / ; et pour déterminer la figure du polygone qui convient à cet état, i' observe d'abord que tous ses côtés seront dans un même plan. savoir, dans le plan vertical mené par les deux points donnés (...) / Fig 37 /. C' est ce qu' il est facile de conclure de la construction du Ni 35; car, d'après cette construction, les trois cordons qui aboutissent à chacun des noeuds (...), etc., sont dans un même plan ; or, ici le plan des cordons (..) , est vertical , puisqu' il renferme la ligne verticale Hm, direction du poids P ; le plan des cordons (..) est de même vertical, à cause de la verticale (..), direction du poids (..): ces deux plans verticaux avant une ligne (...) commune. coïncident nécessairement : donc les trois côtés (...) sont dans un même plan vertical. On prouvera de même que tous les autres côtés du polygone sont contenus dans ce plan. Cela posé, je mène dans ce plan et par le point K, les deux axes Kxetky, auxquels se rapportent les angles (...), du Ni 34 : alors tous les angles (...) , sont droits ; et si nous prenons l' axe Kx horizontal, et l' axe Ky vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, les angles (...), etc., seront aussi droits,

p196

et les angles (..), etc., seront nuls. Les équations du N cité se réduisent donc à deux, savoir : (..), (..) désignant la somme des poids (..), etc. Soit aussi T la tension d'un côté quelconque du polygone. Si nous considérons cette force comme appliquée à l' extrémité de ce côté, la plus voisine du point K : que nous représentions par U, l'angle que fait sa direction avec l'axe horizontal; par V, celui que cette direction fait avec l' axe vertical; par P, la somme des poids suspendus au polygone, depuis le point K jusqu' à cette première extrémité inclusivement : la force T sera la résultante de la force A et du poids P / Ni 37 / ; par conséquent on aura (..) . Si au contraire on regardait la force T comme appliquée à l' autre extrémité du côté dont elle exprime la tension, sa direction serait opposée à celle qu'elle avait d'abord ; de sorte qu'il faudrait remplacer les angles Uetv par leurs supplémens / N 7 / ; mais alors elle serait la résultante de la force (..) et du poids (...), et l'on aurait (...); résultat qui s'accorde avec le premier, en vertu des équations (..).

Au moyen de ces valeurs de (..), on déterminera immédiatement la tension et la direction de chaque côté du polygone, quand les valeurs des inconnues (...), auront été calculées, comme il a été dit précédemment / Ni 38 /. I 42 c' est un problème curieux de déterminer la courbe que forme, dans l'état d'équilibre, une chaîne pesante et parfaitement flexible, suspendue à deux points fixes par ses extrémités. On nomme cette courbe la chaînette . Il nous est facile actuellement d'en trouver l' équation, en observant que tout ce qui a été dit dans le N précédent, étant indépendant du nombre et de la grandeur des côtés du polygone, doit encore subsister quand ce nombre devient infini et cette grandeur infiniment petite. Décomposons donc la chaîne pesante, suspendue aux deux points fixes (..) / Fig 38 /, en une infinité de parties, et regardons (..), etc., comme les poids de ses élémens ; P sera le poids d'une portion de la chaîne, commençant au point K et finissant au point guelconque N ; et si nous supposons la chaîne homogène et d' une égale épaisseur dans toute son étendue, ce poids sera proportionnel à la longueur de cette portion de chaîne ; de sorte que nous aurons , S représentant l' arc de courbe Kn, et H un coefficient constant. Ce coefficient exprime dans chaque cas particulier, le poids donné d' une portion de la chaîne, d' une longueur égale à l'unité. D'après cette décomposition, la chaînette se trouve

p198

remplacée par un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits. Celui qui se trouve à l'extrémité de l'arc S, éprouve la tension T, qui s' exerce suivant le prolongement de ce côté, lequel prolongement n' est autre chose que la tangente à la courbe au point N. Ainsi les valeurs de (...), du N précédent, nous feront connaître la direction de cette tangente et la tension qui a lieu à l'extrémité de l'arc S. Si donc nous prenons dans le plan de la chaînette, l' axe horizontal Kx, pour celui des abscisses, et l'axe vertical Ky, pour celui des ordonnées ; que nous représentions par Xety, l'abscisse et l' ordonnée du point N, et que nous supposions la ligne Nt, tangente à la courbe au point N, le coefficient différentiel (...) exprimera, comme on sait, la tangente de l'angle Ktn; mais à cause que cette ligne Nt représente la direction de la force T, qui est déterminée par les angles Uetv, cette tangente est aussi égale au rapport (..); or, les valeurs de (..) donnent, en y substituant Hs à la place de P, et divisant l'une par l'autre , (..); on aura donc (..); d' où l' on tire (..).

Soit (..), la tangente au point K, et faisons (..); nous aurons; car la force A est dirigée suivant le premier côté infiniment petit de la courbe ou suivant sa première tangente, et elle agit dans le sens du prolongement (..) de cette tangente; de sorte que les angles Aetb, qui déterminent sa direction par rapport aux axes Kxetky, sont (..), supplémens de (..); d' où il suit que (..) sont égaux et de signes contraires à (..). Employant donc l' angle C, au lieu des angles Aetb, l' équation précédente deviendra. C' est l' équation de la chaînette que nous nous proposions de trouver. Aetc sont des constantes inconnues, dont nous allons bientôt déterminer les valeurs.

p201

I 45 cette valeur de S nous montre que la chaînette est une courbe *rectifiable*. Pour achever d' en déterminer la nature, il faut trouver son équation en quantités finies, ou l' intégrale de l' équation (..). Or, en la résolvant par rapport à Dx, il vient (..); et comme l' abscisse X est toujours croissante, il est évident qu' on devra prendre le signe supérieur tant que la différentielle Dy sera positive, ou depuis le

p202

point K jusqu' au point le plus bas de la courbe : au-delà de ce point, Dy devient négative ; de sorte qu' il faudra prendre le signe inférieur, pour que Dx reste positive. Cette valeur de Dx peut s' intégrer par les règles connues, en conservant le double signe : en effectuant l' intégration, on trouve (..) ; (..) étant une constante arbitraire. Comme on a (..) , au point K, et qu' en ce point le radical doit être pris avec le signe supérieur, il vient, pour déterminer (..) , (..) . éliminant cette constante, on a . Cette équation fait voir que la chaînette est une courbe transcendante, du même ordre que la logarithmique. Elle donne pour l' abscisse du point le plus bas, (..) .

p204

I 48 si, au lieu d' une chaîne pesante, il s' agissait d' un fil parfaitement flexible dont tous les points fussent tirés par des forces variables en intensité et en direction, nous pourrions encore déterminer la courbe qu' il forme dans l' état d' équilibre, en le considérant toujours comme un polygone d' une infinité de côtés infiniment petits. Cette courbe sera, en général, à double courbure, et pour la déterminer, il faudra trouver ses deux équations. Soient donc X, Y, Z, les

coordonnées du point quelconque N, parallèles à trois axes rectangulaires, menés par le point K, qui sera, comme précédemment / Fig 38 /, le premier point de la courbe ; soit le point infiniment voisin de N, qui répond aux coordonnées (...) ; désignons par S l' arc Kn : les projections de l' élément Ds ou du côté (...) de cette courbe, sur les trois axes des X, desyetdesz, sont évidemment les différentielles Dx, Dyetdz ; par conséquent les rapports (...) , expriment les cosinus des angles que fait cet élément avec les mêmes axes, ou, ce qui est la même chose, les cosinus des angles que

p205

fait la tangente (..), à la courbe au point N, avec ces axes, car cette tangente est le prolongement indéfini du côté (...). La tension que ce côté éprouve est une force T, dirigée suivant son prolongement Nt, et égale à la résultante de toutes les forces appliquées au polygone, depuis le point K, jusqu' au point N / Ni 37 / ; les composantes de cette tension, parallèles aux axes, seront donc (..) : et en égalant ces quantités aux sommes des composantes de toutes les forces qui sollicitent l' arc Kn, on formera trois équations qui détermineront la tension T et la nature de la courbe. Or, quelles que soient les forces appliquées à chaque point de cette courbe, on peut les réduire à trois, parallèles aux trois axes des coordonnées ; leurs intensités varieront d' un point à un autre ; mais dans l' étendue d' un même élément, on pourra les regarder comme constantes ; et alors les forces qui agissent sur cet élément seront proportionnelles à sa longueur. Représentons donc par Xds, Yds, Zds, les forces parallèles aux axes des X, des Yetdesz, qui agissent sur l' élément Ds ; de manière que X, Yetz soient des fonctions données de X, Y, Z : les intégrales (..), prises depuis le point K jusqu' au point N, exprimeront les résultantes des forces parallèles à ces axes, qui agissent sur l' arc Kn; mais, outre les forces appliquées à tous les points de la courbe et données en fonction de leurs coordonnées, il faut encore supposer

p206

des forces particulières, agissant aux deux points extrêmes, et nécessaires pour l' équilibre. Je désigne par A, la force qui agit au point K, et par A, B, C, les angles que fait sa direction avec les axes des X, Y, Z; ses composantes seront , et l' on devra les ajouter aux intégrales (...) , pour avoir les valeurs complètes des composantes de la tension T. Ainsi l' on aura (...) . En éliminant T, entre ces équations, on obtient les deux équations de la courbe, savoir : (...) . Quant à la valeur de T, on la trouve en ajoutant les carrés des équations (...) , et observant que (...) ; ce qui donne (...) .

li équation de la lame élastique en équilibre. I 52 le fil dont nous venons de donner les équations d' équilibre, était supposé parfaitement flexible, mais dénué d' élasticité ; nous allons présentement avoir égard à cette qualité de la matière, et montrer comment elle influe sur les conditions de l' équilibre. Considérons une lame inextensible, flexible et élastique, qui soit naturellement plane et d' une largeur constante dans toute son étendue, c' est-à-dire, que quand elle n' est sollicitée par aucune force, elle a la forme d' un rectangle plan, d' une longueur et d' une largeur données. Supposons cette lame fixement attachée par une de ses extrémités, et appliquons à l' autre extrémité, une force qui la fléchisse dans le sens de sa longueur , de manière qu' elle se

p213

change en une portion de surface cylindrique. Le problème qui va nous occuper, consiste à déterminer la section de cette surface. perpendiculaire à la largeur de la lame. La figure 39 représente cette section ; la courbe (...) est la forme de la lame, après son inflexion ; la droite (..) , égale en longueur à cette courbe, représente la lame avant l'inflexion ; l'extrémité (..) est fixement attachée, et la lame est assujétie en ce point de manière qu' en se courbant elle est forcée de rester tangente à sa direction primitive (..) . Elle est prolongée à son autre extrémité K, par une verge inflexible Ck, et c'est au point C . dans le plan de la figure et suivant la direction Cd. qu' est appliquée la force qui a infléchi la lame et qui la retient dans la position (..); de sorte que l'équilibre existe entre cette force, et l'élasticité de la lame, considérée comme une autre force qui tend à la ramener à sa forme primitive, ou à la remettre en ligne droite.

p231

Principe des vîtesses virtuelles. I 63 en comparant entre elles les conditions d' équilibre dans les machines simples, et en cherchant ce qu' elles ont de commun, les géomètres sont enfin parvenus à découvrir, par induction, une loi générale qui s' observe dans tout système de forces en équilibre. C' est dans cette loi que consiste le *principe des vîtesses virtuelles*: nous allons d' abord en donner l' énoncé; puis nous le vérifierons dans plusieurs cas d' équilibre, et ensuite nous essaierons d' en donner une démonstration directe et générale.

Nous représenterons par (..), etc., les forces données ; par (..), etc. / Fig 44 /, leurs directions, et par (..), etc., leurs points d'application. Ces points matériels sont liés entre eux d'une manière quelconque, par des fils inextensibles, ou par des droites inflexibles, ou par tout autre moyen physique que l'on peut concevoir ; il peut s' en trouver, parmi ces points, qui soient assujétis à rester sur des surfaces ou sur des courbes données, et d'autres qui soient tout-à-fait immobiles. Supposons que l'on communique un mouvement

p232

infiniment petit à ce système de points, de manière que le point M soit transporté de Menn, le point (..), de (..), etc., sans que les conditions qui lient ces points entre eux, soient violées : les droites infiniment petites (...), etc., décrites par les points , etc., sont ce que nous appellerons *les* vîtesses virtuelles de ces points ; et si l' on projette l' une de ces droites sur la direction de la force appliquée au même point. on aura la vîtesse virtuelle de ce point, estimée suivant la direction de cette force. Ainsi, j' abaisse du point N, une perpendiculaire Na sur la direction Ma de la force P, ou sur son prolongement; du point (..), une perpendiculaire (..) sur la direction de (..), ou sur son prolongement ; etc. ; et de cette manière, j' ai les lignes (..), etc., pour les vîtesses virtuelles des points (..), etc., estimées suivant les directions des forces qui agissent sur ces points. Dans tout ce qui va suivre, nous donnerons le signe (..) à celles des projections (..), etc., qui sont comptées sur les directions mêmes des forces, et le signe à celles qui tombent sur les prolongemens de ces directions ; de sorte que si l' on fait (..), les quantités (..), etc., pourront être positives ou négatives : par exemple, la figure suppose (..) positives, et (..) négatives. Au contraire, les quantités (..), etc ., qui représentent les intensités

p233

des forces, sont toujours positives, comme nous en sommes convenus au commencement de ce traité / Nio /. Cela posé, si les forces (...), etc., sont en équilibre, la somme de ces forces , multipliées respectivement par les vîtesses virtuelles (...), etc., estimées suivant leurs directions, est égale à zéro ; c' est-à-dire, que l' on a (...) ; et réciproquement, les forces (...) , etc., sont en équilibre, quand cette équation a lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que l' on peut donner au système des points (...) , etc. . Tel est l' énoncé le plus général du principe des vîtesses virtuelles. Quant à son usage pour résoudre les questions de statique, il ne s' agira, dans chaque cas particulier, que de distinguer les différens mouvemens

infiniment petits que le système des points (..), etc., est susceptible de prendre, et de déterminer pour chacun de ces mouvemens, les vîtesses virtuelles (..), etc., estimées suivant les directions des forces données : cela fait, le principe des vîtesses virtuelles, ou l'équation (..) qui le renferme, donnera immédiatement toutes les équations d'équilibre qui seront en nombre égal à celui des mouvemens possibles. I 64 considérons, par exemple, un levier Dce / Fig 45 /, formé par une ligne inflexible comprise dans un même plan. Soit C le point d'appui ;

p234

deux forces dirigées dans le plan du levier et appliquées aux points (..) de cette ligne, suivant les directions (..). Le levier ne peut prendre qu' un mouvement de rotation autour du point C; on n' aura donc qu' une seule équation d' équilibre, savoir : (..) ; (..) étant les vîtesses virtuelles de (..) , estimées suivant les directions de (..), qui résultent de ce mouvement. Pour déterminer les valeurs et les signes de (..), j' observe d'abord que cette équation ne peut avoir lieu, sans que ces quantités ne soient de signes contraires ; ce qui exige que les forces (..) tendent à faire tourner le levier dans des sens opposés autour du point C. Je suppose donc que la rotation qu' on imprime au levier se fasse dans le sens de la force P, et alors c'est P qui est positive et (..) négative. Dans un pareil mouvement, les angles (..), décrits par les lignes (..) sont égaux ; les arcs (..) , décrits par autour du point C comme centre, sont donc entre eux comme les rayons (..) : ils conservent le même rapport quand ils deviennent infiniment petits, de sorte que l' on a toujours (..). Abaissons des points (..), des perpendiculaires (..), sur les directions des forces (..);

p235

nous aurons (..) . Abaissons aussi du point C, des perpendiculaires (..) , sur les mêmes directions, et faisons (..) . En considérant les arcs infiniment petits (..) comme des lignes droites perpendiculaires aux rayons (..) , les triangles Cbm, et Mna seront semblables, ainsi que les triangles (..) ; et l' on en conclura (..) ; par conséquent (..) . Si l' on substitue ces valeurs de (..) , dans l' équation des vîtesses virtuelles, et que l' on supprime les facteurs égaux (..) , il vient (..) ; d' où il suit que les forces (..) , qui se font équilibre au moyen d' un levier, sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires (..) , abaissées du point d' appui sur leurs directions ; ce qui revient à dire que leurs momens sont égaux par rapport à ce point. Comme ce théorème a été démontré directement dans le N 57, il en résulte que le principe des

vîtesses virtuelles est vérifié, relativement à l'équilibre du levier. à la vérité, nous n'avons appliqué que deux forces à cette machine; mais on peut, si l'on veut, en considérer un plus grand nombre; et quel que soit ce nombre, on déduira du principe des vîtesses virtuelles, la même condition d'équilibre que dans le N cité. Ce principe se vérifie aussi, sans aucune difficulté, dans l'équilibre du treuil, de la poulie et de la vis, dont les conditions sont généralement connues.

p243

I 7 o ce que nous disons ici, par rapport aux fils inextensibles , s' applique également aux droites inflexibles qui joignent deux à deux les points du

p244

système. Il faut se représenter ces droites comme des espèces de fils qui ne peuvent ni s' étendre, ni se contracter, et qui sont, quand l'équilibre existe, ou tirés ou poussés dans le sens de leur longueur par des forces égales et contraires, appliquées à leurs extrémités. L' intensité de ces forces est la mesure de la tension ou de la contraction que ces fils éprouvent : s' il en existe dans le système qui ne soient ni tendus ni contractés, ils sont inutiles à l'équilibre, et l'on peut les supprimer. Ainsi, dans ce qui va suivre, nous supposerons tous les liens physiques qui restent dans le système, tendus ou contractés dans le sens de leur longueur par des forces inconnues. L' avantage du principe des vîtesses virtuelles est de donner les équations d' équilibre dans chaque cas particulier, sans qu' on ait besoin de calculer ces tensions ; il n' est pas même nécessaire de les connaître pour parvenir à la démonstration rigoureuse de ce principe : mais comme celle que nous allons donner est fondée sur la considération de ces tensions inconnues, voici la notation dont nous ferons usage pour les représenter. Nous désignerons par , la tension ou la contraction du fil flexible ou inflexible qui joint deux points quelconques (..) du système. De cette manière, (..), etc., représenteront les tensions des fils qui joignent (..), etc.

I 76 le centre de gravité d'un système de corps pesans, liés entre eux d'une manière quelconque, est en général le plus haut ou le plus bas qu'il est possible, quand ces corps sont en équilibre. Ce théorème remarquable est une conséquence immédiate du principe des vîtesses virtuelles. En effet, supposons que (..). etc., sont les centres de gravité de différens corps, dont les poids sont les forces (..), etc., appliquées à ces points; abaissons de tous ces points des perpendiculaires (..), etc., sur un plan horizontal, choisi arbitrairement ; ces droites représenteront les directions des forces (..) . etc. ; leurs longueurs varieront quand on communiquera au système un mouvement infiniment petit; et il est clair que leurs accroissemens positifs ou négatifs exprimeront les vîtesses virtuelles des points (..), etc., estimées suivant les directions de ces forces, c' est-à-dire, les quantités (..), etc. La somme (..) sera donc l' accroissement de la quantité (..), correspondant au mouvement communiqué ; or, en vertu du principe des vîtesses virtuelles, cet accroissement est égal à zéro, lorsque les poids (..), etc., sont en équilibre ; donc alors, la

p255

quantité (..) est un maximum ou un minimum, ainsi qu'il résulte de la règle connue, d'après laquelle on détermine les plus grandes et les plus petites valeurs des guantités variables. Mais on a / N 99 / (..), en désignant par (..) la somme des poids , etc., et par (..) l' ordonnée verticale du centre de gravité du système entier : cette ordonnée est donc un maximum ou un minimum, quand le système est en équilibre; et par conséquent, dans cet état, le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas qu' il est possible. I 77 il suit de ce théorème qu' entre toutes les courbes d'une longueur donnée, qui passent par les points de suspension d'une chaînette, cette courbe est celle dont le centre de gravité est le plus bas. En partant de cette propriété, et en faisant usage du calcul des variations, on obtient la même équation de la chaînette que nous avons déjà trouvée / Ni 44 /. Comme on sait d' avance que cette courbe doit être plane, on simplifiera le calcul en prenant son plan pour celui des coordonnées. Soit donc (..) / Fig 38 /, la courbe cherchée; prenons l'horizontale Kx, pour l'axe des abscisses, et la verticale Ky pour celui des ordonnées ; désignons par L, la longueur donnée de cette courbe, et par Y, l' ordonnée de son centre

p256

de gravité, nous aurons / Nio 3 / (..) ; ces intégrales étant prises depuis le point K, jusqu' au point (..) . Il faut donc que dans la courbe cherchée, l' intégrale (..) , soit un maximum entre toutes les courbes que l' on peut mener par les points donnés (..), et qui ont la même longueur L; or, si nous considérons la somme (..), où G désigne une constante indéterminée, et si nous trouvons une courbe dans laquelle cette somme soit un maximum entre toutes les courbes possibles, passant par les points (..), il est évident que pour cette même courbe, l' intégrale (..) sera un maximum, relativement à toutes les courbes de même longueur; par conséquent, si nous déterminons la quantité G, qui entrera dans l' équation de cette courbe, de manière qu' on ait (..), cette équation deviendra celle de la courbe demandée. C' est en considérant ainsi la somme de deux ou d' un plus grand nombre d' intégrales, que l' on ramène les maxima relatifs de ces intégrales, à des maxima absolus. Considérons X comme fonction de Y, ce qui

p257

rendra les calculs plus simples, et faisons, pour un moment, (..); nous aurons (..), et, pour l'équation du maximum, (..).
Cette variation (..) devrait être prise par rapport à (..), dont les variations sont (..); mais comme V ne contient point X, la valeur de (..) se réduit à (..). Multipliant par Dy, et intégrant par parties, afin de faire disparaître (..), il vient (..). La variation (..) est nulle aux deux limites de l'intégrale, puisqu' elles se rapportent aux points (..), qui sont fixes et donnés de position; le terme hors du signe (..), disparaît donc dans cette valeur de (..); et en égalant à zéro le coëfficient

p258

de (..), sous le signe (..), on a pour l'équation de la courbe demandée, (..), C étant une constante arbitraire. Si l' on appelle C, l' angle que fait la tangente au point K, origine des coordonnées, avec l'axe des X, on aura à la fois (..); d' où il résulte (..) : l' équation de la courbe devient donc (..) . On voit qu' elle a la même forme que l' équation (..) du Ni 44, avec laquelle elle coïncide en prenant (..), ce qui est permis, puisque Geta sont des constantes indéterminées. On achevera l' intégration et l' on déterminera les constantes, de la même manière que dans ce N et dans les suivans. I 78 quoigu' il soit vrai de dire qu' un système de corps pesans reste en repos, quand son centre de gravité est le plus bas, et quand il est à sa plus grande hauteur ; cependant ces deux états d'équilibre diffèrent essentiellement l' un de l' autre ; et pour en montrer la différence, il convient d'expliquer ici ce qu'on entend par la stabilité de l'équilibre. Un système de corps est dans une position d' équilibre

stable, lorsqu' en l' écartant un tant soit peu de cette position , il tend de lui-même à y revenir, en faisant de part et d'autre des oscillations très-petites. Dans la nature, ces oscillations sont bientôt anéanties par les frottemens et les résistances de tout genre que les corps éprouvent, et le système reprend la position d'équilibre d'où on l'a écarté. Cela posé, l' équilibre d'un système de corps pesans est stable, lorsque son centre de gravité est le plus bas qu'il peut être ; au contraire, il n' est qu' instantané, quand le centre de gravité est le plus haut ; c' est-à-dire, que si l' on vient dans ce dernier cas, à écarter le système un tant soit peu de la position d'équilibre, au lieu de tendre à y revenir, il s'en éloigne de plus en plus. Cette différence des deux états ne peut se démontrer d'une manière générale, qu'en déterminant l' espèce de mouvement que prend un système de corps pesans, infiniment peu écarté de sa position d'équilibre ; par conséquent cette démonstration appartient à la dynamique. Mais on peut citer beaucoup de cas d'équilibre où cette différence est évidente en elle-même : par exemple, si l' on considère un corps pesant, retenu par un point fixe, ce corps sera en équilibre lorsque son centre de gravité se trouvera sur la verticale menée par le point de suspension, au-dessus ou au-dessous de ce point : au-dessous, il sera le plus bas qu'il peut être ; au-dessus, il sera le plus haut ; or, il est évident que dans le premier cas, l'équilibre est stable, et que dans le second, il n'est qu' instantané. Un

p260

cylindre pesant et homogène, à base elliptique, est en équilibre, étant couché sur un plan horizontal, lorsqu' il touche ce plan, suivant l' arête menée par un des sommets de sa base ; si l' arête de contact est menée par un sommet du petit axe, la distance du centre de gravité au plan horizontal, est un *minimum*; cette distance est, au contraire, un *maximum*, quand l' arête de contact correspond à un sommet du grand axe ; or, il est encore évident que l' équilibre est stable dans le premier cas, et instantané dans le second. Si l' arête de contact ne passe pas par un des sommets de la base, il n' y a ni *maximum*, *ni minimum*; et aussi, dans une semblable position, le cylindre ne reste point en équilibre.

p261

Du mouvement rectiligne d' un point matériel. *I mouvement uniforme*. I 79 le mouvement le plus simple que puisse prendre

un point matériel, est celui qui se fait en ligne droite, et dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux en temps égaux. C' est ce mouvement qu' on appelle *uniforme*; et l' on nomme *vîtesse*, le rapport constant des espaces parcourus aux tems écoulés depuis l' origine du mouvement, ou, ce qui est la même chose, l' espace parcouru dans l' unité de tems. Un mouvement uniforme diffère d' un autre mouvement de la même espèce, par la grandeur de la vîtesse qui doit être donnée pour chaque mouvement en particulier. En désignant par A la vîtesse, par T le tems écoulé depuis un instant déterminé, par E l' espace parcouru par le mobile pendant ce

p262

tems T. on aura évidemment, d'après la définition de la vîtesse , (..) . Mais on peut donner à cette équation une forme un peu plus générale, qui permette de comparer entre eux les mouvemens de plusieurs corps qui ne partent pas du même point. Pour cela, supposons que E désigne à un instant quelconque, la distance du mobile à un point fixe C / Fig 49 /, choisi arbitrairement sur la droite Ab qu'il décrit en allant de Aversb. Soit D le point où se trouve le mobile, à l'instant déterminé d'où l'on compte le tems T; représentons par B, la distance Cd, et conservons toujours A pour désigner la vîtesse : (..) sera l' espace parcouru pendant le tems T; par conséquent on aura (..); d' où l' on tire (...) . Observons que quand une équation contient des quantités de différentes espèces, comme ici le tems T et les lignes E. A. B. ces quantités ne sont autre chose que des nombres abstraits qui marquent leurs rapports à des unités de l' espèce de chacune d'elles. C'est la remarque que nous avons déjà eu occasion de faire dans le N 94, et que nous répétons maintenant une fois pour toutes. La variable T peut être positive ou négative ; ses valeurs positives se rapportent à des époques postérieures à l'instant d'où l'on compte le tems, et ses valeurs

p263

négatives, à des époques antérieures au même instant. De même, les valeurs positives de la variable E devront être comptées, à partir du point B, de Cversb, et ses valeurs négatives, à partir du même point, de Cversa. De cette manière, l' équation fera connaître, pour tous les instans possibles, la position du mobile sur la droite indéfinie Ab.

p264

I 8 i lorsqu' on est certain que le mouvement d' un corps est uniforme, ce mouvement fournit le moyen le plus naturel de mesurer le tems, qui est alors proportionnel aux espaces parcourus par le mobile. Mais pour s' assurer de l' uniformité du mouvement qui doit servir de mesure au tems, il est évident qu' il faut en avoir une autre mesure, indépendante de ce mouvement. Or, si l' on a une suite de mouvemens qui s' achèvent tous en tems égaux, on peut prendre leur durée commune pour unité de tems et le nombre de ces mouvemens successifs deviendra la mesure du tems, rapportée à cette unité. Nous ne supposons pas que l'on connaisse la loi suivant laquelle ces mouvemens s' exécutent ; car il se présente sans peine à l'esprit une infinité de cas où, sans connaître cette loi, on peut néanmoins assurer que tous ces mouvemens s' achèvent en tems égaux. Nous n' en citerons ici aucun exemple, parce qu'il ne s'agit pas d'entrer dans le détail des différens moyens qu' on pourrait employer à la mesure du tems ; mais seulement de

p265

faire voir que cette mesure n' est pas essentiellement fondée sur la considération du mouvement uniforme ; de manière qu' on peut, sans commettre un cercle vicieux, faire entrer la notion du tems dans la définition de ce mouvement. I 82 si un corps, après avoir parcouru un certain espace dans un tems déterminé, parcourt ensuite un espace plus grand dans un tems égal, nous disons que son mouvement s' est accéléré; nous disons, au contraire, qu' il s' est ralenti, quand le second espace est plus petit que le premier ; or, de même que ce corps n' a pu se mettre en mouvement sans l'action d'une force / Ni /, de même aussi il est incapable, sans le secours d'une nouvelle force, d' accélérer ou de ralentir le mouvement qu'il a reçu, ou d'en changer la direction. Un point matériel mis en mouvement par l' action d'une force, et ensuite abandonné à lui-même, se meut donc indéfiniment en ligne droite ; il décrit toujours le même espace dans le même intervalle de tems, ou autrement dit, il se meut d'un mouvement uniforme, dans la direction de la force qui l' a mis en mouvement. L' intensité de cette force détermine la vîtesse du mouvement produit ; de sorte que la force changeant, le mouvement reste uniforme, mais l'espace parcouru dans l' unité de tems devient ou plus grand ou plus petit. Cette impossibilité où sont tous les corps de changer leur état de mouvement ou de repos, sans le secours d'une cause particulière qui agit sur eux

p266

à cet instant, est une des propriétés générales de la matière, qu' on appelle *l' inertie* . Elle est pour nous un résultat de

l'expérience et de l'analogie, sur lequel il ne peut rester aucun doute. En effet, nous voyons les corps persévérer de plus en plus dans leur mouvement, à mesure que nous prenons soin de diminuer les obstacles, tels que les frottemens et les résistances des fluides, qui altèrent ce mouvement et finissent par l'anéantir. L'analogie nous conduit donc à conclure que si nous parvenions à faire disparaître entièrement ces obstacles, nous verrions les corps mis en mouvement par une force, conserver ce mouvement sans aucune altération, jusqu' à ce qu' une nouvelle force vînt détruire ou changer l'effet de la première. L' inertie de la matière est principalement remarquable dans le mouvement des corps célestes, qui subsiste depuis un tems dont nous ne saurions assigner la limite, et dans lequel cependant les observations les plus précises n' ont pu faire découvrir aucune altération. Ii mouvement uniformément varié. I 83 il existe dans la nature deux espèces distinctes de forces. Les unes agissent sur les corps pendant un tems inappréciable ; aussitôt après cette action presqu'instantanée, elles abandonnent le mobile à lui-même ; par conséquent ces forces produisent toujours un mouvement rectiligne et uniforme. Les forces de l' autre espèce agissent sans interruption sur

p267

le mobile, pendant toute la durée de son mouvement. Si cette action continue s' exerce toujours suivant la même ligne droite, le mouvement produit est rectiligne ; mais les espaces parcourus en tems égaux, ne sont point égaux, quelque petits que soient ces intervalles de tems ; de sorte que ce mouvement n' est ni uniforme, ni un assemblage de mouvemens uniformes qui se succèdent dans la même direction. Nous examinerons dans la suite, le cas où la direction de la force varie sans cesse pendant le mouvement, et où le mobile décrit en conséquence une ligne courbe ; il ne sera question dans ce chapitre, que du mouvement rectiligne d'un point matériel. I 84 nous appellerons en général mouvemens variés , ceux dans lesquels le rapport des espaces parcourus aux tems employés à les parcourir, varie continuellement ; et forces accélératrices , les forces qui produisent de semblables mouvemens par leur action non interrompue sur le mobile. Pour se représenter plus aisément un mouvement varié, on peut partager le tems en une infinité d' intervalles infiniment petits, et supposer que la force agit sur le mobile au commencement de chaque instant. Alors le mouvement sera uniforme pendant la durée de ces intervalles : le mouvement varié, quel qu' il soit, sera donc remplacé par une suite de mouvemens uniformes, dont les durées seront infiniment petites, et dont les vîtesses seront toutes différentes entre elles. En décomposant ainsi un mouvement varié en une infinité de mouvemens uniformes, on simplifiera

beaucoup les démonstrations et les calculs ; et les résultats auxquels on parviendra par ce moyen, n' en auront pas moins le degré de certitude que l' on a droit d' exiger. Cette manière d' envisager les mouvemens variés, est analogue à ce qu' on fait en géométrie, quand on substitue aux courbes continues, des polygones d'une infinité de côtés infiniment petits. I 85 lorsqu' un corps se meut d' un mouvement varié, si l' on supprimait à un instant quelconque la force accélératrice. le mouvement deviendrait uniforme ; or, la vîtesse du mouvement uniforme qui succéderait dans ce moment au mouvement varié, est ce qu' on appelle la vîtesse acquise par le mobile, ou simplement la vîtesse du mobile à cet instant. Cette vîtesse dépend évidemment du tems pendant lequel la force accélératrice a agi sur le mobile, et de la nature de cette force. Dans chaque espèce de mouvement, la vîtesse est donc une certaine fonction du tems écoulé depuis que le corps a commencé de se mouvoir. Après le cas d'une vîtesse constante, qui donne le mouvement uniforme, le plus simple est celui dans lequel la vîtesse croît ou décroît par degrés égaux. Le mouvement est uniformément accéléré ou retardé, selon que la vîtesse augmente ou diminue. Pour comprendre ces deux cas en une seule dénomination, nous nommerons uniformément variés, les mouvemens dans lesquels la vîtesse varie proportionnellement au tems. La force qui produit un mouvement de cette espèce, sera pour nous une force accélératrice constante ; car elle agit constamment de la même

p269

manière sur le mobile, dont elle augmente ou diminue la vîtesse d' une quantité égale en tems égaux, pendant toute la durée du mouvement.

p271

I 88 la chute des corps pesans dans le vide, nous offre un exemple d' un mouvement uniformément accéléré. L' expérience a démontré que les espaces qu' ils parcourent sont proportionnels aux carrés des tems, tandis que les vîtesses qu' ils acquièrent sont simplement proportionnelles aux tems. La pesanteur est donc une force accélératrice constante ; et si l' on prend la seconde pour unité de tems, il suffira de connaître l' espace qu' un corps parcourt dans la Ire seconde de sa chute, pour être en état de déterminer toutes les circonstances du mouvement de ce corps. Or, on a trouvé, par des expériences faites avec une extrême précision, et que nous ferons bientôt connaître, que cet espace est le même pour tous les corps, qu' il varie avec la latitude, et qu' à celle de Paris, il est égal à 4 m, 9 o 44 . En faisant donc (...)

dans les formules (..), elles feront connaître, après un nombre quelconque de secondes, la vîtesse du mobile et la hauteur d' où il est tombé; et réciproquement, on en déduira le tems de la chute du corps, lorsque la valeur de V ou celle de H sera donnée. Que je sache, par exemple, qu' un corps pesant a acquis une vîtesse de loom, en tombant dans le vide, d' une hauteur inconnue; je divise cette vîtesse par la valeur de G, et j' ai le tems de la chute, exprimé en secondes, savoir (..). De même, si l' on sait qu' un corps est tombé d' une hauteur de 5 om, et qu' on demande le tems de la chute; on divisera le double de cette hauteur par la valeur de G, on extraira ensuite la racine carrée du quotient, et le résultat exprimera le nombre de secondes, contenu dans le tems demandé: on trouve, dans ce cas,

p277

I 93 la loi des vîtesses proportionnelles aux forces qui les produisent, dont nous venons de faire usage, est un principe fondamental de la dynamique.

p278

à proprement parler, cette loi n' est qu' une hypothèse ; car, de ce que nous entendons par le rapport numérique des forces / N 4 /, nous ne pouvons rien conclure relativement aux vîtesses qu' elles produisent. Nous disons, par exemple, qu' une force est double d'une autre, quand la première est formée par la réunion de deux forces égales à la seconde, agissant simultanément et dans le même sens, sur un point matériel ; or, il ne s' ensuit pas nécessairement que cette force double doive communiquer au mobile, une vîtesse précisément double de celle que la force simple lui communiquerait dans le même tems. La vîtesse communiquée à un mobile, par une force qui agit sur lui pendant un tems déterminé, est une fonction du nombre qui représente l' intensité de cette force ; le peu de données que nous avons sur la nature des forces, ne nous permet pas de déterminer à priori la forme de cette fonction ; nous sommes donc obligés, pour résoudre les problèmes de dynamique, de partir d'une supposition; et nous choisissons la plus simple, en regardant la vîtesse comme proportionnelle à la force. L'accord des résultats qui se déduisent de cette hypothèse, avec l'expérience, prouve ensuite que cette loi la plus simple, est effectivement celle de la nature. Au reste, cette loi et l'inertie de la matière sont les deux seules hypothèses sur lesquelles toute la dynamique est fondée ; mais, à cet égard, la théorie du mouvement

est moins étendue que celle de l'équilibre, car celle-ci ne dépend absolument d'aucune supposition. En effet, il n'est pas nécessaire pour résoudre les problèmes de statique, de connaître les vîtesses que des forces qui ont entre elles un rapport donné, pourraient communiquer à leurs points d'application : il suffit de connaître ce rapport numérique, tel qu' il a été défini dans le N 4, et les directions de ces forces. I 94 lorsque deux forces sont appliquées à un même point matériel, et que le rapport numérique de ces forces est donné, on en conclut celui des vîtesses qu' elles communiqueraient dans le même tems à ce point ; c' est ce qui arrive quand elles proviennent de la décomposition d'une autre force : le rapport des intensités des composantes, comparées entre elles, ou de l' une des composantes comparée à la résultante, est donné par la règle du parallélogramme des forces ; connaissant donc la vîtesse que la résultante communiquerait au mobile, dans l'unité de tems, on en déduira immédiatement la vîtesse qui serait due à l' une des deux composantes, ainsi qu' on vient de le voir relativement à la composante de la pesanteur dirigée suivant un plan incliné. Quand , au contraire, les vîtesses communiquées par deux forces, à un même mobile et dans un même tems, sont connues, leur rapport donne celui de ces forces. C' est ainsi, par exemple, qu' on a déterminé

p280

par l'expérience, la loi de la pesanteur à la surface de la terre. L'observation fait connaître, sous les différens parallèles, la hauteur d'où les corps tombent dans la Ire seconde de leur chute ; en doublant cette hauteur, on a la vîtesse acquise à la fin de ce tems, ou la mesure de la pesanteur à ces différentes latitudes ; or, on a trouvé de cette manière que si l' on appelle G la pesanteur en un lieu dont la latitude est de (..), et (..) la pesanteur en un autre lieu quelconque dont la latitude est représentée par (..), la valeur de (..) est donnée par cette formule (..) . Au pôle, on a (..) ; à l' équateur, (..) ; donc l'accroissement de la pesanteur, dans l'étendue entière du quart du méridien, est égal à (..), c' est-à-dire, à environ (..) de sa valeur moyenne. I 95 non-seulement la loi des forces proportionnelles aux vîtesses a lieu pour les forces accélératrices, mais elle s'applique également aux forces qui agissent sur les corps pendant un tems dont la durée est inappréciable. Deux forces de cette espèce sont entre elles comme les vîtesses qu' elles communiqueraient à un même corps, si elles agissaient successivement sur lui. Il est bon d'observer que si I' on voulait comparer

une force de cette espèce avec une force accélératrice, il faudrait prendre les vîtesses produites par ces deux forces dans un même intervalle de tems : or, la première n' agissant que pendant un tems qu' on peut regarder comme infiniment petit, il faudrait prendre les vîtesses produites par la seconde, pendant un tems qui fût aussi infiniment petit ; et comme cette vîtesse se trouve infiniment petite, tandis que la vîtesse produite par la première force est toujours une quantité finie, il en résulte que cette force instantanée, ou que nous regardons comme telle. est infinie par rapport à celle dont l'action est continue ; ou plutôt, ces deux forces ne sont pas de même nature, et ne peuvent être comparées numériquement. lii formules générales du mouvement varié. I 96 lorsque l'intensité d'une force accélératrice varie pendant le tems qu' elle agit sur le mobile, la vîtesse acquise dans chaque unité de tems est variable comme cette intensité, et le mouvement produit n'est plus uniformément varié. Les forces qui dépendent à chaque instant de la vîtesse actuelle du mobile, telles que la résistance des fluides et le frottement, nous offrent des exemples de forces accélératrices variables. Il en est de même de la pesanteur, quand les corps pesans tombent d'une grande hauteur, et que l'on veut tenir compte de la variation continuelle de la gravité, due à leur rapprochement du centre de la terre. Le mouvement

p282

du corps dépend de la loi suivant laquelle la force accélératrice varie ; et dans un mouvement quelconque, l'espace parcouru, la vîtesse acquise à chaque instant, et la force accélératrice, sont trois fonctions du tems qui sont liées entre elles, comme on va le voir.

p300

lii problème. 2 o 7 déterminer le mouvement vertical d' un corps pesant, en ayant égard à la résistance de l' air, supposée proportionnelle au carré de la vîtesse. il faut distinguer deux cas : celui où le corps tombe, et celui où il est lancé verticalement de bas en haut. Examinons d' abord le premier . La force accélératrice (..) , est alors la différence de deux forces qui agissent constamment sur le mobile, en sens contraire l' un de l' autre, savoir, la pesanteur et la résistance du milieu dans lequel le corps est en mouvement. Celle-ci est une force variable qui dépend de la vîtesse du mobile, et qu' on

regarde généralement comme proportionnelle au carré de cette vîtesse. Nous la représenterons par Mv, M étant un coefficient constant pour un même corps et pour un même milieu, mais variable avec la forme du corps, sa densité et celle du milieu. Si le corps tombait d' une grande hauteur, M varierait à raison du changement de densité des couches de l' atmosphère ; mais dans une petite hauteur on peut regarder l' air comme un fluide homogène, et considérer M comme une quantité constante. Nous regarderons aussi la pesanteur comme une force constante, et en la désignant par G, nous aurons (..) ;

p301

d'où il résulte, pour l'équation du mouvement, (..). Pour l'intégrer, je la mets sous cette forme, (..); ce qui donne, en intégrant, (..). Je n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que je suppose nulle la vîtesse initiale du corps, et que je compte le tems T à partir de l'origine du mouvement, de manière qu'on ait à la fois (..); condition remplie par cette formule. En passant des logarithmes aux nombres, et en désignant par (..) la base du système dont le module est l'unité, il vient (..); équation qui fera connaître la vîtesse du mobile à chaque instant. Pour déterminer l'espace parcouru, on a (..); intégrant et déterminant la constante arbitraire, de

p302

manière que l' on ait en même tems (..), on trouve (..); et comme V est donnée en fonction de T, par l'équation (..), celle-ci donnera de même en fonction de T, la valeur de E. Ainsi la solution complète du problème proposé est renfermée dans ces deux éguations. 2 o 8 à mesure que le tems augmente, l' exponentielle qui entre dans l'équation (..) diminue ; de sorte qu' après un tems plus ou moins court, suivant que le coefficient est plus ou moins grand, la valeur de cette exponentielle est sensiblement nulle ; et alors l'équation (..) donne (..) . Il s' ensuit donc que le mouvement d'un corps pesant qui tombe dans un fluide homogène, tend continuellement à devenir uniforme ; ce qui provient de ce que la résistance du milieu détruit sans cesse l' accélération due à la gravité. La vîtesse constante de son mouvement final est, comme on voit, en raison inverse de la racine carrée du coefficient M, qui exprime l' intensité de cette résistance ; or, nous montrerons dans la suite que ce coefficient est proportionnel à la densité du fluide, et que pour des corps de figure semblable, par exemple, pour des sphères, il est en raison inverse du rayon et de la densité du corps ; de sorte qu' en

désignant le rayon par R, la densité du corps par D, et celle du fluide par (..), on a (..); (..) étant une quantité dont la valeur sera la même pour tous les corps sphériques, mais qui ne peut être déterminée que par l'expérience. La vîtesse finale devient donc (..). Toutes choses d'ailleurs égales, cette valeur est proportionnelle à la racine carrée de la densité du mobile; d'où l'on voit qu'en ayant égard à la résistance de l'air, les corps les plus denses doivent tomber le plus vîte, tandis que dans le vide, tous les corps tombent avec la même vîtesse; ce qui est conforme à l'expérience.

p311

2 i 4 le moyen le plus simple de déterminer le mouvement d' un point matériel dans l' espace, est d' assigner à chaque instant la position de ses projections

p312

sur trois axes fixes. On peut se représenter ces projections, comme trois points mobiles qui suivent le point matériel pendant son mouvement : la question se réduit alors à chercher les lois de ces trois mouvemens rectilignes, et voici comment on parvient à la résoudre. Soit O / Fig 53 / le point de départ du mobile ; par ce point, menons trois axes fixes et rectangulaires, Ox, Oy , Oz ; supposons que des forces de grandeur et de direction quelconques, soient appliquées au mobile quand il est au point O , qu' elles agissent sur lui simultanément, et qu' elles l' abandonnent ensuite à lui-même. En quelque nombre que soient ces forces, on peut toujours les réduire à trois, dirigées suivant les trois axes ; soient donc A, B, C, les intensités de ces forces ; A la vîtesse que la force A imprimerait au mobile dans la direction Ox, si elle existait seule ; B la vîtesse qui aurait lieu suivant Oy, en vertu de la force B ; C la vîtesse suivant Oz, qui serait due à la force C. Pour obéir à l'action simultanée de ces trois forces. le mobile se mouvra dans la direction de leur résultante, et avec la vîtesse correspondante à I' intensité de cette force. Or, en appelant R cette résultante ; (..), les angles que fait sa direction avec celles des composantes A, B, C, on aura / N 2 o / (..); de plus V désignant la vîtesse due à la force R, de même que A, B, C désignent les vîtesses dues aux forces A, B, C, on peut substituer dans ces équations,

à la place de chaque force, la vîtesse correspondante, attendu que les rapports de ces vîtesses sont les mêmes que ceux des forces qui les produisent; on aura donc aussi (..); d' où l' on peut conclure que la vîtesse V, due à l' action simultanée des trois forces A, B, C, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélépipède construit sur les trois vîtesses A, B, C, comme côtés adjacens. Le mobile, en vertu de sa vîtesse V, décrira sur cette diagonale une droite égale à (..), dans un tems quelconque (..); les projections de cette droite sur les axes Ox, Oy, Oz, sont respectivement égales à (..), ou, ce qui est la même chose, à (..); il s' ensuit donc que les projections du mobile se meuvent uniformément sur ces axes, avec les vîtesses A, B, C, tandis que ce point matériel se meut uniformément dans l' espace, avec la vîtesse V.

p315

2 i 6 il se présente ici une observation importante à faire, relativement à la composition des valeurs de X, Y, Z. Elle nous montre clairement que l'espace parcouru par la projection du mobile M, sur l'un des trois axes, ne dépend que des vîtesses qui

p316

seraient produites par les forces parallèles à cet axe, si ces composantes agissaient seules sur le mobile ; de manière que cet espace n' est aucunement modifié par l' action des forces parallèles aux deux autres axes. Ainsi la valeur de X ne renferme que les vîtesses (...), qui seraient imprimées au mobile par les forces (..), parallèles à l'axe Ox, si toutes les autres étaient nulles ; de même l' action des forces parallèles aux axes Ox, Oz, ne contribue ni à augmenter ni à diminuer la valeur de Y : et celle de Z est la même que si les forces parallèles à l' axe Oz, avaient agi seules sur le mobile. Comme ce résultat est indépendant de la grandeur des intervalles de tems (..), qui séparent les actions des forces appliquées successivement au mobile, ainsi que de la grandeur des vîtesses dues à ces forces. il s' ensuit qu' on peut l' étendre au cas où ces intervalles et ces vîtesses deviennent, en tout ou en partie, infiniment petits, c' est-à-dire, au cas où le mobile est soumis à l' action d' une ou plusieurs forces accélératrices, combinées avec d'autres forces dont l'action est instantanée. Concluons donc que si l' on décompose en trois forces parallèles à trois axes fixes, les forces quelconques qui produisent le mouvement curviligne d' un point matériel, et si l' on considère comme des points mobiles les projections du point matériel sur ces axes, le mouvement sur chaque axe sera dû aux forces parallèles à cette

ligne, et le même que *si les autres forces étaient nulles* . Dans chaque cas particulier, on déterminera les

p317

mouvemens sur les axes, d'après les équations du mouvement rectiligne données dans le chapitre précédent ; la solution d'un problème quelconque, relatif au mouvement curviligne, sera donc réduite à considérer trois mouvemens rectilignes, ou seulement deux, quand on sera certain, par la nature de la question, que le mobile doit toujours rester dans un même plan; car alors on pourra prendre, dans ce plan, deux des trois axes coordonnés. 2 i 7 pour éclaircir ceci par un exemple fort simple, considérons le mouvement d'un point matériel pesant, auquel on imprime une vîtesse dirigée suivant une droite horizontale. Il est d'abord évident que le mobile ne saurait sortir du plan vertical mené par cette droite, puisque tout est semblable de part et d'autre de ce plan; de plus, si l' on fait abstraction de la pesanteur, afin de déterminer le mouvement de la projection sur cette même droite, on voit qu'il sera uniforme et dû à la vîtesse donnée : de même, en supposant cette vîtesse nulle, on voit que le mouvement de la projection sur la verticale menée par le point de départ, sera uniformément accéléré ; or, en vertu du théorème précédent, ces deux mouvemens doivent avoir lieu ensemble, sans s' altérer en aucune manière ; il s' ensuit donc que la courbe décrite par le mobile sera telle, que les abscisses horizontales, comptées du point de départ, croîtront proportionnellement au tems, tandis que les ordonnées verticales, comptées du même point , croîtront proportionnellement au carré

p318

du tems : les abscisses seront donc proportionnelles aux carrés des ordonnées ; et par conséquent la courbe décrite sera une parabole, qui aura son grand axe vertical, et son sommet au point de départ. Quant au paramètre, il dépendra du rapport de la vîtesse donnée à la pesanteur. Nous reprendrons bientôt, plus en détail, la solution de ce problème. 2 i 8 le théorème précédent est essentiellement fondé sur la loi des vîtesses proportionnelles aux forces qui les produisent, sans laquelle il n' aurait pas lieu. Voici un corollaire général qui s' en déduit immédiatement et qui va nous fournir, par son accord avec l' expérience, une confirmation frappante de cette loi que nous avons admise comme étant celle de la nature / Ni 93 /. Considérons un plan indéfini, sur leguel se meuvent un nombre quelconque de points matériels soumis à des forces dirigées dans ce plan ; supposons que l' on applique à tous les points de ce plan des forces égales entre elles, et qui lui soient perpendiculaires ; de sorte que ce plan soit mis en mouvement

dans l'espace, en restant toujours parallèle à lui-même. Il est évident que chacun des points mobiles sur le plan, se trouvera soumis à l'action simultanée des forces particulières qui agissaient d'abord sur lui, et de la force appliquée à tous les points du plan; le mouvement de chaque point matériel dans l'espace sera donc produit par la résultante de ces différentes forces; or, d'après le théorème du N 2 i 6, si l'on rapporte le mouvement à trois axes fixes, dont un

p319

soit perpendiculaire et les deux autres parallèles à ce plan mobile, les mouvemens des projections des mobiles sur ces deux derniers axes, ne seront point altérés par la force parallèle au premier, ou autrement dit, le mouvement de chaque point matériel sur le plan devenu mobile, demeurera le même que si ce plan fût resté en repos. Ce résultat est conforme à une expérience que nous avons souvent l'occasion de répéter, et qui nous prouve qu' un mouvement commun à tous les corps d'un système, n'altère pas les mouvemens particuliers de ces corps. c' est-à-dire, que ces corps conservent entre eux les mêmes distances et les mêmes vîtesses relatives, que si le mouvement commun n' existait pas. 2 i 9 cherchons maintenant les équations différentielles du mouvement curviligne d'un point matériel, soumis à l'action d' une ou plusieurs forces accélératrices, et à celle d'une autre force qui lui a imprimé instantanément une vîtesse finie à l' origine de son mouvement. Après un temps quelconque T, soient X , Y, Z, les trois coordonnées rectangulaires du mobile, rapportées aux trois axes fixes Ox, Oy, Oz ; ces coordonnées seront des fonctions de T, et le mouvement sera entièrement déterminé quand ces fonctions seront connues, puisqu' alors on aura, à chaque instant, la position du mobile dans l'espace. Décomposons chacune des forces accélératrices données, en trois autres, parallèles aux axes des coordonnées, et

p320

soient X, Y, Z, les sommes des composantes respectivement parallèles aux axes des X, des Yetdesz. Les quantités X, Y, Z seront données dans chaque cas particulier, en fonction de X, Y, Z; et je les supposerai positives ou négatives, selon que les forces qu' elles représentent tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées du mobile. D' après ce qu' on vient de démontrer, le mouvement de la projection du mobile sur chaque axe , est dû aux forces parallèles à cet axe. En appliquant donc à chacun de ces trois mouvemens rectilignes, l' équation générale du Ni 98, on aura (..) . Telles sont les équations générales du mouvement d' un point matériel dans l' espace. On voit que la vîtesse initiale du mobile n' y entre pas ; mais cette vîtesse et

sa direction serviront, avec la position du mobile à l' origine du mouvement, à déterminer les constantes arbitraires qui doivent completter les intégrales de ces équations ; lesquelles constantes seront au nombre de six, puisqu' il s' agit de trois équations différentielles du second ordre. La solution complette de chaque problème particulier exigera donc que l' on intègre le système de ces trois équations, et que l' on détermine ensuite les constantes arbitraires de leurs intégrales, d' après les conditions initiales du mouvement. Mais, si l' on sait d' avance que le mobile doit se mouvoir dans un plan donné,

p321

on simplifiera la question en le prenant pour l' un des trois plans des coordonnées, par exemple, pour celui des X, Y; il faudra, pour cela, que la force Z n' existe pas, et l' on aura aussi (..): le problème alors ne dépendra plus que de deux équations différentielles secondes, savoir, des deux premières équations (..). Lorsqu' on sera parvenu à intégrer les équations, on aura, dans le cas général, trois équations entre X, Y, Zett; si l' on élimine le tems T, entre elles, il en restera deux, entre les coordonnées X, Y, Z, qui seront les équations de la courbe décrite par le mobile dans l' espace : on appelle cette courbe, qui sera généralement à double courbure, la *trajectoire* du mobile.

p325

223 dans le mouvement curviligne, on entend par la vîtesse du mobile à un instant quelconque, celle du mouvement rectiligne et uniforme, qui aurait lieu si, à cet instant, les causes qui infléchissent et font varier le mouvement, venaient à cesser leur action : cette vîtesse est donc égale à (..), et dirigée suivant la tangente à la trajectoire. La variable S est une fonction du tems qui exprime la longueur de la ligne courbe, parcourue par le mobile ; ainsi, l' on peut dire qu' ici, comme dans le mouvement rectiligne, la vîtesse est égale au premier coefficient différentiel de l' espace parcouru, considéré comme une fonction du tems. On peut aussi remarquer que le second coefficient différentiel de cette fonction exprime la force accélératrice, décomposée suivant la tangente à la trajectoire. En effet, pour avoir cette force, il faut décomposer, suivant sa direction, toutes les forces

p326

qui agissent sur le mobile ; or, ces forces sont X, Y, Z, dont

les composantes suivant la tangente à la trajectoire, sont (..), puisque (..) sont les cosinus des angles compris entre cette droite et les axes des X, Y, Z; leur somme, en ayant égard aux équations (..), sera donc (..); mais en différentiant l' équation identique, (..), il vient (..); ce qui réduit la quantité précédente à (..), qui est, comme nous l' avons avancé, la force accélératrice du mobile décomposée suivant la tangente à la trajectoire.

p331

227 pour énoncer un théorème remarquable que les équations (...) renferment, considérons la projection du mobile sur le plan des X, Y. Soit P cette projection, R son rayon vecteur Op, et V l' angle Xop compris entre ce rayon et l' axe des X; on aura; d' où l' on tire (...) . Prenons l' angle infiniment petit (...) pour représenter l' angle Dv, de manière que (...) soient deux rayons vecteurs consécutifs de la projection du

p332

mobile, et (..) l' arc décrit par cette projection pendant l' instant Dt : le secteur (...) sera l' aire décrite par son rayon vecteur pendant cet instant ; or, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre, ce secteur (...) peut être regardé comme un secteur circulaire, et son aire est égale à (...), ou à la moitié de (..) ; donc, en vertu de la première des équations (..) cette aire sera une quantité constante et égale à ; par conséquent l' aire décrite par le même rayon, pendant un tems T quelconque, est proportionnelle à ce tems, et égale à (...) . Les deux autres éguations (...) signifient de même que les aires décrites par les rayons vecteurs des projections du mobile sur les plans des X, Z, et des Y, Z, sont proportionnelles au tems employé à les décrire. Ainsi, toutes les fois que la force accélératrice qui agit sur un mobile est constamment dirigée vers un point fixe, les aires décrites autour de ce point, par le rayon vecteur du mobile, projeté sur un plan mené par ce même point, sont proportionnelles au tems employé à les décrire . Rien n' empêche en effet de prendre ce plan quelconque, pour I' un des trois plans des coordonnées X. Y. Z. Réciproquement. quand cette propriété a lieu relativement à trois plans rectangulaires, on en peut conclure que la résultante des forces qui agissent sur le mobile est constamment dirigée suivant la droite qui joint le point d'intersection de ces trois plans et le mobile. En effet, en plaçant l'origine des coordonnées X, Y , Z, en ce point, et prenant les trois plans donnés

pour ceux de ces coordonnées, les trois aires (..), seront constantes d'après l'hypothèse ; leurs différentielles (..), seront donc nulles ; et l' on aura, en vertu des équations (..), . Or il s' ensuit que les composantes X, Y, Z, sont entre elles comme les coordonnées X, Y, Z ; par conséquent leur résultante est dirigée suivant la droite qui joint le mobile et l'origine de ces coordonnées, puisque cette ligne est la diagonale du parallélépipède dont X. Y. Z sont les trois côtés . 228 puisque la trajectoire d' un mobile sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, est une courbe plane, et que dans l'énoncé du théorème précédent, la direction du plan de projection est arbitraire, il en résulte que ce théorème a également lieu, par rapport aux aires décrites par le rayon vecteur du mobile, dans le plan même de la trajectoire. Cette proposition se démontre directement, de la manière suivante. à la courbe décrite par le mobile, substituons un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits ; soient (..) / Fig 54 /, deux côtés consécutifs de ce polygone, décrits dans des intervalles de tems infiniment petits, que nous supposerons égaux ; soit aussi C, le centre d'action de la force qui agit sur le mobile : pendant qu' il décrit les côtés (..),

p334

son rayon vecteur décrira les aires (..) : or, je dis que ces aires sont égales entre elles. En effet, quand le mobile est parvenu au point M. si la force accélératrice n' agissait pas sur lui, sa vîtesse ne serait changée, ni en grandeur, ni en direction ; il continuerait donc à se mouvoir sur le côté (..) prolongé, et il parcourrait, dans le second instant qu' on suppose égal au premier, une droite Mn, égale au côté (..). Mais, au point M, la force dirigée vers le point C, agit sur le mobile ; la vîtesse qu' elle lui imprime, suivant la direction Mc, lui ferait parcourir, s' il était en repos, un certain espace Mg, dans le second instant : le mobile, parvenu au point M, est donc animé de deux vîtesses qui lui feraient parcourir les droites Mnetmg, dans le même intervalle de tems, si elles avaient lieu séparément ; par conséquent le côté (..) qu'il parcourra dans le second instant, sera la diagonale du parallélogramme (..), construit sur ces deux droites Mgetmn / N 2 i 2 /. Le triangle (..) sera donc égal au triangle Mcn, puisqu' ils ont même base Mc, et leurs sommets (..), sur une parallèle à cette base ; d' ailleurs les triangles (..) sont aussi égaux, à cause qu'ils ont un sommet commun C, et leurs bases (..), égales et situées sur une même droite ; donc les triangles (..), égaux à un même triangle Mcn, sont aussi égaux entre eux. Si les aires dans deux instans consécutifs et égaux, sont égales, il s'ensuit que les aires décrites dans deux intervalles de tems égaux, sont aussi égales, car on peut partager ces deux intervalles, dans le

même nombre d'instans égaux ; par conséguent aussi, les aires décrites dans des tems quelconques, seront entre elles comme ces tems. Donc les aires décrites autour d'un point fixe, par le rayon vecteur d' un point matériel, sont proportionnelles au tems employé à les décrire, toutes les fois que la force qui agit sur le mobile, est constamment dirigée vers ce point fixe. Réciproquement, si l' on sait, par l' expérience, ou tout autrement, que les aires sont proportionnelles au tems, on en pourra conclure que la force qui sollicite le mobile, est dirigée vers l' origine des aires dans tous les instans du mouvement. Car dans cette hypothèse, les aires (..), décrites dans deux instans égaux et consécutifs, seront égales ; mais en conservant la construction précédente, on a (..) ; les deux triangles (..) devront donc être égaux ; et comme ils ont même base Mc, il faudra que la droite (..), qui joint leurs sommets, soit parallèle à cette base ; or, d'après la composition des mouvemens / N 2 i 3 /, cette droite est toujours parallèle à la direction de la force qui agit au point M, et qui empêche le mobile de suivre la direction Mn; donc la direction de cette force coïncide avec la ligne Mc, ou avec son prolongement Mh. La figure suppose que cette force inconnue tend à rapprocher le mobile du point C, auquel cas la trajectoire est concave vers ce point ; il est aisé de voir qu' elle serait, au contraire, convexe vers le même point , si la force agissait dans le sens Mh.

p338

23 o l' ordonnée Cd du sommet de la parabole exprime la plus grande hauteur à laquelle le mobile s' élève sur cette courbe ; c' est ce qu' on appelle la hauteur du jet . Après avoir atteint le sommet, le mobile redescend, et comme la branche descendante de sa trajectoire est semblable à sa branche ascendante, il revient couper l' axe des X, en un point dont l' abscisse Ob est double de celle qui répond au sommet. On appelle cet abscisse l' amplitude du jet , et en observant que (..) , on a (..) ; où l' on voit que pour une force de projection donnée, l' amplitude est la plus grande, quand le projectile est lancé sous un angle de (..) , c' est-à-dire, quand on a (..) . On obtiendrait aussi cette valeur de Ob, en faisant (..) dans l' équation de la trajectoire.

p339

La vîtesse A étant toujours donnée, si l' on demande quel doit être l' angle (..), pour que le projectile atteigne un point donné, dont les coordonnées sont (..), on mettra ces valeurs dans l'

équation de la trajectoire, et l' on aura, pour déterminer (..), . Pour simplifier cette équation, soit H la hauteur due à la vîtesse A, de manière qu' on ait (..) / Ni 89 / ; soit aussi (..), , et par conséquent (..); notre équation deviendra (..); d' où l' on tire (..). On peut donc, en général, atteindre le but donné en tirant sous deux directions différentes, puisque nous trouvons deux valeurs de (..); mais si l' on a (..), ces deux valeurs sont imaginaires, et le problème est impossible. 23 i rien ne serait donc plus simple que la théorie des projectiles, si l' on pouvait faire abstraction de la résistance que l' air oppose à leur mouvement; mais cette résistance est trop grande pour qu' il soit permis de la négliger, et nous allons maintenant y avoir égard.

p340

La résistance d'un milieu quelconque est une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire, toujours en sens contraire du mouvement du mobile ; une telle force n' empêchera pas la trajectoire d'un corps pesant d'être une courbe plane, comprise dans le plan vertical qui contient la direction de la vîtesse initiale; nous prendrons donc les axes des Xetdesy comme précédemment ; de plus, nous désignerons par S l' arc Om / Fig 56 / de la trajectoire, compris entre l'origine des coordonnées. ou le point de départ du projectile, et le point M qui répond aux coordonnées Xety : les rapports (..) seront les cosinus des angles que la droite Mt, tangente au point M, à la trajectoire, fait avec les axes des Xetdesy; en désignant donc par R, la résistance du milieu, et observant que cette force agit suivant le prolongement (...) de la droite Mt, nous aurons (...) , pour ses composantes horizontale et verticale ; et il est aisé de voir que soit dans la branche ascendante de la trajectoire, soit dans la branche descendante, ces valeurs sont positives ou négatives, selon que la force R tend à augmenter ou à diminuer les Xetlesy ; en ayant donc égard en outre à la pesanteur, que je désignerai par G, les deux équations du mouvement seront / N 2 i 9 / (..) .

p353

lii mouvement elliptique des planètes. 238 dans le problème que nous venons de résoudre, les forces appliquées au mobile nous étaient données, et il s' agissait de déterminer toutes les circonstances de son mouvement ; nous allons, dans celui-ci, suivre une marche inverse : nous supposerons connues les lois du mouvement, et nous nous proposerons de déterminer en conséquence la force qui le produit. Les lois du mouvement des planètes autour du soleil, sont généralement connues sous le nom de lois de Képler , parce qu' elles ont été découvertes par cet astronome, qui les a déduites de l' observation. Elles sont

au nombre de trois, dont voici les énoncés. I les planètes se meuvent dans des courbes planes, et leurs rayons vecteurs décrivent, autour du centre du soleil, des aires proportionnelles au tems. 2 les orbites / c' est-à-dire les trajectoires / des planètes sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un foyer. 3 les carrés des tems des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites. ces lois se rapportent au mouvement du centre de gravité de chaque planète; c' est donc le mouvement de ce point que nous allons considérer; et quand il sera question de la position ou de la vîtesse d' une planète, il faudra entendre la position ou la vîtesse de son centre de gravité.

p354

239 la première loi nous montre d'abord que la force accélératrice qui agit sur chaque planète, et qui est appliquée à son centre de gravité, est constamment dirigée suivant la droite aui joint ce centre et celui du soleil / N 228 /. La direction de la force étant ainsi connue, voyons comment la seconde loi, combinée avec la première, nous fera connaître son intensité dans les différentes positions de la planète. Soit Adbe / Fig 58 / l' ellipse décrite par la planète, Ab son grand axe, C son centre. O l' un de ses deux foyers que nous prendrons pour le centre du soleil ; soit aussi M la position de la planète à un instant quelconque, R son rayon vecteur Om, et V l' angle Mox , compris entre ce rayon et une ligne fixe Ox, menée arbitrairement dans le plan de l' orbite : Retv seront les coordonnées polaires d'un point quelconque de l'ellipse, et son équation entre ces coordonnées aura cette forme : (..) ; A étant le demi-grand axe Ca, Ae la distance Co du centre à l' un des foyers, (...) le demi-petit axe Cd, W l' angle Aox compris entre le grand axe et la ligne fixe d'où l'on compte l'angle V. Cette équation de l'ellipse se trouve dans la plupart des traités d'application de l'algèbre à la géométrie, et d' ailleurs elle est facile à déduire de l'équation de la même courbe, en coordonnées ordinaires. En astronomie, A s'appelle la distance moyenne de

p355

la planète; (..) sont la plus grande et la plus petite distance; E se nomme l'excentricité de l'orbite. L'angle variable V est la longitude de la planète, comptée dans le plan de l' orbite; l'angle constant W est la longitude du périhélie, ou du point de l'orbite le plus près du soleil : on appelle, au contraire, aphélie, le point de l'orbite le plus éloigné du soleil. Enfin, l'angle (..), qui exprime la distance angulaire de la planète au périhélie de son orbite, se nomme l'anomalie vraie de cette planète. L'aire décrite pendant l'instant Dt, par le rayon R, est égale à (..) / N 227 /; on a donc aussi, en vertu de la première loi, (..); C étant une quantité constante qui exprime le double de l'aire décrite dans l'unité de tems.

p368

248 pour représenter le mouvement de la planète, les astronomes imaginent un astre fictif, qui se meut circulairement autour du soleil, dans le plan de l' orbite ; qui part du périhélie au même instant que la planète, et dont la distance angulaire à ce point est toujours égale au premier terme Nt de la valeur de V. Le rayon vecteur de cet astre se meut uniformément, et fait à chaque instant, avec celui de

p369

la planète, un angle égal à (..) . Cet angle variable s' appelle *l'* équation du centre . Lorsque l' angle V est égal à deux ou à quatre angles droits, les deux angles Vetnt sont égaux ; par conséquent l' astre fictif passe à l' aphélie et revient au périhélie, en même tems que la planète ; mais dans la première moitié de la révolution, la planète précède l' astre, et dans la seconde, l' astre précède la planète. Si l' on nomme T le tems d' une révolution entière, qui est achevée quand l' angle Nt est devenu égal à quatre angles droits, on aura (..) désignant la demi -circonférence pour le rayon un. En remettant pour le coefficient N, ce qu' il représente, cette équation donne (..) ; résultat qui s' accorde avec celui du N 24 i.

p370

Du mouvement d'un point matériel sur une courbe donnée. *Ier théorie générale de ce mouvement*. 249 lorsqu' un point matériel est astreint à se mouvoir sur une courbe donnée, à double ou à simple courbure, la résistance que cette courbe oppose à son mouvement, équivaut à une force qui agirait continuellement sur le mobile dans une direction perpendiculaire à la trajectoire, de manière qu' en ajoutant aux forces données dans chaque cas particulier, une nouvelle force accélératrice, pour représenter cette résistance, on peut ensuite faire abstraction de la courbe, et considérer le mobile comme un point matériel libre. En effet, si l' on décompose chacune des forces accélératrices données, qui agissent sur le mobile, en deux autres, l' une dirigée suivant la tangente à la trajectoire, l' autre perpendiculaire à cette droite, les forces tangentes auront

seules leur effet, et les forces normales seront détruites par la résistance de la courbe. La résultante de ces dernières forces, que j' appellerai P, exprimera la pression que les forces données exercent sur la courbe, en chacun de ses points ; et la résistance qui détruit cette pression, sera une

p371

force accélératrice égale et contraire à la force P. Cette pression P serait la seule que la courbe supporterait, si le mobile était en repos : mais son état de mouvement fait naître une autre pression, provenant de la tendance continuelle du mobile à s' échapper suivant la tangente à sa trajectoire. Pour le faire voir, partageons la courbe donnée en une infinité d' élémens infiniment petits, que nous regarderons comme des lignes droites, et considérons le mobile dans son passage d'un élément à l' autre. Soient (...) / Fig 59 /, ces deux élémens consécutifs ; (...) leurs prolongemens, ou les tangentes aux points (...) . L' angle (..) s' appelle l' angle de contingence de la courbe au point M. Il est touiours infiniment petit dans les courbes continues : nous supposerons que la courbe donnée est de cette espèce, et nous désignerons l'angle (..) par W. Le plan des deux élémens consécutifs (..), ou des deux tangentes (..), se nomme le plan osculateur de la courbe au point M. Quand la courbe est à double courbure, ce plan varie d'un point à un autre : quand elle est plane, le plan osculateur n' est plus autre chose que le plan même de la courbe. Après avoir rappelé ces définitions, représentons par V la vîtesse du mobile, quand il arrive au point M; la direction de cette vîtesse sera la ligne Mt; et si on la décompose dans le plan osculateur en deux autres, l' une suivant le côté (..) de la courbe, l' autre perpendiculaire à (..), et dirigée suivant Mp, on aura (..), pour ses deux composantes.

p372

La seconde est détruite par la résistance de la courbe ; or, la quantité (..) étant infiniment petite, à cause du facteur (..) , nous pouvons concevoir une force, du genre des forces accélératrices, qui agisse continuellement sur le mobile et qui lui imprime, en chaque point de sa trajectoire, une vîtesse de même grandeur et de même direction que cette seconde composante : en désignant cette force par Q, la résistance de la courbe qui détruit cette vîtesse (..) , équivaudra à une force accélératrice égale et contraire à la force Q. Quant à l' autre composante (..) , elle exprime la vîtesse avec laquelle le mobile commence à se mouvoir sur le côté (..) ; la vîtesse, en passant d' un élément au suivant, se trouve donc diminuée de la quantité (..) , qui est la même chose que (..) ; or, on peut attribuer cette diminution de vîtesse à une seconde force accélératrice, agissant suivant la

tangente à la trajectoire, et en sens contraire du mouvement ; d' où il semble d' abord qu' on devrait joindre cette force tangente à la force normale, pour remplacer complètement la résistance de la courbe donnée. Mais en appelant (..) , la force tangente, et en la comparant à la force normale Q, elles seront entre elles comme les vîtesses (..) qui leur correspondent ; et comme le rapport de la première à la seconde est égal à (..) , et par conséquent infiniment petit, il s' ensuit que la force (..) est aussi

p373

infiniment petite, et doit être négligée relativement à la force Q. Ainsi, dans le calcul on n' aura égard qu' à la force Q, et l' on ne tiendra aucun compte de la force (..). Concluons donc que la pression totale qu' un corps en mouvement exerce sur la courbe qu' il est forcé de décrire, est la résultante de deux forces normales Qetp, dont la première est due à la vîtesse du mobile, et la seconde aux forces accélératrices qui lui sont appliquées. La résistance de la courbe est une force accélératrice, égale et contraire à cette résultante.

p385

li examen de la force centrifuge dans le cercle. 259 Huyghens et les premiers géomètres qui ont

p386

donné la mesure de la force centrifuge, l' ont déduite de la considération du mouvement circulaire ; comme cette manière d' y parvenir a surtout l'avantage de donner une idée précise de cette force, nous allons la présenter ici en peu de mots. Représentons-nous donc un point matériel M / Fig 6 o / attaché à un point fixe C, par un fil inextensible Cm : supposons qu' on lui imprime une vîtesse quelconque, dans une direction perpendiculaire à la longueur du fil; et, pour simplifier, supposons aussi qu' aucune force accélératrice n' agisse sur le mobile. Ce point matériel va décrire un cercle Amb, dont le centre et le rayon seront le point fixe et la longueur du fil. Pendant le mouvement, le fil qui retient le mobile, éprouvera, dans le sens de sa longueur, une certaine tension qui n' est autre chose que la force centrifuge. En appliquant au mobile une force égale à cette tension, et constamment dirigée vers le centre fixe, on pourra ensuite faire abstraction du fil, et considérer le mobile comme absolument libre. C' est donc en vertu de cette force centrale inconnue, combinée avec l'impulsion

primitive, que le cercle est décrit. Il s' ensuit d' abord, par le principe des aires / N 228 /, que les secteurs circulaires, décrits par le rayon, seront égaux en tems égaux ; ce qui exige que les arcs de cercles parcourus par le mobile, soient aussi égaux en tems égaux. Le mouvement circulaire sera donc uniforme, et si l' on appelle V la vîtesse imprimée au mobile, on aura (..) ; S étant l' arc parcouru dans le tems T.

p387

Soit F l'intensité de la force centrale : quelle que soit cette force, on peut la regarder comme constante en grandeur et en direction, pendant un intervalle de tems infiniment petit ; ainsi pendant que le mobile parcourt un arc de cercle infiniment petit, tel que (..), la force F est censée parallèle au rayon Cm qui aboutit à l'origine de cet arc ; d'où nous concluons que si la force centrale agissait seule sur le mobile, dans cet intervalle de temps, elle lui ferait parcourir une droite égale à la projection de l' arc (...) sur ce rayon, c' est-à-dire, égale au sinus verse Mn de cet arc / N 2 i 6 /. Or. toute force accélératrice constante a pour mesure la vîtesse qu' elle imprime au mobile dans l'unité de tems, laquelle vîtesse est égale au double de l'espace qu'elle lui fait parcourir, dans un tems quelconque, divisé par le carré de ce tems ; la force F est donc égale au double du sinus verse Mn divisé par le carré du tems infiniment petit, employé à décrire l' arc (..); mais le sinus verse d'un arc infiniment petit est égal au carré de cet arc, divisé par le diamètre, parce qu' on peut alors prendre l' arc à la place de la corde ; donc la force centrale sera égale au carré du rapport de l' arc (...) au tems employé à le décrire, divisé par le rayon Cm; et comme ce rapport est la vîtesse V, il s' ensuit qu' en appelant R le rayon, on aura (..). Cette valeur de F est aussi celle de la force centrifuge, puisque cette force est égale et contraire à la

p388

force centrale. Si la force centrifuge, dans le cercle, est égale au carré de la vîtesse, divisé par le rayon, on en conclut immédiatement, que dans une courbe quelconque elle aura pour mesure le carré de la vîtesse, divisé par le rayon du cercle osculateur; car on peut toujours supposer que la trajectoire se confond en chaque point dans une étendue infiniment petite, avec son cercle osculateur en ce point; de sorte qu' à chaque instant, et pendant un intervalle de tems infiniment petit, le mobile peut être censé se mouvoir circulairement autour du centre de courbure, et avoir, par conséquent, la force centrifuge qui convient à ce mouvement circulaire. 26 o pour comparer la force centrifuge dans le cercle, à la pesanteur, supposons que la

vîtesse imprimée au mobile, soit la vîtesse due à la hauteur H; de sorte qu' on ait (..); G étant la gravité / Ni 89 /. Substituant cette valeur dans celle de F, on en conclura (..); la force centrifuge est donc à la pesanteur, comme le double de la hauteur qui correspond à la vîtesse du mobile, est au rayon du cercle qu' il décrit. Si l' on a, dans un cas particulier, (..), la force centrifuge sera égale à la pesanteur, et le fil attaché au point fixe sera tendu par la force centrifuge qui agit sur tous les points du mobile, comme il le serait par le poids même de ce corps. Cela suppose, cependant, que le mobile est regardé comme un

p389

point matériel, ou mieux, comme un corps dont les dimensions sont très-petites et peuvent être négligées, par rapport à sa distance au point fixe; car, sans cette condition, la force centrifuge ne serait pas la même et égale à la pesanteur, dans toute l'étendue du mobile. Dans cette hypothèse, la valeur de (..) exprimera en général le rapport de la tension que le fil éprouve, au poids du corps qui tourne à son extrémité. 26 i si l'on désigne par T le tems que le mobile emploie à parcourir la circonférence entière du cercle, et par (..) le rapport de la circonférence au diamètre, on aura (..) ; substituant cette valeur dans celle de F . il vient (..) : la force centrifuge est donc en raison directe du rayon et inverse du carré du tems employé à parcourir la circonférence. 262 lorsqu' un corps solide tourne autour d' un axe fixe, tous ses points décrivent, dans le même tems, des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe, qui ont leurs centres dans cet axe, et pour rayons, les perpendiculaires abaissées de chaque point sur ce même axe ; par conséquent les forces centrifuges de ces différens points sont entre elles

p390

comme ces perpendiculaires. Ainsi, par exemple, la force centrifuge des corps placés à la surface de la terre, et qui tournent avec elle autour de son axe de rotation, est proportionnelle aux rayons des *parallèles* qu' ils décrivent ; et de plus cette force est dirigée, en chaque lieu de la terre, suivant le prolongement du rayon du parallèle qui aboutit en ce lieu. La force qui précipite les corps vers la terre, et que nous appelons *pesanteur*, est due principalement à l' attraction du sphéroïde terrestre sur ces corps ; mais quelle qu' en soit la cause, il est toujours certain que la force centrifuge diminue cette tendance des corps pesans ; de manière qu' excepté aux pôles où la force centrifuge est nulle, la pesanteur est partout moindre que si la terre n' avait pas de mouvement de rotation. à l' équateur, la force centrifuge et la pesanteur sont dirigées

suivant la verticale, en sens contraire l' une de l' autre ; la pesanteur y est donc égale à l' excès de l' attraction de la terre sur la force centrifuge ; par conséquent on a, d' après le N précédent, (..) ; G étant la pesanteur, G l' attraction terrestre, ou la pesanteur qui aurait lieu si la terre était immobile, R le rayon de l' équateur, et T le tems de la rotation de la terre. 263 pour convertir en nombre, la valeur de la force centrifuge, il faut connaître les valeurs de (..) . Or, on a (..) ; le rayon de l' équateur

p391

est de 6376466 mètres ; la rotation de la terre s' achève dans un intervalle de tems, un peu plus petit qu' un jour, et dont la longueur exacte est de (..); pour l'exprimer en secondes, il faut la multiplier par 864 oo qui est le nombre de secondes, compris dans un jour ; ce qui donne (...) secondes. Si l' on substitue ces nombres à la place de (..), dans l'expression de la force centrifuge, on trouve, pour résultat, O, O 339. Ce nombre abstrait exprime le rapport de la force centrifuge à l'équateur. à une certaine force prise pour unité. On doit se rappeler, à cette occasion, que l'expression des forces accélératrices suppose que l'on prend pour unité, la force accélératrice constante qui produirait, dans l'unité de tems, une vîtesse égale à l'unité linéaire / Ni 98 / ; le nombre O, O 339 exprime donc le rapport de la force centrifuge que nous considérons, à la force accélératrice constante qui produirait, dans une seconde de tems, une vîtesse égale à un mètre. Comparée à la même force, l'intensité de la pesanteur à l'équateur est exprimée par le nombre 9, 78 ; car, l' observation a appris qu' en cet endroit de la terre, les corps graves acquièrent une vîtesse de 9, 78 mètres, pendant la première seconde de leur chute dans le vide ; et nous savons que les forces accélératrices constantes sont entre elles comme les vîtesses qu' elles produisent en tems égaux. Ainsi, les nombres O, O 339 et 9, 7 8 sont les rapports de la force centrifuge et de la pesanteur, à la même force ; donc, en divisant l' un par l' autre, on aura le rapport de ces deux forces entre elles. On trouve de

p392

cette manière, que la pesanteur est égale à environ 288 fois la force centrifuge ; d' où il suit que celle-ci n' est qu' environ la 289 me partie de la gravité qui aurait lieu sans le mouvement de la terre ; c' est-à-dire, que l' on a (..) . Si le mouvement de rotation de la terre devenait plus rapide, le tems T diminuerait, et la force centrifuge différerait moins de la gravité G. En observant que 289 est le carré de l 7, on voit qu' il suffirait que le mouvement de la terre, autour de son axe,

devînt I 7 fois aussi rapide qu' il l' est réellement, pour que la force centrifuge et la force G fussent égales. Alors la pesanteur serait nulle à l' équateur, et les corps, abandonnés à eux-mêmes, s' y tiendraient en équilibre. 264 la force centrifuge diminue la pesanteur dans tous les points de la surface de la terre, mais d' une quantité plus petite qu' à l' équateur, pour deux raisons : parce que cette force décroît en allant de l' équateur aux pôles, et parce que l' angle qu' elle fait avec la verticale augmente. Si la variation de la pesanteur était uniquement l' effet de la force centrifuge, il serait trèsfacile d' en déterminer la loi ; et, dans ce cas, l' excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l' équateur, serait égal, d' après le calcul qu' on vient de faire, à environ un 289 me de la pesanteur moyenne. Mais la terre étant un sphéroïde aplati vers les pôles, son attraction sur les corps

p393

placés à sa surface, est aussi une force variable, dont l' intensité décroît en allant du pôle à l'équateur : la variation de pesanteur que l'on observe, est due à la fois à ce décroissement et à la force centrifuge ; et c'est pour cela que la diminution totale, du pôle à l'équateur, surpasse (...) et s' élève à environ (..) de la pesanteur moyenne / Ni 94 /. Iii oscillations du pendule simple. 265 en général, un pendule est un appareil composé d'un corps solide, suspendu à l' extrémité d' un fil qu' on regarde comme inextensible et inflexible : ce fil est attaché fixement par son autre extrémité à un axe horizontal, assujéti de manière qu' il puisse tourner librement, et que tout autre mouvement soit impossible. Quand la verticale menée par le centre de gravité du corps entier, le fil compris, rencontre l' axe de rotation, le pendule est en équilibre ; si on l'écarte de cette position, et qu' on l' abandonne ensuite à l'action de la pesanteur, il fait, de part et d'autre de la verticale, une suite indéfinie d'oscillations, dont les durées sont égales et servent à la mesure du tems. Mais pour comparer plus facilement entre elles les durées des oscillations de différens pendules. les géomètres ont imaginé un pendule idéal, qu' on appelle le pendule simple : il consiste en un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité d'un fil dénué de pesanteur, inflexible, inextensible, et attaché par son autre extrémité à un point fixe. Ce sont les oscillations de ce point matériel

p394

que nous allons considérer : dans la suite, nous ferons voir comment on détermine, pour chaque pendule composé, la longueur du pendule simple, qui fait ses oscillations dans le même tems que

le premier. 266 avant d'entrer en matière, il convient d' exposer plusieurs propriétés générales du mouvement d'un point matériel pesant, sur une courbe de forme quelconque. Lorsqu' un corps pesant se meut sur une courbe donnée (..) / Fig 6 i /, sa vîtesse V. en un point quelconque M de sa trajectoire, est déterminée par cette équation / N 254 / : (..), dans laquelle A représente la vîtesse du mobile au point de départ que je suppose être le point C ; G désigne la pesanteur, et Z l' ordonnée verticale du point M. comptée à partir du point C. et dirigée dans le sens de la pesanteur. Si l' on suppose la courbe composée de deux branches (..), qui se joignent au point B, et dont la tangente commune en ce point, est une droite horizontale : l' ordonnée Z et la vîtesse V augmenteront pendant que le mobile parcourra la branche descendante Bc : ces deux quantités atteindront leur maximum au point le plus bas : parvenu en ce point, le mobile continuera de se mouvoir au-delà, sur la branche ascendante (..), en vertu de sa vîtesse acquise; mais pendant qu' il s' élevera sur cette ligne, l' ordonnée Z et la vîtesse V diminueront, et cette diminution

p395

progressive se fera de manière que si l' on mène un plan horizontal quelconque, qui coupe les deux branches de la courbe en (..) , la vîtesse du mobile sera la même aux deux points d' intersection. Il est évident que le mobile doit continuer de s' élever jusqu' à ce que sa vîtesse soit devenue égale à zéro ; en supposant donc que la vîtesse initiale A soit nulle, le mobile remontera jusqu' à ce qu' il se trouve dans le plan horizontal, mené par son point de départ C, et qui coupe la branche ascendante au point (..) ; arrivé en ce point, il commencera à redescendre sur la branche (..), puis il s' élevera sur la branche Bc, jusqu' à ce qu' il soit revenu à son premier point de départ , avec une vîtesse nulle. Le mobile fera ainsi une suite indéfinie d' oscillations semblables sur la courbe donnée. Comme chacun des élémens de cette courbe est décrit avec la même vîtesse, soit que le mobile monte, soit qu'il descende, il s' ensuit que le tems de l'ascension, par l'une des deux branches. sera égal au tems de la chute, par la même branche ; le mobile emploiera donc le même tems à revenir du point (..) au point C, qu' à aller du point C au point (..) ; par conséquent le tems de la seconde oscillation sera le même que celui de la première, et toutes les oscillations se feront dans des tems égaux. Quand la vîtesse initiale A ne sera pas nulle, le corps, en montant sur la seconde branche de la trajectoire, s' élevera au-dessus du plan horizontal, mené par son point de départ. Alors, si la trajectoire

est une courbe fermée, il pourra arriver deux cas : ou la vîtesse du mobile sera nulle, avant qu'il ait atteint le point (..) où la tangente redevient horizontale, et que j'appellerai le sommet de la courbe donnée ; ou bien il atteindra ce point sans avoir encore perdu toute sa vîtesse. Dans le premier cas, le mobile redescendra sur la branche (..), remontera sur la branche Bc, et oscillera, comme précédemment, de part et d'autre du point le plus bas B. Les oscillations seront isochrones à partir de la seconde, et seulement, la durée de la première sera plus courte que celle des autres. Dans le second cas, le mobile continuera son mouvement au-delà du sommet (..) ; il redescendra par la branche (..), et au lieu d'osciller, il parcourra un nombre indéfini de fois et dans des intervalles de tems égaux, la circonférence entière de la courbe donnée. Ces propriétés du mouvement d'un corps pesant, sur une courbe donnée, sont indépendantes de la nature de cette courbe, qui peut être plane ou à double courbure : elles supposent seulement que la trajectoire est une courbe continue ; car, si l'angle de deux tangentes consécutives, en un ou plusieurs endroits de la courbe, était un angle fini, il y aurait une perte de vîtesse sur chacun de ces points, et le mouvement du corps finirait, à la longue, par s' arrêter, ou du moins par devenir insensible. 267 le tems que le mobile emploie à faire une

p397

oscillation entière, ou à décrire la circonférence entière de la trajectoire, dépend de la nature de cette courbe. Pour le déterminer, désignons par S l' arc Cm compris entre le point de départ du mobile et un point quelconque de cette courbe ; soit aussi T le tems employé à décrire cet arc ; en mettant (..), à la place de V, dans l'équation du N précédent, et résolvant ensuite cette équation, par rapport à Dt, il vient (..) . Lorsque l'équation de la trajectoire sera donnée, on en tirera Z en fonction de S, ou S en fonction de Z; substituant donc l' une ou l'autre de ces valeurs dans celle de Dt, il ne restera plus qu' à intégrer cette formule pour avoir le tems correspondant à une valeur quelconque de Soudez. Il sera ensuite aisé d' en conclure le tems de l' oscillation entière, dans le cas du mouvement oscillatoire ; ou bien, dans l' autre cas, le tems employé à décrire la circonférence de la courbe donnée. 268 on peut observer que la valeur de T, en fonction de l' arc S, ne dépendra, dans chaque cas particulier, que de la vîtesse initiale et de la relation qui sera donnée entre les ordonnées verticales et les arcs de la trajectoire, ces ordonnées et ces arcs étant comptés du point de départ du mobile : cette vîtesse et cette relation restant les mêmes, et la trajectoire venant à changer, I' équation entre Sett ne changera

pas, non plus que la loi du mouvement que cette équation exprime. Supposons donc que la courbe donnée soit à double courbure ; de tous ses points abaissons des perpendiculaires sur un plan horizontal, choisi arbitrairement, ce qui formera un cylindre vertical ; imaginons ensuite que l' on développe ce cylindre sur un plan vertical, de manière que chaque point de la courbe donnée conserve la même hauteur au-dessus du plan horizontal : cette courbe se trouvera transformée en une courbe plane, dans laquelle la relation des arcs et des ordonnées verticales, comptés d'un point quelconque, sera la même que dans la courbe à double courbure ; la loi du mouvement sera donc aussi la même sur les deux courbes, pourvu que la vîtesse soit la même sur l' une et sur l'autre, au point de départ du mobile. Réciproquement, le mouvement conservera toutes ses propriétés, si l'on replie la trajectoire plane sur un cylindre vertical quelconque, sans changer les hauteurs des points de cette courbe, au-dessus d'un plan horizontal.

p403

272 la valeur de T nous montre que la durée des petites oscillations d' un pendule est indépendante de leur amplitude ; elle ne dépend que de la longueur du fil et de l' intensité de la pesanteur. De ces trois quantités A, Gett, deux étant données par l' observation, on en conclura immédiatement la troisième : par exemple, si l' on donne Aett, on aura (..) . C' est au moyen de cette formule que l' on détermine, en chaque lieu de la terre, l' intensité de la pesanteur, d' après l' observation du pendule. Pour cela, on fait osciller un pendule composé, de forme connue, pendant un tems donné ; on compte le nombre d' oscillations isochrones qu' il fait dans cet

p404

intervalle de tems; et, en divisant le tems donné, par ce nombre, on a la durée de chaque oscillation; par la règle que nous enseignerons dans la suite, on calcule la longueur du pendule simple, qui ferait ses oscillations dans le même tems que le pendule composé; de cette manière, on a les valeurs de A et de T, et l' on en conclut celle de G, en les substituant dans l' équation précédente. En faisant osciller des corps de différentes masses et de différentes matières, et en déterminant pour chacun d' eux, par le moyen que nous indiquons, l' intensité de la pesanteur, on a reconnu que cette force accélératrice est la même pour tous ces corps, dans un même lieu de la terre. On a trouvé, à l' observatoire de Paris, Om, 99384 pour la longueur du pendule simple qui fait ses petites oscillations dans une seconde de tems; en prenant donc la seconde pour unité de tems, on aura

, et (..); d' ailleurs on a (..); d' où l' on conclut (..).
Cette valeur de G est la vîtesse que la pesanteur imprime aux corps, à notre latitude, pendant la première seconde de leur chute dans le vide; elle exprime aussi le double de l' espace que ces corps parcourent dans le même tems / Ni 87 /. L' observation a appris que la longueur du pendule à secondes varie à la surface de la terre, et qu' elle diminue à mesure qu' on se rapproche de l' équateur; or, le tems de l' oscillation restant le même, la formule précédente montre que la pesanteur est proportionnelle à cette longueur: on doit donc en conclure

p405

que l'intensité de cette force est également variable ; et, vu l'extrême précision dont les observations du pendule sont susceptibles, elles offrent le moyen le plus propre à déterminer la loi de cette variation. C' est en effet par ce moyen qu' on a trouvé l'expression de la pesanteur à une latitude quelconque, que nous avons donnée dans le Ni 94. 273 la résistance de l' air n' a aucune influence sensible sur la durée des petites oscillations du pendule : elle augmente le tems de la demioscillation descendante ; mais elle diminue, d' une quantité égale, celui de la demi-oscillation ascendante ; et le tems de l' oscillation entière reste le même que dans le vide. Pour le prouver, considérons le mouvement du pendule dans un milieu résistant, et conservons toutes les dénominations du N 269. Menons par le point M, une tangente Mt au cercle décrit, ou une perpendiculaire au rayon Om. et une verticale Mk : l' angle Kmt sera complément de l' angle Mob ou (..) ; par conséquent la pesanteur, décomposée suivant Mt, sera exprimée par (..) . La résistance du milieu s' exerce suivant cette même tangente, en sens contraire du mouvement ; si donc on la suppose proportionnelle au carré de la vîtesse, comme dans la théorie des projectiles, et si on la représente par (..), M étant un coefficient donné, la force accélératrice totale qui agit sur le mobile, sera égale à (..), pendant toute la durée de l' oscillation

p406

entière. Mais, en général, la force accélératrice décomposée suivant la tangente à la trajectoire, est exprimée par (..) / N 2 5 i /; nous aurons donc, pour l' équation du mouvement, (..); ou bien, en mettant à la place de S, sa valeur (..), (..). Cette équation a une intégrale première sous forme finie, que l' on obtient de cette manière. Je multiplie par (..), et j' intègre ensuite tous les termes, ce qui donne (..); je fais, pour un moment, (..); j' ai alors (..); et l' équation précédente devient. En intégrant cette équation linéaire et du premier ordre, par

la méthode connue, on trouve (..); C étant la constante arbitraire, et E la base des logarithmes dont le module est l' unité. Je différentie, je

p407

divise par (..), et je remets (..) à la place de (..); il vient (..). Si l' on résout cette intégrale première de l' équation (..), par rapport à Dt, on en tirera une valeur de cette forme : (..); la question sera donc ramenée à intégrer la formule (..); mais cette intégration est impossible sous forme finie, par les moyens connus; et il sera plus facile d' intégrer par approximation, l' équation (..) elle-même.

p416

279 si l' on écartait le pendule infiiment peu de la verticale, il emploierait, pour y revenir, un tems

p417

fini et égal à (..) . Dans ce mouvement, le mobile décrit un espace infiniment petit dans un tems fini ; ce qui vient de ce que l' intensité de la force accélératrice qui le sollicite, est infiniment petite. En effet, cette force est la pesanteur décomposée suivant la tangente à la trajectoire ; or, dans l' étendue de l' arc infiniment petit qui aboutit au point le plus bas de cette courbe, la tangente fait, avec la verticale, un angle qui diffère d' un droit, d' une quantité infiniment petite ; le cosinus de cet angle, par lequel il faut multiplier la pesanteur pour avoir sa composante, est donc infiniment petit; donc l'intensité de cette composante est aussi infiniment petite . Généralement, lorsqu' un point matériel pesant est astreint à rester sur une courbe donnée, de forme quelconque, il peut demeurer en équilibre dans tous les points de cette courbe où la tangente est horizontale : si on le place infiniment près de l' un de ces points, sa pesanteur se décomposera en deux forces, l' une perpendiculaire à la courbe, et qui sera détruite, l'autre dirigée suivant la tangente : cette seconde force sera infiniment petite, et il est aisé de voir, d'après le sens de sa direction, qu' elle tendra à ramener le corps vers la position d'équilibre, ou à l'en écarter, selon qu'on l'aura élevé ou abaissé, par rapport à cette position. Dans le premier cas, l'équilibre sera stable ; le mobile oscillera indéfiniment de part et d' autre du point le plus bas de sa trajectoire : l' amplitude de ses oscillations sera infiniment petite ; et pour déterminer leur

durée, j' observe que dans l' étendue de l' arc que chaque oscillation comprend, la trajectoire peut être censée se confondre avec le cercle osculateur au point le plus bas ; d' où je conclus que le tems de chaque oscillation entière devra être égal à (..), A étant le rayon de ce cercle. Iv mouvement d'un point matériel pesant, sur la cycloïde. 28 o nous avons fait connaître précédemment les propriétés générales du mouvement d'un corps pesant sur une courbe donnée ; il s'agit maintenant de considérer, en particulier, le cas où la trajectoire est une cycloïde. Le mouvement, sur cette courbe, présente des propriétés singulières, qui ont beaucoup occupé les géomètres du siècle dernier, et qui méritent d'être connues. Considérons une cycloïde Acb / Fig 62 /, dont l' axe Ab est horizontal, et qui est placée au-dessous de cet axe ; le point C est le point le plus bas de cette courbe ; la perpendiculaire Cd, abaissée de ce point sur l'axe Ab, est le diamètre du cercle générateur ; la longueur de la demi-cycloïde Ac, ou Cb est égale au double de ce diamètre ; et généralement, si l' on représente par A cette longueur, par X l'abscisse Cp d'un point quelconque M, comptée sur l'axe Cd, à partir du point C, et par S l'arc Cm, on aura, d'après les propriétés connues de la cycloïde (..).

p419

Un point matériel assujéti à rester sur cette courbe, ne pourra demeurer en équilibre qu' au point C : si on le place en un point quelconque K, il descendra vers le point C; puis il remontera sur l'autre branche de la courbe, et il oscillera indéfiniment de part et d'autre du point C. Les deux branches de la courbe étant symétriques, les durées des deux demioscillations seront égales, et celle de l'oscillation entière sera double du tems que le mobile emploie à tomber du point K au point C. Pour déterminer ce tems, reprenons la valeur de Dt, donnée dans le N 267; en y faisant, pour simplifier, (..), et observant que l' arc S, compté du point C, diminue quand T augmente, nous aurons (..) . La variable Z est ici l' ordonnée verticale du mobile, comptée de son point de départ ; on aura donc (...), H étant la hauteur Ch, du point K au-dessus du point C; d'ailleurs l'équation (..) donne (..); par conséquent, (..). En intégrant, il vient (..) : je n' ajoute pas de constante arbitraire, parce que

p420

je compte le tems T à partir du départ du mobile, ce qui exige qu' on ait à-la-fois (..) . Soit maintenant T le tems qui s' est

écoulé quand le mobile est parvenu au point C : en ce point, on a (..); donc (..). On voit que le tems de la chute du mobile, par l' arc de la cycloïde, est indépendant de la hauteur H, dont le corps est tombé ; de manière que deux corps qui se meuvent sur une même cycloïde, et qui partent de deux points différens (..). parviendront dans le même tems au point le plus bas. 28 i en combinant cette propriété de la cycloïde, avec une autre propriété connue de la même courbe, on pourrait former un pendule dont les oscillations seraient rigoureusement d'égale durée. quelle que fût leur amplitude. En effet on sait que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde, égale et placée dans une position inverse; de sorte que si l' on prolonge Cd d' une quantité Do égale à Cd, et qu' on trace deux demi-cycloïdes Oaetob, tangentes aux droites Odetab, et égales aux demicycloïdes Acetbc, la courbe Oa sera la développée de Ac, et la courbe Ob sera celle de Bc. Concevons donc que les courbes Oaetob sont formées par des verges flexibles, auxquelles on a donné cette figure ; supposons qu' on attache au point fixe O, un fil

p421

Oc, égal en longueur à Oaouàob, et qu' on suspende un corps pesant à son extrémité C; si l'on écarte ce pendule, de la position verticale, et qu' on l' abandonne ensuite à l' action de la pesanteur, il oscillera de part et d'autre de cette position, et il est évident que, pendant ces oscillations, le fil Oc s' enveloppera alternativement sur la courbe Oa et sur la courbe Ob ; son extrémité décrira donc la courbe Acb, qui est leur développante ; par conséquent on peut être certain que le mobile attaché à cette extrémité, décrira des arcs de cycloïde, de part et d'autre du point le plus bas ; donc, d'après le résultat précédent, les oscillations de ce pendule s'achèveront toujours dans le même tems, quel que soit l'écartement primitif. Si le mobile avait à l'origine du mouvement, une vîtesse quelconque dirigée dans le plan de la courbe Acb, le tems de l'oscillation n' en serait pas changé, puisque cela reviendrait évidemment à supposer que le mobile part d'un point plus élevé de cette courbe, avec une vîtesse nulle. 282 le tems de la chute par l' arc Ck, étant indépendant de la longueur de cet arc, il ne doit pas changer, si l' on prend le point K infiniment près du point C ; mais alors ce tems est le même que si le mouvement avait lieu sur le cercle osculateur de la cycloïde au point C / N 279 / ; la valeur de T doit donc être égale au tems de la demioscillation infiniment petite d'un pendule qui aurait le rayon de ce cercle pour longueur; or,

c' est ce qui arrive en effet ; car la longueur de la demicycloïde Ac, que nous avons désignée par A, est égale au rayon de courbure qui répond au sommet de cette courbe, et d'après le N 27 o, le tems de la demi-oscillation d'un pendule de cette longueur, est exprimé par (..) . 283 on appelle tautochrone, toute courbe sur laquelle un corps pesant parvient toujours au point le plus bas, quel que soit le point de cette courbe d'où il est parti. Ainsi, dans le vide, la cycloïde est une courbe tautochrone : mais est-elle la seule courbe de cette espèce ? C' est ce qu' on va voir par l' analyse suivante. Nous avons, en conservant les dénominations du N 28 o, (...) . Quelle que soit la courbe tautochrone, S est une fonction de X, et l' on peut imaginer cette fonction développée suivant les puissances ascendantes de la variable : soit donc (..) : A, B, C, etc., , etc., étant des coefficiens et des exposans indéterminés. Comme l'abscisse X et l'arc S sont comptés d'un même point de la courbe, savoir, à partir du point le plus bas, on doit avoir en même tems (..) ; il est donc nécessaire que tous les exposans (...), etc. Soient positifs, et qu' aucun d' eux ne soit zéro. Si l' on prend

p423

la valeur de Ds, et qu' on la substitue dans celle de Dt, il vient (..) . Or, pour avoir le tems (..) , que le mobile emploie à descendre de la hauteur H, il faut prendre les intégrales de tous ces termes, depuis (..) jusqu' à (..) ; ou bien, si l' on fait d' abord (..) , il faudra prendre ces intégrales, depuis (..) jusqu' à (..) . D' après cela, il est aisé de voir que l' on aura (..) ; en faisant pour abréger (..) ; et en donnant pour limites à ces intégrales, (..) . Il est important de remarquer qu' aucune de ces quantités (..) , etc., ne peut être nulle ; car (..) , par exemple, est la somme des valeurs de (..) , comprises entre les limites (..) , et multipliées par (..) ; or, cette fonction de (..) ne changeant pas de signe, dans cet intervalle, il est impossible

p424

que la somme de ses valeurs soit égale à zéro. Maintenant il est évident que la valeur de (..) ne peut être indépendante de H, à moins que tous les termes de cette valeur ne soient nuls, excepté celui dans lequel l' exposant de H est zéro. Supposons donc que ce terme soit le premier, c' est-à-dire, supposons qu' on ait (..); pour que le second terme disparaisse, il faut que le produit soit nul; ce qui exige qu' on ait (..), puisque ni (..) ni (..) ne peuvent être zéro. On verra de même que les coefficiens C, D, etc., sont aussi nécessairement nuls : la valeur de S, dans la courbe tautochrone, se réduit donc à (..); d' où l' on tire (..), équation qui appartient à une cycloïde à base horizontale, dont

le sommet est au point que le mobile atteint toujours dans le même tems. Cette courbe est donc la seule tautochrone dans le vide. En désignant par A, la longueur de la demi-cycloïde, on aura (..), et la valeur de (..) deviendra (..); de plus à cause de , on a (..), puisque cette intégrale doit être prise depuis (..), jusqu' à (..): on a donc (..), comme dans le N 28 o.

p425

284 d'après la remarque générale que l'on a faite précédemment / N 268 /, si l' on replie la cycloïde Acb sur un cylindre vertical à base quelconque, elle se changera en une courbe à double courbure qui sera encore tautochrone ; de manière qu' un mobile abandonné à l'action de la pesanteur, et forcé de se mouvoir sur cette courbe, atteindra toujours le point le plus bas dans le même tems, quel que soit le point de départ, et quelle que soit aussi la projection horizontale de cette trajectoire. Réciproquement toutes les tautochrones à double courbure, qui peuvent exister, ne sont que des cycloïdes à base horizontale, enveloppées sur des cylindres verticaux : car si l' on développe le cylindre vertical sur lequel se trouve une de ces tautochrones , cette courbe deviendra plane, et les propriétés du mouvement d' un corps pesant sur l'une et l'autre trajectoire, seront les mêmes / N 268 / ; si donc la trajectoire à double courbure est une tautochrone, la trajectoire plane le sera aussi ; par conséquent cette dernière ne pourra être qu' une cycloïde à base horizontale. 285 cherchons maintenant la courbe qu' un corps pesant doit suivre, pour parvenir d'un point à un autre, dans le tems le plus court ; ce qui nous fera connaître une nouvelle propriété de la cycloïde, non moins remarquable que le tautochronisme. On nomme la courbe que nous cherchons, la brachystochrone, ou la ligne de la plus vîte descente.

p426

Soit K / Fig 63 / le point de départ, (..) le point que le mobile doit atteindre dans le tems le plus court, (..) la courbe demandée ; désignons par X, Y, Z, les coordonnées d' un point quelconque M de cette courbe ; prenons les axes des Y et des horizontaux, et l' axe des X vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur ; faisons, pour abréger, (..) , de manière que l' on ait (..) , pour l' élément de la courbe ; supposons nulle la vîtesse initiale ; soit enfin (..) , au point K, et (..) , au point : l' ordonnée verticale du point M comptée du point de départ , sera égale à (..) et Dt étant toujours l' élément du tems, et G, la pesanteur, la formule du N 267 deviendra (..) . Il s' agit donc de trouver la courbe dans laquelle l' intégrale de cette valeur de Dt, prise depuis le point K jusqu' au point (..) , est un minimum ; mais comme ce problème appartient au calcul

des *variations*, nous allons rappeler en peu de mots, les formules de ce calcul, dont nous aurons ensuite à faire l'application à la valeur de Dt.

p451

298 on voit par cette analyse que le problème du mouvement d' un corps pesant sur une sphère, dépend en définitif de l' intégration de deux fonctions d' une seule variable. Ce problème comprend le mouvement du pendule simple, dans le cas où la vîtesse initiale n' est pas dirigée dans le plan vertical, mené par le point de suspension ; alors les oscillations du pendule ne sont plus renfermées dans ce plan ; mais le point matériel, suspendu à l' extrémité

p452

du fil inextensible, est toujours assujéti à se mouvoir sur la sphère dont le centre est le point de suspension, et qui a pour rayon, la longueur du fil. On déterminera donc les lois de son mouvement, en développant les valeurs de Dtetdedw en séries convergentes, et en les intégrant ensuite. Nous nous dispenserons d'effectuer ces calculs, vû que le pendule à oscillations coniques n'est d'aucun usage dans la pratique, où l'on fait toujours ensorte que les oscillations soient renfermées dans un même plan.

p459

3 o 3 en égalant à zéro la somme des composantes qui doit être nulle, on aura l'équation (..), qui pourra servir à déterminer, en chaque point de la surface donnée, l'inclinaison du plan osculateur de la trajectoire, sur le plan tangent à cette surface ; car cette inclinaison n' est autre chose que l'angle (..), ou l'angle Bmn, compris entre les droites Mnetmb, qui sont menées dans ces plans, perpendiculairement à leur intersection commune.

p460

Lorsque le mobile n' est sollicité par aucune force accélératrice , on a (..); donc (..), et (..); donc alors, le plan osculateur de la trajectoire est toujours perpendiculaire à la surface donnée. Or, on sait que cette propriété appartient exclusivement à la ligne la plus courte que l' on puisse mener sur cette surface, d' un point donné à un autre point aussi donné; il en résulte donc

que le mobile suit le chemin le plus court pour parvenir d'un point à un autre de la surface donnée. Il en serait de même si le mobile éprouvait un frottement contre cette surface, ou s'il était soumis à l'action de toute autre force accélératrice dirigée suivant la tangente à sa trajectoire : car R étant cette force dirigée suivant Mc, ou suivant son prolongement, l'angle B, compris entre sa direction et l'axe Mb, serait droit, et le terme (..) disparaîtrait toujours dans l'équation précédente ; on aurait donc (..), comme dans le cas où le mobile n'est sollicité par aucune force. 3 o 4 cette propriété de la trajectoire d'un mobile qui n' est soumis à l' action d' aucune force accélératrice, n' est qu' un cas particulier d' une autre propriété plus générale, que l' on a d' abord envisagée sous un point de vue métaphysique, et à laquelle on a donné la dénomination impropre de *principe de la moindre action* . Pour s' en former une idée précise, que l' on se représente un corps partant d'un point donné A, et arrivant à un autre point B, aussi donné ; que sa vîtesse au point A soit donnée en

p461

grandeur et inconnue en direction, et que les forces accélératrices qui le sollicitent pendant son mouvement, soient telles, que la formule (...) soit une différentielle exacte à trois variables : on pourra alors déterminer la vîtesse V du mobile en fonction des coordonnées X, Y, Z, sans connaître la courbe que le mobile suit pour aller du point A au point B / N 3 oo / ; supposons que l' on multiplie cette vîtesse par l' élément Ds de la courbe, et que l'on prenne l'intégrale Fvds depuis le point A jusqu' au point B ; il est évident que la valeur de cette intégrale définie dépendra de la nature de cette courbe : or, le principe de la moindre action consiste en ce que le mobile, s' il se meut librement, choisira entre toutes les courbes que l'on pourrait mener par les points Aetb, la courbe pour laquelle l' intégrale Fvds est un minimum ; et s' il est astreint à se mouvoir sur une surface donnée, il choisira encore la courbe qui répond au minimum de cette intégrale, entre toutes les courbes tracées sur la surface et menées par les points Aetb. La démonstration de ce principe se réduit à prouver que la variation de l'intégrale Fvds est nulle, les deux points extrêmes de la courbe étant supposés fixes. Or, d'après les règles les plus simples du calcul des variations, on a (..). D' ailleurs Dt étant l' élément du tems, on a (..); donc (..).

p462

Si l' on différentie l' équation (..), du N 3 oo, et que l' on remplace les différentielles Dx, Dy, Dz, par les variations, on aura (..). En ayant égard aux valeurs de (..), données dans

le N 294, et en faisant attention que (..), les équations (..) du même N, donneront (..); le terme (..) n' entrerait pas dans cette équation si le mobile se mouvait librement; quand il est assujéti à se mouvoir sur une surface donnée, ce terme est nul, parce qu' alors (..); donc on doit supprimer ce terme, dans tous les cas, et il en résulte (..). Quant au second terme (..), de la variation de Vds, nous avons (..), et par conséquent (..);

p463

donc, à cause de (..), nous aurons (..). Réunissant ces deux parties de la valeur de (..), il vient (..); d' où l' on conclut , quantité nulle aux deux limites de l' intégrale, puisque les deux points extrêmes Aetb étant fixes, les variations (...) des coordonnées doivent être nulles pour ces points. La variation de Fvds est donc égale à zéro ; par conséquent, cette intégrale est un maximum ou un minimum ; mais il est aisé de voir que la quantité Fvds, par sa nature, ne saurait être susceptible d'un maximum; donc cette intégrale est un minimum, relativement à la trajectoire du mobile, déterminée par les équations du mouvement. Lorsque le mobile n' est soumis à aucune force accélératrice, nous savons que sa vîtesse est constante ; l' intégrale définie Fvds devient donc le produit Vs, et alors ôt l' arc S décrit par le mobile, du point A au point B, qui est un *minimum*, comme on l'a déjà vu dans le N précédent. Il suit aussi de l'uniformité du mouvement, qu'alors le mobile parvient d'un point à l'autre, dans un tems plus court que s' il était forcé de suivre toute autre courbe que sa trajectoire.

p464

3 o 5 la formule (...) est une différentielle exacte, toutes les fois que les forces appliquées au mobile, sont dirigées vers des centres fixes, et que leurs intensités sont fonction des distances à ces centres / N 225 / ; le principe de la moindre action a donc lieu, relativement à cette espèce de forces. En cherchant alors la courbe qui répond au minimum de l' intégrale Fvds, par les règles du calcul des variations, on obtiendra les équations de la trajectoire. Leur forme dépendra du système des coordonnées dont on fera usage, pour déterminer la position du mobile : si l' on emploie les coordonnées rectangulaires X, Y, Z, on retrouvera les équations du N 3 oi ; mais quelquefois on en obtiendra de plus simples, en faisant usage d'autres coordonnées. Pour en donner un exemple, considérons le cas d'une seule force dirigée vers un centre fixe . La trajectoire est alors une courbe plane, dont le plan est celui qui passe par le centre fixe et la direction de la vîtesse initiale du mobile. Menons, par ce centre et dans ce plan, une droite arbitraire; soit (..), l'angle compris entre cette droite

et le rayon vecteur à un instant quelconque ; désignons par R, ce rayon ou la distance du mobile au centre fixe, et par R l' intensité de la force dirigée vers ce centre. L' équation (..), du N 3 oo, donnera, dans le cas que nous examinons, (..); C étant une constante dépendante de la vîtesse initiale du mobile, et des coordonnées de son point de départ. Regardons (..) comme fonction de R, et

p465

soit (..); nous aurons (..); en faisant donc, pour abréger, (..), il s' agira de trouver la courbe qui répond au *minimum* de l' intégrale (..). Or, d' après les formules rappelées dans le N 287, l' équation différentielle de cette courbe plane, entre les coordonnées polaires (..), sera (..). Mais on a (..); cette équation se réduit donc à (..); et en intégrant, on a (..); B étant la constante arbitraire. Je remets (..) à la place de P, et en résolvant l' équation par rapport à (..), je trouve (..). Il ne restera donc plus qu' à intégrer cette valeur de

p466

lorsque la force R sera donnée en fonction de R, et l' on aura l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires (..). Dans le cas où cette force sera en raison inverse du carré de R, on trouvera, comme dans le N 243, l'équation d'une section conique, dont le centre fixe occupe un foyer. La trajectoire serait encore une section conique, mais dont le point fixe serait le centre et non pas le foyer, si l' on supposait la force R proportionnelle à R. C' est ce qu' on trouvera aisément en intégrant, dans cette hypothèse, la valeur de (..) . Ainsi, un point matériel peut décrire une section conique de deux manières différentes : quand la force qui le sollicite est dirigée vers le centre de la courbe et proportionnelle à sa distance à ce point. et lorsque cette force est dirigée vers un des deux foyers et en raison inverse du carré de la distance du mobile à ce foyer. 3 o 6 l'application la plus remarquable qu'on ait faite du principe de la moindre action, a été d' en déduire les lois connues de la réfraction et de la réflexion de la lumière . Quoique cette question n' ait qu' un rapport éloigné avec la matière que nous traitons dans ce chapitre, on ne trouvera pas déplacé le calcul suivant, qui d'ailleurs est très-simple. Tant qu' un rayon lumineux se meut dans un milieu d' une égale densité , sa vîtesse et sa direction restent les mêmes ; mais lorsqu' il passe d'un milieu dans un autre, sa direction s'infléchit et sa vîtesse change. Dans l'instant de ce passage, la lumière décrit une

courbe d'une étendue inappréciable, et dont on peut faire abstraction, sans erreur sensible. La trajectoire de chaque molécule lumineuse est donc alors l'assemblage de deux droites, dont chacune est décrite d'un mouvement uniforme ; ainsi, en appelant (..) les longueurs de ces droites, N la vîtesse de la lumière dans le premier milieu, (..) la vîtesse dans le second, on aura Ny, pour la valeur de l'intégrale Fvds, prise depuis le point de départ de la molécule, jusqu' à son entrée dans le second milieu, et (..), pour la partie de cette intégrale relative au second milieu; par conséquent la valeur de cette intégrale, prise dans toute l'étendue de la trajectoire, sera exprimée par ; c' est donc cette somme (..) , qui doit être un *minimum* , d'après le principe de la moindre action. Avant d'aller plus avant, observons que si le second milieu est une substance diaphane et cristallisée, la vîtesse de la lumière, dans cette substance, dépendra en général de la direction du rayon lumineux ; de manière qu' elle sera constante pour un même rayon, mais variable d'un rayon à un autre. Le phénomène de la double réfraction que présente le spath d' Islande et la plupart des cristaux diaphanes, tient à la différence de vîtesse des différens rayons lumineux qui les traversent ; on doit alors regarder la vîtesse (..), comme une fonction des angles qui déterminent la direction de chaque rayon : et la loi de la réfraction dépend de la forme qu' on suppose à cette fonction. En faisant une hypothèse convenable sur cette forme, M Laplace est parvenu à déduire

p468

du principe de la moindre action, la loi de la double réfraction, découverte par Huyghens et confirmée par les expériences de M Malus; mais ce n' est point ici le lieu d' exposer cette théorie; nous nous bornerons à considérer le cas où tous les rayons se meuvent avec la même vîtesse, quelles que soient leurs directions. Ainsi, dans le calcul suivant, (..) seront regardées comme des quantités données pour chaque milieu en particulier, et indépendantes de la direction des différens rayons lumineux.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

<u>Baixar</u>	livros	de	Adm	<u>inis</u>	tra	ção

Baixar livros de Agronomia

Baixar livros de Arquitetura

Baixar livros de Artes

Baixar livros de Astronomia

Baixar livros de Biologia Geral

Baixar livros de Ciência da Computação

Baixar livros de Ciência da Informação

Baixar livros de Ciência Política

Baixar livros de Ciências da Saúde

Baixar livros de Comunicação

Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE

Baixar livros de Defesa civil

Baixar livros de Direito

Baixar livros de Direitos humanos

Baixar livros de Economia

Baixar livros de Economia Doméstica

Baixar livros de Educação

Baixar livros de Educação - Trânsito

Baixar livros de Educação Física

Baixar livros de Engenharia Aeroespacial

Baixar livros de Farmácia

Baixar livros de Filosofia

Baixar livros de Física

Baixar livros de Geociências

Baixar livros de Geografia

Baixar livros de História

Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura

Baixar livros de Literatura de Cordel

Baixar livros de Literatura Infantil

Baixar livros de Matemática

Baixar livros de Medicina

Baixar livros de Medicina Veterinária

Baixar livros de Meio Ambiente

Baixar livros de Meteorologia

Baixar Monografias e TCC

Baixar livros Multidisciplinar

Baixar livros de Música

Baixar livros de Psicologia

Baixar livros de Química

Baixar livros de Saúde Coletiva

Baixar livros de Serviço Social

Baixar livros de Sociologia

Baixar livros de Teologia

Baixar livros de Trabalho

Baixar livros de Turismo