

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS  
CURSO DE FÍSICA

Consistência no Cálculo Perturbativo Tridimensional em Teoria  
Quântica de Campos: A Eletrodinâmica Quântica.

Ederson Staudt

Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Orimar Antônio Battistel

Santa Maria, RS, Brasil

2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal de Santa Maria  
Centro de Ciências Naturais e Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO  
TRIDIMENSIONAL EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA**

elaborada por  
**Ederson Satudt**

como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Física**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Orimar Antônio Battistel, Dr.**  
(Presidente/Orientador)

---

**José Abdalla Helayel Neto, Dr. (CBPF)**

---

**Gastão Inácio Krein, Dr. (IFT)**

Santa Maria, 14 de março de 2005.

## RESUMO

Dissertação de Mestrado

Programa de Pós-Graduação em Física

Universidade Federal de Santa Maria

CONSISTÊNCIA NO CÁLCULO PERTURBATIVO TRIDIMENSIONAL EM  
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS:  
A ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

AUTOR: EDERSON STAUDT

ORIENTADOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 14 de março de 2005.

Neste trabalho, apresentamos um estudo detalhado da Eletrodinâmica Quântica Tridimensional (EDQ3), em solução perturbativa ao nível um “loop”. Utilizamos um método muito geral para as manipulações envolvendo integrais de Feynman divergentes, alternativo às regularizações tradicionais. Os processos físicos básicos da teoria são tratados efetuando-se os cálculos das amplitudes divergentes com as escolhas mais gerais possíveis para os momentos das linhas internas. As arbitrariedades intrínsecas aos cálculos perturbativos são preservadas durante as operações intermediárias já que, de fato, integrais divergentes não são calculadas. Para as manipulações efetuadas apenas é assumido a presença de uma função regularizadora de modo implícito. Através da análise de vínculos de consistência, constituídos por relações entre funções de Green, relações de simetria e determinações de teoremas gerais, determinamos uma condição de consistência, na forma de uma relação entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência, necessária e suficiente para a consistência desejada nos cálculos perturbativos tridimensionais. Como consequência observamos a modificação inevitável, e de modo não ambíguo, da estrutura de Lorentz do propagador fotônico, pela indução radiativa de um termo do tipo Chern-Simons no cálculo do tensor de polarização do vácuo, que tem como consequência a geração dinâmica de massa para o fóton. Uma sistematização para as estruturas finitas do cálculo perturbativo tridimensional também apresentado, o qual desempenha papel crucial na condução das operações matemáticas necessárias para a construção das amplitudes assim como para a verificação de suas propriedades de simetria.

---

Dissertation of Master's degree  
Program of Masters degree in Physics  
Federal University of Santa Maria

CONSISTENCY IN THREEDIMENSIONAL PERTURBATIVE  
CALCULATION ON QUANTUM FIELD THEORY: THE QUANTUM  
ELETRODYNAMICS

AUTHOR: EDERSON STAUDT

SUPERVISOR: ORIMAR ANTÔNIO BATTISTEL

DATE AND PLACE OF THE DEFENSE: SANTA MARIA, MARCH 14, 2005.

In this work we present a detailed study about the three-dimensional quantum electrodynamics  $\text{QED}_3$ , in perturbative solution at the one loop level. A very general method, concerning the manipulations and calculations involving divergent Feynman integrals, alternative to the traditional regularization techniques, is adopted. The basic physical processes are treated by taking the most general choices for the routing of the internal momenta. The arbitrariness intrinsic to the calculations are preserved in the intermediary operations since that, in fact, the calculation of the divergent integrals is avoided. In order to justify the manipulations performed it is only assumed the presence of a regulating distribution in an implicit way. Through the analysis of consistency constraints, constituted by relations among green functions, symmetry relations and determinations of very general theorems, we find a consistency relation, in the form of a difference between two integrals having the same divergence degree, which reveals necessary and sufficient for the desired consistency within the context of three-dimensional perturbative calculations. As a consequence, we have observed that the Lorentz structure of the pure  $\text{QED}_3$  photon propagator is modified by the one loop corrections, in an unavoidable and non ambiguous way, through the induction of a Chern-Simons term in the one loop vacuum polarization tensor calculation, whose implication is the dynamical mass generation for the photon. A systematization for the finite mathematical structures of the perturbative three-dimensional one loop calculation is also presented. Such organization play a crucial role in the required mathematical operations involved in the construction of the amplitudes as well for the studies of their symmetry properties.

# CONTEÚDO

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Eletrodinâmica Quântica Tridimensional em Solução Perturbativa</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	A Eletrodinâmica Quântica Tridimensional como uma Teoria de “Gauge” . . . . .	9
2.3	Processos Físicos . . . . .	14
2.3.1	Propagação do Elétron na presença da interação . . . . .	14
2.3.2	Auto-Energia do Fóton . . . . .	15
2.3.3	Correção do vértice da interação . . . . .	16
2.3.4	O Decaimento Fotônico do Fóton . . . . .	17
2.4	Cálculo Perturbativo e Parâmetros Físicos . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Vínculos de Consistência: Relações entre Funções de Green e Relações de Simetria</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	A Álgebra das Matrizes de Dirac . . . . .	23
3.3	A função de um ponto vetorial . . . . .	25
3.4	A auto energia do elétron por excitação de um fóton . . . . .	26
3.5	A função de Green de dois pontos bi-vetorial . . . . .	29
3.6	Decaimento Fotônico do Fóton . . . . .	31
3.7	Correção de Vértice . . . . .	39
3.8	Relações Entre Funções de Green . . . . .	43
3.9	Relações de Simetria . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Organização das partes finitas das Integrais de Feynman</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	48

4.2	As Funções $Z_k^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	49
4.2.1	Redução das $Z_k^{-\frac{1}{2}}$ em termos de $Z_0^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	51
4.2.2	Lim $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$ . . . . .	52
4.2.3	As Funções $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ . . . . .	54
4.3	As Funções $Y_k^{-\frac{3}{2}}$ . . . . .	56
4.3.1	As Funções $Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ . . . . .	58
4.4	As Funções $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$ e $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	59
4.5	As Funções $\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}$ . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Cálculo de Integrais de Feynman</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Introdução . . . . .	67
5.2	Parametrização de Feynman . . . . .	68
5.3	Integrais de Feynman Finitas . . . . .	69
5.4	Integrais de Feynman Divergentes; Regularizações . . . . .	78
5.4.1	Regularização Dimensional . . . . .	78
5.4.2	Regularização de Pauli-Villars . . . . .	80
5.4.3	Manipulação e cálculo com regularização implícita; divergências ultravioletas . . . . .	81
5.4.4	Manipulação e cálculo com regularização implícita; divergências Infravermelhas . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Amplitudes, Ambiguidades, Relações entre Funções de Green e Relações de Simetria.</b> . . . . .	<b>105</b>
6.1	Introdução . . . . .	105
6.2	A Função de Um Ponto Vetorial . . . . .	106
6.3	A Auto-Energia do Elétron por Excitação de um Fóton . . . . .	107
6.4	A função de Dois Pontos bi-Vetorial . . . . .	107
6.5	Correção de Vértice . . . . .	109
6.6	A Função de Três Pontos tri-vetorial . . . . .	114
6.7	Relações entre Funções de Green . . . . .	114
6.8	Relações de Simetria . . . . .	118
6.8.1	Condição de consistência e regularizações . . . . .	120
6.8.2	Consistência no Cálculo Perturbativo para a EDQ <sub>3</sub> . . . . .	122

7 Conclusão

124

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação diagramática para o propagador correspondente a um férmion de spin $1/2$ . . . . .	13
2.2	Representação diagramática para o propagador correspondente a um vetor sem massa. . . . .	13
2.3	Representação diagramática correspondente ao vértice da interação elétron-fóton. . . . .	14
2.4	Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron. . . . .	14
2.5	Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do fóton. . . . .	16
2.6	Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a interação elétron-fóton. . . . .	16
2.7	Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente ao decaimento fotônico do fóton. . . . .	17
2.8	Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron. . . . .	19
3.1	Diagrama correspondente à função de Green de um ponto vetorial. . . . .	25
3.2	Representação diagramática da função de Green associada a auto-energia do elétron por excitação de um fóton. . . . .	27
3.3	Diagrama correspondente à função de Green de um dois pontos bi-vetorial. . . . .	29
3.4	Diagrama correspondente às funções de Green de dois pontos: (a) duplamente pseudo-escalar e (b) axial-pseudo-escalar, em $D = 3 + 1$ . . . . .	30
3.5	Diagrama correspondente à função de Green triplamente vetorial. . . . .	31
3.6	Diagrama correspondente à função de Green vetorial-pseudo-escalar-pseudo-escalar. . . . .	33

---

3.7	Representação diagramática para a função de Green associada à correção de vértice da interação elétron-fóton. . . . .	39
3.8	Representação diagramática para as identidades (3.89) e (3.90). . . . .	44
3.9	Representação diagramática para a identidade (3.92). . . . .	44
5.1	Representação do plano complexo. . . . .	74

# CAPÍTULO 1

## Introdução Geral

O entendimento da natureza em termos de seus elementos fundamentais, dos quais seriam feitas todas as coisas, e o que os manteriam coesos, sempre foi um dos grandes pilares da ciência, em particular da física. Desde os primeiros tratados sobre o assunto já decorreram muitos séculos de evolução do pensamento e dos conceitos envolvidos. Neste período, pode-se dizer que saímos de concepções místicas e religiosas e passamos para um conhecimento organizado baseado em demonstrações teóricas rigorosas e verificações experimentais, com a introdução do método científico.

Os primeiros relatos revelando curiosidade com relação à estrutura fundamental da natureza foram produzidos pelos filósofos pré-socráticos, na Grécia antiga, e versavam sobre a concepção de substância primordial da matéria. Passamos posteriormente aos trabalhos de Galileu Galilei e Isaac Newton, nos séculos XVI e XVII, que edificam as bases da física teórica atual ao construírem a Mecânica Clássica. No século XIX, James C. Maxwell formulou a teoria do eletromagnetismo fazendo a primeira grande síntese da física ao unificar a eletricidade, o magnetismo e a ótica. O começo do século XX é marcado por fervorosas mudanças na interpretação das leis fundamentais, como concebidas à época. Foi talvez o primeiro grande embate entre conceitos estabelecidos e idéias inovadoras, que prosperaram mesmo contrariando os conceitos da maioria dos físicos. Surge, neste período, uma nova concepção de interação entre a matéria e a radiação, introduzindo a fundamental noção de estrutura quântica da energia e da matéria. Ainda no começo do século XX, quebra-se a noção de tempo e espaço absolutos, conceitos introduzidos por Newton e bastante difundidos na época. Surge então uma nova concepção a respeito do espaço-tempo, a denominada Teoria da Relatividade de Einstein. Deve-se a ele a noção de fóton, o quantum de luz que introduziu a dualidade onda-partícula para a radiação e que nos levou a idéia de partículas elementares.

Nessa mesma linha de pensamento temos ainda os trabalhos de Niels Bohr e de de Broglie marcando o nascimento da Mecânica Quântica que culminou com a formulação da equação de onda de Schrödinger

$$\hat{H} \Psi(x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x), \quad (1.1)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano do sistema e  $\Psi(x)$  é a função de onda. Esta equação pode ser invariante frente as transformações de Galileu mas não frente às transformações de Lorentz. Portanto, a Mecânica Quântica, representada pela equação de Schrödinger, não é compatível com o postulado da Relatividade de que todos os fenômenos físicos devem ser descritos identicamente por todos os observadores em sistemas de referência inerciais, cuja implicação matemática é a invariância das leis físicas frente as transformações de Lorentz. Além disso, na teoria de Schrödinger, a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula em todo o espaço é unitária em qualquer instante. Portanto, essa teoria não é capaz de explicar, por exemplo, a criação e aniquilação de pares de partículas. Aos poucos a integração da Teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica se tornou inevitável e, com isso, a necessidade do desenvolvimento de uma nova teoria para a descrição de tais fenômenos e exigiu mudanças na própria concepção do conceito de partícula. Em meados do ano de 1920 duas maneiras (aparentemente conflitantes) foram propostas para resolver estes problemas. A primeira delas era aderir à estrutura básica da Mecânica Quântica e então escrever uma versão relativisticamente invariante da equação de Schrödinger. Neste contexto foi proposta a equação

$$(\square^2 + \mu^2)\Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

onde  $\square^2$  é o operador diferencial escalar d'Alambertiano, definido por

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right). \quad (1.3)$$

Tal equação ficou conhecida como a Equação de Klein-Gordon. Ela atende ao pré-requisito da invariância frente a transformações de Lorentz. No entanto, logo ficou claro que esta equação não é compatível com a interpretação adequada de partícula. Além disso a equação não descreve partículas com valores de spin que não sejam o valor nulo. Estes problemas levaram Dirac a propor uma segunda maneira de interpretar o problema. Ele propôs uma equação linear nas derivadas espaciais e temporais, tratando espaço e tempo como tendo o mesmo “status”, tal qual exigido pela relatividade. Ela é invariante frente às transformações de Lorentz, isto é, tem a mesma forma em todos os sistemas de referência inerciais. A equação de Dirac é uma equação matricial linear nas derivadas e a função de onda é um espinor de quatro componentes que descreve de modo surpreendente as partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . No rastro deste sucesso equações de onda relativísticas para partículas com qualquer spin foram então construídas e, com elas, pode-se dizer que a adequada descrição das propriedades relativísticas das partículas elementares livres foi finalmente alcançada. Restava então a adequada descrição das interações entre elas. O caminho para isto começou a se delinear, a partir de 1930, com o surgimento da Eletrodinâmica Quântica (*EDQ*) e da física nuclear. Desta última se destacou, com o passar do tempo, a física das partículas elementares. Com o acúmulo de informações, resultado de investigações experimentais e teóricas, conseguiu-se montar um esquema sólido capaz de

investigar as partículas fundamentais e descrever a natureza dos mecanismos e simetrias de suas interações, que é a Teoria Quântica de Campos (*TQC*)[1]. Este é, sem dúvidas, o formalismo ou ferramental teórico de maior credibilidade e aceitação dos dias atuais, para a descrição das partículas elementares e suas interações. Tal prestígio pode ser justificado, em grande parte, pelos sucessos obtidos pela *EDQ*, que é a *TQC* que descreve as interações eletromagnéticas. Sucessos estes que se caracterizam por uma incrível concordância entre pedições teóricas e medidas experimentais [2], as melhores já alcançadas em toda a história das ciências exatas.

A construção de uma *TQC*[3] segue uma receita bem estabelecida. Constrói-se uma Lagrangiana, que é um funcional dos campos associados às partículas para as quais estamos interessados em descrever a dinâmica de interações. As simetrias desempenham um papel crucial na construção da Lagrangiana, de modo que a combinação dos campos é feita a fim de obtermos escalares de Lorentz e do grupo total de simetrias que consideramos relevantes. Após construirmos a Lagrangiana, impomos o princípio variacional de Hamilton, obtendo assim equações de movimento para cada um dos campos participantes das interações.

A solução das equações de movimento, obtidas deste modo, fornece, em princípio, uma descrição completa e detalhada da fenomenologia envolvendo as partículas interagentes. Tal descrição é vista como sendo nada mais do que consequências das simetrias supostas válidas na construção da Lagrangiana e caracteriza o poder de predição da teoria, ou seja, as simetrias são o nosso conhecimento inicial, a respeito de alguma fenomenologia, a ser implementado ou representam nossas hipóteses a serem testadas.

Infelizmente as equações de movimento, às quais nos referimos acima, apresentam-se na forma de equações diferenciais não lineares e acopladas, sendo que, para tais sistemas de equações, as soluções exatas são raras, ainda para as teorias mais simples. Para contornar tal problema torna-se necessário o uso de métodos alternativos como, por exemplo, os métodos perturbativos, a fim de que possamos descrever a dinâmica desejada. Com a utilização de métodos perturbativos encontramos novos obstáculos, que podem comprometer o poder de predição da teoria: as contribuições para as amplitudes não envolvem apenas estruturas matemáticas definidas e finitas, mas tais contribuições apresentam-se contaminadas por infinitos oriundos de integrais de Feynman divergentes[4]. Como estamos interessados em descrever amplitudes físicas, que são quantidades finitas, (pois a princípio podem e deverão ser medidas) manipulações adicionais exigem a adoção de uma técnica capaz de lidar consistentemente com as quantidades divergentes para que os princípios gerais das *TQC*'s e as simetrias supostas relevantes sejam preservadas. Este estágio dos cálculos é essencial para preservar a “saúde” da teoria o que fez com que ao longo do tempo vários métodos de regularização fossem propostos. Os métodos de regularização usuais, em geral, introduzem alguma modificação ao nível do integrando de modo a tornar as integrais de Feynman divergentes em quantidades finitas. Num passo posterior, toma-se algum tipo de limite, para remover as modificações introduzidas, de

modo que as expressões finais possam ser identificadas com as originais. O que ocorre invariavelmente com esse processo é que, devido à indeterminação matemática das quantidades envolvidas associadas às divergências, os resultados finais acabam por apresentar dependências relacionadas ao método de regularização adotado. Além do mais, as amplitudes físicas regularizadas podem emergir dos cálculos com ambiguidades e terem suas propriedades, ditadas por princípios gerais da  $TQC$ , assim como determinações vindas das relações de simetria específicas, violadas [5]. É essencial então que todos os procedimentos adotados nos passos intermediários sejam completamente controláveis, de modo que os cálculos nos forneçam amplitudes físicas livres de ambiguidades evitando as violações de simetrias e propriedades gerais impostas na construção da teoria, permitindo, dessa maneira, a manutenção do poder de predição do aparato teórico.

A busca por procedimentos consistentes e gerais para o manuseio das divergências das soluções perturbativas foi sempre um objetivo importante no contexto de  $TQC$ , dado a quase inevitabilidade do uso de tais soluções para efetuar as predições. Inúmeras prescrições foram e continuam sendo propostas para o tratamento das indefinições matemáticas associadas às divergências. No contexto da EDQ pode-se dizer que a primeira prescrição bem sucedida foi a denominada regularização covariante de Pauli-Villars (PV)[6]. No contexto mais amplo, incluindo, teorias com simetrias não-abelianas, destaca-se a Regularização Dimensional ( $RD$ )[7], o mais bem sucedido e popular método de regularização dentre todos os já propostos. O referido método é eficiente na remoção de ambiguidades[8] e na preservação das simetrias no cálculo de amplitudes perturbativas. Entretanto, ele não é de caráter geral, pois possui limitações de aplicabilidade intrínsecas ao seu principal ingrediente[9], a continuação analítica na dimensão espaço-temporal. As manifestações destas limitações residem na impossibilidade de estender para uma dimensão qualquer todos os objetos matemáticos que fazem parte da formulação de teorias, particularmente aquelas com férmions. As implicações são óbvias, é preciso lançar mão frequentemente, de métodos não-consistentes devido a não universalidade da RD.

Tendo isto em mente, recentemente foi desenvolvida e proposta uma nova estratégia para o manuseio das divergências do cálculo perturbativo, alternativa aos métodos tradicionais de regularização[10]. O método é de caráter geral e não possui nenhuma restrição conhecida de aplicabilidade, até o momento, tendo sido já aplicado em diferentes contextos[11]. Numa destas investigações foi considerado um estudo detalhado da  $EDQ$ , formulada na dimensão física  $D = 3 + 1$  ( $EDQ_4$ ) assim como a anomalia  $AVV$  [12]. Os resultados obtidos exibiram a consistência desejada, isto é, o mesmo método conseguiu descrever consistentemente ambos os problemas, o que não é possível de ser feito no contexto da RD. Em outro estudo o método foi aplicado para o tratamento de amplitudes divergentes em dimensão  $D = 1 + 1$  com total sucesso no tratamento das amplitudes pertinentes à  $EDQ_2$  e na descrição da anomalia  $AV$  [13]. Devido a estes sucessos novas investigações em problemas onde as manipulações e cálculos envolvendo divergências do cálculo perturbativo desempenham papel crucial vêm sendo realizadas. Uma das princi-

país linhas de investigações reside nos aspectos dimensionais da consistência no cálculo perturbativo. Tais investigações, que consistem em estudar em diferentes dimensões, pares e ímpares, as manifestações fenomenológicas das correções radiativas, tais como geração dinâmica de massa e anomalias, com a utilização do mesmo método para o manuseio das divergências. Dentre os problemas de interesse neste contexto, obviamente, um estudo detalhado da  $EDQ_3$  emerge como natural e prioritário e constitui-se no principal objetivo do presente trabalho. As investigações serão conduzidas à imagem e semelhança de estudos anteriores realizados em dimensões dois e quatro. Serão ressaltados, sempre que possível, as semelhanças e as diferenças cruciais existentes.

A motivação para o presente trabalho, entretanto, não reside apenas na continuidade de investigações anteriores com o objetivo de construir-se um método universal para o tratamento das soluções perturbativas de  $TQC's$ . Existem motivações próprias ligadas à  $EDQ_3$ , de origem fenomenológicas, que por si só justificariam um estudo como este a que nos propomos no presente trabalho. Modelos formulados na dimensão  $D = 2 + 1$  não são apenas exemplos formais ilustrativos, mas possuem aplicações práticas na física do estado sólido, tal como, supercondutividade a altas temperaturas, Efeito Hall Quântico Fracionário[14], além de outros. Recentemente foram reveladas conexões entre certas previsões de TQC com baixa dimensionalidade e fenômenos detectados experimentalmente na física da matéria condensada.

As  $TQC's$  com baixa dimensionalidade, começaram a despertar interesse depois de descobertas feitas no final da década de 70 e início da década de 80. Em 1979, estudos de polímeros lineares mostraram que, os modelos de TQC unidimensionais coincidiam com a descrição dada pelos modelos contínuos para as cadeias dos polímeros.[15]

Por outro lado as teorias de “gauge” para dimensões ímpares começaram a despertar interesse quando, em 1981, R. Jackiw, S. Desser e S. Templeton[16], e separadamente N. Schonfeld[17], demonstraram que, no espaço-tempo tridimensional ( $D = 2 + 1$ ) uma teoria massiva e invariante de “gauge” pode ser construída pela adição de um termo topológico de Chern-Simons (CS) na Lagrangiana dos campos referentes às partículas interagentes. Estudos de teorias de “gauge” em  $D = 2 + 1$  são justificados pelas suas propriedades não usuais além de possuírem uma conexão com o comportamento de modelos a altas temperaturas em  $D = 3 + 1$  [18].

Além dos aspectos gerais acima citados, as teorias de “gauge” em dimensão  $D = 2 + 1$ , foram motivo de controvérsia na literatura recente precisamente devido a aspectos específicos das soluções perturbativas. O fenômeno importante e surpreendente da indução de massa para o bóson de “gauge” via correções radiativas, emerge a partir de manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes. Para sermos mais específicos, envolve o cálculo do tensor de polarização do vácuo, para o qual a contagem de potência revela grau linear de divergência. Portanto, um cálculo como este costuma estar associado a ambiguidades de várias sortes e pode ser dependente da regularização específica utilizada, o que é comprovado em investigações independentes de vários autores[19]. A RD, forte referência

para a consistência nos cálculos perturbativos, não fornece uma prescrição única[20] para o cálculo das amplitudes devido à presença de quantidades não extensíveis para qualquer dimensão espaço-temporal. Outros métodos de regularização[21] têm sido utilizados levando a conclusões controversas porém esperadas: os resultados, e portanto a fenomenologia, são dependentes da regularização utilizada e existem resultados diferentes ainda para o mesmo método. Dado que a estratégia para manipulações e cálculos a ser utilizada por nós na presente investigação é de caráter geral e permite mapeamento com outros métodos, espera-se que muitos aspectos ligados à controvérsia mencionada acima possam ser melhor entendidos.

O presente trabalho foi organizado do seguinte modo: No capítulo *II* estabeleceremos aspectos gerais de  $TQC$  bem como apresentaremos a  $EDQ_3$  como uma teoria de “gauge” e os elementos correspondentes desta teoria que compõem as regras de Feynman. Com o uso destas regras, construiremos as amplitudes perturbativas básicas, ao nível um loop, para as quais a contagem de potências revela a possibilidade de divergências. Aspectos gerais relacionados com a presença de divergências em amplitudes do cálculo perturbativo são também abordados. No capítulo *III*, com o auxílio da álgebra e propriedades das matrizes de Dirac, desenvolvemos as funções de Green associadas às amplitudes de tal forma a colocá-las na forma de uma combinação de integrais de Feynman e identificamos relações entre as funções de Green e relações de simetria a serem utilizadas como guias ou vínculos de consistência, impostos sobre as formas calculadas das amplitudes. No capítulo *IV* definimos, e consideramos várias situações e limites de interesse, um conjunto de funções em termos das quais as partes finitas das integrais de Feynman serão escritas quando o cálculo destas for considerado no capítulo *V*. Neste serão abordados aspectos gerais envolvidos no cálculo de integrais de Feynman bem como abordaremos brevemente a questão da regularização com referência explícita aos métodos RD e PV. Ainda no capítulo *V* introduziremos nossa estratégia de cálculo e, no contexto desta, desenvolveremos todas as integrais de Feynman necessárias para a solução das amplitudes perturbativas ao nível um “loop” da  $EDQ_3$ . De posse das expressões para as integrais de Feynman, no capítulo *VI*, construiremos formas explícitas para as Funções de Green e verificaremos sob que condições todos os vínculos de consistência, identificados no capítulo *III*, podem ser satisfeitos simultaneamente. Finalmente no capítulo *VII* apresentamos nossas conclusões, comentários finais e perspectivas futuras para a investigação considerada no presente trabalho.

# CAPÍTULO 2

## A Eletrodinâmica Quântica Tridimensional em Solução Perturbativa

### 2.1 Introdução

Quando utilizamos uma *TQC* para descrever processos físicos, estamos investigando as consequências de um conjunto de simetrias assumidas como fundamentais para a descrição da dinâmica de interações das partículas participantes dos referidos processos. Na construção de uma TQC, portanto, os ingredientes são os campos associados às partículas interagentes e as simetrias supostas relevantes para a descrição das interações. Estes ingredientes constituem um funcional, dos campos e de suas derivadas espaço-temporais com propriedades matemáticas definidas pelas simetrias assumidas na construção deste, que denominamos Lagrangiana. Para a construção de uma Lagrangiana o passo inicial é a identificação das partículas participantes da teoria às quais associamos campos. A cada um destes campos corresponderão termos que determinam a dinâmica dos campos livres. Quanto aos termos de interação, estes são construídos através de combinações dos campos presentes na teoria. Estas combinações são feitas de modo que sejam obtidos escalares de Lorentz (invariância frente as mudanças de sistemas de referência) e dos demais grupos de simetrias que julgarmos relevantes. Deste modo as simetrias, que desempenham um papel crucial na teoria, são o conhecimento inicial a ser implementado na construção desta, ou seja, são as nossas hipóteses a serem testadas. A parte livre sempre é bem conhecida e deve fornecer, após a aplicação do princípio variacional de Hamilton, as apropriadas equações de onda relativísticas para as partículas correspondentes. De uma maneira esquemática podemos representar a Lagrangiana de uma teoria na forma

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = L_i^F(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + L^I(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.1)$$

onde os  $\phi_i$  representam os campos associados as partículas presentes na teoria e  $\partial_\mu \phi_i$  suas primeiras derivadas espaço-temporais. O termo  $L_i^F$  representa a parte livre de cada campo participante e  $L^I$  caracteriza os termos de interação. Associado ao funcional, definimos a ação  $S$  como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.2)$$

onde está implícita a definição

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (2.3)$$

e,  $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$  é denominada de densidade Lagrangiana. As equações de movimento emergem quando aplicamos o cálculo variacional impondo a condição de extremização para  $S$ , ou seja,

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Isto nos fornecerá como condições as equações de Euler-Lagrange

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Teremos assim uma equação diferencial para cada campo participante da teoria de modo que, a parte livre obedecerá uma adequada equação de onda relativística. A parte que vem das interações envolverá outros campos da teoria e assim, obteremos um conjunto de equações diferenciais acopladas e possivelmente não-lineares. O passo seguinte é a quantização dos campos e a solução das equações de movimento. Deseja-se resolver as equações de movimento exatamente e obter uma descrição completa e detalhada da fenomenologia envolvendo as partículas interagentes. Ocorre que, para o tipo de equações diferenciais acopladas obtidas, as soluções exatas são raras mesmo para teorias simples. Para contornar tal problema torna-se necessário a adpção de métodos alternativos como, por exemplo, os métodos perturbativos, o que implica que a descrição dos processos físicos, através do formalismo que denominamos TQC, se dá invariavelmente no contexto de métodos perturbativos. É precisamente neste contexto que surgem os problemas matemáticos que servem como motivação e justificativa para o presente trabalho e investigações associadas. Assim para os nossos propósitos vamos considerar que existem métodos satisfatórios para a solução perturbativa das TQC's e que é possível uma adequada interpretação das séries perturbativas correspondentes através de regras de Feynman, sem nos preocuparmos com os procedimentos envolvidos para a construção de tais procedimentos[26]. Assumiremos então que, com as regras de Feynman, podemos construir as amplitudes físicas correspondentes a quaisquer processos físicos pertinentes à teoria que consideraremos em nossos estudos, a  $EDQ_3$  [35], em qualquer ordem perturbativa previamente escolhida. Nos deteremos então nos problemas surgidos para a interpretação consistente das amplitudes assim obtidas para que, com isso, tenhamos a possibilidade de apreciar predições fenomenológicas a partir da teoria construída. Estamos nos referindo especificamente ao

surgimento de divergências nas amplitudes perturbativas, que são os objetos específicos de nossas investigações.

Neste capítulo primeiramente discutiremos, de modo breve, os passos necessários para a construção da  $EDQ_3$  como uma teoria de “gauge”, então consideraremos as suas regras de Feynman para, em seguida, com estas, construímos as amplitudes associadas aos processos físicos de nosso interesse. Ao final faremos uma breve discussão de alguns aspectos do cálculo perturbativo relacionados à presença de divergências nas amplitudes consideradas.

## **2.2 A Eletrodinâmica Quântica Tridimensional como uma Teoria de “Gauge”**

Como dissemos na seção anterior, a construção de uma TQC qualquer implica no estabelecimento do funcional representado na equação (2.1) acima. Para estabelecermos a parte livre precisamos especificar os campos participantes, identificando os seus números quânticos relativos ao espaço-tempo. Os termos de interação serão estabelecidos pela imposição de condições determinadas pelas simetrias escolhidas. Estas, por sua vez, estão associadas ao fato de os campos poderem sofrer transformações, que preservam a Lagrangiana invariante. Através do teorema de Noether podemos estabelecer que, a toda invariância existe uma corrente conservada e a esta podem ser associados observáveis físicos[23]. Assim, primeiro identificamos quantidades conservadas em processos físicos pertinentes a uma fenomenologia específica, depois construímos os termos de interação da teoria de tal modo que as simetrias implementadas, que deixam a Lagrangiana invariante, correspondam às transformações que geram precisamente as correntes geradoras das quantidades conservadas na lei de conservação associada. Ou, de modo reverso, podemos simplesmente postular uma simetria específica e investigar as consequências fenomenológicas destas para um conjunto de partículas interagentes.

As simetrias, por outro lado, podem ser classificadas em duas classes básicas: as simetrias globais e as simetrias locais ou de “gauge”[24]. Neste trabalho, consideraremos a  $EDQ_3$  como uma teoria que obedece a uma simetria local abeliana  $U(1)$ .

Seguindo a sequência que indicamos acima, para a construção da  $EDQ_3$  primeiro precisamos identificar as partículas as quais estamos interessados em descrever a dinâmica de interações. Na  $EDQ_3$  estamos interessados em descrever a dinâmica do elétron, um campo fermiônico massivo e de spin  $1/2$ . Este, portanto, livre obedece a uma equação de onda relativística de Dirac[25]. Com tal consideração, a Lagrangiana fica com a parte livre determinada. Esta é dada por

$$L^F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (2.6)$$

Aqui,  $\psi(x)$  é o campo spinorial do elétron e  $m$  é a sua massa. As matrizes  $\gamma^\mu$ , por sua vez, são matrizes de Dirac definidas em três dimensões ( $\mu = 0, 1, 2$ ). Para nossos

propósitos, admitiremos a existência de uma realização bidimensional da álgebra de Dirac fornecida pelas matrizes de Pauli mais a matriz unidade. A forma explícita bem como os detalhes da álgebra e propriedades destas matrizes podem ser vistos no capítulo *III*. Sobre o funcional  $L^F$  notemos que, devido à bilinearidade deste no campo do elétron, a invariância deste frente a transformações globais  $U(1)$  é imediata. Percebemos isto efetuando as transformações[24]

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que independe das coordenadas espaço-temporais (por isso transformação global), isto é, supõe-se que os campos se transformam da mesma maneira independentemente do ponto no espaço-tempo. Para construirmos uma teoria de “gauge” local com simetria abeliana precisamos considerar que o parâmetro  $\alpha$  tenha uma dependência espaço-temporal, ou seja,  $\alpha = \alpha(x)$ . Com isso as transformações acima ficam

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Se voltarmos nossa atenção para a equação (2.6), perceberemos que o termo que possui a derivada se transformará de uma maneira diferente do caso global, pois agora o parâmetro  $\alpha(x)$  sofre a ação da operação de derivação. Explicitamente, teremos agora

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}'(x)i\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}\partial_\mu(e^{-i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu[\partial_\mu\alpha(x)]\psi(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto, o segundo termo quebra a invariância do funcional (2.6). Para restaurarmos a invariância, precisamos construir um termo derivativo que tenha a propriedade adequada, que é a denominada derivada covariante. Como guia sabemos que a transformação deve obedecer

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}[D_\mu\psi(x)] \quad (2.10)$$

para que a combinação  $\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)$  seja ao mesmo tempo invariante de “gauge” e vetor de Lorentz. Podemos definir a Derivada Covariante[3] como

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi. \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.11) em (2.6) obtemos um funcional invariante de “gauge” e Lorentz simultaneamente, isto é

$$L^F = \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m] \psi(x), \quad (2.12)$$

onde  $A_\mu$  é um campo vetorial denominado de campo de “gauge” (a transformação correspondente será a transformação de “gauge”) e a constante  $e$  poderá ser futuramente identificada com a carga elétrica, que desempenhará o papel de constante de acoplamento

elétron-fóton. Para que a transformação possa ser aplicada e a invariância satisfeita, o campo  $A_\mu$  deverá ter a propriedade de transformação

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.13)$$

Para que seja possível identificar  $A_\mu$  como uma variável dinâmica, precisamos acrescentar na expressão acima termos correspondentes a parte livre deste campo vetorial. Sabemos da teoria eletromagnética que as equações de Maxwell podem ser escritas em termos do tensor  $F_{\mu\nu}$  e seu correspondente dual. Sabemos também que a parte livre deve dar origem a equações de movimento específicas. Portanto, o termo invariante de “gauge” correspondente a parte livre do campo vetorial  $A_\mu$  pode ser escrito como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde se define

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.15)$$

Para verificar a invariância de  $F_{\mu\nu}$  basta notar que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu \left\{ A_\nu(x) - \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha(x) \right\} - \partial_\nu \left\{ A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \right\} \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Podemos relacionar ainda o tensor  $F_{\mu\nu}$  às derivadas covariantes como

$$(ieF_{\mu\nu})\psi(x) = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x) \quad (2.17)$$

e pela invariância, dada pela equação (2.8), escrevemos

$$e^{-i\alpha(x)} [F_{\mu\nu}\psi(x)] = F'_{\mu\nu}\psi(x)', \quad (2.18)$$

ou seja,

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)]' = e^{-i\alpha} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)]. \quad (2.19)$$

Assim teremos a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Podemos ainda incluir, no funcional acima, o chamado termo de “gauge fixing”, que nada mais é do que a caracterização da invariância de “gauge”. A escolha mais conveniente é dada por

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu) \quad (2.21)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro arbitrário. Lembramos ainda que o termo de “gauge fixing” não afeta os termos de interação da teoria. E assim obtemos o funcional da  $EDQ_3$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu). \quad (2.22)$$

É importante salientar neste ponto que, nas discussões acima, aprendemos a construir as derivadas covariantes com o intuito de manter a invariância de “gauge”, percebemos também que é possível construir uma infinidade destes termos que não aparecem no funcional acima. Este fato pode ser justificado pela condição de renormalizabilidade da teoria, isto é, derivadas de ordens maiores do que dois (e pares devido a invariância de Lorentz) não permitem que a teoria permaneça renormalizável.

Com o intuito de completar as discussões sobre a construção do funcional que descreve a  $EDQ_3$  faremos ainda alguns comentários sobre o termo de CS[35]. O termo de CS pode ser implementado diretamente no funcional acima mas, mesmo não estando presente inicialmente, ele é induzido pelas correções radiativas, ou seja, as consequências dinâmicas do funcional (2.22) com ou sem o termo de  $CS$  serão as mesmas. Como consequência, podemos afirmar que não existe  $EDQ_3$  “pura”. Por questão de organização iremos apresentar também a equação (2.22) com o termo de  $CS$  dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu) + \frac{\tau}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A^\alpha. \quad (2.23)$$

onde  $\tau$  corresponde a massa para o campo de “gauge”. Iremos nos deter, neste trabalho, às consequências dinâmicas referentes ao funcional (2.22), sem nos preocuparmos com o termo de CS, mas salientamos que a equação (2.23) é um caminho alternativo equivalente para a construção da  $EDQ_3$ . Lembramos apenas que o termo de CS não quebra a invariância de “gauge”, ou seja, se exigirmos a transformação dada pela equação (2.8) o funcional (2.23) será acrescido de uma derivada total dada por

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\rho \left( \frac{\mu}{4}\varepsilon^{\rho\nu\alpha}F_{\mu\nu}\alpha(x) \right) \quad (2.24)$$

sendo que a derivada total será interpretada como um termo de superfície ( pela aplicação do princípio variacional de Hamilton) e pela exigência de que a ação deve ser um ponto estacionário, este termo se anulará, permanecendo as equações de movimento inalteradas.

Como o objetivo de qualquer teoria é a descrição da dinâmica de interações, somos portanto, após a construção da teoria, levados a solução das equações de movimento. Nesta solução sempre estaremos preocupados na validade e nas consequências de nossas simetrias implementadas na construção da Lagrangiana. Quando partimos para a solução das equações de movimento percebemos que esta situação nos oferece três equações diferenciais acopladas envolvendo os campos presentes na teoria: os campos  $\bar{\psi}(x)$ ,  $A_\mu$  e  $\psi(x)$ . A solução para tais equações não está ao nosso alcance, o que nos leva a adoção de métodos alternativos como os métodos perturbativos. Neste contexto, percebeu-se que após a quantização dos campos e a expansão perturbativa, um certo conjunto de elementos pode ser identificado, sendo que, com tal conjunto a série perturbativa poderia ser construída diretamente. Este conjunto é formado pelos propagadores, os vértices e os fatores de simetria. Para que uma relação um-a-um entre os diagramas e a expressão matemática da série perturbativa para um processo físico específico possa ser construída, combinando propagadores, vértices e fatores de simetria, é necessário que se siga um conjunto de regras,

que são as regras de Feynman. Isso nos permite construir as amplitudes correspondentes a qualquer processo físico pertinente a  $EDQ_3$  sem a necessidade de construir a série perturbativa propriamente dita, apenas utilizando as regras diretamente. A idéia geral é de que cada termo possui uma representação diagramática, de modo que uma correspondente expressão matemática pode ser obtida atribuindo-se valores para cada um dos elementos que formam os diagramas e que compõem as regras de Feynman. Para a  $EDQ_3$  estas peças são as seguintes [35]:

- i) Propagadores

- Férmion de spin 1/2 (elétron);

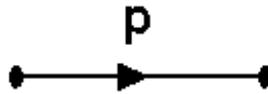


Figura 2.1: Representação diagramática para o propagador correspondente a um férmion de spin 1/2.

$$iS(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (2.25)$$

- Vetor sem massa (fóton);

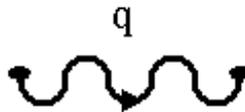


Figura 2.2: Representação diagramática para o propagador correspondente a um vetor sem massa.

$$iD(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (2.26)$$

onde:

$$\begin{cases} \xi = 1 \text{ "gauge" de Feynman} \\ \xi = 0 \text{ "gauge" de Landau.} \end{cases} \quad (2.27)$$

- ii) Vértice:

$$- (ie\gamma_\mu)_{\alpha\beta}. \quad (2.28)$$

Acima,  $\alpha$  e  $\beta$  são índices matriciais relativos ao espaço de Dirac-Lorentz (spinoriais),  $\mu$  e  $\nu$  são índices de Lorentz (espaço-tempo) e  $\xi$  é o parâmetro de “gauge”, necessário para a quantização da teoria com o campo vetorial sem massa (que não tem consequências dinâmicas).

Vamos então considerar os processos básicos da teoria.

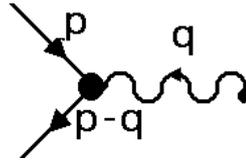


Figura 2.3: Representação diagramática correspondente ao vértice da interação elétron-fóton.

## 2.3 Processos Físicos

Dentro do tratamento perturbativo, o estudo de processos físicos torna-se possível após o estabelecimento das regras de Feynman. As partículas iniciais e finais associadas a seus campos caracterizam um determinado processo físico. Quando estivermos trabalhando com cálculos perturbativos, temos que a expansão perturbativa é tomada numa ordem previamente escolhida, sendo que o papel da teoria é estabelecer como e o que pode ocorrer enquanto as partículas interagem para gerar os estados finais. Depois que escolhermos a ordem perturbativa a tarefa é a construção de todos os diagramas possíveis capazes de conectar as linhas externas, utilizando para isso os propagadores e os vértices. Ao longo deste trabalho estaremos interessados em alguns processos elementares de modo que possamos estudar aspectos dos cálculos perturbativos de nosso interesse. Consideraremos estes a seguir.

### 2.3.1 Propagação do Elétron na presença da interação

É um dos processos mais simples que encontramos na  $EDQ_3$  e sua caracterização é dada pela presença de duas linhas fermiônicas externas. O primeiro termo da série perturbativa corresponde à propagação livre do elétron, sendo que os demais termos estão relacionadas as correções em ordem crescente na constante de acoplamento em relação a parte livre. A figura (2.4) contém dois diagramas representando a ordem mais baixa.

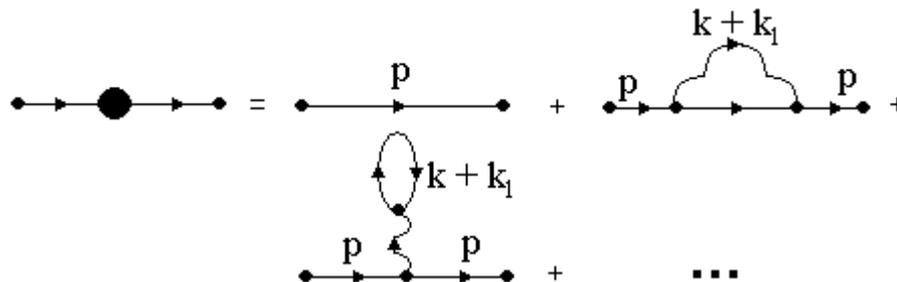


Figura 2.4: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.

O segundo diagrama da figura acima é denominado de auto-energia do elétron por excitação de um fóton e, de acordo com as regras de Feynman, a este diagrama deve ser

associada a expressão matemática dada por

$$\Sigma^{1\gamma}(p) = (-ie)^2 \Sigma(k_1, k_2, m), \quad (2.29)$$

onde definimos a função de Green

$$\begin{aligned} \Sigma(k_1, k_2, m) = & (-ie)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma_\nu \right] \times \right. \\ & \left. \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)^\mu (k + k_1)^\nu}{(k + k_1)^2} \right] \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Na expressão acima a rotulação dos momentos das linhas internas é arbitrária e a conservação de energia e momento nos fornece a relação com o momento externo carregado pelo elétron, ou seja,

$$k_2 - k_1 = p. \quad (2.31)$$

O último diagrama da figura (2.4) é denominado de “tadpole”. A expressão matemática associada a este, devido as regras de Feynman é

$$\Sigma(p) = (-ie)^2 \gamma_\nu \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] T_\mu^V(k_1, m), \quad (2.32)$$

onde definimos a função de Green

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \right\}. \quad (2.33)$$

Novamente podemos perceber que a rotulação adotada para o momento carregado pelo propagador fermiônico interno é arbitrária. O diagrama com a presença da função de green  $T_\mu^V$  não é um diagrama irreduzível de uma partícula e, portanto, não deve contribuir para a auto-energia do elétron. Ele foi incluído propositalmente para mostrar a presença da função de green  $T_\mu^V$  que será muito importante em nossas considerações futuras.

Uma contagem de potências, das expressões matemáticas relacionadas as amplitudes obtidas na consideração do processo físico acima, nos revela que as integrais associadas às funções de Green  $\Sigma(k_1, k_2, m)$  e  $T_\mu^V(k_1, m)$  são quantidades indefinidas, já que as integrais são divergentes. Para a função  $T_\mu^V(k_1, m)$  temos um grau de divergência quadrático, enquanto que, para  $\Sigma(k_1, k_2, m)$  a divergência é logarítmica. Com tais considerações, somos levados a pensar (em princípio) que a teoria que acabamos de considerar, que deveria descrever a dinâmica do elétron na presença das interações, ou seja, a interação do elétron com o campo eletromagnético, não fornece números finitos. Voltaremos a este aspecto mais tarde.

### 2.3.2 Auto-Energia do Fóton

O processo físico caracterizado pela existência de duas linhas externas bosônicas (fótons), a auto-energia do fóton, é dado em ordem mais baixa em termos de um diagrama contendo

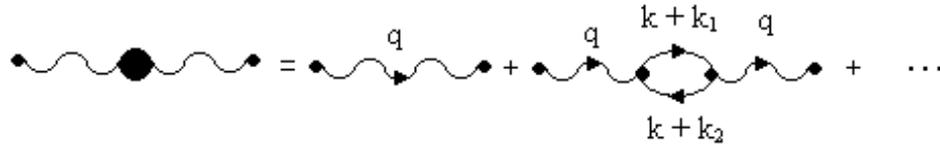


Figura 2.5: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do fóton.

um “loop” fermiônico (figura (2.5)). Esta contribuição deverá ser escrita, de acordo com as regras de Feynman, como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (-)(-ie)^2 T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m). \quad (2.34)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m)$  é a função de Green fermiônica de dois pontos bi-vetorial definida como

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \right\}. \quad (2.35)$$

Notemos que o momento externo carregado pelo fóton está relacionado aos momentos arbitrários das linhas internas, devido à conservação de energia e momento, pela relação  $k_2 - k_1 = q$ . A expressão acima é denominada de tensor de polarização, que revela, pela contagem de potências, uma divergência linear. Novamente a teoria fornece uma amplitude divergente para um processo físico básico.

### 2.3.3 Correção do vértice da interação

O processo físico definido por duas linhas fermiônicas externas e uma bosônica caracteriza o vértice da interação elétron-fóton. Por isso os diagramas que correspondem a esta série perturbativa são denominados correções de vértice. A contribuição de mais baixa ordem para este processo corresponde a um diagrama árvore. A segunda contribuição é aquela associada a excitação de um fóton, como pode ser verificado na figura (2.6). As regras de

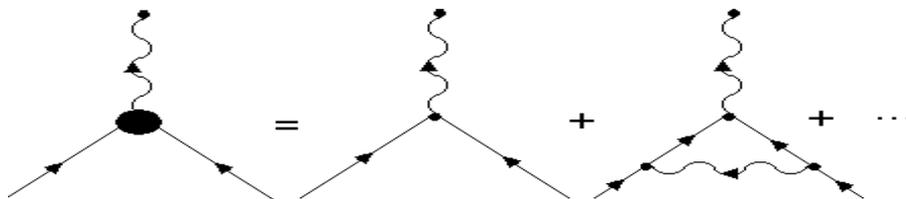


Figura 2.6: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a interação elétron-fóton.

Feynman nos fornecem a expressão matemática correspondente ao segundo dos diagramas da figura.(2.6), dada por

$$V^\mu(p, p') = -e^3 \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m). \quad (2.36)$$

onde a função de Green  $\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m)$  é definida como

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \gamma_\alpha \frac{1}{[(k+k_2)-m]} \gamma_\mu \frac{1}{[(k+k_3)-m]} \gamma_\nu \right] \times \left[ g^{\alpha\nu} + (\xi - 1) \frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_1)^\nu}{(k+k_1)^2} \right] \frac{1}{(k+k_1)^2} \right\}. \quad (2.37)$$

A contagem de potências nos revela o caráter finito. Pelas restrições impostas pelos princípios de conservação de energia e momento, obtemos as seguintes relações entre os momentos carregados pelas linhas internas e aqueles das linhas externas

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = p \\ k_3 - k_2 = q \\ k_3 - k_1 = p - q. \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.3.4 O Decaimento Fotônico do Fóton

Este processo é caracterizado pela existência de três linhas bosônicas externas. Ele não é permitido devido a maneira pela qual construímos a teoria, visto que na Lagrangiana não existe nenhum termo trilinear no campo do fóton. Mas as regras de Feynman permitem que as linhas externas sejam conectadas por um “loop” puramente fermiônico. A aparente geração de interações entre os campos via diagramas da série perturbativa, mas que são proibidos de ocorrerem diretamente (devido as simetrias implementadas na construção da mesma), é uma característica do tratamento perturbativo no contexto de teorias de “gauge”. A figura acima representa as correções ditas radiativas para a interação entre

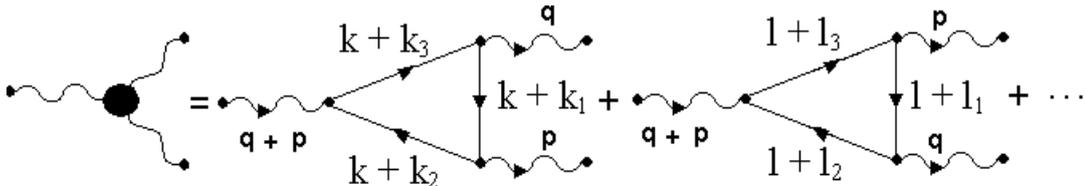


Figura 2.7: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente ao decaimento fotônico do fóton.

três fótons. Na  $EDQ_3$ , como uma teoria invariante de “gauge”, esta interação não é permitida. Para que seja possível a manutenção do poder de predição da teoria, com as simetrias supostas relevantes implementadas na construção da mesma, é necessário que os nossos cálculos dos correspondentes diagramas forneçam um resultado identicamente nulo, sendo que esse resultado deve ser obtido naturalmente. O cancelamento idêntico da amplitude, associada ao processo proibido pela teoria pode ser utilizado como teste para que um método possa ser considerado consistente. Podemos portanto, utilizar este fato para discutir aspectos gerais dos esquemas para as manipulações e cálculos perturbativos. No processo físico em questão, as regras de Feynman nos fornecem a seguinte expressão

matemática

$$T_{\beta\nu\alpha}^{\gamma\gamma\gamma}(k_1, k_2, k_3, m) = -ie^3 T_{\beta\nu\alpha}^{VVV}(k_1, k_2, k_3, m), \quad (2.39)$$

onde definimos a função de Green triplamente vetorial como

$$T_{\beta\nu\alpha}^{VVV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\beta \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma_\alpha \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \right\}. \quad (2.40)$$

A contagem de potências revela uma divergência logarítmica e as relações entre os momentos das linhas externas e internas são dadas por

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = p \\ k_1 - k_3 = q \\ k_2 - k_3 = p + q. \end{cases} \quad (2.41)$$

## 2.4 Cálculo Perturbativo e Parâmetros Físicos

Das discussões feitas nas seções precedentes, obtivemos como resultado estruturas divergentes, devido a sua solução perturbativa. As contribuições da série perturbativa para os diagramas provém de várias ordens no parâmetro perturbativo. Acontece que, toda vez que escolhemos uma ordem superior no parâmetro perturbativo, precisamos redefinir os observáveis físicos identificados na ordem anterior. Com isso, conseguimos fazer com que a teoria, como um todo, mantenha o seu significado e o poder de predição. Para esclarecer estes aspectos, tomaremos como exemplo o propagador livre do elétron, que está associado a parte livre da teoria;

$$iS(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}. \quad (2.42)$$

Notemos na expressão acima que, a teoria não pode determinar dois dos parâmetros que aparecem, ou seja, os parâmetros necessários para que a teoria tenha poder de predição, devem ser fixados por escolha ou normalização. Ainda, estes parâmetros devem ser identificados com observáveis físicos. Tal raciocínio não é aplicável apenas a parte livre da teoria mas para cada termo que aparece na Lagrangiana. Na equação (2.42) estes termos são a massa e a constante de normalização do campo. A escolha da massa pode ser feita pela identificação do pólo da equação (2.42) e é dada por

$$m = -[iS(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0}. \quad (2.43)$$

Com isso, o resíduo (coeficiente de  $\not{p}$ ) que está relacionado à normalização do campo livre fica determinada por

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} [iS(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = 1. \quad (2.44)$$

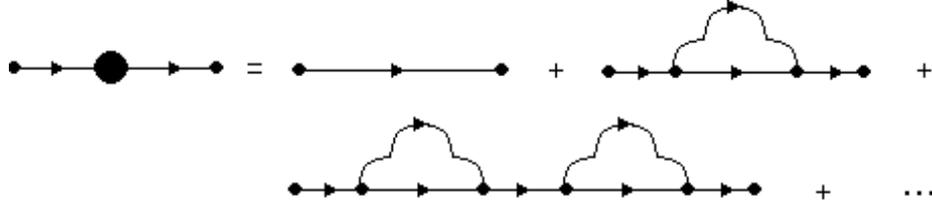


Figura 2.8: Representação diagramática para a expansão perturbativa correspondente a auto-energia do elétron.

Lembramos que as escolhas feitas acima são arbitrárias. As correções podem ser feitas pela consideração do processo de auto-energia, mostrado diagramaticamente na figura (2.8)

Se denominarmos as contribuições dadas pela bolha para a auto-energia em uma certa ordem no parâmetro perturbativo de  $-i\Sigma(\not{p})$ , podemos escrever a série perturbativa como

$$iS'(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \dots \quad (2.45)$$

O primeiro fator, na expressão acima, é comum a todos os termos, desse modo podemos escrever

$$iS'(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \left\{ 1 + (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} + (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \dots \right\}. \quad (2.46)$$

Uma reorganização na expressão acima pode ser feita nos permitindo escrever

$$iS'(\not{p}) = iS(\not{p}) \{ 1 + \Sigma(\not{p})S(\not{p}) + [\Sigma(\not{p})S(\not{p})]^2 + \dots \}. \quad (2.47)$$

Com a série somada obtemos

$$iS'(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p}) + i\varepsilon}. \quad (2.48)$$

A expressão acima corresponde ao propagador do elétron corrigido pelo termo correspondente à auto-energia. Podemos perguntar agora se as expressões (2.43) e (2.44) ainda são válidas, ou seja,  $m$  ainda é a massa da teoria e o coeficiente de  $\not{p}$  ainda é a unidade? Verificamos então que

$$- [iS'(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = m + [\Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=0}, \quad (2.49)$$

e neste caso deveremos ter

$$[\Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=0} = 0, \quad (2.50)$$

para que  $m$  continue sendo a massa da teoria.

Para o cálculo do resíduo (análogo à equação (2.44)) teremos

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} [iS'(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = 1 - \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=0} \quad (2.51)$$

portanto, para o resíduo manter a unidade teremos que ter

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=0} = 0. \quad (2.52)$$

As condições (2.50) e (2.52) geralmente não são satisfeitas, precisamos então, especificar alguma ordem no cálculo perturbativo e reparametrizar a teoria, reidentificando os parâmetros físicos. Para isso, notemos que a condição dada pela expressão (2.52) envolve uma derivada em relação a  $\not{p}$  tomando  $\not{p} = 0$ , isso nos leva a uma expansão em Taylor para a auto-energia, ou seja, podemos escrever

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(\not{p}) + \not{p}\Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(0) + \dots, \quad (2.53)$$

onde  $\tilde{\Sigma}(0)$  são os termos de ordem superior. Assim teremos para a equação (2.49)

$$- [iS'(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = m + \Sigma(0), \quad (2.54)$$

e para a equação (2.51)

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} [iS'(\not{p})]^{-1} \Big|_{\not{p}=0} = 1 - \Sigma'(0). \quad (2.55)$$

Por sua vez a expressão (2.48) fica

$$iS'(\not{p}) = \frac{i}{[1 - \Sigma(0)] \left[ \not{p} - \frac{[m + \Sigma(0)]}{[1 - \Sigma(0)]} - \frac{\tilde{\Sigma}(\not{p})}{[1 - \Sigma(0)]} + i\varepsilon \right]}. \quad (2.56)$$

Para uma redução da notação podemos definir

$$Z_\Psi = \frac{1}{[1 - \Sigma(0)]} \quad (2.57)$$

e

$$M = \frac{[m + \Sigma(0)]}{[1 - \Sigma(0)]} \quad (2.58)$$

então escrevemos

$$iS'(\not{p}) = \frac{iZ_\Psi}{\left[ \not{p} - M - Z_\Psi \tilde{\Sigma}(\not{p}) + i\varepsilon \right]}. \quad (2.59)$$

No sentido da reparametrização da teoria, a expressão acima indica que devemos identificar  $M$  como a massa física da partícula e  $Z_\Psi$  como a normalização do campo na ordem de  $\Sigma(\not{p})$  escolhida. Notemos ainda que isto seria necessário ainda que as contribuições não estivessem contaminadas pelas divergências, mas pelo simples fato de estarmos usando cálculos perturbativos onde, a expansão é realizada na constante de acoplamento

enquanto que, na Lagrangiana, os observáveis físicos aparecem como coeficientes dos campos e dos momentos. A contribuição dada pelas divergências reside no fato de complicar o procedimento de reparametrização. Partimos então para o processo de regularização, isto é, a manipulação e cálculo das amplitudes para atender às necessidades da reparametrização. Os aspectos que acabamos de discutir desempenham um papel crucial em soluções perturbativas de teorias quânticas de campos, pois deles depende a preservação do poder de predição. E é destes aspectos que nos ocuparemos nos capítulos seguintes.

# CAPÍTULO 3

## Vínculos de Consistência: Relações entre Funções de Green e Relações de Simetria

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, construímos a  $EDQ_3$  como uma teoria de “gauge” e, com o uso da teoria de perturbação, consideramos alguns processos físicos relacionadas a ela. Para cada diagrama da série perturbativa, com o uso das regras de Feynman, escrevemos uma expressão matemática correspondente. Nestas expressões, por sua vez, identificamos um conjunto de funções de Green para as quais a contagem de potências do momento do “loop”, a princípio, revelou a presença de divergências. Entretanto, os processos descritos pelas referidas amplitudes são passíveis de observação, o que implica em dizer que o nosso aparato teórico deveria fornecer resultados finitos. Em razão disto, devemos partir para a construção de uma adequada reinterpretação das amplitudes através da reparametrização. Para que isto possa ser feito, nos passos intermediários, somos obrigados a manipular e efetuar cálculos com quantidades matemáticas indefinidas (divergentes). Além disto, notamos também que, nas funções de Green, da maneira como foram definidas, aparecem operações relacionadas às matrizes de Dirac. Por este motivo, consideraremos, por primeiro, neste capítulo, a álgebra das matrizes de Dirac, a fim de que possamos escrever as funções de Green como uma combinação de integrais de Feynman, algumas destas divergentes, as quais serão então tratadas no capítulo V. Adotamos tal organização com a intenção de enfatizar os detalhes envolvidos nas manipulações e cálculos contendo estruturas divergentes, que é o principal aspecto envolvido no presente trabalho.

Consideraremos ainda, no presente capítulo, aquilo que denominamos vínculos de consistência para as amplitudes. Estes nada mais são do que consequências de identidades estabelecidas ao nível dos integrandos que constituem as amplitudes, que são as denominadas relações entre funções de Green, consequências das propriedades de simetria im-

plementadas na construção da Lagrangiana, que são as denominadas relações de simetria ou identidades de Ward[5] e ainda resultados advindos de teoremas gerais baseados nas simetrias de Lorentz e CPT tal qual o teorema de Furry[27]. A razão disto está na necessidade de testar os resultados produzidos no contexto da estratégia que adotaremos, para as necessárias manipulações e cálculos envolvendo quantidades indefinidas, após os cálculos terem sido realizados. A consistência do método virá somente com a preservação de todos os vínculos possíveis de serem impostos sobre as amplitudes[10]. Assim os vínculos identificados neste capítulo serão verificados um a um após os cálculos terem sido completados.

### 3.2 A Álgebra das Matrizes de Dirac

Toda vez que desejamos descrever a dinâmica de partículas relativísticas de spin  $\frac{1}{2}$  somos remetidos à equação de Dirac. Em tal equação aparecem as chamadas matrizes  $\gamma$  de Dirac que obedecem uma álgebra não comutativa. Em razão disto, na definição e no decorrer dos cálculos das amplitudes físicas que consideramos no contexto da  $EDQ_3$ , somos obrigados a fazer uso de propriedades que envolvem manipulações com as matrizes  $\gamma$ . Se tomarmos a comparação da álgebra das matrizes  $\gamma$  da dimensão física  $D = 3 + 1$  (ou qualquer dimensão par) com o da dimensão  $D = 2 + 1$  (ou qualquer dimensão ímpar) perceberemos diferenças importantes. Neste trabalho consideraremos as matrizes e suas propriedades para o caso específico  $D = 2 + 1$  mantendo, entretanto, a maior proximidade possível com desenvolvimentos análogos efetuados em  $D = 3 + 1$ . Começaremos então por definir uma representação para as matrizes  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2)$ . Adotaremos[16]

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

As matrizes  $\sigma^i$ , são as usuais matrizes de Pauli. O conjunto das matrizes satisfaz à relação de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I,\tag{3.2}$$

onde  $I$  é a matriz identidade, e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{3.3}$$

e a relação de comutação

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu = 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma^\alpha.\tag{3.4}$$

Na equação acima,  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$  é o tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita normalizado a 1 para  $\mu\nu\alpha = 012$  e as correspondentes permutações pares e a  $-1$ , para as permutações ímpares. Das relações (3.2) e (3.4) decorre que

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} I - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \gamma^\alpha. \quad (3.5)$$

Com isso podemos estabelecer relações úteis para as manipulações pretendidas nas amplitudes. Como tal teremos

$$\gamma_\nu \gamma^\nu = 3 \quad (3.6)$$

e

$$\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu = -\gamma_\mu. \quad (3.7)$$

A contração de matrizes  $\gamma$  com quadrivetores é representada por

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu. \quad (3.8)$$

Podemos facilmente estabelecer as identidades

$$\not{k}\not{p} + \not{p}\not{k} = 2k \cdot p, \quad (3.9)$$

$$\gamma_\mu \not{k} + \not{k} \gamma_\mu = 2k_\mu, \quad (3.10)$$

$$\gamma^\mu \not{k}\not{p} \gamma_\mu = \not{p}\not{k} + 2k \cdot p, \quad (3.11)$$

$$\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = -\not{k} \quad (3.12)$$

e

$$\gamma^\mu \not{k}\not{p}\not{q} \gamma_\mu = -2\not{q}\not{p}\not{k} + \not{k}\not{p}\not{q}. \quad (3.13)$$

Consideremos agora os traços envolvendo as matrizes  $\gamma$ . Teremos

$$Tr \{I\} = 2, \quad (3.14)$$

$$Tr \{\gamma_\mu\} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{Tr \{\gamma_\mu \gamma_\nu\}}{2} = g_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

$$\frac{Tr \{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta\}}{2} = -i\varepsilon_{\nu\beta\mu}, \quad (3.17)$$

$$\frac{Tr \{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta\}}{2} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \varepsilon_{\alpha\eta\mu} \varepsilon_{\nu\beta\eta}, \quad (3.18)$$

$$\frac{Tr \{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\phi\}}{2} = -ig_{\beta\phi} \varepsilon_{\alpha\nu\mu} - g_{\mu\alpha} i\varepsilon_{\beta\phi\nu} + i\varepsilon_{\beta\phi\omega} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \quad (3.19)$$

e

$$\frac{Tr \{ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\phi \gamma_\theta \}}{2} = g_{\phi\theta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\phi\theta} \varepsilon_{\nu\beta\delta} \varepsilon_{\alpha\delta\mu} - \varepsilon_{\phi\theta\beta} \varepsilon_{\alpha\nu\mu} - g_{\mu\alpha} \varepsilon_{\phi\theta\sigma} \varepsilon_{\beta\sigma\nu} + \varepsilon_{\phi\theta\sigma} \varepsilon_{\beta\sigma\omega} \varepsilon_{\nu\omega\eta} \varepsilon_{\alpha\eta\mu}. \quad (3.20)$$

A construção das matrizes que obedecem a álgebra definida em (3.2) e (3.4) pode ser feita em qualquer dimensão previamente escolhida. Diferenças significativas existem quando as dimensões são pares ou ímpares[31]. Como tal, podemos ver que não é possível estabelecer uma matriz  $\gamma^4$  (análoga a matriz  $\gamma^5$  na dimensão  $D = 3 + 1$ ) que anticomute com todas as matrizes  $\gamma^\mu$  estabelecidas no conjunto acima. O que se materializa no fato de não ser possível definir transformações quirais (e conseqüentemente simetria quiral) na dimensão  $D = 2 + 1$  (e demais dimensões ímpares) utilizando uma representação fundamental. Os resultados acima obtidos são essencialmente idênticos àqueles de outras dimensões ímpares exceto pelo valor do traço da matriz identidade. Com a álgebra das matrizes de Dirac estabelecida, podemos passar para o estudo das funções de Green considerando-as uma a uma.

### 3.3 A função de um ponto vetorial

Na consideração do processo correspondente à propagação do elétron na presença da interação, definimos a função de Green de um ponto vetorial  $T_\mu^V$ , associada ao diagrama “tadpole”, como

$$T_\mu^V(k_1, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1] - m} \right\}. \quad (3.21)$$

A representação diagramática pode ser vista na figura (3.1) abaixo. A filosofia que ado-

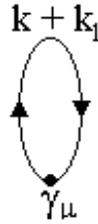


Figura 3.1: Diagrama correspondente à função de Green de um ponto vetorial.

tamos é a de escrever  $T_\mu^V$  como uma combinação de integrais de Feynman. Para tal, utilizamos a identidade

$$\frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1] - m} = \frac{(\not{k} + \not{k}_1) + m}{[(k + k_1)^2 - m^2]}, \quad (3.22)$$

e o fato de que

$$(\not{k} + \not{k}_1) = (k + k_1)^\alpha \gamma_\alpha, \quad (3.23)$$

para escrevermos a  $T_\mu^V$  na forma

$$\begin{aligned}
 T_\nu^V &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{Tr \{ \gamma_\nu [(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m] \}}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
 &= (k+k_1)^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{Tr \{ \gamma_\nu \gamma_\alpha \}}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
 &\quad + m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{Tr \{ \gamma_\nu \}}{[(k+k_1)^2 - m^2]}. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Com as propriedades dos traços dadas por (3.15) e (3.16), obtemos a expressão na forma desejada, ou seja,

$$T_\nu^V = 2 \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2]} + k_{1\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \right\}. \tag{3.25}$$

Uma contagem de potências de  $k$  nos revela que as integrais acima divergem quadraticamente e linearmente, respectivamente, o que caracteriza os maiores graus de divergência que encontramos na  $EDQ_3$ . Notemos que a expressão acima é relativamente simples mas, nos processos que iremos considerar na sequência, seremos apresentados a estruturas demasiadamente longas e complexas, o que nos inspira a adotar uma simplificação que nos permitirá uma compactação da notação. Para tal, percebemos que os termos que aparecem nos denominadores das integrais de Feynman, associados ao propagador do elétron, são bastante semelhantes diferindo apenas pelo momento  $k_i$  carregado pela linha interna. Definimos então

$$E_i = E(k_i, m) = [(k+k_i)^2 - m^2]. \tag{3.26}$$

Com isso a expressão para  $T_\nu^V$  fica

$$T_\nu^V = 2 \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_1} + k_{1\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_1} \right\}. \tag{3.27}$$

### 3.4 A auto energia do elétron por excitação de um fóton

Quando consideramos a propagação do elétron na presença da interação, encontramos o diagrama de auto-energia contendo uma linha fermiônica e uma bosônica e que tem associado a função de Green definida como

$$\begin{aligned}
 \Sigma(k_1, k_2, m) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \gamma^\mu \frac{1}{[(k+k_2) - m]} \gamma_\nu \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_1)^\nu}{(k+k_1)^2} \right] \frac{1}{(k+k_1)^2} \right\}, \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

representada diagramaticamente na figura (3.2). Para obter a reorganização em termos das

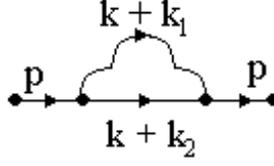


Figura 3.2: Representação diagramática da função de Green associada a auto-energia do elétron por excitação de um fóton.

integrais de Feynman começaremos efetuando os produtos indicados, separando os termos dependentes do parâmetro de gauge,  $\xi$ , daqueles que independem deste. Obtemos dessa maneira a combinação

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m), \quad (3.29)$$

onde

$$\Sigma_1(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu}{[(k + k_2)^2 - m^2] (k + k_1)^2} \right] \quad (3.30)$$

e

$$\Sigma_2(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{(\not{k} + \not{k}_1)[(\not{k} + \not{k}_2) + m](\not{k} + \not{k}_1)}{(k + k_1)^4 [(k + k_2)^2 - m^2]} \right]. \quad (3.31)$$

Para reescrever as expressões encontradas acima, em termos das integrais de Feynman, precisamos desenvolver os numeradores utilizando a álgebra das matrizes de Dirac. Para o numerador de (3.30) podemos utilizar (3.6) e (3.12) para escrever

$$\gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu = -(\not{k} + \not{k}_2) + 3m. \quad (3.32)$$

Por sua vez, para o numerador de (3.31) podemos utilizar a relação (3.5) e reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] (\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \\ &\quad + (\not{k} + \not{k}_1) [(k + k_2)^2 - m^2] \\ &\quad - (\not{k} + \not{k}_1) [(k_2 - k_1)^2 - m^2]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo os resultados (3.32) e (3.33) acima nas expressões (3.30) e (3.31), respectivamente, obteremos

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k_1, k_2, m) &= -\gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[(k + k_1)^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad - (\not{k}_2 - 3m) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2] [(k + k_2)^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(k_1, k_2, m) = & \gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2]^2} \\
& + \not{k}_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2} \\
& - [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\
& - \not{k}_1 [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\
& + [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2] [(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Neste ponto notamos que a adoção de uma notação adequada nos permitirá a compactação das expressões. Para tanto, introduziremos no denominador das integrais que aparecem acima a notação definida em (3.26). Além disso, introduziremos também uma representação análoga para os termos que aparecem no denominador das integrais de Feynman que estão associados a propagadores do fóton. Adotaremos

$$P_i = [(k+k_i)^2]. \quad (3.36)$$

Com isso ficaremos com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(k_1, k_2, m) = & -\gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{P_1 E_2} \\
& - (\not{k}_2 - 3m) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{P_1 E_2} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(k_1, k_2, m) = & \gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{(P_1)^2} \\
& + \not{k}_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(P_1)^2} \\
& + [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(P_1) E_2} \\
& - [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{(P_1)^2 E_2} \\
& - \not{k}_1 [(k_2 - k_1)^2 - m^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(P_1)^2 E_2}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Notemos no resultado das expressões acima uma nova combinação de integrais de Feynman com diferentes graus de divergências. Outro aspecto que podemos considerar é a presença do propagador do fóton, o qual possui massa nula, ocasionando a presença de divergências infravermelhas e ultravioletas.

### 3.5 A função de Green de dois pontos bi-vetorial

Definimos, no capítulo anterior, esta função por

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1] - m} \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2] - m} \right\}. \quad (3.39)$$

Ela foi encontrada quando calculamos a auto-energia do fóton. Sua representação diagramática é dada na figura (3.3).

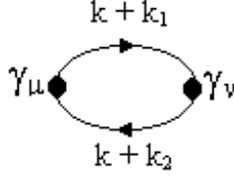


Figura 3.3: Diagrama correspondente à função de Green de um dois pontos bi-vetorial.

Com a utilização da identidade (3.22) para os dois propagadores, conseguimos colocar a expressão acima na forma

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) + m]} \gamma_\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) + m]} \right\}. \quad (3.40)$$

Então, com a utilização dos resultados dos traços dados por (3.16), (3.17) e (3.18) escrevemos

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}(T^{PP}) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha} (T^{AP})^\alpha, \quad (3.41)$$

onde utilizamos as seguintes definições:

$$T_{\mu\nu} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[(k + k_1)^\mu (k + k_2)^\nu + (k + k_1)^\nu (k + k_2)^\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}, \quad (3.42)$$

$$T^{PP} = (-) 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \quad (3.43)$$

e

$$T_\mu^{AP} = -2mi(k_1 - k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.44)$$

Na definição das estruturas  $T^{PP}$  e  $T_\mu^{AP}$  os rótulos não desempenham papel relevante no estudo das divergências da  $EDQ_3$ . A notação adotada é semelhante a encontrada na dimensão  $D = 3 + 1$  onde as estruturas acima são identificadas com as funções de Green de dois pontos axial- pseudo-escalar (figura (3.4)–a) e duplamente pseudo-escalar (figura (3.4)–b). Lembramos que, devido a inexistência da matriz  $\gamma^4$  (análoga a matriz  $\gamma^5$  em quatro dimensões) as funções  $T^{PP}$  e  $T_\mu^{AP}$  não podem ser definidas em  $D = 2 + 1$  dimensões. Voltando para o cálculo de  $T_{\mu\nu}^{VV}$ , notamos que  $T_{\mu\nu}$  pode ser desenvolvida para

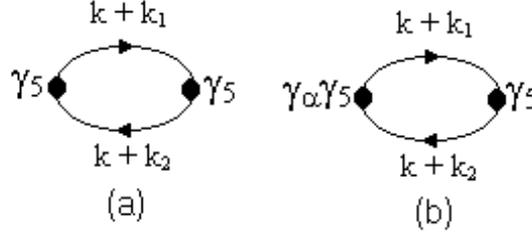


Figura 3.4: Diagrama correspondente às funções de Green de dois pontos: (a) duplamente pseudo-escalar e (b) axial-pseudo-escalar, em  $D = 3 + 1$ .

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} = & 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 & + 2(k_1+k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 & + 2(k_1+k_2)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 & + 2(k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Por sua vez, o termo  $T^{PP}$  pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned}
 T^{PP} = & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2]} \\
 & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]} \\
 & + [(k_1 - k_2)^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Nos passos intermediários, para obter a expressão acima, utilizamos a identidade

$$(k+k_i) \cdot (k+k_j) = \frac{1}{2} [(k+k_i)^2 - m_i^2] + \frac{1}{2} [(k+k_j)^2 - m_j^2] - \frac{1}{2} (k_i - k_j)^2 - 2m. \quad (3.47)$$

Neste ponto notamos que é possível reduzir ainda mais a notação definida em (3.26) adotando a seguinte definição

$$E_i E_j \dots E_k = E_{ij\dots k}. \quad (3.48)$$

Com isso teremos

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} = & 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{12}} \\
 & + 2(k_1+k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{12}} \\
 & + 2(k_1+k_2)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{12}} \\
 & + 2(k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}}, \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$T^{PP} = (-) \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_2} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_1} + [(k_1 - k_2)^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}} \right\} \quad (3.50)$$

e

$$T_\mu^{AP} = -2mi(k_1 - k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}}. \quad (3.51)$$

Com isso colocamos a função de Green na forma pretendida.

### 3.6 Decaimento Fotônico do Fóton

No capítulo anterior percebemos que, aparentemente, correções radiativas geram interações através de diagramas as quais são proibidas de ocorrerem ao nível árvore na teoria. O processo que consideramos que se enquadra nestas características é o decaimento fotônico do fóton. A este processo, representado na figura (3.5), associamos a função de Green de três pontos tri-vetorial, definida como

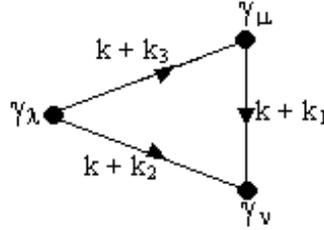


Figura 3.5: Diagrama correspondente à função de Green triplamente vetorial.

$$T_{\mu\nu\phi}^{VVV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k' + k'_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k' + k'_2 - m]} \gamma_\phi \frac{1}{[k' + k'_3 - m]} \right\}. \quad (3.52)$$

Quando estudamos a função de dois pontos bi-vetorial percebemos que esta, após o cálculo dos traços, poderia ser escrita em termos de outras estruturas de forma conveniente. Aplicando a mesma filosofia para equação acima podemos adotar a seguinte decomposição

$$T_{\mu\nu\phi}^{VVV} = T_{\mu\nu\phi} + g_{\phi\nu} T_\mu^{PPV} + g_{\phi\mu} T_\nu^{PVP} + g_{\mu\nu} T_\phi^{VPP} + A_{\mu\nu\phi}, \quad (3.53)$$

onde definimos

$$T_{\mu\nu\phi} = +2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ (k + k_1)^\mu (k + k_2)^\nu (k + k_3)^\phi \right. \\ - (k + k_1)^\phi (k + k_2)^\mu (k + k_3)^\nu \\ + (k + k_1)^\phi (k + k_2)^\nu (k + k_3)^\mu \\ + (k + k_1)^\nu (k + k_2)^\mu (k + k_3)^\phi \\ + (k + k_1)^\mu (k + k_2)^\phi (k + k_3)^\nu \\ \left. + (k + k_1)^\nu (k + k_2)^\phi (k + k_3)^\mu \right\}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}
 T_{\mu}^{PVP} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \{ & - [(k + k_2) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_1)^{\mu} \\
 & + [(k + k_1) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_2)^{\mu} \\
 & - [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] (k + k_3)^{\mu} \}, \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\nu}^{PPV} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \{ & - [(k + k_2) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_1)^{\nu} \\
 & - [(k + k_1) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_2)^{\nu} \\
 & + [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] (k + k_3)^{\nu} \}, \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\phi}^{VPP} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \{ & + [(k + k_2) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_1)^{\phi} \\
 & - [(k + k_1) \cdot (k + k_3) - m^2] (k + k_2)^{\phi} \\
 & - [(k + k_1) \cdot (k + k_2) - m^2] (k + k_3)^{\phi} \} \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 A_{\mu\nu\phi} = & -2im^3 \varepsilon^{\nu\phi\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \\
 & -2img_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ (k + k_2)^{\beta} (k + k_3)^{\theta} \varepsilon^{\phi\theta\beta} \right. \\
 & \quad \left. + [k_3 - k_2]_{\beta} [k + k_1]_{\omega} \varepsilon^{\beta\phi\omega} \right\} \\
 & -2im \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ [k_3 - k_2]_{\beta} [k + k_1]_{\mu} \varepsilon^{\beta\phi\nu} \right. \\
 & \quad + [k_3 - k_2]_{\beta} [k + k_1]_{\nu} \varepsilon^{\beta\phi\mu} \\
 & \quad + \left[ (2k_{\alpha} k_{\phi} + 2k_{1\alpha} k_{\phi}) + (k + k_1)_{\alpha} (k_3 + k_2)_{\phi} \right] \varepsilon^{\alpha\nu\mu} \\
 & \quad + 2(k + k_2)^{\beta} (k + k_3)^{\phi} \varepsilon^{\nu\beta\mu} \\
 & \quad - 2(k + k_2)^{\mu} (k + k_3)^{\theta} \varepsilon^{\phi\theta\nu} \\
 & \quad \left. + (k + k_2)^{\nu} (k + k_3)^{\theta} \varepsilon^{\phi\theta\mu} \right\}. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

A definição das estruturas foi feita propositalmente de maneira a obtermos uma sistematização semelhante a encontrada em dimensão  $D = 3 + 1$ . Tais estruturas são aquelas que aparecem quando consideramos as amplitudes correspondentes quando nos vértices os operadores são quantidades pseudo-escalares e vetoriais como indicado na figura abaixo.

Podemos ainda desenvolver cada um dos termos acima para que possamos escrevê-los como uma combinação de integrais de Feynman, seguindo os mesmos procedimentos estabelecidos nas subseções anteriores. Começamos por definir e considerar a estrutura

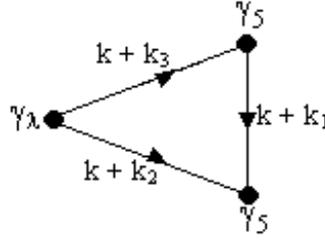


Figura 3.6: Diagrama correspondente à função de Green vetorial-pseudo-escalar-pseudo-escalar.

$t_\mu^{PVP}$ , que nada mais é do que  $T_\mu^{PVP}$  com a omissão do sinal de integração nos momentos. Com o auxílio da identidade (3.47) obtemos

$$\begin{aligned}
 t_\mu^{PVP} = & - \left\{ \frac{[(k+k_2)^2 - m^2] + [(k+k_3)^2 - m^2] - [(k_2 - k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_1)^\mu \\
 & + \left\{ \frac{[(k+k_1)^2 - m^2] + [(k+k_3)^2 - m^2] - [(k_1 - k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_2)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{[(k+k_1)^2 - m^2] + [(k+k_2)^2 - m^2] - [(k_1 - k_2)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_3)^\mu. \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Realizando algumas simplificações escrevemos

$$\begin{aligned}
 t_\mu^{PVP} = & - \left\{ \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_1)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{+1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} (k+k_1)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{-[(k_2 - k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_1)^\mu \\
 & + \left\{ \frac{+1}{[(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_2)^\mu \\
 & + \left\{ \frac{+1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} (k+k_2)^\mu \\
 & + \left\{ \frac{-[(k_1 - k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_2)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{1}{[(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_3)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{+1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_3)^\mu \\
 & - \left\{ \frac{-[(k_1 - k_2)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_3)^\mu. \quad (3.60)
 \end{aligned}$$

Reagrupando alguns termos obtemos

$$\begin{aligned}
 t_{\mu}^{PVP} = & -2 \left\{ \frac{k^{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
 & - \left\{ \frac{(k_1+k_3)^{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{(k_2-k_1)^{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\} \\
 & - \left\{ \frac{(k_3-k_2)^{\mu}}{[(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{[(k_2-k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_1)^{\mu} \\
 & - \left\{ \frac{[(k_1-k_3)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_2)^{\mu} \\
 & + \left\{ \frac{[(k_1-k_2)^2]}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} (k+k_3)^{\mu}. \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned}
 T_{\mu}^{PVP} = & -2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}}{E_{13}} \\
 & - (k_3+k_1)_{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{13}} \\
 & + (k_2-k_1)_{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}} \\
 & - (k_3-k_2)_{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{23}} \\
 & + [(k_3+k_1)_{\mu} (k_2-k_1)^2 \\
 & + (k_1-k_2)_{\mu} (k_3-k_1)^2 + \\
 & - 2k_{1\mu} (k_3-k_1) \cdot (k_2-k_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \\
 & - 2 [(k_3-k_1) \cdot (k_2-k_1) - (k_2-k_1)^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}}{E_{123}}. \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Com o mesmo procedimento obtemos expressões para  $T_{\nu}^{PPV}$  e  $T_{\phi}^{VPP}$ , que são dadas

por

$$\begin{aligned}
T_\lambda^{VPP} = & -2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\lambda}{E_{23}} \\
& - (k_3 - k_1)_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{13}} \\
& - (k_2 - k_1)_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}} \\
& - (k_3 + k_2)_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{23}} \\
& + 2 [(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\lambda}{E_{123}} \\
& + [(k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)^2 \\
& - (k_1 - k_2)_\lambda (k_3 - k_1)^2 \\
& + 2k_{1\lambda} (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

e

$$\begin{aligned}
T_\phi^{PPV} = & -2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{12}} \\
& + (k_3 - k_1)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{13}} \\
& - (k_2 + k_1)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{12}} \\
& + (k_3 - k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{23}} \\
& + [(k_1 + k_2)_\phi (k_3 - k_1)^2 \\
& - (k_3 - k_1)_\phi (k_2 - k_1)^2 \\
& - 2k_{1\phi} (k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1)] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \\
& - 2 [(k_3 - k_1) \cdot (k_2 - k_1) - (k_3 - k_1)^2] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Para a estrutura  $T_{\mu\nu\phi}$ , após uma reorganização escrevemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\phi} = & 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ (k + k_1)^\mu \left[ (k + k_2)^\nu (k + k_3)^\phi - (k + k_2)^\phi (k + k_3)^\nu \right] \right. \\
& + (k + k_1)^\nu \left[ (k + k_2)^\mu (k + k_3)^\phi - (k + k_2)^\phi (k + k_3)^\mu \right] \\
& + (k + k_1)^\phi \left[ (k + k_2)^\nu (k + k_3)^\mu - (k + k_2)^\mu (k + k_3)^\nu \right] \\
& + 2 (k + k_2)^\phi \left[ (k + k_1)^\nu (k + k_3)^\mu - (k + k_1)^\mu (k + k_3)^\nu \right] \\
& \left. + 4 (k + k_2)^\phi (k + k_1)^\mu (k + k_3)^\nu \right\}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Definindo as estruturas

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\nu\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+k_1)^\mu \left[ (k+k_2)^\nu (k+k_3)^\phi - (k+k_2)^\phi (k+k_3)^\nu \right]}{E_{123}}, \\
 J_{\mu\nu\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+k_1)^\nu \left[ (k+k_2)^\mu (k+k_3)^\phi - (k+k_2)^\phi (k+k_3)^\mu \right]}{E_{123}}, \\
 L_{\mu\nu\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+k_1)^\phi \left[ (k+k_2)^\nu (k+k_3)^\mu - (k+k_2)^\mu (k+k_3)^\nu \right]}{E_{123}}, \\
 K_{\mu\nu\phi} &= 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+k_2)^\phi \left[ (k+k_1)^\nu (k+k_3)^\mu - (k+k_1)^\mu (k+k_3)^\nu \right]}{E_{123}}
 \end{aligned}$$

e

$$F_{\mu\nu\phi} = 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_2)^\phi (k+k_3)^\nu}{E_{123}}, \quad (3.66)$$

podemos então escrever

$$T_{\mu\nu\phi} = 2(M_{\mu\nu\phi} + J_{\mu\nu\phi} + L_{\mu\nu\phi} + K_{\mu\nu\phi} + F_{\mu\nu\phi}). \quad (3.67)$$

Desenvolvendo o numerador das expressões acima podemos identificar as integrais de Feynman. Teremos então

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\nu\phi} &= (k_3 - k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ (k_{2\nu} k_{3\phi} - k_{2\phi} k_{3\nu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\mu} (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\mu} (k_3 - k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\mu} (k_{2\nu} k_{3\phi} - k_{2\phi} k_{3\nu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

e

$$\begin{aligned}
 J_{\phi\mu\nu} &= (k_3 - k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ (k_2 - k_3)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ (k_{2\mu} k_{3\phi} - k_{2\phi} k_{3\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\nu} (k_2 - k_3)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\nu} (k_3 - k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\nu} (k_{2\mu} k_{3\phi} - k_{2\phi} k_{3\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}. \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

Este resultado pode ser relacionado a  $M_{\phi\mu\nu}$ . Para tal basta permutar  $\mu \Leftrightarrow \nu$ . O mesmo ocorre com  $L_{\phi\mu\nu}$ , cuja permutação  $\mu \Leftrightarrow \phi$  resulta em  $M_{\phi\mu\nu}$ . Então teremos

$$\begin{aligned}
 L_{\phi\mu\nu} &= (k_3 - k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ (k_{2\mu} k_{3\lambda} - k_{2\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\lambda} (k_2 - k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\phi} (k_3 - k_2)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ k_{1\phi} (k_{2\nu} k_{3\mu} - k_{2\mu} k_{3\nu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}. \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

Agora, para o termo  $K_{\phi\mu\nu}$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
 K_{\phi\mu\nu} &= 2(k_1 - k_3)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu k_\phi}{E_{123}} \\
 &- 2(k_1 - k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ 2(k_{1\mu} k_{3\nu} - k_{1\nu} k_{3\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}} \\
 &+ 2k_{2\phi} (k_{1\mu} - k_{3\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
 &+ 2k_{2\phi} (k_{3\mu} - k_{1\nu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
 &+ 2k_{2\phi} (k_{1\mu} k_{3\nu} - k_{1\nu} k_{3\mu}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}. \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

Finalmente, escrevemos o termo que carregará a divergência de grau logarítmico na forma:

$$\begin{aligned}
 F_{\phi\mu\nu} = & 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu k_\phi}{E_{123}} \\
 & + 4(k_2)_\phi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{E_{123}} \\
 & + 4(k_1)_\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu k_\phi}{E_{123}} \\
 & + 4(k_3)_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\phi}{E_{123}} \\
 & + 4k_{2\phi} k_{3\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{E_{123}} \\
 & + 4k_{1\mu} k_{2\phi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\nu}{E_{123}} \\
 & + 4k_{1\mu} k_{3\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\phi}{E_{123}} \\
 & + 4k_{1\mu} k_{2\phi} k_{3\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}}.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

É importante notar a semelhança dos termos acima com aqueles correspondentes ao caso quadridimensional. Por sua vez o termo  $A_{\mu\nu\phi}$ , que é específico da dimensão  $D = 2+1$ , fica

$$\begin{aligned}
 A_{\mu\nu\phi} = & -2im^3 \varepsilon^{\nu\phi\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \\
 & -2img_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ (k+k_2)^\beta (k+k_3)^\theta \varepsilon^{\phi\theta\beta} \right. \\
 & \quad \left. + [k_3 - k_2]_\beta [k+k_1]_\omega \varepsilon^{\beta\phi\omega} \right\} \\
 & -2im \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{123}} \left\{ [k_3 - k_2]_\beta [k+k_1]_\mu \varepsilon^{\beta\phi\nu} \right. \\
 & \quad + [k_3 - k_2]_\beta [k+k_1]_\nu \varepsilon^{\beta\phi\mu} \\
 & \quad + \left[ (2k_\alpha k_\phi + 2k_{1\alpha} k_\phi) + (k+k_1)_\alpha (k_3+k_2)_\phi \right] \varepsilon^{\alpha\nu\mu} \\
 & \quad + 2(k+k_2)^\beta (k+k_3)^\phi \varepsilon^{\nu\beta\mu} \\
 & \quad - 2(k+k_2)^\mu (k+k_3)^\theta \varepsilon^{\phi\theta\nu} \\
 & \quad \left. + (k+k_2)^\nu (k+k_3)^\theta \varepsilon^{\phi\theta\mu} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

### 3.7 Correção de Vértice

Quando consideramos o processo físico caracterizado por duas linhas fermiônicas e uma bosônica externas, a interação elétron-fóton, nós definimos a função de Green

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2] - m} \gamma^\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3] - m} \gamma^\lambda \right] \times \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + \frac{(\xi - 1)(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \right\}. \quad (3.74)$$

A representação diagramática pode ser acompanhada na figura (3.7). Para separarmos os

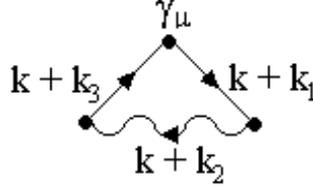


Figura 3.7: Representação diagramática para a função de Green associada à correção de vértice da interação elétron-fóton.

termos pela dependência no parâmetro de “gauge” introduzimos a decomposição

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) + (\xi - 1) \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m), \quad (3.75)$$

onde

$$\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2] - m} \gamma^\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3] - m} \gamma^\nu \right\} \left\{ \frac{1}{(k + k_1)^2} \right\} \quad (3.76)$$

e

$$\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ (\not{k} + \not{k}_1) \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2] - m} \gamma^\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3] - m} (\not{k} + \not{k}_1) \right\} \left\{ \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2} \right\}. \quad (3.77)$$

Os dois termos podem ser colocados em formas mais convenientes. Primeiro fazemos

$$\Lambda_1^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\{\gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\nu\}}{P_1 E_{23}} \quad (3.78)$$

e então

$$\Lambda_2^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\{(\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1)\}}{(P_1)^2 E_{23}}. \quad (3.79)$$

A utilização das identidades estabelecidas na seção (3.2) nos permite escrever

$$\begin{aligned} \gamma_\nu [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma^\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] \gamma^\nu &= -2k^\mu \not{k} + k^2 \gamma^\mu \\ &+ \not{k} \gamma^\mu \not{k}_3 + \not{k}_2 \gamma^\mu \not{k} + \not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3 \\ &- 2\not{k}_3 \gamma^\mu \not{k} - 2\not{k} \gamma^\mu \not{k}_2 - 2\not{k}_3 \gamma^\mu \not{k}_2 \\ &+ m [6k^\mu + 2(k_3 + k_2)^\mu] \\ &+ m (\gamma^\mu \not{k}_2 + \not{k}_3 \gamma^\mu) \\ &- m^2 \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (3.80)$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{P_1 E_{23}} \\
 & + \{ [2m(k_3 + k_2)^\mu - 2\not{k}_3 \gamma^\mu \not{k}_2 + 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3] \\
 & + m [\gamma^\mu \not{k}_2 + \not{k}_3 \gamma^\mu - m \gamma^\mu] \} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{P_1 E_{23}} \\
 & - 2\gamma^\alpha \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k_\alpha}{P_1 E_{23}} \\
 & + [2(-\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + \not{k}_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha - \not{k}_3 \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3) + 6mg^{\alpha\mu}] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{P_1 E_{23}}.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

A fim de obter uma reorganização semelhante em  $\Lambda_2^\mu$  primeiro desenvolvemos os produtos indicados no numerador da expressão (3.79) para obter

$$\begin{aligned}
 & (\not{k} + \not{k}_1) [(\not{k} + \not{k}_2) + m] \gamma_\mu [(\not{k} + \not{k}_3) + m] (\not{k} + \not{k}_1) = \\
 & (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\
 & + m(\not{k} + \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_3) (\not{k} + \not{k}_1) \\
 & + m(\not{k} + \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_2) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
 & + m^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1).
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Em seguida reorganizamos cada termo convenientemente com o auxílio da álgebra das matrizes de Dirac. Assim procedendo teremos para o primeiro termo da expressão (3.82) acima

$$\begin{aligned}
& (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) = \\
& - (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& - [(k + k_1)^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
& - [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^2 [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
& + [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& - 2(k + k_1)^2 (k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k} + \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& - (k + k_1)^2 (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1) (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + (k + k_1)^4 \gamma_\mu \\
& + (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
& + (k + k_1)^2 [(k + k_3)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
& + [(k + k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu \\
& - (k + k_1)^2 [(k_1 - k_3)^2 - m^2] \gamma_\mu \\
& - [(k_1 - k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_2 - \not{k}_1) \gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

enquanto que, para o segundo termo obtemos

$$\begin{aligned}
(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3)(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_3) \\
& - 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
& - 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1) (\not{k}_3 - \not{k}_1) \\
& + [(k + k_1)^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
& + [(k + k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu \\
& - [(k_1 - k_3)^2 - m^2] (\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

O terceiro, por sua vez, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 (\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) &= (k + k_1)^2 \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
 &+ [(k + k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
 &- [(k_1 - k_2)^2 - m^2] \gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) \\
 &+ (k + k_1)^2 (\not{k} + \not{k}_2)\gamma_\mu \\
 &- 2(k + k_1)_\mu (k + k_1)^2 \\
 &- 2(k + k_1)_\mu (\not{k}_2 - \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_1)
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

e, por fim, para o quarto termo adotamos a forma

$$(\not{k} + \not{k}_1)\gamma_\mu(\not{k} + \not{k}_1) = -(k + k_1)^2 \gamma_\mu + 2(k + k_1)_\mu (\not{k} + \not{k}_1). \tag{3.86}$$

Basta agora substituir as expressões (3.83), (3.84), (3.85) e (3.86) em (3.79) e a reorganização pretendida para  $\Lambda_2^\mu$  se tornará possível. Assim ficamos com

$$\begin{aligned}
 \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) &= \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[P_1]^2} \\
 &- [\gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) + (p^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[P_1]^2} \frac{1}{E_2} \\
 &- [(q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu + (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[P_1]^2} \frac{1}{E_3} \\
 &- [q - m] \gamma_\alpha \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_3} \\
 &- \gamma^\mu \gamma_\alpha [\not{p} - m] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_2} \\
 &- (q - m) \gamma^\mu (\not{p} - m) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{P_1 E_{23}} \\
 &+ [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
 &+ (p^2 - m^2) (q - m) \not{k}_1 \gamma^\mu \\
 &+ 2k_1^\mu (q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) \\
 &+ (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[P_1]^2} \frac{1}{E_{23}} \\
 &+ [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (\not{p} - m) \\
 &+ 2k_1^\mu (q - m) \gamma^\alpha (\not{p} - m) \\
 &+ 2(q - m) \not{k}_1 (\not{p} - m) g^{\mu\alpha} \\
 &+ (p^2 - m^2) (q - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_{23}} \\
 &+ 2(q - m) \gamma_\alpha (\not{p} - m) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\alpha}{[P_1]^2} \frac{1}{E_{23}}.
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

### 3.8 Relações Entre Funções de Green

Os resultados das seções anteriores mostram que, as amplitudes correspondentes aos processos físicos considerados, em solução perturbativa, podem ser escritas como uma combinação de integrais de Feynman, algumas delas de caráter divergente. Estas integrais terão que ser tratadas de modo consistente apesar das indefinições intrínsecas. A fim de testar os resultados obtidos, no contexto do tratamento que adotaremos para as integrais divergentes, nos utilizaremos de toda e qualquer condição que possa ser imposta sobre as formas calculadas das amplitudes físicas. Com este fim, nesta seção, consideraremos um conjunto de exigências que podem desempenhar o papel de guias de consistência, antes de efetuarmos as manipulações propriamente ditas. Tendo isto em mente começaremos identificando um conjunto de identidades entre integrandos capazes de relacionar funções de Green com diferentes números de pontos. Tais identidades, portanto, serão identificadas antes da introdução do sinal de integração. Uma destas relações pode ser estabelecida com o auxílio da identidade

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\} = \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} - \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]}. \quad (3.88)$$

Tomando os traços de Dirac e efetuando a integração sobre o momento  $k$ , conseguimos identificar uma relação entre as duas funções de Green definidas nas equações (3.21) e (3.39). Ou seja

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\nu^V(k_2, m) - T_\nu^V(k_1, m). \quad (3.89)$$

De modo idêntico para o outro índice de Lorentz, teremos

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) = T_\mu^V(k_2, m) - T_\mu^V(k_1, m). \quad (3.90)$$

A maneira pela qual obtivemos as relações acima não é única. Elas poderiam ser construídas utilizando-se métodos da álgebra de correntes. Uma representação diagramática das identidades construídas acima é dada na figura (3.8). A interpretação das relações acima é simples. O cálculo explícito de  $T_{\mu\nu}^{VV}$  e a sua posterior contração com o momento externo deve permitir a identificação, no resultado então obtido, da diferença de duas funções de um ponto  $T_\mu^V$  dependentes de momentos arbitrários  $k_1$  e  $k_2$ .

Utilizando o mesmo raciocínio podemos estabelecer relações entre todas as funções de Green puramente fermiônicas sendo que, o cálculo explícito e a posterior contração com um momento externo, sempre resultará numa diferença entre funções com uma unidade menor no número de pontos. Portanto, para a função de Green de três pontos triplamente vetorial, devemos obter uma diferença entre duas funções de dois pontos bi-vetorial. Tal identificação pode ser feita com o auxílio da identidade

$$(k_1 - k_2)^\nu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} \right\} = \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m} - \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_3) - m}. \quad (3.91)$$

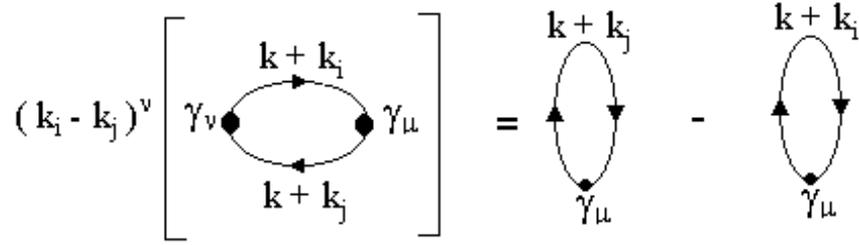


Figura 3.8: Representação diagramática para as identidades (3.89) e (3.90).

Depois da tomada dos traços de Dirac e da integração sobre o momento  $k$ , em ambos os lados, obtemos

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_2, m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_1, m), \quad (3.92)$$

de modo esperado. De maneira similar podemos estabelecer

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\nu}^{VV}(k_1, k_2, m) - T_{\lambda\nu}^{VV}(k_3, k_2, m) \quad (3.93)$$

e

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_3, m) - T_{\nu\mu}^{VV}(k_1, k_2, m). \quad (3.94)$$

Uma representação diagramática das eqs. acima pode ser observada na figura (3.9).

As relações obtidas nos informam que, se calcularmos explicitamente a função de três pontos triplamente vetorial,  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ , e depois contraírmos esta com o momento externo, devemos identificar no resultado a diferença entre duas funções de dois pontos bi-vetoriais.

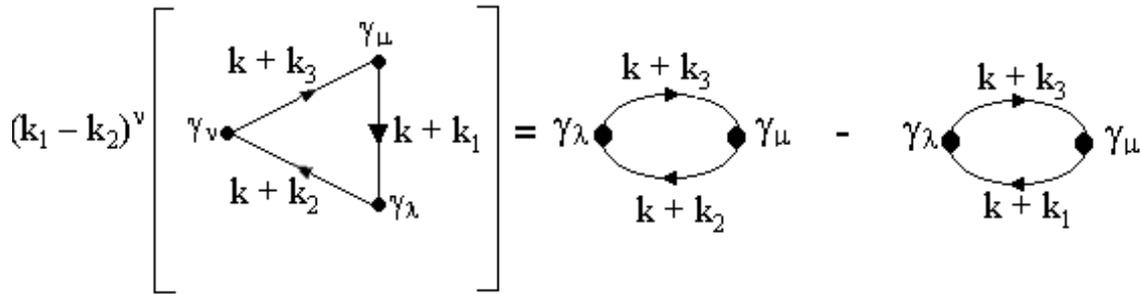


Figura 3.9: Representação diagramática para a identidade (3.92).

As relações estabelecidas acima são úteis quando nas amplitudes aparece apenas o propagador do elétron. Nos casos em que aparece também o propagador do fóton podemos construir uma classe análoga de relações entre funções de Green. Para tal consideramos inicialmente a identidade

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)_\mu \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \\ &= \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda - \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right]. \end{aligned} \quad (3.95)$$

A estrutura mais simples desta classe de amplitudes é aquela relacionada com a auto-energia do elétron por excitação de um fóton. O propagador bosônico, que não envolve matrizes de Dirac, pode ser inserido em ambos os lados da expressão acima de modo que após a tomada dos traços de Dirac e a integração nos momentos teremos

$$\begin{aligned}
 (k_3 - k_2)_\mu & \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \times \right. \\
 & \left. \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \right\} = \\
 & - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right] \\
 & + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \gamma^\nu \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m]} \gamma^\lambda \right] \left[ \frac{g_{\nu\lambda}}{(k + k_1)^2} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

É fácil perceber, na expressão acima, que o termo entre chaves do lado esquerdo da igualdade pode ser identificado com a função de Green correspondente a correção de vértice e que os dois termos do lado direito representam funções de Green associadas a auto-energia do elétron por excitação de um fóton. Assim podemos escrever a relação acima como

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma(k_1, k_2, m) - \Sigma(k_1, k_3, m). \tag{3.97}$$

Isso completa o conjunto de relações entre funções de Green que envolvem as estruturas matemáticas que aparecem na definição das amplitudes da  $EDQ_3$  ao nível um “loop”. A característica mais importante que deve ser notada é que as relações entre funções de Green envolvem sempre funções com diferentes números de pontos. Isso implica numa relação entre integrais com diferentes graus de divergência. Notemos também que, quando um dos lados possui um grau de divergência maior do que o logarítmico, poderemos ter a presença de ambiguidades devido ao fato de termos adotado rótulos arbitrários para os momentos carregados pelas linhas internas. Mesmo assim, esperamos que as relações entre funções de Green sejam satisfeitas independentemente das escolhas para as arbitrariedades envolvidas. Na verdade esperamos que resultado algum dependa das escolhas que devem ser feitas para a construção das amplitudes físicas tais como: rótulos atribuídos para os momentos carregados pelas linhas internas, método de regularização ou a escala comum às partes finitas e divergentes. Após o cálculo explícito das integrais de Feynman, identificadas nas expressões para as amplitudes consideradas, as relações aqui estabelecidas serão verificadas nas formas explícitas das amplitudes. Consideremos agora outro importante tipo de vínculo de consistência a ser imposto sobre as amplitudes calculadas.

### 3.9 Relações de Simetria

As relações que estabelecemos na seção anterior podem ser efetuadas para quaisquer funções de Green com um número de pontos igual ou superior a dois. Estas relações impõem vínculos sobre as amplitudes que são combinações destas funções ou até mesmo sobre o próprio valor de algumas amplitudes. Entretanto, elas não correspondem, na maioria dos casos, às próprias relações de simetria ou identidades de Ward, apesar de estarem profundamente relacionadas. No capítulo *II* construímos a  $EDQ_3$  como uma teoria invariante de “gauge” e, a essa invariância temos associado a conservação da corrente vetorial. Matematicamente isso deve se manifestar, em nossos cálculos, pelo resultado nulo que deve ser obtido toda vez que contraírmos uma amplitude física, carregando um índice vetorial de Lorentz, com um momento externo possuindo este mesmo índice. Começaremos por discutir tais aspectos tomando o caso mais simples: a função de Green de um ponto vetorial contraída com o momento externo correspondente, ou seja,

$$k_1^\mu T_\mu^V = 0. \quad (3.98)$$

Para a função de dois pontos  $T_{\mu\nu}^{VV}$  temos a presença de dois índices vetoriais o que nos leva a efetuar duas contrações, portanto, devemos ter

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 0 \quad (3.99)$$

e

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0. \quad (3.100)$$

As duas relações acima, com o uso das identidades (3.89) e (3.90), também nos fornecem que

$$T_\mu^V(k_2) - T_\mu^V(k_1) = 0 \quad (3.101)$$

e uma forma análoga para o outro índice vetorial.

A análise para a função de três pontos tri-vetorial é um pouco mais complexa pois, além de termos três índices vetoriais (o que implica em três contrações) temos que somar dois diagramas correspondentes ao canal direto e canal cruzado. Isto quer dizer que, estamos simetrizando os estados finais. Nós escrevemos isto na forma

$$(k_3 - k_2)^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_3 - l_2)^\lambda [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0, \quad (3.102)$$

$$(k_1 - k_3)^\mu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_2 - l_1)^\mu [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0 \quad (3.103)$$

e

$$(k_2 - k_1)^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1, k_2, k_3; m)] + (l_1 - l_3)^\nu [T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1, l_2, l_3; m)] = 0. \quad (3.104)$$

Notemos que, as diferenças  $(k_i - k_j)$  representam os momentos externos associados aos vértices, e que a rotulação utilizada é a mais geral possível, tanto para o canal cruzado

como para o canal direto. As relações entre os momentos externos, para o canal direto, são dados de acordo com

$$\begin{cases} k_3 - k_2 = p + q \\ k_3 - k_1 = p \\ k_1 - k_2 = q, \end{cases} \quad (3.105)$$

enquanto que para o canal cruzado temos

$$\begin{cases} l_3 - l_2 = p + q \\ l_3 - l_1 = p \\ l_1 - l_2 = q. \end{cases} \quad (3.106)$$

A princípio, poderíamos pensar que, a adoção de rotulação arbitrária diferente para os diferentes canais é desnecessária. Entretanto isso não é correto, pois as arbitrariedades envolvidas são características próprias do cálculo de cada diagrama e não podemos supor que ambiguidades surgidas em determinado diagrama sejam idênticas as surgidas noutra diagrama qualquer, ainda que topologicamente idênticos.

Pelo conjunto de simetrias que implementamos na construção da Lagrangiana para a  $EDQ_3$ , também é relevante para o nosso estudo considerarmos as implicações de teoremas baseados em simetrias fundamentais, como por exemplo, o teorema de Furry. Este estabelece que, todo o cálculo de qualquer processo físico envolvendo um número ímpar de linhas bosônicas externas e apenas uma espécie de férmion circulando no “loop”, devemos obter um resultado identicamente nulo para a amplitude correspondente. Tais implicações também servem para estabelecer guias de consistência para as manipulações envolvendo divergências do cálculo perturbativo. Para os nossos propósitos isso significa que deveremos ter para as amplitudes que consideramos, os seguintes resultados

$$T_\mu^V(k_1, m) = 0 \quad (3.107)$$

e

$$T_{\mu\nu\lambda}^{VVV}(k_1, k_2, k_3, m) + T_{\mu\nu\lambda}^{VVV}(l_1, l_2, l_3, m) = 0. \quad (3.108)$$

Todas as relações entre funções de Green e propriedades de simetria estabelecidas neste capítulo serão retomadas nos capítulos futuros após o cálculo explícito das amplitudes, o que passa antes pelo tratamento das integrais de Feynman divergentes que encontramos, tarefa da qual nos ocuparemos a seguir.

# CAPÍTULO 4

## Organização das partes finitas das Integrais de Feynman

### 4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores mostramos que, para o cálculo de todos os processos físicos pertinentes a  $EDQ_3$ , somos levados a solucionar as Integrais de Feynman. Notamos também que estas estruturas matemáticas podem ser divergentes ou finitas. Para aquelas que divergem somos obrigados a adotar algum método de regularização, ou filosofia equivalente, de modo que possamos colocá-las numa forma adequada para a reparametrização, ou seja, precisamos separar as partes finitas daquelas que contém as divergências. Ocorre que, mesmo para integrais divergentes, encontraremos partes finitas que conterão a dependência com os momentos e massas carregadas pelas partículas, de modo que as integrais finitas sempre estarão presentes. Outro aspecto importante, relacionado às partes finitas é a verificação dos chamados vínculos de consistência onde uma boa organização e conhecimento das funções que constituem as partes finitas das amplitudes desempenham papel crucial. Ainda, na reparametrização, no cálculo de amplitudes com a presença do fóton ou em regularizações baseadas em distribuições tridimensionais, somos levados a tomar limites cinemáticos específicos bem como conhecer propriedades gerais das amplitudes como partes imaginárias relacionadas a unitariedade. Veremos que todas estas situações de interesse podem ser vistas como meros estudos das propriedades de um conjunto de funções que definiremos no presente capítulo. A sistematização que proporemos consiste em estabelecermos convenções ou estruturas que facilitem as manipulações nos passos intermediários e, ao mesmo tempo, permitem uma melhor análise dos resultados. É possível mostrar que as integrais de Feynman, em  $D = 3 + 1$ , admitem tal sistematização que permite uma melhor organização dos resultados para as amplitudes bem como o estudo de suas propriedades[28].

Seguindo este mesmo raciocínio para o estudo da  $EDQ_3$ , introduziremos neste capítulo um conjunto de funções em termos das quais iremos escrever os resultados das inte-

grais que consideraremos no capítulo posterior a este. A utilidade de tal organização se mostrará particularmente útil na verificação das relações de consistência, de simetria e no estudo de alguns limites cinemáticos específicos, principalmente aqueles relacionados aos procedimentos de reparametrização.

## 4.2 As Funções $Z_k^{-\frac{1}{2}}$

Quando utilizamos as regras de Feynman do cálculo perturbativo para o cálculo de amplitudes físicas somos levados a estabelecer as Funções de Green de  $n$ -pontos. A cada uma destas está associado um conjunto de integrais de Feynman que, quando solucionadas fornecem as informações necessárias para a descrição do processo físico. Quando resolvemos as integrais associadas as funções de Green de dois pontos encontramos de uma maneira natural um conjunto de estruturas matemáticas, ou associações destas, em termos das quais é possível analisar os principais aspectos associados as amplitudes. Além disso esta sistematização é útil, pois podemos verificar que a parte finita resultante das integrais de Feynman pode ser escrita como combinação destas funções. Na  $EDQ_3$  nós definimos estas estruturas matemáticas da maneira mais geral como

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda^2) = (-\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.1)$$

Nesta expressão identificamos  $q^2 = (k_1 - k_2)^2$  como momento externo do “loop” quando estivermos trabalhando com funções Green de dois pontos ou, como uma combinação invariante destes quando as funções de Green possuírem um maior número de pontos. As quantidades  $\lambda_1^2$  e  $\lambda_2^2$  são em geral identificadas como massas da teoria sendo que o parâmetro  $\lambda$  desempenha um papel de escala para os momentos e também para  $\lambda_1^2$  e  $\lambda_2^2$ . Como será visto no próximo capítulo (seção 5.2) o parâmetro  $z$  é o último parâmetro utilizado na parametrização de Feynman. As características das funções definidas acima, ressaltam e fornecem importantes aspectos das amplitudes geradas pelo uso de uma TQC, em especial aqueles relacionados a unitariedade.

Para os propósitos deste trabalho, será, muitas vezes, conveniente definir também a função acima sem o argumento de escala, isto é,

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.2)$$

Para a construção de formas explícitas torna-se conveniente a utilização de  $\lambda_1^2$  ou  $\lambda_2^2$  como escala. A mudança de escala pode ser obtida através da relação

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-\lambda_2^2}} Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2). \quad (4.3)$$

A relação acima é bastante útil quando considerarmos, em cálculos de integrais divergentes, a presença simultânea dos propagadores do fóton e do elétron.

Vejamos agora como obter formas explícitas para determinados valores de  $k$ . Restringindo-nos a valores de  $k$  positivos e tomando inicialmente  $k = 0$ , teremos

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) = \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{1}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.4)$$

Para a integração na variável  $z$  é conveniente escrevermos o polinômio de segundo grau em termos de suas raízes. Ou seja,

$$Q(z) = [q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2] = (-)q^2(z - \alpha)(z - \beta), \quad (4.5)$$

onde as raízes  $\alpha$  e  $\beta$  são dadas por

$$\alpha = \frac{[q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] + \sqrt{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 q^2}}{2q^2} \quad (4.6)$$

e

$$\beta = \frac{[q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] - \sqrt{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 q^2}}{2q^2}, \quad (4.7)$$

de modo que a soma e a diferença entre elas são dadas por

$$\alpha + \beta = \frac{[q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2]}{q^2} \quad (4.8)$$

e

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 q^2}}{q^2}, \quad (4.9)$$

respectivamente. Por sua vez o produto será dado por

$$\alpha\beta = \frac{\lambda_1^2}{q^2}. \quad (4.10)$$

Assim sendo, podemos reescrever (4.4) como

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{1}{(z - \alpha)^{\frac{1}{2}}(z - \beta)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.11)$$

A integração resultará em

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = 2 \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \ln \left[ \frac{(1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} + (1 - \beta)^{\frac{1}{2}}}{(-\alpha)^{\frac{1}{2}} + (-\beta)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.12)$$

Voltaremos nossas atenções para algumas relações entre as  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)$  e propriedades obedecidas por esta quando tomamos alguns limites de interesse físico.

### 4.2.1 Redução das $Z_k^{-\frac{1}{2}}$ em termos de $Z_0^{-\frac{1}{2}}$

É fácil perceber que todas as funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}$  definidas em (4.1) podem ser escritas em termos da função  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$ . Para obter  $Z_1^{-\frac{1}{2}}$  em termos de  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  basta efetuar uma integração por partes, isto é, tomando

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.13)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} Z_1^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz z \frac{(-2q^2 z + q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - q^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{(-2q^2)[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2q^2)} \int_0^1 dz \frac{(q^2 - 2q^2 z + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2q^2)} \int_0^1 dz \frac{[q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} Z_1^{-\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-q^2)} \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} [Q^{\frac{1}{2}}(z)] \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2q^2)} [q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] \int_0^1 dz \frac{1}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{q^2} [Q^{\frac{1}{2}}(1) - Q^{\frac{1}{2}}(0)] \\ &\quad + \frac{\sqrt{-\lambda^2} [q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2), \end{aligned} \quad (4.15)$$

que fornece, finalmente,

$$\begin{aligned} Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{q^2} \left( \sqrt{-\lambda_2^2} - \sqrt{-\lambda_1^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{-\lambda^2} (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) \end{aligned} \quad (4.16)$$

que é a relação procurada. Seguindo os mesmos passos podemos relacionar a função  $Z_2^{-\frac{1}{2}}$  com as funções  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  e  $Z_1^{-\frac{1}{2}}$ . Esta relação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2} \sqrt{-\lambda_2^2}}{2q^2} - \frac{\lambda_1^2 \sqrt{-\lambda^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2q^2} \\ &\quad + \frac{3 \sqrt{-\lambda^2} [q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]}{4 q^2} Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Eliminando no resultado acima  $Z_1^{-\frac{1}{2}}$  em favor de  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  através da equação (4.16), teremos

$$\begin{aligned} Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2) &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2} \sqrt{-\lambda_2^2}}{2q^2} \\ &\quad - \frac{3 \sqrt{-\lambda^2} (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\sqrt{-\lambda_2^2} - \sqrt{-\lambda_1^2})}{4 q^2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{-\lambda^2} \left[ \frac{3}{2} (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \lambda_1^2 \right]}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

As relações construídas acima serão muito úteis no futuro.

#### 4.2.2 Lim $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$

A definição mais geral para as funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}$  foi dada na equação (4.1). Todas as situações de interesse para o tratamento das amplitudes da  $EDQ_3$  podem, em princípio, ser obtidas como casos particulares da mesma. Algumas destas situações se tornarão necessárias na evolução dos cálculos que faremos. Como tal, na presença do propagador do fóton, se tornará necessário estudar o limite  $\lambda_1^2 = 0$ , o que significará a remoção da massa do fóton. Também na presença apenas de propagadores do elétron teremos o caso  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ . Já na preparação das amplitudes para a reparametrização teremos que conhecer os primeiros termos de uma série de potências nos momentos externos. Assim, se estudarmos o comportamento das funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$  nos limites citados acima, estaremos antecipando a construção de resultados úteis e necessários na sequência dos nossos cálculos e análises. Tendo isso em mente consideremos inicialmente o comportamento para pequenos valores de  $q^2$ . Para tal inicialmente fazemos

$$\begin{aligned} Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{\left\{ [q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z] \left[ 1 + \frac{\lambda_1^2(z-1)}{q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z]^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \frac{\lambda_1^2(z-1)}{q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizando uma expansão em série de Taylor no último termo entre colchetes da expressão acima obtemos

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z]^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^2(z-1)}{q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z} + \dots \right]. \quad (4.20)$$

Efetuada os produtos e reorganizando obtemos

$$\begin{aligned} Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2} \lambda_1^2}{2} \int_0^1 dz \frac{z^k (z-1)}{[q^2 z(1-z) - \lambda_2^2 z]^{\frac{3}{2}}} + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Evidenciando alguns termos e reorganizando ficaremos com a expressão

$$\begin{aligned}
Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{z^k}{\left(z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{z}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \lambda_1^2 \int_0^1 dz \frac{z^k (z-1)}{\left(z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{z^{\frac{3}{2}}}} + \dots \\
&= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{z^{k-\frac{1}{2}}}{\left(z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \lambda_1^2 \int_0^1 dz \frac{z^{k-\frac{1}{2}} - z^{k-\frac{3}{2}}}{\left(z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Tomando  $\lambda_1^2 = 0$  e  $\lambda_2^2 = m^2$  teremos

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{z^{k-\frac{1}{2}}}{\left[z - \frac{q^2 - m^2}{q^2}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.23}$$

Para os valores de  $k$  que se tornarão necessários em cálculos futuros teremos

$$Z_2^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\left[z - \frac{q^2 - m^2}{q^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.24}$$

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\left(z - \frac{q^2 - m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.25}$$

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{1}{\sqrt{z} \left(z - \frac{q^2 - m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.26}$$

As duas primeiras funções acima são bem comportadas ao passo que para a última delas temos problema no limite inferior da integral. Esta singularidade estará relacionada com a possibilidade de divergências infravermelhas. O comportamento das mesmas quando  $q^2 = 0$ , pode ser obtido expandindo os integrandos em série de Taylor e posteriormente integrando. Procedendo assim obteremos

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, 0; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left[ 2 - \frac{2}{3} \frac{q^2}{(-m^2)} + \frac{2}{5} \frac{q^4}{(-m^2)^2} + \dots \right], \tag{4.27}$$

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, 0; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{15} \frac{q^2}{(-m^2)} + \frac{2}{35} \frac{q^4}{(-m^2)^2} + \dots \right] \tag{4.28}$$

e

$$Z_2^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, 0; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left[ \frac{2}{5} - \frac{2}{35} \frac{q^2}{(-m^2)} + \frac{2}{105} \frac{q^4}{(-m^2)^2} + \dots \right]. \tag{4.29}$$

O limite  $\lambda_1^2 \rightarrow \infty$  nas Funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}$  representa também uma possível situação de interesse quando a regularização adotada for a de PV. Isto corresponde ao que denominamos o limite de conexão da citada regularização e deve ser feito com o intuito de tornar possível a identificação dos termos divergentes e a posterior construção dos contratermos, quando estivermos tratando de teorias renormalizáveis.

### 4.2.3 As Funções $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$

No caso de amplitudes onde aparecem dois propagadores do elétron surgirão funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$  para o caso  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ . Dada a utilidade desta situação particular desenvolveremos as expressões correspondentes com detalhes. Começamos por considerar a definição

$$Z_k^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \frac{z^k}{[q^2 z(1-z) - m^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.30)$$

onde simplificamos a notação fazendo  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(m^2, m^2, q^2; \lambda^2) = Z_k^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2)$ . A fim de obter formas explícitas para os primeiros valores de  $k$ , primeiro identificamos as raízes do polinômio de segundo grau.

$$Q(z) = [q^2 z(1-z) - m^2] = (-)q^2(z - \alpha)(z - \beta) \quad (4.31)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as raízes dadas por

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{2} \quad (4.32)$$

e

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{2}, \quad (4.33)$$

de modo que a soma e a diferença entre as raízes são dadas por

$$\alpha + \beta = 1 \quad (4.34)$$

e

$$\alpha - \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}, \quad (4.35)$$

respectivamente e, o produto por

$$\alpha\beta = \frac{m^2}{q^2}. \quad (4.36)$$

Então escrevemos

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{1}{(z - \alpha)^{\frac{1}{2}}(z - \beta)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.37)$$

A integração resulta em

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = 2 \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \ln \left[ \frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}} + (1-\beta)^{\frac{1}{2}}}{\left[(-\alpha)^{\frac{1}{2}} + (-\beta)^{\frac{1}{2}}\right]} \right]. \quad (4.38)$$

As demais componentes do conjunto podem ser escritas em termos da função acima. Como tal para obter aquela correspondente a  $k = 1$ , fazemos

$$\begin{aligned} Z_1^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) &= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2q^2)} \int_0^1 dz \frac{(q^2 - 2q^2 z)}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2q^2)} \int_0^1 dz \frac{q^2}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

e então

$$\begin{aligned} Z_1^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) &= \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-q^2)} \int_0^1 dz \frac{\partial}{\partial z} \left[ Q^{\frac{1}{2}}(z) \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{(-2)} \int_0^1 dz \frac{1}{[Q(z)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{q^2} \left[ Q^{\frac{1}{2}}(1) - Q^{\frac{1}{2}}(0) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Isto significa que

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2)}{2}. \quad (4.41)$$

Seguindo os mesmos passos podemos escrever a função  $Z_2^{-\frac{1}{2}}$  em termos das funções  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  e  $Z_1^{-\frac{1}{2}}$ . Teremos

$$\begin{aligned} Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2} \sqrt{-m^2}}{2q^2} + \frac{3}{4} \sqrt{-\lambda^2} Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \\ &\quad - \frac{\sqrt{-\lambda^2} m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2q^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ou ainda, apenas em termos da função  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} Z_2^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) &= (-) \frac{\sqrt{-\lambda^2} \sqrt{-m^2}}{2q^2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{-\lambda^2} (3q^2 - 2m^2)}{4q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Alguns limites serão de utilidade em considerações futuras. Dentre estes o comportamento a baixos valores de  $q^2$  é de utilidade na preparação das amplitudes com vistas à reparametrização. Teremos

$$Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{q^2}{m^2} + \frac{1}{40} \frac{q^4}{m^4} + \dots \right), \quad (4.44)$$

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \frac{q^2}{m^2} + \frac{1}{80} \frac{q^4}{m^4} + \dots \right) \quad (4.45)$$

e

$$Z_2^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{\sqrt{-m^2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{40} \frac{q^2}{m^2} + \frac{1}{140} \frac{q^4}{m^4} + \dots \right). \quad (4.46)$$

### 4.3 As Funções $Y_k^{-\frac{3}{2}}$

Quando consideramos integrais de Feynman geradas pelo termo do propagador do fóton que possui dependência com o parâmetro de “gauge” surgem estruturas matemáticas diferentes daquelas que acabamos de considerar ainda que relacionadas a elas. É também muito útil um estudo detalhado destas funções a fim de que vários aspectos de interesse possam ser considerados no futuro. Nós definimos estas funções como

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2} \int_0^1 dz \frac{z^k(1-z)}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.47)$$

Com a definição, dada em (4.47), nós observamos que esta está relacionada às funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)$  definidas anteriormente de modo simples. Teremos

$$(-\lambda^2) \frac{\partial Z_k^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} = Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2). \quad (4.48)$$

As propriedades de escala podem ser obtidas de modo simples com a relação

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{\sqrt[3]{-\lambda_2^2}} Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2). \quad (4.49)$$

As formas explícitas podem ser obtidas seguindo um procedimento análogo àquele utilizado para o tratamento das funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}$ . Tomando inicialmente o valor de  $k = 0$  na equação (3.85) teremos

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{[q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.50)$$

que ainda pode ser escrita em termos das raízes  $\alpha$  e  $\beta$  do polinômio, dadas em (4.6) e (4.7), como

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{(z-\alpha)^{\frac{3}{2}}(z-\beta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.51)$$

A integração em  $z$  então resulta em

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{4(\alpha + \beta - \alpha\beta - 1)}{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\beta}(\alpha-\beta)^2} - \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{2(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)}{\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}(\alpha-\beta)^2}. \quad (4.52)$$

A função correspondente ao valor  $k = 1$  pode ser escrita em termos de  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  e  $Y_0^{-\frac{1}{2}}$  na forma

$$Y_1^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = (-) \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{2q^2\sqrt{-\lambda_1^2}} - \frac{\lambda^2}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{Y_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2q^2}. \quad (4.53)$$

Por sua vez podemos escrever  $Y_2^{-\frac{3}{2}}$  na forma

$$Y_2^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = [q^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2q^2} - \frac{\lambda^2}{(2q^2)} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) - 2Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \right]. \quad (4.54)$$

Poderíamos ainda reescrever a última expressão acima pela eliminação de  $Y_1^{-\frac{3}{2}}$  em favor de  $Y_0^{-\frac{3}{2}}$  e pela eliminação de  $Z_1^{-\frac{1}{2}}$  em favor de  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$ . Neste trabalho não utilizaremos funções para valores de  $k$  maiores do que dois. Podemos agora estudar algumas situações particulares de nosso interesse futuro. Como tal o limite  $\lambda_1^2 \rightarrow 0$  será de crucial importância. Nós consideramos esta situação limite escrevendo

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{2(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \int_0^1 dz \frac{(z^{k-\frac{3}{2}} - z^{k-\frac{1}{2}})}{\left[ z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2} \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \lambda_1^2 \int_0^1 dz \frac{(2z^{k-\frac{1}{2}} - z^{k+\frac{1}{2}} - z^{k-\frac{3}{2}})}{\left[ z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2} \right]^{\frac{3}{2}}} + \dots \right\}. \quad (4.55)$$

O limite  $\lambda_1^2 \rightarrow 0$  nos fornece

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{2(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz \frac{(z^{k-\frac{3}{2}} - z^{k-\frac{1}{2}})}{\left[ z - \frac{q^2 - \lambda_2^2}{q^2} \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.56)$$

Podemos notar a presença de singularidades no integrando para os valores de  $k = 0$  e  $k = 1$ . Este fato desempenhará papel importante na análise das divergências infravermelhas.

Outra propriedade importante destas funções é o seu comportamento a  $q^2 = 0$  que é dado por

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(0, \lambda_2^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz \frac{z^k (1-z)}{z^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.57)$$

Na expressão acima percebemos que para o valor nulo de  $k$  a integral acima não converge no intervalo  $(0, 1)$ . Teremos, por outro lado para  $k = 1$  a expressão

$$Y_1^{-\frac{3}{2}}(0, \lambda_2^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz \sqrt{z} - \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz (z)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.58)$$

### 4.3.1 As Funções $Y_k^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$

Quando, na  $EDQ_3$ , as amplitudes apenas envolverem dois propagadores do elétron poderemos ter a presença de funções  $Y_k^{-\frac{3}{2}}$  para o caso  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$ . Esta situação é de grande interesse e utilidade, sendo muito útil um estudo detalhado. Começamos definindo as funções  $Y_k^{-\frac{3}{2}}$  como

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^1 dz \frac{z^k (1-z)}{[q^2 z(1-z) - m^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.59)$$

onde simplificamos a notação  $Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, m^2, q^2; \lambda^2) = Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2)$ . Para o valor de  $k = 0$  escrevemos

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{[q^2 z(1-z) - m^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.60)$$

Como nos casos anteriores identificamos primeiro as raízes do polinômio de segundo grau, dadas em (32) e (33), e então ficamos com

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{\sqrt{-q^2}} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{(z-\alpha)^{\frac{3}{2}}(z-\beta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.61)$$

A integração resulta em

$$\begin{aligned} Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) &= \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{2(\alpha + \beta - \alpha\beta - 1)}{\sqrt{1-\alpha}\sqrt{1-\beta}(\alpha-\beta)^2} \\ &\quad - \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-q^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)}{\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}(\alpha-\beta)^2}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

As demais funções  $Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2)$  escrevemos em termos daquela acima  $Y_0^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2)$ . Como tal

$$\begin{aligned} Y_1^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) &= (-) \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{2q^2(-m^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda^2}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \\ &\quad + \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

e, por sua vez,

$$Y_2^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) = \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{2} + \frac{\sqrt[3]{-\lambda^2}}{(2q^2)} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) - 2Z_1^{-\frac{1}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) \right]. \quad (4.64)$$

O comportamento destas funções para pequenos valores de  $q^2$  é de grande interesse para nós. Podemos obtê-lo escrevendo o integrando em série de Taylor

$$\begin{aligned} Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, q^2; \lambda^2) &= \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz \frac{z^k (1-z)}{\left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{-m^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz z^k (1-z) \left[1 + \frac{3q^2 z(1-z)}{2m^2} + \dots\right], \end{aligned} \quad (4.65)$$

ou ainda, integrando teremos

$$Y_k^{-\frac{3}{2}}(m^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz z^k (1-z). \quad (4.66)$$

Portanto, teremos para  $k = 0, 1$  e  $2$  os valores a momento nulo

$$Y_0^{-\frac{3}{2}}(m^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz (1-z) = \frac{1}{4} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.67)$$

$$Y_1^{-\frac{3}{2}}(m^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz z (1-z) = \frac{1}{6} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.68)$$

e

$$Y_2^{-\frac{3}{2}}(m^2, 0; \lambda^2) = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 dz z^2 (1-z) = \frac{1}{12} \frac{(-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{(-m^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.69)$$

Os desenvolvimentos promovidos até aqui serão suficientes para as necessidades futuras do presente trabalho.

#### 4.4 As Funções $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$ e $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$

Quando efetuamos os cálculos das integrais de Feynman com até três propagadores, portanto, com dois momentos externos e até três massas diferentes, associadas às funções de três pontos (ou mais), torna-se conveniente a definição de um conjunto adequado de funções que desempenharão papel análogo daquelas apresentadas nas últimas seções. Esta sistematização, vale a pena novamente lembrar, é útil na padronização dos resultados, facilitando o estudo das propriedades físicas bem como a verificação das relações de simetria e demais propriedades consideradas relevantes. Definiremos este conjunto de funções como:

$$\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{[Q(y, z)]^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.70)$$

onde

$$Q(y, z) = q^2 y(1-y) + p^2 z(1-z) - 2(p \cdot q)yz + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)z - \lambda_1^2. \quad (4.71)$$

Quanto aos momentos  $p$  e  $q$  estes serão combinações dos momentos internos e nas expressões acima, podemos identificar  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  e  $\lambda_3^2$  como sendo massas carregadas pelos propagadores. Podemos ainda, estabelecer outro conjunto útil de estruturas matemáticas, relacionadas às funções definidas acima. Nós as definimos como:

$$\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) = \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{[Q(y, z)]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.72)$$

As relações entre o conjunto de funções definidas por (4.70) e (4.72) serão úteis no estudo das propriedades e relações entre as funções de Green. De modo semelhante ao caso das funções consideradas nas seções anteriores, é possível efetuar reduções de  $\xi^{-\frac{3}{2}}$ 's com um valor de  $m+n$  para  $m'+n'$  menores até chegar aos valores nulos para ambos os índices. Nesta linha de raciocínio consideremos primeiramente

$$\xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{[Q(y, z)]^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.73)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ & - \frac{1}{2q^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] \\ & + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \right] \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \quad (4.74) \end{aligned}$$

Por sua vez,  $\xi_{10}^{-\frac{3}{2}}$  definida como

$$\xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{[Q(y, z)]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.75)$$

pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ & - \frac{1}{2p^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \right] \\ & + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] \\ & \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \quad (4.76) \end{aligned}$$

Notemos que uma expressão pode ser levada na outra fazendo simultaneamente as trocas

$$\begin{cases} \lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3 \\ p \leftrightarrow q, \end{cases} \quad (4.77)$$

sendo que isso será válido para todas as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}'}$ s.

Para as demais reduções correspondentes às funções para as quais  $n + m = 2$  é interessante primeiro desenvolvermos  $\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}$  em termos de funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}'}$ s e  $Z_k^{-\frac{1}{2}'}$ s. Partindo da definição para a  $\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}$

$$\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{[Q(y, z)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.78)$$

Em termos de  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}'}$ s e  $Z_k^{-\frac{1}{2}'}$ s ela fica

$$\begin{aligned} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) - \lambda_1^2 \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2} \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2} \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Na expressão acima é possível entender o porquê da definição de  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$  em termos de uma escala  $\lambda^2$ . As funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}'}$ s são independentes de  $\lambda^2$ , mas as funções  $\eta'_{nm}$ s não.

Para a função  $\xi_{20}^{-\frac{3}{2}}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} &= \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p-q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ (-) Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p \cdot q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ &\quad - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] + \frac{1}{2q^2} [\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}] \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Na sequência consideramos a função  $\xi_{11}^{-\frac{3}{2}}$  que pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} &= \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ (-) Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2q^2} \left[ Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] - \frac{p \cdot q}{2q^2 p^2} [\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}] \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

As trocas indicadas na expressão (4.77) permitem a obtenção de forma reduzida da função  $\xi_{02}^{-\frac{3}{2}}$  e de uma forma alternativa para  $\xi_{11}^{-\frac{3}{2}}$ .

Seguindo o mesmo raciocínio estabelecido acima, podemos explicitar as reduções para os casos  $n + m = 3$ . Para tal é interessante primeiro estabelecer a decomposição para as funções  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$  correspondentes a  $n + m = 1$ . Assim teremos:

$$\begin{aligned} \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \left[ Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{3} \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (4.82)$$

e também:

$$\begin{aligned} \eta_{01}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) - Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \\ &\quad - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{3} \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

De posse destas sub-estruturas fica fácil escrever  $\xi_{30}^{-\frac{3}{2}}$ . Teremos

$$\begin{aligned} \xi_{30}^{-\frac{3}{2}} &= \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ (-) Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ &\quad + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ (-) Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{q^2} \left[ \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Por sua vez, para  $\xi_{21}^{-\frac{3}{2}}$  teremos

$$\begin{aligned} \xi_{21}^{-\frac{3}{2}} &= \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ (-) Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2q^2} \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2) \right] \\ &\quad - \frac{(p \cdot q)}{p^2 q^2} \left[ \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Utilizando novamente as tranformações dadas por (4.77) podemos obter as expressões para  $\xi_{12}^{-\frac{3}{2}}$  e  $\xi_{03}^{-\frac{3}{2}}$ .

No desenvolvimento das reduções é possível perceber que as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$  para  $n + m$  fixo, são escritas como uma combinação daquelas que possuem  $n + m - 1$ . Estas, por sua vez, em termos daquelas  $n + m - 2$  e assim por diante, de tal forma que, ao final, todas

podem ser reduzidas à uma combinação de funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}'}$ s (para  $k$  positivo) mais a função  $\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}$ .

Quando consideramos o cálculo de amplitudes físicas, somos levados a estruturas matemáticas que podem ser àquelas que definimos acima ou casos particulares das mesmas. Como por exemplo, quando calculamos uma função de três pontos com a presença do propagador do fóton e do elétron. Neste caso, teremos que considerar as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2)$  e  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2)$  fazendo  $\lambda_1^2 = 0$  e  $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = m^2$ , respectivamente. Caso semelhante encontramos quando consideramos funções de três pontos puramente fermiônicas. Para tanto, necessita-se considerar as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2)$  e  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2)$  para  $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = m^2$ . Para descrever os dois exemplos que acabamos de citar os demais casos basta modificar as funções acima para as situações de interesse. Quando tomamos os valores nulos para  $n$  ou  $m$  ou ambos, percebemos que as funções acima terão problemas relacionadas com as divergências infravermelhas, esta situação é semelhante a encontrada na função  $Y_0^{-\frac{3}{2}}$ .

## 4.5 As Funções $\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}$

Quando consideramos a interação elétron - fóton definimos a função de Green associada à correção de vértice (capítulo II). Nesta, no termo que possui dependência com o parâmetro de “gauge”, encontramos integrais de Feynman para as quais é conveniente escrever uma solução correspondente em termos de um conjunto específico de funções. Estas funções serão definidas como

$$\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy z^n y^m (1-y-z)}{[Q(y, z)]^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.86)$$

onde  $Q(y, z)$  foi definido na equação (4.71). Estas funções estão relacionadas às funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}'}$ s de modo simples. Explicitamente

$$\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^2} \left[ \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) \right]. \quad (4.87)$$

As funções  $\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}'}$ s podem também ser sempre reduzidas àquela mais simples do conjunto, no caso  $\sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}$ , mais combinações de funções  $Y_k^{-\frac{3}{2}'}$ s e  $\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}$ . A fim de ver isto, escolhendo os valores de  $n = 1$  e  $m = 0$  na expressão (4.87), podemos escrever

$$\sigma_{10}^{-\frac{5}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^2} \left[ \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) \right]. \quad (4.88)$$

Com o auxílio da equação (4.76), escrevemos então

$$\begin{aligned} \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ -\frac{\partial Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2q^2} \left[ \frac{\partial Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{\partial Z_0^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{\partial \lambda_1^2} \right] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \frac{\partial \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}}{\partial \lambda_1^2} \right\} \quad (4.89) \end{aligned}$$

Com o auxílio de (4.48) e de (4.87), ficamos com

$$\begin{aligned} \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ -\frac{1}{2q^2} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} \right\}. \quad (4.90) \end{aligned}$$

Assim teremos também

$$\begin{aligned} \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ -\frac{1}{2p^2} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, (p^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} \right\}. \quad (4.91) \end{aligned}$$

Para os demais elementos do conjunto que precisamos desenvolver, ou seja, àqueles correspondentes a  $n + m = 2$ , teremos que considerar a derivada das funções  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$  s. Assim fazemos

$$\frac{\partial \left[ \eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2) \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m (1 - y - z)}{Q(y, z)} \quad (4.92)$$

que, após uma reorganização nos permite escrever

$$\frac{\partial \left[ \eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2) \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{n+1m}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{nm+1}^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.93)$$

Portanto teremos

$$\frac{\partial \left[ \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.94)$$

Agora podemos considerar os casos  $n + m = 2$  de modo a escrever

$$\begin{aligned} \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p - q)^2} \right) \left\{ \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Z_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, p^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{\sqrt{-\lambda^2}}{4q^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & - \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ -\frac{1}{2p^2} \left[ \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{p \cdot q}{4q^2 p^2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Para o desenvolvimento do conjunto de funções correspondentes a  $n + m = 3$  primeiro consideramos as relações

$$\frac{\partial \left[ \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (4.97)$$

e

$$\frac{\partial \left[ \eta_{01}^{-\frac{1}{2}} \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (4.98)$$

Então podemos obter

$$\begin{aligned} \sigma_{30}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[ \frac{Y_2^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2q^2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ +\xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & + \left[ \frac{p^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

e também

$$\begin{aligned} \sigma_{21}^{-\frac{5}{2}} = & \left( \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{1}{2p^2} \left[ -\frac{Y_2^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)}{\lambda^2} \right] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ +\xi_{01}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & + \left[ \frac{q^2 - (p \cdot q)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \\ & \left. + \frac{3}{2} \left[ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

As funções  $\sigma_{02}^{-\frac{5}{2}}$ ,  $\sigma_{12}^{-\frac{5}{2}}$ ,  $\sigma_{03}^{-\frac{5}{2}}$  e uma forma alternativa para  $\sigma_{11}^{-\frac{5}{2}}$ , podem ser obtidas daquelas acima pela trocas indicadas em (4.77).

Os desenvolvimentos efetuados serão suficientes para os propósitos do presente trabalho. Recorreremos aos resultados construídos no presente capítulo com muita frequência nos capítulos posteriores.

# CAPÍTULO 5

## Cálculo de Integrais de Feynman

### 5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores adotamos o ponto de vista de que o conjunto das regras de Feynman servem para caracterizar ou representar, em solução perturbativa, uma TQC. Com a utilização de tais regras é possível efetuar o cálculo das amplitudes físicas correspondentes aos processos físicos de interesse. Nesta linha de raciocínio estamos interessados em investigar as consequências de um conjunto de simetrias, implementadas na construção da Lagrangiana, para uma certa fenomenologia. Portanto é crucial a preservação destas simetrias nos cálculos perturbativos para que todas as propriedades decorrentes das simetrias assumidas possam se mostrar presentes nos resultados finais das amplitudes físicas calculadas através das regras de Feynman. Entretanto, no capítulo *II*, quando fizemos uso do conjunto das regras de Feynman para a  $EDQ_3$  para construir as amplitudes físicas correspondentes a alguns processos pertinentes a ela, ao nível um “loop”, nos deparamos com a necessidade de efetuar o cálculo das denominadas integrais de Feynman. Isto se deve ao fato das expressões matemáticas para os processos físicos poderem ser construídas pelos correspondentes diagramas de Feynman. Em certas expressões matemáticas obtidas podemos ter mais momentos associados as linhas internas do que vértices independentes gerando vínculos para estes momentos. Com isso podem existir momentos capazes de satisfazer todas as relações de conservação de energia-momento assumindo quaisquer valores. Para levar em conta todas as contribuições possíveis para os diferentes valores destes momentos é preciso somá-las, ou seja, torna-se necessário integrar sobre todos os possíveis valores dos momentos não restritos. Em diversos casos isto nos fornece quantidades divergentes ainda que em outros quantidades finitas. No que diz respeito às integrais de Feynman finitas, elas podem ser integradas diretamente pelo uso de técnicas adequadas. As integrais divergentes, entretanto, necessitam manipulações adequadas pois, a rigor, são quantidades matematicamente indefinidas. Isto quer dizer que alguma modificação terá que ser promovida, ainda que temporariamente, para que estas se tornem calculáveis. Estas modificações são características de cada método ou estratégia de regularização e as

remoções destas modificações através de um ou de um conjunto de limites de conexão não é uma operação matemática totalmente controlável. Este fato constitui-se no principal problema das soluções perturbativas de TQC que é a manipulação e cálculo consistentes das indefinições matemáticas representadas pelas integrais divergentes. Neste capítulo vamos considerar os problemas associados à solução de integrais de Feynman, principiando por aquelas finitas, para a introdução de ferramentas gerais e adequadas para tais cálculos, para então discutir as questões relacionadas a integrais de Feynman divergentes.

Principiemos nossa discussão identificando o conjunto de integrais de Feynman que aparecem nas amplitudes da  $EDQ_3$  desenvolvidas no capítulo III. Elas podem ser agrupadas de modo conveniente para as discussões futuras em duas classes distintas. Na primeira destas classes colocaremos aquelas onde o propagador do fóton não aparece as quais nos referiremos como divergentes ultravioletas. Numa segunda classe colocaremos aquelas onde o propagador do fóton se faz presente e a estas nos referiremos como divergentes infravermelhas. Estas últimas podem ainda ser separadas em dois tipos bastante distintos; aquelas com um pólo associado ao fóton e aquelas com pólo duplo. Estas últimas vêm do termo dependente de “gauge” do propagador do fóton. Nós consideraremos o tratamento destas integrais uma a uma após a discussão das técnicas utilizadas para tal.

## 5.2 Parametrização de Feynman

Nos capítulos anteriores percebemos que todas as amplitudes perturbativas podem ser escritas como uma combinação de um pequeno número de integrais de Feynman. A estrutura geral destas integrais pode ser representada por

$$I_N^{\mu\nu\dots\lambda} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu \dots k^\lambda}{E_{12\dots N}}. \quad (5.1)$$

Isto é, uma típica integral de Feynman possui  $N$  termos em produto no denominador da forma  $[(k + k_i)^2 - m_i^2]$ , que são portanto monômios quadráticos no momento de integração, e um número arbitrário de momentos no numerador que fornecem a estrutura tensorial. A solução destas integrais pode ser uma tarefa razoavelmente complicada se abordada diretamente por técnicas usuais devido ao número de pólos e a estrutura tensorial. Entretanto é possível a utilização de artifícios capazes de promover uma sistematização muito significativa dos cálculos. Tal artifício é conhecido como Parametrização de Feynman e pode nos auxiliar colocando todas as integrais numa forma geral, o que facilita substancialmente as integrações nos momentos. O método consiste em utilizar a expressão[32][10]:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dz_1 \int dz_2 \dots \int dz_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)}{[a_1 z_1 + a_2 z_2 \dots a_n z_n]^n}, \quad (5.2)$$

onde os  $z_i$  são os parâmetros de Feynman cuja a integração é vinculada pela distribuição  $\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)$ . Quanto aos  $a_n$  eles são os propagadores das partículas envolvidas no

diagrama de Feynman que está sendo considerado em relação ao qual a integral está relacionada. Na identidade acima podemos ter dois ou mais fatores  $a_n$  iguais e, portanto, para termos a expressão adequada basta derivarmos ambos lados em relação a um dos  $a_n$ , obtendo assim:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n^2} = n! \int dz_1 \int dz_2 \dots \int z_n dz_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)}{[a_1 z_1 + a_2 z_2 \dots a_n z_n]^{n+1}}. \quad (5.3)$$

Podemos extrair todos os casos particulares que serão muito úteis no cálculo das integrais de Feynman para o estudo da  $EDQ_3$  efetuados neste trabalho. Como tal temos as seguintes identidades:

$$a) \quad \frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2} \quad (5.4)$$

$$b) \quad \frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z) dz}{[(b-a)z + a]^3} \quad (5.5)$$

$$c) \quad \frac{1}{a^3 b} = 3 \int_0^1 \frac{(1-z)^2 dz}{[(b-a)z + a]^4} \quad (5.6)$$

$$d) \quad \frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{dy}{[(c-a)z + (b-a)y + a]^3} \quad (5.7)$$

$$e) \quad \frac{1}{a^2 bc} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (1-z-y) dy \frac{1}{[(b-a)y + (c-a)z + a]^4} \quad (5.8)$$

$$f) \quad \frac{1}{abcd} = 6 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-z-y} dx \frac{1}{[(b-a)y + (c-a)z + (d-a)x + a]^4}. \quad (5.9)$$

A parametrização de Feynman permite colocar a integração nos momentos na seguinte forma geral

$$I_N^{\mu\nu\dots\lambda} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu \dots k^\lambda}{[k^2 + 2k \cdot Q + H^2]^{2N}}. \quad (5.10)$$

Na expressão acima,  $Q$  é um momento externo ou uma combinação destes e  $H^2$  é uma função dos momentos externos, das massas e de todos os  $N$  parâmetros de Feynman utilizados na parametrização da integral. Isto poderá ser melhor entendido na próxima seção onde consideraremos o cálculo explícito de uma típica integral de Feynman (finita) do cálculo perturbativo tridimensional.

### 5.3 Integrais de Feynman Finitas

Consideremos agora o cálculo explícito de uma típica integral finita a fim de ilustrar o uso dos procedimentos e conhecer os ingredientes envolvidos neste tipo de cálculo[33][10]. Nós a definimos como:

$$I_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.11)$$

Pela contagem das potências de  $k$  notamos que a integral acima é finita. Ela pode portanto ser solucionada diretamente. O primeiro passo a ser dado para a solução da integral é a Parametrização de Feynman. Podemos parametrizar a integral acima por

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[(b-a)z + a]^2} \quad (5.12)$$

onde definimos

$$a = k^2 + 2k_1 \cdot k + k_1^2 - m^2; \quad (5.13)$$

e

$$b = k^2 + 2k_2 \cdot k + k_2^2 - m^2. \quad (5.14)$$

Podemos agora reescrever o denominador como:

$$(b-a)z + a = k^2 + 2k_2z \cdot k - 2k_1z \cdot k + 2k_1 \cdot k + k_1^2 + (k_2^2 - k_1^2)z - m^2. \quad (5.15)$$

Definindo agora

$$k' \equiv [k + (k_2 - 2k_1)z + k_1] \quad (5.16)$$

e

$$H^2 \equiv (-)Q(z) \equiv (-)[(k_1 - k_2)^2 z(1-z) - m^2], \quad (5.17)$$

e substituindo em  $I_2$ , ficamos com

$$I_2 = \int_0^1 dz \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k'^2 - H^2 + i\varepsilon]^2}. \quad (5.18)$$

Devemos proceder agora a integração nos momentos, lembrando que estamos num espaço de Minkowski de dimensão  $2+1$ , ou seja,

$$\begin{cases} d^3k' = dk_0 dk_1 dk_2 \\ k'^2 = k_0^2 - \vec{k}^2, \end{cases} \quad (5.19)$$

e

$$k'^2 - H^2 = k_0^2 - \left( \vec{k}^2 + H^2 - i\varepsilon \right), \quad (5.20)$$

onde  $\vec{k}$  é um vetor de duas componentes. Substituindo na integral dos momentos e fazendo algumas manipulações obtemos:

$$\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k'^2 - H^2 + i\varepsilon]^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k \int dk_0 \frac{1}{\left\{ k_0^2 - \left[ \left( \vec{k}^2 + H^2 \right)^{\frac{1}{2}} - i\varepsilon' \right]^2 \right\}^2}. \quad (5.21)$$

onde

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2 \left( \vec{k}^2 + H^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Podemos utilizar o Teorema de Cauchy, isto é,

$$\int_c f(k_0) dk_0 = \text{zero}, \quad (5.22)$$

identificando

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{ k_0^2 - \left[ \left( \vec{k}^2 + H^2 \right)^{\frac{1}{2}} - i\varepsilon \right]^2 \right\}^2}. \quad (5.23)$$

Podemos agora notar que  $f(k_0)$  cai rapidamente com  $k_0$  grande, ou seja,

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} f(k_0) \sim \frac{1}{k_0^4} \quad (5.24)$$

portanto, o contorno circular não contribui para o valor da integral apenas as partes sobre os eixos. A implicação disto é de que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k_0) dk_0 = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(k_0) dk_0 \quad (5.25)$$

sendo assim, podemos efetuar a integração sobre qualquer um dos eixos. Podemos, por conveniência, efetuar uma mudança de variável, fazendo uma rotação de  $\pi/2$  e passar do eixo imaginário para o eixo real. Isto pode ser representado por:

$$\begin{cases} k_0 = ik_3 \\ dk_0 = idk_3, \end{cases} \quad (5.26)$$

onde  $k_3$  é real. Com isso a integral em  $k_0$  fica:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} f(k_0) dk_0 = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(ik_3) dk_3. \quad (5.27)$$

Fazendo também a mudança na função  $f(k_0)$  obtemos:

$$f(ik_3) = \frac{1}{\left\{ -k_3^2 - \left[ \left( \vec{k}^2 + H^2 \right)^{\frac{1}{2}} - i\varepsilon \right]^2 \right\}^2}. \quad (5.28)$$

Substituindo na integral acima, teremos

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(k_0) dk_0 &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{\left\{ -k_3^2 - \left[ \left( \vec{k}^2 + H^2 \right)^{\frac{1}{2}} - i\varepsilon \right]^2 \right\}^2} \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{\left\{ -k_3^2 - \vec{k}^2 - H^2 + i\varepsilon \right\}^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Podemos resumir todas as passagens matemáticas acima afirmando que passamos de um espaço Minkowsquiano para um Euclidiano, sendo que a relação entre as integrais nos dois espaços é a seguinte:

$$\int_{Mink.} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + H^2 + i\varepsilon]^2} = i \int_{Eucl.} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{dk_3}{\left\{ -k_3^2 - \vec{k}^2 - H^2 + i\varepsilon \right\}^2} \quad (5.30)$$

onde no espaço euclidiano temos

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, k_3) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \mathbf{k}^2 \\ k_3^2 + \vec{k}^2 = k_3^2 + k_1^2 + k_2^2 = \mathbf{k}^2. \end{cases} \quad (5.31)$$

Agora é possível adotar coordenadas esféricas escrevendo

$$\begin{cases} k_1 = k \sin \alpha \sin \phi \\ k_2 = k \sin \alpha \cos \phi \\ k_3 = k \cos \alpha, \end{cases} \quad (5.32)$$

sendo que, as relações inversas podem ser identificadas como:

$$\begin{cases} k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \mathbf{k}^2 \\ \tan \phi = k_1/k_2 \\ \cos \alpha = k_3/k, \end{cases} \quad (5.33)$$

obtendo assim para o elemento de “volume” dos momentos:

$$\int d^3k = \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \quad (5.34)$$

portanto, a integral resulta em:

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + H^2 - i\varepsilon]^2} &= i(4\pi) \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3 [k^2 + H^2 - i\varepsilon]^2} \\ &= \frac{i}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{[k^2 + H^2 - i\varepsilon]^2} \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{[k^2 + H^2 - i\varepsilon]^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

A integral que ainda resta pode ser resolvida com o uso da função Beta de Euler, que pode ser escrita como:

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1} dt}{[t + a^2]^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \frac{\Gamma(m) \Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \quad (5.36)$$

portanto, definindo  $\begin{cases} m \equiv 3/2 \\ n \equiv 2 \end{cases} \implies \begin{cases} t \equiv k^2 \\ dt \equiv \frac{1}{2} k dk \end{cases}$  e substituindo no resultado acima, teremos

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + H^2 - i\varepsilon]^2} &= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{[H^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(3/2) \Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{i}{16\pi} \frac{1}{[H^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo este resultado na integral  $I_2$  obtemos:

$$(I_2) = \frac{i}{16\pi} \int_0^1 dz \frac{1}{[H^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.38)$$

Reintroduzindo a definição de  $H^2$ , teremos:

$$I_2 = \frac{i}{4} (4\pi)^{-1} \int_0^1 dz \frac{1}{[-(k_2 - k_1)^2 z(1-z) + m^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.39)$$

onde nós podemos identificar as funções básicas de dois pontos definidas no capítulo IV, de maneira que

$$I_2 = \frac{i}{4} (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2). \quad (5.40)$$

No cálculo da integral  $I_2$  concluído acima, ilustramos um procedimento explícito para o cálculo de uma típica integral de Feynman finita. Quando utilizamos a parametrização de Feynman obtemos um conjunto de integrais na forma geral indicada em (5.1) que podem ser calculadas seguindo o mesmo procedimento que adotamos para o cálculo de  $I_2$ . Entretanto, é possível estabelecer um resultado bastante geral de modo a tornar possível, através deste, a obtenção de todos os demais necessários. Tal procedimento consiste em tomar as integrais nos momentos, obtidos pela parametrização de Feynman e extendê-las para dimensão  $n = m + 1$ . Os passos necessários são essencialmente os mesmos que seguimos acima no cálculo de  $I_2$ . Consideremos então a obtenção deste resultado geral[32][10].

Para tal tomamos a mais simples das integrais fornecidas pela parametrização de Feynman, isto é a integral escalar,

$$I(Q) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (5.41)$$

Restando a integração nos momentos, podemos reorganizar o denominador de modo conveniente fazendo

$$[k^2 + 2Q \cdot k - H^2] = [(k + Q)^2 - (Q^2 + H^2)]. \quad (5.42)$$

Em seguida efetuamos o “shift” no momento de integração definindo

$$\begin{cases} k' = k + Q \\ M = Q^2 + H^2. \end{cases} \quad (5.43)$$

Com isso a integral  $I(Q)$  fica

$$I(Q) = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}. \quad (5.44)$$

Como  $k'$  é uma variável “muda”, podemos abandonar o índice linha da rotulação. Agora fazemos uma extensão para  $m + 1 = n$  dimensões no espaço dos momentos

$$I(Q, n) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2]^\alpha}. \quad (5.45)$$

Explicitando todas as quantidades no espaço  $n$ -dimensional teremos

$$\begin{cases} d^n k = dk_0 dk_1 dk_2 \dots dk_m = dk_0 d^m \mathbf{k} \\ k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2 . \end{cases}$$

Assim  $I(Q, n)$  ficará:

$$I(Q, n) = \int d^m \mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{\left[ k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2 \right]^\alpha} \right\} . \quad (5.46)$$

No plano complexo, podemos identificar os pólos do integrando a fim de facilitar a integração em  $k_0$  (5.1)

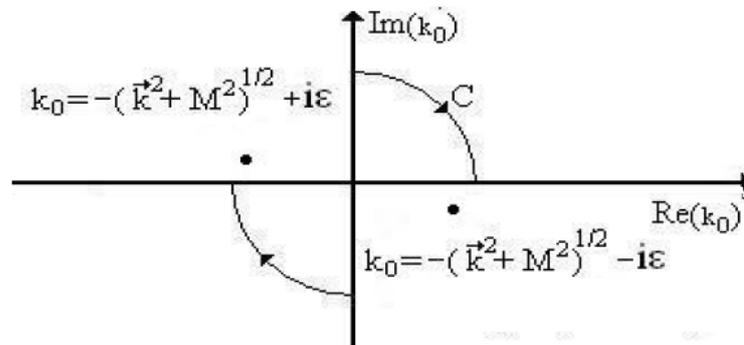


Figura 5.1: Representação do plano complexo.

Se definirmos a função  $f(k_0)$  como

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{ k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon]^2 \right\}^\alpha} , \quad (5.47)$$

e escolhermos o contorno  $C$ , percebemos que a integral de  $f(k_0)$  se anula.

Observemos ainda que a dependência de  $f(k_0)$  mostra uma queda abrupta com  $k_0$  grande (tanto quanto  $\alpha > 1$ ). Isto é:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} f(k_0) \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}} . \quad (5.48)$$

Então a contribuição sobre o contorno circular  $C$  se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos agora conveniente mudança de variável

$$k_0 \longrightarrow ik_n, \quad (5.49)$$

com  $k_n$  real. Com isso a integral em  $k_0$  fica:

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_n f(ik_n) \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_n}{\left[ (ik_{m+1})^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2 \right]^\alpha} \\ &= i(-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_n}{[k_n^2 + \mathbf{k}^2 + M^2 + i\epsilon]^\alpha}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, para um espaço euclidiano  $n$ -dimensional onde teremos

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, \dots, k_n) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2 \\ d^n k = dk_1 dk_2 \dots dk_n. \end{cases}$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} i \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{5.51}$$

Podemos definir agora as coordenadas polares num espaço euclidiano  $n$ -dimensional, como sendo

$$\begin{cases} k_1 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ k_2 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ k_{m+1} = k \cos \theta_m. \end{cases}$$

De maneira que para o elemento de volume teremos

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m. \tag{5.52}$$

Substituindo na integral dos momentos ficamos com

$$I(Q, n) = (-1)^\alpha i \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{5.53}$$

O integrando somente depende de  $k^2$ , de forma que podemos integrar nos ângulos. Para tal tomamos auxílio nas expressões:

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} \tag{5.54}$$

e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5.55}$$

Deste modo:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta_m d\theta_m = \\
&= (2\pi) \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} \right] \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(1 + 1)} \right] \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1 + 1)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2})} \right] \dots \\
& \dots \left[ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m-1+1}{2})}{\Gamma(\frac{2+m-1}{2})} \right] \\
&= \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}. \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}. \tag{5.57}$$

Voltando com este resultado para a integral  $I(Q, n)$  (eq. (5.53)), teremos

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma(\frac{m+1}{2})} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}, \tag{5.58}$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler [36], fornece:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma(\frac{m+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\alpha - (\frac{m+1}{2}))}{(M^2)^{\alpha - (\frac{m+1}{2})} \Gamma(\alpha)}. \tag{5.59}$$

Com  $m + 1 = n$ , fica:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{(2)^n \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}} (\pi)^{m+1 - (\frac{m+1}{2})}}, \tag{5.60}$$

ou ainda:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \tag{5.61}$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega, \tag{5.62}$$

que então nos fornecerá

$$I(Q, n) = \frac{i \Gamma(\alpha - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \tag{5.63}$$

Que é o resultado desejado. A presença da função  $\Gamma(\alpha - \omega)$  nos diz que o resultado obtido é válido para  $\alpha > \omega$ , ou seja, para integrais finitas. Podemos ressaltar a grande utilidade deste resultado no tratamento de integrais finitas pois as outras formas genéricas podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \tag{5.64}$$

primeiro derivamos o lado esquerdo  $I(Q, 2\omega)$  em relação ao momento externo  $Q_\mu$ ;

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \right\} = -2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}}. \quad (5.65)$$

A seguir derivamos o lado direito,

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} \right\} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)(-2Q_\mu)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}. \quad (5.66)$$

Deste modo, igualando ambos os lados, teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)(Q_\mu)}{\alpha\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \\ &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha + 1 - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha + 1)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega+1}}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Definindo  $\alpha' = \alpha + 1$ , uma vez que  $\alpha$  é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}. \quad (5.68)$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras integrais necessárias para os cálculos de amplitudes. Uma vez que estamos tratando aqui de integrais finitas,  $\omega$  pode ser tomado na dimensão  $D = 2 + 1$ , caracterizando portanto  $\omega = 3/2$  nos resultados.

A seguir apresentamos os resultados para integrais encontradas nos cálculos das amplitudes físicas.

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (5.69)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu + \delta_{\alpha\nu} Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[ \frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta + \\ &\quad + \delta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}} \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

O conjunto de integrais acima é suficiente para o desenvolvimento das amplitudes físicas de interesse neste trabalho.

## 5.4 Integrais de Feynman Divergentes; Regularizações

Na seção precedente apresentamos um procedimento geral para a solução de integrais de Feynman finitas. Devemos portanto, nos ocupar agora daquelas divergentes. Para tal é necessário antes de proceder os cálculos propriamente ditos torná-las finitas através de alguma prescrição, ou seja, devemos construir ou adotar algum tipo de regularização. Neste trabalho aplicaremos nossa própria prescrição para manipular e calcular as integrais divergentes. Mesmo assim é interessante que discutamos, ainda que brevemente, as principais prescrições de regularização utilizadas no contexto da *EDQ*. Isto permitirá uma melhor visualização do caráter geral do método que utilizaremos bem como enriquecerá as discussões no final. Tendo isto em mente nas próximas subseções apresentaremos uma discussão breve da RD e do método PV para em seguida introduzir nossa própria prescrição.

### 5.4.1 Regularização Dimensional

A idéia principal da RD [34] é de que, pela diminuição do número da dimensão, as divergências existentes em determinada integral, automaticamente desaparecem. Podemos verificar isso, tomando como exemplo a seguinte integral definida na dimensão física  $D = 3 + 1$  ( $n = 4$ ) como

$$I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \quad (5.74)$$

que nos fornece, pela contagens de potências no momento de integração  $k$ , uma divergência logarítmica. Tomando esta integral definida em uma dimensão inferior  $D = 2 + 1$  como

$$I_2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \quad (5.75)$$

obtemos agora uma quantidade matemática finita. Guiados por esta constatação, podemos ser levados a estabelecer uma modificação na dimensão do espaço de maneira que possamos evitar as divergências. Para que isso seja possível, precisamos criar uma generalização das integrais para uma dimensão qualquer, ou seja,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e depois estabelecer a validade destes resultados para  $n = 2\omega$ , onde  $\omega$  é uma variável contínua e complexa. Após termos efetuados todos os passos intermediários necessários tais como: "shifts" nas variáveis de integração, integração simétrica e integração por partes, podemos invocar o princípio da continuação analítica e retornar a dimensão de interesse. Um exemplo claro, baseado na continuação analítica, que é o principal ingrediente na construção da técnica

da RD, é a diferença na representação de Euler e Weierstrass da função  $\Gamma$ . Se  $\text{Re } z > 0$ , então a representação de Euler será

$$\Gamma_E(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (5.76)$$

assim sendo, a expressão acima diverge quando  $\text{Re } z < 0$  pelo fato de que, quando  $t$  se aproxima de zero, o termo da integral  $dt/t^{1+|\text{Re } z|}$  divergirá tendendo a infinito. Percebemos então, que o limite inferior na expressão acima é indesejável o que nos leva a tentar uma mudança nos limites de integração. Isso é feito da seguinte maneira

$$\Gamma_\omega(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\alpha dt t^{n+z-1} + \int_\alpha^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (5.77)$$

onde  $\alpha$  é arbitrário. A segunda integral que obtivemos é bem definida até mesmo quando  $\text{Re } z < 0$  contanto que  $\alpha > 0$ . Quando  $z$  assumir valores inteiros, negativos ou zero, a primeira integral não será analítica mas terá pólos simples. Encontramos então

$$\Gamma_\omega(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\alpha^{n+z}}{z+n} + \int_\alpha^\infty dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (5.78)$$

Esta forma é independente do coeficiente arbitrário  $\alpha$  e será válida para todo o plano  $z$ . Podemos escolher o valor de  $\alpha = 1$ , de modo que, estaremos na representação de Weierstrass da função  $\Gamma$ . Com a identificação da continuação analítica de  $\Gamma_E(z)$  e as funções  $\Gamma_\omega(z)$  podemos estabelecer a validade da relação

$$I(2\omega, \theta) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} \quad (5.79)$$

para  $2\omega$  contínuo e complexo. Visto de outra maneira, a relação acima é apenas uma extensão  $2\omega$ -dimensional do resultado  $\omega = 2$  (considerando valores inteiros para  $2\omega$ ). Para a dimensão  $D = 2 + 1$ , o que caracteriza um valor de  $2\omega = 3$ , o lado direito deve ser considerado como uma definição do lado esquerdo, para  $\omega$  contínuo e complexo. Após termos estabelecido a relação acima e assumindo a sua validade, nós podemos gerar relações entre integrais, mesmo que as indefinições matemáticas estejam presentes. Podemos, por exemplo, derivar ambos os lados da equação (5.79) em relação ao momento  $Q$ , e posteriormente tomar o limite com  $Q$  tendendo a zero, a fim de obter relações específicas de nosso interesse no presente trabalho. Com tal fim estabelecemos

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega}}; \quad (5.80)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (5.81)$$

Escolhendo valores adequados para  $\alpha$  nas relações acima permite-mos identificar as seguintes relações

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)};$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (5.82)$$

Tais objetos serão úteis nos capítulos posteriores, pois será através deles que mapearemos os resultados obtidos pelo método da regularização implícita com os da RD.

### 5.4.2 Regularização de Pauli-Villars

Outro método disponível para lidarmos com integrais divergentes é a chamada Regularização de PV[6]. Vamos nesta seção discutir algumas propriedades deste esquema que também será útil nos próximos capítulos. A regularização de PV é um dos principais esquemas baseados na modificação do integrando, esta modificação é feita sobre um dos propagadores segundo a relação

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2}. \quad (5.83)$$

Os parâmetros da regularização,  $\Lambda_i^2$ , devem satisfazer a seguinte propriedade:  $\Lambda_i^2 \gg m^2$ . A escolha dos  $a_i$  é feita de modo que o propagador aumente o número suficiente de potências em  $k$  do denominador, sem inserir momentos  $k$  no numerador, de modo que a integral se torne finita. Os parâmetros  $\Lambda_i^2$  e  $a_i$  também devem ser escolhidos de modo a obtermos os devidos resultados que mantenham, por exemplo, as identidades de Ward.

Escolhendo apenas um coeficiente não nulo podemos regularizar integrais que apresentam um grau de divergência até o linear. Podemos ainda escolher o valor de  $a_1 = (-1)$  obtemos então para (5.83) o resultado

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} G(k^2, \Lambda_i^2), \quad (5.84)$$

onde definimos

$$G(k^2, \Lambda_i^2) = \frac{m^2 - \Lambda_i^2}{k^2 - \Lambda_i^2}. \quad (5.85)$$

Se exigirmos o limite de conexão, ou seja, limite  $\Lambda^2 \longrightarrow \infty$  obteremos  $G(k^2, \Lambda_i^2) = 1$ , isto é, a função regularizadora torna-se a unidade. No caso de integrais com divergências maiores necessitamos de mais termos não nulos na soma que modifica o propagador. Escolhendo dois coeficientes como

$$a_{1=-} = \left( \frac{m^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \right) \quad (5.86)$$

e

$$a_{2=-} = \left( \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \right), \quad (5.87)$$

podemos tornar finitas integrais com o grau de divergência cúbica. Com estas escolhas obtemos

$$G(k^2, \Lambda_i^2) = \left( \frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left( \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right). \quad (5.88)$$

A conexão com a integral original é feita tomando o limite de conexão, limite  $(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \rightarrow \infty$ , quando então  $G(k^2, \Lambda_i^2) = 1$ . A única exigência feita sobre os parâmetros é a de que  $(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \gg m^2$ , tal que podemos reduzir a apenas um parâmetro de regularização, ou seja, fazemos  $(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \simeq \Lambda^2$ , assim sendo, a eq. (5.88) se torna

$$G(k^2, \Lambda_i^2) = \left( \frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2, \quad (5.89)$$

portanto

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} \left( \frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2. \quad (5.90)$$

Uma sistematização semelhante pode ser obtida considerando um maior número de coeficientes não nulos, conseqüentemente somos conduzidos a escrever uma generalização considerando  $n$  fatores. Reescrevemos neste caso

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} \left( \frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left( \frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \cdots \left( \frac{m^2 - \Lambda_n^2}{k^2 - \Lambda_n^2} \right). \quad (5.91)$$

Ou ainda, escrevendo a expressão acima em termos de  $G(k^2, \Lambda_i^2)$

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{G(k^2, \Lambda_i^2)}{k^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i \neq j}^n (m^2 - \Lambda_i^2)}{\prod_{i \neq j}^n (\Lambda_i^2 - \Lambda_j^2) k^2 - \Lambda_j^2}. \quad (5.92)$$

O limite de conexão fica

$$\lim_{(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2, \dots, \Lambda_n^2) \rightarrow \infty} G(k^2, \Lambda_i^2) = 1. \quad (5.93)$$

Com a sistematização apresentada acima, conseguimos tornar as integrais regulares e soluções analíticas podem ser obtidas, mesmo numa forma generalizada. Com a integral regularizada podemos efetuar as integrações nos momentos, identificando as partes finitas, que não possuem dependência com  $\Lambda^2$ , e divergentes, que serão funções de  $\Lambda^2$ . Tomando o limite  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  identificam-se os termos dominantes.

### 5.4.3 Manipulação e cálculo com regularização implícita; divergências ultravioletas

De um modo geral, os métodos de regularização, efetuam mudanças ao nível do integrando de maneira tal a tornar a integral de Feynman finita. Após sua integração, toma-se algum tipo de limite a fim de remover as modificações introduzidas com a mudança do integrando e, deste modo, obter-se os resultados finais que podem ser identificados com os originais. Mas isso nem sempre é verdade, o que torna difícil um controle sobre as mudanças induzidas pelo método de regularização, isto é, os cálculos adquirem uma dependência com o método de regularização adotado.

No presente trabalho, para o cálculo das integrais que apresentam divergências, evitamos tomar uma regularização específica assumindo, de uma maneira implícita, a presença

de uma função regularizadora genérica[10]. Esquemáticamente isto pode ser representado por

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) \longrightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) \right\} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) \quad (5.94)$$

onde os  $\Lambda_i$ 's são os parâmetros da distribuição genérica  $G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)$  que, em adição ao caráter finito, deve ter duas outras propriedades bem gerais. Exigindo a invariância de Lorentz (uma das simetrias implementadas na Lagrangiana) estabelecemos a propriedade de que  $G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2)$  deva ser par nos momentos de integração  $k$ . A outra propriedade importante é a existência do chamado limite de conexão, isto é,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k, \Lambda_i^2) = 1 \quad (5.95)$$

A imposição da primeira propriedade implica no desaparecimento de todas as integrais ímpares no momento de integração. A presença de  $\Lambda$  no limite da última integral da eq. (5.94) não deve ser interpretado como um limite de integração mas apenas, por questões de notação, significa a presença (de maneira implícita) no integrando da função distribuição genérica.

O que se espera de um método de regularização consistente é de que, ele não modifique o valor de uma integral finita, em nosso caso isso é garantido pela segunda propriedade. Podemos notar que as propriedades exigidas são bastante gerais, sendo que é possível mapear ou controlar todas as mudanças implementadas na filosofia de regularização. Estamos aptos agora a modificar o integrando livremente, através do uso de identidades, de modo a obter expressões matemáticas onde todas as divergências estejam contidas nas estruturas independentes dos momentos carregados pelas linhas internas. Uma identidade adequada para obter tais expressões matemáticas é a seguinte

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2 - m^2]} = \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^i}{(k^2 - m^2)^{i+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^i}{(k^2 - m^2)^{i+1} [(k+k_i)^2 - m^2]}, \quad (5.96)$$

onde  $k_i$  é um momento arbitrário utilizado para rotular uma linha interna. O valor de  $N$  na expressão acima pode ser escolhido adequadamente de maneira a evitar cálculos desnecessários, isto é, escolhe-se o seu menor valor para o qual o último termo torna a integral finita. Como consequência, podemos notar que, com esta identidade, não estamos resolvendo a integral divergente mas apenas separando a parte divergente da parte finita. Assim sendo, todas as partes das amplitudes que dependem dos momentos podem ser integradas sem restrições impondo-se o limite de conexão. As quantidades divergentes que permanecem com a utilização desta identidade não sofrem mais qualquer manipulação, elas serão apenas reorganizadas como uma combinação de dois objetos:

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (5.97)$$

e

$$I_{lin}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (5.98)$$

Percebemos que até o presente estágio das manipulações algébricas, temos o total controle de todos os passos intermediários, e que todas as propriedades referentes aos objetos divergentes ainda estão presentes, ou seja, ainda não fizemos qualquer cálculo explícito da parte na qual residem as indefinições matemáticas, de modo que podemos afirmar que a reorganização acima não está “contaminada” pelo método de regularização. Uma importante consequência desta idéia é a de que, todos os resultados obtidos podem ser convertidos para qualquer regularização particular. Outro aspecto importante é que atribuímos um valor definido e único para cada objeto divergente. Este valor será usado toda vez que a integral divergente aparecer em qualquer amplitude física, em qualquer modelo ou teoria. Podemos ressaltar ainda de que todas as arbitrariedades presentes no cálculo perturbativo, devido as divergências, ainda estarão presentes em nossos resultados finais. No que se refere a arbitrariedade envolvendo as escolhas dos rótulos para os momentos das linhas internas, nós as mantivemos com uma escolha bem geral, sem utilizar “shifts” nos passos intermediários.

É chegado então o momento de tratar as integrais de Feynman encontradas na  $EDQ_3$  ao nível um “loop” que se enquadram na classe que denominamos divergentes ultravioletas, no contexto da estratégia que acabamos de descrever. Estas integrais podem ser agrupadas pelo número de propagadores que apresentam em sua estrutura, ou seja:

a) Integrais associadas as funções de um ponto

$$(I_1; I_1^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu)}{[(k + k_1)^2 - \lambda_1^2]}, \quad (5.99)$$

onde uma divergência linear pode ser encontrada na integral  $I_1$  e uma quadrática na integral  $I_1^\mu$ .

b) Integrais associadas as funções de dois pontos

$$(I_2; I_2^\mu; I_2^{\mu\nu}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{[(k + k_1)^2 - \lambda_1^2] [(k + k_2)^2 - \lambda_2^2]}, \quad (5.100)$$

onde o maior grau de divergência, divergência linear, aparece na integral  $I_2^{\mu\nu}$ , sendo que, a integral  $I_2^\mu$  apresenta uma divergência logarítmica enquanto que a integral  $I_2$  é finita.

c) Integrais associadas as funções de três pontos

$$(I_3; I_3^\mu; I_3^{\mu\nu}; I_3^{\mu\nu\lambda}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu; k^\mu k^\nu k^\lambda)}{[(k + k_1)^2 - \lambda_1^2] [(k + k_2)^2 - \lambda_2^2] [(k + k_3)^2 - \lambda_3^2]}. \quad (5.101)$$

A única estrutura divergente deste conjunto é a  $I_3^{\mu\nu\lambda}$ . Vamos então considerar o cálculo das integrais acima mencionadas uma a uma.

**Integral  $I_1$** 

Consideremos inicialmente a integral de Feynman que aparece na função de um ponto, definida como

$$I_1 = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (5.102)$$

Pela contagem das potências do momento de integração  $k$  notamos que esta integral possui uma divergência de grau linear. Utilizando a identidade (5.96) tomando o valor de  $N = 2$ , podemos reescrever o integrando de maneira que a integral possa ser colocada na forma

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - m^2]} - k_1^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \\ & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)^2}{[k^2 - m^2]^2 [(k+k_1)^2 - m_1^2]}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Na forma acima, já retiramos as integrais com integrandos ímpares em  $k$ , como consequência da exigência da invariância de Lorentz da função distribuição regularizadora. Também suprimimos o subscrito  $\Lambda$  das integrais finitas como consequência da existência do limite de conexão. O passo seguinte é o cálculo das integrais finitas, enquanto que as que envolvem divergências podem ser escritas em termos do objeto definido em (5.98), de modo que obtemos

$$I_1 = I_{lin}(m^2). \quad (5.104)$$

No resultado acima percebe-se que houve um cancelamento da parte finita. Outro aspecto relevante é o de que, o resultado acima, pode ser convertido em qualquer outro obtido por diferentes tipos de regularizações.

**Integral  $I_{1\mu}$** 

Na sequência de integrais definidas no conjunto (5.103) encontramos a integral com divergência quadrática definida como

$$I_{1\mu} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2]}. \quad (5.105)$$

Seguindo o mesmo procedimento estabelecido para a integral  $I_1$ , obtemos as seguintes estruturas

$$\begin{aligned} I_{1\mu} = & -2k_{1\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\alpha}k_{\mu}}{[k^2 - m^2]^2} + 4k_{1\alpha} (k_1^2 + \lambda^2 - m_1^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\alpha}k_{\mu}}{[k^2 - m^2]^3} \\ & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^3 k_{\mu}}{[k^2 - m^2]^3 [(k+k_1)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

As integrais finitas que aparecem na expressão acima, se anulam quando calculadas. Restam somente aquelas que contêm as divergências. Com uma pequena reorganização, podemos escrever o resultado como

$$(I_1)_{\mu} = -k_{1\nu} \nabla_{\mu\nu}^{(3)} - k_{1\nu} I_{lin}(m). \quad (5.107)$$

Novamente utilizamos a definição dos objetos divergentes (5.97) e (5.98).

### Integral $I_2$ .

Na definição das funções de Green de dois pontos aparecem integrais contendo dois propagadores. A mais simples delas é definida como

$$I_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.108)$$

Esta integral não apresenta divergências. Com a integração obtemos

$$I_2 = \left(\frac{i}{4\pi}\right) \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2). \quad (5.109)$$

### Integral $I_{2\mu}$

Após considerarmos a integral mais simples que aparece na função de Green de dois pontos passamos para a integral que aparece na sequência do conjunto (5.100), definida como

$$I_{2\mu} = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.110)$$

Como aparece uma divergência logarítmica, utilizamos a identidade (5.96) para os dois denominadores, com  $N = 1$ , para que seja possível colocar a integral na forma

$$\begin{aligned} I_{2\mu} = & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_{\mu}}{[k^2 - m^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \\ & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k) k_{\mu}}{[k^2 - m^2] [(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Nesta integral, toda a parte divergente pode ser eliminada pela exigência da invariância de Lorentz, os demais termos são finitos e podem ser integrados. Após a integração da parte finita obtemos

$$\begin{aligned} (-i4\pi) I_{2\mu} = & -\frac{1}{2} k_{1\mu} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2) \\ & + \frac{1}{2} k_{1\mu} Z_1^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2) \\ & - \frac{1}{2} k_{2\mu} Z_1^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2). \end{aligned} \quad (5.112)$$

Utilizando a relação

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2) = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2) \quad (5.113)$$

podemos reescrever o resultado como

$$(I_2)_{\mu} = -\frac{i}{4} (4\pi)^{-1} (k_{1\mu} + k_{2\mu}) Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2). \quad (5.114)$$

**Integral  $I_{2\mu\nu}$** 

Na sequência das discussões encontramos a última integral onde aparecem dois propagadores que será utilizada em nosso trabalho. Ela é definida por

$$I_{2\mu\nu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.115)$$

Escolhendo o valor  $N = 1$  na identidade (5.96) obtemos a seguinte estrutura

$$\begin{aligned} I_{2\mu\nu} = & \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^2} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2) k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3} \\ & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2) k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2)^2 k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3 [(k+k_2)^2 - m_2^2]} \\ & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2) (k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2) k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3 [(k+k_2)^2 - m_2^2]} \\ & + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)^2 k_\mu k_\nu}{[k^2 - \lambda^2]^2 [(k+k_1)^2 - m_1^2] [(k+k_2)^2 - m_2^2]}. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Depois de efetuadas todas as integrais e reorganizações encontramos a expressão

$$\begin{aligned} (I_2)_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} I_{lin}(m^2) \\ & + \frac{i}{2} (4\pi)^{-1} [q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} q^2] \left[ \frac{1}{8} Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2) - \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2)}{2q^2} - \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^2} \right] \\ & + \frac{i}{8} (4\pi)^{-1} [(k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\nu] Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Para chegarmos a este resultado utilizamos ainda a relação

$$Z_1^{-\frac{1}{2}}(m, q^2) = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2) \quad (5.118)$$

e

$$Z_2^{-\frac{1}{2}}(m, q^2) = (-) \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^2} + \frac{3}{8} Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2) - \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(m, q^2)}{2q^2}. \quad (5.119)$$

**Integral  $I_3$** 

Passamos agora para o conjunto das integrais de Feynman com três propagadores. A mais simples delas é definida como

$$I_3 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2][(k+k_3)^2 - m_3^2]}. \quad (5.120)$$

Esta integral é finita e pode ser calculada sem alterações no seu integrando, assim obtemos

$$[-i(16\pi)] I_3 = \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2). \quad (5.121)$$

Onde adotamos uma notação simplificada para as funções  $\xi_{nm}^{\frac{3}{2}}$  em relação à aquela introduzida no capítulo IV, isto é,

$$\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(m_1^2, m_2^2, q^2, m_3^2, p^2) = \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2), \quad (5.122)$$

enquanto que para os momentos externos adotamos  $q = (k_2 - k_1)$  e  $p = (k_3 - k_1)$ .

### Integral $I_{3\mu}$

A integral que aparece na sequência do conjunto(5.101), definida como,

$$I_{3\mu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m_1^2] [(k+k_2)^2 - m_2^2] [(k+k_3)^2 - m_3^2]} \quad (5.123)$$

é finita e pode ser calculada diretamente. O resultado é

$$\begin{aligned} [i(16\pi)] (I_3)_\mu &= p_\mu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \\ &+ q_\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \\ &+ k_{1\mu} \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2). \end{aligned} \quad (5.124)$$

### Integral $I_{3\mu\nu}$

Considerando agora a estrutura definida por

$$I_{3\mu\nu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \quad (5.125)$$

que é finita e nos leva a

$$\begin{aligned} [-i(16\pi)] I_{3\mu\nu} &= q_\mu q_\nu \left[ \xi_{02}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ p_\mu p_\nu \left[ \xi_{20}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) \left[ \xi_{11}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ (k_{1\mu} p_\nu + k_{1\nu} p_\mu) \left[ \xi_{10}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ (k_{1\mu} q_\nu + k_{1\nu} q_\mu) \left[ \xi_{01}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ k_{1\mu} k_{1\nu} \left[ \xi_{00}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \\ &+ g_{\mu\nu} \left[ \eta_{00}^{\frac{3}{2}}(q^2, p^2, m^2) \right] \end{aligned} \quad (5.126)$$

Aqui também utilizamos uma simplificação na notação. Fizemos

$$\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(m_1^2, m_2^2, q^2, m_3^2, p^2) = \eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(q^2, m^2, p^2). \quad (5.127)$$

**Integral**  $(I_3)_{\mu\nu\lambda}$ 

Vamos agora considerar a última estrutura da classe de integrais que estamos considerando, a qual é necessária para o cálculo das amplitudes físicas nos processos da  $EDQ_3$ . A estrutura é definida como

$$I_{3\mu\nu\lambda} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}, \quad (5.128)$$

e apresenta uma divergência logarítmica. Escolhendo  $N = 2$ , na identidade (5.96) podemos reescrever a estrutura acima como

$$\begin{aligned} I_{3\mu\nu\lambda} = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 - m^2]^3} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_3^2 + 2k_3 \cdot k) k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 - m^2]^3 [(k+k_3)^2 - m^2]} \\ & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 - m^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\ & - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k) k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 - m^2] [(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Após um longo processo algébrico chega-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
[-2i(8\pi)] I_{3\mu\nu\lambda} = & (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{03}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{30}^{\frac{3}{2}} \\
& + \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \left. \right\} \xi_{12}^{\frac{3}{2}} \\
& + \left\{ (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \right. \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \left. \right\} \xi_{21}^{\frac{3}{2}} \\
& + k_{1\mu} \left\{ (k_2 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{02}^{\frac{3}{2}} \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{20}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \left. \right\} \\
& + k_{1\nu} \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{02}^{\frac{3}{2}} \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{20}^{\frac{3}{2}} \left. \right\} \\
& + k_{1\lambda} \left\{ (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\mu \xi_{20}^{\frac{3}{2}} \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \xi_{11}^{\frac{3}{2}} \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{02}^{\frac{3}{2}} \left. \right\} \\
& + k_{1\lambda} k_{1\mu} \left[ (k_2 - k_1)_\nu \xi_{01}^{\frac{3}{2}} + (k_3 - k_1)_\nu \xi_{10}^{\frac{3}{2}} \right] \\
& + k_{1\lambda} k_{1\nu} \left[ (k_2 - k_1)_\mu \xi_{01}^{\frac{3}{2}} + (k_3 - k_1)_\mu \xi_{10}^{\frac{3}{2}} \right] \\
& + k_{1\mu} k_{1\nu} \left[ (k_2 - k_1)_\lambda \xi_{01}^{\frac{3}{2}} + (k_3 - k_1)_\lambda \xi_{10}^{\frac{3}{2}} \right] \\
& + k_{1\mu} k_{1\nu} k_{1\lambda} \xi_{00}^{\frac{3}{2}} \\
& + g_{\nu\lambda} k_{1\mu} \eta_{00}^{\frac{3}{2}} + g_{\mu\lambda} k_{1\nu} \eta_{00}^{\frac{3}{2}} + g_{\mu\nu} k_{1\lambda} \eta_{00}^{\frac{3}{2}} \\
& + g_{\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\mu \eta_{01}^{\frac{3}{2}} + g_{\nu\lambda} (k_3 - k_1)_\mu \eta_{10}^{\frac{3}{2}} \\
& + g_{\mu\lambda} (k_2 - k_1)_\nu \eta_{01}^{\frac{3}{2}} + g_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)_\nu \eta_{10}^{\frac{3}{2}} \\
& + g_{\mu\nu} (k_2 - k_1)_\lambda \eta_{01}^{\frac{3}{2}} + g_{\mu\lambda} (k_3 - k_1)_\lambda \eta_{10}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{5.130}$$

#### 5.4.4 Manipulação e cálculo com regularização implícita; divergências Infravermelhas

A presença de integrais divergentes contendo o propagador do fóton se distingue dos demais casos e nos obriga a introduzir modificações no procedimento que adotamos na seção anterior para tratar as integrais de Feynman puramente fermiônicas[29]. A primeira distinção ocorre para a sistematização adotada para a parte divergente definida nas equações (5.97) e (5.98) em termos dos objetos divergentes. Naquela ocasião, tínhamos a presença da massa do férmion em todos os integrandos, o que não ocorre para a presente situação, particularmente para as integrais definidas em (5.99)-(5.101), ou seja, a sistematização adotada no capítulo IV não decorre automaticamente para as integrais que devemos considerar agora. Isto implica que, em princípio, teríamos após os cálculos, expressões diferentes para as quantidades divergentes nas amplitudes da  $EDQ_3$ . Uma vez que estamos utilizando uma estratégia para manipulações e cálculos envolvendo integrais de Feynman divergentes, que possui o intuito de evitar efetuar de fato o cálculo de integrais divergentes, temos que construir relações entre os objetos divergentes com diferentes massas no integrando. Isto porque, temos em mente a verificação de relações entre funções de Green e é nesta hora que nos deparamos com a necessidade de comparar objetos divergentes com diferentes massas nos integrandos. Para encaminhar esta discussão, nós primeiro notamos que, ao efetuarmos a separação das quantidades divergentes das integrais de Feynman originais, utilizando a expressão (5.96), a quantidade com dimensão de massa que aparece nos objetos básicos divergentes é, na verdade, uma escolha arbitrária. Esta quantidade, que desempenhará o papel de escala para os objetos divergentes e apara as partes finitas, pode ser escolhida convenientemente ou mantida arbitrária. Em um momento futuro esta escolha pode ser convertida em outra através de relações de escala envolvendo objetos básicos divergentes. Podemos perceber isto se ao invés de utilizarmos a identidade (5.96), tomarmos uma mais geral como pode ser verificado na expressão abaixo.

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2 - m_i^2]} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m_i^2)}{(k^2 - \lambda_1^2) [(k+k_i)^2 - m_i^2]}. \quad (5.131)$$

Esta expressão pode ser considerada aquela correspondente a escolha  $N = 1$  da expressão (5.96). Ela permite o efeito desejado que é o de diminuir no segundo termo a potência do momento  $k$  no numerador relativa ao denominador. O parâmetro  $\lambda^2$  introduzido na identidade acima é arbitrário e estabelece um ligação entre os dois termos do lado direito. Se o segundo termo do lado direito da equação ainda estiver presente em uma integral divergente a identidade pode ser utilizada novamente. Teremos então

$$\frac{1}{[(k+k_i)^2 - m^2]} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)} - \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda_1^2) (k^2 - \lambda_2^2)} + \frac{(k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_1^2 - m^2) (k_i^2 + 2k_i \cdot k + \lambda_2^2 - m^2)}{(k^2 - \lambda_1^2) (k^2 - \lambda_2^2) [(k+k_i)^2 - m^2]}, \quad (5.132)$$

que pode ser vista como a operação similar àquela indicada na equação (5.96) quando é escolhido  $N = 2$ . Seguindo este procedimento um número indefinido de vezes, a expressão correspondente a uma integral de Feynman qualquer, e por conseguinte as amplitudes, tornar-se-ão, em princípio, dependentes de um número arbitrário de parâmetros. É evidente que quando dois termos sucessivos da expressão acima pertencem a integrais finitas nós esperamos o cancelamento automático desta dependência artificial. Quando alguns dos termos da identidade estiverem presentes em integrais divergentes básicas, que, de fato, na nossa estratégia jamais serão integradas, nós esperamos que a exigência de independência dos resultados com os parâmetros arbitrários nos forneça restrições sobre as propriedades dos objetos divergentes básicos ou propriedades matemáticas que estes devem obedecer com vistas a consistência no cálculo perturbativo. Estas propriedades incluem relações precisas entre objetos básicos divergentes com diferentes escalas adotadas. Isto permite que, a qualquer momento dos cálculos, possamos converter uma escolha prévia noutra mais conveniente, o que pode ser visto facilmente tomando como um caso particular da expressão (5.96)

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda_1^2)^2} = \frac{1}{(k^2 - \lambda_2^2)^2} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(k^2 - \lambda_1^2)^2 (k^2 - \lambda_2^2)} - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(k^2 - \lambda_2^2)^2 (k^2 - \lambda_1^2)}, \quad (5.133)$$

cuja integração nos momentos  $k$  nos fornece a relação

$$I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) - i(4\pi)^{-2} \left[ \ln \left( \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \right]. \quad (5.134)$$

Com a discussão que acabamos de efetuar, podemos perceber que apenas um parâmetro arbitrário é suficiente e relevante para as manipulações necessárias e pretendidas. Podemos então, para propósitos futuros, extrair uma importante informação com respeito a separação das partes divergentes e finitas presentes nas Integrais de Feynman. Notemos que é possível separar a parte divergente, divergência ultravioleta, escolhendo para tal um parâmetro arbitrário para caracterizar os objetos divergentes básicos. Em qualquer instante podemos converter esta escolha, efetuando uma transformação de escala, permitida pela relação (5.133). A relação direta desta conclusão com nossos problemas imediatos está na possibilidade de separar as divergências infravermelhas daquelas ultravioletas para estudá-las separadamente. Para tal, adotaremos o seguinte procedimento[12]:

a) Antes de efetuar as separações das partes finitas e divergentes (ultravioletas) introduziremos uma massa fictícia  $\mu^2$  onde aparecer o propagador do fóton.

b) Separamos as partes divergentes ultravioletas em objetos básicos  $I_{lin}$  e  $\nabla_{\mu\alpha}^{(3)}(m^2)$  utilizando como escala a massa do elétron.

c) Resolvemos as integrais finitas obtidas e estudamos o comportamento no limite  $\mu^2 \rightarrow 0$ . A presença de termos divergentes neste limite implicará em divergências infravermelhas nas amplitudes correspondentes.

Tendo em mente a discussão acima vamos então considerar as integrais de nosso interesse.

Quando consideramos o processo de auto-energia do elétron por excitação de um fóton, consideramos um conjunto de integrais, associadas ao termo independente de “gauge”, que conterão ao menos um termo no denominador associado ao férmion, as quais possuem um pólo simples. A fim de organizar as discussões, seguindo a mesma filosofia definida na seção anterior, nós definimos inicialmente um conjunto de integrais contendo um único denominador associado ao propagador do fóton. Consideramos primeiramente aquelas integrais com dois denominadores

$$(J_2; J_2^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu)}{P_1 E_2}. \quad (5.135)$$

Em seguida aquelas integrais de Feynman com três propagadores

$$(J_3; J_3^\mu; J_3^{\mu\nu}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{P_1 E_{23}}. \quad (5.136)$$

O maior grau de divergência envolvido é o logarítmico, sendo que, algumas estruturas são finitas. O conjunto acima definido é suficiente para a determinação da parte independente do parâmetro de “gauge” das funções de Green correspondentes aos diagramas de auto-energia do fóton e de correção de vértice.

O segundo conjunto de integrais de Feynman que devemos considerar é aquele associado ao termo de “gauge” do propagador do fóton. Este termo não terá um pólo simples, mas sim um pólo duplo, o que piora o comportamento das funções com o valores baixos dos momentos. As integrais a serem resolvidas são as seguintes

$$(L_2; L_2^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu)}{(P_1)^2}. \quad (5.137)$$

Estas são encontradas quando calculamos o processo de auto-energia do elétron e tomamos o termo dependente do parâmetro de “gauge”. Notemos que apenas uma das estruturas apresenta grau de divergência que é logarítmico sendo que a outra é finita. Definimos também as estruturas

$$(L_3; L_3^\mu; L_3^{\mu\nu}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{(P_1)^2 E_2}, \quad (5.138)$$

que aparecem no termo dependente do parâmetro de “gauge” da amplitude correspondente a correção de vértice. A presença do propagador do elétron melhora o comportamento da integral para baixos valores dos momentos. Por fim, consideremos as estruturas de quatro pontos definidas por

$$(L_4; L_4^\mu; L_4^{\mu\nu}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(1; k^\mu; k^\mu k^\nu)}{(P_1)^2 E_{23}}, \quad (5.139)$$

que são todas finitas e estão associadas ao termo de “gauge” do processo de correção de vértice. Vamos então tratar destas integrais para, no próximo capítulo, explicitar as amplitudes.

**Integral  $J_2$** 

Consideremos inicialmente o cálculo da integral  $J_2$ , a qual, em sua forma explícita, é definida por

$$J_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+k_1)^2[(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.140)$$

Seguindo a filosofia proposta, prosseguimos escrevendo primeiro a expressão acima introduzindo a massa para o fóton, ou seja,

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - \mu^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.141)$$

Neste ponto, para manter a notação compacta, nós introduzimos a seguinte definição:

$$U_i = U(k_i, \mu^2) = [(k+k_i)^2 - \mu^2], \quad (5.142)$$

tal que o limite de conexão infravermelho fica

$$P_i = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \{U_i\} = U(k_i, 0). \quad (5.143)$$

Assim,

$$J_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{U_1 E_2} \right\}. \quad (5.144)$$

Esta integral é finita. Deste modo não teremos maiores complicações e, seguindo a estratégia que adotamos, podemos efetuar as integrações nos momentos de modo que obtemos

$$J_2 = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right]. \quad (5.145)$$

Na expressão acima adotamos  $p = k_2 - k_1$ . Para obtermos o resultado desejado necessitamos estudar o comportamento da função  $Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$  no limite indicado. Isto foi feito no capítulo *IV* onde percebemos, na equação (4.26) daquele capítulo, que esta função tem bom comportamento para este limite. Podemos então representar a expressão correspondente, para a integral de Feynman considerada, como

$$J_2 = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2) \right]. \quad (5.146)$$

**Integral  $J_2^\mu$** 

Consideremos agora a integral divergente definida por

$$J_2^\mu = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2][(k+k_2)^2 - m^2]}. \quad (5.147)$$

Introduzindo uma massa fictícia para o fóton e tomando o limite podemos escrever

$$J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{U_1 E_2} \right\}, \quad (5.148)$$

que possui uma divergência logarítmica e nos leva a utilizar a identidade (5.133) tomando como escala a massa do elétron, escrevemos então

$$J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\mu}{[k^2 - m^2]^2} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k) k_\mu}{[k^2 - m^2]^2 E_2} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k) k_\mu}{[k^2 - m^2] U_1 E_2} \right\}, \quad (5.149)$$

que fica:

$$(-i4\pi) J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) + \frac{1}{2} k_1^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) - \frac{1}{2} k_2^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right\}, \quad (5.150)$$

ou ainda

$$(-i4\pi) J_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) - \frac{1}{2} k_1^\mu \frac{\sqrt{-m^2}}{q^2} (\sqrt{-m^2} - \sqrt{-\mu^2}) + \frac{1}{2} k_1^\mu \frac{\sqrt{-m^2} (q^2 + \mu^2 - m^2)}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) + \frac{1}{2} k_2^\mu \frac{\sqrt{-m^2}}{q^2} (\sqrt{-m^2} - \sqrt{-\mu^2}) - \frac{1}{2} k_2^\mu \frac{\sqrt{-m^2} (q^2 + \mu^2 - m^2)}{2q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right\}. \quad (5.151)$$

Utilizando o conhecimento que temos do comportamento da função  $Z_k^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$  no limite indicado, expressão (4.26) do capítulo IV, podemos obter o resultado desejado.

### Integral $J_3$

Consideremos agora as integrais definidas em (5.136). Primeiramente consideramos

$$J_3 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2](k + k_3)^2 - m^2]}. \quad (5.152)$$

Seguindo o procedimento que adotamos, escrevemos inicialmente

$$J_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{U_1 E_{23}} \right\}, \quad (5.153)$$

ou seja

$$J_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) \right\}. \quad (5.154)$$

Por contagem de potências é fácil constatar que a integral  $I_3$  é finita, o que nos permite uma integração direta para obter

$$J_3 = \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\}, \quad (5.155)$$

onde assumimos  $(k_1 - k_2) = q$  e  $(k_3 - k_1) = p$ . Após a tomada do limite indicado, obtemos

$$J_3 = \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \left\{ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\}. \quad (5.156)$$

### Integral $J_3^\mu$

A próxima integral a ser considerada é definida por

$$J_3^\mu = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2](k + k_3)^2 - m^2]}, \quad (5.157)$$

que escrevemos como

$$J_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{U_1 E_{23}} \right\}, \quad (5.158)$$

ou seja,

$$J_3^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ I_3^\mu (k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) \right\}. \quad (5.159)$$

A integral  $I_3^\mu (k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$  é finita e ao ser integrada o que resulta em

$$J_3^\mu = -\frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ p^\mu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ \left. + q^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ \left. + k_1^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right], \quad (5.160)$$

o que representamos como

$$J_3^\mu = -\frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \left\{ \left[ p^\mu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\ \left. + q^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ \left. + k_1^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\}. \quad (5.161)$$

### Integral $J_3^{\mu\nu}$

Agora podemos considerar a última integral do conjunto (5.136), definida por

$$J_3^{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k + k_1)^2][(k + k_2)^2 - m^2](k + k_3)^2 - m^2]}. \quad (5.162)$$

Seguindo nossa estratégia, escrevemos isto na forma

$$J_3^{\mu\nu} = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ I_3^{\mu\nu} (k_1, \mu; k_2, m; k_3, m) \right\}. \quad (5.163)$$

O que caracteriza uma estrutura matemática finita que pode ser integrada resultando em

$$\begin{aligned}
J_3^{\mu\nu} = \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ g^{\mu\nu} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
+ p^\mu q^\nu \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ q^\mu p^\nu \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ k_1^\nu q^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ k_1^\mu q^\nu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ k_1^\nu p^\mu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ k_1^\mu p^\nu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ p^\mu p^\nu \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ q^\mu q^\nu \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
\left. \left. + k_1^\mu k_1^\nu \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\}, \quad (5.164)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\eta_{00}^{-\frac{1}{2}} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2; m^2) = Z_0^{-\frac{1}{2}} (m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\
- \frac{(q^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
- \frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
+ \mu^2 \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, p^2, m^2, q^2). \quad (5.165)
\end{aligned}$$

Basta agora tomar o limite  $\mu^2 \rightarrow 0$  para obter o resultado desejado. Para isso tomamos as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$ s, na expressão acima, a valor nulo para a massa correspondente ao propagador do fóton. Representaremos isto por

$$\begin{aligned}
J_3^{\mu\nu} = \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \left[ g^{\mu\nu} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
+ (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu) \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ (k_1^\nu q^\mu + k_1^\mu q^\nu) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ (k_1^\nu p^\mu + k_1^\mu p^\nu) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ p^\mu p^\nu \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
+ q^\mu q^\nu \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
\left. + k_1^\mu k_1^\nu \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right], \quad (5.166)
\end{aligned}$$

### Integral $L_2$

Consideremos agora as integrais contendo pólo duplo no propagador do fóton. Neste caso temos várias opções equivalentes de procedimentos. Vamos mostrar isto tratando a

integral

$$L_2 = \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2}, \quad (5.167)$$

a qual, primeiramente, escrevemos na forma

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(U_1)^2} \right\}. \quad (5.168)$$

Notemos que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{U_1} \right] \right\}, \quad (5.169)$$

ou seja,

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} I_1(k_1, \mu^2) \right\}. \quad (5.170)$$

Onde utilizamos a definição (5.102) da seção (5.4.3). Este procedimento, que pode ser seguido em todas as integrais pertencentes a esta classe, permite relacionarmos estas integrais com outras onde não teremos o pólo duplo associado ao propagador do fóton. Assim devemos tratar a integral obtida tomando como escala a massa do elétron

$$\begin{aligned} I_1(k_1, \mu^2) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2)^2}{(k^2 - m^2)^2 [(k + \mu_1)^2 - \mu_1^2]}. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Procedendo a integração dos termos finitos teremos:

$$I_1(k_1, \mu^2) = I_{lin}(m^2) - i(4\pi)^{-1} \left[ (-\mu_1^2)^{\frac{1}{2}} - (-m^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.172)$$

Assim,

$$L_2 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ I_{lin}(m^2) - i(4\pi)^{-1} \left[ (-\mu_1^2)^{\frac{1}{2}} - (-m^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (5.173)$$

Portanto ficamos com

$$L_2 = i(4\pi)^{-1} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad (5.174)$$

o que indica claramente a presença de uma divergência infravermelha.

A mesma integral poderia ser calculada de outro modo. Tomamos inicialmente a integral geral

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - \mu_1^2][(k + k_2)^2 - \mu_2^2]}, \quad (5.175)$$

da qual podemos, num passo futuro, retirar o resultado desejado como um caso particular. Pela contagem de potências percebemos que a integral acima é finita. A integração resulta em

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2). \quad (5.176)$$

Então tomamos  $k_1 = k_2$  já que a função  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$  é bem comportada neste limite, para ficar com

$$I_2(k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu_1^2, \mu_2^2, 0; m^2). \quad (5.177)$$

Tomando então, sem problemas,  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$ , teremos assim

$$I_2(k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, \mu^2, 0; m^2). \quad (5.178)$$

Após a tomada do limite para valor nulo da massa fictícia  $\mu^2$  obteremos o resultado correspondente a  $L_2$  que coincide com aquele que obtivemos anteriormente, eq. (5.174).

### Integral $L_2^\mu$

Consideremos agora a integral

$$L_2^\mu = \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2]^2}, \quad (5.179)$$

a qual primeiramente escrevemos na forma

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[U_1]^2} \right\}. \quad (5.180)$$

Notemos que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{U_1} \right] \right\}, \quad (5.181)$$

ou seja,

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_1^\mu(k_1, \mu)] \right\}, \quad (5.182)$$

onde utilizamos a definição (5.105) da seção (5.4.3). Agora devemos tratar a integral obtida. Fazemos inicialmente

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= - \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2) k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ &\quad - \int_\Lambda \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu^2)^3 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k + k_1)^2 - \mu^2]}. \end{aligned} \quad (5.183)$$

Em seguida, procedendo a integração dos termos finitos, obtemos

$$I_1^\mu = -k_{1\alpha} \left( \nabla^{(3)} \right)^{\mu\alpha} (m^2) - k_1^\mu I_{lin} (m^2) - i (4\pi)^{-1} k_1^\mu \left[ (-m^2)^{1/2} - (-\mu^2)^{1/2} \right]. \quad (5.184)$$

Assim, derivando em relação a  $\mu^2$  teremos

$$L_2^\mu = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} -i (4\pi)^{-1} k_1^\mu \left( \frac{1}{(-\mu^2)^{1/2}} \right), \quad (5.185)$$

o que indica aqui a presença de divergência infravermelha. A mesma integral poderia ser calculada de outro modo. Tomamos inicialmente a integral geral

$$I_2^\mu (k_1, \mu_1^2; k_2, \mu_2^2) = \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2 - \mu_1^2][(k+k_2)^2 - \mu_2^2]} \right\}. \quad (5.186)$$

Com a utilização da identidade (5.131), tomando como escala a massa do elétron, podemos escrever

$$I_2^\mu (k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - \mu_2^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 [(k+k_2)^2 - \mu_2^2]} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2) k^\mu}{(k^2 - m^2) [(k+k_1)^2 - \mu_1^2] [(k+k_2)^2 - \mu_2^2]} \quad (5.187)$$

Integrando diretamente as integrais finitas obtemos

$$(-i4\pi) I_2^\mu (k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) = -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}} (\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) + \frac{1}{2} k_1^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}} (\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) - \frac{1}{2} k_2^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}} (\mu_1^2, \mu_2^2, (k_1 - k_2)^2; m^2). \quad (5.188)$$

Então tomamos  $k_1 = k_2$  para ficar com

$$(-i4\pi) I_2^\mu (k_1, \mu_1^2; k_1, \mu_2^2) = -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}} (\mu_1^2, \mu_2^2, 0; m^2) \quad (5.189)$$

Finalmente, tomando  $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu^2$ , teremos

$$(-i4\pi) I_2^\mu (k_1, \mu^2; k_1, \mu^2) = -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}} (\mu^2, 0; m^2). \quad (5.190)$$

### Integral $L_3$

Consideremos agora as integrais definidas em (5.138). Primeiramente consideramos aquela definida por

$$L_3 = \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.191)$$

Seguiremos os procedimentos utilizados acima para o tratamento da integral. Primeiro escrevemos

$$\begin{aligned}
L_3 &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[U_1]^2 E_2} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} \int_{\Lambda} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{U_1 E_2} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_2(k_1, \mu; k_2, m)] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.192}$$

Tratamos então a integral  $I_2(k_1, \mu^2; k_2, m^2)$  de acordo com a prescrição que adotamos. Resolvendo as integrais finitas teremos

$$(-4\pi i)(I_2) = \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2). \tag{5.193}$$

Assim

$$L_3 = \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ \frac{1}{2} i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right\}. \tag{5.194}$$

Utilizando a relação

$$Y_k^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2) = (-\lambda^2) \frac{\partial Z_k^{\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; \lambda^2)}{\partial \mu^2} \tag{5.195}$$

introduzida no capítulo IV, ficamos com

$$(4\pi i) L_3 = \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\}, \tag{5.196}$$

resultado que representaremos como

$$(4\pi i) L_3 = \left\{ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right\}. \tag{5.197}$$

### Integral $L_3^\mu$

Consideremos a integral definida em (5.138) como

$$L_3^\mu = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2]}. \tag{5.198}$$

Seguindo o mesmo procedimento escrevemos primeiro

$$\begin{aligned}
L_3^\mu &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{(U_1)^2 E_1} \right\} \\
&= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_2^\mu(k_1, \mu^2; k_2, m^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.199}$$

Agora desenvolvemos a integral  $I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m)$  de acordo com a estratégia que adotamos. Para tal, primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} I_2^\mu &= \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m^2 - \mu_2^2) k^\mu}{(k^2 - m^2)^2 E_2} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + m^2 - \mu_1^2) k^\mu}{(k^2 - m^2) U_1 E_2}. \end{aligned} \quad (5.200)$$

Resolvendo as integrais finitas teremos

$$\begin{aligned} (-4\pi i) I_2^\mu(k_1, \mu; k_2, m) &= -\frac{1}{2} k_1^\mu Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_1^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} k_2^\mu Z_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2). \end{aligned} \quad (5.201)$$

Assim ficamos com

$$(-4\pi i) L_3^\mu = \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ q^\mu \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} + k_1^\mu \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\}. \quad (5.202)$$

### Integral $L_4$

Por fim, consideramos então as integrais do conjunto (5.139). Primeiro tomemos

$$L_4 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]}, \quad (5.203)$$

que escrevemos na forma

$$\begin{aligned} L_4 &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[U_1]^2 E_{23}} \right\} \\ &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.204)$$

Agora utilizamos o resultado

$$I_3(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2) = i(4\pi)^{-1} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m_3^2, p^2) \right]. \quad (5.205)$$

Com isso teremos

$$(-4\pi i) L_4 = \frac{1}{4} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m_3^2, p^2) \right] \right\}. \quad (5.206)$$

podemos reescrever a expressão acima utilizando o seguinte resultado obtido em (4.87) do capítulo IV dada por

$$\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^2} \left[ \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}(\lambda_1^2, q^2, \lambda_2^2, p^2, \lambda_3^2) \right]. \quad (5.207)$$

que, comparada com (5.206), resulta em

$$(-4\pi i) L_4 = \frac{3}{8} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\}, \quad (5.208)$$

onde  $q = k_2 - k_1$  e  $p = k_3 - k_1$ . Representaremos o resultado obtido por

$$(-4\pi i) L_4 = \frac{3}{8} \left[ \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} (0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right]. \quad (5.209)$$

### Integral $L_4^\mu$

Agora consideramos a integral

$$L_4^\mu = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[(k + k_1)^2]^2 [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \quad (5.210)$$

Primeiro a reescrevemos como

$$\begin{aligned} L_4^\mu &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu}{[U_1]^2 E_{23}} \right\} \\ &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3^\mu (k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.211)$$

Então substituímos o resultado para  $I_3^\mu (k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$  na expressão acima para ficar com

$$\begin{aligned} (-4\pi i) L_4^\mu &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ p^\mu \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + q^\mu \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + k_1^\mu \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.212)$$

Portanto teremos

$$\begin{aligned} (-4\pi i) L_4^\mu &= -\frac{3}{2} \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ p^\mu \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + q^\mu \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + k_1^\mu \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.213)$$

o que representaremos como

$$\begin{aligned} (-4\pi i) L_4^\mu &= -\frac{3}{2} \left\{ p^\mu \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + q^\mu \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \left. + k_1^\mu \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}} (0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.214)$$

**Integral  $L_4^{\mu\nu}$** 

Finalmente consideramos a integral

$$L_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+k_1)^2]^2 [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (5.215)$$

Por primeiro escrevemos

$$\begin{aligned} L_4^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\mu k^\nu}{(U_1)^2 E_{23}} \right\} \\ &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu^2} [I_3^{\mu\nu}(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.216)$$

Para completar calculamos  $I_3^{\mu\nu}(k_1, \mu^2; k_2, m^2; k_3, m^2)$ , de acordo com a prescrição que adotamos. Primeiro resolvemos as integrais finitas para ficar com

$$\begin{aligned} (-4\pi i) L_4^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left\{ q^\mu q^\nu \xi_{02}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad + p^\mu p^\nu \xi_{20}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ &\quad + [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ &\quad \left. + g^{\mu\nu} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2; m^2) \right\} \\ &\quad + (k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + (k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\ &\quad + k_1^\mu k_1^\nu \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.217)$$

A derivada indicada fornece

$$\begin{aligned} (4\pi i) L_4^{\mu\nu} &= \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{3}{2} q^\mu q^\nu \sigma_{02}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad + \frac{3}{2} p^\mu p^\nu \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ &\quad + \frac{3}{2} [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \sigma_{11}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-m^2} g^{\mu\nu} \left[ -\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \quad \left. + \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ &\quad \quad \left. + \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \left. \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} (k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu) \left[ \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \\ &\quad + \frac{3}{2} (k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu) \left[ \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \\ &\quad + \frac{3}{2} + k_1^\mu k_1^\nu \left[ \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.218)$$

Onde utilizamos a expressão

$$\frac{\partial \left[ \eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2) \right]}{\partial \lambda_1^2} = \left[ \xi_{nm}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{n+1m}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{nm+1}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (5.219)$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial \left[ \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} \right]}{\partial \lambda_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} - \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (5.220)$$

dada pela equação (4.94) do capítulo IV.

Adotaremos ainda a representação

$$\begin{aligned} (-4\pi i) L_4^{\mu\nu} = & \left\{ \frac{3}{2} q^\mu q^\nu \sigma_{02}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ & + \frac{3}{2} p^\mu p^\nu \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & + \frac{3}{2} [q^\mu p^\nu + p^\mu q^\nu] \sigma_{11}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{-m^2} g^{\mu\nu} \left[ -\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ & \quad \left. + \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\ & \quad \left. + \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \left. \right\} \\ & + \frac{3}{2} (k_1^\mu q^\nu + k_1^\nu q^\mu) \left[ \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \\ & + \frac{3}{2} (k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu) \left[ \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \\ & + \frac{3}{2} k_1^\mu k_1^\nu \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2). \end{aligned} \quad (5.222)$$

Com isso completamos o cálculo de todas as integrais de Feynman necessárias para as amplitudes da  $EDQ_3$  ao nível um “loop”. Podemos então escrever as formas calculadas para tais amplitudes, que é o que faremos no próximo capítulo.

# CAPÍTULO 6

## Amplitudes, Ambiguidades, Relações entre Funções de Green e Relações de Simetria.

### 6.1 Introdução

Os processos físicos básicos pertinentes à  $EDQ_3$ , ao nível um “loop”, foram considerados nos capítulos *II* e *III* onde percebemos que as regras de Feynman nos fornecem estruturas matemáticas divergentes. A presença das divergências nos exigiu a adoção de algum tipo de filosofia capaz de manipular e calcular consistentemente as estruturas matemáticas indefinidas surgidas, o que foi então considerado no capítulo *V*. Na ocasião utilizamos uma estratégia geral, alternativa aos métodos usuais de regularização. No contexto desta estratégia, faz-se uso de identidades ao nível do integrando de modo a separar as partes finitas das divergentes tal que toda a dependência nos momentos físicos esteja presente em integrais finitas. Integrais divergentes não são, de fato, calculadas. Observamos, entretanto, que algumas das estruturas tratadas, após as manipulações, apresentam dependência com combinações ambíguas dos momentos internos. Agora teremos que utilizar tais estruturas para construir as amplitudes. Obviamente isso requer uma caracterização das partes finitas e divergentes tal que as amplitudes e, deste modo, as predições sejam unívocas, o que requer que estas sejam livres de ambiguidades. Termos ambíguos, por outro lado, podem também violar relações de simetria o que seria definitivamente desastroso para nossos propósitos. Em outras, palavras estamos querendo dizer que, se as amplitudes depois de manipuladas e calculadas, com a utilização de alguma prescrição de regularização qualquer, não carregarem mais o conteúdo de simetria da teoria e ou contiverem ambiguidades, elas não podem descrever fenomenologicamente um processo físico da natureza, pois neste caso não estaríamos descrevendo processos físicos a partir de uma teoria mas, promovendo ajustes caso-a-caso efetuando escolhas para as ambiguidades. Assim, investigar a possibilidade da presença de ambiguidades e o papel destas

nas relações de simetria passa a ser de fundamental importância neste momento. A fim de facilitar a evolução das discussões, nossos resultados foram sistematizados tanto para as partes divergentes quanto para as partes finitas.

As partes divergentes contidas nas integrais geradas pelas regras de Feynman foram escritas em termos de um conjunto de objetos básicos:  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2)$  e  $I_{lin}(m^2)$ . Estes objetos não são calculados explicitamente em nenhum passo o que nos permite manter todas as arbitrariedades intrínsecas dos cálculos em nossos resultados finais. Para a parte finita das integrais, estabelecemos uma organização em termos das funções  $Z_0^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\eta_{00}^{-\frac{1}{2}}$  e  $\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}$ . Com isso, conseguimos escrever todos os resultados como uma combinação de um pequeno número de estruturas matemáticas, para os quais serão atribuídos os mesmos valores em qualquer amplitude de qualquer teoria onde eles aparecerem. Deste modo ainda persistem indefinições matemáticas pois nos resultados aparecem os objetos  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2)$  e  $I_{lin}(m^2)$ . Nossa estratégia foi evitar assumir uma forma de regularização para calcular tais objetos mas tentar descobrir as propriedades destes necessárias à consistência global dos cálculos perturbativos tridimensionais. Devemos agora expressar nossas amplitudes em termos da sistematização adotada e em seguida utilizar os guias para a consistência que estabelecemos no capítulo *III*, um conjunto de relações entre as funções de Green e relações de simetria, para estabelecer as eventuais propriedades aos objetos divergentes remanescentes que aparecerão nas amplitudes.

Vamos então considerar, a partir de agora, a forma explícita para as amplitudes em termos dos objetos básicos (dentre os quais estão os potencialmente ambíguos) e verificar se as relações entre as funções de Green são satisfeitas. Posteriormente identificamos os papéis desempenhados pelas arbitrariedades envolvidas nos cálculos perturbativos para a manutenção das relações de simetria.

## 6.2 A Função de Um Ponto Vetorial

Por simplicidade começaremos considerando o cálculo da função de Green contendo somente um propagador fermiônico dada, pela equação (3.27) do capítulo *III*, como

$$T_{\nu}^V(k_1; m) = 2[(I_1)_{\nu} + k_{1\nu}(I_1)], \quad (6.1)$$

onde  $(I_1)_{\nu}$  e  $I_1$  são dadas respectivamente pelas expressões (5.102) e (5.105) do capítulo *V*. A estrutura acima nos revela a presença de duas integrais com graus de divergência quadrática e linear. Substituindo os resultados obtidos para  $(I_1)_{\nu}$  e  $I_1$ , equações (5.104) e (5.107) do capítulo *V*, na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} T_{\nu}^V &= -2k_{1\alpha}\nabla_{\nu\alpha}^{(3)} - 2k_{1\nu}I_{lin}(m^2) + 2k_{1\nu}I_{lin}(m^2) \\ &= -2k_{1\alpha}\nabla_{\nu\alpha}^{(3)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Podemos perceber que a equação acima pode ser escrita apenas em termos do objeto divergente básico definido em (5.97) do capítulo *V*.

### 6.3 A Auto-Energia do Elétron por Excitação de um Fóton

Quando consideramos o processo físico da auto-energia do elétron, encontramos o diagrama contendo uma linha fermiônica e uma bosônica e que tem associado a função de Green que é escrita como

$$\Sigma(k_1, k_2, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Sigma_2(k_1, k_2, m). \quad (6.3)$$

No capítulo III conseguimos escrever as expressões acima em termos das integrais de Feynman. Substituindo os resultados das equações (5.146) e (5.151) do capítulo V, na equação (3.37) do capítulo III, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k_1, k_2, m) &= \frac{1}{4} i (4\pi)^{-1} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ Z_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right\} \\ &+ \frac{3}{2} i (4\pi)^{-1} m \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left\{ Z_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_2(k_1, k_2, m) &= -i(4\pi)^{-1} [q^2 - m^2] (\not{k}_2 - \not{k}_1) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_1^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\} \\ &- i(4\pi)^{-1} [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nas expressões acima o momento externo é dado por  $q = k_2 - k_1$ . Para completar o cálculo é necessário apenas tomar o limite infravermelho. Com isso podemos representar os resultados acima na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k_1, k_2, m) &= +\frac{1}{4} i (4\pi)^{-1} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2) \right] \\ &+ \frac{3}{2} i (4\pi)^{-1} m \left[ Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2) \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_2(k_1, k_2, m) &= -i(4\pi)^{-1} [q^2 - m^2] (\not{k}_2 - \not{k}_1) \left[ \frac{Y_1^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \\ &- i(4\pi)^{-1} [m - (\not{k}_2 - \not{k}_1)] \left[ \frac{Y_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.4 A função de Dois Pontos bi-Vetorial

No cálculo do tensor de polarização do vácuo, estabelecemos a função de Green de dois pontos duplamente vetorial, à qual tem sua expressão dada por

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}(T^{PP}) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha} (T^{AP})^\alpha, \quad (6.8)$$

a qual corresponde a expressão (3.41) do capítulo *III*. Para continuar nossa discussão vamos considerar cada um dos termos da expressão acima separadamente para futuramente obtermos a expressão final. Começando com  $T_{\mu\nu}$  dada em termos das integrais de Feynman por

$$T_{\mu\nu} = 4(I_2)_{\mu\nu} + 2(k_1 + k_2)_\mu (I_2)_\nu + 2(k_1 + k_2)_\nu (I_2)_\mu + 2[k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{1\nu}k_{2\mu}] (I_2). \quad (6.9)$$

Com o auxílio dos resultados dados nas expressões (5.109), (5.114) e (5.119) do capítulo *V* temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) + 2g_{\mu\nu}I_{lin}(m^2) \\ &+ i(4\pi)^{-1} 2[q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu}q^2] \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) - \frac{1}{4}Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) \right] \\ &- i(4\pi)^{-1} \frac{1}{2}[q_\mu q_\nu] Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m). \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde  $q = k_1 - k_2$ . Podemos colocar a expressão acima numa forma mais conveniente utilizando a relação entre a função  $Z_2^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)$  e  $Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)$  dada pela equação (4.18) do capítulo *IV*. Assim teremos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) + 2g_{\mu\nu}I_{lin}(m^2) \\ &- i(4\pi)^{-1} (q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu}q^2) \left[ \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{q^2} + \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)}{q^2} \right] \\ &- \frac{1}{4}i(4\pi)^{-1} [q_\nu q_\mu] Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) - \frac{1}{4}i(4\pi)^{-1} g_{\mu\nu}q^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para o termo  $T^{PP}$  dado a partir da equação (3.50) do capítulo *III* como

$$T^{PP} = -I_1(k_1; m) - I_1(k_2; m) - [q^2] I_2, \quad (6.12)$$

podemos escrever, utilizando (5.104) e (5.109) do capítulo *V*, a expressão

$$\begin{aligned} T^{PP} &= -2I_{lin}(m^2) \\ &+ \frac{1}{2}i(4\pi)^{-1} (q^2) Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m), \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde  $I_{lin}(m^2)$  foi definida na equação (5.98) do capítulo *V*. Para o termo  $T_\alpha^{AP}$ , apenas o resultado (5.109) do capítulo *V* é necessário. Teremos portanto

$$T_\mu^{AP} = -miq_\mu \left\{ i(4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) \right\}, \quad (6.14)$$

Reunindo as expressões encontradas para a  $T_{\mu\nu}$ ,  $T^{PP}$  e  $T_\mu^{AP}$  escrevemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= 2\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) + im\varepsilon^{\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha \left[ i(4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) \right] \\ &+ i(4\pi)^{-1} [q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu}q^2] \left[ (-) \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{q^2} - \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)}{q^2} \right] \\ &- \frac{1}{4}i(4\pi)^{-1} [q_\nu q_\mu] Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) + \frac{1}{4}i(4\pi)^{-1} g_{\mu\nu}q^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m). \end{aligned} \quad (6.15)$$

É importante observar na expressão acima a presença de um termo violador da invariância de “gauge”. Voltaremos a este ponto em um momento futuro.

## 6.5 Correção de Vértice

Consideremos agora a função de Green associada a correção de vértice, encontrada no estudo da interação elétron-fóton, a qual decompomos na forma

$$\Lambda^\mu(k_1, k_2, m) = \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, m) + (\xi - 1) \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, m). \quad (6.16)$$

No capítulo III, escrevemos  $\Lambda_1^\mu$  e  $\Lambda_2^\mu$  em termos de integrais de Feynman, expressões (3.81) e (3.87). Utilizando os resultados obtidos para as integrais presentes nas expressões destes termos, expressões (5.28), (5.33), (5.39), (5.49), (5.62), (5.76), (5.82), (5.87), (5.93) e (5.99) do capítulo V, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{P_1 E_{23}} \\ & + \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \{ [2m(k_3 + k_2)^\mu - 2\not{k}_3 \gamma^\mu \not{k}_2 + 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3] \\ & + m [\gamma^\mu \not{k}_2 + \not{k}_3 \gamma^\mu - m\gamma^\mu] \} \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\} \\ & - \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} [-2\not{k}_3 \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + 2\not{k}_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 + 6mg^{\alpha\mu}] \times \\ & \times \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ p^\alpha \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\ & \quad + q^\alpha \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad \left. \left. + k_1^\alpha \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\ & - \frac{1}{2} i(4\pi)^{-1} \gamma^\alpha \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ g^{\mu\alpha} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\ & \quad + p^\mu q^\alpha \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad + q^\mu p^\alpha \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad + (k_1^\alpha q^\mu + k_1^\mu q^\alpha) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad + (k_1^\alpha p^\mu + k_1^\mu p^\alpha) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad + p^\mu p^\alpha \xi_{20}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad + q^\mu q^\alpha \xi_{02}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \\ & \quad \left. \left. + k_1^\mu k_1^\alpha \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \quad (6.17) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu i(4\pi)^{-1} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\
 & + i(4\pi)^{-1} [(p^2 - m^2) \gamma^\mu] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\} \\
 & + i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\} \\
 & - i(4\pi)^{-1} [q' - m] q' \gamma^\mu \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\} \\
 & - i(4\pi)^{-1} \gamma^\mu q' [q' - m] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left[ \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \right\} \\
 & - \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma^\mu (q' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right\} \\
 & + \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu k'_1 (q' - m) \\
 & + (p^2 - m^2) (q' - m) k'_1 \gamma^\mu \\
 & + 2k_1^\mu (q' - m) k'_1 (q' - m) \\
 & + (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m_3^2, p^2) \right] \right\} \\
 & - i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (q' - m) \\
 & + 2k_1^\mu (q' - m) \gamma^\alpha (q' - m) \\
 & + 2(q' - m) k'_1 (q' - m) g^{\mu\alpha} \\
 & + (p^2 - m^2) (q' - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu] \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ p^\alpha \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + q^\alpha \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + k_1^\alpha \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\
 & + 2i(4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (q' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ q^\mu q^\alpha \xi_{02}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + p^\mu p^\alpha \xi_{20}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + [q^\mu p^\alpha + p^\mu q^\alpha] \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + g^{\mu\alpha} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2i (4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (\not{p}' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ (k_1^\alpha q^\mu) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\
 & -2i (4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (\not{p}' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ (k_1^\mu q^\alpha) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\
 & -2i (4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (\not{p}' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ (k_1^\alpha p^\mu) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\
 & -2i (4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (\not{p}' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ (k_1^\mu p^\alpha) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \\
 & + 2k_1^\mu k_1^\alpha i (4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (\not{p}' - m) \left\{ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mu^2} \left[ \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} (\mu^2, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\} \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

onde adotamos  $q = k_2 - k_1$  e  $p = k_3 - k_1$ . Para completar os estudos e finalizar os cálculos ainda necessitamos efetuar a tomada do limite infravermelho. Para que tal seja possível, é necessário um estudo detalhado das estruturas que aparecem nas expressões acima no limite indicado. Para as funções  $Z_k^{-\frac{1}{2}}$  e  $Y_k^{-\frac{1}{2}}$  este estudo pode ser feito diretamente já que a integração no parâmetro de Feynman pode ser completada (ver capítulo *IV*). Quanto às funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$ ,  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$  e  $\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}$  este estudo é mais complicado devido ao fato de as integrações nos parâmetros de Feynman não poderem ser completadas. Podemos dizer que, este limite, entretanto, é bem comportado no conjunto dos termos ainda que não o seja termo a termo. Na expressão para  $\Lambda_1^\mu$  todas as funções com  $n$  ou  $m$  ou ambos nulos têm problemas neste limite mas a simetria do resultado em  $p$  e  $q$ , que é visível por inspeção, cria a conspiração necessária para os cancelamentos. Já para o termo  $\Lambda_2^\mu$  a situação é consideravelmente mais complicada e o bom comportamento no limite infravermelho envolve conspirações vindas de funções  $Y_0^{-\frac{1}{2}}$  e  $\sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}$  além de outros envolvendo as funções  $\sigma_{nm}^{-\frac{5}{2}}$  e a simetria de  $p$  e  $q$ . Nós não apresentaremos estes desenvolvimentos explícitos devido à densidade de cálculos que seriam necessários e porque este aspecto apesar de interessante e importante não está nos principais objetivos do presente trabalho. Um estudo detalhado deste aspecto será apresentado em outra oportunidade. Após estes importantes comentários adotaremos

como resultados para  $\Lambda_1^\mu$  e  $\Lambda_2^\mu$  as representações

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{P_1 E_{23}} \\
 & + \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} \{ [2m(k_3 + k_2)^\mu - 2\not{k}_3 \gamma^\mu \not{k}_2 + 2\not{k}_2 \gamma^\mu \not{k}_3] \\
 & \quad + m [\gamma^\mu \not{k}_2 + \not{k}_3 \gamma^\mu - m\gamma^\mu] \} \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & - \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} [-2\not{k}_3 \gamma^\mu \gamma^\alpha - 2\gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_2 + 2\not{k}_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu \not{k}_3 + 6m g^{\alpha\mu}] \times \\
 & \times \left[ p^\alpha \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad + q^\alpha \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad \left. + k_1^\alpha \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \} \\
 & - \frac{1}{2} i(4\pi)^{-1} \gamma^\alpha \left[ g^{\mu\alpha} \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \cdot \right. \\
 & \quad + (p^\mu q^\alpha + q^\mu p^\alpha) \xi_{11}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad + (k_1^\alpha q^\mu + k_1^\mu q^\alpha) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad + (k_1^\alpha p^\mu + k_1^\mu p^\alpha) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad + p^\mu p^\alpha \xi_{20}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad + q^\mu q^\alpha \xi_{02}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & \quad \left. + k_1^\mu k_1^\alpha \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \}, \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, p^2, m^2, q^2; m^2) = & Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, (p-q)^2; m^2) \\
 & - \frac{(q^2 - m^2)}{2} \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \\
 & - \frac{(p^2 - m^2)}{2} \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = & \gamma^\mu i(4\pi)^{-1} \left[ \lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{(-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\
 & + i(4\pi)^{-1} [(p^2 - m^2) \gamma^\mu] \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \\
 & + i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu] \left[ \frac{Y_0^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} \right] \\
 & - i(4\pi)^{-1} [q' - m] q' \gamma^\mu \left[ \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, p^2; m^2)}{2m^2} \right] \\
 & - i(4\pi)^{-1} \gamma^\mu p' [p' - m] \left[ \frac{Y_1^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2; m^2)}{2m^2} \right] \\
 & - \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma^\mu (p' - m) \xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \\
 & + \frac{3}{8} i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu k'_1 (p' - m) \\
 & + (p^2 - m^2) (q' - m) k'_1 \gamma^\mu \\
 & + 2k_1^\mu (q' - m) k'_1 (p' - m) \\
 & + (p^2 - m^2) (q^2 - m^2) \gamma^\mu] \left[ \frac{3}{2} \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, p^2, m^2, q^2) \right] \\
 & - i(4\pi)^{-1} [(q^2 - m^2) \gamma^\mu \gamma_\alpha (p' - m) \\
 & + 2k_1^\mu (q' - m) \gamma^\alpha (p' - m) \\
 & + 2(q' - m) k'_1 (p' - m) g^{\mu\alpha} \\
 & + (p^2 - m^2) (q' - m) \gamma^\alpha \gamma^\mu] \frac{3}{2} \left[ p^\alpha \sigma_{10}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. + q^\alpha \sigma_{01}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. + k_1^\alpha \sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \\
 & + 3i(4\pi)^{-1} (q' - m) \gamma_\alpha (p' - m) \left\{ q^\mu q^\alpha \sigma_{02}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. + p^\mu p^\alpha \sigma_{20}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. + [q^\mu p^\alpha + p^\mu q^\alpha] \sigma_{11}^{-\frac{5}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{3} \sqrt{-m^2} g^{\mu\nu} \left[ -\xi_{00}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \xi_{10}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \xi_{01}^{-\frac{3}{2}}(0, m^2, q^2, m^2, p^2) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3i(4\pi)^{-1}(q-m)\gamma_\alpha(\not{p}-m)\left[(k_1^\alpha q^\mu+k_1^\mu q^\alpha)\sigma_{01}^{-\frac{5}{2}}(0,m^2,q^2,m^2,p^2)\right] \\
 & +3i(4\pi)^{-1}(q-m)\gamma_\alpha(\not{p}-m)\left[(k_1^\alpha p^\mu+k_1^\mu p^\alpha)\sigma_{10}^{-\frac{5}{2}}(0,m^2,q^2,m^2,p^2)\right] \\
 & +3k_1^\mu k_1^\alpha i(4\pi)^{-1}(q-m)\gamma_\alpha(\not{p}-m)\left[\sigma_{00}^{-\frac{5}{2}}(0,m^2,q^2,m^2,p^2)\right]
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

## 6.6 A Função de Três Pontos tri-vetorial

Consideremos agora a função de três pontos triplamente vetorial com três propagadores fermiônicos que, convenientemente, escrevemos usando a decomposição

$$T_{\mu\nu\phi}^{VVV} = T_{\mu\nu\phi} + g_{\phi\nu}T_\mu^{PPV} + g_{\phi\mu}T_\nu^{PVP} + g_{\mu\nu}T_\phi^{VPP} + A_{\mu\nu\phi} \tag{6.22}$$

Seguindo a filosofia já estabelecida nas seções anteriores, escrevemos cada um dos termos que aparecem na expressão acima em termos de integrais de Feynman. A fim de completar o cálculo necessitamos substituir, nas equações (3.62)-(3.64) (capítulo III), os resultados (112), (117), (124) e (127) do capítulo V, teremos então a expressão desejada.

Para o termo correspondente a  $T_{\lambda\mu\nu}$ , adotamos uma sistematização em termos das estruturas  $M_{\lambda\mu\nu}$ ,  $J_{\lambda\mu\nu}$ ,  $L_{\lambda\mu\nu}$ ,  $K_{\lambda\mu\nu}$  e  $F_{\lambda\mu\nu}$ , equação (3.67) do capítulo III, e estas escrevemos em termos de integrais de Feynman, equações (69)-(73), respectivamente. Com as integrais calculadas, podemos substituir os resultados (124), (127), (129) e (133) do capítulo V, em cada um dos subtermos.

## 6.7 Relações entre Funções de Green

No capítulo III estabelecemos vínculos de consistência entre as funções de Green com o propósito de servirem como guias para testarmos a validade dos nossos métodos envolvendo cálculos perturbativos. Temos a disposição agora as formas calculadas das funções de Green em termos das quais escrevemos as amplitudes perturbativas da  $EDQ_3$ , o que nos permite agora, verificar se os cálculos e manipulações efetuadas preservam os vínculos estabelecidos no capítulo III. A característica mais importante que pode ser ressaltada é de que, até o presente estágio dos cálculos, não efetuamos nenhuma escolha para as arbitrariedades intrínsecas envolvidas. Nós esperamos que as relações que estabelecemos no capítulo III tenham sido preservadas nas operações efetuadas, o que será verificado a seguir.

Começaremos por considerar a equação (3.89) do capítulo III envolvendo as funções de um e dois pontos puramente vetorial, ou seja, a  $T_\mu^V$  e  $T_{\mu\nu}^{VV}$ . Tomando a forma explícita,

equação (6.15) e contrariando com o momento externo dado por  $k_1 - k_2 = q$ , escrevemos

$$\begin{aligned}
 (k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= 2(k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) \\
 &\quad + im\varepsilon_{\mu\nu\alpha} (k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\alpha \left[ i(4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) \right] \\
 &\quad + i(4\pi)^{-1} (k_1 - k_2)^\mu [q_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} q^2] \left[ (-) \frac{(-m^2)^{\frac{1}{2}}}{q^2} - \frac{m^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)}{q^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} (k_1 - k_2)^\mu [q_\nu q_\mu] Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) + \frac{1}{4} i(4\pi)^{-1} g_{\mu\nu} q^2 Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m)
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

e então

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = 2(k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2). \tag{6.24}$$

Como já foi estabelecido pelas relações entre funções de Green, equação (3.89) do capítulo *III*, devemos identificar no resultado acima a diferença entre duas funções de Green de um ponto vetoriais, com linhas internas carregando momentos  $k_1$  e  $k_2$ . Temos também a nossa disposição o cálculo explícito de  $T_\nu^V$  dado pela equação (6.2), o que facilita a identificação de que

$$2(k_1 - k_2)^\mu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) = T_\mu^V(k_2, m^2) - T_\mu^V(k_1, m^2). \tag{6.25}$$

Por sua vez, também é fácil verificar que

$$2(k_1 - k_2)^\nu \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) = T_\nu^V(k_2, m^2) - T_\nu^V(k_1, m^2). \tag{6.26}$$

O que nos mostra que as relações (3.89) e (3.90) estabelecidas no capítulo *III* foram preservadas pelas manipulações feitas. É importante notar que as relações são preservadas sem que tenhamos assumido qualquer escolha para as quantidades indefinidas, ou seja, todas as arbitrariedades ainda estão presentes de modo que estas relações podem ser preservadas por qualquer método de regularização razoável. Para que possamos fazer as devidas escolhas para estas arbitrariedades de um modo consistente, consideraremos futuramente os vínculos estabelecidos pelas relações de simetria.

Seguindo o raciocínio análogo ao estabelecido na última seção, vamos considerar agora as relações necessárias para considerar o processo de interação entre três fótons. Para tanto, vamos considerar as relações entre as funções de três pontos tri-vetorial com as de dois pontos bi-vetoriais estabelecidas nas eqs.(3.92)-(3.94) do capítulo *IV*. Tomando a forma explícita e contraindo com o momento externo  $(k_3 - k_2)^\lambda$  temos,

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = (k_3 - k_2)^\lambda [T_{\mu\nu\phi} + g_{\phi\nu} T_\mu^{PPV} + g_{\phi\mu} T_\nu^{PVP} + g_{\mu\nu} T_\phi^{VPP} + A_{\mu\nu\phi}] \tag{6.27}$$

Nas contrações indicadas acima aparecerão combinações específicas envolvendo as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$  e  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$ . De acordo com o resultado (3.92) do capítulo *III*, o resultado da contração deve ser uma diferença entre duas funções de dois pontos. Para que a citada

identidade seja preservada é necessário portanto que todas as estruturas de três pontos se cancelem. Esta verificação, longa e tediosa, pode ser sensivelmente facilitada se nós utilizarmos os resultados obtidos no capítulo *IV* quando estudamos as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$  e  $\eta_{nm}^{-\frac{1}{2}}$ . Particularmente quando consideramos as reduções destas funções a outras de soma  $n+m$  menores. Se utilizarmos tais expressões veremos que existem combinações destas que se reduzem a formas simples e que serão precisamente aquelas que necessitaremos para a verificação das relações entre funções de Green pertinentes à função de Green triplamente vetorial. As combinações às quais nos referimos são as seguintes:

$$p^2 \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + Z_0^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) + p^2 \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.28)$$

$$q^2 \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + Z_0^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) + q^2 \xi_{00}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.29)$$

$$p^2 \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} + p^2 \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.30)$$

$$q^2 \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + \eta_{00}^{-\frac{1}{2}} + q^2 \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.31)$$

$$p^2 \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_1^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + Z_1^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) + p^2 \xi_{10}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.32)$$

$$q^2 \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_1^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + Z_1^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) + q^2 \xi_{01}^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (6.33)$$

$$q^2 \xi_{12}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{03}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + q^2 \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.34)$$

$$p^2 \xi_{21}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{30}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + p^2 \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.35)$$

$$p^2 \xi_{03}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{12}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + 2\eta_{01}^{-\frac{1}{2}} + p^2 \xi_{02}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.36)$$

$$q^2 \xi_{30}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{21}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ -Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) + 2\eta_{10}^{-\frac{1}{2}} + q^2 \xi_{20}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.37)$$

$$p^2 \xi_{12}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{21}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) - \frac{Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2)}{2} + \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} + p^2 \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (6.38)$$

$$q^2 \xi_{21}^{-\frac{3}{2}} + (p \cdot q) \xi_{12}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2) - \frac{Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p-q)^2; m^2)}{2} + \eta_{01}^{-\frac{1}{2}} + q^2 \xi_{11}^{-\frac{3}{2}} \right]. \quad (6.39)$$

e

$$p^2 \eta_{01}^{-\frac{1}{2}} + (p \cdot q) \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} = (p - q)^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p - q)^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p - q)^2; m^2) \right] - q^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) \right] + \frac{1}{2} p^2 \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.40)$$

$$q^2 \eta_{10}^{-\frac{1}{2}} + (p \cdot q) \eta_{01}^{-\frac{1}{2}} = (p - q)^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0^{-\frac{1}{2}} ((p - q)^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} ((p - q)^2; m^2) \right] - q^2 \left[ \frac{1}{4} Z_0^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) - Z_2^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) \right] + \frac{1}{2} q^2 \eta_{00}^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.41)$$

Utilizando estas relações podemos colocar a expressão (6.27) na forma

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} &= -8i (4\pi)^{-2} (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) - \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} (p^2; m^2) \right] \\ &\quad - im \varepsilon_{\mu\nu\alpha} p^\alpha \left[ i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}} (q^2; m) \right] \\ &\quad + 8i (4\pi)^{-2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[ Z_2^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) - \frac{1}{2} Z_0^{-\frac{1}{2}} (q^2; m^2) \right] \\ &\quad + im \varepsilon_{\mu\nu\alpha} q^\alpha \left[ i (4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}} (q^2; m) \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Podemos perceber então que, observando a expressão (57), isto significa que podemos completar adequadamente os termos, com a adição e subtração de termos contendo o objeto divergente  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2)$  do seguinte modo

$$(k_3 - k_2)^\lambda \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2) = (k_3 - k_1 + k_1 - k_2)^\lambda \nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m^2),$$

para identificar então a relação

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, k_2; m). \quad (6.43)$$

Resultados análogos podem ser obtidos para as contrações com os demais momentos externos seguindo-se absolutamente os mesmos passos e ingredientes utilizados acima. Como tal, encontraremos que

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_2; m) - T_{\lambda\mu}^{VV}(k_3, k_1; m) \quad (6.44)$$

e

$$(k_3 - k_1)^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\lambda\nu}^{VV}(k_1, k_2; m) - T_{\lambda\nu}^{VV}(k_3, k_2; m). \quad (6.45)$$

Com isto, verificamos que a forma explícita de  $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$  fornecida pela estratégia que adotamos, preserva todas as relações entre funções de Green pertinentes a despeito da presença de quantidades indefinidas e potencialmente ambíguas na função de dois pontos bi-vetorial.

A fim de tratarmos o processo físico de correção de vértice e de auto energia do elétron por excitação de um fóton, estabelecemos na seção (3.2) do capítulo III, uma relação

entre as funções de Green associadas aos processos, eq.(3.97). Cabe agora, verificar se esta relação foi preservada pelas expressões obtidas por nós para as funções de Green envolvidas.

Considerando inicialmente o termo independente do parâmetro de “gauge”. Devemos avaliar a contração com o momento externo, ou seja,  $(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu$  para a seguir identificar os termos correspondentes à diferença entre, as parte independentes do parâmetro de “gauge”, de duas auto-energias do elétron por excitação de um fóton, conforme dita a relação (3.97) construída no capítulo III. Para que isto aconteça é necessário que as funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$  presentes na expressão contraída desapareçam por completo. Este cálculo longo pode ser enormemente facilitado se relações específicas entre tais funções, análogas aquelas apresentadas na seção anterior porém envolvendo duas massas diferentes. O resultado destas operações revela

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu = & +i(4\pi)^{-2} \left\{ -2\not{p}Z_1^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, p^2; m^2) \right. \\ & +2qZ_1^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2) \\ & -2(\not{p} - 2m)Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, p^2; m^2) \\ & \left. -2(q - 2m)Z_0^{-\frac{1}{2}}(0, m^2, q^2; m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

É ainda interessante notar aqui a conveniência de tomar o limite infravermelho apenas após a utilização das propriedades das funções  $\xi_{nm}^{-\frac{3}{2}}$ . Após uma reorganização do resultado acima, é possível identificar

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_1^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma_1(k_1, k_2, m) - \Sigma_1(k_1, k_3, m). \quad (6.47)$$

O cálculo relativo ao termo dependente de “gauge” é feito de modo semelhante, porém algebricamente é de complexidade razoavelmente maior, devido aos limites infravermelhos que devem ser considerados. O cancelamento de tais termos envolve conspirações entre termos provenientes de setores com estrutura de três pontos e setores com estrutura de dois pontos. É possível, após estas considerações, identificar a estrutura desejada

$$(k_3 - k_2)_\mu \Lambda_2^\mu(k_1, k_2, k_3, m) = \Sigma_2(k_1, k_2, m) - \Sigma_2(k_1, k_3, m). \quad (6.48)$$

Assim, a relação entre as funções de Green envolvidas é preservada, como deveria ser esperado já que não existem divergências ultravioletas envolvidas, como é o caso para dimensões maiores.

## 6.8 Relações de Simetria

Ressaltamos, na construção da teoria, que as simetrias desempenham um papel crucial na teoria, pois elas representam o nosso conhecimento inicial e nossas hipóteses a serem testadas. Os capítulos anteriores nos serviram para estabelecermos os processos físicos de

interesse, posteriormente discutimos aspectos importantes envolvidos no cálculo perturbativo. Temos a nossa disposição agora todas as ferramentas que necessitamos a fim de verificarmos as implicações da simetrias para as amplitudes consideradas. Nós começaremos considerando aquelas associadas ao Teorema de Furry. Como já foi dito anteriormente, este teorema é baseado em simetrias bem gerais e estabelece que toda amplitude que possuir um número ímpar de vetores externos e apenas uma espécie de férmions nas linhas internas deve ter um resultado identicamente nulo. Isso possui implicações imediatas sobre duas funções de Green que consideramos: a  $T_\mu^V$  e  $T_{\mu\nu\lambda}^{VVV}$ . Considerando  $T_\mu^V$  temos

$$T_\nu^V = -2k_{1\alpha} \nabla_{\nu\alpha}^{(3)}(m^2) \quad (6.49)$$

sendo  $k_{1\alpha}$  arbitrário, a única possibilidade para satisfazer o teorema de Furry de modo inequívoco, é obter o objeto divergente  $\nabla_{\nu\alpha}^{(3)}(m^2)$  como sendo nulo automaticamente. Portanto devemos ter

$$\nabla_{\nu\alpha}^{(3)} = 0. \quad (6.50)$$

O raciocínio é análogo para a função de três pontos puramente vetorial, a qual escrevemos na forma decomposta como

$$T_{\mu\nu\phi}^{VVV} = T_{\mu\nu\phi} + g_{\phi\nu} T_\mu^{PPV} + g_{\phi\mu} T_\nu^{PVP} + g_{\mu\nu} T_\phi^{VPP} + A_{\mu\nu\phi} \quad (6.51)$$

que, após simetrizada nos estados finais, isto é, a soma do canal direto e cruzado, deve nos fornecer um resultado identicamente nulo. Considerando as expressões obtidas para os termos envolvidos na equação acima, podemos perceber as propriedades frente as trocas nos momentos externos, ou seja,

$$T_\phi^{VPP}(q, p) = -T_\phi^{VPP}(p, q), \quad (6.52)$$

$$T_\mu^{PVP}(q, p) = -T_\mu^{PVP}(p, q), \quad (6.53)$$

$$T_\nu^{PPV}(q, p) = -T_\nu^{PPV}(p, q) \quad (6.54)$$

e

$$T_{\mu\nu\phi}(q, p) = -T_{\nu\mu\phi}(p, q). \quad (6.55)$$

Já para o termo restante,  $A_{\mu\nu\phi}$ , ainda que esta verificação não seja tão imediata pois requer o uso adequado das propriedades dos tensores de Levi-Civita envolvidos além da estrutura tensorial dos momentos, é igualmente possível verificar a troca de sinal dos termos correspondentes aos dois canais, isto é,

$$A_{\mu\nu\phi}(q, p) = -A_{\nu\mu\phi}(p, q). \quad (6.56)$$

Isto quer dizer que, sem as dificuldades associadas à presença de divergências presentes em dimensões maiores, as determinações do teorema de Furry para esta amplitude são preservadas, como seria esperado.

Para continuarmos analisando as relações de simetria, vamos considerar as identidades de Ward que, no contexto da  $EDQ_3$ , são traduzidas pela conservação da corrente vetorial, isso quer dizer que, todas as contrações com momentos externos efetuadas em vértices vetoriais dever resultar um valor identicamente nulo. Tomando a contração do momento externo com a função de dois pontos bi-vetorial, devemos ter

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} (q^2; m) = q^\mu \left[ 2\nabla_{\mu\nu}^{(3)} (m^2) \right] = 0. \quad (6.57)$$

Como vimos na seção anterior, é possível escrever este resultado em termos da função de um ponto vetorial, ou seja, devemos ter

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} (q^2; m) = T_\nu^V (k_2; m) - T_\nu^V (k_1; m) = 0, \quad (6.58)$$

o que novamente exige que a condição  $\nabla_{\nu\alpha}^{(3)Reg} = 0$  seja satisfeita. Uma condição análoga pode ser estabelecida para o outro índice de Lorentz.

Por sua vez, para a função de três pontos triplamente vetorial, a fim de que a identidade de Ward seja satisfeita, devemos ter

$$(k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) + (l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV} (l_1, l_2, l_3; m) = 0, \quad (6.59)$$

que é portanto, equivalente à condição exigida pelo teorema de Furry. Isto pode ser visto mais facilmente pela identificação dos momentos externos dos dois canais

$$(p + q)^\lambda \left[ T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV} (l_1, l_2, l_3; m) \right] = 0. \quad (6.60)$$

É interessante notar que isto está relacionado à função Bi-vetorial pois

$$\begin{aligned} & (k_3 - k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} (k_1, k_2, k_3; m) + (l_3 - l_2)^\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV} (l_1, l_2, l_3; m) \\ = & T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV} (k_1, k_2; m) \\ & + T_{\mu\nu}^{VV} (l_1, l_3; m) - T_{\mu\nu}^{VV} (l_1, l_2; m) \end{aligned} \quad (6.61)$$

e que contrações sucessivas terminam por envolver a função de um ponto vetorial.

### **6.8.1 Condição de consistência e regularizações**

Os últimos capítulos mostraram que a estratégia de cálculo das amplitudes nos processos da  $EDQ_3$  é consistente no que diz respeito as ambiguidades e relações de simetria. Sabemos que esta estratégia não é a única que temos a disposição, sendo que, consideraremos agora as relações obtidas por nossa estratégia com aquelas prescrições dadas pela RD e a Regularização Covariante de PV. Podemos notar que todas as condições referentes aos aspectos de ambiguidades e relações de simetria foram colocadas em termos de um objeto caracterizado pela diferença entre duas integrais com o mesmo grau de divergência. Vamos agora, a partir dos resultados obtidos pela nossa estratégia de cálculo, obter aqueles correspondentes aos fornecidos pelo método de RD. Tudo o que precisamos é especificar

o valor atribuído ao objeto pelo método adotado. Ressaltamos entretanto que estamos nos referindo especificamente às integrações nos momentos já que a completa extensão de teorias com férmions é problemática neste método.

No contexto da RD, consideramos, para o cálculo das integrais nos momentos, a validade da equação

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2q \cdot k - H^2]^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (6.62)$$

Por inspeção percebemos que a integral acima diverge para os valores  $\omega \geq \alpha$  e, nesta situação, consideramos a integral  $I(2\omega, \alpha, q)$  como uma função analítica da variável  $\omega$ , a qual é contínua e complexa. A modificação que deve ser efetuada do lado direito da igualdade é a troca da representação da função Gama de Euler para a representação de Weierstrass, sendo que, as divergências emergirão como pólos para valores específicos da variável  $\omega$ . É interessante notar que, depois que estabelecemos o resultado acima, nós podemos gerar relações entre integrais sem nos preocupar com as divergências. Estamos interessados em relações específicas, e estas podem ser obtidas por diferenciação apropriada de ambos os lados da equação acima em relação ao momento  $q$ , e depois disto, pela tomada de  $q$  tendendo ao valor zero. Seguindo estes passos nós escrevemos

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega}} \quad (6.63)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^\alpha} = \left( \frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha - \omega - 1}} \quad (6.64)$$

a escolha de valores adequados para  $\alpha$ , na expressão acima, e a comparação dos resultados nos permite identificar

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)}.$$

O resultado acima é válido para quaisquer valores de  $\omega$ . Para a dimensão de interesse  $\omega = \frac{3}{2}$ , teremos

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (6.65)$$

o que significa

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)} = 0. \quad (6.66)$$

Consideramos agora a mesma análise sob o ponto de vista da Regularização Covariante de PV. Nesta, para calcular qualquer integral divergente, faz-se inicialmente a substituição

$$I(m) \longrightarrow \sum_{i=0} a_i I(\Lambda_i), \quad (6.67)$$

onde  $a_0 = 1$  e  $\Lambda_0 = m$ . Todos os outros parâmetros  $a_i$ 's e  $\Lambda_i$ 's precisam ser escolhidos de modo a construir uma superposição que conduza a resultados desejáveis, guiados, por

exemplo, pela manutenção das identidades de Ward. Em termos desta receita vamos considerar o valor da diferença relevante.

$$\nabla_{\mu\nu}^{(3)} = \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \right\}. \quad (6.68)$$

Para satisfazer a condição de consistência, é necessário escolher um conjunto de coeficientes  $a_i$ 's tal que  $\sum_{i=0} a_i = 0$ . Esta escolha nos permite ter  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)} = 0$ . A condição derivada acima é a mesma obtida quando consideramos o tratamento de  $EDQ_3$ , guiados pela invariância de gauge no tensor de polarização do vácuo, no cancelamento do diagrama “tadpole” da auto-energia do elétron e assim por diante.

### 6.8.2 Consistência no Cálculo Perturbativo para a $EDQ_3$

Nos cálculos efetuados, com vistas aos problemas da  $EDQ_3$  em nível perturbativo, podemos concluir que dispomos de uma prescrição consistente na determinação das amplitudes correspondentes aos processos físicos. Notemos que a filosofia a ser seguida é muito simples, ou seja, segue-se o tratamento dado as integrais de Feynman e ao final impõe-se a relação de consistência. Outro aspecto importante é o de que esta filosofia e as imposições contidas nela não determinam um método de regularização específico mas uma classe delas. Estas classes, com base na análise realizada, podem ser enquadradas em apenas duas que são relevantes: aquelas que satisfazem as relações de consistência (RC's) e aquelas que fornecem um resultado não-nulo para o objeto divergente, independente do valor atribuído. Assumindo uma regularização pertencente a uma certa classe estamos especificando o valor para a quantidade  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}$  mas não para a quantidade  $I_{lin}$  cuja forma matemática é específica de cada método. Notemos entretanto que a consistência da regularização reside apenas em fornecer um valor nulo para o objeto  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}$  pois, a rigor, o valor para o objeto  $I_{lin}$  não necessita ser especificado para os propósitos da reparametrização. Na estratégia que adotamos em nenhum momento efetuamos o cálculo de alguma integral divergente, apenas encontramos as propriedades que deveríamos impor guiados por relações bem gerais. Dessa maneira podemos considerar que tal método é livre de regularização. Quanto aos métodos de regularização podemos dizer ainda que, se uma regularização não satisfaz a RC (segunda classe) ela não fornecerá resultados consistentes, devendo ser descartada; por outro lado, se ela satisfaz as RC (primeira classe) então não precisamos explicitá-la para nenhum propósito. A fim de completar o tratamento de  $EDQ_3$  a fim de apreciar as consequências deste ponto de vista, permitido pela estratégia que adotamos para o tratamento das divergências, devido ao tratamento perturbativo da  $EDQ_3$ , vamos então listar as amplitudes relevantes associadas às funções de Green que calculamos após a adoção da regularização da primeira classe. Para os nossos propósitos, podemos sem prejuízo, escolher o parâmetro de “gauge” como sendo o “gauge” de Feynman ( $\xi = 1$ ) para efetuar as discussões necessárias. Os aspectos que queremos enfatizar estarão igualmente presentes em cenários menos complexos. Assim das amplitudes calculadas apenas o tensor

de polarização é afetado pela adoção da condição de consistência. Ele fica:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -\frac{4ie^2}{3(4\pi)} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \left[ \frac{1}{3} + \frac{(q^2 + 2m^2)}{q^2} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m^2) \right] \\ & + im\varepsilon^{\mu\nu\alpha} q_\alpha \left[ i(4\pi)^{-1} Z_0^{-\frac{1}{2}}(q^2; m) \right]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

A característica mais importante deste tipo de cálculo é a mudança da estrutura de Lorentz do propagador. A presença deste termo corresponderá à indução de massa para o bóson de “gauge”. Este termo é conhecido como termo de CS e como vimos é inevitavelmente induzido pelas correções radiativas. Em vista disto podemos mudar a Lagrangiana da  $EDQ_3$  pura de modo a incluir de partida tal termo. Escrevemos então

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha. \quad (6.70)$$

onde o último termo da expressão acima corresponde ao termo de CS. A expressão para o propagador do fóton seria então modificada para um propagador massivo mas tendo a estrutura de Lorentz que emerge do cálculo do tensor de polarização e, com isso, a renormalização pode ser levada adiante sem problemas.

# CAPÍTULO 7

## Conclusão

No trabalho que estamos concluindo neste capítulo, realizamos um estudo detalhado de alguns processos físicos pertinentes a  $EDQ_3$ . Nossa preocupação principal residiu no tratamento de quantidades matemáticas indefinidas, ou seja, as divergências típicas das soluções perturbativa.de TQC. Nossa preocupação inicial foi construir as amplitudes para os processos físicos básicos e realizar os cálculos correspondentes. Para manipular e calcular as integrais de Feynman divergentes, utilizamos uma nova estratégia de cálculo, alternativa aos métodos usuais de regularização, proposto recentemente. No contexto deste método assumimos a presença de uma função regularizadora apenas de uma maneira implícita e exigimos desta apenas propriedades bem gerais, necessárias a qualquer regularização razoável. As escolhas para os rótulos dos momentos carregados pelas linhas internas dos diagramas contendo “loops” foram as mais gerais possíveis de modo a manter todas as arbitrariedades, intrínsecas aos cálculos. A filosofia adotada para a fixação das quantidades indefinidas e para a eliminação consistente das ambiguidades é a de que estas devem ser guiadas por imposições vindas das relações de simetria pertinentes às amplitudes (Identidades de Ward) e por relações entre funções de Green. Assim, na investigação efetuada, os objetos divergentes  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}(m)$  e  $I_{lin}(m)$  remanescentes após as manipulações, foram mantidos do modo como surgiram nos cálculos. Através de imposições vindas das relações de simetria e das relações entre as funções de Green, percebemos que apenas o valor nulo para o objeto  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}$  permite a consistência nos cálculos das amplitudes. O referido objeto depende crucialmente da regularização utilizada para especificá-lo. É, até certo ponto surpreendente que a consistência dos cálculos da  $EDQ_3$  possa ser colocada de modo tão simples. Este tipo de abordagem é uma característica importante da filosofia adotada na construção da estratégia de cálculo utilizada para as manipulações e cálculos das integrais de Feynman divergentes. Ao invés de postular uma distribuição regularizadora e testar as consequências desta pela simples exaustão, vamos em busca das condições que devem ser satisfeitas para que uma regularização possa ser consistente. A condição encontrada, pode ser satisfeita pela regularização de PV assim como por integrais de Feynman calculadas em  $2\omega$  dimensões, que constituem-se na base da RD. É portanto

possível entender de modo simples e transparente as razões da consistência de um método de regularização aplicado em  $D = 2 + 1$ . As regularizações podem ser classificadas tal qual em  $D = 3 + 1$  em duas classe básicas. Numa primeira classe podemos colocar aquelas que satisfazem à condição de consistência obtida, isto é,  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)} = 0$ , e numa segunda classe aquelas que fornecem um valor não nulo para o objeto  $\nabla_{\mu\nu}^{(3)}$ . A presença deste objeto nas amplitudes, particularmente no tensor de polarização do vácuo, leva a ambiguidades e a violação das identidades de Ward.

Podemos destacar ainda a sistematização construída para as partes finitas das integrais de Feynman. De modo completamente análogo ao observado em dimensão  $D = 3 + 1$ , notamos que é possível definir um conjunto básico de funções em termos das quais todas as propriedades importantes das amplitudes podem ser estudadas. Esta sistematização desempenha papel importante na condução das discussões a respeito de limites de interesse nas amplitudes físicas permitindo um estudo, entre outros aspectos, da presença de divergências infravermelhas. Este aspecto, por sinal, merece um estudo ainda mais detalhado daquele realizado no presente trabalho. As ferramentas desenvolvidas aqui devem contribuir significativamente para um estudo deste tipo. Deve ser ainda ressaltado que a verificação das relações de simetria e das relações entre funções de Green, nas condições cinemáticas absolutamente gerais em que estas verificações foram feitas, seria uma tarefa provavelmente infactível. A construção desta sistematização portanto é uma das principais contribuições do presente estudo que acreditamos será de grande utilidade em estudos futuros.

Podemos considerar ainda os aspectos relacionados a questões dimensionais. Sabemos que em dimensões ímpares não é possível a definição da matriz análoga à matriz  $\gamma^5$  de Dirac em dimensão  $D = 3 + 1$ . Consequentemente ficamos impedidos de definir amplitudes escalares e axiais. O que observamos entretanto é o aparecimento de tais estruturas matemáticas como partes das amplitudes construídas apenas com operadores escalares e vetoriais. Exemplo claro desta observação é o tensor de polarização do vácuo em cujo cálculo aparece a estrutura matemática idêntica àquela da função de Green de dois pontos  $AP$  associada ao termo de CS induzido pela correção radiativa ao nível um “loop”. Este tipo de organização se repete em todos os cálculos de amplitudes em  $D = 2 + 1$ . Isto nos permite uma conclusão interessante: o conjunto relevante de estruturas matemáticas são as mesmas em qualquer dimensão. Elas aparecem como amplitudes independentes em dimensões pares e aparecem recombinadas em dimensões ímpares. Acreditamos que esta observação, que merece estudos adicionais, pode ser de grande utilidade no entendimento de muitos aspectos dimensionais de TQC, especificamente aqueles que dizem respeito às diferenças e semelhanças entre conseqüências fenomenológicas de teorias formuladas em dimensões pares e ímpares.

Um dos principais aspectos envolvidos no presente estudo e relacionado à discussão acima é o da geração dinâmica de massa para o bóson de “gauge”. Devido ao fato disto ter origem no termo  $AP$  do tensor de polarização, que é finito e portanto não ambíguo,

este resultado é claramente independente de regularização. Nenhuma regularização razoável deve modificar o cálculo de uma integral finita. Assim nossa conclusão a respeito da existência de uma ambiguidade relacionada à regularização na determinação do coeficiente do termo de CS é transparente: é consequência de um tratamento inconsistente das divergências do cálculo perturbativo tridimensional. Isto recomenda a aplicação do procedimento aqui utilizado no contexto de teorias não abelianas formuladas em dimensão  $D = 2 + 1$  onde existe uma controvérsia fervorosa a esse respeito desde o final dos anos noventa do século passado. As implicações desta conclusão são imediatas. Sendo que não é possível evitar o surgimento do termo de CS no cálculo do tensor de polarização não é possível conceber no contexto de soluções perturbativas uma  $EDQ_3$  pura. Dito de outro modo, se a solução perturbativa (regras de Feynman e etc...) for construída sem a presença do termo de CS os cálculos ao nível um “loop” gerarão uma contribuição para a auto-energia do bóson de “gauge” modificando a estrutura do propagador deste o que obrigará a inclusão de um termo na parte puramente bosônica para que a renormalização possa ser levada adiante. Isto é um fato inevitável ao nível das regularizações.

O estudo realizado no presente trabalho pode ser considerado como uma primeira incursão em dimensões ímpares feito com a utilização da estratégia que utilizamos a qual evita o uso de regularizações de modo explícito. As observações e conclusões construídas na investigação apontam para universalidade do método e indicam que o mesmo poderá ser de grande utilidade em estudos envolvendo dimensões ímpares devido à inexistência de procedimentos consistentes e universais na literatura. A aplicação em estudos ligados a fenomenologias específicas encontra-se já em andamento.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] ●S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996);
- P. Ramond; “Field Theory: A modern Primer” Addison-Wesley (1990);
  - C. Itzykson and J.B. Zuber; “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill, New York (1980);
  - R.P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961)
  - F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);
  - P.H. Frampton, “ Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
  - B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);
  - D.Lurié, “Particles and Fields”, Interscience, New York (1968);
  - F.Mandl and G.Shaw, “Quantum Field Theory”, Wiley, New York (1984).
- [2] ●W.E.Lamb and R.C.Rutherford, Phys.Rev. **72**, 241(1947);
- B.E.Lautrup, A.Peterman and E.de Rafael, Phys. Rep. **3C**, 193 (1972);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);
  - P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **72**, 1256 (1946);
  - P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **73**, 412 (1948);
  - S.J.Brodsky, SLAC preprint SLAC-PUB-1699 (1975);
  - T.Kinoshita, “Quantum Electrodynamics”, World Scientific, Singapore (1990);
  - A.Akhiezer and V.B.Berestetskii, “Quantum Electrodynamics”, Interscience, New York (1965);
  - J.M. Jauch and F.Rohrlich, “The Theory of Photons and Electrons”, Springer Verlag Berlin (1976);
  - G.Kallen, “Quantum Electrodynamics”, Springer Verlag, Berlin (1972);

- V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, “Relativistic Quantum Theory”, Pergamon Press, Oxford (1971);
  - J.Schwinger, “Quantum Electrodynamics”, Dover, New York (1958);
  - W.Greiner and J.Reinhardt: “Quantum Electrodynamics”, Springer Verlag, Heidelberg (1994);
  - N.N.Bogoliubov and D.V. Shirkov, “Introduction to the Theory of Quantized Fields”, Wiley-Interscience (1959).
- [3] •R.Utiyama, Phys.Rev. **101**, 1597 (1956);
- E.Abers e B.W.Lee, “Gauge Theories”, Phys. Rep. **9C**, 1 (1973);
  - S.Weinberg, Phys.Rev. **166**, 1568 (1968);
  - S.Coleman, J.Wess e B.Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969);
  - C.G.Callan Jr, S.Coleman, J.Wess e B.Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969);
  - S. Schwinger,Annals Phys.2:407, (1957);
  - A. Salam e J.C. Ward, Nuovo Cim.**20**:419, (1961);
  - A. Salam, J.C. Ward, Nuovo Cim.**20**:1228, (1961).
- [4] •R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 37 (1948);
- C. Yang, R.L. Mills,.Phys.Rev.**96**:191-195,(1954) ,
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **84**, 123 (1951);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949);
  - R.P. Feynman, Phys. Rev. **74**, 939 (1948);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);
  - J.Schwinger, Phys. Rev. **75**, 898 (1949);
  - S.Tomonoga, Phys. Rev. **74**, 224 (1948);
  - F.J.Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949);
  - N.N.Bogolinbov and D.S.Parasiuk, Acta. Math. **97**, 227 (1957);
  - K.Hepp. Comm. Math. Phys. **2**, 301 (1966);
  - W.Zimmermann, “In Lectures on Elementary Particles and Quantum Field theory”, Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Desser et al.) MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1970);
  - J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992).

- [5] •J.C. Ward Phys. Rev. **78**, 1824 (1950);  
•Y. Takahashi, Nuovo Cimento **6**, 370 (1957);  
•J.C. Ward, Proc. Phys. Soc. **64**, 54 (1951);  
•C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, Comm. Math. Phys. **42**, 127 (1975);  
•J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33**, 436 (1971);  
•A.A. Slavnov, Theor. e Math. Phys. **10**, 99 (1972);  
•O.Piguet e S.P. Sorela, “Algebraic Renormalization”, Lecture Notes on Physics **28** Springer-Vetlag (1995).
- [6] •W.Pauli e F.Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [7] •t’Hooft e Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);  
•C. G. Bollini e J.J. Giambiagi, Phys. Lett. **40B**, 566 (1972);  
•G.M. Cicuta e E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. **4**, 329 (1972);  
•J.F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. **4**, 289 (1972);  
•E.R. Speer e M.J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré **A14**, 1 (1971);  
•P.H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987),Capítulo XX;  
•B. de Witt e J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX;  
•M.E. Fisher e D.S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, 224 (1964);  
•K.G. Wilson e M.E. Fisher Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972);  
•K.G. Wilson, Phys. Rev. **07**, 2911 (1973);  
•K.G. Wilson e J. Kogat, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
- [8] • Treiman, S.L., Jackiw, R. e Gross, D.J. “Lectures on Current Algebra e its Applications”, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);  
•S.Pokorski: “ Field Theory”, Cambridge University Press, Cambridge (1987)  
• T.P. Cheng e L.F. Li, “ Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984);  
•K. Huang, “Quarks, Leptons e Fields”, World Scientific (1992);  
•P.H. Frampton, “ Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987).

- [9] •t'Hooft e Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);
- W.A. Bardeen, in Proceedings XVI International Conference on High Energy Physics (National Accelerator Lab., Battavia, IL)(1972);
  - M. Chanowitz, M. Furman e I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B159**, 225 (1979);
  - P. Breitenlohner e D. Maison, Comm. Math. Phys. **52**, 11 (1977);
  - P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
  - P.H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [10] •O.A. Battistel, Tese de Doutorado 1999, Universidade Federal de Minas Gerais.
- [11] •O.A. Battistel e M.C. Nemes, Phys. Rev. **D59** (1999), 055010;
- O.A. Battistel e G. Dallabona, Nucl. Phys. **B610** 317 (2001);
  - O.A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. **G27** L53-L60 (2001);
  - O. A. Battistel e G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, L1-L10 (2002);
  - O.A. Battistel e G. Dallabona, Phys. Rev. **D65** 1250 (2002);
  - O.A. Battistel e O.L. Battistel, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 1979 (2002);
  - O.A. Battistel e G. Krein, Mod. Phys. Lett **A18**: 2255-2264 (2003);
  - O.A. Battistel e G. Dallabona, Eur. Phys. J. **C1**, 001 (2003);
  - G. Dallabona e O.A. Battistel, Phys. Rev. **D70**, 065017 (2004).
- [12] •E. Gambim, Dissertação de Mestrado, 2004, Universidade Federal de Santa Maria.
- [13] •O.A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).
- [14] •F. Wilczek, Fractional statistics and anyon superconductivity (Singapore, World Scientific, 1990);
- R. E. Prangle and S M Girvin, Quantum Hall effect (N.Y., Springer-Verlag, 1987);
  - K.Ishikawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **107**, 167 (1992);
  - V. Ch. Zhukovsky, A. S. Razumvsky and K. V. Zhukovsky, hep-th 0402070v2 (2004).
- [15] •W. P. Su, J. R. Schrieffer e A. J. Heeger, Phys. Rev. Lett. **42** 1698 (1979).
- [16] •S.Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann.Phys.(N.Y) **140**, 372(1982);
- R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981).
- [17] •N. Schoneld, Nucl. Phys. **B185** 157 (1981).

- [18] •Y. H. Chen et al, Int. J. Mod. Phys. **B3**, 1001 (1988); A. L. Fetter, C. B. Hanna e R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B39**, 9679 (1989).
- [19] •K. Nittoh and T. Ebihara, Mod. Phys. Lett **A13**: 2231-2237 (1998).
- [20] •M.Chichian and W. F. Chen, Phys. Rev. **D58**, 125004 (1998).
- [21] •B. J. Hand and J. W. Moffat, Phys. Rev. **D43**, 1896 (1991).
- [22] •C.Nash, “Relativistic Quantum Fields”, Academic Press, New York (1978);  
•P. H. Frampton, “Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;  
• T.P. Cheng e L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984);  
•M. Kaku, “*Quantum Field Theory*”, Oxford University Press (1993);  
•D.Lurié, “Particles e Fields”, Interscience, New York (1968).
- [23] •de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. e Rossetti, C., “Currents in Hadron Physics”. North-Holland, Amsterdam (1973) ;  
•F.Mandl e G.Shaw, “Quantum Field Theory”, Wiley, New York (1984).
- [24] •E.Abers e B.W.Lee, “Gauge Theories”, Phys. Rep. **9C**, 1 (1973);  
•J.C.Taylor, “Gauge Theory of Weak Interactions”, Cambridge University Press, Cambridge (1976);  
•L.D.Fadeev e A.A.Slanov, “Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory”, Benjamin Cummings, Ready, Massachusetts (1980);  
•I.J.R.Aitchison e A. J. G. Hey, “Gauge Theories in Particle Physics”, Hilger, Bristol (1982);  
• T.P. Cheng e L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984).
- [25] •J.J.Sakurai, “Advanced Quantum Mechanics”, Addison\_Wesley, reading, Massachusetts (1967);  
•W.Greiner e J.Reinhardt: “Quantum Electrodynamics”, Springer-Verlay, Heidelberg (1994);  
•F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics e Field Theory”, John Wiley e Sons, (1993).
- [26] •T.P. Cheng e L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984);

- F.Mandl e G.Shaw, “Quantum Field Theory”, Wiley, New York (1984);
  - F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics e Field Theory”, John Wiley e Sons, (1993);
  - H.W. Furry, Phys. Rev. **51**, (1937) 125.
- [27] •H.W. Furry, Phys. Rev. **51**125 (1937).
- [28] •O. A. Battistel e G. Dallabona, “*A systematization for one loop Feynman integrals*”, trabalho em preparação.
- [29] •O. A. Battistel, “*Scale ambiguities in perturbative calculations*”, trabalho em preparação.
- [30] •J. Frenkel, J.C. Taylor, Nucl.Phys. **B124**, 268,(1977);
- J. Frenkel, R. Meuldermans, I. Mohammad, J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B121**, 58, (1977);
  - J. Frenkel, R. Meuldermans, I. Mohammad, J.C. Taylor, Phys. Lett. **B64**, 211, (1976);
  - G. Morchio e F. StrocchiI, Nucl.Phys. **B211**, 471 (1983);
  - G. Morchio e F. StrocchiI, Ann. Phys. **168**, 27 (1986).
- [31] •B. de Witt e J. Smith, “Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986), Capítulo XX.
- [32] •P.H. Frampton, “Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987).
- [33] •T.P. Cheng e L.F. Li, “Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford University Press, New York (1984).
- [34] •G.Leibrant Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 849.
- [35] •F.Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);
- Y. Nambu and J. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345;
  - A. Kocic, Phys. Rev. **D33** (1985) 1785;
  - D. Kohana, Phys. Lett. **B229** (1989) 9;
  - T. Hatsuda and T.Kuniskiro, Phys. Rep. **247** (1994) 221;
  - J. Bijnens, Phys. Rep. **265** (1996) 369;
  - S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992);
  - V.Bernard, A. Blin, B. Hiller, Y.P.Ivanov,A. A. Osipov and U. G. Meissner, Annals of Phys. **249**, 499 (1996);

- [36] •G. Arfken, Mathematics Methods for Physicist.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)