

Ce document est extrait de la base de données
textuelles Frantext réalisée par l'Institut National de la
Langue Française (InaLF)

Théorie des fonctions analytiques [Document électronique] : contenant les
principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment
petits et d'évanouissans de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse
algébrique des quantités finies / par J.-L. Lagrange

p1

On appelle *fonction* d' une ou de plusieurs quantités, toute
expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d' une
manière quelconque, mêlées ou non avec d' autres quantités qu' on
regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis
que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les
valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que
les quantités qu' on suppose variables, sans aucun égard aux
constantes qui peuvent y être mêlées. Pour marquer une fonction
d' une seule variable comme X, nous ferons simplement précéder
cette variable de la lettre ou caractéristique F, ou F ; mais
lorsqu' on voudra désigner la fonction d' une quantité déjà
composée

p2

de cette variable, comme (..) , on renfermera cette quantité entre
deux parenthèses. Ainsi Fx désignera une fonction de (..) ,
désigneront des fonctions de (..) . Pour marquer une fonction de
deux variables indépendantes comme X, Y, nous écrirons F (X,
Y), et ainsi des autres. Lorsque nous voudrions employer d'
autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons
soin d' en avertir. Le mot *fonction* a été employé par les
premiers analystes pour désigner en général les puissances d' une
même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à
toute quantité formée d' une manière quelconque d' une autre
quantité. *Leibnitz et les Bernoulli* l' ont employé les
premiers dans cette acception générale, et il est aujourd' hui
généralement adopté. Considérons donc une fonction Fx d' une
variable quelconque X. Si à la place de X on met (..) étant une
quantité quelconque indéterminée, elle deviendra (..) ; et par la
théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette
forme (..) , dans laquelle les quantités (..) , coefficients des

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

puissances de I , seront de nouvelles fonctions de X , dérivées de la fonction primitive F_x , et indépendantes de la quantité I . Il est clair que la forme des fonctions P , Q , R , etc. Dépendra uniquement de celle de la fonction F_x ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de I . Cette manière de déduire d'une fonction donnée d'autres fonctions dérivées et dépendant essentiellement de la fonction primitive, est de la plus grande importance dans l'analyse. La formation et le calcul de ces différentes fonctions sont à proprement parler le véritable objet des nouveaux calculs, c'est-à-dire du calcul appelé *différentiel*, ou *fluxionnel*. Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, *Leibnitz*, les *Bernoulli*, l'*hôpital*, etc. L'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver

p3

par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, Euler, D'Alembert, etc. Ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles, et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies, ou indéfinies. Mais il faut avouer que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et sur-tout pour être présentée aux commençans ; d'ailleurs il me semble que comme dans le calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différenciation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée ; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale. Newton, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement, et il a cherché

une méthode pour déterminer directement les vitesses ou plutôt le rapport des vitesses variables avec lesquelles ces quantités sont produites ; c' est ce qu' on appelle, d' après lui, la *méthode des fluxions ou le calcul fluxionnel* , parce qu' il a nommé ces vitesses *fluxions* des quantités . Cette méthode ou ce calcul s' accorde pour le fond et pour les opérations, avec le calcul différentiel, et n' en diffère que par la métaphysique qui paraît en effet plus claire, parce

p4

que tout le monde a ou croit avoir une idée de la vitesse. Mais, d' un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n' a que des quantités algébriques pour objet, c' est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile ; de l' autre, il faut avouer qu' on n' a pas même une idée bien nette de ce que c' est que la vitesse d' un point à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable ; et on peut voir par le savant traité des fluxions de Maclaurin, combien il est difficile de démontrer rigoureusement la méthode des fluxions, et combien d' artifices particuliers il faut employer pour démontrer les différentes parties de cette méthode. Aussi Newton lui-même, dans son livre des principes, a préféré, comme plus courte, la méthode des dernières raisons des quantités évanouissantes ; et il faut avouer que c' est aux principes de cette méthode que se réduisent en dernière analyse les démonstrations relatives à celle des fluxions. Mais cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n' en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l' état où elles cessent, pour ainsi dire, d' être quantités ; car quoiqu' on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu' elles demeurent finies, ce rapport n' offre plus à l' esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses deux termes deviennent l' un et l' autre nuls à-la-fois. C' est pour prévenir ces difficultés, qu' un habile géomètre anglais, qui a fait dans l' analyse des découvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps de substituer à la méthode des fluxions, jusqu' alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la méthode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n' employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d' abord des valeurs différentes de ces quantités, qu' on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division le facteur que cette égalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniment petits, et les quantités évanouissantes ; mais les procédés et les applications du calcul sont embarrassans et peu naturels, et il faut convenir que cette manière de rendre le calcul différentiel plus

p5

rigoureux dans ses principes, lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. voyez l' ouvrage intitulé : *The Residual...* etc . ; ainsi que le discours publié par le même auteur, en 1758, sur le même objet. Ces variations dans la manière d' établir et de présenter les principes du calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce calcul, montrent, ce me semble, qu' on n' en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu' on eût trouvé d' abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations. Dans un mémoire imprimé parmi ceux de l' académie de Berlin, de 1772, j' avançai que la théorie du développement des fonctions en série contenait les vrais principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d' infiniment petits, ou de limites, et je démontrai par cette théorie le théorème de Tailor, qu' on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu' on n' avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites. Depuis, Arbogast a présenté à l' académie des sciences un beau mémoire, où la même idée est exposée avec des développemens et des applications qui lui appartiennent. Cet ouvrage ne doit rien laisser à désirer sur l' objet dont il s' agit ; mais l' auteur n' ayant pas encore jugé à propos de le faire paraître, et m' étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l' analyse, j' ai rappelé mes anciennes idées sur ceux du calcul différentiel, et j' ai fait de nouvelles réflexions tendantes à les confirmer et à les généraliser ; c' est ce qui a occasionné cet écrit, que je ne me détermine à publier que par la considération de l' utilité dont il peut être à ceux qui étudient cette branche importante de l' analyse. Il peut au reste paraître surprenant que cette manière d' envisager le calcul différentiel ne se soit pas offerte plutôt aux géomètres, et sur-tout qu' elle ait échappé à Newton, inventeur de la méthode des séries et de celle des fluxions. Mais nous observerons à cet égard qu' en effet Newton

p6

n' avait d' abord employé que la simple considération des séries pour résoudre le problème troisième du second livre des principes , dans lequel il cherche la loi de la résistance nécessaire pour qu' un corps pesant décrive librement une courbe donnée ; problème qui dépend naturellement du calcul différentiel ou fluxionnel. On sait que Jean Bernoulli trouva cette solution fausse, en la comparant avec celle qui résulte du calcul différentiel ; et son neveu Nicolas prétendit que l' erreur venait de ce que Newton avait pris le troisième terme de la série convergente dans laquelle il réduisait l' ordonnée de la courbe donnée, pour la différentielle seconde de cette ordonnée, et le quatrième pour la différentielle troisième, au lieu que suivant les règles du calcul différentiel, ces termes ne sont, l'

un que la moitié, l'autre que la sixième partie des mêmes différentielles. (voyez les mémoires de l'académie des sciences de 1711, et le tome 1^{er} des oeuvres de Jean Bernoulli.) Newton, sans répondre, abandonna entièrement sa première méthode, et donna dans la seconde édition des principes une solution différente du même problème, fondée sur la méthode même du calcul différentiel. Depuis on n'a plus parlé de l'application de la méthode des séries à ce genre de problèmes, que pour avertir de la méprise dans laquelle Newton était tombé, et faire sentir la nécessité d'avoir égard à l'observation de Nicolas Bernoulli. (voyez l'encyclopédie, aux articles différentiel, force.) mais nous ferons voir que cette méprise ne vient point du fond de la méthode, mais simplement de ce que Newton n'a pas tenu compte de tous les termes auxquels il fallait avoir égard, et nous rectifierons de cette manière sa première solution, dont aucun des commentateurs des principes n'a fait mention. Nous nous proposons dans cet écrit de considérer les fonctions qui naissent du développement d'une fonction quelconque. Nous donnerons la loi de leur formation et de leur dérivation, et nous en montrerons l'usage pour la transformation des expressions analytiques. Nous ferons ensuite l'application de ces fonctions dérivées aux principaux problèmes de géométrie et de mécanique qui se rapportent au calcul différentiel, et nous donnerons par-là à la solution de ces problèmes la rigueur des anciennes démonstrations. Enfin, nous ferons

p7

voir l'identité de ce calcul des fonctions avec le calcul différentiel proprement dit, et nous démontrerons par ce moyen les principes et les règles connues de celui-ci, d'une manière indépendante de toute supposition et de toute métaphysique.

p18

Ces formules pour le développement en série des exponentielles et des logarithmes sont assez connues, et on les démontre, ou par le calcul différentiel, ou par la seule formule du binome, mais en employant la considération de l'infini ou de l'infiniment petit, comme on le voit dans L'Introductio In Analysin D'Euler. Quoique cette manière de démontrer, dont Halley est, je crois, l'auteur (Trans Philn 216), puisse être admise en analyse, on ne saurait disconvenir qu'elle n'a pas l'évidence ni même la rigueur qu'on doit désirer dans les élémens d'une science, et nous croyons qu'on nous saura gré de nous écarter ici un moment de notre marche, pour donner une démonstration des mêmes formules, fondée aussi uniquement sur celle du binome, mais dégagée de toute considération de l'infini. Nous donnerons même à ces formules une généralisation qui servira à rendre les séries aussi

convergentes qu' on voudra dans tous les cas.

p32

Quelle que soit donc la fonction proposée Fx , et de quelque manière qu' elle soit donnée, on a des méthodes simples et générales pour trouver sa fonction prime (..) ; et de-là, par la répétition des mêmes opérations, on pourra trouver toutes les autres fonctions dérivées. On aura ainsi facilement tous les termes de la série (..) qui naît du développement de la fonction , lorsque ce développement est susceptible de cette forme. Il est donc nécessaire, avant d' aller plus loin, d' examiner quand et comment cette forme pourrait être en défaut. Nous avons déjà démontré plus haut (N 10) que cela ne peut arriver que lorsqu' on donnera à X une valeur déterminée, telle qu' elle fasse disparaître dans la fonction Fx , et dans ses dérivées, quelques radicaux. Or, un radical ne peut disparaître dans une fonction que de deux manières, ou parce que la quantité qui multiplie le radical devient nulle, ou parce que le radical lui-même devient nul. Dans le premier cas, il est clair que le radical disparaissant dans Fx , il pourra ne pas disparaître dans (..) , ou bien que disparaissant à-la-fois dans (..) , il pourra ne pas disparaître dans (..) , et ainsi du reste, parce que le radical acquérant des coefficients différens dans les fonctions dérivées, ces coefficients ne deviendront plus nuls par la même supposition de la variable.

p33

Dans le second cas, au contraire, il est évident que le radical disparaîtra nécessairement dans toutes les fonctions (..) à l' infini, puisque c' est la quantité radicale elle-même qui est supposée s' évanouir pour une valeur donnée de la variable X . Or , comme l' évanouissement du radical ne peut plus avoir lieu dans la fonction (..) , où l est une quantité indéterminée et indépendante de X , il s' ensuit que la série (..) qui représente le développement de cette fonction, ne pourra être exacte, qu' autant que le même radical s' y trouvera ; par conséquent cette série sera légitime dans le premier cas, et ne le sera pas dans le second.

p45

Voilà le problème résolu analytiquement ; mais comme les quantités P , Q , R , etc. Ne sont connues que par leurs fonctions primes, il reste encore à remonter de ces fonctions aux fonctions primitives ; ce qui peut être souvent fort difficile,

et même impossible. Cependant on peut trouver des limites de ces quantités, ce qui suffira pour apprécier l'erreur qu'on peut commettre en s'en tenant à quelques-uns des premiers termes de la série. Pour cela, nous allons établir ce lemme général : si une fonction prime de $(..)$, telle que $(..)$ est toujours positive pour toutes les valeurs de $(..)$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de $(..)$, savoir, $(..)$, sera nécessairement une quantité positive. Considérons la fonction $(..)$, dont le développement est $(..)$, nous avons vu qu'on peut toujours prendre la quantité l assez petite pour qu'un terme quelconque de cette série devienne plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent ($N \ 14$). Ainsi le terme $(..)$ pourra devenir plus grand que le reste de la série ; par conséquent si l est une quantité positive, on pourra prendre l positif et assez petit pour que toute la série $(..)$ ait nécessairement une valeur positive ; mais cette série est $(..)$; donc, si $(..)$ est une quantité positive, on pourra prendre pour l une quantité positive et assez petite pour que la quantité $(..)$ soit nécessairement positive.

p48

Maintenant il est clair qu'en donnant à $(..)$, dans une fonction de $(..)$, toutes les valeurs depuis $(..)$, les valeurs que recevra cette fonction seront les mêmes que celles que recevrait une pareille fonction de U , en donnant successivement à U toutes les valeurs depuis $(..)$, et les valeurs intermédiaires de $(..)$ donneront des valeurs de U intermédiaires entre celles-ci. D'où il est aisé de conclure que les quantités $Metn$ seront la plus grande et la plus petite valeur de $(..)$, relativement à toutes les valeurs de U depuis $(..)$; et que par conséquent toute valeur intermédiaire entre $Metn$ pourra être exprimée par $(..)$, en donnant à U une valeur intermédiaire entre $Oetx$. Donc la valeur de la quantité P relative à $(..)$ pourra être exprimée par $(..)$, U étant une quantité entre $Oetx$. On en conclura de même que la valeur de Q répondant à $(..)$, pourra être exprimée par $(..)$, en donnant à U une valeur intermédiaire entre $Oetx$; et pareillement que la valeur de R relative à $(..)$ pourra être exprimée par $(..)$, en prenant pour U une quantité entre $Oetx$. Et ainsi de suite.

p49

D'où résulte enfin ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité, qu'en désignant par U une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites $Oetx$, on peut développer successivement toute fonction de X et d'autres quantités quelconques suivant les puissances de X , de cette manière $(..)$ les quantités $(..)$, étant les valeurs de la fonction

Fx et de ses dérivées $(..)$, lorsqu'on y fait $(..)$. Ainsi, pour le développement de $(..)$ suivant les puissances de X , on aura $(..)$ où l'on remarquera que les quantités $(..)$ sont également les fonctions primes, secondes, etc. De $(..)$, ce qui est évident, car il est visible que $(..)$ sont également les fonctions primes, secondes, etc. De $(..)$, soit qu'on les prenne relativement à X ou relativement à $(..)$, puisque l'augmentation de $(..)$ est la même en changeant $(..)$. Prenant donc $(..)$ pour les fonctions dérivées de $(..)$, on aura $(..)$ où U désigne une quantité indéterminée, mais renfermée entre les limites $Oetx$. En changeant $(..)$, on aura le développement de $(..)$ suivant les puissances de I ; et l'on voit que dans ce développement la série infinie, à commencer d'un terme quelconque, est toujours égale à la valeur de ce premier terme, en y mettant $(..)$ à la place de X , J étant une

p50

quantité entre $Oeti$; que par conséquent la plus grande et la plus petite valeur de ce terme, relativement à toutes les valeurs de J depuis O jusqu'à I , seront les limites de la valeur du reste de la série continuée à l'infini. Si on fait $(..)$, on aura le développement du binôme $(..)$, et on en conclura que la somme de tous les termes, à commencer d'un terme quelconque $(..)$, sera renfermée entre ces limites $(..)$; car il est évident que la plus grande et la plus petite valeur de $(..)$ seront $(..)$. La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes qu'on néglige, et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très-imparfaites. Le théorème précédent pourra servir dans beaucoup d'occasions à donner à ces méthodes la perfection qui leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer. Jusqu'à présent nous n'avons considéré les fonctions dérivées, que comme pouvant servir à la formation des séries; mais ces fonctions, considérées en elles-mêmes, offrent un nouveau système d'opérations algébriques, et fournissent des transformations qui sont d'un usage immense dans toute l'analyse. Nous avons déjà vu (N 33), que si on a une équation quelconque en $Xety$, ou simplement en X , laquelle doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de X , les équations dérivées qu'on obtiendra, en prenant les fonctions dérivées de chaque terme de la proposée, auront lieu aussi. Chacune de ces équations, et même une combinaison quelconque de ces équations, pourra donc tenir lieu de l'équation primitive; et on obtiendra souvent par ce moyen des équations subsidiaires, plus simples ou plus faciles à résoudre que les équations principales.

p51

Nous avons nommé équations primes, secondes, etc. , les équations dérivées qu' on obtient en prenant les fonctions primes , secondes, etc. De tous les termes de l' équation primitive donnée ; mais nous nommerons en général équations dérivées du premier ordre, du second ordre, etc. , les équations qu' on pourra former par une combinaison quelconque de l' équation primitive et de son équation prime, ou de celle-ci et de l' équation seconde, et ainsi de suite. Ainsi l' équation primitive contenant Xety, l' équation dérivée du premier ordre contiendra , l' équation dérivée du second contiendra (..) ; et ainsi du reste. Nous allons montrer par quelques exemples l' usage des équations dérivées pour la transformation des fonctions. Et d' abord nous remarquerons que par la combinaison d' une fonction avec sa fonction prime, on peut faire disparaître un exposant quelconque. En effet, soit l' équation (..) étant une fonction quelconque de X, en prenant les fonctions primes on aura (..) ; donc, divisant cette équation par la précédente, on aura (..) , équation dérivée du premier ordre où la puissance (..) ne se trouve plus, et qui dans cet état est bien plus commode pour développer la valeur Y en série, par la méthode usitée des coefficients indéterminés. En effet, si l' on a, par exemple, (..) , et qu' on suppose (..) , on aura, en prenant les fonctions primes, ; donc, substituant et réunissant les termes affectés de la même puissance de X, on aura (..) ,

p52

équation qui devant être identique, c' est-à-dire avoir lieu quel que soit X, pour que l' expression supposée de Y soit vraie, donnera autant d' équations particulières qu' il y a de différentes puissances de X, et on tirera de ces équations (..) . On aura ainsi successivement tous les coefficients B, C, D, etc . Par des formules dont la loi est visible, et qu' on pourra par conséquent continuer aussi loin qu' on voudra. Mais le premier coefficient A demeure indéterminé ; il faut, pour le déterminer, recourir à l' équation primitive (..) . On peut de même, par les fonctions dérivées, faire disparaître les logarithmes, les exponentielles, et les sinus et co-sinus. En effet, si (..) , on aura l' équation du premier ordre (..) ; mais pour faire disparaître les sinus ou co-sinus, il faudra aller à une équation du second ordre. Soit donc (..) étant toujours une fonction quelconque de X, en prenant les fonctions primes, on aura (N 32) (..) , et, prenant de nouveau les fonctions primes, (..) ; donc, éliminant de ces trois équations (..) , on aura cette équation dérivée du second ordre, (..) , où il n' y a plus de transcendantes ; on trouvera la même équation en faisant (..) . Si donc on fait ici pour Xety les mêmes substitutions que ci-dessus (N 55), et qu' après avoir ordonné les termes suivant les puissances

p53

de X , on égale à zéro la somme de tous ceux qui se trouveront multipliés par la même puissance de X , on aura autant d'équations particulières qui serviront à déterminer les coefficients indéterminés de l'expression supposée de Y par les deux qui précèdent. à l'égard des deux premiers, ils demeureront indéterminés ; mais il faudra les déterminer de manière que l'équation primitive et l'équation prime aient lieu en faisant $(..)$. Or, l'équation $(..)$. Non-seulement l'équation dérivée du second ordre que nous venons de trouver, peut servir à développer en série la valeur de $(..)$; elle peut servir aussi à trouver une autre transformation de cette valeur, au moyen des exponentielles. Supposons, en effet, $(..)$ étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité (N 20), et V une fonction indéterminée de X , en prenant les fonctions primes et secondes on aura $(..)$, et ces valeurs étant substituées dans l'équation dont il s'agit, on aura, après la division par la quantité $(..)$ qui en multiplie tous les termes, $(..)$. J'observe qu'on peut satisfaire à cette équation en faisant $(..)$, M étant un coefficient constant, ce qui donne $(..)$; car substituant ces valeurs, l'équation se réduit à $(..)$. Ainsi on aura $(..)$; et de-là, en remontant à l'équation primitive, $(..)$ étant une constante arbitraire ; donc $(..)$ pour plus de simplicité. On aura donc $(..)$, et comme le radical $(..)$ peut être pris également en plus et en moins, on aura également $(..)$, B étant une autre constante arbitraire ; en effet, il est aisé de voir que chacune de ces deux valeurs satisfait à l'équation $(..)$; et on voit aussi facilement que leur somme y satisfait encore, parce que les

p54

quantités $(..)$ n'y sont que sous la forme linéaire. De sorte qu'on aura en général $(..)$, $Aetb$ étant de nouveau deux coefficients indéterminés comme ci-dessus. Voilà donc l'expression de $(..)$ transformée en une expression exponentielle au moyen de l'équation dérivée du second ordre. Mais pour que ces deux expressions soient absolument identiques, il faut encore déterminer convenablement les constantes $Aetb$, ce qui se fera par la comparaison des valeurs de $(..)$ pour une valeur quelconque de X . Ainsi, puisque $(..)$ doit devenir nul lorsque $(..)$ par la nature des sinus, il faudra que l'on ait $(..)$, et l'expression précédente de Y donnant $(..)$. Ces deux équations donnent $(..)$, expressions connues, et que nous avons déjà trouvées par une autre voie (N 27). Dans les exemples précédents, nous avons cherché l'équation dérivée, et nous avons ensuite déterminé par cette équation la valeur de la fonction primitive Y . Cette dernière opération est, comme l'on voit, l'inverse de celle par laquelle on descend de la fonction primitive aux fonctions dérivées ; elle peut toujours s'exécuter par le moyen des séries, en employant, comme nous l'avons fait, une série avec des coefficients indéterminés, et faisant des équations séparées des termes affectés de chaque puissance de X . De cette manière, on

détermine les coefficients les uns par les autres, et on a souvent l'avantage d'apercevoir la loi générale qui règne entre ces coefficients.

p55

Mais on peut aussi trouver immédiatement chaque coefficient par la méthode des N 45 etsuiv ; car il n'y a qu'à chercher successivement les valeurs des fonctions dérivées, et si on désigne par $(..)$ les valeurs de $(..)$, on a en général $(..)$. Cette formule a l'avantage de faire voir la raison pourquoi il reste des coefficients indéterminés, comme nous l'avons trouvé ci-dessus. En effet, si on veut déterminer la valeur de Y par une équation dérivée du premier ordre, cette équation donnera la valeur de $(..)$, et de-là on trouvera une équation du second ordre en $(..)$, une équation du troisième en $(..)$, et ainsi de suite ; de sorte qu'en substituant successivement dans ces équations les valeurs de $(..)$ données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse $(..)$ exprimés en X et Y . Donc, faisant $(..)$ exprimés en (Y) qui demeurera indéterminé. De même si on ne fait dépendre la détermination de Y que d'une équation dérivée du second ordre en $(..)$, on en tirera successivement une équation tierce entre $(..)$, et ainsi de suite ; et par des substitutions successives on aura en dernière analyse, $(..)$, donnés en $(..)$; de sorte qu'en faisant $(..)$, on aura les valeurs de $(..)$, exprimées en $(..)$, ces deux quantités demeurant indéterminées ; et ainsi de suite. Ainsi, lorsqu'on part d'une équation dérivée du premier ordre, il reste une indéterminée (Y) ; lorsqu'on part d'une équation du second ordre, il reste deux indéterminées $(..)$, et ainsi de suite ; et l'on voit que ces indéterminées sont constantes, puisque ce sont les valeurs de $(..)$. Quoique la conclusion précédente soit fondée sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de Y , puisqu'on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie. Mais comme c'est là une propriété caractéristique des équations dérivées

p56

entre deux variables, il est important de l'établir sur la nature même de ces équations. Considérons donc en général l'équation à deux variables $(..)$, et désignons simplement par $(..)$ son équation prime, par $(..)$ l'équation seconde, et ainsi de suite, en regardant X et Y comme variables à-la-fois. Soient A , B , C , etc. Des constantes quelconques contenues dans la fonction $(..)$, ces constantes seront les mêmes dans les fonctions dérivées ; ainsi, puisque les deux équations $(..)$ ont lieu en même temps, on pourra en éliminer une constante A , et l'équation

résultante sera une équation du premier ordre entre $(..)$, qui renfermera une constante de moins que l'équation primitive, et qui aura par conséquent lieu en même temps que celle-ci. De même les trois équations $(..)$, ayant lieu à-la-fois, on pourra en éliminer deux constantes A, B ; et l'équation résultante sera une équation du second ordre entre $(..)$, qui renfermera deux constantes de moins que l'équation primitive, et qui aura lieu en même temps qu'elle ; et ainsi de suite. Donc, puisque dans les équations à deux variables une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite, il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive doit contenir une constante de plus que l'équation dérivée du premier ordre, deux constantes de plus que l'équation dérivée du second ordre, et ainsi de suite, constantes qui seront par conséquent arbitraires ; et il est visible en même temps qu'elles ne sauraient en contenir davantage, puisqu'on ne pourrait pas les faire disparaître toutes par le moyen des équations dérivées. Donc, si l'on n'a pour la détermination d'une fonction qu'une équation du premier ordre, ou du second, ou, etc. L'équation primitive prise dans toute sa généralité devra contenir une constante arbitraire, ou deux, etc. Suivant l'ordre de l'équation donnée : et on déterminera ces constantes par des valeurs particulières données de la fonction ou de ses dérivées. Si donc on trouve d'une manière quelconque une équation en Xety qui satisfasse à une équation donnée d'un ordre quelconque, et qui renferme

p57

autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'indice de cet ordre, on en conclura que cette équation sera l'équation primitive de l'équation donnée, et pourra, dans tous les cas, être employée à la place de celle-ci. Au lieu d'éliminer à la fois les deux constantes Aetb des trois équations, on peut n'éliminer d'abord que la constante Boua des deux premières ; on aura ainsi deux équations du premier ordre, dont l'une ne renfermera que la constante A, et l'autre la constante B. Si maintenant on élimine de chacune de ces équations la constante Aoub par le moyen de son équation prime, on aura deux équations du second ordre sans Anib, qui devront coïncider avec l'équation résultant de l'élimination simultanée de ces constantes, par le moyen des trois équations $(..)$, parce que la valeur de $(..)$ que ces équations du second ordre donneront, et qui sera exprimée en $(..)$, ne peut qu'être la même, de quelque manière qu'elle soit déduite de l'équation primitive. D'où l'on peut conclure qu'une équation du second ordre peut être dérivée de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus. Et l'on prouvera de la même manière qu'une équation du troisième ordre pourra être dérivée de trois équations différentes du second ordre, renfermant chacune une constante arbitraire ; et ainsi de

suite. En même temps on voit que si pour une équation donnée du second ordre, on en trouve deux du premier ordre qui satisfassent chacune à cette équation, et qui renferment chacune une constante arbitraire Aoub, on en pourra déduire immédiatement l'équation primitive ; car il suffira de chasser de ces équations la quantité (..) , et l'on aura une équation en Xety, avec deux constantes arbitraires Aetb. Il en sera de même pour les équations du troisième ordre ; car, si on trouve trois équations du second ordre qui satisfassent chacune à une même équation du troisième ordre, et qui aient en même temps les constantes arbitraires A, B, C, on aura, en éliminant (..) , une équation

p58

en X, Yeta, B, C, qui sera par conséquent l'équation primitive de l'équation donnée ; et ainsi de suite. Mais si pour une équation du second ordre on en trouve deux du premier ordre qui y satisfassent, et dont une seule renferme une constante arbitraire, alors en éliminant (..) on aura une équation en Xety, qui ne renfermera qu'une constante arbitraire, et qui ne sera pas l'équation primitive complète de la proposée du second ordre ; mais cette équation satisfera également aux deux du premier ordre, puisqu'elle satisfait à celle du second ordre, qui est également dérivée de ces deux-ci ; donc elle pourra être regardée comme l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre qui ne renferme point de constante arbitraire. D'où je conclus qu'étant proposée une équation du premier ordre en (..) , si on en déduit d'une manière quelconque une équation du second, soit en éliminant une constante ou non, et qu'ensuite on trouve une autre équation primitive du premier ordre avec une constante arbitraire A, on aura par l'élimination de (..) entre celle-ci et la proposée, une équation en Xety qui contiendra la constante arbitraire A, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée. On prouvera de la même manière que si de la proposée du premier ordre on déduit une équation du troisième ordre, et qu'ensuite on trouve pour celle-ci une équation primitive du second avec une constante arbitraire, dans laquelle la proposée ne soit pas renfermée, il n'y aura qu'à éliminer les (..) au moyen de la proposée, et l'on aura une équation en Xety qui renfermera une constante arbitraire, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée ; et ainsi de suite. On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs au premier, et en tirer des conclusions semblables.

p117

Les opérations ordinaires de l'algèbre suffisent pour résoudre les problèmes de la théorie des courbes, qui ne consistent que

dans des rapports de lignes tirées d'une certaine manière et terminées aux courbes ; mais la détermination des tangentes, des rayons de courbure, des aires, etc. Dépend essentiellement des opérations relatives aux fonctions. Suivant les anciens géomètres , une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe ; c'est par ce principe qu'ils ont déterminé les tangentes dans le petit nombre des courbes qu'ils ont considérées. Mais, depuis que, par l'application de l'algèbre à la géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue ; on les a regardées comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont réunis, ou comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, ou comme la direction du mouvement composé , par lequel la courbe peut être décrite ; et ces différentes manières de considérer les tangentes ont donné lieu aux méthodes algébriques fondées sur l'égalité des racines des équations, et aux méthodes différentielles fondées sur le rapport des différences

p118

infiniment petites, ou des fluxions des coordonnées. Ces méthodes ne laissent rien à désirer pour la généralité et la simplicité ; mais ceux qui admirent avec raison l'évidence et la rigueur des anciennes démonstrations, regrettent de ne pas trouver ces avantages dans les principes de ces nouvelles méthodes. La théorie des fonctions que nous avons développée dans la première partie, nous met en état de traiter le problème des tangentes, et les autres problèmes du même genre, d'après les notions et les principes des anciens, et de donner ainsi aux résultats de l'analyse le caractère qui distingue leurs solutions. Pour considérer ces questions d'une manière générale, soit (..) l'équation d'une courbe quelconque proposée, et (..) l'équation d'une ligne droite ou d'une autre courbe qu'on veut comparer à celle-là, Xety sont l'abscisse et l'ordonnée de la première courbe, Petq sont aussi l'abscisse et l'ordonnée de l'autre courbe, rapportées aux mêmes axes que Xety. Pour que ces deux courbes aient un point commun relatif à l'abscisse X, il faut qu'en faisant (..) . Pour comparer maintenant le cours de ces courbes au-delà de ce point, on mettra dans leurs équations (..) à la place de Xetdep, et l'on aura (..) pour les ordonnées répondant au même point de l'axe des X, et éloignées de la quantité l de l'ordonnée qui passe par le point commun. Donc la différence de ces ordonnées sera (..) , savoir, en développant les fonctions et observant que l'on a déjà (..) , et cette différence exprimera la distance des points des deux courbes qui répondent à la même abscisse (..) . On voit d'abord en général que cette distance sera d'autant plus petite, et que par conséquent les courbes se rapprocheront d'autant plus qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront au commencement de cette série. Ainsi le

rapprochement sera plus grand, si l' on a (..) , c' est-à-dire, si les fonctions primes des ordonnées des deux courbes deviennent

p119

égales pour la même abscisse X ; il sera plus grand encore si de plus les fonctions secondes (..) des mêmes ordonnées deviennent aussi égales, et ainsi de suite.

p121

On peut conclure de-là en général, que si l' on a une courbe quelconque, et qu' une autre courbe donnée ait un point commun avec celle-là, ce qui exige que leurs ordonnées pour la même abscisse soient égales ; que, de plus, les fonctions primes de ces ordonnées pour la même abscisse commune soient aussi égales, alors il sera impossible qu' aucune autre courbe qu' on menerait par le même point commun passe entre les deux courbes, à moins que la fonction prime de son ordonnée pour

p122

la même abscisse, ne soit aussi égale aux fonctions primes de leurs ordonnées. Et si, outre les fonctions primes de ces ordonnées, leurs fonctions secondes pour la même abscisse étaient aussi égales, alors il serait impossible qu' aucune autre courbe qui passerait par le point commun, passât entre les deux courbes, à moins que les fonctions prime et seconde de son ordonnée ne fussent respectivement égales aux fonctions prime et seconde de l' ordonnée commune aux deux courbes, et ainsi du reste. à proprement parler, ces courbes ne coïncident que dans le point où les ordonnées sont égales, et l' égalité des fonctions primes, secondes, etc. De ces ordonnées ne les rend pas plus coïncidentes dans d' autres points, mais elle les fait approcher de manière qu' aucune autre courbe pour laquelle la même égalité n' aura pas lieu ne puisse passer entre elles. C' est-là l' idée nette qu' on doit se faire de ces différens degrés de rapprochement des courbes, que l' on appelle communément *contact*, *osculatation* , etc. Et que la manière ordinaire de concevoir le calcul différentiel fait regarder comme des coïncidences plus ou moins rigoureuses, ou plus ou moins étendues.

p157

Le problème de la quadrature des courbes est, comme l' on voit,

le problème le plus simple de l'analyse inverse des fonctions, puisqu'il ne consiste qu'à trouver la fonction primitive d'une fonction donnée. Nous avons indiqué, dans la première partie (N 64 et suiv.), les moyens par lesquels on peut faciliter cette recherche ; nous ajouterons ici une observation essentielle. Comme il est souvent avantageux de substituer d'autres variables à la place de celle qui entre dans la fonction, pour simplifier ou décomposer cette fonction en d'autres plus simples, il ne faudra pas oublier alors de multiplier la fonction dont il s'agit par la fonction prime de sa variable. En effet, nommant U l'aire de la courbe dont Y est l'ordonnée, et regardant Y et U comme fonctions de X , nous venons de voir que l'on a $(..)$; mais si on suppose X fonction d'une autre variable, et qu'on désigne par $(..)$ les fonctions primes de X et U prises relativement à cette nouvelle variable, il faudra substituer $(..)$, ce qui donnera $(..)$; et ainsi des autres formules semblables. Après le problème de la quadrature des courbes, se présente naturellement celui de leur rectification, c'est-à-dire, de la détermination de la longueur même de la courbe. Nous partons, pour la solution de ce problème, du principe d'Archimède, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant lequel deux lignes courbes, ou composées de droites, ayant leurs concavités tournées du même côté et les mêmes termes, celle qui renferme l'autre est la plus longue. D'où il suit qu'un arc de courbe tout concave du même côté, est plus grand que sa corde, et en même temps moindre que la somme des

p158

deux tangentes menées aux deux extrémités de l'arc, et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection. De-là on peut tirer cette autre conséquence, que la longueur du même arc se trouvera comprise entre celles des deux tangentes menées à ses deux extrémités, et terminées aux deux ordonnées qui répondent à ses extrémités, prolongées, s'il le faut, au-delà de la courbe. En effet, ayant mené la corde qui joindra les deux extrémités de l'arc, il est aisé de voir que l'une des deux tangentes rencontrera les ordonnées parallèles sous un angle plus aigu que la corde, et que l'autre les rencontrera sous un angle moins aigu, et que par conséquent la corde sera moindre que la première de ces tangentes, et plus longue que la seconde ; donc celle-ci sera, à plus forte raison, moindre que l'arc de la courbe. De plus, si on considère les deux triangles opposés au sommet, et formés par l'intersection des deux tangentes, il est visible que les deux parties de la première tangente seront respectivement plus longues que celles de la seconde, parce que les côtés formés par ces parties-là se trouvent opposés à des angles plus grands que les côtés formés par celles-ci. Donc la première tangente entière sera plus longue que la somme des deux portions de tangentes comprises entre leur point d'intersection et les extrémités de l'arc. Donc elle sera aussi plus longue que l'arc. Cela posé, Fx étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse, $(..)$

sera (N 114) la tangente de l' angle sous lequel la tangente de la courbe, à l' extrémité de cette ordonnée, rencontre l' axe des abscisses ; donc (..) sera la partie de cette tangente comprise entre l' ordonnée F_x et l' ordonnée (..) éloignée de la première de l' intervalle I . De la même manière, on aura (..) pour la tangente de l' angle sous lequel la tangente de la courbe à l' extrémité de l' ordonnée (..) rencontre l' axe, et on trouvera (..) pour la partie de cette tangente comprise entre les mêmes ordonnées F_x et (..) . Soit, pour plus de simplicité, (..) pour les deux tangentes menées aux deux extrémités de l' arc de la courbe compris entre les ordonnées F_x et (..) , et terminées à ces mêmes ordonnées ; donc la longueur de cet arc devra être renfermée entre les deux quantités (..) ,

p159

en donnant à I une valeur aussi petite qu' on voudra. Donc si est la fonction de X qui exprime l' arc de la courbe, il faudra que la quantité (..) , expression de l' arc compris entre les ordonnées (..) , soit comprise entre ces deux-ci (..) , quelque petit que soit I ; d' où, par un raisonnement semblable à celui du N 134, on conclura (..) . Donc, pour avoir la longueur indéfinie de la courbe, il faudra chercher la fonction primitive de la fonction (..) ; et comme on peut ajouter une constante arbitraire à la fonction primitive, il faudra déterminer cette constante de manière que l' expression de l' arc s' évanouisse au point où l' on voudra le faire commencer. Donc, si on nomme S l' arc de la courbe dont les coordonnées sont X et Y , on aura, en regardant Y ets comme fonctions de X , l' équation (..) . Et si X et Y étaient données en fonctions d' une autre variable, comme T , alors, en désignant par (..) les fonctions primes relativement à cette variable, il faudrait substituer (..) , ce qui donnerait cette équation (..) , entre les coordonnées et l' arc. Si on imagine que la courbe proposée tournant autour de l' axe des abscisses, engendre un conoïde, il est visible que les deux ordonnées (..) décriront en même temps deux cercles dont ces coordonnées seront les rayons, que l' arc de la courbe compris entre ces deux coordonnées décrira une zone conoïdique, et que les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc décriront des zones coniques, entre lesquelles la zone conoïdique sera nécessairement renfermée. Or on sait, par la géométrie, que la surface convexe d' un cône tronqué est égale à son côté multiplié par la demi-somme des circonférences des deux bases. Donc, si on désigne par la circonférence du cercle dont le rayon est (..) , la surface de la zone conique décrite par la tangente (..) , puisque les rayons des deux bases sont, l' un F_x , et l' autre (..) ; et la surface de l' autre zone, décrite par la

p160

tangente (..) , car il est facile de voir que les rayons des bases de ce tronc de cône seront (..) . Si donc on désigne par (..) la fonction de l' abscisse X qui exprime la surface du conoïde, il est clair que la zone conoïdique sera exprimée par la différence , et que cette différence devra être renfermée entre les deux quantités (..) , en donnant à l une valeur quelconque aussi petite qu' on voudra. D' où l' on pourra conclure, par un raisonnement analogue à celui du N 134, que cette condition ne pourra avoir lieu, à moins que l' on n' ait (..) . Donc on aura la surface du conoïde proposé, en prenant la fonction primitive de la fonction

p223

Je vais maintenant considérer la théorie des fonctions relativement à la mécanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par T ; et comme la position d' un point dans l' espace dépend de trois coordonnées rectangulaires X, Y, Z, ces coordonnées, dans les problèmes de mécanique, seront censées être des fonctions de T. Ainsi on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l' analyse mécanique comme une extension de l' analyse géométrique. Considérons d' abord le mouvement rectiligne , et supposons que X soit l' espace parcouru pendant le temps T , on aura (..) , et la fonction Ft devra être telle qu' elle devienne nulle lorsque (..) . La forme la plus simple de Ft est évidemment At ; ce qui donne (..) , A étant une constante : ainsi , dans le mouvement représenté par cette équation, les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux temps écoulés depuis le commencement du mouvement ; ce qui est la propriété du mouvement qu' on appelle *uniforme* . La constante A, qui exprime le rapport de l' espace au temps, est la mesure de ce qu' on nomme la vitesse ; c' est le seul élément qui entre dans cette espèce de mouvement, et par lequel un mouvement uniforme diffère d' un autre mouvement uniforme. L' observation et l' expérience nous font voir qu' un corps mis en mouvement d' une manière quelconque, si on écarte toutes les causes d' altération

p224

qui peuvent agir sur lui, continue à se mouvoir de lui-même d' un mouvement rectiligne et uniforme ; d' où il suit que la vitesse une fois imprimée, se conserve toujours la même, et suivant la même direction : c' est en quoi consiste la première loi du mouvement. Si on représente le temps par l' abscisse, et l' espace parcouru par l' ordonnée d' une ligne, il est clair que cette ligne sera pour le mouvement uniforme une droite passant par l' origine des abscisses, et que la tangente de l' angle qu'

elle fait avec l'axe sera la mesure de la vitesse du mouvement. La fonction de T, la plus simple après A_t , est B_t ; en prenant cette expression pour F_t , on aura une autre espèce de mouvement rectiligne représenté par l'équation (..) , dans laquelle les espaces parcourus depuis l'origine du mouvement sont proportionnels aux carrés de temps. L'observation et l'expérience nous présentent aussi journellement ce mouvement dans les corps qui tombent par leur pesanteur, en faisant abstraction de la résistance de l'air, et de toute autre cause étrangère d'altération. La constante B, qui est le seul élément qui entre dans la constitution de ce mouvement, est la même pour tous les corps dans le même lieu de la terre, et dépend de la force de la gravité qui le produit et qui agit sans cesse de la même manière sur le mobile. Ainsi ce mouvement ne se continue qu'en vertu de la force qu'on peut regarder comme une cause extérieure agissant continuellement sur le corps, et dont le coefficient B est la mesure. Comme dans ce mouvement les espaces augmentent en plus grande raison que les temps, on le nomme mouvement *accéléré* , et en particulier, on appelle celui dont il s'agit, *uniformément accéléré*, par la raison que nous verrons dans un moment. Si on représente ici le temps par l'abscisse, et l'espace parcouru par l'ordonnée d'une courbe, on voit que cette courbe sera une parabole dont le paramètre sera (..) , et dont l'axe principal sera l'axe des ordonnées Y.

p225

Le mouvement le plus simple, après celui que nous venons de considérer, serait celui où l'on aurait (..) ; mais la nature ne nous offre aucun mouvement simple de cette espèce, et nous ignorons ce que le coefficient C pourrait représenter, en le considérant d'une manière absolue et indépendante des vitesses et des forces. Ce sont là les mouvements simples dont toutes les autres espèces de mouvement peuvent être regardées comme composées ; et l'art de la mécanique consiste dans cette composition et décomposition, d'où résultent les rapports entre les temps, les espaces, les vitesses et les forces. Si l'on réunit les deux espèces de mouvement que nous venons de considérer, on aura le mouvement représenté par l'équation (..) , qui sera par conséquent composé d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré, et qui résultera de la réunion des deux causes qui peuvent produire chacun d'eux en particulier , c'est-à-dire, d'une vitesse proportionnelle à A, primitivement imprimée, et d'une force accélératrice proportionnelle à B, agissant continuellement sur le mobile. La nature nous offre aussi la composition de ces deux mouvements dans les corps pesants lancés verticalement de haut en bas, ou de bas en haut, en faisant abstraction de la résistance de l'air, et de toute autre cause étrangère. Dans les corps lancés verticalement de haut en bas, la force B agit dans la direction même du mouvement, comme nous le supposons ; mais dans les corps lancés verticalement de bas en haut, la force B agit en sens contraire,

et devient par conséquent négative ; elle tend ainsi à retarder le mouvement du corps, et s'appelle alors *force retardatrice*. Le mouvement lui-même s'appelle, dans ce cas, *uniformément retardé*. L'observation nous fait voir que, dans la composition de ces deux mouvemens, chacun d'eux se conserve comme s'il était seul dans le mobile, de manière que l'espace parcouru au bout d'un temps quelconque, est exactement la somme ou la différence des espaces que le mobile aurait parcourus séparément en vertu des deux causes qui produisent les deux mouvemens ; de sorte que le résultat, c'est-à-dire, l'espace parcouru, est le même que si les deux mouvemens avaient lieu séparément et successivement.

p237

La gravité et toutes les forces d'attraction connues agissent également sur toutes les parties matérielles des corps, et y produisent le même mouvement, abstraction faite de l'inégalité des forces, à raison des distances ; de sorte que l'effet de l'action de ces forces est indépendant de la masse du corps mu, et est le même par rapport à la vitesse imprimée, que si la masse était réduite à un point. Dans les attractions réciproques des corps, la force d'attraction est proportionnelle à la masse du corps attirant, parce que chacune de ses particules attire également ; par conséquent, le mouvement absolu imprimé au corps attiré, est simplement proportionnel à la masse du corps attirant. Il n'en est pas de même des forces qui ne pénètrent point dans l'intérieur des corps, et qui n'agissent qu'à l'extérieur, comme l'action des ressorts, celle de la résistance des fluides, les forces produites par la pression, par la tension des fils, etc. Il est clair que ces forces ne peuvent produire le même effet sur différens corps, à moins qu'elles ne soient proportionnelles à leurs masses ; car si une force double, par exemple, agit sur un corps de masse double, c'est la même chose que si deux forces simples agissent séparément sur deux masses simples ; il est clair

p238

aussi que l'effet produit sur une même masse ou des masses égales, par différentes forces, c'est-à-dire, le mouvement ou la vitesse imprimée doit être proportionnelle aux forces ; ainsi, si une force F agissant sur une masse M , y imprime la vitesse V , une force Mf agissant sur la masse Mm , y imprimera encore la vitesse V ; mais la force Mf agissant sur la même masse M , lui imprimera la vitesse Mv : donc la même force Mf imprimera à la masse Mm la vitesse V , et à la masse M la vitesse Mv ; d'où il suit que les vitesses imprimées par une même force à des masses différentes, sont en raison inverse des masses. Donc, en

général, l' effet d' une force donnée sur une masse donnée, est en raison directe de la force et en raison inverse de la masse, ou comme la force divisée par la masse. Ce principe est confirmé par l' expérience ; car un ressort placé entre deux corps, et agissant également sur l' un et sur l' autre, leur imprime des vitesses en raison inverse de leurs masses. Lorsque deux corps durs mus sur la même ligne en sens opposés, viennent à se choquer avec des vitesses en raison inverse de leurs masses, ils s' arrêtent après le choc, par la destruction réciproque de leur mouvement ; et s' ils sont parfaitement élastiques, ils sont réfléchis en arrière, chacun avec la même vitesse qu' il avait avant le choc. Dans les corps pesans, comme la gravité agit également sur toutes les parties de la masse du corps, son action absolue est proportionnelle à la masse ; donc, divisant cette action par la masse, l' effet de la pesanteur pour imprimer du mouvement aux corps, devient indépendant de leur masse, et est le même pour tous les corps. Mais si deux corps pesans se tiennent par un fil passant sur une poulie, comme les forces qui résultent de leur pesanteur, et qui sont proportionnelles aux masses, tirent le fil en sens contraire, il n' y a que la différence de ces forces qui puisse leur imprimer du mouvement ; et comme les deux corps doivent se mouvoir conjointement et parcourir le même espace vertical dans le même temps, la masse totale à mouvoir est la somme des masses ; ainsi, l' action de la gravité pour mouvoir ces corps, se trouve diminuée en raison de la différence des masses à leur somme ; par conséquent, les espaces parcourus au bout d' un temps quelconque, seront à ceux d' un corps pesant qui tombe

p239

librement, dans la même raison. C' est ce que l' expérience confirme dans la machine connue pour démontrer les lois de l' accélération des graves.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)