

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

EMPREGO DA PARAMETRIZAÇÃO DE
HEISENBERG E DO MÉTODO DE ADOMIAN NO
DECAIMENTO DA CAMADA LIMITE
CONVECTIVA

TESE DE DOUTORADO

Carla Judite Kipper

Santa Maria, RS, Brasil

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**EMPREGO DA PARAMETRIZAÇÃO DE HEISENBERG E DO
MÉTODO DE ADOMIAN NO DECAIMENTO DA CAMADA
LIMITE CONVECTIVA**

por

Carla Judite Kipper

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Física, Área de Concentração em Física, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutora em Física.**

Orientador: Antonio Gledson de Oliveira Goulart

Santa Maria, RS, Brasil

2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Tese de Doutorado

**EMPREGO DA PARAMETRIZAÇÃO DE HEISENBERG E DO
MÉTODO DE ADOMIAN NO DECAIMENTO DA CAMADA
LIMITE CONVECTIVA**

elaborada por
Carla Judite Kipper

como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutora em Física

COMISSÃO EXAMINADORA:

Antonio Gledson de Oliveira Goulart, Dr. (UNIPAMPA)
(Presidente/Orientador)

Matheus Jatkoske Lazo, Dr. (FURG)

Gervásio Annes Degrazia, Dr. (UFSM)

Ernani de Lima Nascimento , Dr. (UFSM)

Otávio Costa Acevedo, Dr. (UFSM)

Santa Maria, 31 de agosto de 2009.

Aos meus filhos Henrique e Heitor...

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a realização deste trabalho e, em particular:

– Ao professor Antonio Gledson de Oliveira Goulart a orientação, bem como o esforço em colaborar com o trabalho, apesar da distância em alguns momentos. Obrigado!

– Aos professores e colaboradores, Debora Roberti e Gervásio Degrazia, as nossas discussões, livros e espaço físico, que contribuíram para o enriquecimento e desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigada!

– Aos meus colegas do Laboratório de Mecânica Estatística da UFSM, Carlos, Fábio e Eleonir, e colegas da Sala de Estudos da UFSM, Alex, Aline e Jaqueline, sem vocês nada disso teria se tornado realidade. Obrigado por tudo!

– Aos meus colegas do Laboratório de Micrometeorologia da UFSM, Andréa, Cintya, Cris, Virnei, Charles, Lidiane e outros tantos. Pelo acolhimento, amizade e nossos inúmeros bate-papos... Valeu pessoal!

– Aos professores do PPGFis que colaboraram para a minha formação.

– Aos funcionários do PPGFis, Saionara e Carlos, o atendimento sempre prestativo e dedicado.

– À minha família o apoio, nos bons e nos maus momentos, e por terem sempre acreditado em mim. Em especial, aqueles que estavam mais perto e deram o suporte emocional e financeiro para a conclusão deste trabalho, Alexandre, Teresa, vovô João (em memória), Henrique e Heitor.

– E, por fim, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) o apoio financeiro.

*O cientista não estuda a natureza porque ela é útil;
estuda-a porque se delicia com ela,
e se delicia com ela porque ela é bela.*

*Se a natureza não fosse bela,
não valeria a pena conhecê-la e,
se não valesse a pena conhecer a natureza,
não valeria a pena viver.*

Henri Poincaré

RESUMO

Tese de doutorado
Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Maria

EMPREGO DA PARAMETRIZAÇÃO DE HEISENBERG E DO MÉTODO DE ADOMIAN NO DECAIMENTO DA CAMADA LIMITE CONVECTIVA

AUTOR: CARLA JUDITE KIPPER

ORIENTADOR: ANTONIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 31 de agosto de 2009.

No presente trabalho é apresentado um modelo espectral para descrever o decaimento da energia cinética turbulenta na Camada Limite Convectiva (CLC) da superfície terrestre, onde acontecem os processos físicos que geram turbulência de origem mecânica e convectiva no ar. Partindo das equações de conservação de momento, que descrevem a dinâmica de um elemento de fluido em um escoamento, se obtém uma equação para o espectro de energia cinética em um escoamento turbulento homogêneo, mas não isotrópico. O espectro de energia é expresso em termos do vetor número de onda κ e do tempo. Cada termo, nesta equação de balanço de energia, descreve processos físicos distintos que geram a turbulência. Os termos de produção ou perda de energia por efeito térmico e por atrito, são escritos em função do número de Richardson, que é uma grandeza adimensional que expressa uma relação entre a energia potencial e a energia cinética de um fluido. O termo de transferência de energia cinética por efeito inercial entre os turbilhões de diferentes números de onda é parametrizado a partir do modelo de Heisenberg que, baseando-se em argumentos intuitivos, assume que o processo de transferência de energia entre turbilhões com pequeno número de onda para os de número de onda grande, é similar a conversão de energia mecânica em energia térmica, por efeito de uma viscosidade molecular. Os turbilhões com número de onda maior absorvem energia dos turbilhões com número de onda menor. A equação dinâmica para o espectro de energia cinética tridimensional obtida foi resolvida pelo método da decomposição de Adomian para solução analítica de equações diferenciais ordinárias ou parciais, lineares ou não lineares, determinísticas ou estocásticas. Esta técnica consiste em decompor uma dada equação em uma parte linear e outra não-linear, isolando o operador linear, facilmente inversível, de maior ordem. O termo não-linear é escrito como uma soma de uma classe especial de polinômios, denominados Polinômios de Adomian, e a função desconhecida como uma série, cujos termos são calculados de forma recursiva. A aplicação do método de decomposição de Adomian na solução da equação integro-diferencial não linear resultante para o espectro

de energia cinética, permitiu uma solução analítica sem a linearização, comumente usada por simplicidade, em problemas onde se têm processos altamente não lineares. Além disso, devido a rápida convergência da solução expressa em termos dos polinômios de Adomian, o espectro de energia cinética foi obtido sem uma grande esforço computacional. A partir do cálculo do espectro de energia pôde-se determinar a variação da energia cinética turbulenta na CLC e comparar com os resultados de simulação numérica existentes na literatura.

Palavras-chave: CLC; espectro de energia tridimensional; Modelo de Heisenberg; método de Adomian

ABSTRACT

Thesis of Ph.D.
Program of Postgraduate in Physics
Universidade Federal de Santa Maria

EMPLOYMENT OF THE HEISENBERG'S PARAMETERIZATION AND THE METHOD OF ADOMIAN IN THE DECAY CONVECTIVE BOUNDARY LAYER

AUTHOR: CARLA JUDITE KIPPER
ADVISER: ANTONIO GLEDSON DE OLIVEIRA GOULART
Local and date: Santa Maria, August 31nd, 2009.

In this paper we present a spectral model to describe the decay of turbulent kinetic energy in the Convective Boundary Layer (CLC) of the earth's surface, where the physical processes that occur generate turbulence of convective origin and mechanics in the air. Using the equations of conservation of time, which describe the dynamics of an element of fluid in a flow, you get an equation for the spectrum of kinetic energy in a homogeneous turbulent flow, but not isotropic. The spectrum of energy is expressed in terms of number of wave vector $kappa$ and time. Each term in this equation of energy balance, describing different physical processes that generate the turbulence. The terms of production or loss of energy by the effect of heat and friction, are written according to the number of Richardson, which is a dimensionless quantity that expresses a relationship between potential energy and kinetic energy of a fluid. The term transfer of kinetic energy by inertial effect between eddies of different wave numbers is parameterized from the Heisenberg model which, based on intuitive arguments, assume that the transfer of energy between eddies with small number of wave for the large number of wavelength is similar to conversion of mechanical energy into heat energy, the effect of molecular viscosity. The number of eddies with wave absorbing higher energy of eddies of wave number with lower. The dynamic equation for the three-dimensional spectrum of kinetic energy obtained was solved by the Adomian decomposition method for the analytical solution of ordinary differential equations or partial, linear or nonlinear, deterministic or stochastic. This technique is to decompose a given equation into a linear part and one non-linear, isolating the operator linear, easily inverted of higher order. The nonlinear term is written as a sum of a special class of polynomials called Adomian polynomials of, and unknown function as a series whose terms are calculated on recursively. The application of the Adomian decomposition method for the solution of differential equation integrated non linear due to the spectrum of kinetic energy, has an analytical solution without linearization,

commonly used for simplicity, in problems where processes are highly nonlinear. Moreover, due to rapid convergence of the solution in terms of the Adomian polynomials, the spectrum of kinetic energy was obtained without a large computational effort. From the calculation of the energy spectrum could be determined the variation of turbulent kinetic energy in the CLC and compared with results of numerical simulation in the literature.

Keywords: CLC; Three-dimensional spectrum of energy; Model Heisenberg; method of Adomian

LISTA DE FIGURAS

- 5.1 Espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado a partir de: simulação numérica da equação (4.4) onde o valor inicial é dado pelas equações (2.25) (Kristensen et al., 1989) e (2.26) (Degrazia et al., 2000) (linha contínua) e dados de LES (Nieuwstadt e Brost, 1986)(linha pontilhada). 41
- 5.2 Espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado a partir de: simulação numérica da equação (4.4) (linha contínua) com valor inicial dado por (2.25) (Kristensen et al., 1989) e espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000), dados de LES (Nieuwstadt e Brost, 1986)(linha pontilhada) e espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado em Goulart et al. (2003) (linha tracejada). 42
- 5.3 Cálculo numérico do termo de fonte mecânica e convectiva dado pela equação (3.11) (linha contínua) do balanço de energia de (3.1), para uma altura adimensional $\frac{z}{z_i} = 0.05$ próxima a superfície, e do termo de fonte convectiva proposto por Goulart et al. (2003) (linha pontilhada) 43
- 5.4 Termo de transferência de energia por efeito inercial (linha contínua) calculado a partir da equação (3.32), (2.25) (Kristensen et al., 1989) e os espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000). 44

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Camada Limite Planetária	15
2.2	Escoamento Turbulento Homogêneo mas não Isotrópico na CLP	15
2.2.1	Forças fundamentais e a equação de momento	15
2.2.2	Equação do Espectro da Energia Cinética Turbulenta	16
2.3	Modelo de Kristensen para o Espectro de Energia Cinética Turbulenta Esta- cionária na CLP	20
2.3.1	O Tensor de autocorrelação	20
2.4	Método de Adomian para Solução de Equações não Lineares	22
2.4.1	Apresentação do método de decomposição de Adomian	23
3	EQUAÇÃO DINÂMICA PARA O ESPECTRO DE ENERGIA DURANTE O DECAIMENTO DE UM ESCOAMENTO TURBULENTO HOMOGENEO MAS NÃO ISOTRÓPICO	25
3.1	Parametrização dos Termos Mecânico e de Fluxo de Calor	25
3.1.1	Número de Richardson Fluxo	25
3.2	Parametrização do Termo de Transferência de Energia Cinética por Efeito Inercial	29
3.2.1	Modelo de Heisenberg	29
4	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ADOMIAN PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTO	34
4.1	Solução da Equação do Espectro da Energia Cinética Turbulenta pelo Método de Decomposição de Adomian	34
4.1.1	Aplicação do método de decomposição de Adomian	35
5	RESULTADOS	40
5.1	Resultados Numéricos e Análise	40
6	CONCLUSÕES	47
A	Cálculo da função espectro de energia cinética turbulenta	49

1 INTRODUÇÃO

A degradação dos ecossistemas naturais acontecem num nível sem precedentes na história, sendo os cuidados com o planeta Terra uns dos assuntos mais importantes e relevantes nos dias de hoje. O aquecimento global e a preservação do meio ambiente são temas que preocupam os atuais governantes do mundo todo. Dessa forma, a investigação dos mecanismos responsáveis pela dispersão de poluentes na atmosfera, mais precisamente na Camada Limite Planetária (CLP), com o objetivo de avaliar e prever as possíveis consequências do seu impacto ambiental, desperta na comunidade científica a necessidade de uma modelagem numérica e de experimentos observacionais que descrevam estes fenômenos. Ao efetuar a modelagem de um acontecimento, deve-se saber que é praticamente impossível modelar de maneira perfeita os fatos físicos naturais. Todo o processo de modelagem é aproximado, seu mérito consiste em elaborar um modelo onde a solução seja exequível e que represente o fenômeno dentro de desvios aceitáveis para a finalidade proposta. Embora a maior parte das pesquisas atuais concordem que a física básica da turbulência pode ser descrita pelas equações de Navier-Stokes, as limitações computacionais para a resolução destas equações limita diretamente a descrição dos fluxos turbulentos. Outra dificuldade encontrada é a forma complexa com que a CLP se estrutura, com campos de vento médio e de turbulência não-homogêneos e não-estacionários.

Neste trabalho estamos interessados em compreender e quantificar os efeitos de transporte associados à turbulência em um período de tempo envolvendo a transição dia-noite, onde medidas experimentais são difíceis de serem realizadas por se tratar de um período muito curto, em torno de uma hora, com o fluxo de calor se dando no sentido da atmosfera para a terra caracterizando o fenômeno de inversão térmica.

Partindo das equações de Navier-Stokes, que descrevem o fluxo turbulento através da aplicação das leis fundamentais da física de conservação de massa, momento e energia; desenvolve-se uma equação para a densidade espectral da energia cinética turbulenta tridimensional em uma Camada Limite Convectiva (CLC). Considera-se que este fluxo turbulento seja homogêneo mas não isotrópico. Durante o tempo de transição dia-noite o transporte de espécies, tanto escalares quanto vetoriais, próximo à superfície terrestre, pode ser mantido pelo decaimento da turbulência na CLC. Neste modelo espectral, cada termo da equação de balanço de energia descreve processos físicos que geram esta turbulência. Propomos um modelo de fechamento para os termos de fluxo de calor e de atrito, e uma parametrização para

o termo de transferência de energia por efeito inercial. O termo de dissipação de energia pela viscosidade molecular usa o modelo clássico descrito na literatura (Hinze, 1975).

A equação dinâmica para o espectro de energia cinética tridimensional obtida foi resolvida pelo método da decomposição de Adomian para solução analítica de equações diferenciais ordinárias ou parciais, lineares ou não lineares, determinísticas ou estocásticas. Esta técnica consiste em decompor uma dada equação em uma parte linear e outra não-linear, isolando o operador linear, facilmente inversível, de maior ordem. O termo não-linear é escrito como uma soma de uma classe especial de polinômios, denominados Polinômios de Adomian, e a função desconhecida como uma série, cujos termos são calculados de forma recursiva. A aplicação do método de decomposição de Adomian na solução da equação integro-diferencial não linear resultante para o espectro de energia cinética, permitiu uma solução analítica sem a linearização, comumente usada por simplicidade, em problemas onde se têm processos altamente não lineares. Além disso, devido a rápida convergência da solução expressa em termos dos polinômios de Adomian, o espectro de energia cinética foi obtido sem grande esforço computacional. Fisicamente a solução numérica encontrada tende a ser muito mais correta do que se fosse obtida por métodos de aproximação baseados em hipóteses ou simplificações.

Em relação à sua estrutura, a tese está organizada da seguinte forma apresentada abaixo. No capítulo 2, apresenta-se uma fundamentação teórica. Aqui, introduz-se o conceito de Camada Limite Planetária (CLP) (Stull, 1988) e Camada Limite Convectiva (CLC). Também é feita a dedução da equação que descreve a função espectro de energia tridimensional do fluxo turbulento na CLC. Apresentamos o modelo de Kristensen (Kristensen et al., 1989) para o espectro de energia estacionário na Camada Limite Atmosférica e finalmente o desenvolvimento da aplicação do método de Adomian (Adomian, 1988) para equações não-lineares. O capítulo 3 contém a formulação da equação dinâmica para o espectro de energia no decaimento de um escoamento turbulento homogêneo mas não isotrópico, cujos aspectos definidos são importantes na obtenção do modelo espectral, como a parametrização dos termos de convecção térmica, de atrito mecânico e de transferência de energia cinética por efeito inercial. O capítulo 4, apresenta o cálculo da solução da equação de balanço da energia cinética turbulenta pelo método de Adomian. Os resultados encontrados serão apresentados no capítulo 5, onde compara-se os resultados obtidos com os resultados de simulação numérica existentes na literatura. No capítulo 6 faz-se uma relação com o que já se tem na literatura e os avanços na modelagem e obtenção de soluções de equações não-lineares proposto nessa tese.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentamos neste capítulo uma breve relação dos tópicos necessários para o desenvolvimento do nosso modelo. Será feita uma revisão teórica sobre onde e como ocorrem os fluxos turbulentos e as equações utilizadas para descrevê-los.

2.1 Camada Limite Planetária

A camada próxima à superfície terrestre que possui cerca de onze quilômetros de altura é chamada de Troposfera. Esta região se divide em duas partes: Camada Limite Planetária (CLP), cuja altura alcança aproximadamente uns três quilômetros, e o restante que é denominado de Atmosfera Livre. O nosso modelo está associado à CLP porque é a região mais influenciada pelos fenômenos naturais que acontecem na superfície. Estes fenômenos, também chamados de forçantes superficiais, são os fluxos de calor, umidade, momento e poluição; que ocorrem juntamente provocando uma instabilidade no sistema e onde depois de um certo tempo a CLP retorna à sua posição de equilíbrio.

De acordo com os processos físicos envolvidos no escoamento turbulento a CLP se divide em Camada Limite Convectiva (CLC), onde se desenvolve a turbulência mecânica e a convectiva; Camada Residual Noturna e Camada Limite estável Noturna. O transporte que ocorre na CLP no sentido horizontal é denominado de Vento Médio e no sentido vertical é denominado de Turbulência, e sua espessura varia de cerca de cem metros a três quilômetros.

2.2 Escoamento Turbulento Homogêneo mas não Isotrópico na CLP

2.2.1 Forças fundamentais e a equação de momento

O escoamento de um fluido é governado pelas leis fundamentais da física de conservação de massa, momento e energia (Kundu, 1990). Para obter as equações que governam o movimento de um pequeno elemento de volume na atmosfera fazemos a aplicação destes princípios.

Considere o movimento de um elemento de fluido infinitesimal (dm) e a aplicação da forma integro-diferencial na segunda Lei de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) para esse volume material, que consiste de algumas partículas do fluido escoando com uma certa velocidade (\vec{v}). Neste elemento de volume atua uma força gravitacional a distância (\vec{F}_g) e também as forças de superfície (\vec{F}_s), exercidas pelo meio através do contato direto sobre o volume material.

A variação da velocidade do fluido no tempo será dada pela relação

$$\frac{DU_i}{Dt} = \delta_{i3} g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2.1)$$

sendo ρ a densidade, g a gravidade, p a pressão e U_i as direções das velocidades. A equação do movimento (2.1) relaciona a aceleração para o conjunto de forças aplicadas a um ponto e é válida para qualquer contínuo, sólido ou líquido, não importa como o tensor de tensão esteja relacionado com a deformação do campo.

2.2.2 Equação do Espectro da Energia Cinética Turbulenta

No balanço de energia a área dos vórtices e a torção associada a movimentos turbulentos sempre causam energia turbulenta para o escoamento das escalas menores, onde a turbulência é dissipada pela difusão viscosa. Assim, a produção de turbulência será contínua e a energia cinética turbulenta é mantida. A principal fonte de turbulência na camada limite depende criticamente da estrutura do vento e dos perfis de temperatura próximos a superfície. Se o fluxo de calor turbulento é grande e positivo, a camada limite turbulenta é gerada convectivamente. Se ela é estável, então o cisalhamento do vento deve ser responsável pela geração de turbulência na CLP. Os papéis comparativos destes processos podem ser melhor compreendidos através da análise do desenvolvimento da energia cinética turbulenta.

Para investigar a produção de turbulência, nós olhamos para a equação de conservação de momento (2.1) (Stull, 1988), onde o vetor U_i representa as três componentes perpendiculares da velocidade (u,v,w) e (i,j,k) são índices usados para o restante do texto oriundos da notação vetorial.

Temos aqui que considerar algumas aproximações tais como a viscosidade dinâmica molecular μ ser constante em todos os pontos do fluido. A tensão viscosa existe onde há movimentos de cisalhamento no fluido. Onde uma porção do fluido se move, as forças intermoleculares tendem a arrastar moléculas adjacentes (próximas) no fluido na mesma direção. Uma medida destas forças é a viscosidade, sendo que o resultado desta tensão é a deformação do fluido. A tensão para um fluido newtoniano é usualmente dada por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k}, \quad (2.2)$$

sendo μ o coeficiente de viscosidade dinâmico e τ_{ij} interpretado como uma força por unidade de área na direção de x_i atuando na face que é perpendicular a direção x_j .

Assume-se que o fluído seja incompressível, tornando $\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0$, pode-se reescrever a equação (2.2) na forma:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}, \quad (2.3)$$

sendo $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ a viscosidade cinemática. Obtemos para a equação (2.1) a expressão

$$\frac{DU_i}{Dt} = \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

onde usando a definição de derivada total temos

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{dU_i}{dt}, \quad (2.5)$$

tornando a equação (2.4) a seguinte forma abaixo

$$\frac{dU_i}{dt} = \delta_{i3} g + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.6)$$

Analisando a equação de estado dos gases ideais pode-se explicitar as variáveis abaixo em uma parte média localizada em um ponto arbitrário e uma parte turbulenta na superfície terrestre do escoamento turbulento: $\rho = \bar{\rho} + \rho_o$ (densidade da mistura de ar), $T_v = \bar{T}_v + T_{v_o}$ (temperatura virtual absoluta) e $p = \bar{p} + p_o$ (pressão). As flutuações de pressão estão associadas as variações na massa de ar na atmosfera. A razão entre os termos da magnitude da pressão pode ser da mesma ordem ou menor que a magnitude dos termos do empuxo na vertical. Devido a isso obtêm-se a relação

$$\frac{p_o}{\bar{p}} = \frac{\rho_o}{\bar{\rho}} + \frac{T_{v_o}}{\bar{T}_v}. \quad (2.7)$$

Outras considerações podem ser feitas, como a advecção e divergência de massa em um ponto fixo aproximadamente estável tornar a variação da densidade com o tempo lenta ou nula. A magnitude do termo do gradiente de pressão vertical na superfície é da mesma ordem ou menor do que a magnitude do termo de empuxo na equação do movimento. Negligencia-se o termo de pressão da equação (2.7) devido a este ser tipicamente muito pequeno, da ordem de 10^{-4} [Stull, 1988], tem-se então

$$\frac{\rho_o}{\bar{\rho}} = -\frac{T_{v_o}}{\bar{T}_v} = -\frac{\theta_{v_o}}{\theta_v}, \quad (2.8)$$

sendo θ_v a temperatura potencial virtual, que remove da T_v as variações na temperatura

causadas pela mudança na pressão com a altitude, de uma parcela de ar.

Assim a equação (2.6) poderá ser escrita na forma

$$\frac{dU_i}{dt} = \delta_{i3} \left(\frac{\theta_{v_o}}{\theta_v} \right) g + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.9)$$

O nosso problema é então investigar um modelo de escoamento e a relação existente entre a mudança das componentes da velocidade durante o decaimento do movimento turbulento. Estas relações podem ser descritas por um tensor de correlação (simples, duplo ou triplo) da velocidade e sua variação no tempo, como veremos mais adiante.

Reinicia-se com a equação do movimento (2.9), que descreve os movimentos turbulentos, onde após uma álgebra (ver apêndice A) em que expande-se as variáveis em partes média e turbulenta e se considera a velocidade média \bar{u}_i como constante dentro de uma determinada região e também independente do tempo, de modo a se obter

$$\frac{\partial(\overline{u_i u_k})}{\partial t} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} (\overline{u_i \theta_v}) - (\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_k u_j u_i})}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\overline{p u_i})}{\partial x_i} - 2 \nu \frac{\partial u_i \partial u_k}{\partial x_j^2}, \quad (2.10)$$

onde i e k podem assumir três valores representando nove equações separadas.

O termo de correlação pressão-velocidade descreve como a energia é distribuída pelas perturbações da pressão associado com as oscilações no ar. No caso de um fluido incompressível e a turbulência sendo homogênea, os efeitos da pressão de longo alcance desaparecem, dessa forma a correlação pressão-velocidade será nula. Ficando a equação (2.10) escrita na forma abaixo

$$\frac{\partial(\overline{u_i u_k})}{\partial t} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} (\overline{u_i \theta_v}) - (\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_k u_j u_i})}{\partial x_j} - 2 \nu \frac{\partial u_i \partial u_k}{\partial x_j^2}. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) possui termos de correlação simples $\overline{(u_i)_A \theta_B}$, de correlações duplas $\overline{(u_i)_A (u_k)_B}$ e termos de correlações triplas $\overline{(u_k)_A (u_j)_B (u_i)_A}$, onde A e B correspondem a pontos diferentes no campo do fluxo turbulento e descrevem a correlação que estas velocidades, de um elemento de fluido, possuem entre si durante o movimento. Alinhando-se o sistema de coordenadas com o vento médio, pode-se assumir que a região do campo do fluxo turbulento possui homogeneidade horizontal. Os dois pontos A e B do campo estão sobre o mesmo eixo de coordenadas (eixo x , por exemplo), sendo que um dos pontos encontra-se na origem do sistema cartesiano. O produto das componentes da velocidade será dado pelos tensores de correlações de primeira, segunda e terceira ordem, dados abaixo:

$$\begin{aligned}
(T_{i,\theta})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A \theta_B}, \\
(Q_{i,k})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A (u_k)_B}, \\
(\epsilon_{i,j})_{A,B} &= \overline{(u_i)_A (u_j)_B}, \\
(S_{kj,i})_{A,B} &= \overline{(u_k)_A (u_j)_A (u_i)_B},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

são eles funções do espaço de coordenadas, da distância entre A e B e do tempo. Pode-se reescrever o tensor de correlação tripla da velocidade, devido sua invariância frente a rotações do escoamento homogêneo, com respeito aos índices na forma

$$\frac{\partial S_{kj,i}}{\partial x_j} = S_{i,k}(x_1, x_2, x_3; t). \tag{2.13}$$

Reduzindo-se a equação (2.11) na expressão

$$\frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} = \delta_{i3} \frac{g}{\theta_v} T_{i,\theta} - \epsilon_{i,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - S_{i,k} - 2 \nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial x_j^2}. \tag{2.14}$$

De modo a tomar a diagonal principal da matriz dos tensores de correlação, cujo cálculo dos autovalores nos fornece a energia cinética, faz-se a contração dos índices $i = k$ das funções de correlação. Estas funções apresentam-se agora descritas em um sistema de coordenadas esférico, cujo exemplo está representado no tensor de segunda ordem abaixo

$$Q_{i,i}(x_1, x_2, x_3; t) = Q_{i,i}(\vec{r}, t). \tag{2.15}$$

Para se obter o espectro de energia cinética tridimensional realiza-se uma transformada de Fourier das funções de auto-correlação onde se produz uma correlação espectral que passa a ser uma função do vetor número de onda κ_i ($i=1,2,3$). A informação direcional é removida com a integral do espectro sobre uma casca esférica a cerca da origem do espaço do número de onda, obtendo um espectro que é uma função escalar e cujo valor representa a energia cinética total para um dado número de onda κ .

Considera-se as seguintes transformadas de Fourier

$$\begin{aligned}
T_{i,\theta}(\vec{r}, t) &= 4\pi \int_0^\infty k^2 H_{i,\theta}(k, t) \exp(ik.r) dk, \\
Q_{i,i}(\vec{r}, t) &= 4\pi \int_0^\infty k^2 E_{i,i}(k, t) \exp(ik.r) dk, \\
\epsilon_{i,i}(\vec{r}, t) &= 4\pi \int_0^\infty k^2 M_{i,i}(k, t) \exp(ik.r) dk, \\
S_{i,i}(\vec{r}, t) &= 4\pi \int_0^\infty k^2 W_{i,i}(k, t) \exp(ik.r) dk,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

dessa forma tem-se a equação dinâmica para o espectro de energia tridimensional a partir da equação (2.14). Para isso a distância entre as duas componentes das velocidades u_i terá que ser muito pequena ($\vec{r} = 0$), afim de que a integral da energia se torne igual a energia cinética por unidade de massa expressa abaixo

$$\frac{\partial E_{i,i}(k, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{g}{\theta_v} H_{i,\theta}(k, t)}_{II} - \underbrace{M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_{III} - \underbrace{W_{i,i}(k, t)}_{IV} - \underbrace{2 \nu k^2 E_{i,i}(k, t)}_V, \quad (2.17)$$

onde t é o tempo, k é o número de onda, $\frac{g}{\theta_v}$ é o parâmetro convectivo.

Cada termo individualmente na equação de balanço de energia descreve processos físicos que geram a turbulência, sendo eles:

- o termo II que representa a produção convectiva de energia por efeito térmico devido ao fluxo de calor durante o dia sobre a terra,
- o termo III que é um termo de produção de energia mecânica devido ao atrito,
- o termo IV que é um termo de perda e exprime a transferência de energia cinética entre os turbilhões de diferentes números de onda por efeito inercial,
- o termo V que retrata a dissipação de energia convertida em calor pela viscosidade molecular. O cálculo do termo V é representado pela equação (3.25) no Capítulo 3.

O modelo descreve a energia espectral turbulenta na atmosfera com os grandes turbilhões criando ou se chocando com os pequenos turbilhões, ocorrendo, através destes processos físicos, a transferência desta energia.

2.3 Modelo de Kristensen para o Espectro de Energia Cinética Turbulenta Estacionária na CLP

O modelo expressa o tensor espectral das velocidades turbulentas baseado no conhecimento do comportamento dos espectros unidimensionais das componentes da velocidade longitudinal, transversal e vertical para um ponto na superfície.

2.3.1 O Tensor de autocorrelação

Kristensen desenvolveu um modelo espectral simplificado da turbulência que não é isotrópico, mas que contém o caso isotrópico como um limite, onde expressa o tensor espectral

$\Phi_{i,j}(\kappa)$ da velocidade turbulenta tendo como hipótese que a turbulência é homogênea em todas as direções e considerando o campo de velocidades turbulento incompressível. Dessa forma o tensor de auto-correlação simétrico (Kristensen,1989) será

$$Q_{i,j}(\vec{r}) = \langle (u_i(\vec{x}) - U_i)(u_j(\vec{x} + \vec{r}) - U_j) \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2.18)$$

onde o campo de velocidades não tem direção preferencial no espaço.

O tensor espectral definido pela identidade

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \oint Q_{i,j}(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) d^3r, \quad (2.19)$$

é um tensor de segunda ordem.

Um tensor simétrico qualquer, de segunda ordem, pode ser escrito em uma forma apropriada dada por

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \sum_{l=1}^3 A_l(k) \left\{ \delta_{li} - \frac{\kappa_l \kappa_i}{\kappa^2} \right\} \left\{ \delta_{lj} - \frac{\kappa_l \kappa_j}{\kappa^2} \right\}, \quad (2.20)$$

onde $A_l(k)$ são funções reais.

O espectro de energia $E(k)$ que é definido como

$$E(k) = \frac{k^2}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(\vec{k}), \quad (2.21)$$

pode ser expresso em função das $A_l(k)$ por

$$E(k) = \frac{4\pi k^2}{3} \{A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)\}, \quad (2.22)$$

após substituir a equação (2.20) na equação (2.21) e resolver as integrais em θ e ϕ . Para derivar os espectros unidimensionais em função das $A_l(k)$ (ver apêndice B), onde será considerado a relação entre uma componente unidimensional do espectro e o tensor espectral (Lumley e Panofsky, 1964), usa-se a relação abaixo

$$F_{ii}^1(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \Phi_{i,i}(\vec{k}), \quad (2.23)$$

onde substituindo a equação (2.20) na equação (2.23), após uma mudança de coordenadas, encontramos as componentes da velocidade $F_L(k)$ longitudinal, $F_T(k)$ transversal e $F_V(k)$ vertical.

Obtêm-se a partir de (2.22) a seguinte expressão para a função espectro de energia do

fluxo turbulento homogêneo mas não isotrópico

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} + 2k^4 \int_0^{1/k^2} s^2 g'''(s) ds - \frac{14}{9} k^{4/3} \int_0^{1/k^2} s^{2/3} g'''(s) ds, \quad (2.24)$$

sendo $s = \frac{1}{k^2}$ e $g(s)$ a equação formada pelas componentes unidimensionais na forma

$$g(s) = \frac{F_L(k) - k F'_L(k) - (F_T(k) + F_V(k))}{k^4}, \quad (2.25)$$

Os espectros unidimensionais de Kristensen não são definidos para alturas próximas da superfície. Serão considerados os espectros unidimensionais de Degrazia (Degrazia et al., 2000) na forma

$$F_i(k) = \frac{a_i}{\{1 + b_i \kappa\}^{\frac{5}{3}}} \quad i = L, T, V; \quad (2.26)$$

com dados experimentais dados por $a_i = \frac{0.98}{2\pi} c_i \left(\frac{z}{z_i}\right)^{5/3} z_i \Psi_\epsilon^{2/3} w_*^2 [(f_m^*)_i^c]^{-5/3}$ e $b_i = z_i \frac{1.5z}{2\pi z_i (f_m^*)_i^c}$, com $c_i = \alpha_i (0.5 \pm 0.05) (2\pi\kappa)^{-2/3}$, $\alpha_i = 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}$ para u, v e w respectivamente (Champagne et al., 1997; Sorbjan, 1989). A escala de velocidade convectiva será $w_* = (u_*)_0 \left(-\frac{z_i}{\kappa L}\right)^{1/3}$; $(f_m^*)_i^c = \frac{z}{G_i z_i}$; $G_u = G_v = 1.5$; $G_w = 1.8[1 - \exp(-\frac{4z}{z_i}) - 0.0003 \exp(\frac{8z}{z_i})]$ e $\Psi_\epsilon = \frac{\epsilon z_i}{w_*^3}$, sendo $L = u, T = v$ e $V = w$ as representações das componentes unidimensionais do espectro.

As equações oriundas de (2.26) definem a equação (2.25). Substituindo (2.25) na equação (2.24) obtêm-se o espectro tridimensional da energia cinética turbulenta independente do tempo na CLC, que será resolvido numericamente.

2.4 Método de Adomian para Solução de Equações não Lineares

O método de decomposição de Adomian possui o intuito de facilitar a solução de problemas físicos e tem se mostrado um ótimo artifício na solução de equações lineares e não lineares devido aos seus resultados analíticos convergirem rapidamente, podendo dessa forma esquivar-se de um massivo trabalho de computação numérica. Este método de aproximação representa o termo não linear de forma mais precisa, de modo que sendo a série infinita, quando fazemos uma aproximação de n termos, a solução se torna apropriada como uma solução prática, onde restringe-se sua validade às regiões onde o comprimento do domínio seja menor que o raio de convergência da série (Adomian, 1988).

2.4.1 Apresentação do método de decomposição de Adomian

Considera-se uma equação geral $F u(t) = g(t)$, onde F representa um operador diferencial não linear geral envolvendo termos lineares e não lineares, o termo linear é decomposto em $L + R$, sendo L facilmente inversível, tomado como a derivada de maior ordem do operador, e R o resto do operador linear; sendo $g(t)$ um termo de fonte. Esta equação pode então, ser escrita

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (2.27)$$

onde Nu representa o termo não linear. Resolvendo Lu de (2.27), nós temos

$$Lu = g - Ru - Nu. \quad (2.28)$$

Devido a L ser inversível, a expressão equivalente será

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (2.29)$$

Se L é um operador diferenciável, L^{-1} será o operador integrável e a equação (2.29) para u será

$$u = u(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.30)$$

sendo $u(0)$ uma condição inicial da solução da equação diferenciável.

Pode-se representar u por uma série na forma

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad (2.31)$$

com u_0 identificado como $u(0) + L^{-1}g$, e u_n ($n > 0$) será determinado. O termo não linear Nu será decomposto em uma série infinita de polinômios de Adomian

$$Nu = N \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.32)$$

Substituindo-se as equações (2.31) e (2.32) na expressão (2.30), obtêm-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}N \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.33)$$

Consequentemente pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u(0) + L_{-1} g , \\
 u_1 &= -L_{-1} R u_0 - L_{-1} A_0 , \\
 &\vdots \\
 u_{n+1} &= -L_{-1} R u_n - L_{-1} A_n ,
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

e

$$\begin{aligned}
 A_0 &= F(u_0), \\
 A_1 &= u_1 F'(u_0), \\
 A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F''(u_0). \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Após calcularmos todos os u_n encontramos a função u , desde que a solução tenha convergência.

3 EQUAÇÃO DINÂMICA PARA O ESPECTRO DE ENERGIA DURANTE O DECAIMENTO DE UM ESCOAMENTO TURBULENTO HOMOGENEO MAS NÃO ISOTRÓPICO

Através da equação para a função espectro de energia do escoamento turbulento, podemos analisar os processos físicos que ocorrem dentro da CLP, onde a perturbação entra no sistema e é absorvida por ela, quando então responde novamente ao estado de equilíbrio. Se escolhermos um sistema de coordenadas alinhado com o vento médio, assumindo homogeneidade horizontal, e negligenciarmos o aumento de pressão que ocorre quando mais ar vai ocupando o mesmo espaço devido ao movimento do ar na vertical, a forma da equação que caracteriza a energia cinética turbulenta desse processo será dada pela equação (2.17), na forma

$$\frac{\partial E_{i,i}(k, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{g}{\theta_v} H_{i,\theta}(k, t)}_{II} - \underbrace{M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_{III} - \underbrace{W_{i,i}(k, t)}_{IV} - \underbrace{2 \nu k^2 E_{i,i}(k, t)}_V. \quad (3.1)$$

A quebra de isotropia do escoamento turbulento será ocasionada pelos termos de fonte de energia, podendo ser por efeito térmico, mecânico e inercial. Para obtermos a solução desta equação de balanço de energia (3.1) se faz necessário realizar uma parametrização (aproximação) nos termos de fluxo de calor (*II*) e cisalhamento mecânico (*III*); e no termo de transferência de energia cinética por efeito inercial (*IV*).

3.1 Parametrização dos Termos Mecânico e de Fluxo de Calor

Considerando um escoamento homogêneo no plano horizontal, no qual a velocidade média ocorre na direção de um dos eixos, admitindo-se uma turbulência contínua e estacionária, pode-se realizar uma aproximação nos termos dois e três da equação de balanço da energia cinética (3.1) através do Número de Richardson Fluxo.

3.1.1 Número de Richardson Fluxo

O Número de Richardson é enunciado como um número adimensional que expressa uma relação entre a energia potencial e a energia cinética de um fluido descrito pela equação

$$R_i = \frac{g h}{u^2}, \quad (3.2)$$

onde g é a aceleração da gravidade, h representa o comprimento na vertical e u descreve a velocidade do fluxo. O Número de Richardson Fluxo é uma parâmetro de estabilidade que fornece a razão entre os forçantes térmico e mecânico da turbulência.

Em um ambiente estável o empuxo tende a suprimir a turbulência, ao mesmo tempo que o vento tende a gerar turbulência mecanicamente. O termo do empuxo da equação de energia é positivo nesta situação onde o termo de produção mecânica é negativo. Uma aproximação útil é possível ser feita através do Número de Richardson Fluxo, quando examinamos a razão dos termos *II* e *III* da equação (3.1) (Stull, 1988). A razão entre os termos de fonte de turbulência convectiva e de turbulência mecânica nos fornece a relação

$$R_f = \frac{\text{energia convectiva}}{-\text{energia mecânica}} = \frac{\frac{g}{\theta_v} H_{i,\theta}(k, t)}{-M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}, \quad (3.3)$$

conhecida como Número de Richardson Fluxo, cuja expressão é válida para um escoamento homogêneo no plano horizontal. Durante o decaimento do escoamento a transferência de calor pelo empuxo é direcionada para cima e positiva e a produção por efeito mecânico direcionada para baixo e negativa. Richardson propôs que $R_f = +1$ seja um valor crítico, porque a taxa de produção mecânica equivale ao empuxo no consumo de energia. Quando o valor de R_f for nulo o fluxo de calor é zero e a atmosfera é neutra, quando $R_f > 0$ a atmosfera é estatisticamente estável e quando $R_f < 0$, a produção de energia cinética turbulenta é aumentada caracterizando uma atmosfera estatisticamente instável.

Devido a relação obtida pelo número de Richardson fluxo, podemos reescrever a equação (3.3) e expressá-la da seguinte forma

$$\frac{g}{\theta_v} H_{i,\theta}(k, t) = -M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} R_f. \quad (3.4)$$

Substituindo-se a equação (3.4) no termo *II* da equação (3.1), pode-se reescrever os termos *II* e *III* de (3.1), na forma

$$\frac{g}{\theta_v} H_{i,\theta}(k, t) - M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} (R_f + 1). \quad (3.5)$$

A variação espacial da velocidade dada por $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ também forma um tensor de segunda ordem (Hinze, 1975) dado pelo produto das componentes da velocidade, que pode ser dividido

em uma parte simétrica e outra antisimétrica relacionada por

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.6)$$

onde U_i são as componentes médias da velocidade com i e $j = 1, 2, 3$ correspondentes as direções x , y e z . A parte simétrica determina a deformação do fluido e é chamada de tensor de deformação. A parte antisimétrica determina a rotação sem deformação, a vorticidade do movimento, e é chamada do vetor do tensor antisimétrico. Considerando-se aqui um escoamento homogêneo e sua invariância frente a propriedades de translação, pode-se considerar que $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}$, desta forma a equação (3.6) ficará

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.7)$$

onde pode-se expressar a razão de deformação característica (3.7) de cada turbilhão com número de onda k (Tennekes e Lumley, 1972), saindo das coordenadas espaciais para as de números de onda, através de uma transformada de Fourier (2.16), do seguinte modo

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{[k^3 E_{i,i}(k, 0)]^{\frac{1}{2}}}{2\pi}, \quad (3.8)$$

fazendo-se a contração dos índices $i = j$ na energia. O tensor de deformação é aproximadamente proporcional a energia $E(k, t)$ de todos os turbilhões de tamanho $2\pi/k$, multiplicada pela largura do espectro do turbilhão, que é k .

A interação entre turbilhões de tamanhos diferentes e a razão de deformação do fluxo médio interagem diretamente nos turbilhões, produzindo um fluxo de energia que causa um efeito de produção de energia mecânica (Tennekes e Lumley, 1972) dado por

$$P(k, t) = \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) E_{i,i}(k, 0) \cos(\beta t), \quad (3.9)$$

sendo $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ dado pela razão de deformação (3.8). O termo de fonte de produção de energia (3.9) vale para qualquer tipo de fonte de turbulência convectiva e mecânica.

Usualmente o fluxo de momento $M_{i,i}(k, t)$ possui sinal oposto à razão de deformação $\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ (Stull, 1988). A contribuição deste termo de produção é positiva para a equação de balanço de energia (3.1). Relacionando-se o termo de produção da equação (3.9) com $M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$ na equação (3.5), pode-se reescrever o termo de produção mecânica na forma

$$-M_{i,i}(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} (R_f + 1) = (C_1) [k E_{i,i}(k, 0)]^{\frac{3}{2}} (R_f + 1) \cos(\beta t), \quad (3.10)$$

com $C_1 = 2\pi c_1$ e β obtidos de dados experimentais.

A partir da equação (3.10) os termos de fonte de turbulência convectiva *II* e de turbulência mecânica *III* ficam determinados na equação de balanço de energia do escoamento turbulento (3.1). Pode-se escrever a equação (3.10) na forma espectral usando a relação $E_{i,i}(k, t) = \frac{E(k,t)}{2\pi k^2}$. Dessa forma obtêm-se

$$-M(k, t) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} (R_f + 1) = (C_1) k^{1/2} [E(k, 0)]^{\frac{3}{2}} (R_f + 1) \cos(\beta t), \quad (3.11)$$

O número de Richardson fluxo, definido como a razão dada pela equação (3.3) entre os termos de produção de energia por efeito convectivo e mecânico, pode ser estimado de acordo com dados experimentais de Moeng e Sullivan (1994), validando a parametrização nos termos de fonte de turbulência convectiva e de turbulência mecânica proposto para a equação de balanço de energia. Tendo-se

$$R_{i_f} = \frac{\frac{g}{\theta_v} (\overline{u_i \theta_v})}{(\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}, \quad (3.12)$$

com g representando a gravidade, $\bar{\theta}_v$ a temperatura potencial virtual e \bar{u}_i as três componentes perpendiculares médias da velocidade, pode-se estimar o termo de produção de energia por convecção térmica por,

$$\frac{g}{\theta_v} (\overline{u_i \theta_v})_0 = 0.2 \frac{w_m^3}{z_i} \quad (3.13)$$

com $w_m = w_* + 5u_*^3$ (Moeng e Sullivan 1994), onde u_* é a velocidade de atrito e w_* a velocidade convectiva.

O termo de produção por efeito mecânico pode ser escrito como (Moeng e Sullivan, 1994),

$$(\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{u_*^3 \phi_m}{k z}, \quad (3.14)$$

onde k é a constante de von Karman e $\phi_m = (1 - 15 \frac{z}{L})^{1/4}$ é uma função estabilidade empírica (Businger et al., 1971) para o momento, L é o comprimento de Monin-Obukov e z a altura.

Substituindo as equações (3.13) e (3.14) na equação (3.12), temos

$$R_{i_f} = 0.2 \frac{w_m^3 k \frac{z}{z_i}}{u_*^3 \phi_m}. \quad (3.15)$$

No caso específico do experimento SB1 de Moeng e Sullivan (1994), onde é examinado o caso da interação entre a geração local de turbulência por efeito de cisalhamento do vento e o efeito não local devido a flutuação convectiva, obtêm-se a seguinte expressão para o número

de Richardson fluxo antes do início do decaimento,

$$R_{i_{f_0}} = 0.0103 + 1.0456\left(\frac{z}{z_i}\right) + 0.6803\left(\frac{z}{z_i}\right)^2, \quad (3.16)$$

com a substituição dos parâmetros $u_* = 0.59 \text{ m s}^{-1}$, $w_* = 0.94 \text{ m s}^{-1}$, $z_i = 498 \text{ m}$, $\frac{-z_i}{L} = 1.6$, $\overline{u_i \theta_v} = -0.020 \text{ m s}^{-1} \text{ K}$ e $w_m = 1.22 \text{ m s}^{-1}$.

No caso de um campo de turbulência decaindo com o tempo, o termo de fonte de energia cinética por convecção térmica diminui como o primeiro quadrante de uma função cosseno e o termo de fonte de energia cinética por efeito mecânico permanece constante. Portanto o número de Richardson fluxo decai como o termo de fonte de energia por convecção térmica. Este resultado está de acordo com dados experimentais de Mahrt et al. (1998). Podemos então escrever,

$$R_{i_f}(t) = R_{i_{f_0}} \cos(\beta t) \quad (3.17)$$

onde $R_{i_{f_0}}$ é dado pela equação (3.16).

3.2 Parametrização do Termo de Transferência de Energia Cinética por Efeito Inercial

O termo *IV* de transferência de energia por efeito inercial da equação (3.1) será dado pela transformada de Fourier da equação (2.13) representada em (2.16) e interpretado como um fluxo turbulento de energia cinética na vertical, transferindo energia de um turbilhão para outro por efeito inercial.

3.2.1 Modelo de Heisenberg

Pode-se escrever o termo de transferência de energia por efeito inercial com base nas equações (2.12) e (2.13) (Stull, 1988), da seguinte forma

$$\frac{\partial(S_{kj,i})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\overline{u_k u_j u_i})}{\partial x_j} \quad (3.18)$$

Devido a homogeneidade da turbulência e sua invariância frente a rotações, coloca-se os pontos *A* e *B*, nos quais se encontram as componentes da velocidade turbulenta \bar{u} , sobre um dos eixos x_n , com $n = 1, 2, 3$ correspondente às direções x , y e z do sistema de coordenadas cartesiano, na forma

$$S_{i,k}(x_n, t) = \frac{\partial(\overline{u_k u_i u_i})}{\partial x_j} , \quad (3.19)$$

onde fez-se a contração dos índices $i = j$.

Utilizando-se a aproximação chamada de Teoria do Gradiente de Transporte (Donaldson, 1973) reescreve-se o termo de correlação tripla da velocidade, após a contração dos índices, com a expressão

$$\begin{aligned} \overline{u_k u_i u_i} &= -\Lambda \left(\overline{u_i^2}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial(\overline{u_k u_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_k u_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right] \\ &= -3 \Lambda \left(\overline{u_i^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial(\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right) , \end{aligned} \quad (3.20)$$

têm-se aqui a contração $i = k$ devido ao traço da matriz das funções correlações representarem a energia cinética turbulenta. Introduce-se um parâmetro Λ que expressa a viscosidade dos turbilhões e possui dimensão de comprimento. Neste caso a turbulência é muito mais eficaz que a viscosidade para causar a homogeneização, o termo é uma função do escoamento, variando conforme a turbulência varia.

Partindo da expressão (3.20) , saindo do espaço das posições para o de número de onda, pode-se relacionar a viscosidade cinemática turbulenta através da equação

$$\epsilon(k, t) = \Lambda \left(\overline{u_i^2}\right)^{1/2} , \quad (3.21)$$

sendo produzida pelos turbilhões com número de onda maiores do que κ e as interações ocorrendo entre turbilhões de escalas comparáveis. Supondo que $\epsilon(k, t)$ varie com o tamanho do turbilhão (Berkowicz e Prahm, 1979; Prahm et al., 1979; Berkowicz, 1984), sendo κ o número de onda de cada turbilhão e que os grandes turbilhões são mais efetivos para provocar a difusão do que os pequenos turbilhões. Assume-se que turbilhões de tamanhos muito diferentes serão independentes. Resultados experimentais deram suporte a esta hipótese indicando que pequenos turbilhões correspondem com a mais fina estrutura da turbulência, não sendo só independentes entre si, mas também independentes dos turbilhões maiores.

Através da substituição da equação (3.20) na equação (3.19), o termo de transferência de energia por efeito inercial será dado por

$$S_{i,k}(x_n, t) = -3 \Lambda \left(\overline{u_i^2}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial(\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right) . \quad (3.22)$$

A dupla diferenciação da função de autocorrelação das velocidades de (3.22), será

$$\left(\frac{\partial^2 (\overline{u_i u_i})}{\partial x_j^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 Q_{i,i}(\epsilon_n, t)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_j} \right)_{r=0} ; \quad (3.23)$$

onde devido a não homogeneidade da turbulência os valores médios do produto das velocidades turbulentas $(\overline{u_i u_i})$ não são funções unicamente da distância entre os pontos A e B mas também da localização destes pontos no campo do fluxo. Para diferenciar estes efeitos de distância e localização destes pontos introduz-se novas variáveis independentes $\epsilon_j = (x_j)_A - (x_j)_B$.

Realiza-se a transformada de fourier (2.16) da função correlação $Q_{i,i}(\epsilon_n, t)$, onde se obtêm

$$\left(\frac{\partial^2 Q_{i,i}(\epsilon_n, t)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_j} \right)_{r=0} = - \left(\int \int \int_{-\infty}^{\infty} k^2 E_{i,i}(k_n, t) \exp(ik_l \epsilon_l) dk_n \right)_{r=0} , \quad (3.24)$$

sendo $l = 1, 2, 3$. Integra-se (3.24) sobre uma casca esférica de raio κ de modo que

$$\left(\frac{\partial^2 Q_{i,i}(\vec{r}, t)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_j} \right)_{r=0} = -4\pi \left(\int_0^{\infty} k^4 E_{i,i}(k, t) \frac{\sin kr}{kr} dk \right)_{r=0} , \quad (3.25)$$

e toma-se $r = 0$ em (3.25). Dessa forma a distância entre as duas componentes da velocidade se torna muito pequena e a minha integral da energia se torne igual a energia cinética turbulenta por unidade de massa.

Tem-se a dupla diferenciação da função de autocorrelação (3.25) na forma

$$\frac{\partial^2 Q_{i,i}(0, t)}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_j} = -4\pi k^4 E_{i,i}(k, t) . \quad (3.26)$$

Pode-se relacionar a viscosidade cinemática (3.21) com o modelo proposto por Heisenberg através da integral

$$\epsilon(k, t) = \int_{\kappa}^{\infty} f [k; E(k, t)] dk . \quad (3.27)$$

Substituindo-se (3.26) e (3.27) na equação (3.22), obtêm-se uma expressão para termo de transferência de energia por efeito inercial no número de onda, através da transformada (2.16), escrita da seguinte forma

$$W_{i,i}(k, t) = 3 (4\pi) \left(\int_{\kappa}^{\infty} f [k; E_{i,i}(k, t)] dk \right) k^4 E_{i,i}(k, t) , \quad (3.28)$$

conforme o modelo proposto por Heisenberg.

Heisenberg em 1948, baseando-se em argumentos intuitivos, assume que os processos

de transferência de energia entre turbilhões com pequeno número de onda para os de número de onda grande, é similar à conversão de energia mecânica em energia térmica por efeito de uma viscosidade molecular. Os turbilhões com número de onda maiores absorvem energia dos com números menores (Hinze, 1975).

A idéia por trás do Modelo de Heisenberg para reforçar o argumento em favor da localidade das interações (Frisch, 1995; Hinze, 1975) é a de que os efeitos de um grande turbilhão sobre um pequeno turbilhão consiste em duas partes:

- deformação do turbilhão menor pelo campo de velocidades do grande turbilhão durante a transferência de energia;
- entranhamento do turbilhão menor no campo de velocidades do turbilhão maior sem que ocorra deformação durante a transferência de energia.

Quanto mais próximas estiverem as escalas entre os turbilhões, menor é o efeito de entranhamento e maior o efeito de deformação.

Encontra-se o valor da função $f [k; E_{i,i}(k, t)]$ através de uma análise dimensional feita por Heisenberg, na forma

$$f [k; E(k, t)] = \frac{\partial [\epsilon(k, t)]}{\partial k} \quad , \quad (3.29)$$

onde uma viscosidade cinemática é o produto de uma escala de comprimento característica turbulenta e de uma velocidade (Degrazia et al., 2007), dada por

$$\epsilon(k, t) = C_H \int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{E_{i,i}(k, t)}{k} \right)^{1/2} dk \quad , \quad (3.30)$$

sendo k o número de onda, C_H a constante de Heisenberg. Com (3.30) em (3.28) temos

$$W_{i,i}(k, t) = 3 (4\pi) C_H \left[\int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{E_{i,i}(k, t)}{k} \right)^{1/2} dk \right] k^4 E_{i,i}(k, t) \quad , \quad (3.31)$$

que representa o termo de transferência de energia por efeito inercial parametrizado. A transferência de energia devido as interações com o vento médio é praticamente balanceada pela transferência de energia por efeitos inerciais entre diferentes números de onda.

Para escrever o termo de transferência de energia por efeito inercial na forma espectral usa-se a relação $E_{i,i}(k, t) = \frac{E(k, t)}{2\pi k^2}$ em (3.31) e se obtêm

$$W(k, t) = 6 C_H \left[\int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{E(k, t)}{k^3} \right)^{1/2} dk \right] k^2 E(k, t) \quad , \quad (3.32)$$

sendo a constante de Heisenberg $C_H \approx 0.47$ (Muschinski e Roth, 1993; Corrsin, 1963).

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ADOMIAN PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

4.1 Solução da Equação do Espectro da Energia Cinética Turbulenta pelo Método de Decomposição de Adomian

Com a substituição das equações (3.11) e (3.32) na equação (3.1), pode-se escrever a equação de balanço de energia (3.1) na forma espectral, usando-se a relação $E_{i,i}(k, t) = \frac{E(k, t)}{2\pi k^2}$, na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = & (C_1)(R_f + 1)k^{1/2} [E(k, 0)]^{\frac{3}{2}} \cos(\beta t) - 2\nu k^2 E(k, t) \\ & - 6C_H k^2 E(k, t) \int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{E(k, t)}{k^3} \right)^{1/2} dk. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para adimensionalizar a equação (4.1) serão considerados os seguintes parâmetros adimensionais

$$t_* = \frac{w_* t}{z_i}, \quad Re = \frac{w_* z_i}{\nu}, \quad (4.2)$$

e

$$k' = k z_i, \quad (4.3)$$

onde z_i é a altura da camada limite convectiva antes do pôr do sol, Re é o número de Reynolds, interpretado como a razão entre os forçantes inerciais e viscosos; e w_* como sendo a escala de velocidade convectiva. Dessa forma a equação (4.1) será reescrita conforme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(k', t_*)}{\partial t_*} = & \frac{C_1(z_i)^{1/2}}{w_*} (R_f + 1)(k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*}\right) - \frac{2}{Re} (k')^2 E(k', t_*) \\ & - \frac{6C_H}{w_*(z_i)^{1/2}} (k')^2 E(k', t_*) \int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3} \right)^{1/2} dk'. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Define-se as constantes: $\alpha = \frac{C_1(z_i)^{1/2}}{w_*} (R_f + 1)$, $\alpha' = \frac{2}{Re}$ e $\alpha'' = \frac{6C_H}{w_*(z_i)^{1/2}}$; e reescreve-se a equação (4.4) na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(k', t_*)}{\partial t_*} = & \alpha (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*}\right) - \alpha' (k')^2 E(k', t_*) \\ & - \alpha'' (k')^2 E(k', t_*) \int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3}\right)^{1/2} dk'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Determina-se o valor da constante C_1 de α através de dados experimentais (Moeng, 1993). O termo de produção mecânica é dado por

$$S = u_*^3 \left(1 - \frac{z}{z_i}\right) \frac{\phi_m}{kz}, \quad (4.6)$$

onde $k = 0.41$ é a constante de Von Kármán e $\phi_m = (1 - \frac{15z}{L})^{-1/4}$ é uma função estabilidade para o momento (Moeng, 1993), $u_* = 0.59 \text{ m/s}$ é a velocidade de atrito, $w_* = 0.94 \text{ m/s}$ a velocidade convectiva, $z_i = 498 \text{ m}$ a altura da CLC, L o comprimento de Monin-Obukov; e o termo de produção convectivo dado por

$$B = \frac{w_*^3}{z_i} \left(1 - 1.2 \frac{z}{z_i}\right) \frac{u_*^3 z}{z_i z_i}, \quad (4.7)$$

de modo que a altura na superfície seja $\frac{z}{z_i} = 0.05$.

A soma destes termos mecânico S e convectivo B , igualado aos termos II e III da equação de balanço (3.1), parametrizados na equação (3.11), integrados em todos os números de onda, é feita de forma numérica e resulta em

$$C_1 = 0.00893 + 0.12014 \exp \frac{-z}{0.01528} + 0.01827 \exp \frac{-z}{0.01533}, \quad (4.8)$$

sendo $z = 0.05$ a escala de comprimento da altura.

A constante β da equação (4.4), que descreve o decaimento no tempo no termo de produção convectivo e mecânico, é determinada segundo sugerido por Sorbjan (1997) na forma

$$\beta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau}, \quad (4.9)$$

sendo $\tau = 3000 \text{ s}$ o tempo total do decaimento no qual o fluxo de calor na superfície torna-se nulo. Considera-se a variação da função cosseno somente no primeiro quadrante.

4.1.1 Aplicação do método de decomposição de Adomian

Parte-se da equação $F u(t) = g(t)$ onde F representa o operador diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial t}$ que envolve os termos lineares e não lineares.

O termo linear é decomposto em $L + R$, onde L é facilmente inversível e R é o restante da parte linear. O termo não linear será representado por N e sendo g o termo independente, pode-se escrever a equação $F u(t) = g(t)$ da seguinte forma

$$L u + R u + N u = g \quad (4.10)$$

e reescrevê-la como

$$L u = g - R u - N u . \quad (4.11)$$

Neste caso, da equação (4.5) temos que $u = E(k', t_*)$ e o termo linear será dado pela expressão $R u = \alpha'(k')^2 E(k', t_*)$. O termo independente $g = \alpha (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*}\right)$ e o termo não linear será $N u = \alpha'' (k')^2 E(k', t_*) \int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3}\right)^{1/2} dk'$.

Aplicando-se (4.11) em (4.5) obtêm-se

$$\begin{aligned} L E(k', t_*) &= \alpha (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*}\right) - \alpha' (k')^2 E(k', t_*) \\ &\quad - \alpha'' (k')^2 E(k', t_*) \int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3}\right)^{1/2} dk'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Devido a L ser um operador inversível pode-se aplicá-lo como operador inverso integral $L^{-1} = \int dt$ na equação (4.11) de modo que

$$L^{-1} L u = L^{-1} g - L^{-1} R u - L^{-1} N u . \quad (4.13)$$

Admitindo-se que a equação (4.12) corresponda a um problema com valor inicial, o operador integral L^{-1} poderá ter seus limites definidos a partir de um tempo inicial t_0 até um tempo final t . Como L é um operador diferenciável de primeira ordem, têm-se como solução para a equação (4.13) a expressão

$$u = u(0) + L^{-1} g - L^{-1} R u - L^{-1} N u , \quad (4.14)$$

com $u(0) = E(k', 0)$.

Substituindo-se a relação dada em (4.14) na equação (4.12) têm-se a equação de balanço de energia escrita na forma

$$\begin{aligned}
E(k', t_*) = & E(k', 0) + \alpha (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} L^{-1} \left[\cos \left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*} \right) \right] \\
& - \alpha' (k')^2 L^{-1} E(k', t_*) - \alpha'' (k')^2 L^{-1} \left[E(k', t_*) \int_{k'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

O termo não linear Nu pode ser equacionado através do somatório proposto por Adomian como segue

$$Nu = F[E(k', t_*)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n[E(k', t_*)], \tag{4.16}$$

sendo $F[E(k', t_*)] = \alpha'' (k')^2 E(k', t_*) \int_{k'}^{\infty} \left(\frac{E(k', t_*)}{(k')^3} \right)^{1/2} dk'$, onde A_n são os assim chamados polinômios de Adomian. Do mesmo modo pode-se decompor u em $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(k', t_*)$, que resulta na expressão

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + \dots = & E(k', 0) + L^{-1} g - R L^{-1}(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) \\
& - L^{-1}(A_0 + A_1 + A_2 + \dots),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

sendo

$$\begin{aligned}
u_0 = & E(k', 0) + L^{-1} g \\
u_1 = & -L^{-1}(Ru_0 + A_0) \\
u_2 = & -L^{-1}(Ru_1 + A_1) \\
& \vdots \\
u_n = & -L^{-1}(Ru_{n-1} + A_{n-1}),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Pode-se escrever a equação (4.14) na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(k', t_*) = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(k', t_*) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n[E(k', t_*)], \tag{4.19}$$

sendo

$$u_0 = E(k', 0) + \alpha (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{\frac{3}{2}} L^{-1} \cos \left(\frac{\beta z_i t_*}{w_*} \right). \tag{4.20}$$

O primeiro termo da série $E(k', 0)$ é identificado como um termo de fonte e resulta das condições iniciais para o caso da energia estacionária, e será expresso pela equação (2.24), através da substituição numérica de (2.25) e (2.26) na equação (2.24) (Kristensen et al., 1989; Degrazia et al., 2000).

Os polinômios A_n serão gerados dependendo unicamente de u_0 , na forma

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) \\ A_1 &= u_1 \frac{d}{du_0} F(u_0) \\ A_2 &= u_2 \frac{d}{du_0} F(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} F(u_0). \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.21}$$

Se a série converge, os n termos que são partes da soma $\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ ($\phi_1 = u_0$; $\phi_2 = u_0 + u_1$; \dots) poderão ser a solução aproximada desde que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u$ por definição. Isto é importante para enfatizar que os A_n podem ser calculados para não linearidades complicadas na forma $f(u, u', \dots)$. O erro em uma aproximação no quarto termo ϕ_4 já será menor que 0,001%. Dessa forma a solução numérica tende a ser muito mais correta fisicamente do que se fosse obtida por métodos de aproximação baseados em hipóteses ou simplificações. Como esses valores numéricos podem ser calculados computadorizadamente é fácil calcular os termos e ver sua convergência. Desse modo, as soluções são analíticas e verificáveis por substituição, sendo possível uma compreensão física em relação as suas equações.

Partindo-se da equação (4.20), realiza-se a integração $L^{-1} = \int_0^{t_*} dt_*$, com limites definidos a partir de um tempo inicial 0 até um tempo final $t_* \rightarrow \infty$.

Obtêm-se para u_0 a expressão

$$u_0 = E(k', 0) + \frac{\alpha w_*}{z_i \beta} (k')^{1/2} [E(k', 0)]^{3/2} \text{sen} \left(\frac{\beta}{w_*} z_i t_* \right) \tag{4.22}$$

Com u_0 definido em (4.22), pode-se calcular uma expressão para A_0 na forma

$$A_0 = \alpha'' (k')^2 u_0 \left[\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right]. \tag{4.23}$$

Sendo

$$u_1 = -L^{-1}(R u_0 + A_0), \tag{4.24}$$

e as definições vistas em (4.22) e (4.23), pode-se expressar (4.24) como segue

$$u_1 = - \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha' (k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right]. \tag{4.25}$$

Da mesma forma encontra-se para A_1 , de (4.21) e (4.22), a relação

$$A_1 = - \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \times \frac{d}{du_0} \left\{ \alpha'' (k')^2 u_0 \left[\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right] \right\}. \quad (4.26)$$

Para u_2 de (4.18), têm-se

$$u_2 = - \int_0^{t_*} dt_* \left\{ \alpha'(k')^2 \left[- \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \right] - \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \times \frac{d}{du_0} \left[\alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \right\}, \quad (4.27)$$

e sendo A_2 , dado em (4.21), a expressão

$$A_2 = - \int_0^{t_*} dt_* \left\{ \alpha'(k')^2 \left[- \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \right] - \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \times \frac{d}{du_0} \left[\alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \right\} \frac{d}{du_0} \left[\alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] + \frac{1}{2!} \left\{ - \int_0^{t_*} dt_* \left[\alpha'(k')^2 u_0 + \alpha'' (k')^2 u_0 \left(\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right) \right] \right\}^2 \times \frac{d^2}{du_0^2} \left\{ \alpha'' (k')^2 u_0 \left[\int_{\kappa'}^{\infty} \left(\frac{u_0}{(k')^3} \right)^{1/2} dk' \right] \right\}. \quad (4.28)$$

Nas equações acima u_0 é dado pela equação (4.22).

Utiliza-se um programa computacional para a solução das equações. Calcula-se as expressões para os termos u_n e A_n de (4.22), (4.23), (4.25), (4.26), (4.27) e (4.28); e substitui-se na equação da série de Adomian dada em (4.19). A solução da equação da função espectral da densidade de energia cinética turbulenta na CLC será dada através da solução numérica utilizando-se o método de decomposição de Adomian para solução de equações não-lineares. A partir dos termos u_3 e A_3 , cálculos numéricos mostram que os termos já estão muito próximos de zero, portanto a solução converge.

5 RESULTADOS

5.1 Resultados Numéricos e Análise

O decaimento da energia cinética em um escoamento turbulento homogêneo e não isotrópico pode ser analisado através da solução da expressão encontrada em (4.4). A solução, através do método de decomposição de Adomian que parte da equação (4.4), será reescrita pelo somatório da equação (4.19), sendo que a condição inicial $E(k', 0)$ é dada pela equação (2.25) (Kristensen et al., 1989) e os espectros unidimensionais retirados de Degrazia (2.26) (Degrazia et al., 2000). Para a construção dos gráficos foi considerado os cinco primeiros termos do somatório da equação (4.19) da série de Adomian.

A figura 5.1 representa uma comparação entre o espectro de energia 3D (tridimensional) calculado a partir da solução numérica da equação (4.4) pelo método de decomposição de Adomian, para a altura adimensional $\frac{z}{z_i} = 0.05$ próxima da superfície e um tempo adimensional t_* que varia em torno de $t = 3000 s$, e o decaimento da energia cinética na CLC analisado a partir de simulação numérica (LES) por Nieuwstadt e Brost, 1986. As duas linhas pontilhada (LES) e contínua (solução da equação (4.19), pelo método de Adomian) apresentam-se bem próximas, principalmente para $t_* < 1$ o que corresponde a $t = 540 s$. Observa-se que o modelo proposto na tese descreve de forma bastante aproximada ao proposto na simulação LES, determinando que a solução encontrada pelo método de decomposição de Adomian para o espectro reproduz de forma satisfatória os dados experimentais.

Na figura 5.2 a linha contínua representa a solução da equação (4.4) do espectro de energia 3D pelo método de decomposição de Adomian, onde foi levado em conta os termos de fonte convectiva e mecânica; a linha pontilhada descreve os dados de simulação numérica (LES) apresentados por Nieuwstadt e Brost, 1986; e a linha tracejada é obtida a partir do modelo proposto por Goulart et al., 2003; que leva em conta apenas o termo de produção de turbulência de origem convectiva. Em todos os casos a energia cinética foi calculada para uma altura adimensional $\frac{z}{z_i} = 0.05$ próxima a superfície variando com um tempo adimensional t_* . Vê-se pela comparação entre as linhas plotadas que o modelo que desconsidera a fonte mecânica decai mais rapidamente que o modelo de LES. Os dados de simulação numérica (LES) consideram alturas muito próximas da superfície, onde a fonte de turbulência mecânica predomina em relação a fonte convectiva, devido a convecção térmica. O modelo apresentado pela linha contínua, no qual leva-se em conta termos de fonte de turbulência de origem mecânica e convectiva, aproxima-se satisfatoriamente da simulação numérica (LES), descre-

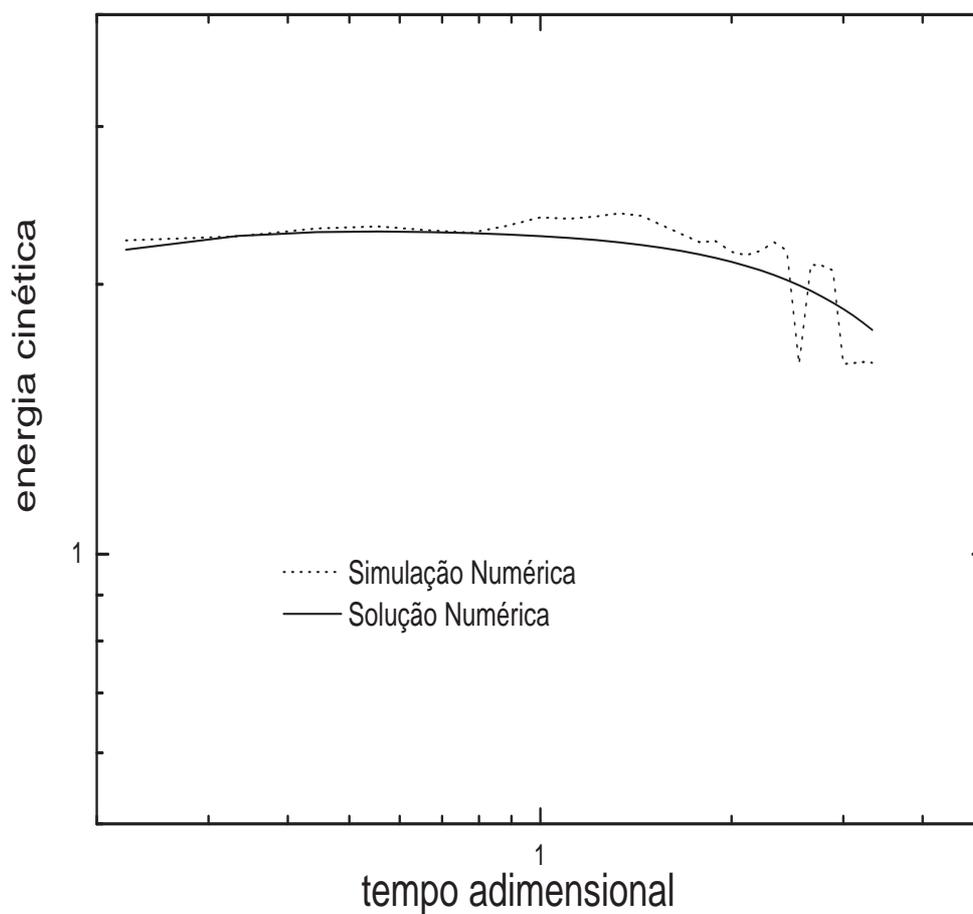


Figura 5.1: Espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado a partir de: simulação numérica da equação (4.4) onde o valor inicial é dado pelas equações (2.25) (Kristensen et al., 1989) e (2.26) (Degrazia et al., 2000) (linha contínua) e dados de LES (Nieuwstadt e Brost, 1986)(linha pontilhada).

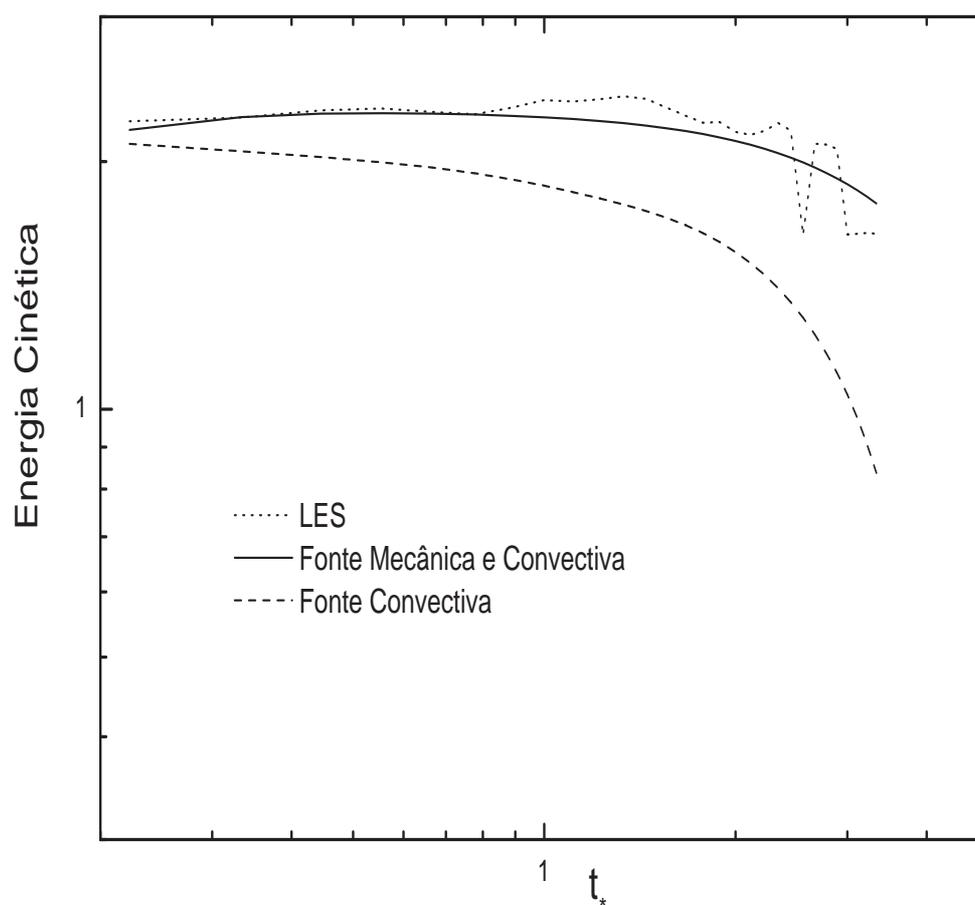


Figura 5.2: Espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado a partir de: simulação numérica da equação (4.4) (linha contínua) com valor inicial dado por (2.25) (Kristensen et al., 1989) e espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000), dados de LES (Nieuwstadt e Brost, 1986) (linha pontilhada) e espectro da energia cinética turbulenta não isotrópica calculado em Goulart et al. (2003) (linha tracejada).

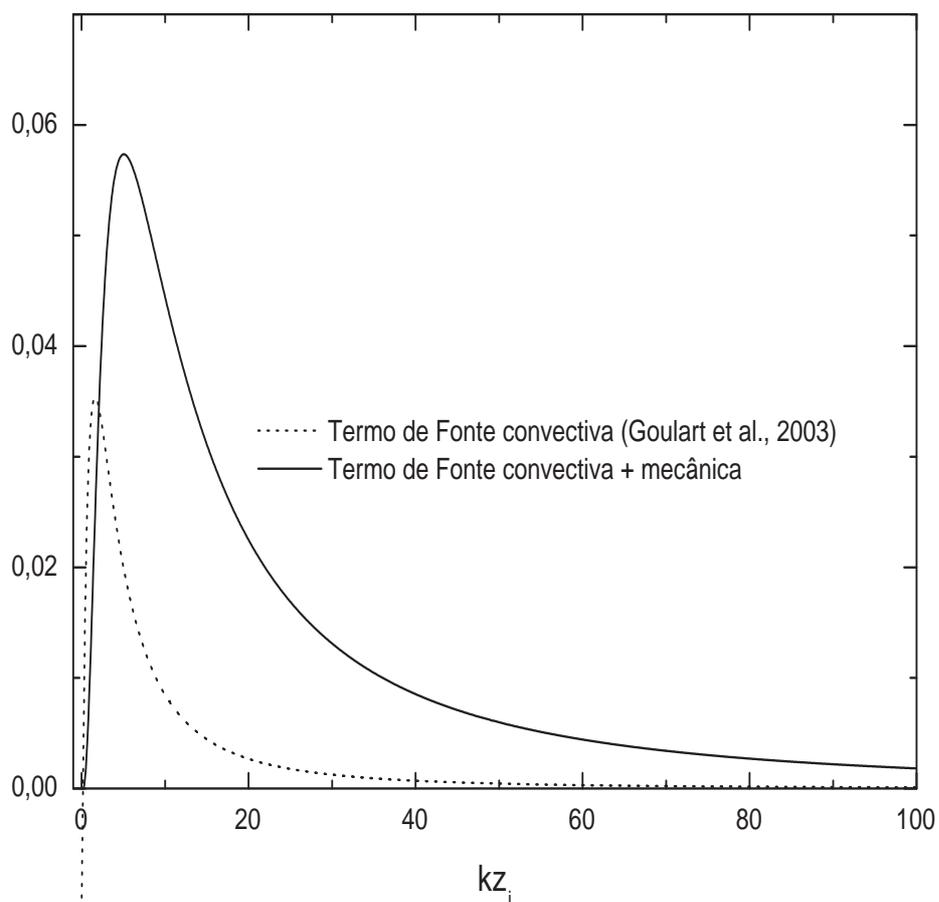


Figura 5.3: Cálculo numérico do termo de fonte mecânica e convectiva dado pela equação (3.11) (linha contínua) do balanço de energia de (3.1), para uma altura adimensional $\frac{z}{z_i} = 0.05$ próxima a superfície, e do termo de fonte convectiva proposto por Goulart et al. (2003) (linha pontilhada) .

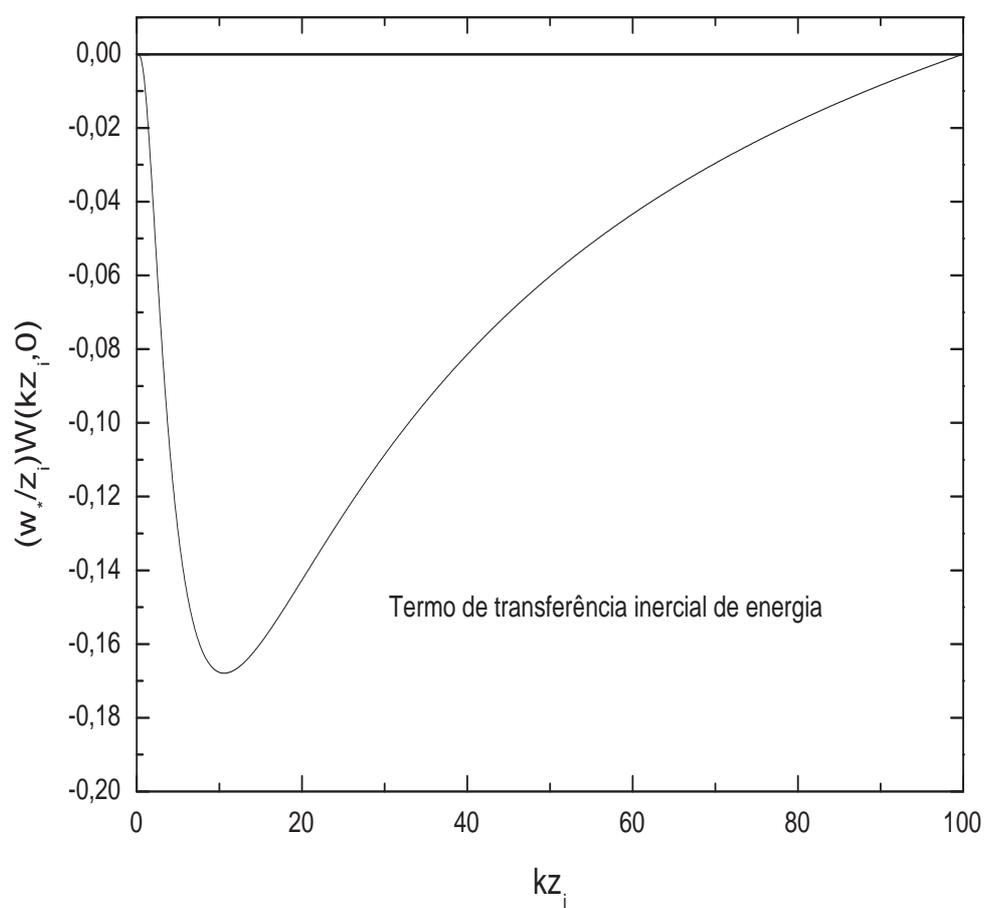


Figura 5.4: Termo de transferência de energia por efeito inercial (linha contínua) calculado a partir da equação (3.32), (2.25) (Kristensen et al., 1989) e os espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000).

vendo o comportamento esperado da energia cinética perto da superfície durante o decaimento. Isso ressalta a importância do termo mecânico na equação de balanço de energia da equação (3.1).

Encontra-se representado na figura 5.3 o cálculo numérico dos termos de fonte de turbulência convectiva e de turbulência mecânica dados pela equação (3.11) na linha contínua, parametrizados através da relação conhecida como número de Richardson fluxo, para uma altura adimensional próxima a superfície dada por $\frac{z}{z_i} = 0.05$. O espectro $E(k', 0)$, que representa a condição inicial de (3.11), é dado por (2.25) (Kristensen et al., 1989) e pelos espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000). As constantes utilizadas estão determinadas em (4.8) e (4.9), com $R_f = 0.25$. O termo representado na linha pontilhada, é um termo de fonte de turbulência convectiva proposto por Goulart et al. (2003), parametrizado como um produto de uma função que descreve o decréscimo temporal do fluxo de calor na superfície por uma função que depende somente das condições iniciais características da CLC antes do início do decaimento, sem a presença de um termo de produção mecânico. Observa-se que nos dois modelos as fontes são crescentes na região de baixos números de onda, embora o modelo que considera as fontes convectiva e mecânica é mais intenso em alturas muito próximas da superfície em contrapartida com o modelo que leva em conta unicamente o termo convectivo. No intervalo de número de onda representado na figura 5.3 os termos convectivo e mecânico atuam como um termo de produção, no sentido de alimentar a energia cinética do fluxo turbulento. A comparação entre os dois modelos, representada na figura 5.3, nos mostra que a proposta que leva em conta os dois termos de fonte de turbulência convectiva e mecânica melhor representa a produção de energia cinética turbulenta durante o decaimento na CLC.

O termo de transferência de energia por efeito inercial, dado pela equação (3.32), está plotado na figura 5.4, para uma altura adimensional $\frac{z}{z_i} = 0.05$ próxima da superfície. A energia $E(k', 0)$ será dada por (2.25) (Kristensen et al., 1989) e pelos espectros unidimensionais de Degrazia de (2.26) (Degrazia et al., 2000). A parametrização do termo de transferência de energia por efeito inercial baseia-se no modelo de Heisenberg (Heisenberg, 1948), que retira a energia dos grandes para os pequenos turbilhões. Os turbilhões com número de onda maiores absorvem energia dos turbilhões com números de onda menores. Observa-se na figura 5.4 que o mínimo para o termo de transferência ocorre para os pequenos números de onda, ou seja, que corresponde aos grandes turbilhões. O termo de transferência de energia cinética $W(k, t)$ da equação (3.1) transfere a energia dos pequenos para os grandes números de onda, atuando como um termo de dissipação de energia, no sentido de retirar energia do

escoamento turbulento. Isto está de acordo com o que é esperado na parametrização deste termo, avaliando o modelo proposto para o termo de transferência de energia por efeito inercial.

O espectro da energia cinética turbulenta obtido no cálculo numérico e plotado nas figuras 5.1 e 5.2, onde considera-se a condição inicial dada por Kristensen (Kristensen et al., 1989) e os espectros unidimensionais de Degrazia (Degrazia et al., 2000), calculado através do método de decomposição de Adomian, está de acordo com os resultados encontrados na literatura produzidos através de simulação numérica (LES) por Nieuwstadt e Brost (1986). Nas figuras o modelo não isotrópico descreve de forma bem aproximada o decaimento da energia na CLC, ressaltando a importância de se usar os termos de convecção térmica e mecânica no modelo.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentado um modelo de espectro de energia que descreve o decaimento da energia cinética turbulenta na camada limite convectiva (CLC). Obteve-se a equação para a densidade espectral a partir da equação de conservação de momento que reproduz o comportamento das componentes da velocidade em um escoamento turbulento. Considera-se a hipótese de que a equação de balanço possui termos de produção de energia turbulenta através de convecção térmica e de atrito mecânico, e termos de dissipação de energia turbulenta através de transferência inercial e viscosidade. Esta função espectral da energia turbulenta descreve o caráter não isotrópico da turbulência na superfície atmosférica. O acontecimento do decaimento da energia dura em torno do tempo de uma hora, no período de transição dia-noite antes que ocorra a inversão do fluxo de calor.

Para a derivação da equação espectral utiliza-se a parametrização dos termos de fonte de turbulência convectiva e de turbulência mecânica através de uma relação dada pelo número de Richardson fluxo, que é um parâmetro de estabilidade que fornece a razão entre os forçantes térmico e mecânico da turbulência. No termo de dissipação, no qual há transferência de energia cinética por efeito inercial, considera-se o Modelo de Heisenberg, que baseia-se em argumentos intuitivos, para assumir que os processos de transferência de energia entre turbilhões com pequeno número de onda para os de número de onda grande, é similar à conversão de energia mecânica em energia térmica, por efeito de uma viscosidade molecular. A equação dinâmica para o espectro de energia em um escoamento turbulento é dada para um espaço tridimensional.

Para se obter o espectro inicial tridimensional de um escoamento turbulento não isotrópico e estacionário utiliza-se o modelo de Kristensen et al. (1989) que nos permite expressar o espectro a partir das componentes unidimensionais das velocidades longitudinal, transversal e vertical. Os espectros unidimensionais de Kristensen não estão definidos para alturas próximas da superfície, considera-se então os espectros unidimensionais de Degrazia et al. (2000).

A partir do espectro de energia obtido determina-se uma expressão para a evolução temporal da energia cinética em um escoamento turbulento homogêneo e não isotrópico durante o decaimento da energia na CLC. Na solução da expressão encontrada aplica-se o método de decomposição de Adomian para equações não lineares, com o intuito de facilitar a solução, devido aos seus resultados analíticos convergirem rapidamente. Este método de aproximação

representa o termo não linear de forma mais precisa. Sendo a série obtida pelo método da decomposição infinita, faz-se uma aproximação de n termos após verificar sua convergência e dessa forma encontra-se uma solução numérica para a equação do espectro da energia cinética turbulenta. O processo de solução numérica torna-se mais ágil e a aproximação feita através do método não muda o problema físico original, descreve de forma satisfatória os fenômenos físicos da turbulência.

O espectro de energia encontrado e sua evolução temporal são confrontados com dados de simulação numérica (LES) (Nieuwstadt e Brost, 1986) existentes na literatura. É importante salientar que na literatura até o presente momento, os modelos propostos para o espectro de energia turbulenta levam em conta apenas o termo de produção de turbulência convectiva (Goulart et al., 2003). Torna-se claro então, que um modelo satisfatório deve levar em conta os termos de produção de turbulência convectiva e mecânica. Comparando-se os resultados encontrados com os de simulação numérica (LES) observa-se que o modelo proposto neste trabalho reproduz de forma satisfatória aos de simulação. Pode-se então concluir que o espectro de energia apresentado descreve na íntegra o processo de decaimento da energia cinética turbulenta na CLC.

A Cálculo da função espectro de energia cinética turbulenta

De acordo com as expressões (2.5) e (2.9) pode-se expressar a mudança de velocidade de um elemento de fluido, num ponto do espaço durante um intervalo de tempo dt , através das várias forças que atuam sobre este elemento, sendo elas gravitacional, Coriolis, pressão e viscosidade, na forma abaixo

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \delta_{i3} \left(\frac{\theta_{v_o}}{\theta_v} \right) g + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (\text{A.1})$$

Para obtermos a correlação entre as componentes da velocidade turbulenta de dois elementos de fluido localizados em dois pontos A e B separamos a pressão, a temperatura e a velocidade em um termo médio e outro termo turbulento na forma,

$$\begin{aligned} U_{iA} &= (\bar{U}_i + u_i)_A \\ U_{iB} &= (\bar{U}_i + u_i)_B \\ P &= \bar{P} + p \\ \Theta &= \bar{\Theta} + \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo as relações (A.2) na equação (A.1) e subtraindo do resultado a equação para o valor médio obtêm-se uma expressão para o ponto A dada por

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j - \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \right] = \delta_{i3} \left(\frac{\theta_{v_o}}{\theta_v} \right) g + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Big|_A. \quad (\text{A.3})$$

Uma expressão igual será dada para a componente u_{kB} no ponto B . Somando a equação (A.3) no ponto A multiplicada por u_{kB} , com a equação (A.3) no ponto B multiplicada por u_{iA} , obtêm-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{iA} u_{kB}}{\partial t} + u_{iA} u_{kB} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right)_A + u_{kB} u_{iA} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right)_B + \bar{U}_{jA} \frac{\partial u_{iA} u_{kB}}{\partial x_{jA}} + \bar{U}_{jB} \frac{\partial u_{kB} u_{iA}}{\partial x_{jB}} \\ & + \frac{\partial (u_{iA} u_{jA} u_{kB} - u_{kB} \bar{u}_{iA} \bar{u}_{jA})}{\partial x_{jA}} + \frac{\partial (u_{kB} u_{jB} u_{iA} - u_{iA} \bar{u}_{kB} \bar{u}_{jB})}{\partial x_{jB}} \\ & = \frac{g}{\theta_v} [\delta_{i3} \theta_{v_oA} u_{kB} + \delta_{j3} \theta_{v_oB} u_{iA}] + \nu \frac{\partial^2 u_{iA} u_{kB}}{\partial x_{jA} \partial x_{jA}} + \nu \frac{\partial^2 u_{kB} u_{iA}}{\partial x_{jB} \partial x_{jB}} \\ & \quad - \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial p_A u_{kB}}{\partial x_{iA}} + \frac{\partial p_B u_{iA}}{\partial x_{kB}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Nos interessa a relação do movimento turbulento do ponto B em relação ao ponto A , não diferenciando se a origem do sistema de coordenadas está em B ou em A . Usando o ponto A como origem do nosso sistema, podemos introduzir as variáveis que diferenciam os efeitos de distância e localização do ponto na forma

$$r_j = x_{jB} - x_{jA} \quad x_{jAB} = \frac{1}{2}(x_{jA} + x_{jB}). \quad (\text{A.5})$$

Tomando a média e definindo os tensores correlação

$$\begin{aligned} Q_{i,k}(\vec{r}, t) &= \overline{(u_i)_A (u_k)_B}, \\ P_{p,k}(\vec{r}, t) &= \overline{p_A (u_k)_B}, \\ P_{p,i}(\vec{r}, t) &= \overline{p_B (u_i)_A}, \\ T_{i,B}(\vec{r}, t) &= \overline{(u_i)_A \theta_B}, \\ T_{k,A}(\vec{r}, t) &= \overline{(u_k)_B \theta_A}, \\ S_{i,kj}(\vec{r}, t) &= \overline{(u_i)_A (u_k)_B (u_j)_B}, \\ S_{ij,k}(\vec{r}, t) &= \overline{(u_k)_B (u_i)_A (u_j)_A}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

pode-se escrever a equação (A.4) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} + Q_{j,k} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)_A + Q_{i,k} \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} \right)_B + \frac{1}{2} [\overline{U_{jA}} + \overline{U_{jB}}] \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial x_{jAB}} + [\overline{U_{jB}} - \overline{U_{jA}}] \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial r_j} = \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial [S_{i,kj} + S_{ij,k}]}{\partial x_{jAB}} - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ij,k}]}{\partial r_j} + \frac{g}{\theta_v} [T_{A,3} + T_{3,B}] + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial x_{jAB} \partial x_{jAB}} \\ + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial r_j \partial r_j} - \frac{1}{2\bar{\rho}} \left[\frac{\partial P_{p,k}}{\partial x_{iAB}} + \frac{\partial P_{i,p}}{\partial x_{kAB}} \right] + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial P_{p,k}}{\partial r_i} + \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A relação (A.7) representa a equação dinâmica completa de um escoamento turbulento não homogêneo e não isotrópico, para a correlação das velocidades entre dois elementos do fluido localizados em pontos distintos. Em um escoamento turbulento homogêneo existe invariância sob operações de translação, as coordenadas do ponto permanecem constantes, dessa forma todas as derivadas relacionadas a x_{jAB} são nulas e a equação (A.7) assumirá a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} + Q_{j,k} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)_A + Q_{i,k} \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} \right)_B + [\overline{U_{jB}} - \overline{U_{jA}}] \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial r_j} = \\ - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ij,k}]}{\partial r_j} + \frac{g}{\theta_v} [T_{A,3} + T_{3,B}] + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial r_j \partial r_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial P_{p,k}}{\partial r_i} + \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_k} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Consideremos um dos eixos coordenados está na vertical e os outros dois eixos estão na horizontal e sendo que a velocidade média do escoamento turbulento está ao longo da direção horizontal, temos

$$\begin{aligned}\overline{U}_1 &= f(x_2), \\ \overline{U}_2 &= \overline{U}_3 = 0 \\ \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} &= cte.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Obtemos para a equação do escoamento homogêneo (A.8), partindo da relação (A.9), a equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} + \left(\delta_{i_1} Q_{2,k} + \delta_{k_1} Q_{i,2} + r_2 \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial r_1} \right) \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = \\ - \frac{\partial [S_{i,kj} - S_{ij,k}]}{\partial r_j} + \frac{g}{\theta_v} [T_{A,3} + T_{3,B}] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_{p,k}}{\partial r_i} + \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_k} \right] + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial r_j \partial r_j}.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Ainda levando em conta a invariância frente a translação e a simetria do tensor de correlação tripla da velocidade com respeito aos seus índices, para um mesmo ponto no escoamento turbulento, temos

$$S_{ij,k} = -S_{k,ij} \quad \text{ou} \quad S_{i,kj} = -S_{i,jk} \quad \text{e também} \quad P_{i,p} = -P_{p,i},\tag{A.11}$$

pode-se definir

$$\begin{aligned}S_{i,k} &= - \frac{\partial (S_{i,kj} - S_{ij,k})}{\partial r_j} = \frac{\partial (S_{kj,i} + S_{ij,k})}{\partial r_j} \\ P_{i,k} &= \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_k} - \frac{\partial P_{p,k}}{\partial r_i} = \frac{\partial P_{i,p}}{\partial r_k} + \frac{\partial P_{k,p}}{\partial r_i}\end{aligned}\tag{A.12}$$

Partindo das considerações feitas em (A.12) e da condição de incompressibilidade do fluido $P_{i,k} = 0$, obtêm-se para (A.10) a seguinte expressão

$$\frac{\partial Q_{i,k}}{\partial t} + \left(\delta_{i_1} Q_{2,k} + \delta_{k_1} Q_{i,2} + r_2 \frac{\partial Q_{i,k}}{\partial r_1} \right) \frac{d\overline{U}_1}{dx_2} = S_{i,k} + \frac{g}{\theta_v} [T_{A,3} + T_{3,B}] + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{i,k}}{\partial r_j \partial r_j}.\tag{A.13}$$

A equação (A.13) descreve a variação com o tempo da correlação entre as componentes turbulentas da velocidade de dois pontos localizados em um escoamento turbulento homogêneo.

Através da transformada de Fourier da equação (A.13) abaixo

$$\begin{aligned}
H_{i,\theta}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint T_{i,\theta}(\vec{r}, t) \exp - (i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r, \\
\phi_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint Q_{i,i}(\vec{r}, t) \exp - (i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r, \\
M_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint \epsilon_{i,i}(\vec{r}, t) \exp - (i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r, \\
W_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint S_{i,i}(\vec{r}, t) \exp - (i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r,
\end{aligned} \tag{A.14}$$

onde foi feita a contração dos índices ($i=k$) e a definição

$$\epsilon_{i,i}(\vec{k}, t) = \left(2\phi_{1,2}(\vec{k}, t) + k_2 \frac{\partial \phi_{i,i}(\vec{k}, t)}{\partial k_2} \right). \tag{A.15}$$

obtêm-se a equação dinâmica para o espectro de energia na forma

$$\frac{\partial \phi_{i,i}(\vec{k}, t)}{\partial t} + M_{i,i}(\vec{k}, t) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = W_{i,i}(\vec{k}, t) + \frac{g}{\theta_v} H_{i,i}(\vec{k}, t) - 2\nu k^2 \phi_{i,i}(\vec{k}, t), \tag{A.16}$$

Integra-se os termos da equação (A.14) sobre uma casca esférica de raio k no espaço de Fourier onde $k = |\vec{k}|$.

Pode-se reescrever a equação (A.16) na forma espectral usando a relação $E_{i,i}(k, t) = \frac{E(k, t)}{2\pi k^2}$, com a expressão

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -M(k, t) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} + W(k, t) + \frac{g}{\theta_v} H(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t), \tag{A.17}$$

sendo $E(k, t)$ a função espectro de energia, $M(k, t)$ é a produção de energia por efeito mecânico, $W(k, t)$ descreve a transferência de energia cinética entre os turbilhões de diferentes números de onda por efeito inercial, $H(k, t)$ é um termo de produção ou perda de energia por efeito térmico e o último termo representa a dissipação de energia por viscosidade molecular.

B Determinação das funções reais $A_l(k)$

Para determinar uma expressão para $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ considera-se primeiramente a relação dada pela equação (2.23).

Considerando a equação (2.20), obtêm-se

$$\Phi_{11}(\vec{k}) = A_1(k) \left\{ \frac{k^2 - k_1^2}{k^2} \right\}^2 + A_2(k) \left\{ \frac{k_2^2 k_1^2}{k^4} \right\} + A_3(k) \left\{ \frac{k_3^2 k_1^2}{k^4} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Usando coordenadas polares κ e θ , definidas por $k_2 = \kappa \cos(\theta)$ e $k_3 = \kappa \sin(\theta)$, obtêm-se

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(k) = A_1(k) \left\{ \frac{\kappa^4}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \right\} + A_2(k) \left\{ \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \right\} \cos^2(\theta) \\ + A_3(k) \left\{ \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \right\} \sin^2(\theta). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a equação (B.2) na equação (2.23) e realizando a integração sobre θ obtemos para a componente longitudinal unidimensional do espectro $F_u(k) = F_{11}^1(k)$ a relação

$$F_u(k) = 2\pi \int_k^\infty (K^2 - k^2) \left\{ (K^2 - k^2)A_1(K) + (1/2)k^2(A_2(K) + A_3(K)) \right\} \frac{dK}{K^3}, \quad (\text{B.3})$$

sendo que as componentes transversal $F_v(k) = F_{22}^1(k)$ e vertical $F_w(k) = F_{33}^1(k)$ são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} F_v(k) = \pi \int_k^\infty \left\{ k^2(K^2 - k^2)A_1(K) + (1/4)(3K^4 + 2K^2k^2 + 3k^4)A_2(K) \right. \\ \left. + (1/4)(K^2 - k^2)^2 A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\begin{aligned} F_w(k) = \pi \int_k^\infty \left\{ k^2(K^2 - k^2)A_1(K) + (1/4)(K^2 - k^2)^2 A_2(K) \right. \\ \left. + (1/4)(3K^4 + 2K^2k^2 + 3k^4)A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3}. \end{aligned}$$

Para uma turbulência isotrópica pode-se inferir duas relações entre as componentes unidimensionais e a derivada primeira da componente longitudinal do espectro (Panofsky e Dutton, 1984) como

$$F_v(k) = F_w(k) \quad \text{e} \quad 2F_v(k) = F_u(k) - k \frac{dF_u(k)}{dk}. \quad (\text{B.5})$$

Usando a relação dada em (B.5) define-se os seguintes resíduos para o caso não isotrópico

$$H(k) = F_v(k) - F_w(k) \quad \text{e} \quad J(k) = F_u(k) - k \frac{dF_u(k)}{dk} - (F_v(k) + F_w(k)), \quad (\text{B.6})$$

que em princípio pode ser avaliado a partir de dados experimentais. Realizando a substituição das equações (B.3) e (B.4) nas expressões de (B.6) obtêm-se

$$H(k) = \pi/2 \int_k^\infty \{(K^2 + k^2)^2 (A_2(K) - A_3(K))\} \frac{dK}{K^3}, \quad (\text{B.7})$$

e

$$J(k) = 2\pi \int_k^\infty \left\{ (K^2 - k^2)(K^2 + 2k^2) \left[A_1(K) - \frac{(A_2(K) - A_3(K))}{2} \right] \right\} \frac{dK}{K^3}. \quad (\text{B.8})$$

Introduzindo novas variáveis como

$$\begin{aligned} s &= k^{-2}, \\ t &= K^{-2}, \\ f(s) &= H(s^{-\frac{1}{2}})s^2, \\ g(s) &= J(s^{-\frac{1}{2}})s^2, \\ \alpha(s) &= \pi \left[A_2(t^{-\frac{1}{2}}) - A_3(t^{-\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\beta(s) = \pi \left[A_1(t^{-\frac{1}{2}}) - \frac{A_2(t^{-\frac{1}{2}}) + A_3(t^{-\frac{1}{2}})}{2} \right].$$

As equações (B.7) e (B.8) podem ser reformuladas como

$$f(s) = \frac{1}{4} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2} \quad (\text{B.10})$$

e

$$g(s) = \int_0^s (s-t)(s+2t)\beta(t) \frac{dt}{t^2}.$$

Uma diferenciação temporal tripla das equações (B.10) induz as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$f'''(s) = \alpha''(s) + \frac{1}{s}\alpha'(s) - \frac{1}{2s^2}\alpha(s)$$

e

$$g'''(s) = \frac{3}{s}\beta'(s) - \frac{1}{s^2}\beta(s) .$$

A solução das equações de (B.11) (Kristensen, 1989) será

$$\alpha(s) = \frac{s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt$$

e

$$\beta(s) = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt .$$

A partir do sistema formado pelas equações de (B.9) pode-se determinar A_1 , A_2 e A_3 . Através da diferenciação da equação (B.3) obtêm-se uma terceira equação

$$A_2(k) + A_3(k) = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} - \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{k^2}} \beta(s) ds ,$$

sendo $F_u(k) = F_L(k)$ e tornando linear o sistema de equações. Substituindo $\beta(s)$ de (B.12) em (B.13) e integrando por partes têm-se

$$3A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} + \frac{s^{-1}}{\pi} \int_0^s t^2 g'''(t) dt .$$

Pode-se resolver (B.13) e (B.9) em combinação com (B.12) para as funções $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$, que resulta em

$$A_1(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} + \frac{s^{-1}}{2\pi} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{6\pi} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt ,$$

$$A_2(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} + \frac{s^{1/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt - \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt$$

$$+ \frac{s^{-1}}{2\pi} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{2\pi} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt ,$$

e

$$\begin{aligned}
A_3(k) = & \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} - \frac{s^{1/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^s t^{1-1/\sqrt{2}} f'''(t) dt + \frac{s^{-1/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^s t^{1+1/\sqrt{2}} f'''(t) dt \\
& + \frac{s^{-1}}{2\pi} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{1/3}}{2\pi} \int_0^s t^{2/3} g'''(t) dt .
\end{aligned} \tag{B.17}$$

No limite para $k \rightarrow \infty$ as três funções $A_1(k)$, $A_2(k)$ e $A_3(k)$ tornam-se idênticas demonstrando isotropia local. Substituindo-se (B.15), (B.15) e (B.15) na equação (2.22) obtêm-se

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_L(k)}{dk} + 2k^4 \int_0^{1/k^2} s^2 g'''(s) ds - \frac{14}{9} k^{4/3} \int_0^{1/k^2} s^{2/3} g'''(s) ds. \tag{B.18}$$

Determinando uma expressão fechada para o espectro de energia em termos da segunda derivada do espectro longitudinal e uma função que relata a anisotropia da turbulência.

Referências Bibliográficas

- [1] ADOMIAN, G.; *A review of the decomposition method in applied mathematics* , Journal of mathematical analysis and applications, Elsevier, San Diego, CA, 1988, vol. 135, no2, pp. 501-544.
- [2] ADOMIAN, G.; *Solving Frontier problems of physics: the decomposition method* Kluwer; 1994.
- [3] ARYA, S. P.; *Introduction to Micrometeorology*, second edition, San Diego, USA, ACADEMIC PRESS, v. 79, 2001.
- [4] BASAK, K. C., RAY, P.C., BERA, R.K.; *Solution of non-linear Klein Gordon equation with a quadratic non - linear term by Adomian decomposition method* Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, v. 14, pp. 718-723
- [5] BERKOWICZ, R.; PRAHM, L. P.; *Generalization of K Theory for Turbulent Diffusion. Part I: Spectral Turbulent Diffusivity Concept*, Journal of Applied Meteorology, Volume 18, Issue 3 (March 1979), pp. 266-272
- [6] BERKOWICZ, R.; PRAHM, L. P.; *Generalization of K Theory for Turbulent Diffusion. Part II: Spectral Diffusivity Model for Plume Dispersion*, Journal of Applied Meteorology, Volume 18, Issue 3, 1979, pp. 273-282
- [7] BERKOWICZ, R.; PRAHM, L. P.; *Spectral representation of the vertical structure of turbulence in the convective boundary layer*, The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Volume 110, Issue 463, 1984, pp. 35-52
- [8] BUSINGER, J. A.; WYNGAARD, J. C.; IZUMI, Y. e BRADLEY, E. F.; *Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer*, Journal of Applied Meteorology, Volume 28, 1971, pp. 181-189
- [9] CHAMPAGNE, F.H.; FRIEHE, C.A.; LARUE, J.C. and WYNAGAARD, J.C.; *Flux Measurements, Flux Estimation Techniques, and Fine-Scale Turbulence Measurements in the Unstable Surface Layer Over Land* , Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 34, Issue 3, 1977, pp. 515-530 .
- [10] CHEN, W.; LU, Z.; *An algorithm for Adomian decomposition method* Applied Mathematics and Computation, v. 159, p. 221-235, 2004.

- [11] CORRSIN, S.; *Estimates of the Relations between Eulerian and Lagrangian Scales in Large Reynolds Number Turbulence*, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 20, 1963, pp. 115-119
- [12] DEGRAZIA, G. A.; NUNES, A. B.; SATYAMURTY, P.; ACEVEDO, O. C.; CAMPOS VELHO, H. F.; RIZZA, U.; CARVALHO, J. C.; *Employing Heisenberg's turbulent spectral transfer theory to parameterize sub-filter scales in LES models*, Atmospheric Environment Volume 41, Issue 33, October 2007, Pages 7059-7068.
- [13] DEGRAZIA, G. A.; ANFOSSIB, D.; CARVALHO, J. C.; MANGIA, C.; TIRABASSI, T. and CAMPOS VELHO, H. F.; *Turbulence parameterisation for PBL dispersion models in all stability conditions* Atmospheric Environment Volume 34, Issue 21, 2000, Pages 3575-3583.
- [14] DONALDSON, C.; *Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants*, Workshop on Micrometeorology, Edited by D. A. Haugen, Boston, 1973, pp. 313-392 .
- [15] GOULART, A. G. O.; DEGRAZIA, G. A.; *Turbulência e Dispersão de Contaminantes na Camada Limite Planetária* In: Sergio Viçosa Möller; Jorge Hugo Silvestrini. (Org.). Turbulência, 1ª ed, Porto Alegre, ABCM, 2004, v. 4, p. 73-107.
- [16] GOULART, A. G. O.; *Desenvolvimento de um Modelo Espectral para o Estudo do De-caimento da Turbulência na Camada Limite Convectiva* Santa Maria, Editora da UFSM, 2001 (Tese de Doutorado).
- [17] HEISENBERG, W.; *Zur Statistischen Theorie der Turbulenz*, Zeitschrift fur Physik 124, 1948, p. 628-657.
- [18] HINZE, J. O.; *Turbulence*, third edition, New York, USA, MCGRAW-HILL, 1975, 790 p.
- [19] HOLTON, J. R.; *An Introduction to Dynamic Meteorology*, American Journal of Physics, Volume 41, Issue 5, 1973 , pp. 752-754
- [20] HOLTON, J. R.; *An Introduction to Dynamic Meteorology*, third edition, v. 48, San Diego, USA, ACADEMIC PRESS, 1992.
- [21] KRISTENSEN, L.; LENSCHOW, D. H.; KIRKEGAARD, P. e COURTNEY, M.; *The spectral velocity tensor for homogeneous boundary-layer turbulence*, Journal Boundary-Layer Meteorology, V. 47, Numbers 1-4 / April, 1989, p. 149-193.

- [22] KUNDU, P. K.; *Fluid Mechanics*, Academic Press, INC, 1990, 638 p.
- [23] MAHRT, A.; SUN, J.; BLUMEN, W.; DELANY, T. e ONCLEY, S.; *Nocturnal Boundary-layer Regimes*, Journal Boundary-Layer Meteorology, V. 88, April, 1998, p. 255-278.
- [24] MOENG, C.; SULLIVAN, P. P.; *A Comparison of Shear- and Buoyancy-Driven Planetary Boundary Layer Flows*, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 51, 1994, pp. 999-1022
- [25] MUSCHINSKI, A.; ROTH, R.; *A local interpretation of Heisenberg's transfer theory* , Contributions to atmospheric physics, 1993, vol. 66, no 4, pp. 335-346
- [26] NIEUWSTADT, F. T. M.; BROST R. A.; *The Decay of Convective Turbulence* , Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 43, 1986, pp. 532-546
- [27] PALANDI, J.; *Modelo Espectral de Heisenberg aplicado ao decaimento da turbulência na camada residual*, Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Santa Maria, 2005
- [28] PANOFSKY, H.A.; DUTTON, J. A.; *Atmospheric Turbulence*, Wiley, New York, 1984, pp. 395
- [29] SAHA RAY, S.; *An application of the modified decomposition method for the solution of the coupled Klein Gordon Schrödinger equation* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 13, Issue 7, September 2008, pp. 1311-1317 .
- [30] SHAHER, M.; *An algorithm for solving the fractional convectiondiffusion equation with nonlinear source term* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 12, Issue 7, September 2007, pp. 1283-1290
- [31] SHAMES, I. H. Tradução: Edgard Blücher, Brasília. *Mecânica dos fluidos: análise de escoamentos*, v. 2, São Paulo, Brasil, EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA, 1973, 533 p.
- [32] SORBJAN, Z.; *Structure of the atmospheric boundary layer* , Prentice Hall. New Jersey. US. 1989. xvi, 315 p.
- [33] STULL, R. B.; *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Netherlands, Canada, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1988, 670 p.

- [34] TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L.; *A First Course in Turbulence*, MIT PRESS, p. 58-287, 1972

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)