

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

TESE DE DOUTORADO

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO SOBRE A OBTENÇÃO DO
MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
UTILIZANDO MODELAGEM MICROMECAÂNICA**

Doutorando:

Anderson Henrique Barbosa

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Manoel Pereira Carneiro

Recife – PE, Outubro de 2010.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO SOBRE A OBTENÇÃO DO
MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO
UTILIZANDO MODELAGEM MICROMECAÂNICA**

ANDERSON HENRIQUE BARBOSA

ORIENTADOR: Prof. Dr. Arnaldo Manoel Pereira Carneiro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Recife – PE, Outubro de 2010.

B238c

Barbosa, Anderson Henrique.

Contribuição ao estudo sobre a obtenção do módulo de elasticidade do concreto utilizando modelagem micromecânica / Anderson Henrique Barbosa. - Recife: O Autor, 2010.
203 folhas, il : figs., tabs.

Tese(Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2010.

Orientador: Prof^o. Dr. Arnaldo Manoel Pereira Carneiro.
Inclui Bibliografia, Apêndices e Anexos.

1. Engenharia Civil. 2.Módulo de Elasticidade. 3.Concreto. 4.Argamassa. 5.Micromecânica. I.Carneiro, Arnaldo Manoel Pereira (Orientador). II.Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2010-262

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO SOBRE A OBTENÇÃO DO MÓDULO DE
ELASTICIDADE DO CONCRETO UTILIZANDO MODELAGEM
MICROMECAÂNICA**

Anderson Henrique Barbosa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO COMO
PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL



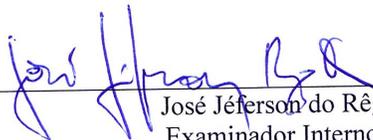
Arnaldo Manoel Pereira Carneiro
Orientador, D. Sc.



Túlio Nogueira Bttencourt
Examinador Externo, Ph. D.



Severino Pereira Cavalcanti Marques
Examinador Externo, D. Sc.



José Jeferson do Rêgo Silva
Examinador Interno, Ph. D.



Bernardo Horowitz
Examinador Interno, Ph. D.

Recife, PE
Outubro de 2010

Dedico este trabalho a todos que deram estímulo para ele ser continuado.

*“O passado é lição para refletir, não para repetir.”
(Mário de Andrade)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS, por dar certeza nos momentos incertos, dar paciência nos momentos de turbulência, nos ajudando a tomar o melhor caminho mediante todos os obstáculos que surgem.

À família, que apesar de todas as dificuldades esteve sempre ao lado, segurando a barra e dando alento e força para seguir em frente.

À todos os amigos, os quais não vou citar nomes para não ser injusto e esquecer de ninguém.

Ao professor Severino Marques, pela preciosa colaboração e por se mostrar sempre solícito para ajudar nas diversas fases deste trabalho.

Aos laboratórios do NPT e do programa de Pós-graduação em ciências dos materiais da UNIVASF, nas pessoas de seus coordenadores e técnicos, pela valiosa contribuição no desenvolvimento da parte experimental deste trabalho.

Ao CNPq, pela concessão de bolsa para o desenvolvimento deste trabalho.

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1.1: Seção ilustrativa da estrutura de um concreto no estado endurecido.... 03

Capítulo 2

Figura 2.1: Comportamento dos constituintes do concreto quando ensaiados à compressão (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 11

Figura 2.2: Descrição do processo de fissuração da zona de transição (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 18

Capítulo 3

Figura 3.1: Extensômetros mecânicos com mostrador analógico e digital 25

Figura 3.2: Corpo-de-prova instrumentado com extensômetros mecânicos 26

Figura 3.3: Dispositivo LVDT 27

Figura 3.4: Extensômetro elétrico de fio 28

Figura 3.5: Extensômetros elétricos de colagem e esquema de acoplamento no corpo-de-prova 29

Figura 3.6: Esquema do ensaio pelo método do ultra-som 30

Figura 3.7 : Modelo em paralelo (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 41

Figura 3.8: Modelo em série (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 42

Figura 3.9: Modelo de HIRSCH (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 42

Figura 3.10: Modelo de HANSEN (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 43

Figura 3.11: Modelo de COUNTO (MEHTA & MONTEIRO, 1994) 43

Capítulo 4

Figura 4.1: Elemento de volume representativo (EVR) do material compósito 47

Figura 4.2: Domínios esféricos para o modelo de duas fases 57

Figura 4.3: Modelo de três fases 59

Figura 4.4: EVR e malha de elementos finitos obtidas a partir da seção do espécime de areia-asfalto (CAVALCANTE NETO et al., 2003) 66

Figura 4.5: Corpos-de-prova dispostos para a realização do ensaio de módulo de elasticidade 68

Capítulo 5

Figura 5.1: Ciclos de carregamento para a determinação do módulo de elasticidade (NBR 8522:2008) 77

Figura 5.2: Corpo-de-prova instrumentado com extensômetros elétricos 78

Figura 5.3: Estratégia para análise inversa para o modelo de três fases com inclusão esférica 82

Figura 5.4: Esquema de homogeneização para a determinação da matriz efetiva .. 84

Capítulo 6

Figura 6.1: Curvas granulométricas das amostras de areia 90

Figura 6.2: Curvas granulométricas das amostras de brita B0 91

Figura 6.3: Tamanho dos grãos da brita B0 91

Figura 6.4: Curvas granulométricas das amostras de brita B1 92

Figura 6.5: Tamanho dos grãos da brita B1 93

Figura 6.6: Imagem de microscópio de uma amostra de concreto (DIAMOND, 2001)	101
Figura 6.7: Imagem do contorno mínimo da zona de transição de uma amostra de concreto (DIAMOND & HUANG, 2001)	102
Figura 6.8: Amostras de concreto para a realização do ensaio de microscopia	103
Figura 6.9: Microscópio de varredura eletrônica de bancada	104
Figura 6.10: Equipamento para ajuste de altura e colagem	104
Figura 6.11: Amostra acoplada no microscópio para ensaio	105
Figura 6.12: Imagens do MEV para o concreto de 25 MPa aos 17 dias (amostra 1)	106
Figura 6.13: Imagens do MEV para o concreto de 25 MPa aos 17 dias (amostra 2)	107
Figura 6.14: Imagens do MEV para o concreto de 25 MPa aos 7 dias	108
Figura 6.15: Imagens do MEV para o concreto de 35 MPa aos 7 dias	109
Figura 6.16: Imagens do MEV para o concreto de 45 MPa aos 17 dias	110
Figura 6.17: Imagem do MEV para o concreto de 25 MPa aos 28 dias	111
Figura 6.18: Imagens do MEV para o concreto de 35 MPa aos 28 dias	111
Figura 6.19: Imagem do MEV para o concreto de 45 MPa aos 28 dias	112

Capítulo 7

Figura 7.1: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,326$	117
Figura 7.2: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para o traço $f_{pc} = 0,326$	117
Figura 7.3: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,368$	118
Figura 7.4: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,368$	119
Figura 7.5: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,487$	119
Figura 7.6: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,487$	120
Figura 7.7: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,326$ com expressões presentes em normas	122
Figura 7.8: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,326$ com expressões propostas por pesquisadores	122
Figura 7.9: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,368$ com expressões presentes em normas	123
Figura 7.10: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,368$ com expressões propostas por pesquisadores	124
Figura 7.11: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,487$ com expressões presentes em normas	124
Figura 7.12: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,487$ com expressões propostas por pesquisadores	125

Figura 7.13: Relação entre o módulo de elasticidade e resistência à compressão do concreto para os traços estudados	127
Figura 7.14: Relação entre o módulo de elasticidade e resistência à compressão da argamassa para os traços estudados	127
Figura 7.15: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto	130
Figura 7.16: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade da argamassa	130
Figura 7.17: Estudo comparativo da relação entre os módulos de elasticidade da argamassa e do concreto	131
Figura 7.18: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,326$...	135
Figura 7.19: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,368$...	135
Figura 7.20: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,487$...	136
Figura 7.21: Estudo comparativo da aplicação dos modelos sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,326$)	137
Figura 7.22: Estudo comparativo da aplicação dos modelos sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,368$)	138
Figura 7.23: Estudo comparativo da aplicação dos modelos sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,487$)	138
Figura 7.24: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,326$ em função de sua fração volumétrica e o tempo	139
Figura 7.25: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,368$ em função de sua fração volumétrica e do tempo	140
Figura 7.26: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,487$ em função de sua fração volumétrica e do tempo	140
Figura 7.27: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,326$	141
Figura 7.28: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,368$	142
Figura 7.29: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,487$	142
Figura 7.30: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,326$)	144
Figura 7.31: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,368$)	145
Figura 7.32: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,487$)	145
Figura 7.33: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,326$)	146
Figura 7.34: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,368$)	147
Figura 7.35: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,487$)	147

LISTA DE TABELAS

Capítulo 2

Tabela 2.1: Propriedades elásticas de agregados de acordo com a sua origem (FALCÃO BAUER, 2000)	15
Tabela 2.2: Módulo de elasticidade de agregados (PITANGUEIRA, 1998)	15

Capítulo 3

Tabela 3.1: Valores do coeficiente a_1	36
Tabela 3.2: Valores do coeficiente a_2	36

Capítulo 4

Tabela 4.1: Propriedades elásticas dos constituintes (CAVALCANTE NETO et al., 2003)	66
Tabela 4.2: Resultados obtidos com a aplicação dos modelos de micromecânica (exemplo 1)	67
Tabela 4.3: Dados da dosagem (exemplo 2)	67
Tabela 4.4: Dados do agregado (exemplo 2)	68
Tabela 4.5: Valores das propriedades elásticas do concreto e argamassa	68
Tabela 4.6: Dados numéricos e experimentais (exemplo 2)	69
Tabela 4.7: Limites de Hashin – Shtrikman para o caso experimental	69
Tabela 4.8: Propriedades da zona de transição (exemplo 2)	69
Tabela 4.9: Propriedades elásticas do concreto com a consideração de ITZ	70

Capítulo 5

Tabela 5.1: Quadro resumo da quantidade de corpos-de-prova ensaiados	79
--	----

Capítulo 6

Tabela 6.1: Dados dos ensaios de massa específica da areia	88
Tabela 6.2: Dados dos ensaios de massa específica da brita B0	88
Tabela 6.3: Dados dos ensaios de massa específica da brita B1	89
Tabela 6.4: Resultado da granulometria da areia	89
Tabela 6.5: Resultado da granulometria da brita 0	90
Tabela 6.6: Resultado da granulometria da brita B1	92
Tabela 6.7 Composição dos traços em massa dosados na pesquisa	93
Tabela 6.8: Valores médios do módulo de elasticidade e resistência à compressão dos concretos obtidos nos ensaios	95
Tabela 6.9: Valores médios do módulo de elasticidade e resistência à compressão das argamassas obtidos nos ensaios	96
Tabela 6.10: Análise de variância para o módulo de elasticidade do concreto	98
Tabela 6.11: Análise de variância para a resistência à compressão do concreto	99
Tabela 6.12: Dados sobre ampliação e tamanho da amostra do microscópio	103

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

A	Tensor de concentração de deformação.
A_I	Tensor de concentração de deformação.
A_s	Área de armadura tracionada.
B	Tensor de concentração de tensão.
B_I	Tensor de concentração de tensão.
C	Tensor de rigidez.
\bar{C}	Tensor de rigidez efetivo.
C_M	Tensor de rigidez da matriz.
C_i	Tensor de rigidez da inclusão.
D	Tensor de flexibilidade.
\bar{D}	Tensor de flexibilidade efetivo.
D_M	Tensor de flexibilidade da matriz.
D_i	Tensor de flexibilidade da inclusão.
E	Módulo de elasticidade.
E_{ci}	Módulo de elasticidade tangente inicial.
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante.
E_{din}	Módulo de elasticidade dinâmico.
$(EI)_{eq}$	Rigidez equivalente da seção transversal.
F_{gk}	Carga permanente característica.
F_{qk}	Carga variável característica.
G	Módulo cisalhante.
\bar{G}	Módulo de elasticidade transversal do compósito.
G_i	Módulo de elasticidade transversal da inclusão.
G_M	Módulo de elasticidade transversal da matriz.
G_{inf}	Limite inferior de Hashin-Shtrikman para G .
G_{sup}	Limite superior de Hashin-Shtrikman para G .
I	Tensor unitário.
I_c	Momento de inércia do concreto.

I_{II}	Momento de inércia da seção fissurada no estágio II.
K	Módulo de deformação volumétrico.
\bar{K}	Módulo de elasticidade volumétrico do compósito.
K_i	Módulo de elasticidade volumétrico da inclusão.
K_M	Módulo de elasticidade volumétrico da matriz.
K_{inf}	Limite inferior de Hashin-Shtrikman para K .
K_{sup}	Limite superior de Hashin-Shtrikman para K .
M_a	Momento fletor na seção crítica.
M_r	Momento de fissuração.
S	Tensor de Eshelby.
V	Velocidade de onda ultrasônica.

Letras romanas minúsculas:

a, b	Diâmetros.
b_w	Largura da seção transversal retangular.
d	Altura útil.
d_{max}	Diâmetro máximo característico do agregado.
f_c	Resistência à compressão numa idade especificada.
f_{ck}	Resistência característica à compressão concreto.
f_{dif}	Flecha diferida no tempo.
f_{im}	Flecha imediata.
f_{pc}	Fração de volume de pasta de cimento.
h	Altura da seção transversal retangular.
t	Tempo.
x	Profundidade da linha neutra.
z	Coefficiente de braço de alavanca.
y_t	Distância do CG à linha mais tracionada.

Letras gregas minúsculas:

$\langle \sigma \rangle$	Tensão média.
$\langle \varepsilon \rangle$	Deformação específica média.

ε^0	Deformação específica uniforme prescrita.
δ	Flecha elástica.
ρ	Massa específica.
Ω	Domínios elipsoidais do método de Mori-Tanaka.

Lista de abreviaturas e siglas:

ACI	American Concrete Institute.
CEB	Comité Euro-International du Béton.
EVR	Elemento de Volume Representativo.
ITZ	Zona de transição interfacial.

RESUMO

O módulo de elasticidade do concreto é um parâmetro utilizado para verificações estruturais. Expressões presentes nas normas nacionais e internacionais e apresentadas por pesquisadores relacionam este parâmetro com a resistência à compressão. Assumindo o concreto como um material compósito, as suas propriedades elásticas têm dependência das propriedades elásticas e frações volumétricas das fases constituintes, especialmente da zona de transição, esta caracterizada por sua maior porosidade em relação à pasta de cimento. A partir do conhecimento das propriedades elásticas e frações de volume das fases, modelos como os de Mori-Tanaka e de três fases podem ser aplicados e apresentam bons resultados quando utilizados para análise do concreto. Neste trabalho as propriedades da zona de transição foram obtidas aplicando a inversão do modelo de três fases. Com base nestas informações, a aplicação da modelagem micromecânica foi avaliada em dois estágios: com e sem a presença da zona de transição. Comparado aos valores experimentais produzidos, percebe-se boa concordância dos valores obtidos com a modelagem micromecânica com a consideração da ITZ, principalmente para idades superiores a 15 dias, além da qualidade das aproximações de algumas expressões, como as da NBR 6118:2003 e do CEB/90.

Palavras-Chave: Módulo de elasticidade, Concreto, Argamassa, Zona de Transição, Micromecânica.

ABSTRACT

The elastic modulus of concrete is an important property of this material, used for structural investigations. Equations present in national and international codes and by researchers express this property as a function of the compressive strength. Considering the concrete as a composite material, its elastic properties are dependent of elastic properties and volume fractions of constituent phases, especially the interfacial transition zone, this characterized by its higher porosity compared to the cement paste. Knowing the properties of the constituents, models such as the Mori-Tanaka and three phases show good results when used for concrete analysis. In this work, the properties of the interfacial transition zone were obtained by applying the inversion of three phases model. Based on this results, the application of micromechanics modeling was assessed in two stages: with and without the presence of the interfacial transition zone. Compared to the experimental values produced, were observed good agreement of elastic modulus obtained from the micromechanics modeling with consideration of ITZ, especially for ages above 15 days, such as the quality of approximations of some expressions, as the expressions presented by NBR 6118:2003 and CEB/90.

Keywords: Elastic modulus, Concrete, Mortar, Interfacial Transition Zone, Micromechanic.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS
LISTA DE TABELAS
LISTA DE SÍMBOLOS
RESUMO
ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO	01
1.1 Considerações iniciais	01
1.2 Objetivos	05
1.2.1 Geral	05
1.2.2 Específico	05
1.3 Justificativa	05
1.4 Hipóteses	07
1.5 Contribuição do estudo	08
1.5 Estruturação do trabalho	08
2. CONCRETO COMO MATERIAL COMPÓSITO	10
2.1 Considerações iniciais	10
2.2 Fatores que afetam as propriedades mecânicas do concreto	12
2.2.1 Agregado	12
2.2.1.1 Diâmetro máximo característico	13
2.2.1.2 Origem mineralógica e propriedades mecânicas	15
2.2.2 Pasta de cimento e zona de transição	17
2.2.3 Maturidade e relação água-cimento	20
2.3 Síntese	21
3. OBTENÇÃO EXPERIMENTAL E APLICAÇÕES DO MÓDULO DE ELASTICIDADE	22
3.1 Determinação experimental	22
3.1.1 Dispositivos para medição de deformações	24
3.1.1.1 Mecânicos – compressômetros	24
3.1.1.2 LVDT	25
3.1.1.3 Extensômetros elétricos	27
3.1.1.4 Ultra-som	29
3.1.2 Fatores que interferem na medição do módulo de elasticidade	31
3.1.2.1 Tamanho do corpo-de-prova	31
3.1.2.2 Dispositivo de medição	32
3.1.2.3 Base de medida	33
3.1.2.4 Tipo de capeamento	34
3.2 Expressões para cálculo do módulo de elasticidade	35
3.2.1 NBR 6118:2003	35
3.2.2 CEB/90	37
3.2.3 EUROCODE2/92	38
3.2.4 ACI 318/95	38
3.2.5 Outras formulações	39
3.2.6 Modelos analógicos	41

3.3 Síntese	43
4. MODELAGEM MICROMECAÂNICA	45
4.1 Considerações iniciais	45
4.2 Equações básicas	47
4.3 Método de Mori-Tanaka	52
4.4 Método de três fases	56
4.5 Limites de Hashin-Shtrikman	64
4.6 Exemplos de aplicação	65
4.6.1 Exemplo 1: Modelagem de mistura asfáltica	66
4.6.2 Exemplo 2: Avaliação experimental do módulo de elasticidade do concreto	67
4.7 Síntese	71
5. METODOLOGIA DA PESQUISA	72
5.1 Considerações iniciais	72
5.2 Simplificações para a modelagem	73
5.3 Estudo experimental	76
5.3.1 Escolha dos traços	76
5.3.2 Determinação experimental do módulo de elasticidade	76
5.3.3 Aplicação dos resultados experimentais	78
5.4 Estudo numérico	80
5.4.1 Variáveis envolvidas	80
5.4.2 Modelagem numérica considerando a zona de transição	81
5.4.2.1 Modelagem inversa com a zona de transição	82
5.4.2.2 Modelagem direta com a zona de transição	84
5.5 Síntese	86
6. ANÁLISE ESTATÍSTICA E RESULTADOS EXPERIMENTAIS	87
6.1 Considerações iniciais	87
6.2 Caracterização dos materiais	88
6.3 Dosagem dos concretos	93
6.4 Resultados dos ensaios	94
6.5 Análise de variância para os dados experimentais	95
6.6 Análise de microscopia eletrônica do concreto	100
6.6.1 Preparação das amostras para ensaio	103
6.6.2 Visualização da zona de transição	105
6.7 Síntese	113
7. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	115
7.1 Considerações iniciais	115
7.2 Análise dos dados experimentais	116
7.2.1 Análise da evolução das propriedades mecânicas com o tempo	116
7.2.2 Estudo comparativo do módulo de elasticidade com formulações propostas	120
7.2.3 Relação módulo de elasticidade e a resistência à compressão	126
7.2.4 Relação entre os módulos de elasticidade da argamassa e do concreto	129
7.2.5 Evolução do módulo de elasticidade em função de parâmetros da mistura e do tempo	131

7.3 <i>Análise dos resultados obtidos com a modelagem numérica</i>	133
7.3.1 <i>Limites de Hashin-Shtrikman</i>	134
7.3.2 <i>Análise micromecânica sem a zona de transição</i>	136
7.3.3 <i>Módulo de elasticidade da zona de transição</i>	139
7.3.4 <i>Módulo de elasticidade do concreto considerando a zona de transição</i>	143
7.3.4.1 <i>Modelo de três fases</i>	143
7.3.4.2 <i>Modelo de Mori-Tanaka</i>	146
7.4 <i>Considerações finais</i>	148
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	150
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	153
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	163
APÊNDICE A – OUTROS MODELOS DE MICROMECAÂNICA	170
APÊNDICE B – MÉTODOS DE ANÁLISE ESTATÍSTICA	184
ANEXO A – RESULTADOS DOS ENSAIOS	200



Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais.

O concreto é o material de construção com maior utilização na engenharia civil devido às várias características favoráveis que apresenta, tais como boa resistência à compressão, durabilidade e facilidade da execução de peças com as mais variadas formas, somadas a um menor consumo de energia necessário à sua produção quando comparado a outros materiais estruturais.

As propriedades mecânicas do concreto são sempre de primeira importância em suas aplicações como material estrutural (HAECKER et al., 2005). Dentre elas estão a resistência à compressão e o módulo de elasticidade, que são parâmetros diretamente utilizados no projeto de estruturas que tem o concreto como material constituinte.

Módulo de elasticidade, também comumente chamado de módulo de deformação e módulo de Young, é calculado pelo quociente entre a tensão aplicada e a deformação elástica resultante, representando uma medida de resistência à deformação elástica do material.

No 49º Congresso Brasileiro do Concreto, realizado no ano de 2007, foi apresentada uma conferência sobre assuntos controversos, denominada “Módulo de Elasticidade: Mitos e Realidades”. Nela foram discutidos aspectos dessa propriedade do concreto, importantes na análise estrutural, e sobre a necessidade de sua determinação experimental. Relata-se nesta

conferência também a prática entre os engenheiros em considerá-lo um parâmetro secundário, utilizando a expressão que a norma NBR 6118:2003 prescreve para a sua determinação, em função da resistência característica do concreto (REVISTA CONCRETO E CONSTRUÇÕES, 2007).

A norma NBR 6118:2003 (atualizada pela NBR 6118:2007) estabelece que seja determinado o módulo de elasticidade através de ensaios de acordo com a NBR 8522:1984, hoje atualizada pela NBR 8522:2008, e, em caso da ausência de ensaios, preconiza o uso de uma equação empírica dada em função da resistência característica à compressão do concreto. Nesta equação, é assumida como padrão a idade de 28 dias.

Códigos internacionais como EUROCODE/1992, ACI/1995 e CEB/1990, além de trabalhos de pesquisa sobre o tema, propõem relações diferentes para a determinação do módulo de elasticidade. Em algumas destas relações, ele aparece como dependente da resistência à compressão, da massa específica e do tipo de agregado utilizado na fabricação do concreto.

Trabalhos como os de BESHAR et al. (2003), WU et al. (1999), AL-ORAIMI et al. (2006), ZHAO & CHEN (1998), NADEAU (2003) e WU et al. (2001) apontam que o módulo de elasticidade do concreto tem dependência da estrutura da pasta de cimento e do tipo de agregados utilizados.

Observando-se a estrutura interna do concreto, sob um ponto de vista macroscópico, pode-se destacar a presença de agregados graúdos envolvidos em uma matriz de argamassa, sendo esta matriz composta de pasta de cimento e agregados miúdos.

Sob o ponto de vista microscópico, nota-se que os concretos apresentam uma estrutura complexa constituída por mais de duas fases. Uma seção ilustrativa de um corte numa peça de concreto é apresentada na figura 1.1.

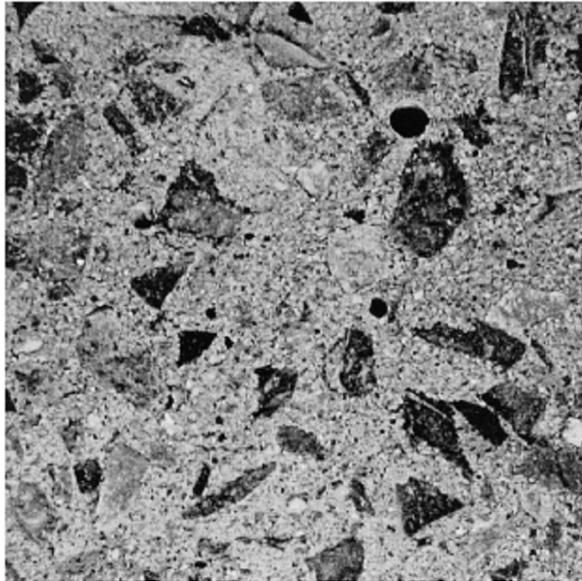


Figura 1.1: Seção ilustrativa da estrutura de um concreto no estado endurecido.

Segundo MEHTA & MONTEIRO (1994), a estrutura da pasta de cimento é afetada pela presença de agregados, especialmente na vizinhança de partículas grandes. Devido a este fato, muitos aspectos do comportamento mecânico do concreto sob tensão podem ser explicados somente quando a zona de interface pasta de cimento – agregado, também conhecida como zona de transição interfacial (ITZ – *Interfacial Transition Zone*), é tratada como uma terceira fase da estrutura do concreto.

Esta região, que comprovadamente apresenta propriedades inferiores às do restante da pasta de cimento, tem influência no comportamento mecânico do concreto. Ela se destaca por apresentar, em relação à pasta de cimento normal, uma maior porosidade.

A questão dos poros e vazios é extremamente importante, pois tende a ocasionar uma diminuição, tanto da resistência à compressão do concreto, quanto de seu módulo de elasticidade. Os vazios presentes na estrutura interna de um concreto, quando colocado sob carregamento, são decorrentes, além dos devidos à porosidade, das fissuras que são geradas.

Essas fissuras decorrentes do carregamento tendem a começar na zona de transição, região que apresenta menor resistência e rigidez relativamente ao restante do sistema, e vão interagindo umas com as outras, de forma a desencadear a ruptura do material. Para os concretos de alta resistência, este processo fissuratório pode também se iniciar no agregado.

O concreto pode ser tratado como um material compósito. Associado a esta consideração, existem modelos que tratam da determinação das propriedades do compósito

tendo como base as características intrínsecas de sua estrutura interna, denominados modelos de micromecânica. Estes modelos são de cunho geral, aplicados a materiais compósitos de natureza qualquer e sua aplicação para concretos e argamassas tem mostrado ser satisfatória.

Um dos problemas básicos na teoria dos materiais compósitos é a predição das propriedades médias ou efetivas em função das propriedades elásticas e quantidades relativas dos materiais individuais ou fases (CHRISTENSEN & LO, 1979).

Considerando o concreto como um material compósito de duas fases, AITCIN & MEHTA (1990) apud YANG & HUANG (1996a) demonstraram que o módulo de elasticidade do concreto é influenciado pelas propriedades elásticas e fração de volume dos agregados.

Nos últimos anos, o concreto tem sido assumido como um material compósito de três fases (LI et al., 1999a). Nesta hipótese, assume-se a presença da zona de transição interfacial que, embora em muitos casos seja desprezada, sua consideração é de fundamental importância por exercer influência no comportamento mecânico do material.

Segundo LUTZ & ZIMMERMAN (2005) e LUTZ et al. (1997), estudos de modelagem da zona de transição em materiais compósitos já existem há algum tempo. De acordo com os autores supracitados, HASHIN & ROSEN (1964) desenvolveram um modelo que continha uma fina camada envolvendo cada inclusão, sendo o módulo de elasticidade uniforme dentro da referida camada e diferente daquele da matriz; HERVE & ZAOUÏ (1993), HASHIN & MONTEIRO (2002) e outros pesquisadores modificaram este modelo pela consideração de um número finito de cascas concêntricas em torno da inclusão, com o módulo de elasticidade uniforme dentro de cada casca; THEOCARIS (1992), JAYARAMAN & REIFSNIDER (1992), JASIUK & KOUIDER (1993) e outros levaram em consideração uma suave variação do módulo de elasticidade, considerando uma lei de variação potencial em função do raio; LUTZ & ZIMMERMAN (1996) modelaram o módulo de elasticidade fora da inclusão através de uma lei potencial, que estabelece uma suave variação entre a interface e a matriz.

Além dos modelos de micromecânica, que consideram o concreto como um material bifásico ou trifásico, existem modelos para análise de materiais compósitos que utilizam como base a teoria da elasticidade linear, como exemplo, o modelo de Mori-Tanaka.

Com a aplicação dos modelos de micromecânica para análise do concreto, pode-se obter uma estimativa de propriedades efetivas relativas ao seu comportamento mecânico.

1.2 Objetivos.

1.2.1 Geral.

O trabalho proposto apresenta como objetivo geral o estudo do comportamento evolutivo do módulo de elasticidade em concretos devido à variação das propriedades elásticas da argamassa ao longo do tempo e das frações volumétricas dos seus elementos constituintes.

1.2.2 Específicos.

Os objetivos específicos são:

- Avaliar o comportamento evolutivo do módulo de elasticidade da argamassa e a sua relação com o módulo de elasticidade do concreto;
- Obter uma comparação de resultados experimentais com os valores fornecidos por expressões apresentadas em normas e propostas por pesquisadores, juntamente com a aplicação de modelos de micromecânica;
- Verificar, através de análise de variância, as variáveis que estatisticamente podem ser utilizadas para expressar o comportamento do módulo de elasticidade do concreto;
- Verificar, mediante análise de microscopia de varredura eletrônica, a camada de zona de transição interfacial e analisar sua respectiva espessura;
- Estudar a variação no módulo de elasticidade do concreto com a consideração da zona de transição na modelagem, variando sua fração volumétrica e seu módulo de elasticidade com o tempo.

1.3 Justificativa.

Quando se trata da análise do concreto como um material estrutural, praticamente toda a ênfase é dada à resistência à compressão. Em caráter secundário, fica o seu módulo de

elasticidade que, em muitas das propostas utilizadas, pressupõe ligação direta com a resistência à compressão.

O módulo de elasticidade é um parâmetro necessário para a análise dos estados limites de serviço para estruturas de concreto armado. Ele é importante para a avaliação de deformações e deslocamentos em elementos estruturais, assim como para a análise de equilíbrio global de estruturas.

É apresentado por MONTEIRO (1993), através da verificação dos limites de Hashin-Strikman, que, quando da consideração do concreto como material compósito, este não deve ser tratado como um material bifásico, sugerindo a incorporação da zona de transição interfacial como a terceira fase do material.

A quantificação das propriedades desta zona ainda se apresenta como um grande desafio, devido à complexidade de sua análise e ao seu comportamento. O conhecimento destas propriedades é muito importante para a caracterização mecânica do concreto ou argamassa, uma vez que o comportamento destes materiais depende fortemente daquele exibido pelas zonas de transição.

Informações quantitativas sobre esta região são difíceis de serem obtidas, não havendo consenso sobre a sua exata espessura e também pelo fato de não se conseguir a sua avaliação de forma isolada.

MEHTA & MONTEIRO (1994) relatam que ao longo do processo de carregamento, o concreto fica submetido a um processo de fissuração, que se inicia na zona de transição e vai se proliferando pelo restante da pasta de cimento. Este comportamento é típico de concretos convencionais que apresentam, de acordo com a literatura, resistências à compressão inferiores a 41 MPa.

Para concretos de alta resistência, as matrizes de pasta de cimento apresentam resistências à compressão no mesmo nível das partículas do agregado, implicando que o processo de ruptura pode ser iniciado nestas partículas.

As expressões propostas para a determinação direta do módulo de elasticidade do concreto nas diversas normas e trabalhos da literatura não fazem referência às influências das diversas fases no seu comportamento.

A micromecânica é uma teoria que estabelece relações entre o comportamento macroscópico do material compósito e sua microestrutura. Busca-se com esta teoria

determinar as propriedades elásticas do compósito, relacionando-as às propriedades elásticas das fases e suas respectivas frações de volume.

Os estudos apresentados na literatura sobre a aplicação da micromecânica na análise do concreto são formulados para idades específicas, não se encontrando investigação sobre a sua aplicação que possa fornecer uma estimativa do módulo de elasticidade ao longo do tempo. Como exemplo, para a estimativa do módulo de elasticidade numa referida idade pela expressão da NBR 6118:2003 é necessário o conhecimento de sua resistência à compressão.

1.4 Hipóteses.

Têm-se como hipóteses do trabalho:

- A relação entre os módulos de elasticidade do concreto e da argamassa não se mantém constante ao longo do tempo, fato que evidencia a influência da zona de transição formada entre o agregado graúdo e a matriz de argamassa;
- As propriedades do concreto e da argamassa são alteradas em função do tempo. Apesar de ser idealizada como uma pequena camada que envolve o agregado graúdo, o módulo de elasticidade da zona de transição tem sido assumido como uma fração do módulo de elasticidade da pasta de cimento e, em algumas situações, referenciada à argamassa, sendo esta variação entre as propriedades elásticas de 30% a 50% (RAMESH et al., 1996; YANG, 1998; LI et al., 1999; HASHIN & MONTEIRO, 2002), relatada para uma idade fixa. A análise numérica possibilita encontrar, a partir de dados experimentais obtidos para o concreto e a argamassa, a variação do módulo de elasticidade da zona de transição em relação ao tempo, verificando a manutenção da relação apresentada;
- Com a consideração da variação da fração de volume da zona de transição, pode-se determinar qual a fração que melhor descreve o comportamento do concreto em relação ao tempo.

1.5 Contribuição do estudo.

Como contribuições do estudo aqui apresentado, podem-se destacar:

- Geração do conhecimento quantitativo acerca da variação do módulo de elasticidade da zona de transição interfacial, através da utilização de processos numéricos e resultados experimentais, visto que já se tem razoável conhecimento sobre a estrutura desta região, além da aplicabilidade dos resultados gerados para a determinação das propriedades efetivas de concretos e argamassas.
- Estabelecer relações entre os módulos de elasticidade da zona de transição e da matriz de argamassa, apresentando também curvas de variação do módulo desta zona e do respectivo material compósito em função do tempo.
- Contribuição no que diz respeito às atividades voltadas para o projeto de concretos ou argamassas. Como se sabe, a confecção de novos materiais com características mecânicas pré-definidas, tradicionalmente exige uma série de testes experimentais que, na maioria das vezes, consome muito tempo. Usando modelos micromecânicos, podem ser feitos estudos teóricos prévios e os resultados destes permitirão uma drástica redução de testes experimentais e, conseqüentemente, de tempo e custos financeiros. Além do mais, nas análises numéricas estruturais, os modelos da micromecânica podem ser bastante úteis no que diz respeito ao fornecimento das propriedades efetivas do concreto ou argamassa, dispensando-se certos testes experimentais, tais como aqueles para avaliação de módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson.

1.6 Estruturação do trabalho.

A apresentação deste trabalho é constituída de nove capítulos. Uma breve introdução, abordando idéias relativas à importância da pesquisa, assim como seus objetivos, está apresentada no capítulo 1.

No segundo capítulo é apresentado um levantamento bibliográfico acerca do concreto focando o mesmo como um material compósito, discutindo sobre suas fases e a influência de cada uma delas em seu módulo de elasticidade e resistência à compressão.

O terceiro capítulo aborda a questão da determinação experimental do módulo de elasticidade do concreto, apresentando uma revisão sobre os mecanismos de ensaio e a sua influência nos valores obtidos, além de se mostrar a aplicabilidade do mesmo no cálculo estrutural através da consideração de fatores normativos.

No quarto capítulo são estudados os modelos de micromecânica aplicados na pesquisa, investigando-se, em análises prévias, os resultados fornecidos com a aplicação deles, para a determinação do módulo de elasticidade de materiais compósitos.

O quinto capítulo contém a descrição da metodologia do trabalho, de acordo com as obtenções experimentais e aplicação da formulação numérica. Na descrição dos procedimentos experimentais, serão apresentados sucintamente a forma de realização dos ensaios e o número de exemplares para este desenvolvimento. Nas aplicações numéricas, os dados obtidos anteriormente são utilizados para o desenvolvimento de uma ferramenta de análise do módulo de elasticidade do concreto para diversas situações do cotidiano.

No sexto capítulo são expostos os resultados experimentais do módulo de elasticidade dos concretos e argamassas obtidos na pesquisa, bem como os resultados da análise com os métodos estatísticos utilizados para assegurar a qualidade dos dados e das curvas ajustadas para os dados experimentais. Também são apresentados resultados de uma análise de microscopia eletrônica dos concretos avaliados com o intuito de verificar e estimar a variação da espessura da zona de transição com o tempo.

Exibem-se no sétimo capítulo os resultados e discussões do trabalho, buscando interligar os objetivos iniciais com os resultados, ressaltando as contribuições em relação ao estudo do módulo de elasticidade do concreto.

No oitavo capítulo são apresentadas as considerações finais do trabalho, no qual as idéias e resultados serão postos em comparação e serão apresentadas sugestões para o desenvolvimento de futuras pesquisas.

Ao final do trabalho, estão listadas as referências bibliográficas e bibliografia complementar que foram consultadas para o desenvolvimento da pesquisa. Também são apresentados apêndices e anexos com resultados e informações complementares aos assuntos tratados do trabalho.



Capítulo 2

Concreto como material compósito

2.1 Considerações iniciais.

O concreto é um material constituído de um meio aglomerante (pasta de cimento) e partículas agregadas, as quais são classificadas como miúdas (areia) e graúdas (pedra britada ou “brita”), diferenciadas devido ao diâmetro máximo característico que elas apresentam.

Para projetos que utilizam o concreto como material principal é muito importante a quantificação de sua resistência à compressão e de sua rigidez dentro do regime elástico, sendo esta última caracterizada pela propriedade mecânica conhecida como módulo de elasticidade.

Para a determinação de tensões e deformações de elementos estruturais de concreto armado, o módulo de elasticidade assume papel importante na análise estrutural (VILARDELL et al., 1998).

O módulo de elasticidade e a resistência à compressão do concreto são propriedades interligadas, mas por haver uma relação não linear entre elas, o crescimento observado para a resistência não é proporcional ao crescimento do módulo de elasticidade (SHANNAG, 2000).

Os constituintes do concreto quando ensaiados separadamente à compressão uniaxial, apresentam relação tensão x deformação aproximadamente lineares até a ruptura, enquanto o concreto mostra o comportamento não-linear, fato este representado na figura 2.1. A partir

deste comportamento poderia se concluir que, como o concreto é formado por materiais de comportamento linear, também deveria apresentar um comportamento linear, mas evento contrário é evidenciado na sua curva tensão-deformação. O fato desta curva não ser linear até a ruptura está relacionado com a evolução das fissuras existentes em uma de suas fases que apresenta comportamento que difere das demais. Deste fato e como já é de conhecimento comprovado, a zona de transição tem sido considerada, pois justifica o comportamento não linear do concreto sob tensão uniaxial.

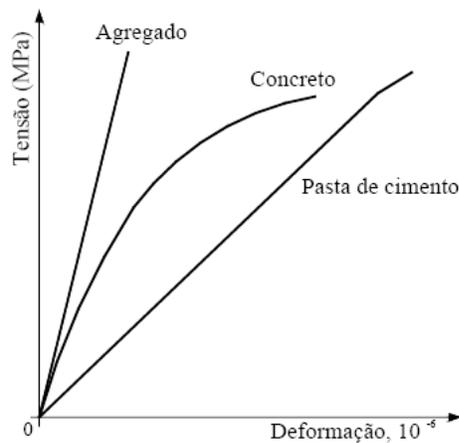


Figura 2.1: Comportamento dos constituintes do concreto quando ensaiados à compressão (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

A zona de transição de uma mistura sólida heterogênea é a fase mais desconhecida [DETWILER & MONTEIRO (1988) apud PITANGUEIRA (1998)]. As informações qualitativas acerca do comportamento desta fase são razoavelmente conhecidas, mas a transformação delas em grandezas quantitativas, ainda é objeto de estudo. Os valores das propriedades mecânicas da zona de transição que possam ser usadas numa análise numérica são bastante escassos na literatura.

Na realidade, os concretos e as argamassas apresentam sua rigidez variável com o nível da deformação e um comportamento aproximadamente elástico linear exibido dentro de certos limites, correspondentes a tensões moderadas, até cerca de 30% da tensão de ruptura à compressão, segundo o que preconiza a norma NBR 8522:2008.

O concreto, considerado como um material multifásico e heterogêneo, tem seu comportamento elástico determinado pela fração volumétrica e propriedades elásticas de cada uma das fases, incluindo a zona de transição interfacial.

As relações usualmente utilizadas para o módulo de elasticidade em projetos de estruturas de concreto armado têm caráter empírico e são dadas como função da resistência característica à compressão do concreto e, em algumas propostas, relacionadas também com o tipo de agregado utilizado.

Quando submetido a cargas axiais, o concreto apresenta uma deformação na direção transversal, além da deformação na respectiva direção da aplicação da carga, sendo esta relação entre as deformações transversais e longitudinais é definida como coeficiente de Poisson. Este coeficiente, na região onde a curva tensão-deformação apresenta-se como característica de um material elástico-linear, pode ser assumido como constante.

A norma NBR 6118:2003 descreve que para tensões de compressão menores que 50% da resistência de ruptura do concreto, o valor do coeficiente de Poisson pode ser admitido como igual a 0,2.

O conhecimento prévio das propriedades de todas as fases envolvidas na mistura é importante para se entender melhor o comportamento do material compósito, uma vez que estas são dadas como uma combinação das propriedades de seus componentes.

Nos itens que seguem são abordados aspectos referentes às fases do concreto e sua influência na determinação das propriedades mecânicas do material final, ressaltando aspectos da literatura acerca do comportamento destas fases.

2.2 Fatores que afetam as propriedades mecânicas do concreto.

2.2.1 Agregado.

Segundo AL-ORAIMI et al. (2006), o agregado é a fase constituinte do concreto que ocupa maior volume, geralmente entre 75% a 80%, sendo esperado que estes materiais tenham importante influência no comportamento mecânico do concreto.

A qualidade do agregado utilizado tem influência direta nas propriedades do concreto, pois suas propriedades físicas podem ocasionar desempenho insatisfatório, interferindo diretamente no comportamento da interface.

CUNHA et al. (2006) avaliaram a resistência à compressão e o módulo de elasticidade de concretos com diferentes traços, no qual a fração de volume de agregado para a produção era variada. Como constatação, observou-se que para os concretos com traço contendo menor taxa de agregado, obtiveram-se os maiores valores do módulo de elasticidade, sendo a mesma conclusão válida para a resistência à compressão.

Como era de se esperar, pelo fato de serem representativos para o concreto, os parâmetros do agregado podem exercer influência direta em seu comportamento, sendo suas características importantes na análise do concreto como um material compósito. A seguir, são descritas as propriedades dos agregados, que estão enquadradas neste contexto e como estas podem vir a interferir no comportamento do concreto.

2.2.1.1 Diâmetro máximo característico.

Alguns aspectos importantes do comportamento do concreto podem ser relacionados à influência dos agregados, principalmente ao tamanho de suas partículas. Estes aspectos apresentam relação mais forte com o concreto no estado fresco, influenciando na sua trabalhabilidade e, conseqüentemente, na quantidade de água necessária à mistura.

A classificação granulométrica de um agregado dá-se através de uma série de peneiras, gerando uma caracterização para o tamanho das partículas contidas na amostra. Com isso, convencionou-se como diâmetro máximo característico a maior dimensão da peneira, na qual fica retido um valor igual ou imediatamente inferior a 5% da massa da amostra das partículas do agregado (NBR NM 248:2003).

Aspectos relacionados ao diâmetro máximo característico dizem respeito à sua influência na trabalhabilidade do concreto. Agregados de maiores tamanhos são responsáveis por misturas com baixa trabalhabilidade. Agregados de menor dimensão produzem misturas com maior consumo de água (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Existe uma relação direta entre o tamanho do agregado e a quantidade de água adicionada à mistura, sendo esta maior à medida que se diminui a dimensão do agregado,

devido ao aumento da quantidade de pasta necessária para envolver os grãos do agregado em virtude do aumento de sua área superficial.

NEUBAUER et al. (1996) mostraram que à medida que se aumenta a área superficial de agregados, sem variar a fração de volume, há uma redução do módulo de elasticidade do concreto. Ocorre, com o aumento da área superficial, o correspondente aumento da zona de transição, que ocasiona a redução no módulo de elasticidade do concreto.

Agregados grandes tendem a formar zonas de transição mais fracas, contendo mais microfissuras. O efeito resultante variará com a relação água/cimento do concreto e a tensão aplicada. Para relações água/cimento baixas, a porosidade reduzida da zona de transição também começa a ser importante na resistência do concreto. Além disto, dado que as características da zona de transição parecem afetar a resistência à tração do concreto mais do que a resistência à compressão, pode-se esperar que, para um dado traço de concreto, com uma relação água/cimento constante, a razão entre as resistências à tração e à compressão aumentará com a redução do tamanho do agregado graúdo (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Devido à influência dos tamanhos das partículas, existe uma limitação em 19 mm a dimensão máxima do agregado nos concretos de alta resistência (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

AKÇAOGLU et al. (2005) realizaram uma análise do comportamento de falha do concreto utilizando microscopia para a avaliação do crescimento de microfissuras no concreto. Foi constatado um pequeno decréscimo na resistência à compressão do concreto com o aumento do tamanho do agregado. Isto se deve ao fato de que estas partículas necessitam de uma quantidade de pasta menor para envolvê-las, tornando a estrutura da matriz menos resistente.

Em WU et al. (1999) fez-se uma análise, através de imagens de seções fraturadas de concreto, da probabilidade de ruptura no agregado graúdo. Neste trabalho, para variações na relação água/cimento e no diâmetro máximo do agregado graúdo, chegou-se a conclusão que com o aumento da relação água/cimento, menor é a probabilidade de ruptura no agregado, valor este menor que 50%. Deste comportamento, pode-se entender que para concretos de alta resistência (baixa relação água/cimento), a análise deve levar em consideração a ruína do concreto associada à ruptura do agregado graúdo.

2.2.1.2 Origem mineralógica e propriedades mecânicas.

A mineralogia do agregado é também um fator que pode modificar o comportamento do concreto. Ao se modificar o tipo de composição mineral do agregado, podem-se promover interações químicas na zona de interface e melhorar o seu desempenho, sendo seu efeito pronunciado a longos períodos de cura (PITANGUEIRA, 1998).

FALCÃO BAUER (2000) apresenta valores de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de diversos materiais que formam agregados de acordo com sua composição mineralógica (tabela 2.1):

Tabela 2.1: Propriedades elásticas de agregados de acordo com a sua origem (FALCÃO BAUER, 2000).

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson
Granito	34	0.28
Basalto	34 – 80	0.28
Gnaise	46 – 66	0.23
Calcário	74	0.23
Arenito	20	0.1

Na tabela 2.2 são apresentados os módulos de elasticidade para alguns materiais de rochas utilizadas como agregado, segundo PITANGUEIRA (1998):

Tabela 2.2: Módulo de elasticidade de agregados (PITANGUEIRA, 1998).

Constituição	Módulo de Elasticidade (GPa)	
	Monteiro (1985)	Laboratório de Furnas
Granito	30	40
Basalto	100	70
Gnaise	75	-

Diferenças na composição mineralógica dos agregados reconhecidamente afetam a resistência do concreto. Várias publicações mostram que, em condições idênticas, a substituição do agregado calcário por um agregado á base de sílica conduz a um aumento substancial na resistência do concreto (MEHTA & MONTEIRO, 1994). Antes de fazer a mistura do concreto, a escolha dos materiais constituintes adequados e a determinação das

suas proporções é o primeiro passo para a obtenção de um concreto que apresente a resistência especificada.

OZTURAN & CEÇEN (1997) avaliaram a aplicação de três tipos de agregado em concretos com diferentes resistências. Em um dos casos avaliados, analisando um concreto com 30 MPa de resistência característica à compressão, foram utilizados agregados de basalto, calcário e cascalho. Como conclusão, o agregado calcário apresentou resultados superiores aos outros tipos utilizados, destacando-se esta observação em relação à origem e mineralogia do mesmo.

A resistência à compressão do agregado é um fator que não pode ser relacionado diretamente com a resistência à compressão do concreto, pois possuem valores mais elevados, exceto em casos onde a resistência do agregado se equipara ao valor da pasta de cimento ou da argamassa (YANG & HUANG, 1998).

No caso do concreto com resistência à compressão maior que 41 MPa, a pasta de cimento pode ter resistência superior à do agregado e o efeito proporcionado pela adição dele pode tornar o concreto menos resistente. Em concretos convencionais, no qual a resistência apresenta valores menores que 41 MPa, os agregados são mais resistentes que a pasta de cimento, ao passo que a sua adição não enfraquece ao concreto (AMPARANO et al., 2000).

Segundo FALCÃO BAUER (2000), a determinação da resistência à compressão de agregados pode ser determinada através de corpos-de-prova cúbicos de 4 cm de lado. A NBR 10341:2006 recomenda que para a determinação do módulo de elasticidade de rochas utilize-se um corpo-de-prova cilíndrico ou prismático regular com relação altura/diâmetro ou altura/aresta entre 2,5 e 3, devendo-se ensaiar um número mínimo de cinco corpos-de-prova para cada amostra.

Outra propriedade do agregado que pode alterar o comportamento elástico do concreto é a sua porosidade. A porosidade do agregado exerce significativa influência nas propriedades do concreto, devido ela ser diretamente ligada à sua rigidez, sendo esta última responsável pela limitação das deformações apresentadas por este material.

Testes em testemunhos de rochas mostraram que o módulo de elasticidade de agregados naturais de baixa porosidade, tais como granito, rochas vulcânicas e basalto, está na faixa de 69 GPa a 138 GPa, enquanto em arenitos, calcários e cascalho do tipo poroso, o módulo de elasticidade varie de 21 GPa a 48 GPa (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Nota-se a influência direta do agregado graúdo no comportamento mecânico do concreto, ressaltando que o processo está interligado com o comportamento apresentado pela zona de interface entre ele e a pasta de cimento, sendo necessário o estudo desta última para a determinação de concretos com propriedades desejadas.

2.2.2 Pasta de cimento e zona de transição.

Conforme relata JIANG (1999), a observação de uma zona que exibia diferente mineralogia e microestrutura na interface agregado – pasta de cimento no concreto foi primeiro realizada por Jacques Farran em 1956.

A quantificação das propriedades da zona de transição ainda apresenta-se como um grande desafio, devido à complexidade de sua análise e ao seu comportamento. O conhecimento destas propriedades é muito importante para a caracterização mecânica do concreto ou argamassa, uma vez estas propriedades dependem fortemente daquelas exibidas pela zona de transição.

Em MEHTA & MONTEIRO (1994) é exposto o comportamento do concreto quando ensaiado à compressão axial. Este pode ser descrito em 4 estágios, de acordo com a figura 2.2, dados em função do nível de fissuração interna gerado pelo carregamento. São eles:

- Na região 1: a curva tensão x deformação é linear, acontecendo para valores de tensão cerca de 30% de sua tensão última. Neste estágio, a zona de transição não sofre significativa alteração em relação ao número de fissuras.
- A região 2 é caracterizada pelo nível de tensão entre 30% e 50%, aumentando-se o volume de fissuras, mas estas se encontrando estáveis.
- Quando este valor cresce em níveis de até 60% da tensão última, inicia-se o processo de fissuração da matriz. Com um aumento de até 75%, esse sistema na zona de transição passa a se tornar instável, mas também a proliferação e propagação de fissuras na matriz aumentarão, fazendo com que a curva tensão-deformação incline-se consideravelmente em direção à horizontal (região 3).
- De 75% a 80% (região 4), a taxa de liberação de energia de deformação parece atingir um nível crítico, necessário para o crescimento espontâneo das fissuras sob tensão constante e o material irá deformar-se até o colapso.

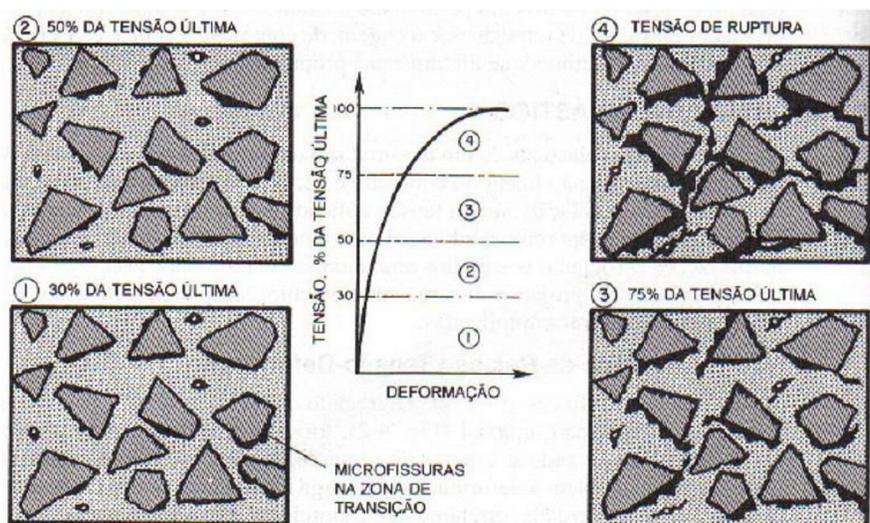


Figura 2.2: Descrição do processo de fissuração da zona de transição (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Do que fora exposto por MEHTA & MONTEIRO (1994) na figura 2.2, conclui-se, que dentro do regime elástico de sua curva tensão-deformação, o concreto não sofre aumento significativo no volume de fissuras (vazios), levando à idéia de que as propriedades da matriz não são reduzidas de forma significativa dentro destes limites.

A observação de que a microfissuração inicia-se na interface entre o agregado graúdo e a pasta que o envolve e de que, na ruptura, o padrão de fissuração inclui a interface, apontam para a importância desta fase do concreto (NEVILLE, 1997).

Devido a dificuldades para determinações experimentais, informações sobre o efeito desempenhado pela zona de transição são escassos (LIAO et al., 2004).

Segundo AKÇAOĞLU et al. (2004), a qualidade da matriz e da zona de transição são altamente influenciadas pela relação água/cimento do concreto.

No estado fresco, ao redor da superfície do agregado forma-se uma película d'água, implicando com isso uma maior relação água/cimento, nesta região em comparação com o restante da argamassa. Devido a isso, os elementos sólidos originados da reação de hidratação do cimento são relativamente maiores que os presentes no restante da pasta, formando uma zona com alta porosidade, que caracteriza esta fase como a menos resistente do material (PITANGUEIRA, 1998; LEEMAN et al., 2006).

A estrutura da zona de transição, especialmente o volume de vazios e microfissuras presentes, tem grande influência sobre a rigidez ou o módulo de elasticidade do concreto. No

material composto, a zona de transição serve de ponto de ligação entre duas fases constituintes: a pasta de cimento e as partículas do agregado ou, ainda, a argamassa matriz e as partículas do agregado graúdo. Mesmo nos casos em que os constituintes individuais têm rigidez elevada, a rigidez do material compósito pode ser baixa por causa dos vazios e microfissuras da zona de transição, as quais não permitem transferência de energia (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

O primeiro fato a notar é que a microestrutura da pasta de cimento hidratada na vizinhança imediata das partículas do agregado graúdo difere da microestrutura do restante da pasta de cimento. A principal razão disso é que durante a mistura, as partículas de cimento seco são incapazes de se dispor densamente junto das outras relativamente grandes do agregado. Essa situação é semelhante a do efeito parede na superfície de peças molhadas de concreto, embora em escala bem menor. Assim, existe menos cimento presente para se hidratar e para preencher os vazios iniciais. Como conseqüência, a zona da interface tem uma porosidade muito maior do que a pasta de cimento em locais a maior distância do agregado (NEVILLE, 1997).

LI et al. (2006) observaram que a porosidade da pasta de cimento ordinário decresceu com o avanço na hidratação do cimento, devido ao gradual enchimento dos poros com os produtos de hidratação do material cimentício. As pastas sem adição mineral apresentaram pequena variação da porosidade após os 28 dias de idade, enquanto que as pastas com diferentes adições minerais obtiveram um decréscimo na porosidade aos 90 dias.

BASHEER et al. (2005) realizam um estudo da porosidade do concreto em relação à graduação do agregado e a porosidade na zona de transição. À medida que a proporção de agregados de tamanho de 20 mm cresce, eleva-se também a espessura da zona de transição, gerando também um acréscimo na porosidade da mistura.

Embora a zona de transição de maior interesse seja aquela que se forma na superfície do agregado graúdo, forma-se também esse tipo de zona em volta de partículas de agregado miúdo. Neste caso, é menor a espessura da zona de interface, mas os efeitos de superfície que se originam nas partículas menores interferem com aquelas do agregado graúdo, influenciando assim a extensão final do efeito da zona da interface.

Na prática, é complexo o estudo da zona de transição nos concretos. Em conseqüência, nas análises teóricas, é usual a consideração de partículas isoladas imersas em uma matriz de

pasta de cimento infinita, ou seja, sem considerar as interações entre partículas vizinhas, admitindo a hipótese de material bifásico.

YANG (1998) faz uma análise das propriedades do concreto utilizando modelagem micromecânica, trabalhando com um modelo de três fases, fazendo uma estimativa da espessura da camada da interface e de suas propriedades efetivas. Para a espessura de 20 μm , as propriedades encontradas estão em torno de 20% a 40% das propriedades da matriz de pasta de cimento, ao passo que, quando a espessura é aumentada para 40 μm , este valor cresce para 50% a 70%.

Nas análises procedidas por HASHIN & MONTEIRO (2002), constatam-se que as propriedades elásticas exibidas pela zona de transição presentes em argamassa estão em torno de metade da apresentada pela matriz de pasta de cimento. Admite-se nesta consideração que a zona de transição apresenta uma espessura de 25 μm , observada através de microscopia eletrônica.

Do que fora mencionado, pode-se observar que quando a presença de zona de transição é analisada, fatores como sua espessura e propriedades precisam ser bem avaliados, pois podem gerar distúrbios nos valores apresentados pelo concreto.

2.2.3 Maturidade e relação água/cimento.

É fato constatado que há um aumento na resistência à compressão em função da idade do concreto, ganho devido à maturidade do processo de hidratação do cimento e que ocasiona, como consequência, uma estrutura interna mais resistente e com menor porosidade.

Outro fator que está diretamente interligado ao comportamento mecânico do concreto é a relação água/cimento.

A influência da relação água/cimento pode ser facilmente explicada como uma consequência natural do progressivo enfraquecimento da matriz devido ao aumento da porosidade. Esta explicação, contudo, não leva em conta a influência da relação água/cimento sobre a resistência da zona de transição (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Segundo NADEAU (2003), o módulo de elasticidade decresce com o aumento da relação água/cimento, sendo apresentado comportamento semelhante em relação à resistência

à compressão. Em análise similar, nota-se comportamento inverso com o coeficiente de Poisson.

No trabalho de BOUMIZ et al. (1996) realiza-se uma avaliação nas primeiras horas da evolução do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, mostrando que o módulo de elasticidade cresce nas primeiras horas para menores relações água/cimento e comportamento inverso é apresentado pelo coeficiente de Poisson.

O mesmo comportamento pode ser relatado em SMILAUER & BITTNAR (2006), que mostraram o aumento do módulo de elasticidade com o grau de hidratação da pasta de cimento, que acontece devido a esse processo do cimento com o tempo.

2.3 Síntese.

O módulo de elasticidade é uma propriedade importante para a aplicação do concreto como material estrutural. Analisado como um material compósito, o seu comportamento mecânico depende do comportamento exibido por suas fases. Cada uma delas exerce importante papel na determinação das propriedades elásticas do concreto. Para o agregado, parâmetros como diâmetro máximo característico, fração de volume e origem mineralógica influem na determinação do módulo de elasticidade do concreto. O diâmetro máximo característico, por estar ligado diretamente à zona de transição interfacial, é geralmente um parâmetro destacado em concretos convencionais na determinação do módulo de elasticidade. A zona de transição, que apresenta propriedades elásticas inferiores ao restante da pasta de cimento devido à sua porosidade, apresenta influência no comportamento mecânico do concreto. É nela que se inicia o processo de fissuração interna do concreto e desencadeia a sua ruptura. Em concretos de alta resistência, além do destacado, a ruptura do concreto pode ocorrer nas partículas do agregado graúdo pelo fato de a resistência à compressão da pasta de cimento ser da mesma ordem de grandeza da resistência do agregado graúdo. Outro destaque pode ser dado à questão da evolução das propriedades com o tempo, em que o módulo de elasticidade apresenta um comportamento evolutivo crescente, relacionado ao da resistência à compressão. Este crescimento está diretamente associado à quantidade de cimento aplicado a mistura.



Capítulo 3

Obtenção experimental e expressões para cálculo do módulo de elasticidade

Neste capítulo é apresentada uma breve revisão sobre a determinação experimental do módulo de elasticidade, destacando-se mecanismos de obtenção e fatores intervenientes, e expressões para a sua determinação, apresentadas nas diversas normas e nas propostas de pesquisadores.

3.1 Determinação experimental.

O módulo de elasticidade é relacionado ao limite de elasticidade do material, no qual há um comportamento linear entre as tensões e deformações apresentadas. No caso do concreto, este comportamento pode ser observado dentro de certos limites, sendo citado na norma NBR 8522:2008 o valor de 30% do valor de sua resistência última à compressão.

O módulo de elasticidade pode ser obtido utilizando uma metodologia de aplicação de esforços diferentes, a saber:

- Módulo de elasticidade à compressão: aplica-se uma carga de compressão e determina-se a respectiva curva tensão x deformação, sendo para o limite elástico

observado nesta curva determinado o módulo de elasticidade, dado pela equação 3.1:

$$E = \frac{\sigma_f - \sigma_i}{\varepsilon_f - \varepsilon_i} \quad (3.1)$$

onde σ_f e ε_f representam a tensão e deformação final deste limite elástico, e σ_i e ε_i representam a tensão e deformação inicial. Este processo é utilizado pela NBR 8522:2008.

- Módulo de elasticidade à tração: obtido de forma semelhante ao módulo de elasticidade à compressão. Como o concreto não resiste bem à tração, a ruptura acontece para deformações muito baixas, sendo necessários equipamentos com grande precisão para medição.
- Módulo de elasticidade à tração na flexão: obtido a partir de um modelo de viga prismática biapoiada submetida à flexão por uma carga concentrada. O módulo de elasticidade é obtido aplicando-se a expressão da flecha no meio do vão de uma viga de material elástico linear, com as citadas condições de contorno, resultando na equação 3.2:

$$E = \frac{PL^3}{4 \cdot \delta \cdot b \cdot h^3} \quad (3.2)$$

onde P é a carga aplicada, L é o comprimento da viga prismática entre apoios, b e h são as dimensões da seção transversal do elemento e δ é a flecha apresentada pelo modelo e medida no ensaio. Este ensaio não é apresentado pela NBR 8522:2008.

Para se determinar o módulo de elasticidade de um material são geralmente utilizadas técnicas de extensometria, que visam a obtenção de deformações superficiais destes corpos quando submetidos a solicitações mecânicas.

Segundo a NBR 8522:2008, os instrumentos para medição do módulo de elasticidade devem ser elétricos ou mecânicos, podendo ser utilizados outros meios que apresentem comprovada eficiência. A recomendação expressa nesta norma é de que qualquer dos mecanismos não possibilitem interferência dos executores do ensaio.

Os medidores elétricos podem ser do tipo resistivo, como exemplo, *strain gages* e do tipo indutivo, como exemplo, LVDT. Já os extensômetros mecânicos são chamados de compressômetros.

Quando a medição é feita através de métodos empíricos ou através da inclinação da curva tensão x deformação no regime elástico, o módulo de elasticidade é dito estático. Quando se procede a medição do módulo de elasticidade através da frequência natural de vibração do concreto, este módulo de elasticidade é dito dinâmico (CANESSO et al., 2007).

Segundo MEHTA & MONTEIRO (1994), o módulo de elasticidade dinâmico é cerca de 30% maior para concretos de média resistência à compressão em relação ao módulo de elasticidade estático.

Resultados apresentados por CANESSO et al. (2007) mostram que o módulo dinâmico é cerca de 40% superior ao apresentado no método descrito pela norma NBR 8522:2003.

Pesquisadores como COUTINHO & GONÇALVES (1994) apud CANESSO et al. (2007) sugerem que a relação entre o módulo estático (tangente) e o dinâmico pode ser de 0,5, aumentando até 0,8 com o crescimento da resistência a compressão do concreto.

Independente do tipo de módulo de elasticidade a ser determinado, o valor medido e sua qualidade estão atrelados ao tipo de dispositivo utilizado. No item seguinte, são abordados os tipos mais comuns de extensômetros utilizados para a medição de deformações no concreto.

3.1.1 Dispositivos para medição de deformações.

3.1.1.1 Mecânicos – compressômetros.

Os extensômetros mecânicos estão entre os mais tradicionais instrumentos de medição de deformações.

Este dispositivo apresenta, geralmente, ponteiros em um relógio e é fixado em dois pontos do testemunho, de forma que o deslocamento relativo entre estes dois pontos seja lido por estes ponteiros. O relógio para medição pode ser analógico ou digital (figura 3.1).



Figura 3.1: Extensômetros mecânicos com mostrador analógico e digital.

Um dos problemas do extensômetro mecânico é que, apesar de apresentar boa precisão, na ordem de 10^{-3} mm, as leituras têm de ser realizadas de forma visual, gerando com isso imprecisão relativa a medição executada pelo observador.

Para a utilização dos extensômetros mecânicos é necessário o uso de um compressômetro de bases dependentes ou independentes, dispositivo este constituído de dois anéis metálicos com suportes para os relógios comparadores em faces diametralmente opostas, no qual este suporte é preso em alguns pontos do corpo-de-prova por garras.

Na figura 3.2 é apresentado um corpo-de-prova de concreto com o aparato suporte e extensômetros mecânicos para medição das deformações. Nesta mesma figura podem ser identificados extensômetros para a medição das deformações longitudinais e transversais do corpo-de-prova.

3.1.1.2 LVDT.

O LVDT (*Linear Variation Displacement Transducer*), transformador diferencial de variação linear, é um dispositivo cuja medição dá-se por variação de indutância mútua de um transformador.



Figura 3.2: Corpo-de-prova instrumentado com extensômetros mecânicos.

Este dispositivo possibilita a medição da variação de posição entre dois pontos, tendo sua idéia de funcionamento semelhante ao de uma régua, sendo capazes de detectar frações mínimas de deslocamento (RODRIGUES, 2003 apud CUPERTINO et al., 2007).

A estrutura de um LVDT consiste num transformador constituído de dois enrolamentos secundários de mesmas características, enrolados nas extremidades de um eixo longitudinal. O enrolamento primário fica situado na região central do núcleo. Os secundários são ligados em série, mas com tensões opostas, para que se obtenha uma região de maior linearidade do sinal de saída.

O enrolamento primário é excitado com uma onda senoidal. O campo magnético alternado induz praticamente as mesmas tensões em ambos os enrolamentos secundários. A tensão de saída será então o resultado da diferença entre as duas bobinas. Se o êmbolo que serve de núcleo estiver simetricamente localizado, as tensões de ambos os enrolamentos secundários serão iguais e a saída total será zero.

Na figura 3.3 é apresentado uma foto de um LVDT.

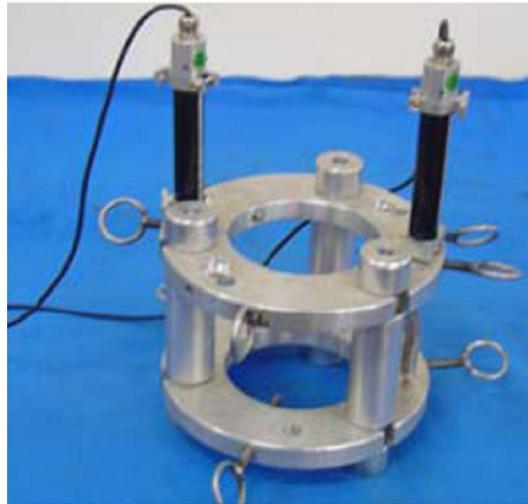


Figura 3.3: Dispositivo LVDT.

O dispositivo LVDT pode ser utilizado para fazer medições em ensaios estáticos e dinâmicos, devendo ser acoplado a um sistema de aquisição de dados.

3.1.1.3 Extensômetros elétricos.

Os extensômetros elétricos podem ser divididos em dois tipos: extensômetros elétricos de fio e extensômetros elétricos colados à superfície.

Os extensômetros elétricos de fio (figura 3.4) são formados por uma base de liga de metal com dois pontos que são presos ao corpo-de-prova em seu terço médio para que sejam registradas as deformações centrais.

Além da base metálica, estes são constituídos por um leitor de dados (força – deslocamento), que transforma os sinais elétricos obtidos pela base. Em alguns sistemas, estas leituras podem ser realizadas automaticamente por um computador.

Este tipo de extensômetro é atado ao corpo-de-prova por meio de elásticos, em faces diametralmente opostas e ligado ao leitor, podendo ser realizadas medições em corpos-de-prova de diâmetro variados, bastando para tal somente promover a troca da base de medida.



Figura 3.4: Extensômetro elétrico de fio.

Os extensômetros colados na superfície do corpo-de-prova são chamados de *strain gages*. Estes também podem ser embutidos no corpo-de-prova. Na figura 3.5 estão apresentados *strain gages* e seu esquema de acoplamento no corpo-de-prova para a medição das deformações.

Para a utilização deste tipo de extensômetro é necessária a realização de algumas etapas. Primeiro realiza-se a limpeza da região do corpo-de-prova, no qual este vai ser aplicado e, em seguida, ele é colado à sua superfície, onde é colocada massa epóxi para firmar o conjunto. Então, procede-se a soldagem dos eletrodos do *strain gage* à fiação do leitor.

O princípio de funcionamento dos *strain gages* baseia-se na variação relativa da resistência sobre a variação relativa da deformação, que é uma constante, conforme mostrado na equação 3.3:

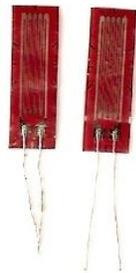
$$K = \frac{\Delta R / R_0}{\varepsilon} \quad (3.3)$$

onde $\varepsilon = \Delta l / l_0$ representa a deformação específica ocorrida dentro do trecho avaliado, K é uma constante denominada fator do extensômetro ou *gage factor*, ΔR e Δl são as variações na resistência e comprimento, R_0 e l_0 são a resistência e o comprimento inicial do strain gage e ε é a deformação ocorrida dentro do trecho avaliado.

O fator do extensômetro caracteriza a sensibilidade do sensor, em que o sinal de entrada é a variação de deformação e o de saída a variação de resistência. Os *strain gages* têm resistências típicas de 120 Ω e 350 Ω . Conforme sugestões dos fabricantes, o uso de *strain*

gages de maiores resistências reduzem o efeito do aquecimento da grade, além das conexões e soldas.

Segundo FIGUEIREDO et al (1989) apud CUPERTINO et al. (2007), a preferência pelo uso deste dispositivo dá-se pela alta precisão de medida, à excelente resposta dinâmica e linearidade das leituras, facilidade de instalação, possibilidade de realização de medidas à distância, além de ser usado nas medições em situações de imersão em água e em ambientes corrosivos.



(a)



(b)

Figura 3.5: Extensômetros elétricos de colagem (a) e esquema de acoplamento no corpo-de-prova (b).

3.1.1.4 Ultra-som.

O método de determinação do módulo de elasticidade através de ultra-som é um método de ensaio não destrutivo, baseado na teoria de propagação de ondas em meios sólidos.

Considerando o significado físico do módulo de elasticidade, uma estimativa mais adequada seria através da frequência natural de vibração do material. Existe uma correlação entre a velocidade de propagação do som (v) em uma determinada amostra (material, forma e dimensões), sua massa específica (ρ) e suas características elásticas (HERNÁNDEZ et al., 2002).

Segundo NEVILLE (1997), o módulo de elasticidade dinâmico está relacionado, quase que totalmente, ao comportamento elástico do concreto, já que durante o processo de vibração são aplicadas tensões muito baixas, apresentando deformações instantâneas muito pequenas.

O ensaio para a determinação da velocidade de propagação de onda ultra-sônica é regido pela norma NBR 8802:1994, que descreve a aparelhagem necessária e a metodologia para a determinação da referida velocidade. Na figura 3.6 é apresentado um corpo-de-prova sendo ensaiado pelo método de ultra-som para a determinação do módulo de elasticidade.

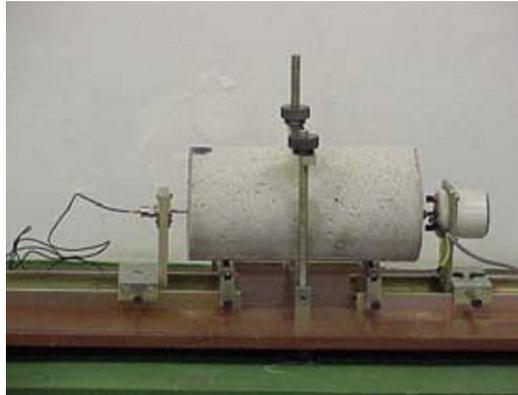


Figura 3.6: Esquema do ensaio pelo método do ultrassom.

Segundo HERNÁNDEZ et al. (2002) e JONES (1967) apud SILVA et al. (2007), o módulo de elasticidade do concreto pode ser relacionado à velocidade das ondas ultrasônicas pela seguinte relação (equação 3.4):

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.4)$$

em que V é a velocidade de propagação da onda de pressão, E é o módulo de elasticidade do concreto, ρ é a massa específica e ν é o coeficiente de Poisson do material.

Uma outra forma de medição do módulo de elasticidade dinâmico é através da frequência de ressonância, no qual um aparelho específico emite ondas vibratórias, que atravessam o corpo-de-prova, fazendo-o vibrar longitudinalmente. Com a variação da frequência, é possível determinar a frequência de ressonância fundamental na direção da onda (SILVA et al., 2007).

HAN & KIM (2004) apud ALMEIDA (2005) encontraram que o módulo de elasticidade dinâmico em função da frequência de ressonância pode ser determinado pela equação 3.5:

$$E_{din} = 4 \cdot \rho_c \cdot L^2 \cdot f_1^2 \quad (3.5)$$

onde f_1 é a frequência de ressonância do primeiro modo longitudinal, ρ_c é a massa específica do concreto e L é o comprimento do cilindro.

Ensaio de SILVA et al. (2007) apontam que o ensaio do módulo de elasticidade obtido com o método do ultra-som são mais adequados à análise de materiais produzidos à base de cimento pelo fato da repetibilidade gerada, apresentando este ensaio baixo custo e maior facilidade de execução.

3.1.2 Fatores que interferem na medição do módulo de elasticidade.

Além da influência dos parâmetros internos do concreto, como agregados e zona de transição, alguns outros fatores podem exercer influência na determinação deste parâmetro do concreto. Pode-se citar: tamanho do corpo-de-prova, dispositivo utilizado na medição, base de medida do dispositivo e o tipo de capeamento do corpo-de-prova.

Um outro ponto que pode ser levantado, o qual pode influenciar na determinação do valor do módulo de elasticidade é o estado de saturação do corpo-de-prova na hora do ensaio.

Sobre esta questão, estudo realizado por AGUILAR et al. (2006) que a umidade das amostras de concreto para ensaio de módulo de elasticidade, sendo 15% maiores quando as mesmas amostras se encontram úmidas, observando-se comportamento inverso em relação à resistência à compressão.

3.1.2.1 Tamanho do corpo-de-prova.

A norma NBR 8522:2008 descreve que para a determinação do módulo de elasticidade deve ser utilizado corpos-de-prova cilíndricos com 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura. De forma alternativa, pode-se utilizar corpos-de-prova que satisfaçam a relação altura/diâmetro dentro do intervalo $1,98 < L/d < 2,02$.

Outra recomendação é que o diâmetro máximo do agregado graúdo deve ser menor ou igual a $\frac{1}{4}$ do diâmetro do corpo-de-prova.

Na literatura, são poucos os estudos realizados que possam fornecer informações que tratem da influência do tamanho do corpo-de-prova, que possa ser tomado como base para decisão de que molde utilizar para ensaiar o módulo de elasticidade.

Estudos realizados por JACINTO & GIONGO (2005) apud CUPERTINO et al. (2008) referenciam que os resultados obtidos com ensaios de corpos-de-prova de dimensões diferentes mostram que os de maiores dimensões, isto é, com maior volume de concreto, apresentam resistências à compressão menores. A justificativa está no fato que para maiores volumes, o índice de vazios é maior e, por conseguinte, mais deformável; por isso, apresentam resistências menores.

Então, depreende-se do exposto por JACINTO & GIONGO (2005) apud CUPERTINO et al. (2008) que, comparativamente aos corpos-de-prova de concreto usuais, cilíndricos de 10 cm de diâmetro por 20 cm de altura e 15 cm de diâmetro por 30 cm de altura, como são maiores as deformações para corpos-de-prova maiores acarretadas por resistências menores, menor é o valor encontrado para o módulo de elasticidade, conclusão esta apresentada neste trabalho e comprovada estatisticamente. A norma NBR 8522:2008 recomenda inicialmente que sejam utilizados corpos-de-prova de 15 cm de diâmetro, evidenciando a questão da segurança devido ao menor módulo de elasticidade medido.

No trabalho realizado por CUPERTINO & PEREIRA (2007) apud CUPERTINO et al. (2008) foram observados, em relação ao tamanho dos corpos-de-prova, maiores dispersões dos resultados apresentados pelos corpos-de-prova de menores dimensões. O mesmo comportamento foi observado no trabalho de VIERA et al. (2008).

Especificamente sobre esta questão, foi estudada no mesmo trabalho (VIERA et al., 2008), sob o ponto de vista experimental, a verificação da influência das dimensões básicas do corpo-de-prova no módulo de elasticidade e na resistência à compressão. Deste estudo comprova-se a idéia proposta por JACINTO & GIONGO (2005).

3.1.2.2 Dispositivo de medição.

Conforme listado no item 3.1.1, para a medição do módulo de elasticidade podem ser utilizados vários dispositivos.

Estes dispositivos apresentam suas peculiaridades em relação à medição das deformações e também podem exercer influência nos valores apresentados do módulo de elasticidade do concreto.

CUPERTINO et al. (2008) apresentaram em seu trabalho uma análise estatística da determinação do módulo de elasticidade do concreto e constataram que o tipo de dispositivo utilizado (mecânico e elétrico) não exerce influência significativa nesta determinação.

No trabalho de CUPERTINO et al. (2007) mostrou-se que os extensômetros elétricos de fio e mecânico apresentam baixas dispersões quando comparados com outros meios para determinação do módulo de elasticidade (LVDT e strain gages).

Nota-se destes estudos, que o tipo de dispositivo tem, sob o ponto de vista de investigação experimental, pequena ou nenhuma influência sobre o valor do módulo de elasticidade, só ressaltando que apesar desta conclusão, o compressômetro, ainda muito utilizado, pode sofrer a interferência humana, devido às leituras serem realizadas de forma visual e em determinados instantes.

3.1.2.3 Base de medida.

Base de medida é o trecho do corpo-de-prova no qual são efetuadas as leituras de deformação.

Estas podem ser ditas independentes ou dependentes. As primeiras são bases individualizadas, cujas deformações podem ser feitas de forma isolada pelo operador do ensaio. As dependentes são aquelas em que a leitura não pode ser feita de forma individualizada, sendo registrada a leitura do conjunto.

Segundo a NBR 8522:2008, as bases de medida devem ser, no mínimo, duas e ter o mesmo comprimento e estarem situadas em geratrizes equidistantes, no perímetro do corpo-de-prova.

As bases de medida devem ter no mínimo comprimento igual a dois terços do diâmetro do corpo-de-prova e no máximo igual ao diâmetro do corpo-de-prova.

De acordo com o estudo de CUPERTINO et al. (2007), a base de medida não influencia significativamente nas determinações do módulo de elasticidade, isto é, a faixa apresentada na NBR 8522:2008 não apresenta distorções nos resultados do módulo de elasticidade.

3.1.2.4 Tipo de capeamento.

Recomendados pela norma NM 77:1994, os corpos-de-prova que não tenham suas superfícies planas para ensaio de compressão devem ter suas faces regularizadas. Os métodos recomendados por esta norma são:

- Capeamento com argamassa: Procedimento no qual se aplica, após um intervalo de 2h a 4h depois de moldado o corpo-de-prova, uma camada de pasta de cimento ou argamassa na superfície superior do corpo, deixando-a plana.
- Capeamento com calda de grafite, enxofre e material inerte: Neste, é utilizada uma mistura de enxofre, em porcentagem de 75%, grafite, na proporção de 5%, e material granuloso, passante na peneira de 150 µm, num total de 20%. Esta mistura é fundida e colocada em um molde específico, no qual o corpo-de-prova é disposto. Esta argamassa deve apresentar resistência superior à resistência à compressão do corpo-de-prova na ocasião do ensaio.
- Retificação com disco diamantado: Aplicado quando a face do corpo-de-prova é muito irregular, procede-se o corte com disco diamantado com máquina específica, com o objetivo de deixar a superfície plana.

Além destes métodos recomendados pela norma, é prática em laboratórios de ensaios de materiais a utilização de capeamento com calda de enxofre e de enxofre e cimento, na proporção de 1:3. Outra forma é a utilização de almofadas de neoprene com um prato metálico, indicado pela norma americana ASTM C1231:1993.

CUPERTINO et al. (2008) comparam quatro tipos de capeamento, a saber: graute, retífica, enxofre e pasta de cimento. Observou-se que os tipos de capeamento ensaiados para a determinação do módulo de elasticidade não mostraram variações significativas nos resultados, apresentado coeficiente de variação em torno de 5%.

VIERA et al. (2008) avaliaram a utilização do capeamento com enxofre aplicado em uma das faces e nas duas faces do corpo-de-prova, constatando que quando as duas faces estão regularizadas ocorre um acréscimo do valor do módulo de elasticidade.

3.2 Expressões para cálculo do módulo de elasticidade.

Na literatura técnica, são várias as expressões propostas para determinação do módulo de elasticidade do concreto.

Devido ao fato de se ter uma relação ainda desconhecida no comportamento do concreto com o tipo de agregado utilizado na sua fabricação, as diversas formulações encontradas são aplicadas para determinados tipos específicos de agregado graúdo. Esta idéia também é seguida pelas normas que regem a aplicação do concreto como material estrutural.

3.2.1 NBR 6118:2003.

Segundo a NBR 6118:2003, o módulo de elasticidade deve ser obtido mediante ensaio descrito pela NBR 8522:1984 (atual NBR 8522:2008), sendo considerado nesta norma o módulo tangente inicial cordal a 30% da resistência última do concreto, obtida previamente de testemunhos da mesma amostra.

Na mesma NBR 6118:2003 recomenda-se que, na ausência de dados de experimentos de determinada amostragem, aos 28 dias de idade, seja utilizada a seguinte expressão para a estimativa do módulo de elasticidade tangente inicial:

$$E_{ci} = 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (3.6)$$

em que E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial e f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão, ambos com unidade em MPa.

A equação 3.6, segundo a mesma norma, pode ser utilizada para a avaliação do módulo de elasticidade do concreto numa idade maior ou igual a 7 dias, sendo necessária a substituição do f_{ck} , parâmetro determinado aos 28 dias, por f_{ckj} , relativo a idade requerida. Esta substituição é apresentada na NBR 6118:2003. Para fins de verificação, quando da realização de ensaios de resistência à compressão em determinada amostra de concreto, esta expressão pode ser aplicada para a estimativa do módulo de elasticidade fazendo uso do valor médio obtido na resistência à compressão.

Esta expressão (equação 3.6) é derivada da expressão do ACI 318, de 1995, substituindo somente o valor 5565, empregado nesta última, pelo valor 5600 (ARAÚJO, 2000).

A norma anterior, a NBR 6118:1978 (NB 1) procedia ao cálculo do módulo de elasticidade através da equação 3.7 (MELO NETO & HELENE, 2002):

$$E_{ci} = 6600f_{ck}^{1/2} \quad (3.7)$$

Para a verificação dos Estados Limites de Serviço (ELS) e análises de projeto, deve ser utilizado o módulo de elasticidade secante, calculado segundo a equação 3.8:

$$E_{cs} = 0.85E_{ci} \quad (3.8)$$

De acordo ARAÚJO (2000), no projeto de revisão da NBR 6118:2003, hoje atualizada pela sua versão de 2007, reconhece-se que o módulo de elasticidade está ligado ao valor médio e não ao valor característico, justificando a opção por este último pelo não conhecimento da resistência média na fase de projeto.

Ainda segundo ARAÚJO (2000), neste projeto de revisão era sugerida uma expressão que levava em conta o tipo de agregado e a consistência do concreto, dada por:

$$E_{ci} = a_1 a_2 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.9)$$

onde a_1 está relacionado com o tipo de agregado e a_2 com a sua consistência. Em MEIRELES NETO et al. (2010) são apontados os valores que seriam representativos dos coeficientes a_1 e a_2 , dados nas tabelas 3.1 e 3.2:

Tabela 3.1: Valores do coeficiente a_1 .

Agregado graúdo	Valores de a_1
Basalto, calcário sedimentar denso, diabásio	1,1 a 1,2
Granito e gnaisse	1,0
Calcário metamórfico, metasedimento	0,9
Arenito	0,7

Tabela 3.2: Valores do coeficiente a_2 .

Consistência	Valores de a_2
Fluida	0,9
Plástica	1,0
Seca	1,1

Para a obtenção da expressão hoje utilizada pela NBR 6118:2003 (equação 3.6) foram realizados muitos ensaios com materiais de regiões específicas do Brasil. Os materiais locais utilizados podem não contemplar a variabilidade gerada pela origem do agregado graúdo, oriundos de algumas regiões do Brasil.

Sobre a expressão proposta pela norma NBR 6118:2003, verifica-se que faltam justificativas científicas que embasem a sua utilização.

3.2.2 CEB/90.

O CEB/90 (Comitê Europeu do Concreto), adota, para a determinação do módulo de elasticidade, a expressão apresentada na equação 3.10, válida para concretos com resistência à compressão até 80 MPa (PERSSON, 2004; SANTOS et al., 2006; ARAÚJO, 2008):

$$E_{ci} = 21500 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{ck} + 8}{10}} \quad (3.10)$$

em que E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial do concreto na idade de 28 dias e f_{ck} é a resistência característica à compressão, ambos em MPa.

Para idades diferentes de 28 dias, o CEB adota uma expressão em função da resistência à compressão do concreto na referida idade (f_{cj}), mostrada na equação 3.11:

$$E_{ci} = 21500 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{cj}}{10}} \quad (3.11)$$

em que f_{cj} é a resistência à compressão média do concreto, em MPa, na idade desejada.

A equação 3.10 é aplicada para concretos confeccionados com agregados com origem quartzosa (granito e gnaiss). Para agregados de origem basáltica, o valor obtido do módulo de elasticidade deve ser multiplicado por 1,2. Para agregados provenientes de calcário e arenito, os fatores multiplicativos devem ser 0,9 e 0,7, respectivamente (ARAÚJO, 2000).

O módulo de elasticidade secante, segundo este último código, pode ser calculado da mesma forma que na norma NBR 6118:2003, através de sua relação com o módulo de elasticidade tangente inicial.

3.2.3 EUROCODE2/92.

A expressão proposta pelo EUROCODE 2 (1992) para a determinação do módulo de elasticidade tangente inicial, na ausência de valores experimentais e em situações nas quais não seja requerida precisão desta propriedade, pode ser determinado pela equação 3.12 (DA GUARDA, 2005):

$$E_{ci} = 9500 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (3.12)$$

em que f_{ck} é dado em MPa.

A equação 3.12 é válida para concretos confeccionados com agregado graúdo de origem quartzosa (SANTOS et al., 2006).

3.2.4 ACI 318/95.

SANTOS et al. (2006) apresenta a relação para a determinação do módulo de elasticidade segundo o ACI 363, de 1997, norma do *American Concrete Institute*, onde a determinação do módulo de elasticidade secante do concreto é dada pela equação 3.13, aplicada para um nível de tensão de até 45% da tensão de ruptura:

$$E_{cs} = \rho^{1.5} [3320\sqrt{f_c} + 6900] \quad (3.13)$$

em que ρ é a massa específica do concreto, em kg/m^3 , e f_c é a resistência do concreto na idade avaliada. Os valores de f_c usados na equação 3.12 são dados em MPa.

A relação proposta pelo ACI 363 expressa o módulo de elasticidade do concreto em função de sua massa específica. Admite-se nesta expressão a correlação existente entre as duas propriedades, justificada pelo fato de que quanto mais denso um corpo sólido, maiores serão sua rigidez e sua resistência à deformação (SANTOS et al., 2006).

Segundo ARAÚJO (2000), o ACI 318, de 1995, adota para a determinação do módulo de elasticidade secante a equação 3.14:

$$E_{cs} = 4730\sqrt{f_{ck}} \quad (3.14)$$

em que o valor de f_{ck} é dado em MPa.

3.2.5 Outras expressões propostas.

SANTOS et al. (2006) citam em seu trabalho outros modelos propostos para a determinação do módulo de elasticidade do concreto, a saber (equações 3.15 a 3.22):

- CARRASQUILLO et al. (1981) – equação 3.15:

$$E_{cs} = 3320\sqrt{f_c} + 6900 \quad (3.15)$$

Intervalo de aplicação: $21\text{MPa} \leq f_c \leq 83\text{MPa}$.

Tipo de agregado: Calcário e seixo.

- SHIH et al. (1989) – equação 3.16:

$$E_{cs} = 4660\sqrt{f_c} - 1370 \quad (3.16)$$

Intervalo de aplicação: $21\text{MPa} \leq f_c \leq 83\text{MPa}$.

Tipo de agregado: Calcário.

- ALMEIDA (1990) – equação 3.17:

$$E_{cs} = 5330\sqrt{f_c} \quad (3.17)$$

Intervalo de aplicação: $40\text{MPa} \leq f_c \leq 120\text{MPa}$.

Tipo de agregado: Calcário e granito.

- SHEHATA et al. (1993) – equação 3.18:

$$E_{cs} = 4250\sqrt{f_c} \quad (3.18)$$

Intervalo de aplicação: $f_c \leq 90\text{MPa}$.

Tipo de agregado: Gnaisse.

- GOMES (1995) – equação 3.19:

$$E_{cs} = 8142f_c^{0,37} \quad (3.19)$$

Intervalo de aplicação: não informado.

Tipo de agregado: Traquito e gnaisse.

- FERRARI et al (1996) – equação 3.20:

$$E_{cs} = 3691\sqrt{f_c} + 5445 \quad (3.20)$$

Intervalo de aplicação: $10 \text{ MPa} \leq f_c \leq 90 \text{ MPa}$.

Tipo de agregado: Calcário e gnaiss.

- DAL MOLIN & MONTEIRO (1996) – equação 3.21:

$$E_{cs} = 9570f_c^{0,31} \quad (3.21)$$

Intervalo de aplicação: $30 \text{ MPa} \leq f_c \leq 90 \text{ MPa}$.

Tipo de agregado: Basalto.

- GOMEZ (1986) apud CALMON (1995) – equação 3.22:

$$E_{cs} = 3500 \cdot f_c^{0,75} \quad (3.22)$$

Intervalo de aplicação: não informado.

Tipo de agregado: Basalto.

Nestas expressões apresentadas, a correlação está expressa entre o módulo de elasticidade secante e a resistência à compressão, determinada para níveis de tensão no intervalo de 0,3 a 0,5 da resistência de ruptura do concreto.

Outra relação proposta na literatura é a definida por BYFORS (1980) apud SANTOS et al. (2006), dada a seguir:

$$E_c(t) = \begin{cases} 9.93 \cdot 10^3 \cdot f_c(t)^{2,675} & \text{para } 0.1 \text{ MPa} \leq f_c(t) \leq 0.87 \text{ MPa} \\ \frac{9.93 \cdot 10^3 \cdot f_c(t)^{2,675}}{1 + 1.370 \cdot f_c(t)^{2,204}} & \text{para } 0.87 \text{ MPa} \leq f_c(t) \leq 32 \text{ MPa} \\ 7.25 \cdot 10^3 \cdot f_c(t)^{0,471} & \text{para } f_c(t) \geq 32 \text{ MPa} \end{cases} \quad (3.23)$$

Observa-se, tanto nos códigos quanto nos modelos propostos, a dependência direta com a resistência à compressão, devido a esta propriedade ser de mais fácil obtenção.

Também é levado em consideração para a estimativa do módulo de elasticidade a variável tempo, que de forma indireta, é analisada quando da utilização da resistência à compressão média na idade de ensaio. Mas, como se comporta a resistência em função do

tempo? Este questionamento é atrelado ao comportamento do concreto aliado a um grande número de fatores que interferem na resistência à compressão.

3.2.6 Modelos analógicos.

São baseados em diversas configurações das fases. A análise é efetuada tomando como base o conhecimento prévio dos módulos de elasticidade das fases e de suas respectivas frações volumétricas na mistura.

A idéia dos modelos analógicos confunde-se com a dos modelos micromecânicos. Neste item, são abordados apenas os modelos analógicos. Os modelos de micromecânica serão abordados no capítulo a seguir, visto que é um dos objetos de estudo neste trabalho.

Podem-se citar como analógicos os seguintes modelos: modelo em paralelo, modelo em série, modelo de Hirsch, modelo de Hansen e modelo de Counto (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

No modelo em paralelo, também conhecido como modelo de VOIGT, as fases são dispostas em paralelo, como mostrado na figura 3.7. Assumindo-se a mesma deformação em ambas as fases, resulta a seguinte expressão:

$$E_c = E_1 \cdot f_1 + E_2 \cdot f_2 \quad (3.24)$$

onde f representa as frações volumétricas das fases e E indica os seus módulos de elasticidade. Os índices 1 e 2 representam matriz e agregado, respectivamente.

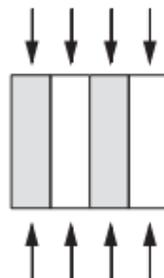


Figura 3.7: Modelo em paralelo (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

O modelo em série, conhecido como modelo de REUSS, associa as fases em série, tendo como hipótese uma mesma tensão atuando nas fases. Este modelo está apresentado na figura 3.8 e se expressa através da equação 3.25:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{f_1}{E_1} + \frac{f_2}{E_2} \quad (3.25)$$



Figura 3.8: Modelo em série (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

O modelo de HIRSCH faz a determinação do módulo de elasticidade com a composição dos modelos em série e em paralelo, conforme visualizado na figura 3.9. Deste modelo resulta a seguinte equação:

$$\frac{1}{E_c} = (1-x) \left[\frac{f_1}{E_1} + \frac{f_2}{E_2} \right] + x \left[\frac{1}{f_1 E_1 + f_2 E_2} \right] \quad (3.26)$$

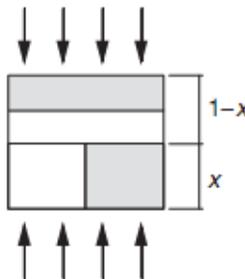


Figura 3.9: Modelo de HIRSCH (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

A análise com o modelo de HANSEN é realizada assumindo contornos esféricos concêntricos para as fases matriz e agregado, admitindo neste modelo um coeficiente de Poisson das fases igual a 0,2. Uma representação deste modelo pode ser observada na figura 3.10.

A relação do modelo de HANSEN é apresentada na equação 3.27:

$$E_c = \left[\frac{E_1 f_1 + E_2 (1 + f_2)}{E_2 f_1 + E_1 (1 + f_2)} \right] \quad (3.27)$$

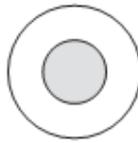


Figura 3.10: Modelo de HANSEN (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

No modelo de COUNTO, os contornos das fases são assumidos prismáticos concêntricos, mostrados na figura 3.11. O módulo de elasticidade do concreto é obtido pela equação 3.28. Neste modelo, assume-se que tanto o agregado quanto a matriz possuem a mesma relação peso/área da seção transversal.

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1 - \sqrt{f_2}}{E_1} + \frac{1}{\left(\frac{1 - \sqrt{f_2}}{\sqrt{f_2}}\right) E_1 + E_2} \quad (3.28)$$

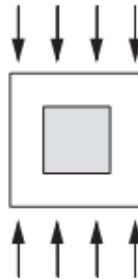


Figura 3.11: Modelo de COUNTO (MEHTA & MONTEIRO, 1994).

Os modelos de predição analógicos são baseados em idéias que também fundamentam os modelos de micromecânica, porém, apresentam muitas hipóteses simplificadoras que precisam ser avaliadas para a sua utilização em concreto.

3.3 Síntese.

Neste capítulo apresentaram-se os métodos para determinação experimental do módulo de elasticidade, tomando como foco a norma NBR 8522:2008. Em conseqüência discutem-se quais são os fatores que exercem influência na determinação experimental do módulo de elasticidade. Trabalhos tais quais os de CUPERTINO et al. (2008) e CUPERTINO et al. (2007) mostram que o dispositivo de medição e sua respectiva base de medida não exercem influência significativa nos valores do módulo de elasticidade. Já em relação ao tipo de capeamento aplicado, apresenta-se um coeficiente de variação de 5% em relação aos métodos

de regularização de faces utilizados. A discussão principal é a influência exercida pelas dimensões do corpo-de-prova utilizado no ensaio, no qual há uma divergência de idéias e resultados apresentados sobre quem apresenta maiores resultados, destacando-se o trabalho de CUPERTINO et al. (2008), que comprovam, via análise estatística, as hipóteses de que o corpo-de-prova de maiores dimensões apresenta módulo de elasticidade inferior devido ao fato de ser mais deformável. Para o módulo de elasticidade, muitas expressões são propostas nas normas nacionais e internacionais e por pesquisadores, que buscam uma forma empírica de determinar esta propriedade do concreto sem a necessidade de ensaios. Estas expressões apresentam algum tipo de limitação, seja em função da resistência à compressão do concreto, ou do agregado utilizado na produção do concreto. A adequada determinação do módulo de elasticidade propicia a correta obtenção de deformações sofridas por elementos estruturais, auxiliando na tomada de decisões.



Capítulo 4

Modelagem Micromecânica

4.1 Considerações iniciais.

O concreto é um material compósito com agregados como fase dispersa, zona de transição como interface e argamassa como fase contínua ou matriz. As propriedades elásticas do concreto, além de influenciadas pelas propriedades das fases agregado e pasta de cimento, estão intimamente relacionadas às propriedades elásticas e fração de volume de zona de transição [LI et al. (1999a), LI et al. (1999b)].

A fração de volume da zona de transição é dependente da área superficial dos agregados, sendo esta área relacionada ao tamanho máximo e da graduação do agregado, as propriedades elásticas do concreto devem ser relacionados a estas características [LI et al. (1999a), ZHAO & CHEN (1998a)].

Se o volume da zona de transição não é desprezível, esta fase pode afetar de forma significativa o módulo de elasticidade de argamassas e concretos (RAMESH et al., 1996).

Segundo HASHIN & MONTEIRO (2002), a quantificação do efeito da zona de transição nas propriedades mecânicas do concreto tem mostrado ser difícil. A espessura da zona de transição é pequena, variando de 15 μm a 40 μm , sendo difícil isolar seu efeito nas propriedades do concreto, que são também afetadas pelo tamanho, textura e graduação do agregado e pela natureza complexa da pasta de cimento, que é dependente do tempo e da

temperatura. BONGERS & RUTTEN (1998) citam que a espessura da camada de interface varia de 25 μm a 100 μm . Já no trabalho de GARBOCZI & BERRYMAN (1997), esta espessura variava de 10 μm a 30 μm .

LIAO et al. (2004) apresentaram que, para uma variação da relação água/cimento de 0,54 a 0,65, a espessura da zona de transição variou de 0 – 15 μm .

Do que fora relatado sobre a zona de transição, percebe-se que suas propriedades elásticas e sua fração volumétrica são sempre apresentadas em intervalos não sendo, com isso, permitido avaliar de forma precisa a sua influência na resistência à compressão e módulo de elasticidade do concreto.

O objetivo da micromecânica é relacionar as propriedades macroscópicas de materiais heterogêneos e seus parâmetros microestruturais. Com este intuito, segundo MA et al. (2004), inúmeros modelos micromecânicos têm sido relatados, podendo-se citar: modelo de Mori-Tanaka (1973), método auto-consistente (HERSHEY, 1954), modelo auto-consistente generalizado (CHRISTENSEN & LO, 1979) e mais alguns recentemente apresentados como o modelo de inclusão dupla (HORI & NEMAT-NASSER, 1993), modelo de Ponte Castaneda-Willis (PONTE CASTANEDA & WILLIS, 1995) e o método auto-consistente efetivo (ZHENG & DU, 2001).

CRISTENSEN & LO (1979) concluíram que o modelo de três fases foi mais razoável e confiável que outros geralmente utilizados, como o esquema diferencial e o modelo de Mori-Tanaka.

O trabalho de Mori-Tanaka, originalmente voltado para o cálculo de tensões internas médias na matriz do material contendo precipitados com eigenstrain, tem sido o ponto inicial de uma série de trabalhos na literatura de materiais compósitos (BENVENISTE, 1987).

Eigenstrain é um termo genérico introduzido na micromecânica para representar deformações inelásticas como deformações térmicas, deformações iniciais, deformações plásticas ou deformações de transformação de fase (QU & CHERKAOUI, 2006).

No método de Mori-Tanaka aplicou-se o conceito de campo médio para analisar as propriedades macroscópicas de materiais compósitos, associado ao efeito de partículas dispersas em uma matriz infinita introduzido pelo método de Eshelby, para avaliar as propriedades do material compósito (YANG & HUANG, 1996a).

Neste capítulo são abordados alguns modelos de micromecânica que são aplicados para a análise de concretos, mostrando através de resultados prévios quais apresentam melhores resultados e quais as limitações encontradas.

4.2 Equações básicas.

A aplicação dos modelos de micromecânica para materiais compósitos passa inicialmente pela consideração de um elemento de volume representativo (EVR). Na literatura, o conceito de elemento de volume representativo foi introduzido para correlacionar as propriedades macroscópicas do material com as propriedades dos constituintes microscópicos e estruturas microscópicas do material (REN & ZHENG, 2004).

Por definição, elemento de volume representativo é um elemento que possui dimensões suficientemente grandes, de forma que se possa admitir homogeneidade em relação à distribuição dos defeitos nele contidos, porém suficientemente pequenas, de forma a evitar gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Com isto, pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto pela mecânica do contínuo.

Ilustração de um elemento de volume representativo pode ser visualizada na figura 4.1.

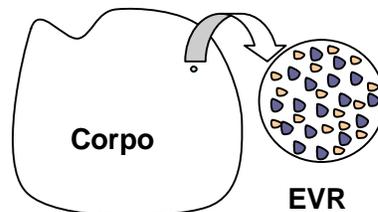


Figura 4.1: Elemento de volume representativo (EVR) do material compósito.

A teoria da micromecânica é empregada para a avaliação das propriedades elásticas dos compósitos através do conhecimento das propriedades elásticas de seus elementos constituintes e de suas respectivas frações de volume.

Assume-se para o compósito a definição de alguns conceitos básicos que envolvem a idéia de campo médio. Segundo QU & CHERKAOUI (2006), a tensão média no compósito pode ser dada pela equação 4.2:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma \cdot dV \quad (4.2)$$

em que σ é o tensor de tensão e $\langle \sigma \rangle$ representa o tensor de tensão média no compósito e V o seu respectivo volume.

De forma análoga, podem-se definir as tensões médias na matriz e na i -ésima fase, como mostrado nas equações 4.3 e 4.4, respectivamente:

$$\langle \sigma \rangle_M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \sigma \cdot dV \quad (4.3)$$

$$\langle \sigma \rangle_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \sigma \cdot dV \quad (4.4)$$

Decorre destas definições, que a tensão média no compósito pode ser determinada através da relação com as tensões médias na matriz e inclusões presentes e suas respectivas frações de volume, podendo-se escrever a equação 4.5:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_M}{V} \int_{V_M} \sigma \cdot dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V} \int_{V_i} \sigma \cdot dV \right] \quad (4.5)$$

Expressando-se a equação 4.5 em função das frações de volume das fases, pode-se escrever a equação 4.6:

$$\langle \sigma \rangle = f_M \langle \sigma \rangle_M + \sum_{i=1}^n f_i \langle \sigma \rangle_i \quad (4.6)$$

onde: $f_M = \frac{V_M}{V}$ e $f_i = \frac{V_i}{V}$ representam as frações volumétricas de matriz e inclusão, respectivamente.

Da mesma forma que para as tensões, podem-se expressar a deformação específica média no compósito através da equação 4.7:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon \cdot dV \quad (4.7)$$

em que ε é o tensor de deformação específica.

Podem-se escrever os tensores de deformação média na matriz e nas inclusões de acordo com as equações 4.8 e 4.9:

$$\langle \varepsilon \rangle_M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon \cdot dV \quad (4.8)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \varepsilon \cdot dV \quad (4.9)$$

Determina-se a deformação média no compósito através das médias na matriz e nas inclusões, similar ao procedimento realizado para as tensões, conforme apresentado na equação 4.10:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \left[\frac{V_M}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon \cdot dV + \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V_i} \int_{V_i} \varepsilon \cdot dV \right] \quad (4.10)$$

Assim como efetuado para as tensões, pode-se expressar o tensor de deformação específica média no compósito em função das frações volumétricas e dos tensores de deformação específica da matriz e das inclusões (equação 4.11):

$$\langle \varepsilon \rangle = f_M \langle \varepsilon \rangle_M + \sum_{i=1}^n f_i \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.11)$$

Da teoria da elasticidade, tem-se para o material compósito a seguinte relação constitutiva, apresentada na equação 4.12:

$$\langle \sigma \rangle = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle \quad (4.12)$$

em que \bar{C} representa o tensor de rigidez de quarta ordem efetiva do material.

De forma análoga, têm-se as relações constitutivas para a matriz e inclusão (equações 4.13 e 4.14):

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M : \langle \varepsilon \rangle_M \quad (4.13)$$

$$\langle \sigma \rangle_i = C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.14)$$

onde C representa o tensor de rigidez.

Para as deformações, aplicando-se desenvolvimento semelhante ao efetuado para as tensões, chega-se às relações constitutivas para o compósito, matriz e inclusão através das equações 4.15, 4.16 e 4.17, respectivamente:

$$\langle \varepsilon \rangle = \bar{D} : \langle \sigma \rangle \quad (4.15)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_M = D_M : \langle \sigma \rangle_M \quad (4.16)$$

$$\langle \varepsilon \rangle_i = D_i : \langle \sigma \rangle_i \quad (4.17)$$

em que \bar{D} , D_M e D_i representam os tensores de flexibilidade para o compósito, matriz e inclusão, respectivamente.

Os tensores de rigidez e de flexibilidade mencionados acima satisfazem à relação de inversibilidade, mostrada na equação 4.18:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \bar{C}^{-1} \\ D_M &= C_M^{-1} \\ D_i &= C_i^{-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Isolando a parcela da matriz na equação 4.6 e substituindo as relações constitutivas apresentadas nas equações 4.11, 4.12 e 4.13, chega-se a (equação 4.19):

$$f_M C_M : \langle \varepsilon \rangle_M = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n f_i C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.19)$$

Manipulando as equações 4.10 e 4.19, obtém-se:

$$f_M C_M : \frac{1}{V_M} \left(\int_V \varepsilon \cdot dV - \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \varepsilon \cdot dV \right) = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n f_i C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.20)$$

Substituindo a fração volumétrica de matriz na equação 4.20, chega-se a (equação 4.21):

$$C_M : \left(\langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n f_i \langle \varepsilon \rangle_i \right) = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^n f_i C_i : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.21)$$

Rearranjando os termos na equação 4.21, obtém-se a expressão que representa uma equação básica da micromecânica, válida para o regime elástico (equação 4.22):

$$\left(\bar{C} - C_M \right) : \langle \varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^n f_i (C_i - C_M) : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.22)$$

De forma análoga, pode-se representar a condição acima em função do tensor de flexibilidade, apresentada na equação 4.23:

$$(\bar{D} - D_M) : \langle \sigma \rangle = \sum_{i=1}^n f_i (D_i - D_M) : \langle \sigma \rangle_i \quad (4.23)$$

Para o caso de uma única inclusão ($i = 1$), pode-se escrever (equação 4.24):

$$(\bar{C} - C_M) : \langle \varepsilon \rangle = f_i \cdot (C_i - C_M) : \langle \varepsilon \rangle_i \quad (4.24)$$

Expressando a deformação na inclusão em função da deformação média no compósito, tem-se a equação 4.25:

$$\langle \varepsilon \rangle_i = A_I : \langle \varepsilon \rangle \quad (4.25)$$

em que A_I é o tensor de concentração de deformação, dado pela equação 4.26:

$$A_I = \frac{1}{f_i} \cdot (C_i - C_M)^{-1} : (\bar{C} - C_M) \quad (4.26)$$

Similarmente, expressando a tensão na inclusão em função da tensão média no material compósito, chega-se a relação apresentada na equação 4.27:

$$\langle \sigma \rangle_i = B_I : \langle \sigma \rangle \quad (4.27)$$

em que B_I é o tensor de concentração de tensão, dado pela equação 4.28:

$$B_I = \frac{1}{f_i} \cdot (D_i - D_M)^{-1} : (\bar{D} - D_M) \quad (4.28)$$

Admitindo um EVR submetido a uma deformação uniforme prescrita em seu contorno ε^0 , tem-se este valor igual a sua deformação média ($\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^0$), apresentado pelo teorema da deformação média (QU & CHERKAOUI, 2006). Para todas as fases presentes no compósito, incluindo a fase matriz, pode-se escrever a equação 4.29:

$$\langle \varepsilon \rangle_r = A_r : \varepsilon^0 \quad (4.29)$$

em que o índice r representa a variação de todas as fases do compósito.

Aplicando esta condição (equação 4.29) e assumindo a matriz como mais uma fase, tem-se o apresentado na equação 4.30:

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{r=1}^n f_r C_r : \langle \varepsilon \rangle_r = \sum_{r=1}^n f_r C_r : A_r : \varepsilon^0 \quad (4.30)$$

Da equação 4.30, conclui-se, que efetuando uma comparação com as relações constitutivas, o tensor de rigidez do compósito pode ser escrito como (equação 4.31):

$$\bar{C} = \sum_{r=1}^n f_r C_r : A_r \quad (4.31)$$

Para o caso do tensor de flexibilidade, admitindo uma tensão uniforme prescrita no contorno do EVR ($\langle \sigma \rangle = \sigma^0$), apresentado pelo teorema da tensão média (QU & CHERKAOUI, 2006), semelhante à situação de se considerar deformações prescritas no contorno, análise igual pode ser procedida, donde se chega a (equação 4.32):

$$\bar{D} = \sum_{r=1}^n f_r C_r : B_r \quad (4.32)$$

Os tensores de concentração de deformação e de tensão servem, em conjunto com os tensores de rigidez dos materiais constituintes e de suas respectivas frações de volume, para expressar os tensores efetivos do material compósito.

4.3 Método de Mori-Tanaka.

Segundo PASA et al. (2008), baseando-se na solução de ESHELBY(1957) e no método da inclusão equivalente, MORI & TANAKA (1973) desenvolveram, a partir da consideração da tensão média na matriz, uma abordagem para a análise de materiais compósitos contendo fibras.

O método de Mori-Tanaka decorre do seguinte lema: Sejam dois domínios elipsoidais, similares e coaxiais Ω_0 e Ω ($\Omega_0 \subset \Omega$), em que $\Omega_0 = \left\{ x / \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1 \right\}$ e $\Omega = \left\{ x / \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} \leq 1 \right\}$ e $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \text{cte}$, onde a e b representam os semi-eixos do elipsóide.

Assume-se que seja imposto um campo de deformação uniforme ε^* no domínio Ω_0 tal que $\varepsilon^*(x) = \varepsilon^*$ no domínio Ω_0 e $\varepsilon^*(x) = 0$ no domínio $\Omega - \Omega_0$.

A deformação específica média no domínio $\Omega - \Omega_0$ pode ser expressa por (equação 4.33):

$$\langle \varepsilon \rangle_{\Omega - \Omega_0} = \frac{1}{\Omega - \Omega_0} \int_{\Omega - \Omega_0} \varepsilon^\infty(x) d\Omega = 0 \quad (4.33)$$

em que o símbolo ∞ representa as dimensões infinitas da matriz em relação à inclusão.

Assume-se que a deformação e a tensão atuantes em qualquer ponto do compósito podem ser expressas pelas equações 4.34 e 4.35, respectivamente:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^0 + \varepsilon^d(x) \quad \forall x \in V \quad (4.34)$$

$$\sigma(x) = \sigma^0 + \sigma^d(x) \quad \forall x \in V \quad (4.35)$$

em que ε^d e σ^d representam deformações e tensões perturbadoras em um ponto do compósito e ε^0 e σ^0 representam as deformações e tensões uniformes aplicadas no contorno do compósito.

Sabe-se que dentro da inclusão pode ser aplicada a fórmula de Eshelby ($\langle \varepsilon \rangle_i = \varepsilon^0 + S : \varepsilon^*$), apresentada em ESHELBY (1957) apud QU & CHERKAOUI (2006), e substituindo na equação geral do método da inclusão equivalente, apresentado no apêndice A, chega-se a equação 4.36:

$$\langle \varepsilon \rangle_i = ((C_M - C_i)^{-1} : C_M : \varepsilon^*) = \varepsilon^0 + S : \varepsilon^* \quad (4.36)$$

onde S é o tensor de Eshelby. Rearranjando os dois últimos membros da equação 4.36, pode-se obter ε^* em função de ε^0 (equação 4.37):

$$\varepsilon^* = [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1} : \varepsilon^0 \quad (4.37)$$

Pode-se escrever a deformação média na inclusão como a equação 4.38:

$$\langle \varepsilon \rangle_i = \{I + S : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} : \varepsilon^0 \quad (4.38)$$

Expressando-se a tensão em função de ε^0 e utilizando a relação $\langle \sigma \rangle_i = C_M : (\langle \varepsilon \rangle_i - \varepsilon^*)$, pode-se escrever a equação 4.39:

$$\langle \sigma \rangle_i = C_M : \{I + (S - I) : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} : \varepsilon^0 \quad (4.39)$$

O lema de Mori-Tanaka apresenta a condição de que a deformação média na matriz é igual à deformação uniforme, que está sendo imposta no compósito. Através da equação 4.40, mostra-se esta condição:

$$\langle \varepsilon \rangle_M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} (\varepsilon^0 + \varepsilon^d(x)) dV_M = \varepsilon^0 + \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon^d(x) dV_M = \varepsilon^0 + \langle \varepsilon^d \rangle_M \quad (4.40)$$

O método de Mori-Tanaka faz a aproximação para o termo $\langle \varepsilon^d \rangle_M$ ser nulo, sendo esta condição válida para volume elipsoidal (QU & CHERKAOUI, 2006).

Aplicando-se a relação de Eshelby e de posse da relação $\langle \varepsilon \rangle_M = \varepsilon^0$ em conjunto com a equação 4.25, tem-se a equação 4.41:

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^0 + f_i S : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1} : \varepsilon^0 \quad (4.41)$$

que reorganizada, pode ser escrita como (equação 4.42):

$$\langle \varepsilon \rangle = \{I + f_i S : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} : \varepsilon^0 \quad (4.42)$$

De forma análoga, para a tensão média no compósito, obtém-se a equação 4.43:

$$\langle \sigma \rangle = C_M : \{I + f_i (S - I) : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} : \varepsilon^0 \quad (4.43)$$

Através da relação constitutiva para o material compósito envolvendo a tensão e deformação específica médias, pode-se determinar o tensor elástico efetivo através da equação 4.44:

$$\bar{C} = C_M : \{I + f_i (S - I) : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} : \{I + f_i S : [(C_M - C_i)^{-1} : C_M - S]^{-1}\} \quad (4.44)$$

Para o domínio da inclusão Ω_0 , a deformação média e a tensão média podem ser escritas como mostrado nas equações 4.45 e 4.46:

$$\langle \varepsilon \rangle^{\Omega_0} = \langle \varepsilon \rangle_M + S^{\Omega_0} : \varepsilon^* \quad (4.45)$$

$$\langle \sigma \rangle^{\Omega_0} = \langle \sigma \rangle_M + T^{\Omega_0} : \sigma^* \quad (4.46)$$

Aplicando o método da inclusão equivalente para o domínio Ω_0 , tem-se a equação 4.47:

$$C_M : \langle \varepsilon \rangle^{\Omega} = C_M : (\langle \varepsilon \rangle^{\Omega} - \varepsilon^*) \quad (4.47)$$

Escrevendo $\langle \varepsilon \rangle^{\Omega}$ em função de ε^* , chega-se a relação descrita na equação 4.48:

$$\langle \varepsilon \rangle^{\Omega} = A^{\Omega} : \varepsilon^* \quad (4.48)$$

em que A^{Ω} é dado pela equação 4.49:

$$A^\Omega = (C_M - C_i)^{-1} : C_M \quad (4.49)$$

Igualando a equação 4.45 à equação 4.48, chega-se à equação 4.50:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle_M + S^\Omega : \varepsilon^* &= A^\Omega : \varepsilon^* \\ \varepsilon^* &= (A^\Omega - S^\Omega)^{-1} : \langle \varepsilon \rangle_M \end{aligned} \quad (4.50)$$

Substituindo ε^* na equação 4.45, encontra-se (equação 4.51):

$$\langle \varepsilon \rangle^\Omega = A_{dil}^\Omega : \langle \varepsilon \rangle_M \quad (4.51)$$

em que A_{dil}^Ω é fornecido pela equação 4.52:

$$A_{dil}^\Omega = A^\Omega : (A^\Omega - S^\Omega)^{-1} = [I - S^\Omega : C_M^{-1} : (C_M - C^\Omega)]^{-1} \quad (4.52)$$

Por raciocínio semelhante, pode-se determinar o tensor que associa a tensão média no domínio da matriz, como apresentado na equação 4.53:

$$\langle \sigma \rangle^\Omega = B_{dil}^\Omega : \langle \sigma \rangle_M \quad (4.53)$$

em que B_{dil}^Ω é dado por (equação 4.54):

$$B_{dil}^\Omega = B^\Omega : (B^\Omega - T^\Omega)^{-1} = [I - T^\Omega : D_M^{-1} : (D_M - D^\Omega)]^{-1} \quad (4.54)$$

em que T representa o tensor que relaciona as deformações totais com as deformações na matriz do compósito.

Expressando a deformação média no compósito em função da deformação média na matriz, obtém-se a equação 4.55:

$$\langle \varepsilon \rangle = f_i A_{dil}^\Omega : \langle \varepsilon \rangle_M + (1 - f_i) \langle \varepsilon \rangle_M \quad (4.55)$$

Colocando $\langle \varepsilon \rangle_M$ em função de $\langle \varepsilon \rangle$, tem-se a equação 4.56:

$$\langle \varepsilon \rangle_M = \tilde{A}^M : \langle \varepsilon \rangle \quad (4.56)$$

em que \tilde{A}^M é dado pela equação 4.57:

$$\tilde{A}^M = [f_i A_{dil}^\Omega + (1 - f_i) I]^{-1} \quad (4.57)$$

Determinando a deformação média na inclusão em função da deformação média no compósito, tem-se (equação 4.58):

$$\langle \varepsilon \rangle^\Omega = A_{dil}^\Omega : \tilde{A}^M : \langle \varepsilon \rangle \quad (4.58)$$

Analogamente para as tensões, tem-se (equação 4.59):

$$\langle \sigma \rangle^\Omega = B_{dil}^\Omega : \tilde{B}^M : \langle \sigma \rangle \quad (4.59)$$

em que \tilde{B}^M é calculado pela equação 4.60:

$$\tilde{B}^M = [f_i B_{dil}^\Omega + (1 - f_i)I]^{-1} \quad (4.60)$$

Expressando a tensão média em função da deformação na matriz e na inclusão, chega-se a equação 4.61:

$$\langle \sigma \rangle = f_i C^\Omega : \langle \varepsilon \rangle^\Omega + (1 - f_i) C_M : \langle \varepsilon \rangle_M \quad (4.61)$$

Aplicando-se as equações 4.56 e 4.58 e rearranjando os termos na relação 4.61, obtém-se (equação 4.62):

$$\langle \sigma \rangle = f_i C^\Omega : A_{dil}^\Omega : \tilde{A}^M + (1 - f_i) C_M : \tilde{A}^M \quad (4.62)$$

Simplificando-se a expressão acima para $\langle \sigma \rangle = \bar{C}^{MT} : \langle \varepsilon \rangle$, em que \bar{C}^{MT} é o tensor elástico efetivo de Mori-Tanaka, fornecido pela equação 4.63, que rege a determinação das propriedades efetivas de materiais compósitos pelo respectivo método:

$$\bar{C}^{MT} = [f_i C^\Omega : A_{dil}^\Omega + (1 - f_i) C_M] : \tilde{A}^M \quad (4.63)$$

4.4 Modelo de três fases.

CHRISTENSEN & LO (1979) desenvolveram um modelo esférico de três fases para estimar o módulo de cisalhamento efetivo de materiais compósitos bifásicos particulados (LI et al., 1999). Um mérito deste modelo é a consideração da interação dos campos de tensão e deformação entre a inclusão e o meio ao redor desta.

Segundo QU & CHERKAOUI (2006), assim como o modelo da esfera compósita, o modelo de três fases assume que cada partícula de raio a (domínio Ω_0) é envolvida por uma casca de matriz de espessura $b-a$ (domínio $\Omega - \Omega_0$), conforme pode ser observado na figura

4.2. A fração volumétrica de inclusão é tomada como uma relação entre os raios, sendo dada

por $f_I = \left(\frac{a}{b}\right)^3$.

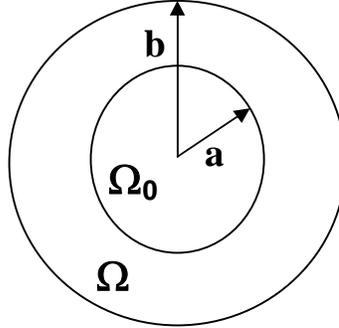


Figura 4.2: Domínios esféricos para o modelo de duas fases.

As fases matriz e inclusão do modelo apresentado na figura 4.2 possuem tensores de rigidez e de flexibilidade distintos, C e C^{Ω} e D e D^{Ω} , em que estes tensores satisfazem à condição de domínio apresentada nas equações 4.64 e 4.65:

$$C' = C'(x) = \begin{cases} C^{\Omega_0} & \Omega_0 (0 < r < a) \\ C & \Omega (a < r < b) \end{cases} \quad (4.64)$$

$$D' = D'(x) = \begin{cases} D^{\Omega_0} & \Omega_0 (0 < r < a) \\ D & \Omega (a < r < b) \end{cases} \quad (4.65)$$

em que os tensores variam em função de x , sendo a origem posicionada no centro comum das duas esferas e os índices Ω e Ω_0 representam os domínios da esfera.

Sob condições de carregamento esfericamente simétricos, a deformação sobre o volume V é esfericamente simétrica (NEMAT-NASSER & HORI, 1999).

O deslocamento radial pode ser expresso pelas condições impostas na equação 4.66:

$$u_r(r) = \begin{cases} A^{\Omega} r & 0 < r < a \\ Ar + Br^{-2} & a < r < b \end{cases} \quad (4.66)$$

em que A , B e A^{Ω} são dados pelas equações 4.67, 4.68 e 4.69, respectivamente:

$$A = L \frac{\sigma^0}{4G_M} \quad (4.67)$$

$$B = b^3 \left(L \frac{3K_M}{4G_M} - 1 \right) \frac{\sigma^0}{4G_M} \quad (4.68)$$

$$A^\Omega = A + \frac{B}{a^3} \quad (4.69)$$

onde σ^0 representa a tensão no contorno e o valor de L fornecido pela equação 4.70:

$$L = \frac{4}{3} \frac{3K_i + 4G_M}{4(K_i - K_M)f_i + 3(K_M K_i / G_M) + 4K_M} \quad (4.70)$$

Como referenciado para o caso dos tensores elásticos, K_M e G_M são os módulos volumétrico e de cisalhamento para a matriz, enquanto K_i e G_i são os respectivos módulos para a inclusão.

Sabe-se que a tensão média sobre o volume V é conhecida ($\langle \sigma \rangle = \sigma^0$), podendo-se através desta condição expressar a deformação média, como apresentado na equação 4.71:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sigma^0 \left\{ K_M + f_i \frac{(K_i - K_M)(3K_M + 4G_M)}{3K_M + 4G_M + 3(1 - f_i)(K_i - K_M)} \right\} \quad (4.71)$$

Então, o módulo volumétrico efetivo \bar{K} pode ser expresso pela equação 4.72:

$$\frac{\bar{K}}{K_M} = 1 + f_i \frac{(K_i - K_M)(3K_M + 4G_M)}{K_M(3K_M + 4G_M + 3(1 - f_i)(K_i - K_M))} \quad (4.72)$$

Para estimar o módulo de cisalhamento efetivo \bar{G} , outras condições diferentes das apresentadas na equação 4.66 devem ser consideradas. Para grandes frações de volume de inclusão, HASHIN (1962) apud NEMAT-NASSER & HORI (1999) obteve a seguinte estimativa de \bar{G} , conforme apresentado na equação 4.73:

$$\frac{\bar{G}}{G_i} = 1 - (1 - f_i) \frac{(G_i - G_M) \{ (7 - 5\nu_M)G_M + 2(4 - 5\nu_M)G_i \}}{15(1 - \nu_M)G_M G_i} \quad (4.73)$$

em que ν_M é o coeficiente de Poisson da matriz.

O modelo de três fases considera a esfera (matriz e inclusão) envolvida em um meio homogêneo infinito (Figura 4.3), submetido a tensões e deformações uniformes aplicadas muito distantes da inclusão. Estas tensões e deformações são denominadas como σ^∞ e ε^∞ , respectivamente.

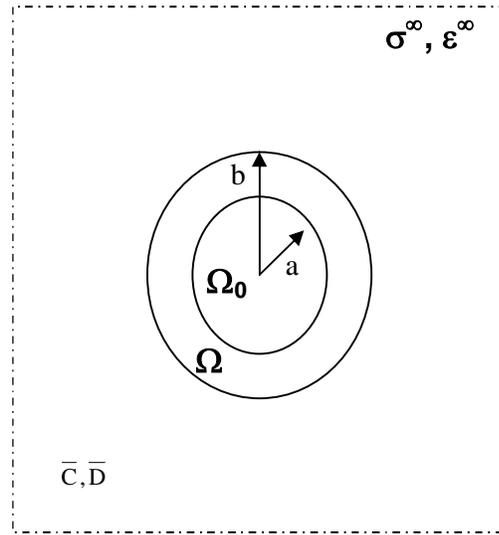


Figura 4.3: Modelo de três fases.

As condições de domínio para este novo caso são descritas na equação 4.74:

$$C' = C'(x) = \begin{cases} C^{\Omega_0} & 0 < r < a \\ C & a < r < b \\ \bar{C} & b < r \end{cases} \quad (4.74)$$

As mesmas restrições são impostas ao tensor de flexibilidade D.

O módulo de elasticidade volumétrico K para este modelo de três fases é o mesmo obtido na equação 4.72, para o caso de duas fases (NEMAT-NASSER & HORI, 1999).

Assumindo um sistema de coordenadas esférico com a origem no centro comum das esferas e tendo de posse a mesma fração volumétrica para o caso de duas fases, pode-se determinar o deslocamento nas direções radial e angular através da equação 4.75:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U_r \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi \\ u_\theta &= U_\theta \text{sen} \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi &= U_\phi \text{sen} \theta \text{sen} 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

onde $U_\theta = -U_\phi$, sendo U_r , U_θ e U_ϕ são dados em função de r somente e de r, θ e ϕ , são as coordenadas esféricas usuais.

Segundo LOVE (1927) apud CHRISTENSEN & LO (1979), a forma geral das soluções de elasticidade das equações de equilíbrio apropriada para as três regiões são dadas

pelas equações 4.76, 4.77 e 4.78, para os casos de deslocamentos do meio homogêneo equivalente, matriz e inclusão, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} U_{rE} &= D_1 r + \frac{3D_3}{r^4} + \frac{(5-4\bar{\nu})D_4}{(1-2\bar{\nu})r^2} \\ U_{\theta E} &= D_1 r - \frac{2D_3}{r^4} + \frac{2D_4}{r^2} \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (4.76)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{rM} &= B_1 r - \frac{6\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 r^3 + \frac{3B_3}{r^4} + \frac{(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)r^2} \\ U_{\theta M} &= B_1 r - \frac{(7-4\nu_M)}{(1-2\nu_M)} B_2 r^3 + \frac{2B_3}{r^4} + \frac{2B_4}{r^2} \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (4.77)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{rI} &= A_1 r - \frac{6\nu_i}{(1-2\nu_i)} A_2 r^3 \\ U_{\theta I} &= A_1 r - \frac{(7-4\nu_i)}{(1-2\nu_i)} A_2 r^3 \end{aligned} \right\} 0 \leq r \leq a. \quad (4.78)$$

Para as tensões, as soluções das equações de equilíbrio são dadas pelas equações 4.79, 4.80 e 4.81, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rE} &= -\frac{6\lambda D_4}{r^3} + 2\bar{G} \left[D_1 - \frac{12D_3}{r^5} + \frac{2(5-4\bar{\nu})D_4}{(1-2\bar{\nu})r^3} \right] \\ \tau_{\theta E} &= \bar{G} \left[D_1 + \frac{8D_3}{r^5} + \frac{2(5-4\bar{\nu})D_4}{(1-2\bar{\nu})r^3} \right] \end{aligned} \right\} r \geq b \quad (4.79)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rM} &= 3\lambda_M \left[7B_2 r^2 - \frac{2B_4}{r^3} \right] + \\ &+ 2G_M \left[B_1 - \frac{18\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 r^2 - \frac{12B_3}{r^3} - \frac{2(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)r^3} \right] \\ \tau_{\theta M} &= G_M \left[B_1 - \frac{(7-2\nu_{Mm})}{(1-2\nu_M)} B_2 r^2 + \frac{8B_3}{r^3} + \frac{2(1+\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)r^3} \right] \end{aligned} \right\} a \leq r \leq b \quad (4.80)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rI} &= 21\lambda_i A_2 r^2 + 2G_i \left[A_1 - \frac{18\nu_i}{(1-2\nu_i)} A_2 r^2 \right] \\ \tau_{\theta I} &= G_i \left[A_1 - \frac{(7+2\nu_i)}{(1-2\nu_i)} A_2 r^2 \right] \end{aligned} \right\} 0 \leq r \leq a \quad (4.81)$$

Das equações acima surgem nove constantes ($D_1, D_3, D_4, B_1, B_2, B_3, B_4, A_1$ e A_2) a serem determinadas pelas condições de continuidade das interfaces meio equivalente – matriz e matriz – inclusão.

Para a solução deste problema, torna-se necessário a aplicação de condições de contorno que garantam a continuidade das tensões e deslocamentos, conforme apresentado em CHRISTENSEN & LO (1979), que resultam em oito equações que são aplicadas nos limites entre as fases, apresentadas nas equações 4.82 e 4.83:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 a - \frac{6\nu_i}{(1-2\nu_i)} A_2 a^3 &= B_1 a - \frac{6\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 a^3 + \frac{3B_3}{a^4} + \frac{(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)a^2} \\
 A_1 a - \frac{(7-4\nu_i)}{(1-2\nu_i)} A_2 a^3 &= B_1 a - \frac{(7-4\nu_M)}{(1-2\nu_M)} B_2 a^3 + \frac{2B_3}{a^4} + \frac{2B_4}{a^2} \\
 B_1 b - \frac{6\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 b^3 + \frac{3B_3}{b^4} + \frac{(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)b^2} &= D_1 b + \frac{3D_3}{b^4} + \frac{(5-4\nu)D_4}{(1-2\nu)b^2} \\
 B_1 b - \frac{(7-4\nu_M)}{(1-2\nu_M)} B_2 b^3 + \frac{2B_3}{b^4} + \frac{2B_4}{b^2} &= D_1 b - \frac{2D_3}{b^4} + \frac{2D_4}{b^2}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{desl. em } r = a \\ \text{desl. em } r = b \end{array} \quad (4.82)$$

$$\left. \begin{aligned}
 21\lambda_I A_2 a^2 + 2G_i \left[A_1 - \frac{18\nu_i}{(1-2\nu_i)} A_2 a^2 \right] &= \\
 3\lambda_M \left[7B_2 a^2 - \frac{2B_4}{a^3} \right] + 2G_M \left[B_1 - \frac{18\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 a^2 - \frac{12B_3}{a^3} - \frac{2(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)a^3} \right] & \\
 G_i \left[A_1 - \frac{(7+2\nu_i)}{(1-2\nu_i)} A_2 a^2 \right] = G_M \left[B_1 - \frac{(7-2\nu_M)}{(1-2\nu_M)} B_2 a^2 + \frac{8B_3}{a^3} + \frac{2(1+\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)a^3} \right] & \\
 3\lambda_M \left[7B_2 b^2 - \frac{2B_4}{b^3} \right] + 2G_M \left[B_1 - \frac{18\nu_M}{(1-2\nu_M)} B_2 b^2 - \frac{12B_3}{b^3} - \frac{2(5-4\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)b^3} \right] & \\
 = -\frac{6\lambda D_4}{br^3} + 2G \left[D_1 - \frac{12D_3}{b^5} + \frac{2(5-4\nu)D_4}{(1-2\nu)b^3} \right] & \\
 G_M \left[B_1 - \frac{(7-2\nu_M)}{(1-2\nu_M)} B_2 b^2 + \frac{8B_3}{b^3} + \frac{2(1+\nu_M)B_4}{(1-2\nu_M)b^3} \right] = G \left[D_1 + \frac{8D_3}{b^5} + \frac{2(5-4\nu)D_4}{(1-2\nu)b^3} \right] &
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tensão em } r = a \\ \text{tensão em } r = b \end{array} \quad (4.83)$$

Na equação 4.83 surgiram as constantes λ_i , λ_m e λ , que são as constantes de Lamé para a inclusão, matriz e meio homogêneo equivalente, respectivamente. A constante D_1 pode ser determinada diretamente das condições de deformação de cisalhamento uniforme a uma distância infinita da origem.

Para o caso de deslocamento imposto sobre o contorno do meio heterogêneo, ESHELBY (1956) apud CHRISTENSEN & LO (1979) mostrou que a energia de deformação

U, sob condições de deslocamento aplicadas no contorno do compósito, pode ser determinada por (equação 4.84):

$$U = U_0 - \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) dS. \quad (4.84)$$

Através do processo de homogeneização do meio compósito, existe uma relação entre as energias do meio real (U_0) e do meio homogeneizado (U_{eq}), apresentada na equação 4.85.

$$\begin{aligned} U &= U_{eq} \\ U_{eq} &= U_0 \\ U &= U_0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

De posse da condição mostrada na equação 4.85, a equação 4.84 passa a ser escrita como (equação 4.86):

$$\frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) dS = 0. \quad (4.86)$$

Substituindo as tensões e deformações nas direções radial e angular na condição apresentada na equação 4.86, obtemos a equação 4.87:

$$\frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_r^0 u_{re} + \tau_{r\theta}^0 u_{\theta e} + \tau_{r\phi}^0 u_{\phi e} - \sigma_{re} u_r^0 - \tau_{r\theta e} u_\theta^0 - \tau_{r\phi e} u_\phi^0) dS = 0 \quad (4.87)$$

em que se pode escrever $dS = b^2 \sin\theta d\phi d\theta$.

Segundo CHRISTENSEN & LO (1979), as condições de cisalhamento para o problema são apresentadas nas equações 4.88 e 4.89:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= 2\bar{G}D_1 \sin^2\theta \cos 2\phi \\ \tau_{r\theta}^0 &= 2\bar{G}D_1 \sin\theta \cos\theta \cos 2\phi \\ \tau_{r\phi}^0 &= -2\bar{G}D_1 \sin\theta \sin 2\phi \\ u_r^0 &= D_1 r \sin^2\theta \cos 2\phi \\ u_\theta^0 &= D_1 r \sin\theta \cos\theta \cos 2\phi \\ u_\phi^0 &= -D_1 r \sin\theta \sin 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{re} &= 2\text{sen}^2\theta \cos 2\phi \left\{ \frac{-3D_1\lambda}{r^3} + \bar{G} \left[D_1 - \frac{12D_3}{r^5} - \frac{2(5-4\bar{v})D_4}{(1-2\bar{v})r^3} \right] \right\} \\ \tau_{r\theta e} &= \bar{G} \text{sen} 2\theta \cos 2\phi \left[D_1 + \frac{8D_3}{r^5} + \frac{4(1+\bar{v})D_4}{(1-2\bar{v})r^3} \right] \\ \tau_{r\phi e} &= \bar{G} \text{sen}\theta \text{sen} 2\phi \left[-2D_1 - \frac{16D_3}{r^5} + \frac{4(1+\bar{v})D_4}{(1-2\bar{v})r^3} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.89)$$

Substituindo as equações 4.75, 4.88 e 4.89 na equação 4.87, obtém-se o valor da constante $D_4=0$. Para esta condição encontrada, resolvendo para o módulo de cisalhamento efetivo G , tem-se a expressão apresentada na equação 4.90, com a qual se determina o módulo de cisalhamento efetivo do material compósito:

$$A \left(\frac{\bar{G}}{G_M} \right)^2 + B \left(\frac{\bar{G}}{G_M} \right) + C = 0 \quad (4.90)$$

em que as constantes A, B e C são fornecidas pelas equações 4.91, 4.92 e 4.93, respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= 8 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (4 - 5\nu_M) \eta_1 f_i^{10/3} - 2 \left[63 \left(\frac{G_i}{G_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f_i^{7/3} \\ &+ 252 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] \eta_2 f_i^{5/3} - 50 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (7 - 12\nu_M + 8\nu_M^2) \eta_2 f_i \\ &+ 4(7 - 10\nu_M) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} B &= -4 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (1 - 5\nu_M) \eta_1 f_i^{10/3} + 4 \left[63 \left(\frac{G_i}{G_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f_i^{7/3} \\ &- 504 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] \eta_2 f_i^{5/3} + 150 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (3 - \nu_M) \nu_M \eta_2 f_i + 3(15\nu_M - 7) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} C &= 4 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (5\nu_M - 7) \eta_1 f_i^{10/3} - 2 \left[63 \left(\frac{G_i}{G_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f_i^{7/3} \\ &+ 252 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] \eta_2 f_i^{5/3} + 25 \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (\nu_M^2 - 7) \eta_2 f_i - (7 + 5\nu_M) \eta_2 \eta_3 \end{aligned} \quad (4.93)$$

e os valores das constantes presentes nas relações acima η_1 , η_2 e η_3 são fornecidos pela equação 4.94:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \left[\frac{G_i}{G_M} - 1 \right] (49 - 50v_i v_M) + 35 \left(\frac{G_i}{G_M} \right) (v_i - 2v_M) + 35(2v_i - v_M) \\ \eta_2 &= 5v_i \left[\frac{G_i}{G_M} - 8 \right] + 7 \left[\frac{G_i}{G_M} + 4 \right] \\ \eta_3 &= \left(\frac{G_i}{G_M} \right) (8 - 10v_M) + (7 - 5v_M) \end{aligned} \right\}. \quad (4.94)$$

De posse dos valores dos módulos de deformação volumétrica e de cisalhamento efetivos, pode-se determinar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson para o material compósito.

4.5 Limites de Hashin-Shtrikman.

Segundo HERNANDEZ et al. (2006), Hashin-Shtrikman apresentaram os limites superior e inferior mais precisos para o módulo elástico de materiais homogêneos e isotrópicos com geometria de fase arbitrária, baseada nos princípios da teoria da elasticidade linear.

Apresentam-se em MONTEIRO (1993) conclusões sobre os limites de Hashin-Shtrikman, a saber:

- Se o material composto se comportar como um contínuo bifásico ele satisfará os referidos limites;
- Um material verdadeiramente bifásico deverá satisfazer os limites, e se não as obedecer não poderá ser considerado como material bifásico.

A proposição de que se os pontos se encontrarem fora da envoltória o material não seria bifásico, implica em dizer que o mesmo poderia ser assumido como possuindo três ou mais fases em sua constituição

Anteriormente a estes limites, Voigt e Reuss também apresentaram limites para análise do módulo elástico de materiais compósitos, sendo detectadas diferenças significativas, não sendo possível sua utilização para análises mais precisas.

Os limites inferior e superior de Hashin-Shtrikman podem ser calculados segundo as equações 4.95 e 4.96, respectivamente [SIMEONOV & AHMAD (1995), MONTEIRO (1993)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{inf}} = K_M + \frac{f_i}{\frac{1}{K_i - K_M} + \frac{3f_M}{3K_M + 4G_M}} \\ G_{\text{inf}} = G_M + \frac{f_i}{\frac{1}{G_i - G_M} + \frac{6f_M(K_M + 2G_M)}{5G_M(3K_M + 4G_M)}} \end{array} \right. \quad (4.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\text{sup}} = K_i + \frac{f_M}{\frac{1}{K_M - K_i} + \frac{3f_i}{3K_i + 4G_i}} \\ G_S = G_i + \frac{f_M}{\frac{1}{G_M - G_i} + \frac{6f_i(K_i + 2G_i)}{5G_i(3K_i + 4G_i)}} \end{array} \right. \quad (4.96)$$

em que K_i e G_i são os módulos volumétrico e de cisalhamento da inclusão, K_M e G_M são os módulos volumétrico e de cisalhamento da matriz e f_i e f_M são as respectivas frações de volume destas fases.

4.6 Exemplos de aplicação.

Com a aplicação dos modelos micromecânicos e utilização de valores experimentais, pretende-se mostrar, inicialmente, que o concreto e as argamassas não podem ser tratados como materiais bifásicos. Esta verificação é procedida aplicando os limites de Hashin – Shtrikman.

A partir de modelagem inversa baseada em HASHIN E MONTEIRO (2002) e resultados experimentais, busca-se obter uma caracterização das propriedades elásticas da zona de transição e os parâmetros que têm interferência nestas propriedades como o tamanho do agregado e a relação água/cimento. Com as propriedades da zona de transição já avaliadas, pode-se concluir sobre a eficiência dos diversos modelos empregados para a caracterização dos concretos e argamassas.

São apresentadas análises com alguns exemplos, cujo alvo é a avaliação do módulo de elasticidade do concreto e de outros materiais compósitos. O objetivo destes exemplos é a análise dos modelos de micromecânica apresentados, e avaliar qual melhor se aplica para a determinação do módulo de elasticidade do concreto.

4.6.1 Exemplo 1: Modelagem de mistura asfáltica.

O exemplo baseia-se na aplicação realizada por CAVALCANTE NETO et al. (2003), que realiza uma modelagem de uma mistura de asfalto como material compósito, e analisa o módulo de elasticidade deste material através da utilização de elementos finitos.

A mistura do asfalto é composta de um teor de 91.27% de binder (Aglomerante) e 8.73% de agregado, cujas propriedades elásticas são apresentadas na tabela 4.1:

Tabela 4.1: Propriedades elásticas dos constituintes (CAVALCANTE NETO et al., 2003).

Constituintes	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson
Binder	1,320	0,3
Agregado	40,500	0,2

Para a avaliação desta mistura, foi extraído através de um espécime cilíndrico de areia-asfalto, um elemento de volume representativo decorrente de uma imagem digitalizada, observada na figura 4.4. A partir deste EVR, foi efetuada a geração de uma malha de elementos finitos bidimensionais, também apresentada na figura 4.4, através da qual foi avaliada as propriedades efetivas do material compósito.

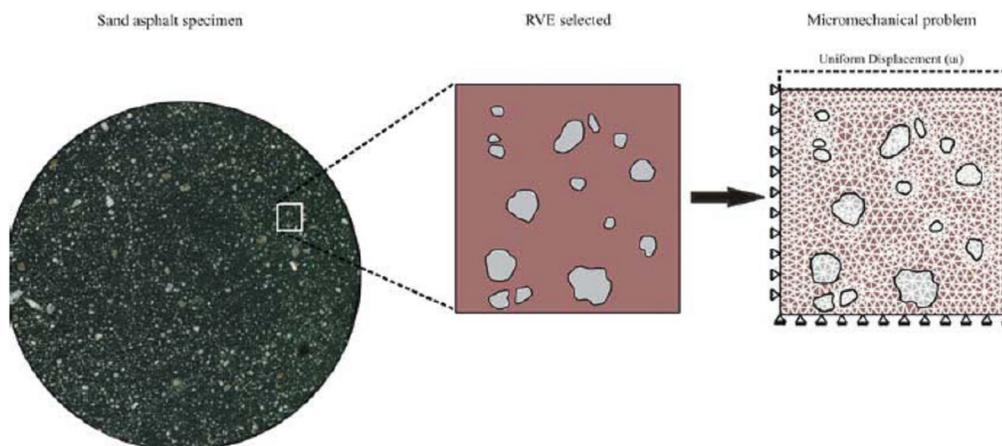


Figura 4.4: EVR e malha de elementos finitos obtidas a partir da seção do espécime de areia-asfalto (CAVALCANTE NETO et al., 2003).

Para a análise e discussão deste exemplo são utilizados os métodos de Mori-Tanaka, modelo de três fases, esquemas auto-consistente e diferencial. O uso destes métodos pode

mostrar a aplicabilidade e a eficiência dos mesmos para a previsão das propriedades efetivas de materiais compósitos.

Para as propriedades dos materiais constituintes observadas na tabela 4.1 e para uma fração volumétrica de agregado de 8.73%, foram obtidos os seguintes resultados, dispostos na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Resultados obtidos com a aplicação dos modelos de micromecânica (exemplo 1).

Método	Módulo de elasticidade (GPa)	Erro (%)
MEF	1,570	-
Mori-Tanaka	1,5591	0,69
Auto-consistente	1,5811	0,71
Esquema diferencial	1,5396	1,94
Esfera três fases	1,5613	0,55

Os resultados apresentados na tabela 4.2 atestam a eficiência dos métodos micromecânicos na determinação de propriedades elásticas de materiais compósitos. Vale ressaltar os baixos erros em relação ao Método dos Elementos Finitos (MEF).

4.6.2 Exemplo 2: Avaliação experimental do módulo de elasticidade do concreto.

Com o objetivo de se comparar a qualidade dos resultados anteriores, procedeu-se uma análise experimental dos concretos para a avaliação dos modelos. O concreto foi confeccionado no Laboratório de Estruturas e Materiais do NPT/UFAL, com resistência de dosagem de 25 MPa. O traço dosado tinha a proporção 1:1,957:2,638:0,48 (cimento:areia:brita:água), do qual foram moldados 2 corpos-de-prova de 15 x 30 cm com concreto e deste concreto foram extraídos 2 corpos-de-prova de 5 x 10 cm com argamassa.

As características dos materiais empregados na moldagem estão apresentadas na tabela 4.3:

Tabela 4.3: Dados da dosagem (exemplo 2).

	Cimento	Areia	Brita
Massa unitária (kg/m³)	-	1482	1411
Massa específica (kg/m³)	3150	2604	-
Módulo de finura	-	2,8	-
Teor de argamassa = 0,53			

Nos ensaios, mediu-se para os corpos-de-prova moldados o módulo de elasticidade. O coeficiente de Poisson para o concreto e para a argamassa foi estimado tomando como base dados da literatura. A figura 4.5 mostra os corpos-de-prova dispostos na prensa para a realização do ensaio.



Figura 4.5: Corpos-de-prova dispostos para a realização do ensaio de módulo de elasticidade.

Para o agregado as propriedades necessárias foram estimadas a partir dos valores citados por FALCÃO BAUER (2000) para agregado de origem basáltica, tomando por base seu valor médio, valores estes apresentados na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Dados do agregado (exemplo 2).

Agregado	
Módulo de elasticidade	57 GPa
Coefficiente de Poisson	0,28

A carga máxima aplicada para a determinação do módulo de elasticidade do concreto foi de 16.800 kgf, equivalente a 30% da carga de ruptura do corpo-de-prova de concreto (NBR 8522:2008). Os valores obtidos dos ensaios para o concreto e a argamassa estão dispostos na tabela 4.5:

Tabela 4.5: Valores das propriedades elásticas do concreto e argamassa.

Módulo de elasticidade (GPa)	
Concreto	37,1
Argamassa	33,6

Para a argamassa, assumiu-se o valor do coeficiente de Poisson igual a 0,17. Este valor foi adotado baseando-se em ANSON & NEWMAN (1966) apud SIMEONOV & AHMAD (1995), no qual é dito que o coeficiente de Poisson da argamassa encontra-se no intervalo de

0,17 a 0,23. Já para o concreto não foi possível quantificá-lo experimentalmente, sendo seu valor fornecido quando da aplicação dos modelos. Vale lembrar que a NBR 6118:2003 considera o valor do coeficiente de Poisson igual a 0,2. Com as propriedades descritas para os materiais, encontram-se os valores apresentados na tabela 4.6.

Tabela 4.6: Dados numéricos e experimentais (exemplo 5).

	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson
Experimental	37.1	-
Mori-Tanaka	43	0.22
Auto-consistente	43.2	0.22
Esquema diferencial	41.8	0.21
Esfera de três fases	43	0.22

A tabela 4.7 apresenta a comparação do valor do módulo de elasticidade do concreto em relação aos limites de Hashin-Shtrikman, notando-se que o comportamento apresentado pelo concreto, dosado experimentalmente, atesta a idéia de que o concreto não deve ser considerado como um material bifásico.

Tabela 4.7: Limites de Hashin – Shtrikman para o caso experimental.

Experimental	Limites de Hashin - Shtrikman	
	Inferior	Superior
37.1	43.1	43.5

Determinando através da aplicação do método inverso (HASHIN & MONTEIRO, 2002), exposto no apêndice A, as propriedades da zona de transição são apresentadas na tabela 4.8:

Tabela 4.8: Propriedades da zona de transição (exemplo 2).

E (GPa)	ν	K (GPa)	G (GPa)
16.8	0.15	8	7.3

Segundo LARBI (1991) apud BONGERS & RUTTEN (1998), a zona de transição ocupa de 30% a 50% do volume total da pasta de cimento. Considerando-se a presença da interface e se estimando que ela ocupe uma fração de 35% do volume de argamassa da mistura, obtêm-se os resultados descritos na tabela 4.9:

Tabela 4.9: Propriedades elásticas do concreto com a consideração de ITZ.

	Módulo de elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson
Experimental	37.1	-
Mori-Tanaka	37.7	0.22
Auto-consistente	38	0.22
Esquema diferencial	35	0.2
Esfera de três fases	37.7	0.22

Esta análise, em que foi considerada a zona de transição para os modelos citados na tabela 4.9 foi procedida da seguinte forma: determinaram-se as propriedades efetivas entre a matriz de argamassa e a zona de transição e, em seguida, com estas propriedades efetivas, aplica-se o modelo tendo como inclusão o agregado.

Quando a zona de transição é considerada, nota-se a melhor aproximação dos resultados fornecidos pelos modelos de micromecânica, implicando em dizer que o concreto deve ser modelado como um material contendo esta fase, que exerce, notadamente, significativa influência nas suas propriedades elásticas.

Outra importante consideração a ser feita é que as propriedades da zona de transição estão dentro de limites descritos na literatura, com o módulo de elasticidade em torno de 50% do valor apresentado pela matriz de argamassa.

Vale salientar que na aplicação proposta foi analisada a consideração da zona de transição com uma estimativa de sua fração volumétrica. No decorrer do estudo serão avaliadas proposições acerca deste parâmetro, de forma que se possa tornar a consideração da zona de transição mais precisa.

Dos exemplos apresentados nos itens 4.6.1 e 4.6.2 pode-se observar a aplicabilidade dos modelos de micromecânica para a análise de materiais compósitos.

Dos resultados obtidos pelos autores aqui citados, constata-se a boa aplicabilidade destes para a determinação do módulo de elasticidade do concreto, ressaltando-se os métodos da esfera de três fases e de Mori-Tanaka.

Pelo desempenho apresentado pelo método da esfera de três fases, na metodologia experimental faz-se uso desta modelagem para avaliação de uma expressão para a estimativa do módulo de elasticidade do concreto.

4.7 Síntese.

A abordagem do concreto sob a ótica de material compósito possibilita a aplicação da modelagem micromecânica para a determinação de suas propriedades elásticas. Entre os modelos de micromecânica listados na literatura, podem-se destacar o modelo de três fases e o modelo de Mori-Tanaka, sendo que estes não fazem abordagem da zona de transição no seu contexto. Entre os modelos que tratam da zona de transição pode-se citar o método inverso, proposto por HASHIN & MONTEIRO (2002). Da análise de aplicações da literatura, tratando-se de materiais compósitos e de uma aplicação experimental, observam-se os bons resultados fornecidos pelo modelo de três fases e do modelo de Mori-Tanaka nas mais diversas situações analisadas por eles. Na aplicação experimental avaliada no trabalho pode-se observar a influência da zona de transição na modelagem do concreto.



Capítulo 5

Metodologia da pesquisa

5.1 Considerações iniciais.

A idéia do trabalho é estabelecer uma ligação entre o módulo de elasticidade do concreto com os de sua matriz de argamassa e de sua respectiva zona de transição, esta última formada entre as partículas de agregado graúdo e a argamassa, variando as frações volumétricas de pasta de cimento e da zona de transição.

Para tal, foi desenvolvida uma metodologia baseada em análises experimentais e teóricas, nas quais se buscou estabelecer relações entre as propriedades do concreto e seus constituintes em função das variáveis envolvidas, avaliando-se a modelagem micromecânica, discutida no capítulo 4, com a consideração da presença da zona de transição interfacial entre o agregado graúdo e a matriz de argamassa.

O problema aqui analisado é a determinação do módulo de elasticidade de concretos geralmente utilizados nas obras correntes de construção civil. Devido a isso, as classes de resistências características analisadas vão do intervalo de 25 MPa a 45 MPa. Estes concretos estudados são classificados como convencionais, enquadrando-se dentro do grupo I de classificação, segundo a NBR 6118:2003, e são avaliados sem a presença de adições minerais.

Assumindo também importante papel na análise do concreto como um material compósito, a zona de transição interfacial precisa ser considerada, conforme mostram resultados apontados por SIMEONOV & AHMAD (1995).

Nesta análise, não só é considerada a determinação do módulo de elasticidade do concreto em uma idade pré-estabelecida, caso mais comum na idade de 28 dias, mas a sua variação com o tempo, sendo sua evolução comparada à da sua matriz de argamassa, obtida de forma experimental, e da respectiva zona de transição, obtida de forma numérica.

A metodologia proposta consta de duas etapas para a análise e determinação do módulo de elasticidade do concreto: experimental e numérica. Estas são apresentadas nos itens que seguem.

5.2 Simplificações para a modelagem.

Para a análise do concreto como um material compósito incluindo a zona de transição, objetivando-se obter o seu módulo de elasticidade, é necessária a consideração de algumas simplificações, a saber:

- a.** As fases constituintes, assim como o material compósito efetivo, são assumidos como isotrópicos e com comportamento elástico linear.

Esta hipótese é adotada nos trabalhos de YANG & HUANG (1996), LI & WANG (2005), MA et al. (2004), GARBOCZI & BERRYMAN (2001), NADEAU (2003), YANG & HUANG (1995), HASHIN & MONTEIRO (2002), ZHAO & CHEN (1997), RAMESH et al. (1996), LUTZ & ZIMMERMAN (2005), LI et al. (1999) e LUTZ et al. (1997). Os resultados apontados nestes trabalhos para a estimativa do módulo de elasticidade do concreto são satisfatórios.

Este problema também é fundamentado no fato de que se os agregados tiverem uma distribuição randômica, na escala macroscópica, o concreto pode ser tratado como homogêneo e isotrópico. Fundamenta-se nesta condição o fato do concreto ter um único módulo de elasticidade, independente da direção.

Segundo BÖHM (2008), o comportamento homogeneizado de muitos materiais multifásicos pode ser idealizado como estatisticamente isotrópico, tendo como exemplo materiais com partículas de forma qualquer aleatoriamente distribuídas.

Nesta situação, materiais estatisticamente isotrópicos apresentam o mesmo comportamento efetivo em todas as direções, sendo o seu tensor de rigidez expresso pela equação 5.1:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

em que C_{11} e C_{12} podem ser expressos em função de apenas dois parâmetros independentes, que podem ser escolhidos entre o módulo de elasticidade longitudinal (E) e transversal (G), o coeficiente de Poisson (ν) e o módulo de deformação volumétrico (K), além das constantes de Lamé (λ e μ).

Os termos C_{11} e C_{21} do tensor de rigidez mostrados na equação 5.1 são dados através das equações 5.2:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu \quad (5.2)$$

$$C_{21} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$$

Segundo GOODMAN (1989), é usual assumir a rocha como um material isotrópico, observando-se a condição de quando esta apresenta xistos, onde esta hipótese é inapropriada. Como na análise o agregado graúdo é derivado de rochas, esta hipótese é aceitável.

Uma forma muito comumente utilizada para fins de modelagem de rochas tem sido a consideração de material contínuo, homogêneo, isotrópico e linearmente elástico. Técnicas de análise de tensões tradicionais são formuladas em termos destas simplificações, por necessidade e/ou conveniência para a obtenção de soluções para alguns problemas (HARRISSON & HUDSON, 2000a e 2000b).

b. O agregado graúdo é considerado como inerte e mantém suas propriedades elásticas constantes ao longo do tempo.

c. Admite-se, inicialmente, a zona de transição interfacial entre a argamassa e o agregado graúdo como uma camada que apresenta fração volumétrica constante, independente da forma do agregado modelado.

Esta consideração para a zona de transição é estabelecida nos trabalhos de NADEAU (2003), HASHIN & MONTEIRO (2002), ZHAO & CHEN (1997), RAMESH et al. (1996), LI et al (1999). Da idéia apresentada nos trabalhos supracitados, infere-se que se a espessura é constante, mas qual o seu respectivo valor? LEE & PARK (2008) reportam que a espessura da zona de transição está em cerca de 50 μm para o concreto normal (convencional). HASHIN & MONTEIRO (2002) referenciam que a espessura da zona de transição está em torno de 15 μm a 40 μm para o concreto. PAULON & MONTEIRO (1991) relatam espessuras da ordem de 30 μm a 100 μm para a zona de transição. DIAMOND & HUANG (2001) mostram através de ensaio de microscopia haver uma mínima espessura de zona de transição em concretos com valor de 30 μm . RAMESH et al. (1996) estima fração de volume da zona de transição como uma fração de volume em relação ao volume total de 10%.

Como não há um consenso sobre a espessura da zona de transição para concretos convencionais, em que esta se apresenta bastante variável, uma hipótese a ser testada seria a verificação de qual percentual de volume de zona de transição, na mistura, representaria o concreto de forma mais adequada.

d. O módulo de elasticidade da zona de transição é assumido ser constante ao longo de sua espessura.

LUTZ et al (1997) e HASHIN & MONTEIRO (2002) referenciam que o módulo de elasticidade da pasta de cimento oscila entre 30% a 50 % do módulo de elasticidade da argamassa. LEE & PARK (2008) realizam um estudo comparando o módulo do concreto com resultados experimentais, assumindo uma variação entre os módulos de elasticidade da zona de transição e da argamassa de 30% a 70%. Os resultados relatados pressupõem uma data específica para assumir esta variação, não se levando em consideração que as propriedades da

zona de transição, assim como as da argamassa, variam com o tempo e que a relação pode não mais ser constante.

5.3 Estudo experimental.

5.3.1 Escolha dos traços.

Os concretos avaliados nesta pesquisa foram moldados de acordo com o método da ABCP, segundo metodologia apresentada em RODRIGUES (1998). Neste método, determinou-se a quantidade de água em função de um abatimento de $90 \text{ mm} \pm 10 \text{ mm}$ para todos os concretos produzidos.

O cimento utilizado foi o CP II Z-32, cujas propriedades necessárias à dosagem do traço foram obtidas segundo informações do fabricante.

Para os agregados foram determinadas a sua granulometria, importante para a dosagem por este método, assim como a sua massa específica.

Para os agregados a determinação da curva granulométrica, do diâmetro máximo característico e do respectivo módulo de finura das amostras avaliadas seguiu o que prescreve a norma NBR NM 248:2003.

Para a determinação da massa específica do agregado miúdo utilizou-se o processo descrito pela norma NBR 9776:1987. Para os agregados graúdos utilizou-se processo semelhante ao dos agregados miúdos, substituindo o frasco de Chapman por uma proveta de vidro para se obter uma estimativa de sua massa específica.

5.3.2 Determinação experimental do módulo de elasticidade.

Segundo a norma NBR 8522:2008, a determinação do módulo de elasticidade tangente do concreto deve, além de respeitar a escolha dos dispositivos de medição e bases de medida, seguir um roteiro em relação à aplicação do carregamento.

O processo de carregamento segundo a referida norma é apresentado na figura 5.1, extraída da NBR 8522:2008:

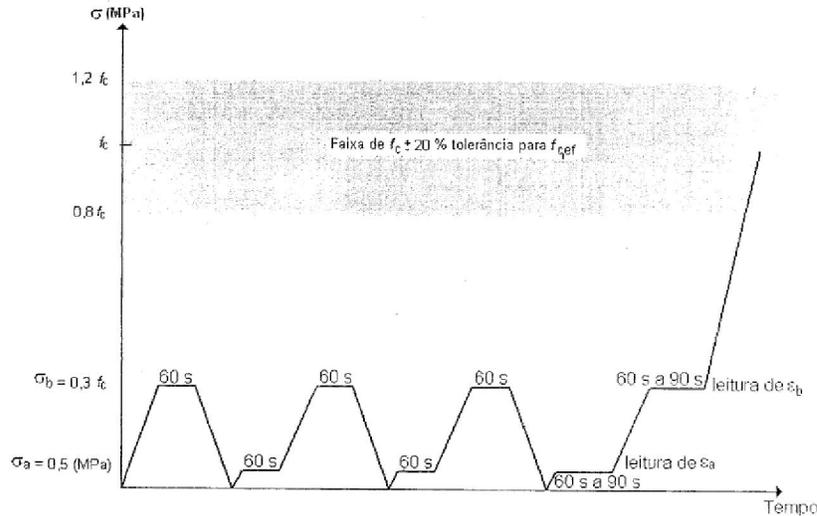


Figura 5.1: Ciclos de carregamento para a determinação do módulo de elasticidade (NBR 8522:2008).

O método proposto para a determinação do módulo de elasticidade apresentado na figura 5.1 é regido por ciclos de carregamento e descarregamento com o objetivo de compatibilização das deformações obtidas.

Antes do ensaio, o corpo-de-prova deve ter os extensômetros devidamente acoplados e ser centrado na prensa de ensaio, com o eixo do corpo-de-prova coincidindo com o eixo de aplicação da carga.

A metodologia do ensaio segundo a norma NBR 8522:2008 foi a da tensão fixa, em que se avalia o módulo de elasticidade para uma tensão em torno de 30% da tensão última do corpo-de-prova, previamente ensaiado. Permite-se que o valor limite superior da tensão para o ensaio seja alterada, desde que especificada.

Desta forma, o módulo de elasticidade pode ser calculado segundo a equação 5.3:

$$E_{ci} = \frac{\sigma_b - \sigma_a}{\varepsilon_b - \varepsilon_a} \cdot 10^{-3} = \frac{\sigma_b - 0,5}{\varepsilon_b - \varepsilon_a} \cdot 10^{-3} \quad (5.3)$$

em que σ_b é a tensão equivalente a $0,3 f_c$ ou outra especificada, σ_a é a tensão inferior de análise (0,5 MPa), ε_b é a deformação correspondente a σ_b e ε_a é a deformação correspondente a 0,5 MPa.

Segundo recomendações normativas, o módulo de elasticidade deve ser determinado em GPa (GigaPascal) e deve ter seu valor expresso com três algarismos significativos.

Os dispositivos usados para a medição das deformações nos corpos-de-prova foram extensômetros elétricos, juntamente com uma prensa com capacidade de 300 toneladas. Para a medição da força foi utilizada uma célula de carga com capacidade de 30 toneladas. Detalhes da execução deste ensaio, com o corpo-de-prova instrumentado podem ser visualizados na figura 5.2:



Figura 5.2: Corpo-de-prova instrumentado com extensômetros elétricos.

5.3.3 Aplicação dos resultados experimentais.

Os resultados experimentais encontrados neste trabalho servem de base para a elaboração das relações do módulo de elasticidade com o tempo para os concretos e argamassas e verificação da adequação da modelagem micromecânica.

Uma questão essencial na engenharia estrutural, alvo de discussão em fóruns e congressos, é o porquê do módulo de elasticidade ser considerado uma propriedade secundária do concreto, visto que ele tem uma enorme contribuição no dimensionamento de estruturas de concreto, conforme relatado ao longo do texto.

A sua determinação por meio de expressões nem sempre resultam boas. E o seu comportamento em função do tempo? Para se proceder esta análise em função das expressões,

ou toma-se partido da resistência à compressão estimada pelo f_{ck} na respectiva idade ou toma-se a média de ensaios de resistência à compressão de corpos-de-prova moldados.

A pesquisa contemplou a análise experimental dos corpos-de-prova, com ensaios de resistência à compressão e módulo de elasticidade. Para cada traço foram moldados para ensaio de módulo de elasticidade um número de 3 corpos-de-prova cilíndricos de 10 cm de diâmetro por 20 cm de altura para ensaio nas idades de 3, 7, 14 e 28 dias. Por alguns problemas, algumas destas idades tiveram de ser realocadas, sem prejuízo para a pesquisa.

De cada concreto moldado foi extraída a argamassa, através de um processo de peneiramento para eliminação dos agregados graúdos, sendo moldados um número de 2 corpos-de-prova cilíndricos de 5 cm de diâmetro da base por 10 cm de altura.

Os demais corpos-de-prova moldados foram usados para a realização de ensaios de resistência à compressão nas respectivas idades.

Os corpos-de-prova foram curados num tanque de cura com água saturada de cal, conforme a norma NBR 5738:2003.

Os concretos foram moldados tendo como resistências características à compressão os valores de 25 MPa ($f_{pc} = 0,326$), 35 MPa ($f_{pc} = 0,368$) e 45 MPa ($f_{pc} = 0,487$), sendo f_{pc} a fração de pasta de cimento da cada mistura.

Um resumo da quantidade de corpos-de-prova ensaiados ao longo desta pesquisa está apresentado na tabela 5.1. O número de corpos-de-prova utilizados neste estudo foi de 3 por idade, conforme relatado anteriormente, sendo este número considerado mínimo conforme recomendação da NBR 8522:2008. Para a argamassa foi avaliado um número de 2 corpos-de-prova para cada idade.

Tabela 5.1: Quadro resumo de corpos-de-prova ensaiados.

f_{ck}	Concreto		Argamassa	
	Resistência à compressão	Módulo de elasticidade	Resistência à compressão	Módulo de elasticidade
25 MPa ($f_{pc} = 0,326$)	26 cps	33 cps	12 cps	22 cps
35 MPa ($f_{pc} = 0,368$)	29 cps	33 cps	11 cps	21 cps
45 MPa ($f_{pc} = 0,487$)	15 cps	22 cps	8 cps	14 cps
Total: 246 cps				

5.4 Estudo numérico.

5.4.1 Variáveis envolvidas.

Para a análise e determinação do módulo de elasticidade do concreto, algumas variáveis são necessárias no estudo. São elas:

- **Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do concreto:** Propriedades do compósito geradas como resultado da simulação numérica e comparada aos valores experimentais obtidos;
- **Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson da argamassa:** Propriedades elásticas da fase matriz, obtidas de forma experimental ou estimadas e utilizadas na modelagem micromecânica;
- **Módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do agregado graúdo:** Parâmetros das inclusões adotados em função de classificação prévia das amostras de agregado utilizadas para a produção do concreto;
- **Fração volumétrica das fases:** Percentual de volume das fases (agregados, cimento e água) envolvidas na mistura, obtidas segundo o traço de concreto utilizado;
- **Tempo:** Parâmetro utilizado para descrever a evolução das propriedades elásticas do concreto e da argamassa, dado em dias.

Nas análises desenvolvidas utilizou-se o intervalo de 3 a 28 dias, que são idades padrão utilizadas no meio técnico para o acompanhamento e verificação das propriedades do concreto quando se deseja efetuar um acompanhamento, principalmente a resistência à compressão.

Para os agregados, serão adotadas as propriedades encontradas em referências como FURNAS (1997) e FALCÃO BAUER (2000). Isto se deve ao fato de que a determinação desta propriedade do agregado é difícil de ser realizada. Estas propriedades serão adotadas mediante classificação mineralógica.

Para a matriz de argamassa, além da influência da quantidade de materiais constituintes, outra variável importante é o seu comportamento com o tempo, devido à presença do cimento, que aumenta sua rigidez e resistência com a idade.

A importância da variação com o tempo do módulo de elasticidade da argamassa é que a partir do seu conhecimento, pode-se determinar com a aplicação da modelagem utilizada o módulo de elasticidade do concreto numa dada idade.

Baseado neste fato, de evolução das propriedades com o tempo, busca-se encontrar uma expressão que mostre como varia o módulo de elasticidade da zona de transição em função do tempo e do módulo de elasticidade da matriz, verificando as variações relatadas na literatura.

5.4.2 Modelagem numérica considerando a zona de transição.

A modelagem aqui proposta é baseada nos princípios da micromecânica para compósitos com comportamento elástico linear.

As expressões para o cálculo do módulo de elasticidade apresentadas pelas normas brasileiras e internacionais fazem menção à utilização dentro do regime linear para a determinação das deformações dos elementos estruturais. Sendo assim, pode-se aplicar a modelagem proposta para se proceder a análise do concreto, segundo as hipóteses simplificadoras descritas.

Optou-se na análise numérica por modelos bifásicos tanto para a determinação das propriedades da zona de transição, quanto para a análise das propriedades do material compósito.

Para tal consideração, a modelagem micromecânica será aplicada para análise do concreto segundo duas filosofias: emprego do método de três fases em análise inversa, com inclusão esférica, com a finalidade de investigar a relação entre os módulos de elasticidade da zona de transição e da argamassa em função do tempo, no intervalo de 3 dias a 28 dias, modelando o agregado como esférico; Obtida a evolução das propriedades da zona de transição, é realizada a aplicação dos modelos (Mori-Tanaka e de três fases) com o objetivo de determinação do módulo de elasticidade do concreto, em função dos parâmetros da mistura e do tempo.

5.4.2.1 Modelagem inversa com a zona de transição.

Propõe-se uma modelagem para se obter as propriedades da zona de transição. Esta estratégia consiste na aplicação do modelo de três fases com inclusão esférica para a determinação das propriedades das fases, conforme consideração apresentada na figura 5.3.

Primeiro são determinadas as propriedades da inclusão efetiva, correspondente a camada de zona de transição mais a inclusão, conhecendo-se as propriedades do compósito e da argamassa em função da idade.

Determinadas as propriedades da inclusão efetiva, aplica-se novamente o modelo de três fases para, com o conhecimento das propriedades da inclusão, determinar as propriedades da zona de transição.

Optou-se por utilizar um modelo que considera apenas duas fases, pois em análises realizadas no capítulo 4 deste trabalho, em relação a dados obtidos de forma experimental, com a consideração da zona de transição com a estratégia de homogeneização entre o agregado e a zona de transição, o resultado foi considerado satisfatório.

Com a aplicação da estratégia de inversão do modelo de três fases e com o acompanhamento dos dados experimentais obtidos neste trabalho, pode-se realizar um estudo da variação da relação entre os módulos de elasticidade da zona de transição e da argamassa em relação ao tempo.

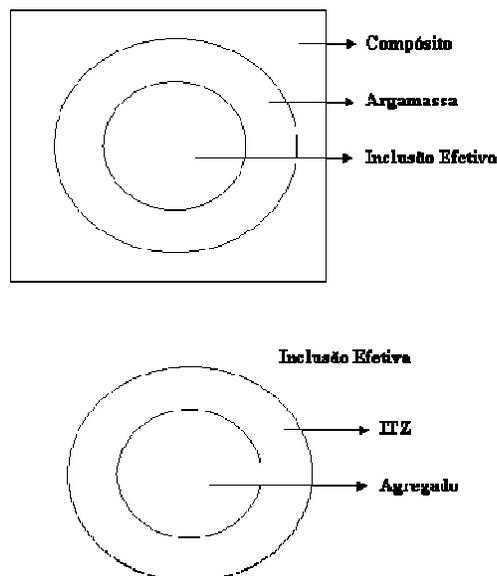


Figura 5.3: Estratégia para análise inversa para o modelo de três fases com inclusão esférica.

No modelo de três fases, duas equações para a solução do problema são consideradas, conforme NEMAT-NASSER & HORI (1999) e CHRISTENSEN & LO (1979), tendo como solução às variáveis K (módulo de deformação volumétrico) e G (módulo de elasticidade transversal), no qual, na seqüência de aplicação têm-se as equações 5.4 e 5.5, baseadas nas equações 4.73 e 4.90:

$$\frac{K_{comp}(t)}{K_{arg}(t)} = 1 + f_{inc,efe} \frac{(K_{inc,efe}(t) - K_{arg}(t))(3K_{arg}(t) + 4G_{arg}(t))}{K_{arg}(t) \left[3K_{arg}(t) + 4G_{arg}(t) + 3(1 - f_{inc,efe}(t))(K_{inc,efe}(t) - K_{arg}(t)) \right]} \quad (5.4)$$

$$A \left(\frac{G_{comp}(t)}{G_{arg}(t)} \right)^2 + B \left(\frac{G_{comp}(t)}{G_{arg}(t)} \right) + C = 0 \quad (5.5)$$

onde $f_{inc,efe}$ é a fração volumétrica da inclusão efetiva, K_{comp} , K_{arg} e $K_{inc,efe}$ são os módulos volumétricos do compósito, argamassa e inclusão efetiva, G_{comp} , G_{arg} e $G_{inc,efe}$ são os módulos de cisalhamento do compósito, argamassa e inclusão efetiva, respectivamente, de onde se determina $K_{inc,efe}$ e $G_{inc,efe}$, com os quais se obtêm K_{itz} e G_{itz} , calculados aplicando as equações 5.6 e 5.7:

$$\frac{K_{inc,efe}(t)}{K_{itz}(t)} = 1 + f_{agreg} \frac{(K_{agreg} - K_{itz}(t))(3K_{itz}(t) + 4G_{itz}(t))}{K_{itz}(t) \left[3K_{itz}(t) + 4G_{itz}(t) + 3(1 - f_{agreg})(K_{agreg} - K_{itz}(t)) \right]} \quad (5.6)$$

$$A \left(\frac{G_{inc,efe}(t)}{G_{itz}(t)} \right)^2 + B \left(\frac{G_{inc,efe}(t)}{G_{itz}(t)} \right) + C = 0 \quad (5.7)$$

onde f_{agreg} é a fração volumétrica de agregado, K_{itz} e K_{agreg} são os módulos volumétricos da ITZ e do agregado, G_{itz} é o módulo de cisalhamento da ITZ. Os coeficientes apresentados nas equações 5.5 e 5.7 são dados em CHRISTENSEN & LO (1979) e apresentados no capítulo 4. Estes coeficientes são dados em função da fração volumétrica da inclusão considerada e do coeficiente de Poisson, que neste estudo pode ser assumido como constante para o concreto e a argamassa.

Obtendo-se K_{itz} e G_{itz} , pode-se estabelecer o módulo de elasticidade da zona de transição e a sua relação com o módulo de elasticidade da argamassa.

As equações 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 são expressas implicitamente, sendo as relações com as propriedades do concreto, argamassa e zona de transição obtidas através da análise de regressão dos dados experimentais e da análise de inversão da modelagem micromecânica, para o caso da zona de transição.

5.4.2.2 Modelagem direta com a zona de transição.

Na modelagem direta, pode-se assumir que quando as fases são submetidas ao carregamento, a distribuição das tensões nas camadas de matriz de argamassa e de zona de transição dá-se da forma apresentada na figura 5.4, conforme modelo em série:

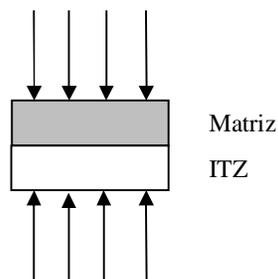


Figura 5.4: Esquema de homogeneização para a determinação da matriz efetiva.

Com esta configuração entre as fases, o módulo de elasticidade efetivo entre a argamassa e a zona de transição pode ser calculado pela equação 5.8 (MEHTA & MONTEIRO, 1994):

$$\frac{1}{E_{ME}(t)} = \frac{f_M}{E_M(t)} + \frac{f_{ITZ}}{E_{ITZ}(t)} \quad (5.8)$$

em que os módulos de elasticidade da matriz e da zona de transição são dados em função do tempo e da fração de volume de pasta de cimento envolvida na mistura. O tempo, relatado na equação 5.8, é tomado como um parâmetro com o qual se consegue determinar o módulo de elasticidade da argamassa e de sua respectiva zona de transição.

Informações quantitativas a cerca da zona de transição podem ser encontradas no trabalho de HASHIN & MONTEIRO (2002) para argamassas, mas não se chega com precisão

no valor de sua espessura, nem sua relação com o tamanho das partículas de agregado presentes na mistura.

A determinação da fração de volume de ITZ presente na mistura de concreto pode ser determinada como uma relação com o seu percentual na mistura. Neste trabalho, considera-se os percentuais de 8%, 10%, 12% e 15%, oscilando em torno do valor de 10%, citado por RAMESH et al. (1996).

Para as propriedades da zona de transição, serão tomadas como base de comparação as informações constantes na literatura a cerca de sua espessura e de suas propriedades elásticas. Estas propriedades serão alvo de estudo, quando da comparação com a aplicação dos modelos estudados e referenciadas aos valores experimentais apresentados pelo concreto.

Apesar da dificuldade na determinação, as propriedades da zona de transição podem ser estimadas a partir do trabalho de MONTEIRO (1993), que mostra em suas análises uma relação de 50% das propriedades da matriz de argamassa do sistema.

Para o método da esfera de três fases, a consideração da zona de transição é realizada pelo esquema descrito abaixo:

- Modelo de Três Fases:
 1. Definição das variáveis básicas;
 2. Determinação do módulo de elasticidade da argamassa e ITZ com o tempo;
 3. Determinação da matriz efetiva (argamassa + ITZ) – equação 5.8;
 4. Determinação dos coeficientes n (equação 4.94);
 5. Determinação dos coeficientes A, B e C (equações 4.91, 4.92 e 4.93);
 6. Solução da equação do método da esfera de Três Fases – Equação 4.90;
 7. Cálculo de K e G do concreto;
 8. Determinação de E do concreto.

Para o modelo de Mori-Tanaka, a zona de transição é avaliada segundo o processo listado a seguir:

- Método de Mori-Tanaka.
 1. Definição das variáveis básicas;
 2. Determinação do módulo de elasticidade da argamassa e ITZ com o tempo;
 3. Determinação da matriz efetiva (argamassa + ITZ) – equação 5.8;
 4. Determinação dos tensores de rigidez da matriz efetiva e inclusão;
 5. Determinação do tensor de Eshelby;
 6. Determinação dos tensores de concentração de deformação A_0 e A_1 ;
 7. Determinação do tensor de rigidez efetivo do concreto – equação 4.63;
 8. Determinação de E do concreto.

5.5 Síntese.

Com a metodologia proposta busca-se estudar a variação no módulo de elasticidade da zona de transição em função do tempo, através da utilização de modelos de micromecânica. Para tal análise, são necessárias algumas hipóteses simplificadoras em relação aos materiais constituintes, a saber: material compósito e suas fases assumidos como isotrópicos com comportamento elástico linear; agregado considerado inerte; zona de transição assumida como uma região que envolve o agregado, com fração de volume constante e módulo de elasticidade constante ao longo de sua espessura. Os resultados experimentais tomaram como base o módulo de elasticidade tangente inicial. Na análise numérica, as variáveis envolvidas no estudo são os módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson das fases e do compósito, fração de volume das fases e o parâmetro tempo, relacionado ao intervalo definido nos experimentos. Numa primeira etapa, buscou-se determinar as propriedades da zona de transição com a análise inversa do modelo de três fases, com a consideração na análise da matriz de argamassa e inclusão efetiva (agregado + zona de transição) e, em seguida, a determinação do módulo de elasticidade da zona de transição. Numa segunda etapa, procedeu-se a análise direta da modelagem micromecânica, com a consideração do módulo de elasticidade da matriz efetiva, que engloba a argamassa e a zona de transição, dadas em função do tempo, através de um modelo em série, levando em consideração as frações volumétricas das fases.



Capítulo 6

Análise estatística e resultados experimentais

6.1 Considerações iniciais.

Neste capítulo são apresentados os resultados do estudo experimental para a determinação do módulo de elasticidade do concreto e das argamassas confeccionadas na pesquisa.

São também apresentados os dados referentes à dosagem dos concretos e as informações dos ensaios realizados com os materiais componentes da mistura, sendo listadas somente as referenciadas ao uso no método de dosagem.

Também é apresentada uma análise estatística dos resultados encontrados para o módulo de elasticidade do concreto, utilizando a técnica de análise de variância, com o objetivo de destacar quais das variáveis básicas estatisticamente contribuem para a determinação do módulo de elasticidade do concreto. São avaliados, para os resultados das amostras de concreto ensaiadas segundo a NBR 8522:2008 para a determinação do módulo de elasticidade, os respectivos intervalos de confiança para a exclusão de dados.

É procedida uma análise qualitativa dos ensaios de microscopia de varredura eletrônica de amostras de concreto confeccionadas com os concretos aplicados na pesquisa.

Busca-se mostrar com as imagens obtidas pela ampliação gerada pelo microscópio eletrônico a camada de zona de transição entre o agregado graúdo e a matriz de argamassa, destacada pela sua maior porosidade frente à da matriz, obtendo-se com isto uma estimativa da espessura desta zona de transição.

Através destas observações, objetiva-se avaliar se a espessura da camada de zona de transição se mantém constante e pode ser idealizada como uma casca, ou ser assumida com fração volumétrica constante em relação ao total dos materiais envolvidos na mistura.

6.2 Caracterização dos materiais.

Para o cimento utilizado, adotou-se a massa específica de 3200 kg/m^3 , obtida segundo processo descrito na norma NBR NM 23:2000.

Para os agregados foram realizados ensaios de massa específica e análise granulométrica para se proceder a dosagem pelo método da ABCP, utilizado neste trabalho.

As britas utilizadas na produção dos concretos foram classificadas previamente e denominadas de B0 e B1.

Nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 são apresentados os resultados obtidos dos ensaios realizados com as amostras de areia, B0 e B1, respectivamente.

Tabela 6.1: Dados do ensaio de massa específica da areia.

Amostra	Massa (g)	Vol. Inic. (cm^3)	Vol. Fin. (cm^3)	Massa Espec. (g/cm^3)
1	500	200	394	2.58
2	500	200	396	2.55
Massa específica média = 2.56 g/cm^3				

Tabela 6.2: Dados do ensaio de massa específica da brita B0.

Amostra	Massa (g)	Vol. Inic. (cm^3)	Vol. Fin. (cm^3)	Massa Espec. (g/cm^3)
1	300	210	330	2.50
2	300	210	330	2.50
Massa específica média = 2.50 g/cm^3				

Tabela 6.3: Dados do ensaio de massa específica da brita B1.

Amostra	Massa (g)	Vol. Inic. (cm ³)	Vol. Fin. (cm ³)	Massa Espec. (g/cm ³)
1	300	210	330	2.50
2	300,4	230	350	2.50
Massa específica média = 2.50 g/cm ³				

Em análises petrográficas e consultando uma concreiteira da região, obteve-se a informação que o agregado graúdo utilizado era do tipo gnaïsse.

Como não foram feitos ensaios para determinação das propriedades elásticas dos agregados, resolveu-se tomar como base os valores propostos por FALCÃO BAUER (2000), os quais conduzem ao valor médio de 56 GPa e 0,23 para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de rochas do tipo gnaïsse, respectivamente.

A granulometria dos agregados foi analisada de acordo com a NBR NM 248:2003. Os resultados da granulometria da areia podem ser visualizados na tabela 6.4, com sua respectiva curva granulométrica observada na figura 6.1.

Tabela 6.4: Resultado da granulometria da areia.

Peneiras (mm)	Amostra 1				Amostra 2			
	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.
4.8	1.4	1.4	0.28	0.28	0.6	0.6	0.12	0.12
2.4	7.5	8.9	1.5	1.78	4.9	5.5	0.98	1.1
1.2	32	40.9	6.41	8.19	31	36.5	6.21	7.32
0.6	159.6	200.5	31.98	40.17	207.9	244.4	41.68	49
0.3	181.3	381.8	36.33	76.5	144.3	388.7	28.93	77.93
0.15	81.6	463.4	16.35	92.85	73.9	462.6	14.82	92.74
Fundo	35.7	499.1	7.15	100	36.2	498.8	7.26	100
Módulo de finura: 2.24								
Diâmetro máximo característico: 2.40 mm								

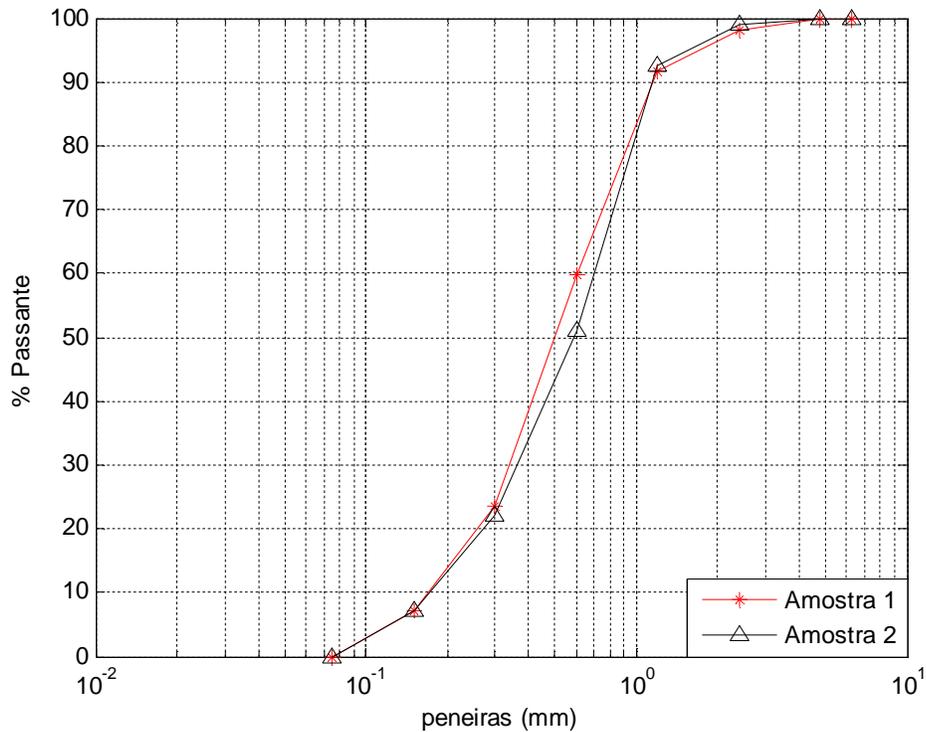


Figura 6.1: Curvas granulométricas das amostras de areia.

Para a brita B0, os resultados obtidos para a granulometria são apresentados na tabela 6.5 e figura 6.2.

Tabela 6.5: Resultado da granulometria da brita 0.

Peneiras (mm)	Amostra 1				Amostra 2			
	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.
25	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0
12.5	25.5	25.5	1.28	1.28	33.2	33.2	1.66	1.66
9.5	424.7	450.2	21.24	22.52	453.5	486.7	22.71	24.37
6.3	829.1	1279.3	41.47	63.98	880.5	1367.2	44.1	68.47
4.8	376.9	1656.2	18.85	82.83	362.7	1729.9	18.16	86.83
Fundo	343.3	1999.5	17.17	100	266.9	1996.8	13.37	100

Módulo de finura: 1.76
Diâmetro máximo característico: 12.5 mm

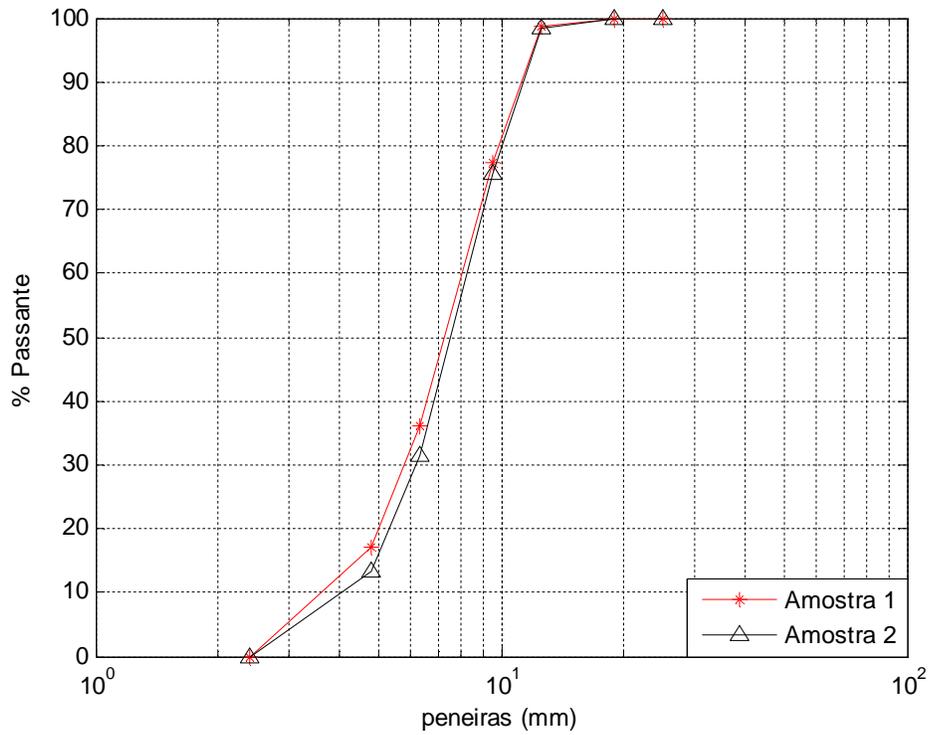


Figura 6.2: Curvas granulométricas das amostras de brita B0.

Na figura 6.3 é mostrado um detalhamento do tamanho dos grãos da brita B0 utilizados nos concretos.



Figura 6.3: Tamanho dos grãos da brita B0.

Na tabela 6.6 estão apresentados os valores obtidos na análise granulométrica da brita B1 e as respectivas curvas granulométricas das amostras estão ilustradas na figura 6.4. A figura 6.4 mostra um detalhamento do tamanho dos grãos da brita B1.

Tabela 6.6: Resultado da granulometria da brita B1.

Peneiras (mm)	Amostra 1				Amostra 2			
	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.	Massa Retida (g)	Massa Acum. (g)	% Retida	% Retida Acum.
25	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0
12.5	692.3	692.3	34.68	34.68	765.9	765.9	38.34	38.34
9.5	758.7	1451	38	72.68	797.6	1563.5	39.93	78.28
6.3	378.1	1829.1	18.94	91.62	318.8	1882.3	15.96	94.24
4.8	104.7	1933.8	5.24	96.86	80.3	1962.6	4.02	98.26
Fundo	62.7	1996.5	3.14	100	34.8	1997.4	1.74	100

Módulo de finura: 3.03

Diâmetro máximo característico: 19 mm

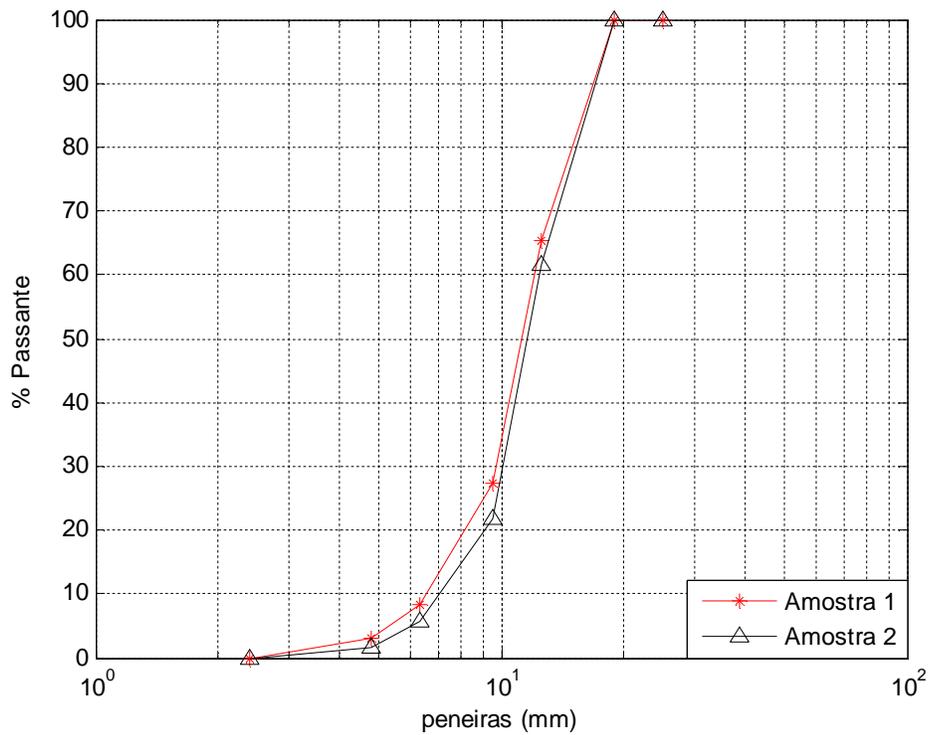


Figura 6.4: Curvas granulométricas das amostras de brita B1.



Figura 6.5: Tamanho dos grãos da brita B1.

6.3 Dosagem dos concretos.

Os concretos estudados neste trabalho foram dosados segundo o método da ABCP, proposto por RODRIGUES (1998).

Neste método, a quantidade de água a ser inserida na mistura é determinada em função da trabalhabilidade requerida no concreto, fazendo uso da lei de Abrams. Utilizou-se como padrão de dosagem um desvio padrão de 4 MPa, para a transformação da resistência característica à compressão (f_{ck}) em resistência média na idade de análise (f_{cj}), que no caso avaliado foi de 28 dias.

Os concretos dosados possuem as seguintes resistências características à compressão alvo: 25 MPa ($f_{pc} = 0,326$), 35 MPa ($f_{pc} = 0,368$) e 45 MPa ($f_{pc} = 0,487$). Na tabela 6.7 estão apresentados os traços dosados.

Tabela 6.7: Composição dos traços em massa dosados na pesquisa.

Traço	Composição (Cim:Areia:B0:B1:Água)
25-1	1 : 1.59 : 2.66 : 0 : 0.52
25-2	1 : 1.59 : 0.8 : 1.86 : 0.52
25-3	1 : 1.59 : 2.66 : 0 : 0.52
35-1	1 : 0.99 : 0.6 : 1.4 : 0.39
35-2	1 : 0.99 : 2 : 0 : 0.39
35-3	1 : 0.99 : 2 : 0 : 0.41
45-1 ^(*)	1 : 0.28 : 1.29 : 0 : 0.28
45-2 ^(*)	1 : 0.28 : 1.29 : 0 : 0.37

^(*) foi utilizado aditivo plastificante em pequena proporção

6.4 Resultados dos ensaios.

O ensaio de módulo de elasticidade foi procedido pela metodologia da tensão fixa, descrita no capítulo 5, seguindo os ciclos apresentados na NBR 8522:2008.

Os ensaios de resistência à compressão foram realizados segundo a norma NBR 5739:2007.

Estes foram realizados utilizando uma prensa controlada por computador e extensômetros elétricos de fio, para a medição das deformações e uma célula de carga para a medição da força aplicada. Estes equipamentos se encontravam devidamente calibrados.

Na tabela 6.8 estão apresentados os valores médios do módulo de elasticidade e da resistência à compressão dos concretos nas respectivas idades de ensaio.

Os resultados da análise de intervalo de confiança para os concretos produzidos encontram-se nas tabelas do anexo A.

Os ensaios de módulo de elasticidade foram realizados em número de três corpos-de-prova para cada idade, assim como recomenda o processo normativo descrito na NBR 8522:2008. Optou-se por realizar uma análise estatística dos dados com o objetivo de assegurar uma margem de segurança para o tamanho da população analisada. Para tal condição utilizou-se valores que se apresentassem dentro de certo intervalo de confiança pré-estabelecido. Para os demais, o número foi inferior e o intervalo de confiança não foi aplicado por não apresentar dados que se localizassem fora dos limites.

Tabela 6.8: Valores médios do módulo de elasticidade e resistência à compressão dos concretos obtidos nos ensaios.

Resultados	Módulo de Elasticidade (GPa)				Resistência à Compressão (MPa)			
25-1	23.84	27.25	31.87	31.95	13.37	20.40	25.33	27.56
	(3 dias)	(7 dias)	(15 dias)	(28 dias)	(3 dias)	(7 dias)	(15 dias)	(28 dias)
25-2	26.31	31.35	30.58	31.91	13.79	19.25	23.89	25.89
	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)
25-3	27.82	29.63	31.48	-	22.90	26.14	30.11	-
	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-
35-1	33.09	35.83	37.44	34.40	22.26	32.04	33.38	38.12
	(3 dias)	(7 dias)	(17 dias)	(28 dias)	(3 dias)	(7 dias)	(17 dias)	(28 dias)
35-2	33.39	36.04	35.70	35.22	24.65	33.46	37.46	41.16
	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)
35-3	31.33	32.21	32.7	-	30.02	32.21	42.4	-
	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-
45-1	32.56	38.93	35.41	37.13	34.89	40.98	46.07	47.30
	(3 dias)	(8 dias)	(20 dias)	(34 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(20 dias)	(34 dias)
45-2	31.26	34.99	32.25	36.43	39.07	45.45	47.62	45.96
	(5 dias)	(8 dias)	(18 dias)	(26 dias)	(5 dias)	(8 dias)	(18 dias)	(26 dias)

Para a argamassa, os resultados dos ensaios de módulo de elasticidade e resistência à compressão são mostrados na tabela 6.9.

6.5 Análise de variância para os dados experimentais.

Para se descrever uma curva de regressão que representasse a variação do módulo de elasticidade do concreto, realizou-se uma análise de variância buscando averiguar quais variáveis observadas contribuíam para a variabilidade desta propriedade do concreto.

As variáveis analisadas foram: idade de ensaio (tempo), diâmetro máximo do agregado graúdo utilizado na confecção do concreto e fração volumétrica de pasta de cimento. O objetivo é a confirmação de qual destas variáveis é estatisticamente significativa para o módulo de elasticidade.

Tabela 6.9: Valores médios do módulo de elasticidade e resistência à compressão das argamassas obtidos nos ensaios.

Resultados	Módulo de Elasticidade (GPa)				Resistência à Compressão (MPa)			
25-1	16.93	26.00	23.20	27.35	16.68	22.51	30.89	30.37
	(3 dias)	(7 dias)	(15 dias)	(28 dias)	(3 dias)	(7 dias)	(15 dias)	(28 dias)
25-2	14.61	23.30	24.29	26.59	17.13	23.42	29.07	27.15
	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)
25-3	23.63	26.49	27.20	-	27.22	34.85	31.48	-
	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-
35-1	20.29	25.73	29.86	29.51	25.50	34.41	39.05	52.88
	(3 dias)	(7 dias)	(17 dias)	(28 dias)	(3 dias)	(7 dias)	(17 dias)	(28 dias)
35-2	27.23	31.09	32.77	31.85	28.50	37.80	42.29	49.21
	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(21 dias)	(35 dias)
35-3	27.13	29.93	32.12	-	36.20	46.30	47.52	-
	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-	(6 dias)	(20 dias)	(28 dias)	-
45-1	25.04	31.60	29.92	28.62	33.66	54.08	50.24	55.20
	(3 dias)	(8 dias)	(20 dias)	(34 dias)	(3 dias)	(8 dias)	(20 dias)	(34 dias)
45-2	29.86	27.71	28.81	33.12	45.40	52.82	55.33	41.51
	(5 dias)	(8 dias)	(18 dias)	(26 dias)	(5 dias)	(8 dias)	(18 dias)	(26 dias)

A análise de variância foi procedida para termos lineares e interação entre as variáveis independentes.

Na tabela 6.10 são apresentados os resultados da análise de variância para o módulo de elasticidade para as variáveis descritas. Os valores da estatística F para comparação na análise de variância estão dispostos no apêndice B.

Na tabela 6.11 estão apresentados os resultados da análise de variância para a resistência à compressão dos concretos.

A análise dos resultados é apenas qualitativa, representado o termo que estatisticamente não contribui para o modelo estatístico, não se obtendo a informação de quão forte é esta relação com a variável independente.

Quando o valor de $F_{0.05,v_1,v_2} > F_0$, implica em dizer que a variável não é significativa para a variabilidade dos dados obtidos do experimento para o material compósito.

Avaliando-se os resultados apresentados, destacam-se os pontos mais significativos das tabelas 6.10 e 6.11:

- Analisando a variável tempo, isolada ou associada ao diâmetro máximo do agregado graúdo, observa-se que esta não contribui estatisticamente para a variabilidade do módulo de elasticidade nem tampouco da resistência à compressão;
- O diâmetro máximo não contribui estatisticamente para o desenvolvimento do módulo de elasticidade, ao passo que apresenta uma pequena contribuição para a resistência à compressão;
- A fração volumétrica de pasta de cimento é a variável das analisadas que não pode ser descartada do modelo, pois há uma contribuição mais significativa.
- A influência do tempo é mais significativa quando associada à variável fração de pasta de cimento, num modelo com interação, no qual a contribuição é mais significativa que para os termos isolados.

Infere-se, a partir da análise dos dados, que a variável diâmetro máximo do agregado graúdo pode ser extraída dos modelos para a determinação do módulo de elasticidade devido a sua contribuição na variabilidade ser estatisticamente descartada.

Para as regressões analisadas, descritas no capítulo 7, os parâmetros balizadores do melhor ajuste realizado foram os coeficientes de determinação R^2 e R^2 ajustado e o erro quadrático médio residual (RMSE), sendo testados vários modelos e observados os que apresentavam valores mais adequados.

Tabela 6.10: Análise de variância para o módulo de elasticidade do concreto.

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F ₀	F _{0.05,v1,v2}
t	151.889	13	11.6838	0.98	2.40
Resíduo	191.689	16	11.9805		
Total	343.578	29			
d _{max}	0.043	1	0.0432	0	4.20
Resíduo	343.535	28	12.2691		
Total	343.578	29			
f _{pc}	181.903	2	90.514	15.19	3.35
Resíduo	161.676	27	5.988		
Total	343.578	29			
t	153.23	13	11.7869	0.93	2.45
d _{max}	1.384	1	1.384	0.11	4.54
Resíduo	190.305	15	12.687		
Total	343.578	29			
t	46.532	5	9.3064	0.84	3.33
d _{max}	0	0	0	0	0
t · d _{max}	79.332	5	15.8665	1.43	3.33
Resíduo	110.972	10	11.0972		
Total	343.578	29			
t	116.875	13	8.9904	2.81	2.50
f _{pc}	146.889	2	73.4443	22.95	3.74
Resíduo	44.8	14	3.2		
Total	343.578	29			
t	40.386	2	20.1932	8.13	5.79
f _{pc}	0	0	0	0	0
t · f _{pc}	32.387	9	3.5986	1.45	4.77
Resíduo	12.413	5	2.4825		
Total	343.578	29			
d _{max}	6.785	1	6.7851	1.14	4.23
f _{pc}	188.645	2	94.3223	15.83	3.37
Resíduo	154.89	26	5.9573		
Total	343.578	29			
d _{max}	0	0	0	0	0
f _{pc}	123.009	1	123.009	19.89	4.24
d _{max} · f _{pc}	0.286	1	0.286	0.05	4.24
Resíduo	154.605	25	6.184		
Total	343.578	29			
t	112.863	13	8.6818	2.69	2.57
d _{max}	2.773	1	2.7726	0.86	4.67
f _{pc}	148.277	2	74.1386	22.93	3.81
Resíduo	42.028	13	3.2329		
Total	343.578	29			

Tabela 6.11: Análise de variância para a resistência à compressão do concreto.

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F ₀	F _{0,05,v1,v2}
t	1506.03	13	115.849	1.36	2.40
Resíduo	1360.42	16	85.026		
Total	2866.45	29			
d _{max}	395.37	1	395.372	4.48	4.20
Resíduo	2471.08	28	88.253		
Total	2866.45	29			
f _{pc}	2034.33	2	1017.16	33	3.35
Resíduo	832.12	27	30.82		
Total	2866.45	29			
t	1297.95	13	99.842	1.28	2.45
d _{max}	187.29	1	187.287	2.39	4.54
Resíduo	1173.13	15	78.209		
Total	2866.45	29			
t	488.07	5	97.6135	1.4	3.33
d _{max}	0	0	0	0	0
t . d _{max}	475.7	5	95.1392	1.36	3.33
Resíduo	697.43	10	69.7433		
Total	2866.45	29			
t	786.65	13	59.127	13.04	2.50
f _{pc}	1296.95	2	648.474	143.04	3.74
Resíduo	63.47	14	4.533		
Total	2866.45	29			
t	243.9	2	121.95	24.88	5.79
f _{pc}	0	0	0	0	0
t . f _{pc}	38.96	9	4.329	0.88	4.77
Resíduo	24.51	5	4.902		
Total	2866.45	29			
d _{max}	45.57	1	45.568	1.51	4.23
f _{pc}	1684.53	2	842.263	27.84	3.37
Resíduo	786.55	26	30.252		
Total	2866.45	29			
d _{max}	0	0	0	0	0
f _{pc}	588.83	1	588.826	18.72	4.24
d _{max} . f _{pc}	0	1	0	0	4.24
Resíduo	786.55	25	31.462		
Total	2866.45	29			
t	737.77	13	56.752	15.12	2.57
d _{max}	14.69	1	14.689	3.91	4.67
f _{pc}	124.35	2	562.175	149.82	3.81
Resíduo	48.78	13	3.752		
Total	2866.45	29			

6.6 Análise de microscopia eletrônica do concreto.

As propriedades do concreto, considerado como material heterogêneo, e, em especial, suas características físicas e químicas, dependem de um grande número de fatores, alguns deles relativos à pasta de cimento em si, outros dependendo dos agregados utilizados e, outros, enfim, devido à ligação entre estes dois elementos essenciais (PAULON & MONTEIRO, 1991).

As pesquisas com o intuito de avaliar a estrutura interna do concreto tiveram contribuições de importantes pesquisadores, entre eles, MONTEIRO (1993), PAULON & MONTEIRO (1991) no Brasil e, recentemente, trabalhos como os de MONTEIRO et al. (2009), SAHU et al. (2004), LEEMAN et al. (2006), WANG et al. (2005), DIAMOND & HUANG (2001) e DIAMOND (2001).

Investigações da microestrutura do concreto com microscopia de varredura eletrônica têm se tornado uma técnica muito utilizada nos últimos anos (DIAMOND, 2001). Muitos trabalhos também estão sendo desenvolvidos utilizando, além do último método citado, geração de imagens com equipamentos de ultrasonografia.

A identificação da zona de transição do concreto é uma tarefa difícil, ainda mais quando se busca observar regiões com diferentes porosidades.

A figura 6.6 apresenta uma imagem realizada com um microscópio eletrônico para uma amostra de concreto no trabalho de DIAMOND (2001), na qual se pode destacar um comprimento na imagem da ordem de 50 μm .

A porosidade da zona de transição interfacial de argamassas e concretos são maiores quando comparadas à da pasta de cimento endurecida, sendo este efeito principalmente atribuído ao efeito parede, levando a uma baixa concentração de partículas grandes de cimento na zona de transição e, conseqüentemente, acréscimo na porosidade (LEEMAN et al., 2006).

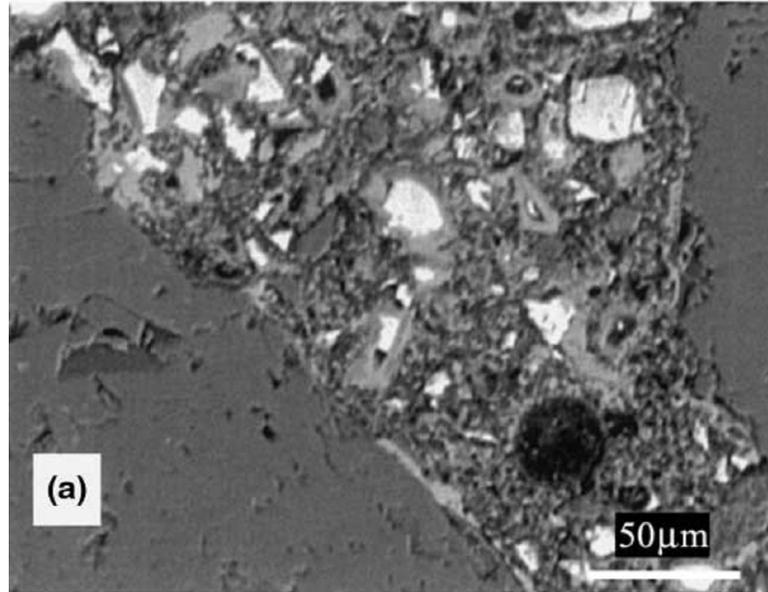


Figura 6.6: Imagem de microscópio de uma amostra de concreto (DIAMOND, 2001).

Dependendo da porosidade e umidade da superfície do agregado, a zona de transição interfacial pode ser mais densa e homogênea. Isso se explica pela penetração da pasta nos poros do agregado, a qual, após hidratação, deve promover uma boa ligação mecânica entre a pasta e o agregado (ZHANG & GJØRV, 1989 e 1990 apud LIMA & HELENE, 2001).

Na revisão apresentada por LIMA & HELENE (2001) destaca-se, em relação à zona de transição, que o aumento da resistência desta ligação entre a matriz e o agregado não influencia de maneira acentuada a resistência à compressão última do concreto, mas contribui com o aumento do nível de tensão, no qual as microfissuras se iniciam na zona de transição.

PAULON & MONTEIRO (1991) descreveram em seu relatório técnico os resultados da análise da espessura da zona de transição de pastas com diferentes adições em relação ao tempo. As pastas de cimento sem adição mineral em sua composição apresentaram um crescimento na citada espessura ao longo do tempo, estando dentro dos padrões relatados na literatura, ou seja, variando de 60 μm a 110 μm . Já as pastas de cimento com adição apresentaram comportamento inverso, ocorrendo redução naquela espessura ao longo do tempo.

A extensão da zona de transição é variável em função da mistura. Constata-se que, para concretos convencionais, esta espessura esteja em torno de 70 μm (LEEMAN et al., 2006).

DIAMOND & HUANG (2001) observaram que esta maior porosidade que caracteriza a zona de transição acontece dentro de um contorno mínimo de 30 μm , conforme pode ser destacado na figura 6.7:

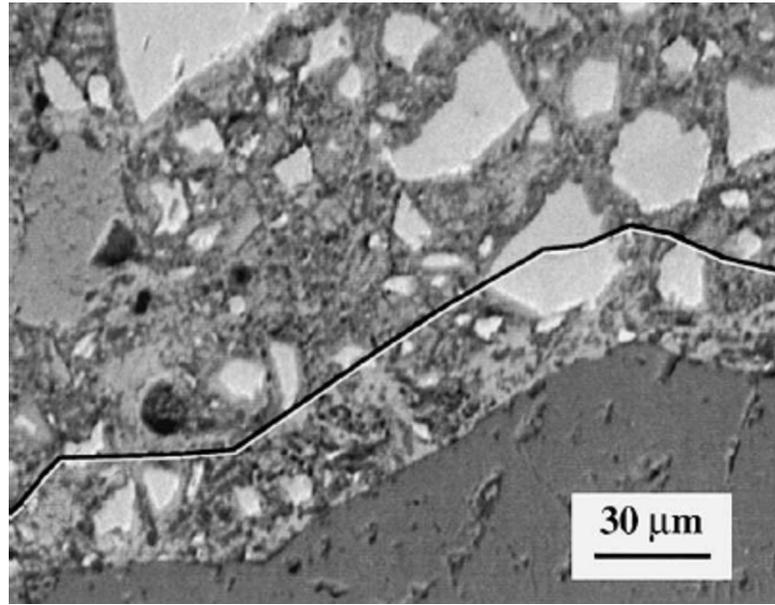


Figura 6.7: Imagem do contorno mínimo da zona de transição de uma amostra de concreto (DIAMOND & HUANG, 2001).

Dos resultados apresentados por DIAMOND & HUANG (2001), as amostras apresentaram um mínimo de 30 μm de extensão da zona de transição, se mostrando distintas entre as amostras e em diferentes pontos do contorno.

Partindo desta idéia, a consideração de um modelo em que a zona de transição apresenta uma espessura constante pode não ser uma hipótese adequada.

Existe um grande número de modelos que consideram a ITZ. Enquanto alguns modelos assumem que a ITZ pode ser vista como uma casca uniforme, outros assumem que há uma gradação de porosidade e outras características dentro da auréola que a define (DIAMOND & HUANG, 2001).

Do que foi exposto acima, pode-se obter uma visão geral do que tem sido levado em consideração nos trabalhos envolvendo a zona de transição e sua determinação, via imagens obtidas com o auxílio de um microscópio. Balizando-se nestas informações, os demais itens deste capítulo foram construídos.

6.6.1 Preparação das amostras para ensaio.

Os concretos foram preparados segundo os traços descritos no item 6.3, para as frações de pasta de cimento de 0,326, 0,368 e 0,487.

Os testes foram realizados na idade de 28 dias e em idades inferiores, com o intuito de verificar, mediante identificação da zona de transição, se havia variação com o tempo da espessura da zona de transição.

Na figura 6.8 estão apresentadas as amostras no tamanho ideal para a realização do ensaio no microscópio de varredura eletrônica. Estas amostras apresentavam tamanho inferior a 1 cm e, após atingidos os tamanhos ideais, passavam por um processo de polimento.



Figura 6.8: Amostras de concreto para a realização do ensaio de microscopia.

Os ensaios de microscopia foram realizados nas dependências do laboratório do Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais, da Universidade Federal do Vale do São Francisco.

As amostras foram ensaiadas em um microscópio eletrônico de varredura de bancada, modelo TM 1000, marca HITACHI, com capacidade de ampliação de 40000 vezes (figura 6.9). Segundo informações do catálogo do fabricante, os dados sobre a capacidade de ampliação e tamanho das amostras a serem utilizadas são listadas na tabela 6.12.

Tabela 6.12: Dados sobre ampliação e tamanho da amostra do microscópio.

Ampliação	20 – 10000 x (zoom de 4x)
Tamanho máximo da amostra	70 mm de diâmetro
Altura máxima da amostra	20 mm de alta

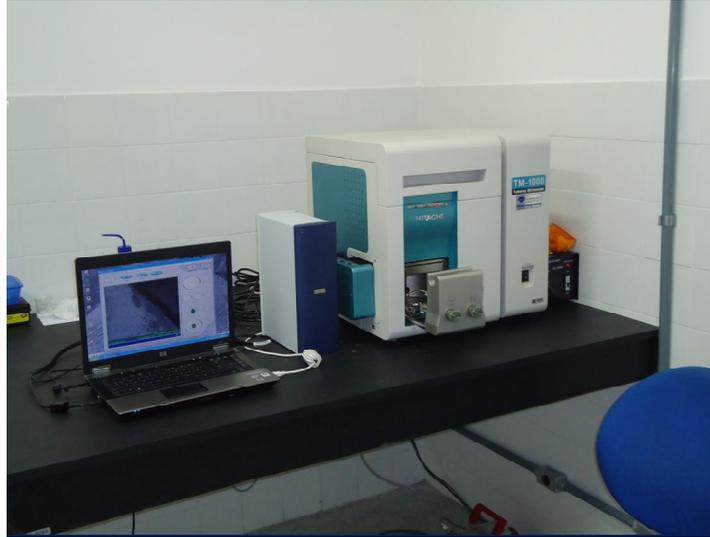


Figura 6.9: Microscópio de varredura eletrônica de bancada.

Após preparadas as amostras (figura 6.8), antes de ir ao microscópio, as mesmas passam por um processo de ajuste de altura e colagem com fita adesiva para evitar que fossem sugadas pelo vácuo dentro do equipamento, como mostra a figura 6.10. Depois deste processo, a amostra é acoplada dentro do microscópio para a realização do ensaio (figura 6.11).

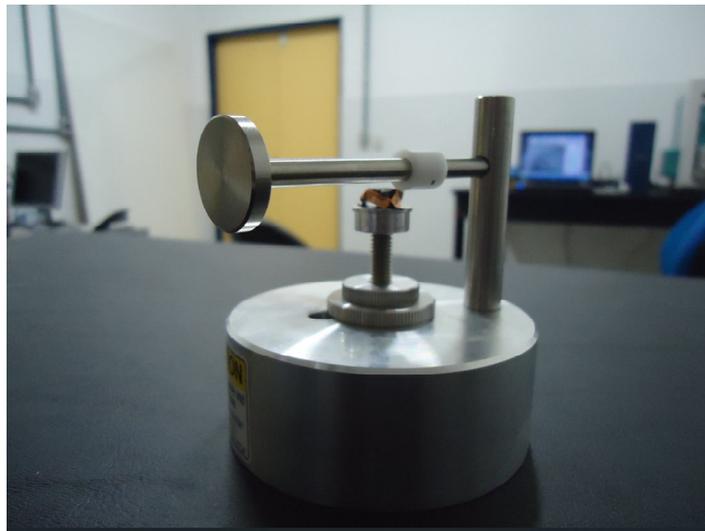


Figura 6.10: Equipamento para ajuste de altura e colagem.

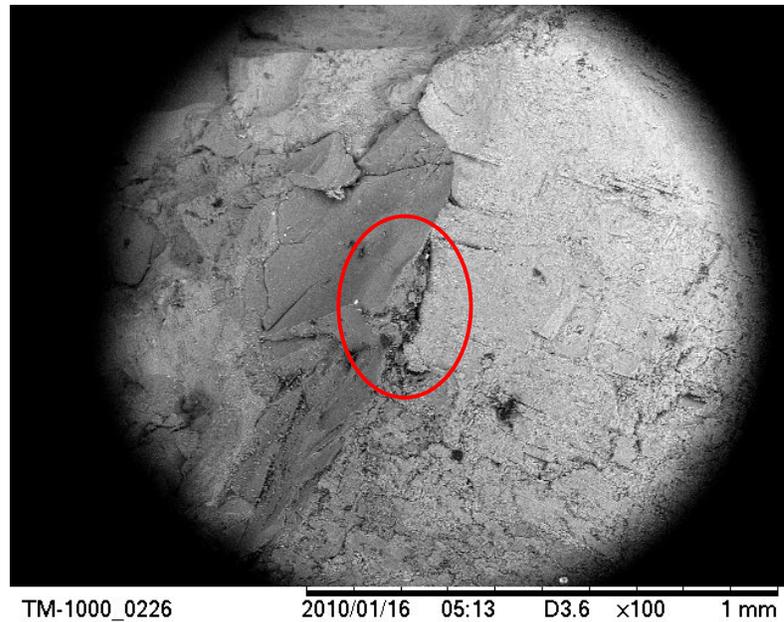


Figura 6.11: Amostra acoplada no microscópio para ensaio.

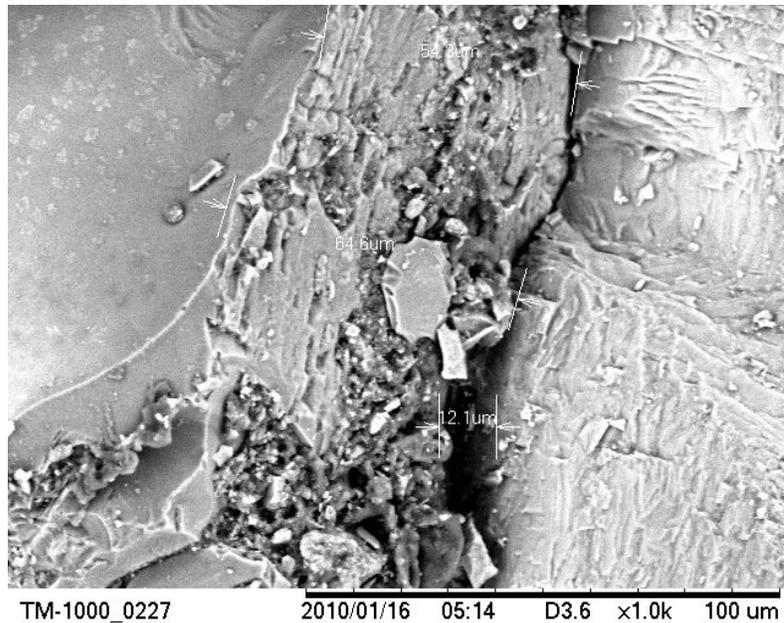
6.6.2 Visualização da zona de transição.

Os ensaios de microscopia eletrônica foram realizados em algumas amostras, representativas dos traços estudados.

Nas figuras 6.12a e 6.12b são apresentadas as imagens do MEV obtidas para o traço com f_{pc} de 0,326 aos 17 dias de idade (amostra 1). Na figura 6.12a é apresentada a imagem na escala de 1 mm, em que é destacada a região e ampliada para a escala de 100 μm (figura 6.12b). Nesta, pode-se destacar uma porosidade bem diferente entre a região do contorno do agregado e o restante da matriz de pasta de cimento.



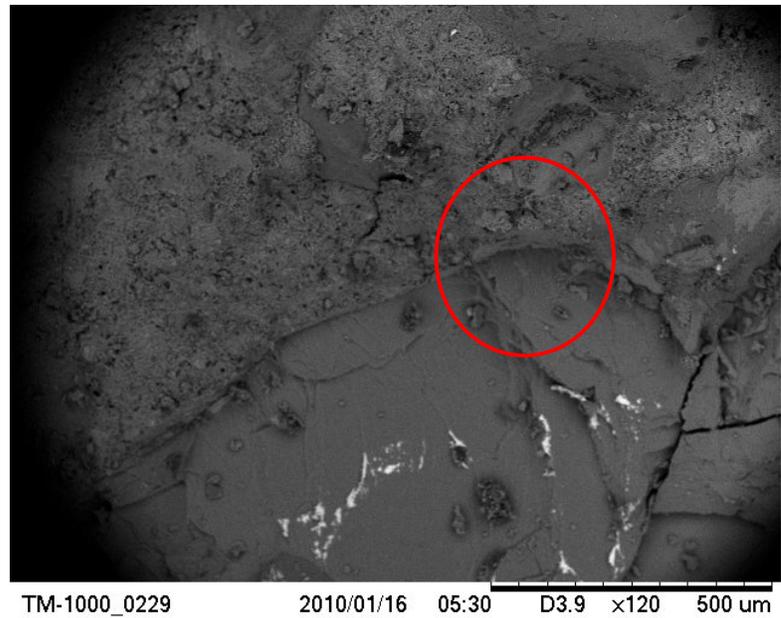
(a) Escala de 1 mm.



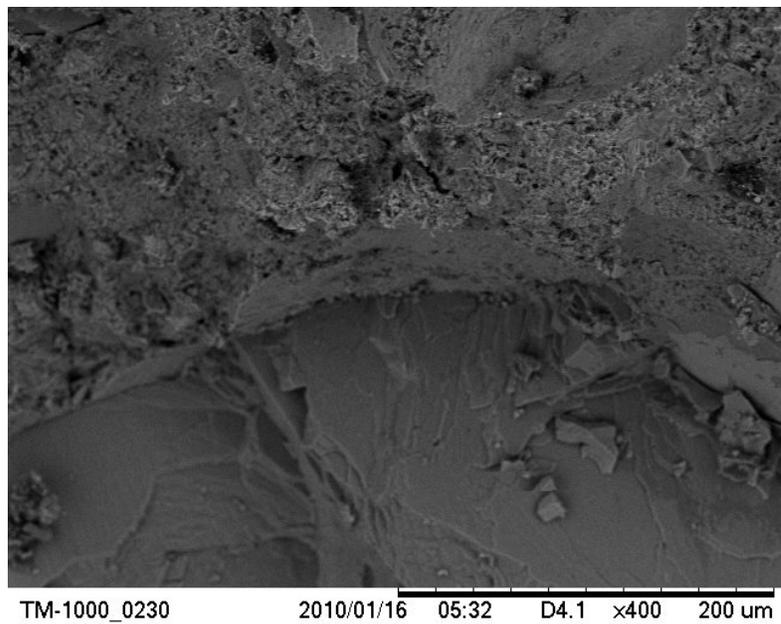
(b) Escala 100 μm .

Figura 6.12: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,326 aos 17 dias (amostra 1).

A figura 6.13 apresenta as imagens do MEV para a amostra 2 do traço com f_{pc} de 0,326 aos 17 dias de idade. As figuras 6.13a e 6.13b representam as imagens ampliadas nas escalas de 500 μm e 200 μm , respectivamente.



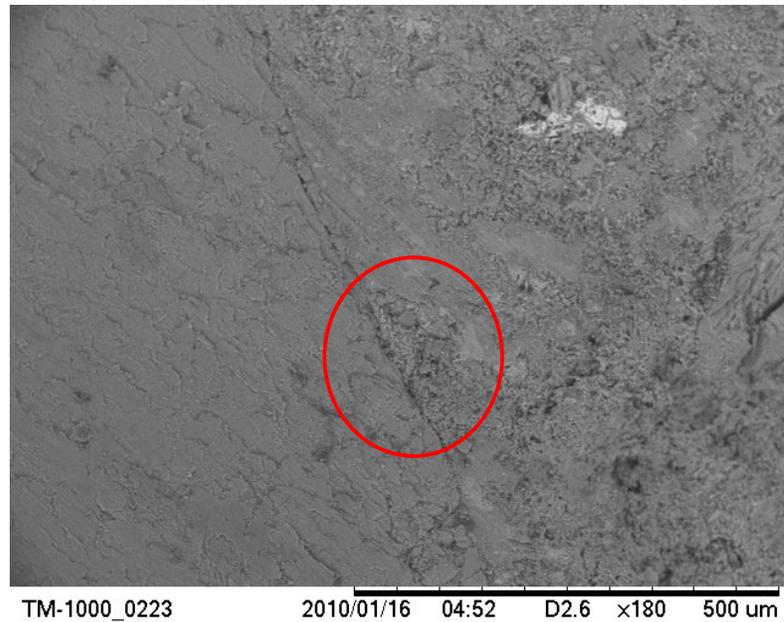
(a) Escala 500 μm .



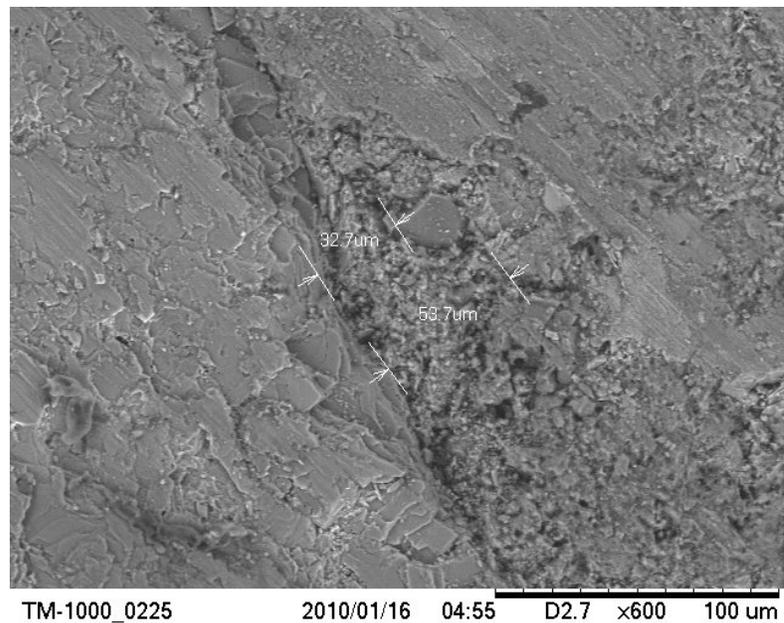
(b) Escala 200 μm .

Figura 6.13: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,326 aos 17 dias (amostra 2).

Nas figuras 6.14a e 6.14b são destacadas as imagens obtidas com o MEV para o concreto com f_{pc} de 0,326 aos 7 dias de idade, ampliadas nas escalas de 500 μm e 100 μm , respectivamente.



(a) Escala 500 μm.



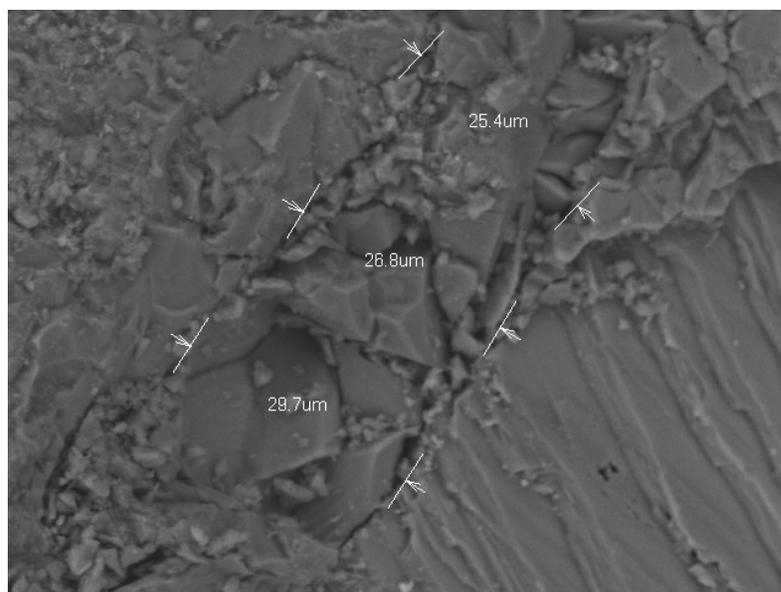
(b) Escala 100 μm.

Figura 6.14: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,326 aos 7 dias.

Para o concreto com f_{pc} de 0,368, aos 7 dias de idade, são apresentadas as imagens de microscopia eletrônica das figuras 6.15a e 6.15b, respectivamente, para as escalas de 500 μm e 50 μm.



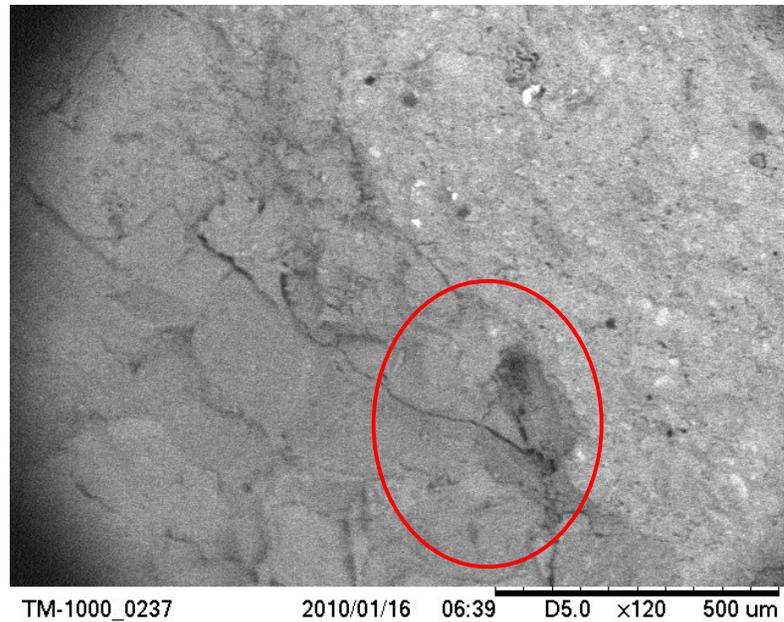
(a) Escala 500 μm



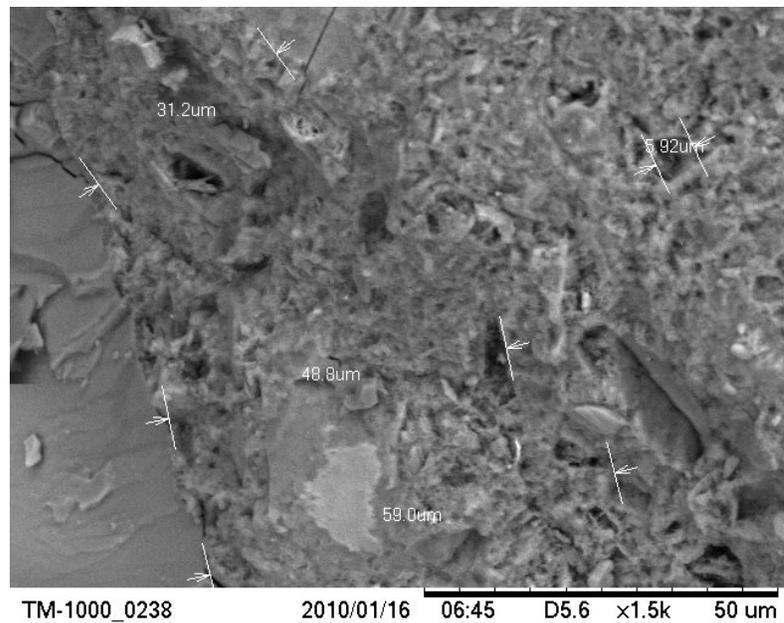
(b) 50 μm

Figura 6.15: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,368 aos 7 dias.

Para o concreto com f_{pc} de 0,487 aos 17 dias de idade são apresentadas as imagens mostradas nas figuras 6.16a e 6.16b, ampliadas nas escalas de 500 μm e 50 μm , respectivamente.



(a) Escala 500 μm.



(b) Escala 50 μm.

Figura 6.16: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,487 aos 17 dias.

A figura 6.17 mostra, para o concreto com f_{pc} de 0,326, o resultado do ensaio de microscopia eletrônica relativo aos 28 dias de idade.

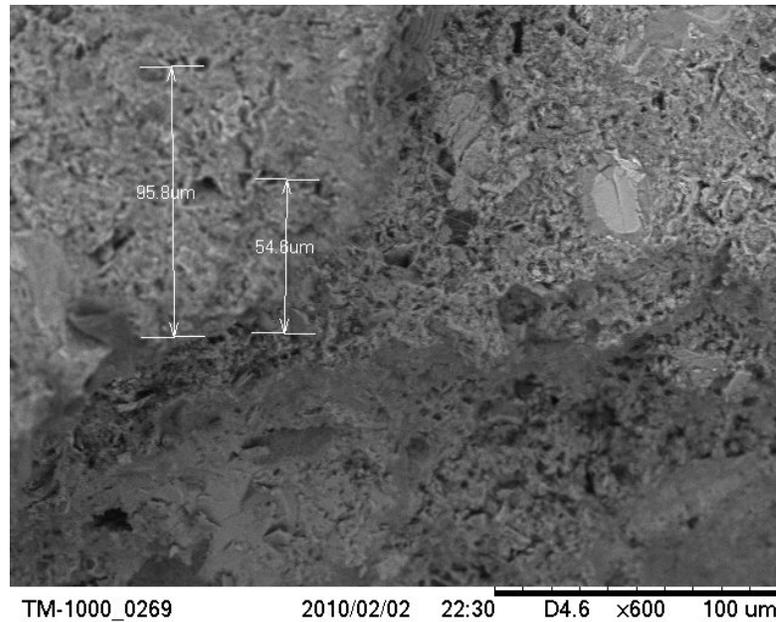
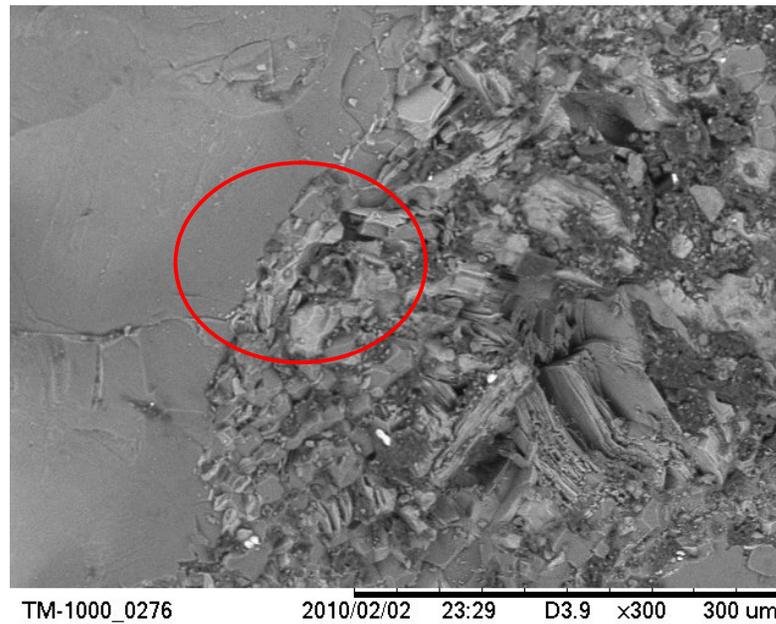
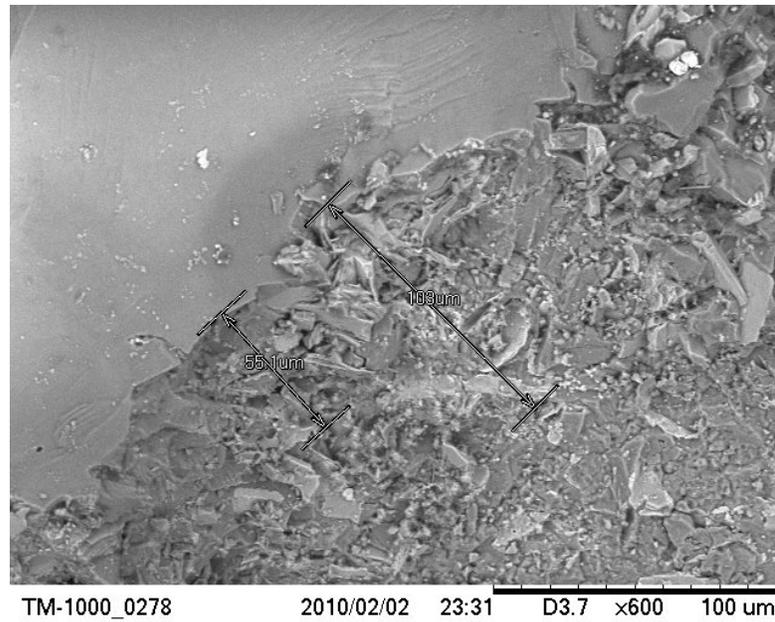


Figura 6.17: Imagem do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,326 aos 28 dias.

As figuras 6.18a e 6.18b ilustram a análise de microscopia para o concreto com f_{pc} de 0,368 aos 28 dias de idade, com imagens ampliadas para os tamanhos de 300 μm e 100 μm , respectivamente.



(a) Escala 300 μm .



(b) Escala 100 μm.

Figura 6.18: Imagens do MEV para o concreto com f_{pc} de 0,368 aos 28 dias.

A figura 6.19 apresenta um detalhe da estrutura interna de uma amostra do concreto com f_{pc} de 0,487 aos 28 dias de idade.

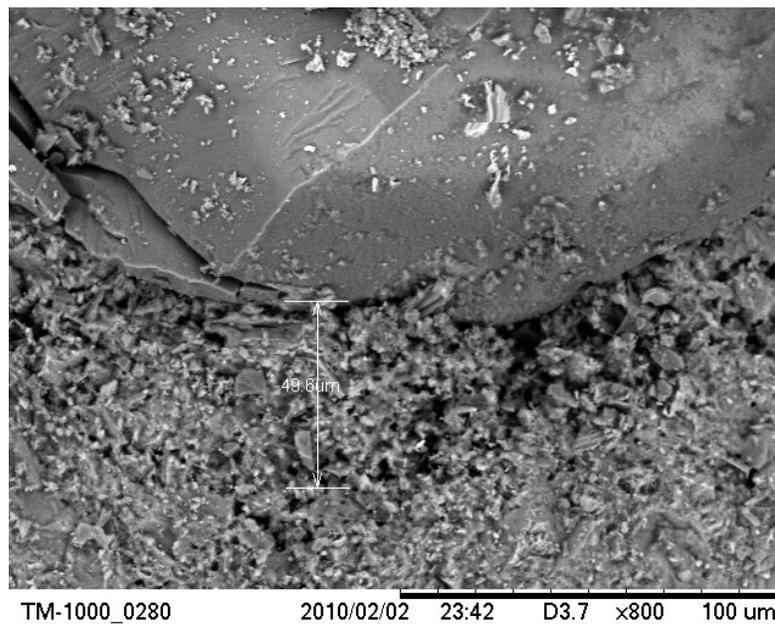


Figura 6.19: Imagem do MEV para o concreto de 45 MPa aos 28 dias.

Nas imagens de microscopia apresentadas neste capítulo buscou-se destacar o aspecto da porosidade da zona de transição, onde as amostras foram ampliadas de forma suficientemente necessária para a possível observação desta zona.

Como resultado da avaliação das imagens mostradas ao longo deste capítulo, destaca-se que a espessura da zona de transição não difere muito entre os concretos avaliados, oscilando entre 30 μm e 100 μm , o que reflete as informações apresentadas na literatura específica.

Compreende-se que este comportamento exibido para os casos avaliados, independe da classe de resistência à compressão do concreto. No trabalho de PAULON & MONTEIRO (2001) ilustra-se este comportamento variável em função do tempo para amostras de concreto convencional.

Inferiu-se que a mesma zona de transição, observada percorrendo a região do contorno do agregado das amostras avaliadas, não apresenta espessura constante e, em algumas amostras, nem sequer deu para identificá-las numa escala da ordem de 50 μm .

De posse destas conclusões, é possível acreditar que as hipóteses lançadas sobre a consideração de uma casca de espessura constante que envolve o agregado não se mostram válidas.

Numa análise mais segura, quando se utiliza a modelagem micromecânica, a consideração de uma fração de volume fixa frente aos demais componentes da mistura se torna mais coerente.

6.7 Síntese.

Neste capítulo, são apresentados os valores experimentais do módulo de elasticidade dos concretos e argamassas avaliados neste estudo. Com base nos valores apresentados, é realizada uma análise de variância para o módulo de elasticidade e resistência à compressão do concreto, analisando a influência de parâmetros da mistura, donde se podem extrair algumas conclusões: a fração volumétrica de pasta de cimento é a variável que apresenta maior contribuição para a variabilidade das propriedades avaliadas para o concreto; A influência do tempo é maior quando associada à fração volumétrica de pasta de cimento, onde a obtenção de um modelo com interação entre os termos resulta numa contribuição mais significativa desta variável. Além dos parâmetros da mistura, a variabilidade nos parâmetros

também apresenta contribuição da zona de transição. Pesquisas para investigação desta zona têm se despertado ainda mais com o avanço na tecnologia de microscópios eletrônicos e aparelhos de ultrassom. Pode-se proceder a uma estimativa da espessura da zona de transição e perceber que esta não representa uma camada constante ao redor de todo o agregado, hipótese utilizada em muitas modelagens, que levam em consideração a zona de transição. Em relação ao valor da espessura da zona de transição, constataram-se os valores relatados na literatura, apresentando-se esta espessura variável ao longo do tempo, como se pode observar no trabalho de PAULON & MONTEIRO (2001). Por se apresentar diferente do relatado na literatura, onde a mesma é assumida como constante, a zona de transição foi utilizada na modelagem micromecânica com fração de volume constante em relação aos materiais envolvidos na mistura.



Capítulo 7

Análise e discussão dos resultados

7.1 Considerações iniciais.

Neste capítulo são apresentadas as análises do estudo experimental do módulo de elasticidade do concreto com a aplicação da modelagem micromecânica. O objetivo é apresentar a evolução desta propriedade, não só em função da evolução do módulo de elasticidade da argamassa, mas avaliar as hipóteses de que o citado módulo sofre influência de parâmetros do agregado e da fração de volume de pasta de cimento na mistura.

As curvas e relações apresentadas são obtidas no intervalo de 3 a 28 dias, sendo este intervalo escolhido pelo fato de serem idades geralmente utilizadas como acompanhamento para a obtenção de propriedades relacionadas ao concreto, além de serem citadas como idades de realização de ensaios na norma NBR 5739:2007.

Nestas curvas primou-se pela obtenção de coeficientes de determinação R^2 que representassem o melhor ajuste, mas observando o parâmetro R^2 ajustado e o erro quadrático médio residual, balizando-se as escolhas nestes critérios.

Inicialmente, são efetuadas as respectivas interpolações dos dados obtidos dos ensaios para os concretos e argamassas. Para tal, utilizou-se o programa MatLab e suas rotinas com diversas formulações matemáticas implementadas. Primou-se por equações interpoladoras que apresentassem o menor erro, mas observou-se também o possível comportamento apresentado

pelo material, balizando a escolha destas funções interpoladoras. Foram determinadas as curvas que descrevem a evolução do módulo de elasticidade do concreto em função da fração de volume de pasta de cimento (relacionada à resistência característica à compressão do concreto), do diâmetro máximo do agregado graúdo utilizado e do tempo, através de regressão multidimensional, em função dos dados experimentais.

A análise foi realizada comparando-se os dados experimentais obtidos em determinadas idades com o módulo de elasticidade obtido por expressões fornecidas por normas nacionais e internacionais e por expressões propostas por diversos pesquisadores para a determinação do módulo de elasticidade do concreto.

Analisou-se a relação existente entre o comportamento evolutivo do módulo de elasticidade em função de sua resistência à compressão, tanto para os concretos quanto para as argamassas, dentro do intervalo de 3 a 28 dias.

Com a análise numérica pode-se avaliar o módulo de elasticidade da zona de transição, através da consideração de um modelo bifásico. Com base nestes dados, mediante o estabelecimento de equações que representem a sua variação com o tempo, pode-se avaliar o módulo de elasticidade do concreto através da modelagem numérica.

A partir destas observações, pode-se caracterizar o comportamento do módulo de elasticidade do concreto em função de parâmetros de suas fases e avaliar de forma qualitativa e quantitativa a influência de cada um destes.

Além disto, através das análises com a modelagem micromecânica, pode-se inferir a adequação desta formulação para a predição do módulo de elasticidade do concreto.

7.2 Análise dos dados experimentais.

7.2.1 Análise da evolução das propriedades mecânicas com o tempo.

Nos gráficos das figuras 7.1 e 7.2 são apresentadas as variações com o tempo do módulo de elasticidade e da resistência à compressão dos concretos e argamassas ensaiados, para a fração volumétrica de pasta de cimento de 0,326. São comparadas as curvas ajustadas e os pontos experimentais obtidos, destacados no capítulo 6, nas tabelas 6.8 e 6.9.

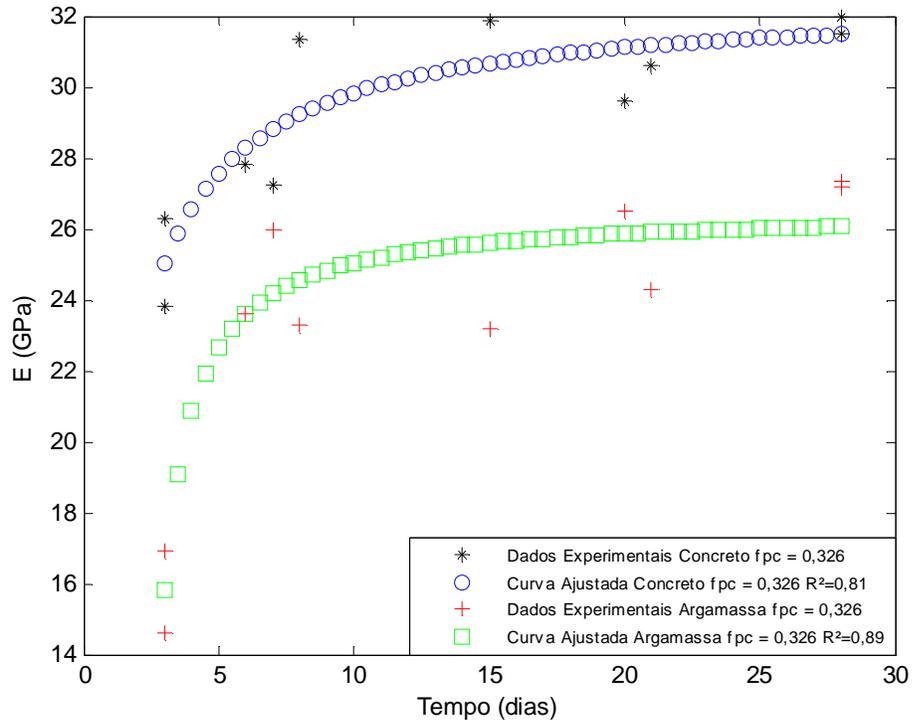


Figura 7.1: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,326$.

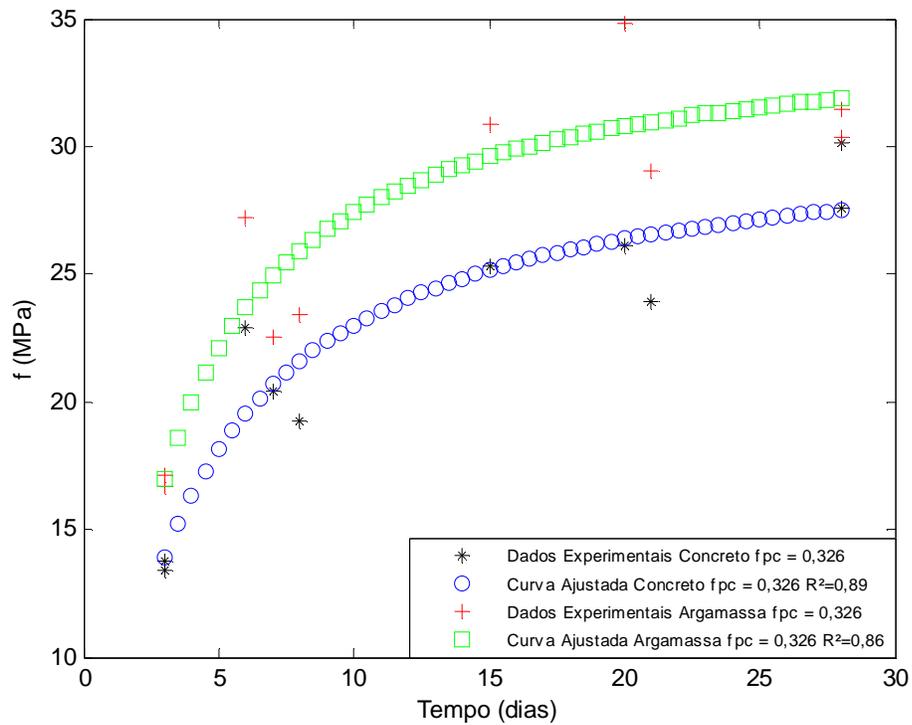


Figura 7.2: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para o traço $f_{pc} = 0,326$.

Nota-se que, ao longo do tempo, os valores do módulo de elasticidade do concreto apresentam-se sempre superiores ao módulo de elasticidade da argamassa. Este comportamento deve estar interligado ao fato de haver a contribuição no módulo de elasticidade das partículas de agregado graúdo no módulo de elasticidade do material compósito.

Comportamento inverso é observado para a evolução da resistência à compressão para o concreto e a argamassa, sendo a última sempre superior. Pode-se relacionar este comportamento, sob a ótica das fases do concreto, à presença da zona de transição, que apresenta efeito mais significativo no concreto, quando avaliada sob o aspecto de resistência à compressão, devido a esta ser maior em agregados graúdos do que em agregados miúdos e ser, nesta zona, na qual se inicia o processo de fissuração para a classe de concretos avaliados.

Para f_{pc} igual a 0,368, são apresentadas nas figuras 7.3 e 7.4 as evoluções com o tempo, para os concretos e argamassas, do módulo de elasticidade e da resistência à compressão. Os dados experimentais estão apresentados no capítulo 6.

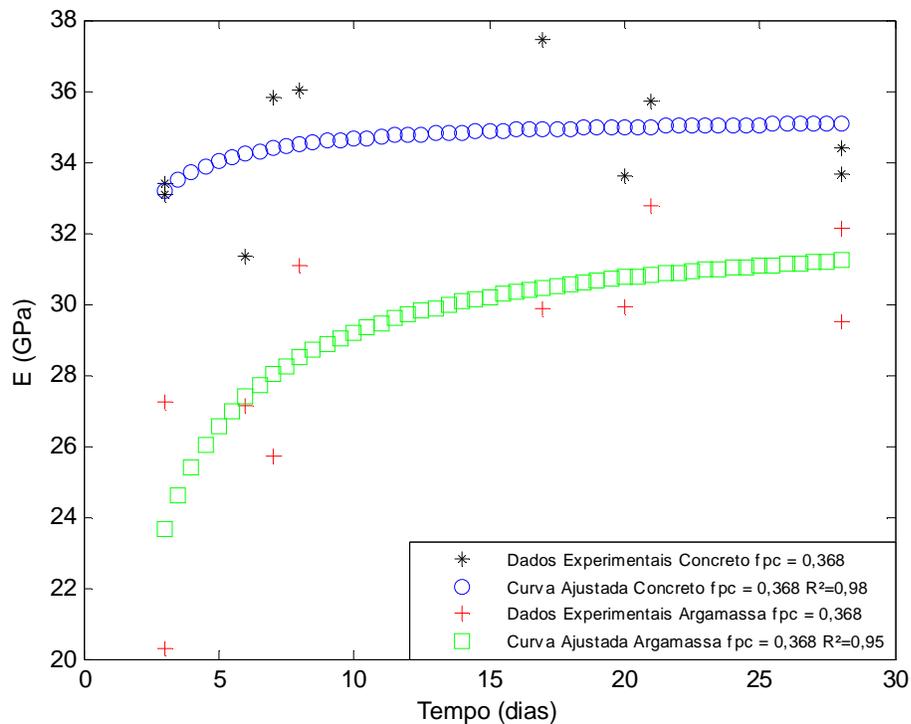


Figura 7.3: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,368$.

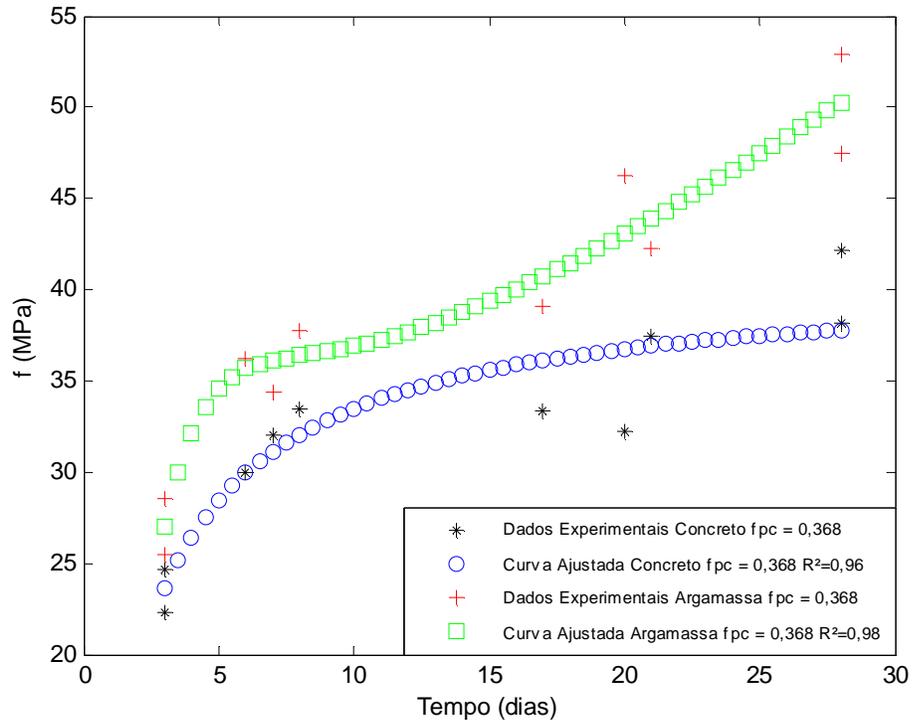


Figura 7.4: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,368$.

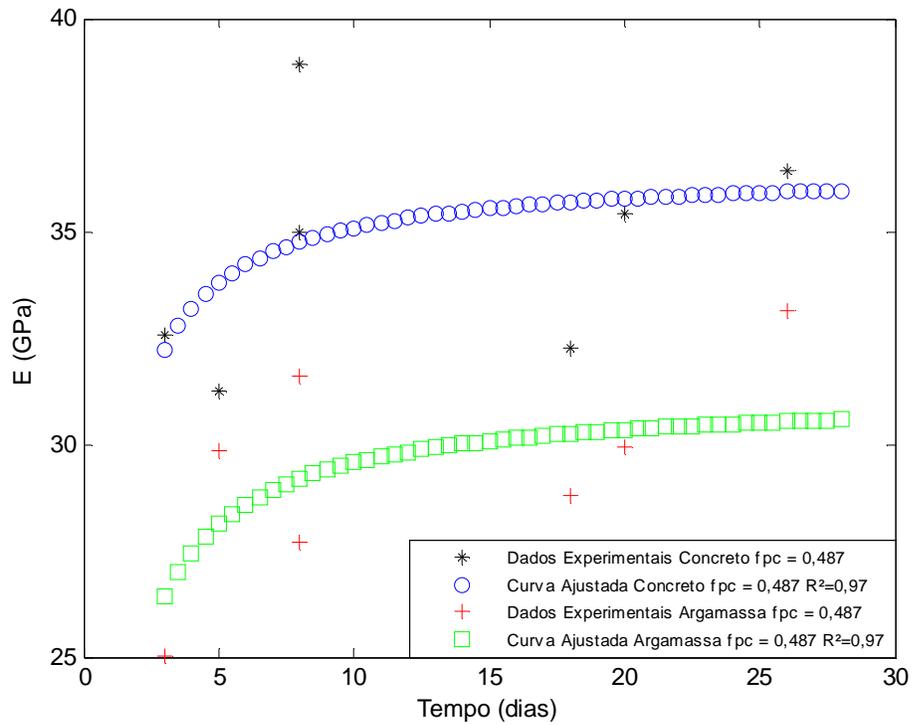


Figura 7.5: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,487$.

Os gráficos visualizados nas figuras 7.5 e 7.6 apresentam as evoluções do módulo de elasticidade e resistência à compressão em função do tempo para o traço com $f_{pc} = 0,487$, respectivamente. Os pontos experimentais são apresentados nas tabelas 6.8 e 6.9.

Para as variações de fração volumétrica de pasta de cimento avaliadas, o comportamento do módulo de elasticidade e resistência à compressão frente ao tempo se mostra de forma semelhante.

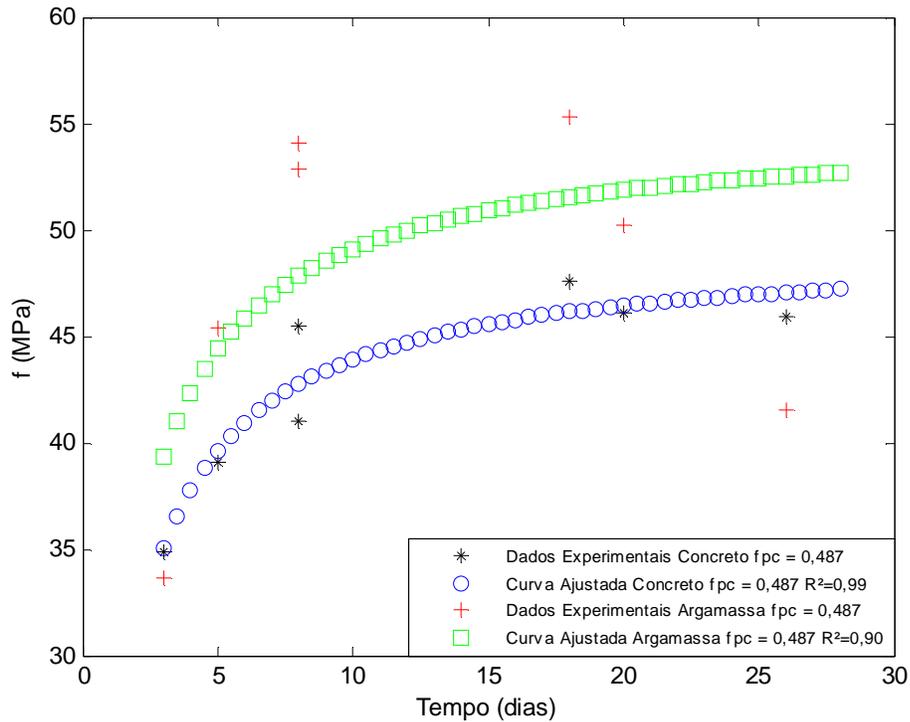


Figura 7.6: Estudo comparativo da resistência à compressão do concreto e argamassa em função do tempo para $f_{pc} = 0,487$.

7.2.2 Estudo comparativo do módulo de elasticidade com expressões propostas.

De posse das curvas interpoladas para os concretos com frações de pasta de cimento de 0,326, 0,368 e 0,487, compararam-se os resultados obtidos com as expressões apresentadas em normas nacionais e internacionais e propostas por pesquisadores, com o objetivo de averiguar a consonância dos dados através destas formulações em relação ao parâmetro tempo.

No capítulo 3 foram listadas várias expressões para o cálculo do módulo de elasticidade, dadas em função da resistência à compressão. Com o objetivo de poder comparar as curvas experimentais obtidas com os valores produzidos por estas expressões, ajustou-se uma curva com os valores experimentais de resistência à compressão em algumas idades.

As curvas para estas expressões foram obtidas com a aplicação da resistência à compressão oriunda da curva experimental ajustada.

Ressalta-se, como mencionado no capítulo 3, que cada expressão tem suas características em relação ao intervalo de resistência que esta pode ser aplicada e limitação a alguns tipos de agregado. Mesmo sabendo destes detalhes relativos ao agregado, algumas destas foram utilizadas apenas para efeito de comparação. A curva experimental foi obtida com base no agregado de origem gnaïsse.

Algumas expressões são relacionadas ao módulo de elasticidade secante e como os dados experimentais foram do módulo de elasticidade tangente inicial, a conversão expressa pela norma NBR 6118:2003 se tornou necessária.

As análises foram realizadas de forma separada para cada fração de pasta de cimento citada e as curvas obtidas pelas expressões comparadas com a evolução do módulo de elasticidade de cada traço estudado.

Nas figuras 7.7 e 7.8 são traçadas as curvas comparando a evolução do módulo de elasticidade para $f_{pc} = 0,326$ em relação às expressões aplicadas em diversas normas e propostas por pesquisadores, descritas no capítulo 3. As curvas ajustadas são obtidas de forma numérica utilizando o software MATLAB.

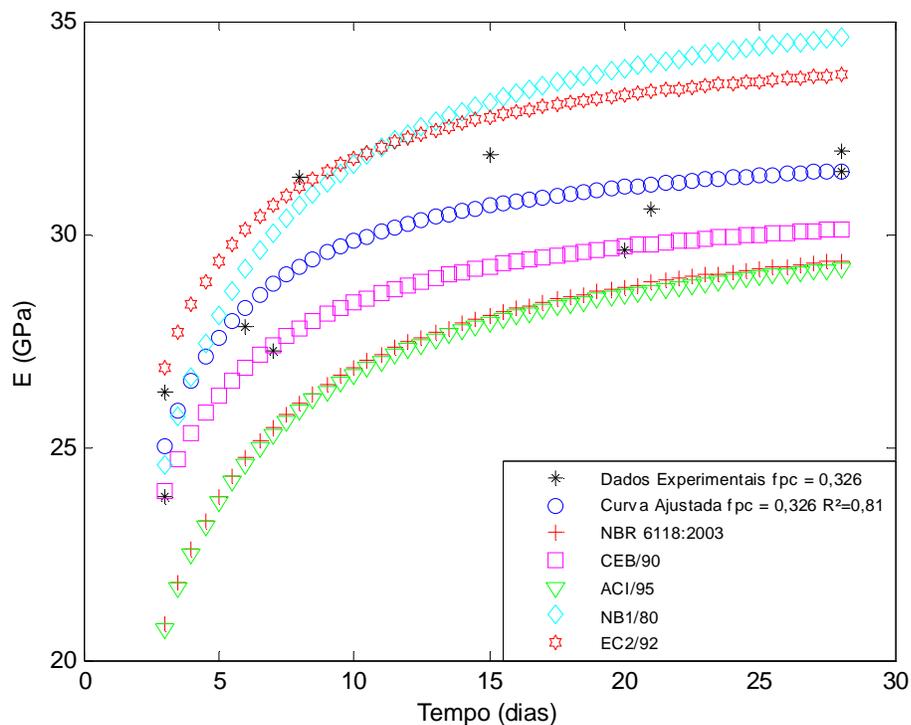


Figura 7.7: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,326$ com expressões presentes em normas.

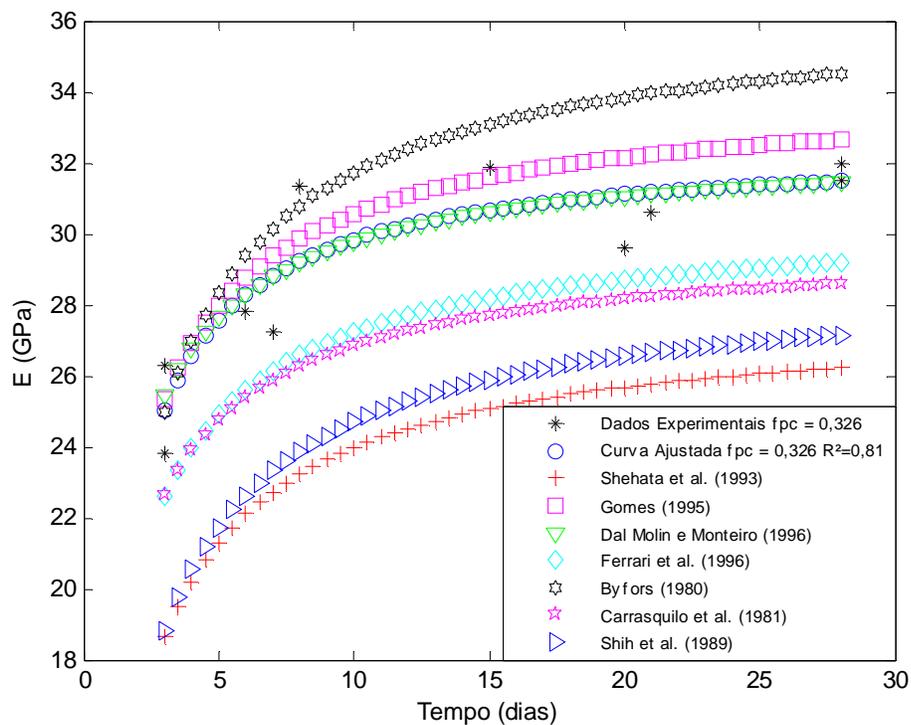


Figura 7.8: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,326$ com expressões propostas por pesquisadores.

As figuras 7.9 e 7.10 apresentam, para o concreto com $f_{pc} = 0,368$, o comportamento evolutivo do módulo de elasticidade para as expressões presentes em normas e propostas por pesquisadores, respectivamente.

Para a última fração de pasta de cimento avaliada ($f_{pc} = 0,487$), são traçadas nas figuras 7.11 e 7.12 a variação com o tempo do módulo de elasticidade obtido com as expressões das normas e propostas por pesquisadores.

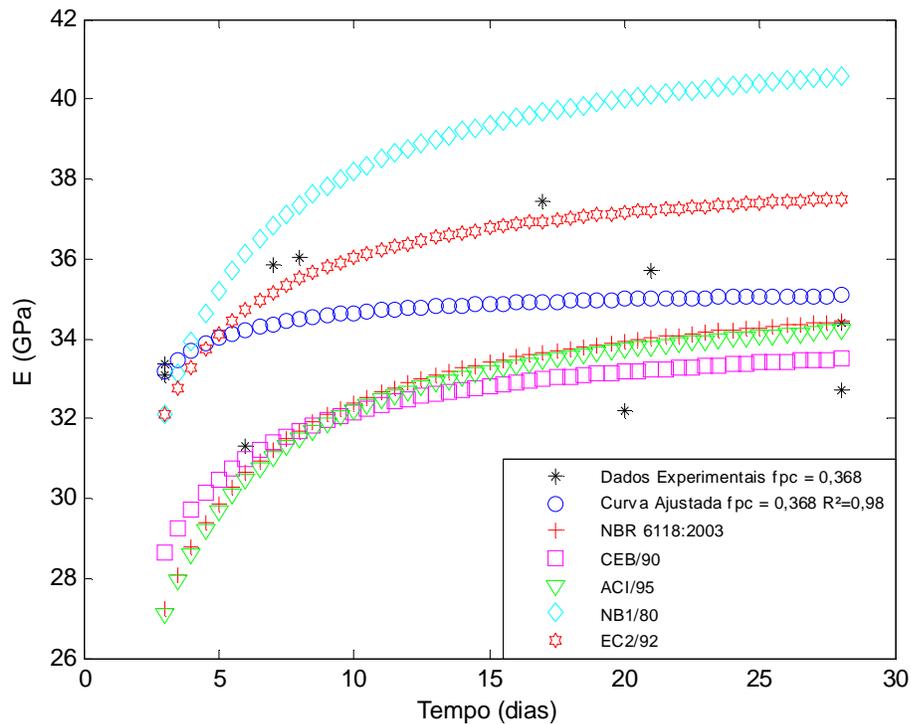


Figura 7.9: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,368$ com expressões presentes em normas.

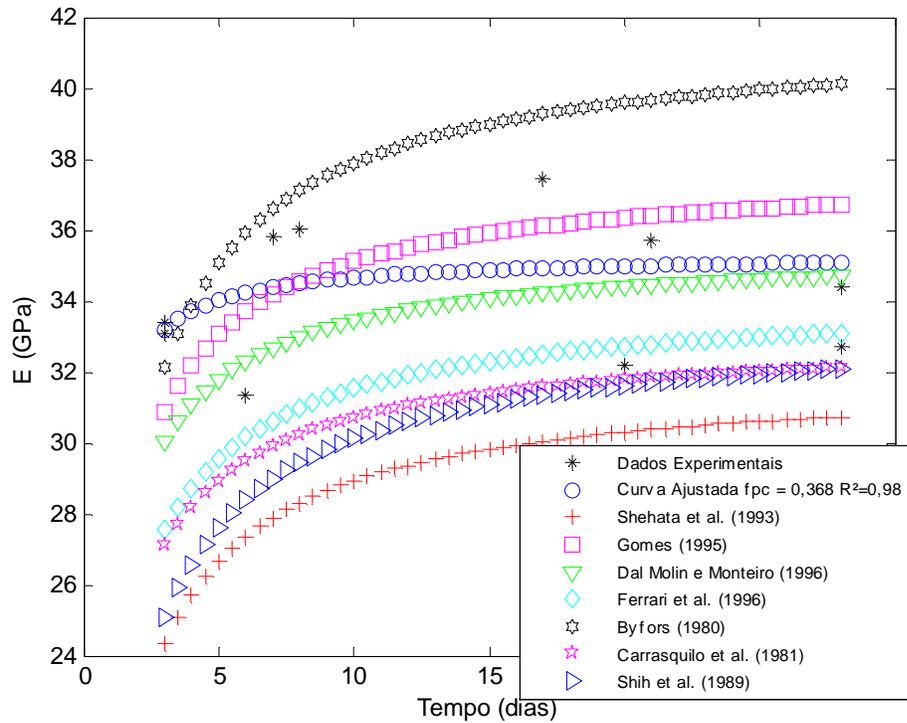


Figura 7.10: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,368$ com expressões propostas por pesquisadores.

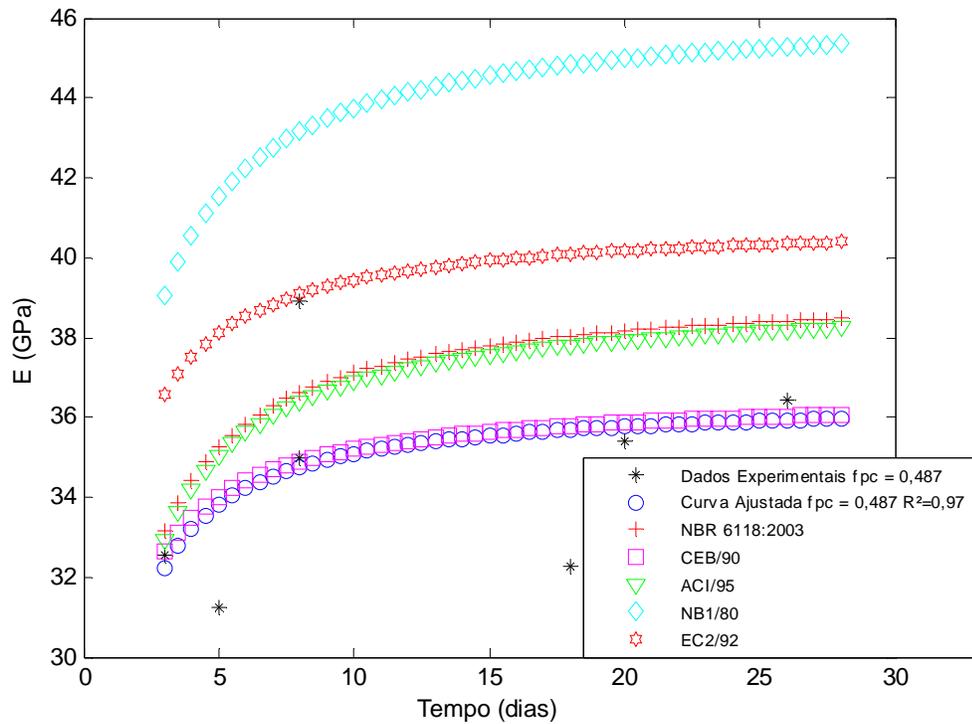


Figura 7.11: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,487$ com expressões presentes em normas.

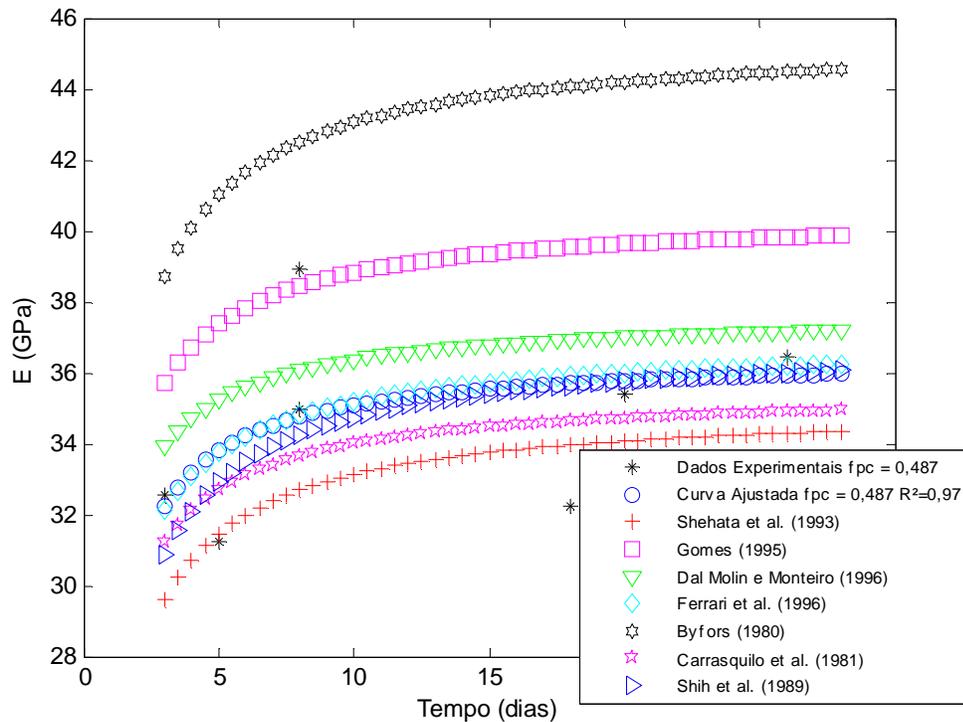


Figura 7.12: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto com $f_{pc} = 0,487$ com expressões propostas por pesquisadores.

Pode-se destacar da análise das expressões de normas e pesquisadores frente aos dados experimentais que:

- A expressão da NBR 6118:2003 apresentou bons resultados para a caracterização dos concretos estudados para idades superiores a 15 dias, resultando erros inferiores a 8% em relação aos dados experimentais;
- Na análise qualitativa de erro para todas as curvas geradas, a expressão do CEB/90 foi a que apresentou melhor ajuste, apresentando erros inferiores à expressão da NBR 6118:2003;
- O comportamento da expressão do ACI/95 é semelhante ao da NBR 6118:2003, da qual esta última é derivada;
- A expressão da antiga NB1 (NBR 6118:1980) apresentou os maiores erros entre as analisadas, principalmente na idade de 28 dias, idade padrão para obtenção de propriedades do concreto, não se revelando uma equação que possa descrever a variação do módulo de elasticidade em função da idade;

- Altos valores de erros também foram obtidos com a expressão do EC2/92;
- As expressões propostas por DAL MOLIN & MONTEIRO (1996) e GOMES (1995) são, entre as expressões apresentadas, as que apresentam menores erros em relação às frações de pasta de cimento avaliadas, gerando erros inferiores a 10%.
- Observa-se, das relações propostas pelos pesquisadores citados, que há uma tendência para estas relações se ajustarem ao agregado utilizado e serem representativas de algumas regiões, fato descrito como limitação destas expressões, justificando os erros encontrados.

7.2.3 Relação entre módulo de elasticidade e a resistência à compressão.

A relação existente entre o módulo de elasticidade do concreto e sua resistência à compressão é algo que não se tem consenso, fato que pode ser confirmado pelas diversas propostas apresentadas, além do módulo de elasticidade ser influenciado pelas fases constituintes do mesmo.

Os valores obtidos nos ensaios com concreto podem apresentar grande dispersão de resultados para uma mesma amostragem. Em função disso, estas expressões só devem ser utilizadas na falta de experimentos que possam comprovar os valores da propriedade analisada.

Nos experimentos realizados neste trabalho, podem-se observar as relações obtidas entre o módulo de elasticidade e resistência à compressão para o concreto e a argamassa, respectivamente, nas figuras 7.13 e 7.14.

O trecho inicial da curva, válido para resistências à compressão menores que 13 MPa não puderam ser contempladas pelo fato dos ensaios terem sido realizados na idade mínima de 3 dias e os concretos avaliados alcançarem valores superiores a este limite nesta idade.

Para as argamassas, o limite inicial dos valores apresentados pelos corpos-de-prova nos ensaios de resistência à compressão foi de 16 MPa.

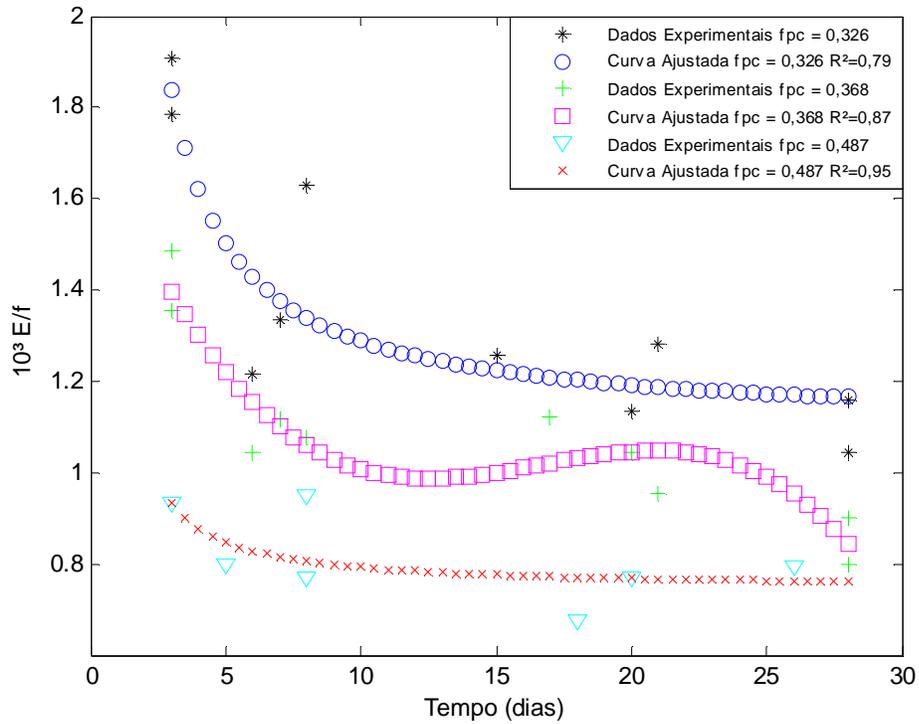


Figura 7.13: Relação entre o módulo de elasticidade e resistência à compressão do concreto para os traços estudados.

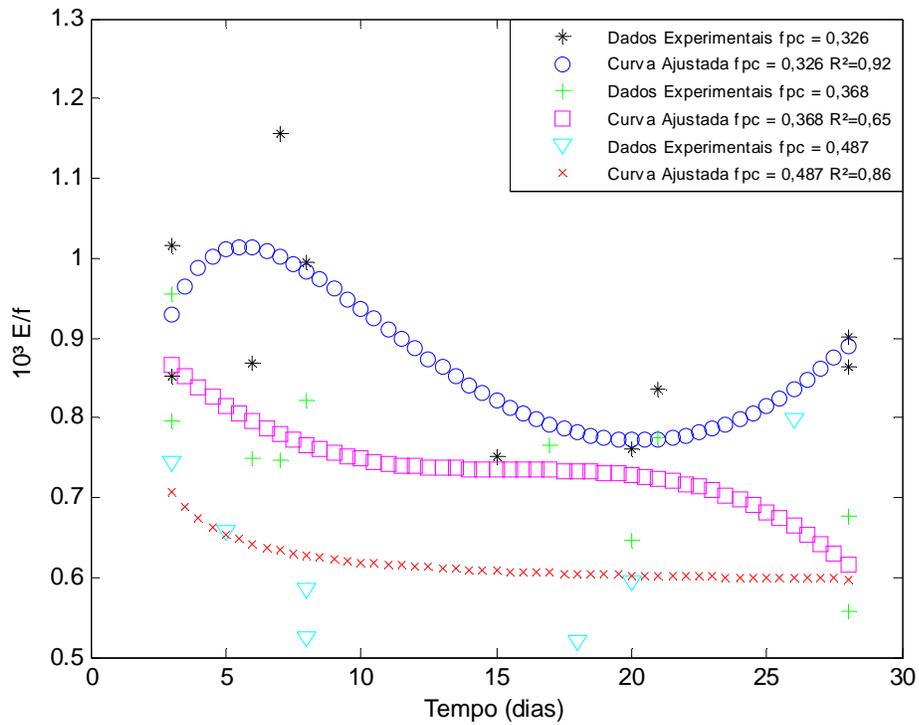


Figura 7.14: Relação entre o módulo de elasticidade e resistência à compressão da argamassa para os traços estudados.

Comprova-se, para os concretos estudados, a relação não linear existente entre os dois parâmetros, assim como para as curvas obtidas para a argamassa, destacando-se que dentro do intervalo analisado (3 a 28 dias) para o concreto com $f_{pc} = 0,487$ a relação é praticamente linear, observadas nas figuras 7.13 e 7.14.

Das curvas apresentadas, pode-se observar a influência da zona de transição no módulo de elasticidade e resistência à compressão, em que as curvas para a argamassa apresentam relações sempre menores que 1 e para os concretos esta relação varia de 1,8 a 0,8, onde os valores menores são obtidos em concretos com maior teor de pasta de cimento, o que implicaria em zonas de transição mais resistentes.

Pode-se observar das mesmas figuras que os concretos apresentam curvas diferentes, gerando-se com isto a conclusão de que uma mesma expressão utilizada para abranger uma classe de concretos pode ocasionar erros significativos.

As relações encontradas para os três concretos são apresentadas nas equações 7.1, 7.2 e 7.3 para as frações de pasta de cimento citadas, representativas de concretos com resistência característica à compressão de 25 MPa, 35 MPa e 45 MPa, respectivamente. As relações encontradas são polinomiais e foram obtidas para o intervalo de 3 a 28 dias, tendo como critério de obtenção a observação dos menores valores do coeficiente de correlação e o erro quadrático médio residual, sendo determinadas através do software MATLAB. Os termos E_c e f_c são o módulo de elasticidade e resistência à compressão do concreto, dados em MPa.

$$E_{c25} = \frac{43460f_{c25} + 91.13}{f_{c25} + 10.96} \quad (7.1)$$

$$E_{c35} = \frac{37290f_{c35} - 2.246}{f_{c35} + 2.81} \quad (7.2)$$

$$E_{c45} = -15.82f_{c45}^2 + 1489f_{c45} - 46.08 \quad (7.3)$$

Curvas com equações semelhantes às aplicadas nas normas e expressões propostas na literatura não puderam ser analisadas pela insuficiência de pontos experimentais obtidos dentro do intervalo, analisado para descrever esta relação entre a resistência à compressão e módulo de elasticidade.

Para as argamassas, o comportamento revelado entre o módulo de elasticidade e a resistência à compressão também é não-linear. As curvas ajustadas para este comportamento das argamassas estão apresentadas nas equações 7.4, 7.5 e 7.6, respectivamente, para as

argamassas extraídas dos concretos de 25 MPa, 35 MPa e 45 MPa. As relações apresentadas seguem o mesmo critério das equações 7.1 a 7.3, sendo avaliadas no intervalo de 3 a 28 dias. Os termos E_a e f_a são o módulo de elasticidade e resistência à compressão da argamassa, dados em MPa, respectivamente.

$$E_{a25} = \frac{-4.479.10^5 f_{a25}^2 + 3.769.10^7 f_{a25} + 2.506.10^6}{f_{a25} + 2.837.10^4} \quad (7.4)$$

$$E_{a35} = \frac{-1.184.10^5 f_{a35}^2 + 1.254.10^7 f_{a35} - 3.602.10^6}{f_{a35} + 1.037.10^4} \quad (7.5)$$

$$E_{a45} = -0.4386 f_{a45}^3 + 27.16 f_{a45}^2 + 356.9 f_{a45} - 22.47 \quad (7.6)$$

7.2.4 Relação entre os módulos de elasticidade da argamassa e do concreto.

As curvas comparativas que descrevem a evolução do módulo de elasticidade dos concretos e das argamassas avaliadas neste estudo estão traçadas nas figura 7.15 e 7.16, respectivamente.

Na figura 7.17, está traçada a curva de variação da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e da argamassa para os três concretos avaliados.

A relação apresentada é não linear para todos os concretos, evidenciando um menor acréscimo à medida que se aumenta o módulo de elasticidade da argamassa. Visualizando este comportamento em função do tempo, o módulo de elasticidade da argamassa cresce a uma taxa maior que a observada pelo concreto, mostrando forte ligação à quantidade de cimento aplicada a mistura.

O comportamento observado pela curva do concreto com $f_{pc} = 0,487$ é o que se apresenta com menor variabilidade, devido à grande fração volumétrica de pasta de cimento presente na mistura.

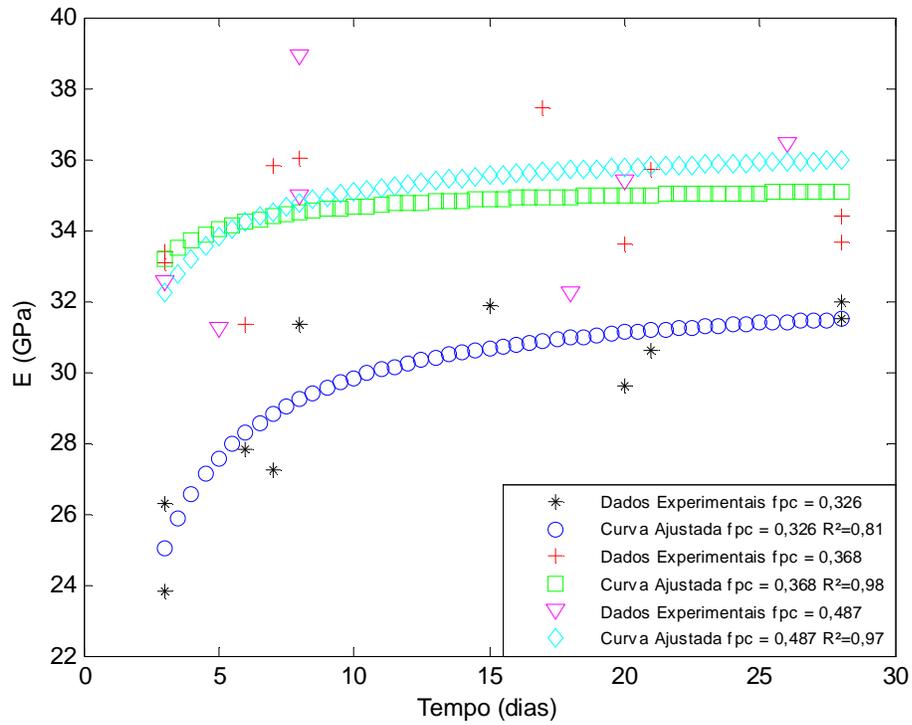


Figura 7.15: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade do concreto.

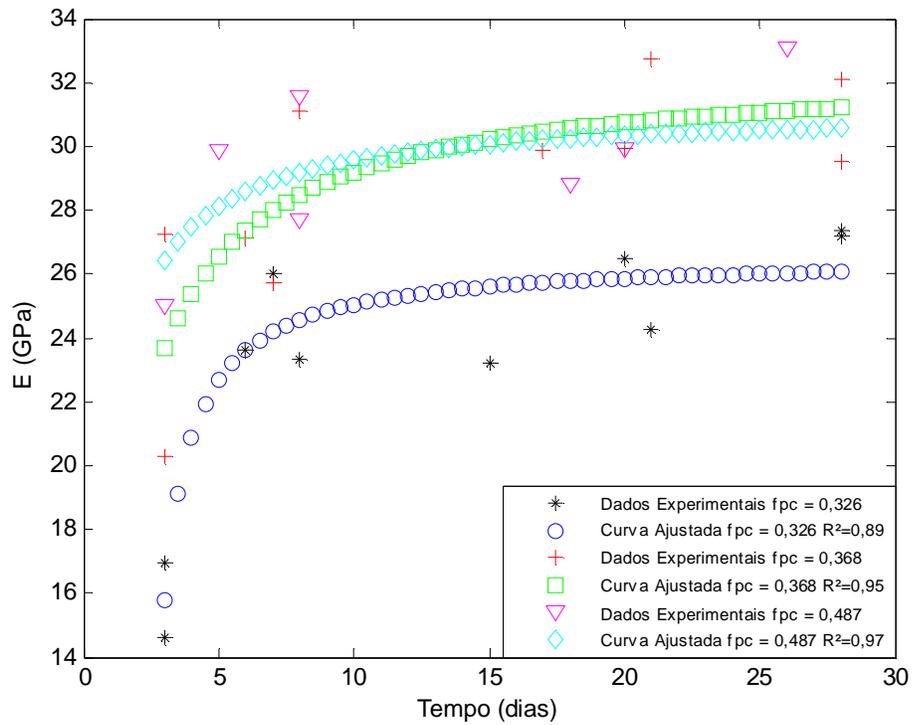


Figura 7.16: Estudo comparativo da evolução com o tempo do módulo de elasticidade da argamassa.

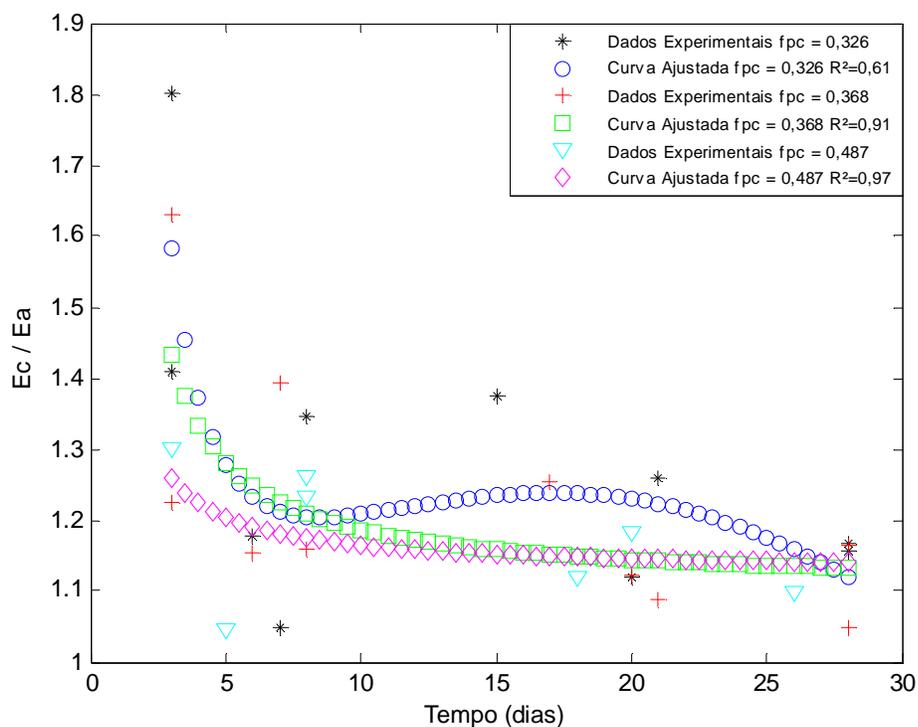


Figura 7.17: Estudo comparativo da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e da argamassa.

7.2.5 Evolução do módulo de elasticidade em função de parâmetros da mistura e do tempo.

Conforme já discutido, muitos são os parâmetros que podem exercer influência na determinação do módulo de elasticidade.

Analisar-se-á a influência conjunta do tempo e de parâmetros de dosagem do traço, a saber: fração volumétrica de pasta de cimento e diâmetro máximo do agregado graúdo.

A avaliação é realizada utilizando regressão polinomial multidimensional, em que são aplicados polinômios no máximo de ordem quadrática, apresentando termos lineares simples ou com interação. Este processo é realizado de forma numérica com a aplicação do software MATLAB.

A relação obtida do módulo de elasticidade com o tempo e fração de volume de pasta de cimento está descrita na equação 7.7:

$$E_c = -99.06 + 0.28845 \cdot t + 620.06 \cdot f_{pc} - 0.0051876 \cdot t^2 - 720.64 \cdot f_{pc}^2 \quad (7.7)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade do concreto (GPa), f_{pc} é a fração volumétrica de pasta de cimento (%) e t é o tempo de análise (dias), dado no intervalo de 3 a 28 dias. O erro médio quadrático encontrado foi de 2.16.

De forma a analisar a influência dos parâmetros listados na equação 7.7, determinou-se o módulo de elasticidade para a variação da fração de volume de pasta de cimento em 10% e, nesta situação, encontrou-se aos 3 dias um aumento de 7.36%, ao passo que, aos 28 dias, este aumento foi de 9.38%.

Para averiguar o efeito do agregado graúdo, a equação 7.8 explicita o módulo de elasticidade do concreto em função do tempo, da fração volumétrica de pasta de cimento e do diâmetro máximo característico do agregado, dentro do intervalo de 3 a 28 dias. O erro quadrático médio gerado foi de 2.53.

$$E_c = 77.489 + 0.49593 \cdot t - 154.33 \cdot f_{pc} - 5.0219 \cdot d_{\max} - 0.58813 \cdot t \cdot f_{pc} - 0.010662 \cdot t \cdot d_{\max} + 15.549 \cdot f_{pc} \cdot d_{\max} \quad (7.8)$$

Na equação 7.8, o módulo de elasticidade é dado em GPa, o tempo é dado em dias, a fração de pasta de cimento é expressa em porcentagem e o diâmetro máximo expresso em mm.

Analisando a equação 7.8, mantendo constantes a fração de volume de pasta de cimento (0.35), para uma mesma idade e variando-se o diâmetro máximo entre 9.5 mm e 19 mm, observa-se que para os 3 dias a diferença encontrada era de 13.16% e, para os 28 dias de idade, a diferença entre os módulos se apresentava em 3.54%. Esta condição pode estar interligada não diretamente ao diâmetro máximo e sim à maturidade da zona de transição, onde ocorre o enrijecimento da matriz de pasta de cimento e da ITZ, e esta passa a ocasionar menor variação no módulo de elasticidade do concreto.

As equações 7.9 e 7.10 apresentam a relação entre a resistência à compressão, o tempo e a fração de volume de pasta de cimento:

$$f_c = -205.3 + 1.0265 \cdot t + 1024.2 \cdot f_{pc} - 0.017358 \cdot t^2 - 1096 \cdot f_{pc}^2 \quad (7.9)$$

$$f_c = 94.456 + 0.94135 \cdot t - 204.96 \cdot f_{pc} - 9.5526 \cdot d_{\max} - 0.94362 \cdot t \cdot f_{pc} - 0.01061 \cdot t \cdot d_{\max} + 26.921 \cdot f_{pc} \cdot d_{\max} \quad (7.10)$$

em que f_c é a resistência à compressão (MPa), t é o tempo de análise (dias), f_{pc} é a fração volumétrica de pasta de cimento (%) e d_{max} é o diâmetro máximo do agregado graúdo (mm). Esta equação tem validade no intervalo de 3 dias a 28 dias.

Os erros médios quadráticos apresentados pelas equações 7.9 e 7.10 foram 2.61 e 3.58, respectivamente.

Analisando a equação 7.9, mantendo fixa a idade, a variação que ocorre quando se aumenta a fração de volume de pasta de cimento em 10% cai de 35%, aos 3 dias, para 22.5% aos 28 dias.

Avaliando o efeito do diâmetro máximo do agregado graúdo (equação 7.10), comprova-se a hipótese de que concretos fabricados com agregados de menores dimensões geram resistências à compressão maiores.

Na mesma idade, a diferença observada entre as resistências à compressão aumenta de cerca de 6.7% em 3 dias para 11.35% aos 28 dias de idade. Infere-se com isto que esta diferença é gerada pelo processo de maturidade do concreto e de sua zona de transição.

7.3 Análise dos resultados obtidos com a modelagem numérica.

Do que fora proposto na metodologia deste trabalho, a utilização da modelagem micromecânica para a determinação do módulo de elasticidade do concreto vai ser realizada segundo o exposto no capítulo 5, com a consideração da zona de transição. Também será avaliado o módulo de elasticidade do concreto com a utilização da modelo de três fases (CHRISTENSEN & LO, 1979) e do modelo de Mori-Tanaka (BENVENISTE, 1987), adicionando a zona de transição na modelagem.

Por não haver informações precisas acerca da espessura e do módulo de elasticidade da zona de transição, foram consideradas variações nos mesmos para o desenvolvimento do estudo, sendo os resultados comparados à resposta apresentada com as curvas experimentais obtidas.

HASHIN & MONTEIRO (2002) mostraram que para argamassas, compostas com agregado com diâmetro de 850 μm , a espessura da zona de transição encontrada foi de 25 μm . O valor é estimado em torno de 10% do volume total da mistura. Para agregados de maiores

dimensões e mantendo fixa a proporção total da zona de transição em relação ao volume da mistura, seria necessário aumentar a espessura da zona de transição.

Nos trabalhos de HASHIN & MONTEIRO (2002) e LUTZ et al. (1997), o módulo de elasticidade da zona de transição avaliado entre 50% a 70% do módulo volumétrico da matriz de pasta de cimento. Deste valor, conclui-se que a zona de transição tem um módulo que pode variar entre 30% a 50% do módulo de elasticidade da matriz. Objetiva-se determinar a variação desta relação em função do tempo e da fração de volume de pasta de cimento.

As análises numéricas começaram com a aplicação da metodologia exposta no item 5.4.2 (modelagem numérica com a zona de transição). A forma da inclusão utilizada nas análises é a esférica, as quais foram aplicadas no exemplo 4.6.2 apresentando baixos erros em relação à resposta experimental obtida para o concreto avaliado.

7.3.1 Limites de Hashin-Shtrikman.

Os limites de Hashin-Shtrikman, de acordo com SIMEONOV & AHMAD (1995) e MONTEIRO (1993), podem ser utilizados para verificar se um material pode ser qualificado como bifásico onde, nesta hipótese, os limites deverão ser obedecidos.

Esta análise se dá por meio de curvas limites (limites inferior e superior) e, quando os valores experimentais apresentados por certo materiais, analisado como bifásico, se apresentam fora destes limites, implica em dizer que o mesmo poderia ser assumido como possuindo três ou mais fases em sua constituição.

Na literatura na qual estes limites são verificados, as análises são feitas variando-se a fração de volume do material de inclusão na mistura (SIMEONOV & AHMAD, 1995; MONTEIRO, 1993). Neste trabalho, as análises dos limites de Hashin-Shtrikman para o módulo de elasticidade foram realizadas em função do tempo. O objetivo é verificar, para os referidos limites, se os dados experimentais apresentados pelo concreto em função do tempo, para uma dada fração de volume de agregado, satisfazem a estes limites, podendo-se concluir sobre a condição de material bifásico.

Nas figuras 7.18, 7.19 e 7.20 são apresentadas as análises comparativas dos dados experimentais com as curvas geradas para os limites de Hashin-Shtrikman para os concretos com frações volumétricas de pasta de cimento de 0,326, 0,368 e 0,487, respectivamente.

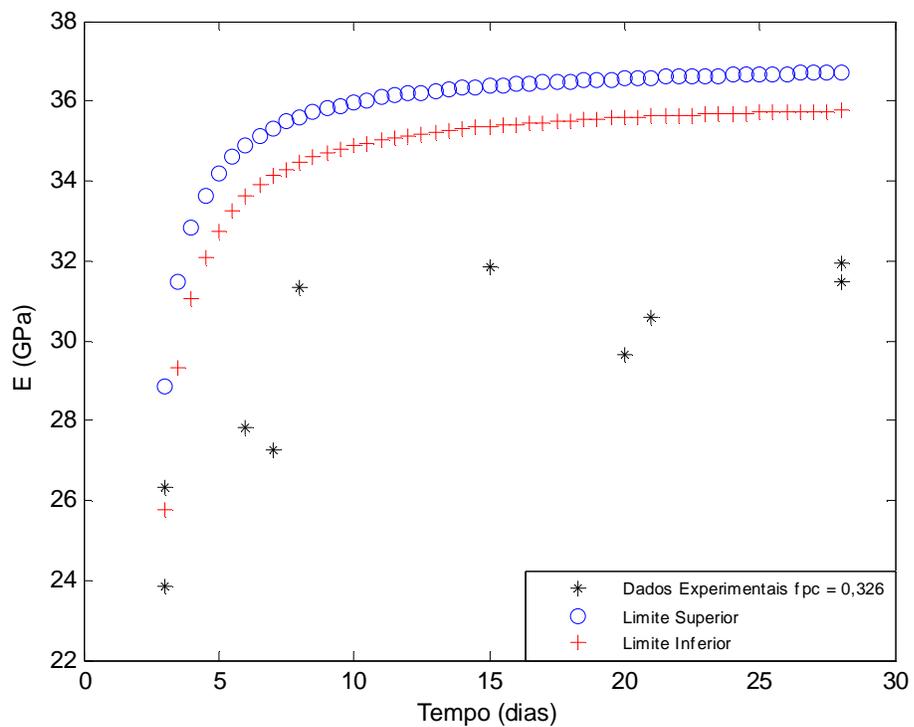


Figura 7.18: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,326$.

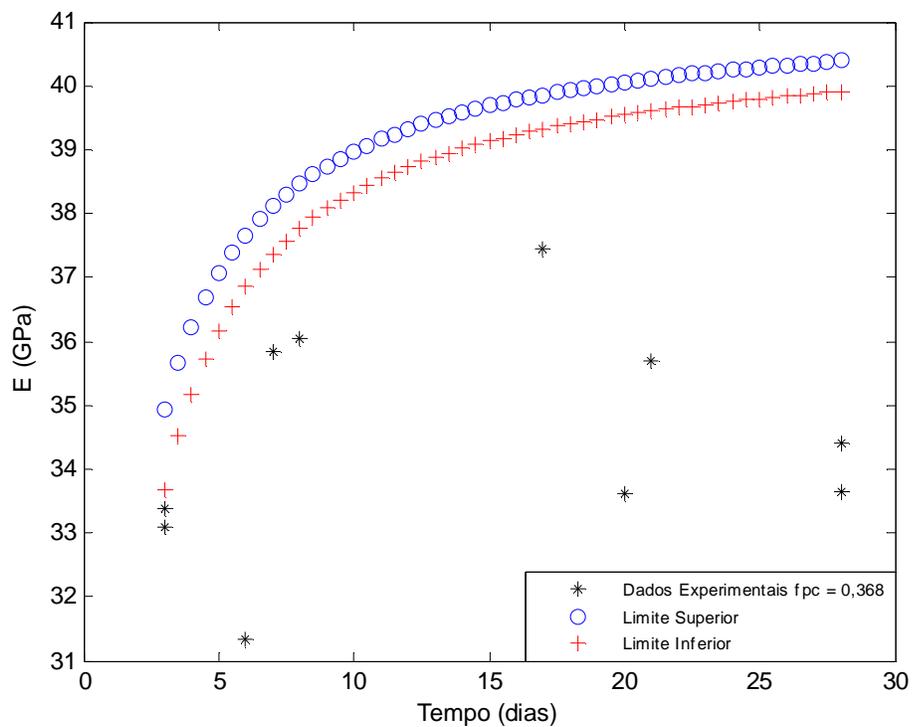


Figura 7.19: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,368$.

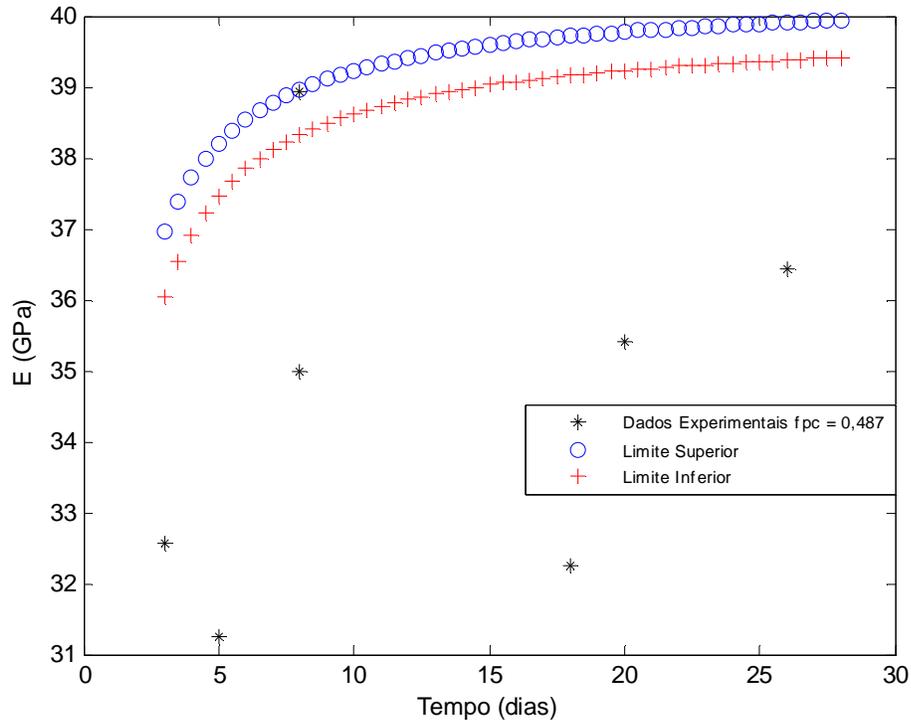


Figura 7.20: Envoltórias de Hashin-Shtrikman para o concreto com $f_{pc} = 0,487$.

Observa-se das figuras 7.18, 7.19 e 7.20 que praticamente todos os pontos experimentais encontram-se fora dos limites propostos por Hashin-Shtrikman, o que implica dizer que o material concreto precisa ser avaliado como um material contendo mais fases, além dos agregados e da pasta de cimento. No caso em questão e como abordado ao longo do texto, esta nova fase a ser considerada é a zona de transição interfacial.

Nas análises realizadas desprezou-se o efeito da zona de transição entre a pasta de cimento e o agregado miúdo, sendo estas consideradas através dos valores experimentais obtidos para o módulo de elasticidade e resistência à compressão da argamassa.

7.3.2 Análise micromecânica sem a zona de transição.

Com as análises prévias realizadas no capítulo 4, definiram-se os modelos de Mori-Tanaka e de três fases como os que seriam utilizados neste trabalho pelos resultados apresentados.

No capítulo 5, estes modelos foram utilizados para determinar o módulo de elasticidade do concreto na idade de 28 dias.

Nas figuras 7.21, 7.22 e 7.23 são apresentados os resultados da aplicação destes dois modelos em função dos resultados obtidos para o intervalo de 3 a 28 dias, para as frações volumétricas de pasta de cimento de 0,326, 0,368 e 0,487, respectivamente.

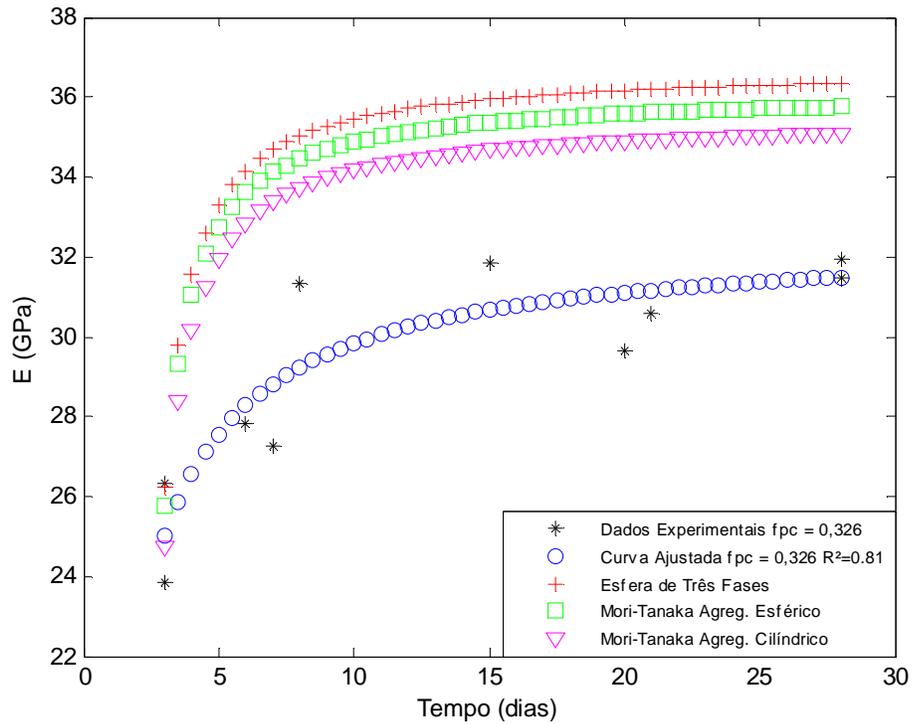


Figura 7.21: Estudo comparativo da aplicação dos modelos de micromecânica sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,326$).

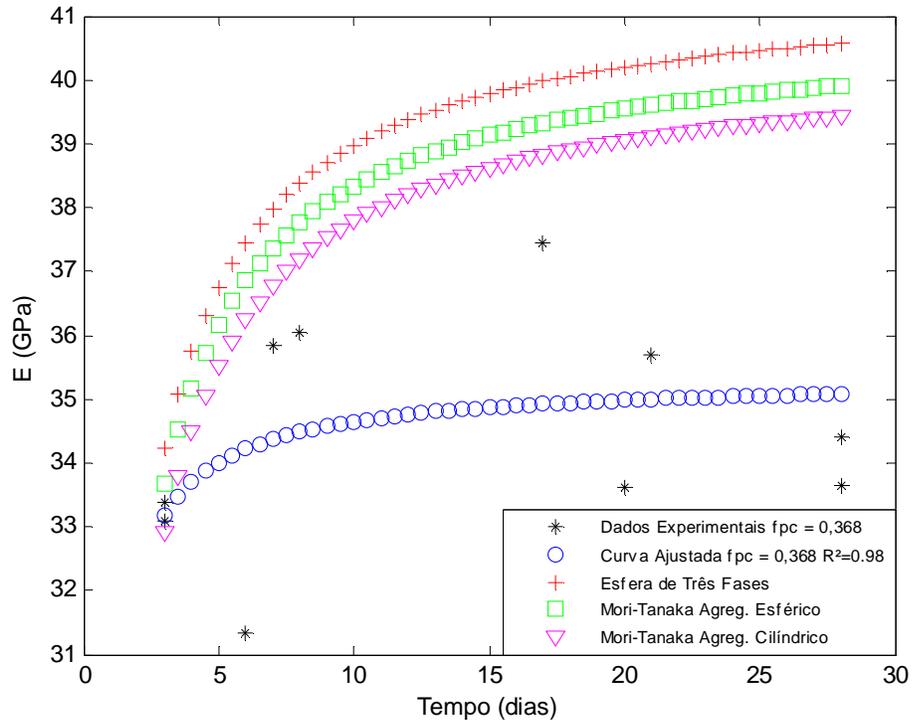


Figura 7.22: Estudo comparativo da aplicação dos modelos de micromecânica sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,368$).

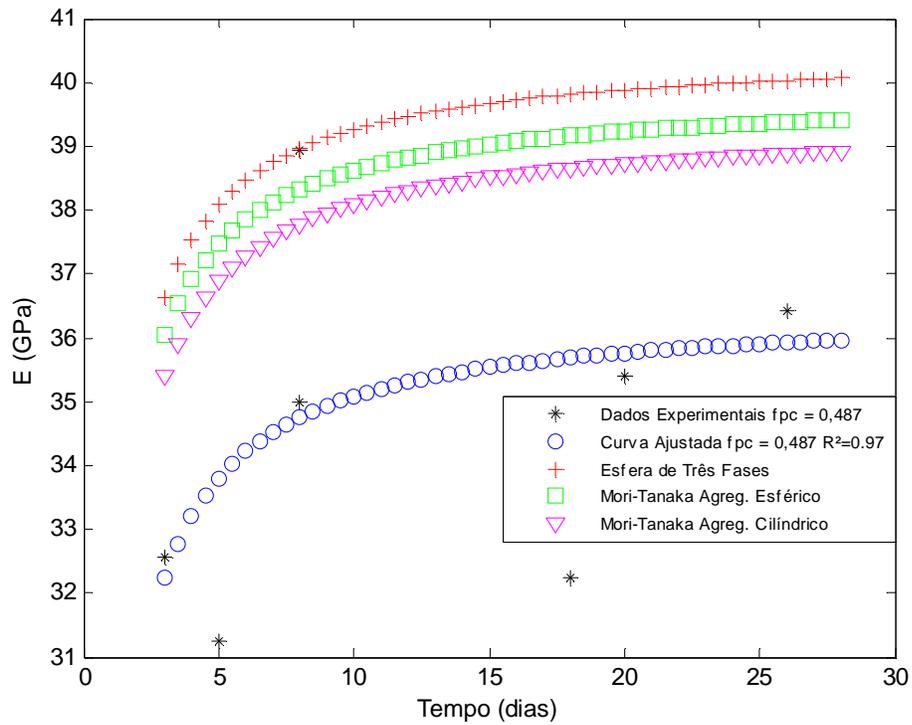


Figura 7.23: Estudo comparativo da aplicação dos modelos de micromecânica sem a zona de transição ($f_{pc} = 0,487$).

Observa-se que a modelagem utilizando os modelos de três fases e de Mori-Tanaka para a determinação do módulo de elasticidade do concreto não é satisfatória, apresentando grandes diferenças em relação à curva ajustada e aos dados experimentais, o que corrobora com os resultados encontrados através dos limites de Hashin-Shtrikman.

Decorre daí que a modelagem sem a zona de transição não representaria de forma adequada o comportamento dos concretos estudados.

7.3.3 Módulo de elasticidade da zona de transição.

Fazendo-se uso do modelo de três fases, conforme explanado no capítulo 5, apresentam-se nas figuras 7.24, 7.25 e 7.26 os gráficos de variação com o tempo do módulo de elasticidade da zona de transição, respectivamente, para os concretos com 0,326, 0,368 e 0,487 de fração de volume de pasta de cimento.

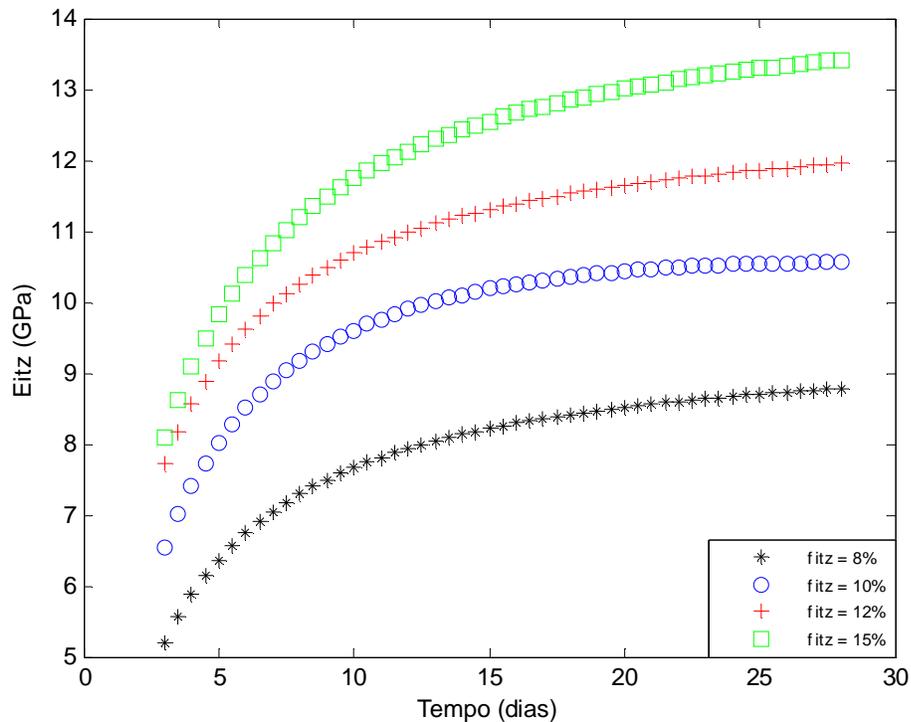


Figura 7.24: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,326$ em função de sua fração volumétrica e do tempo.

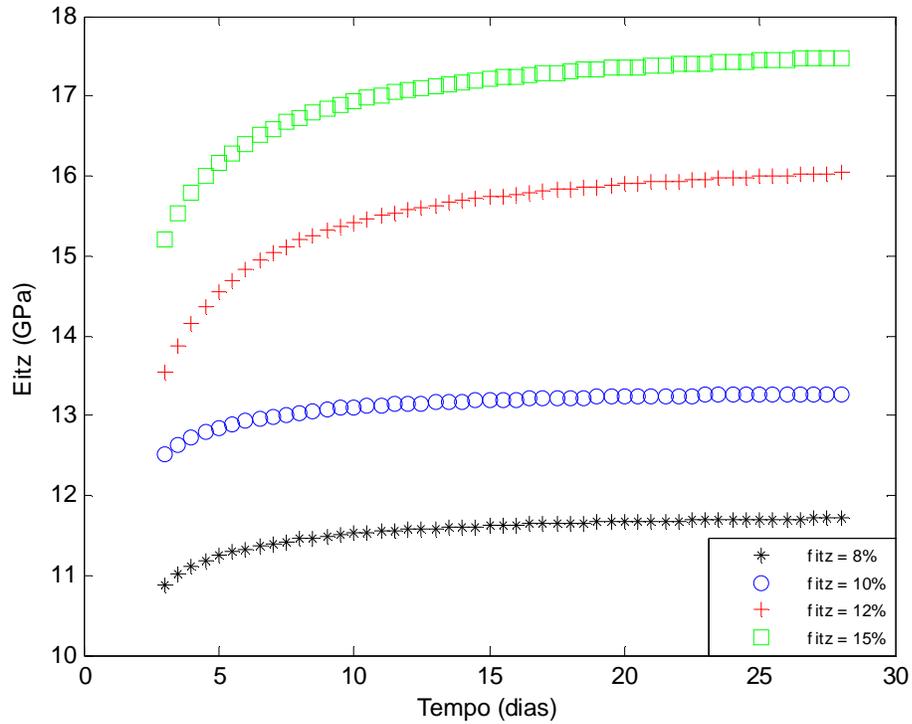


Figura 7.25: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,368$ em função de sua fração volumétrica e do tempo.

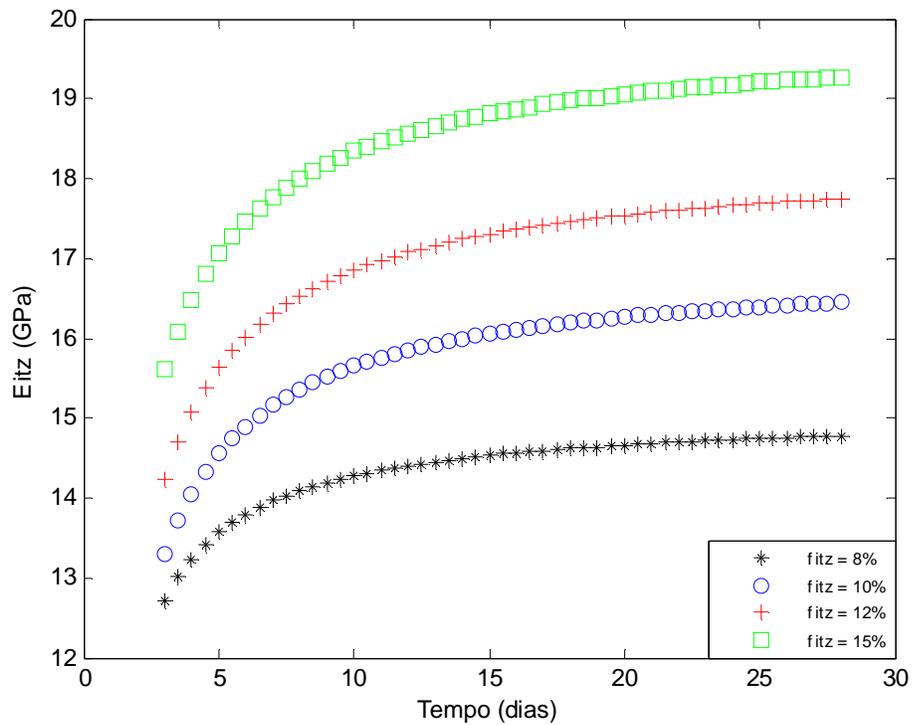


Figura 7.26: Estudo comparativo do módulo de elasticidade da zona de transição para o concreto com $f_{pc} = 0,487$ em função de sua fração volumétrica e do tempo.

As curvas apresentadas nas figuras 7.24, 7.25 e 7.26 mostram a influência direta da fração de volume de zona de transição e, como consequência, de sua espessura, no seu módulo de elasticidade. Estes valores foram obtidos a partir dos dados experimentais do módulo de elasticidade da argamassa e do concreto e fração volumétrica da zona de transição e a aplicação da modelagem micromecânica, apresentando comportamento semelhante ao concreto e da argamassa em relação ao tempo.

Parametricamente, pode-se expressar o módulo de elasticidade da zona de transição em função do módulo de elasticidade apresentado pela matriz, em relação à idade. Estas análises são apresentadas nas figuras 7.27, 7.28 e 7.29 para os concretos avaliados.

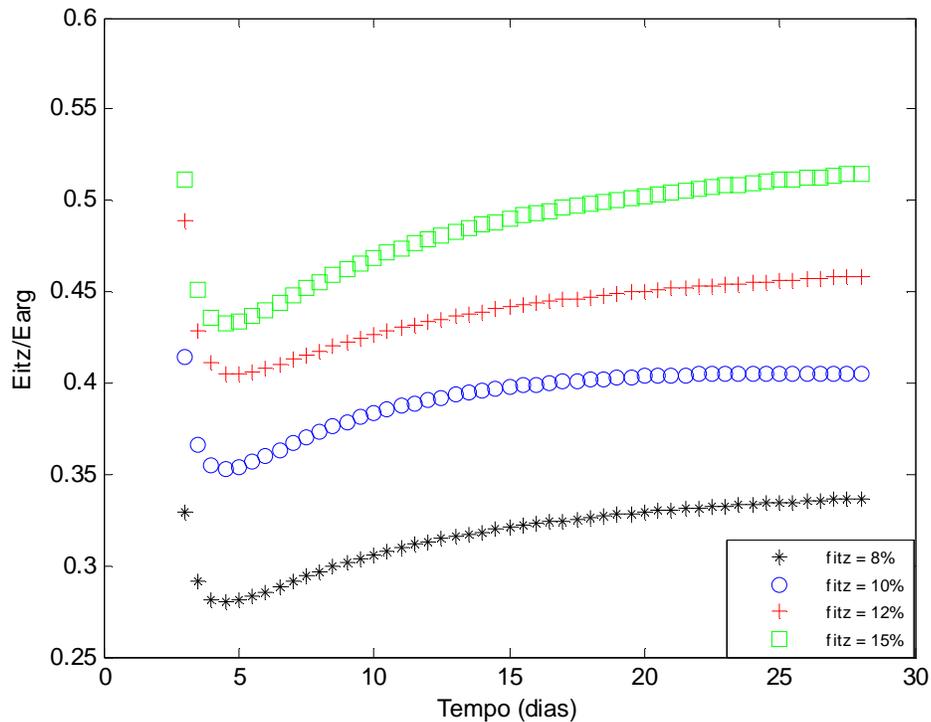


Figura 7.27: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,326$.

As relações apresentadas para os concretos com 0,326 e 0,487 de fração de pasta de cimento mostram-se crescentes dentro do intervalo analisado, implicando em dizer que há um crescimento desproporcional entre o módulo de elasticidade da argamassa e da zona de transição e comportamento inverso é observado para as relações obtidas para o concreto com 0,368.

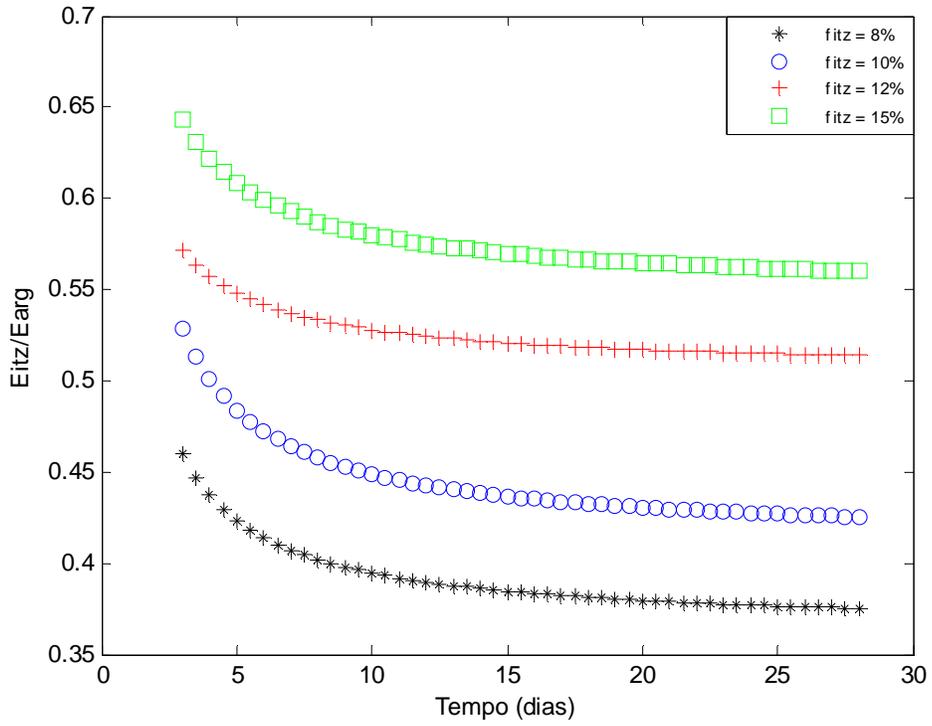


Figura 7.28: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,368$.

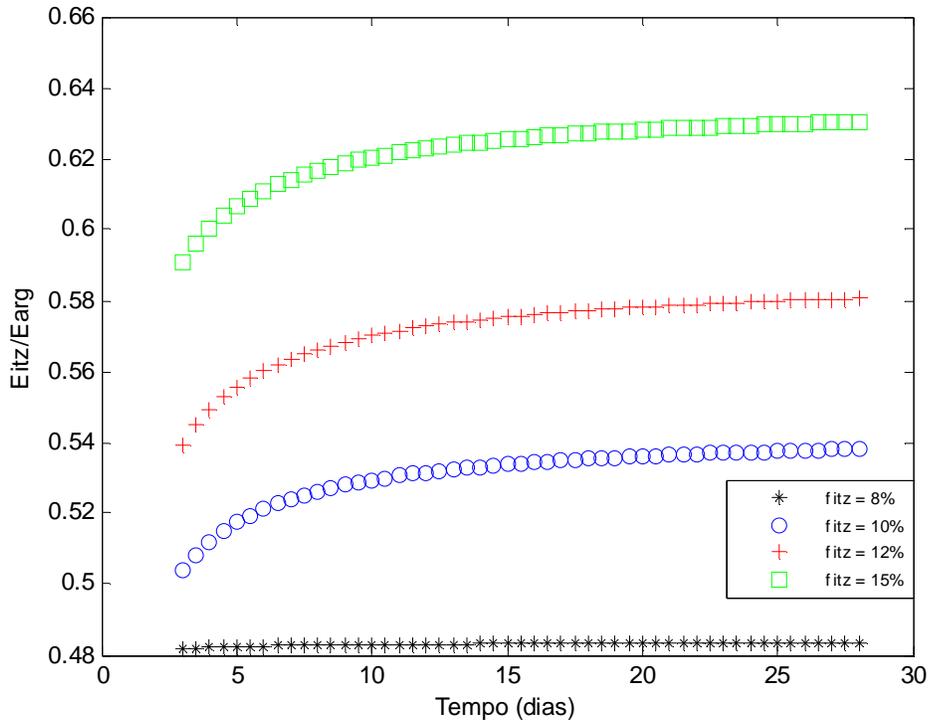


Figura 7.29: Relação E_{itz}/E_{arg} para o concreto com $f_{pc} = 0,487$.

Observa-se que a relação apresentada para os três concretos em relação à zona de transição não se mantém fixa em um valor, como referenciado na literatura, descrito como de 30% a 50% do módulo de elasticidade da matriz, mas oscila dentro de um intervalo mais amplo.

7.3.4 Módulo de elasticidade do concreto considerando a zona de transição.

A idéia principal é a de mostrar a variação do módulo de elasticidade da zona de transição em função do tempo, para que se possa subsidiar em análises que envolvam a aplicação da zona de transição na modelagem do concreto, baseando-se no fato de que, assim como a matriz de argamassa, a zona de transição tem suas propriedades alteradas com o tempo. Estas relações com o tempo devem proporcionar maior precisão na análise do módulo de elasticidade do concreto.

Numa análise direta, com o objetivo de avaliar o módulo de elasticidade do concreto, aplicam-se os métodos de três fases (ETF) e de Mori-Tanaka (MT), segundo o exposto no capítulo 5, considerando a camada de zona de transição atuando em conjunto com a matriz de argamassa através de um modelo em série..

A variação do módulo de elasticidade da zona de transição com o tempo foi obtida a partir das curvas 7.24, 7.25 e 7.26, dadas em função da fração de volume de zona de transição e da fração de volume de pasta de cimento, função do traço de concreto estudado, no qual este parâmetro é variável.

As análises relativas a cada um destes métodos será realizada de forma separada, de maneira a facilitar a visualização das curvas traçadas e sua concordância com os dados experimentais.

7.3.4.1 Modelo de três fases.

Apresentam-se nas figuras 7.30, 7.31 e 7.32 as curvas de variação com o tempo do módulo de elasticidade do concreto obtido com a utilização do método de três fases. Nesta abordagem, a zona de transição é considerada em conjunto com a matriz de argamassa

resultando uma matriz efetiva, com módulo de elasticidade efetivo relacionado às suas frações volumétricas.

Observa-se que, para os concreto com f_{pc} de 0,326 e 0,487, as curvas tiveram bom ajuste ao longo de todo o intervalo analisado. Em contrapartida, a curva gerada para o concreto com 0,368 de fração de pasta de cimento revelou boa concordância para idades superiores a idade de 15 dias.

Para as mesmas curvas, observa-se a tendência de melhor ajuste aos dados experimentais as curvas com fração de volume de zona de transição entre 10% e 12%, atestando os resultados referenciados na literatura.

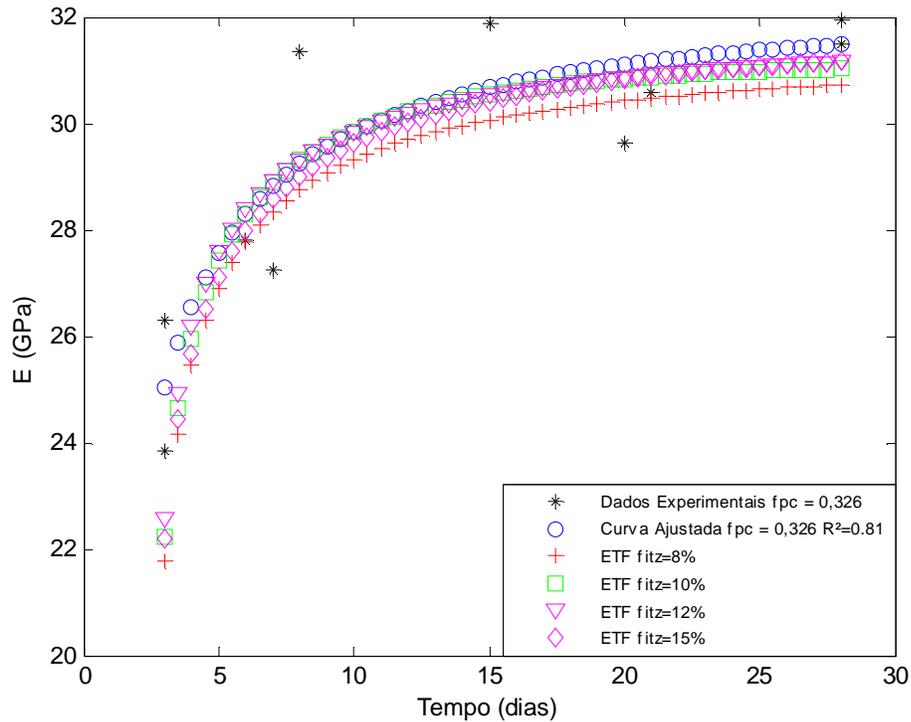


Figura 7.30: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,326$).

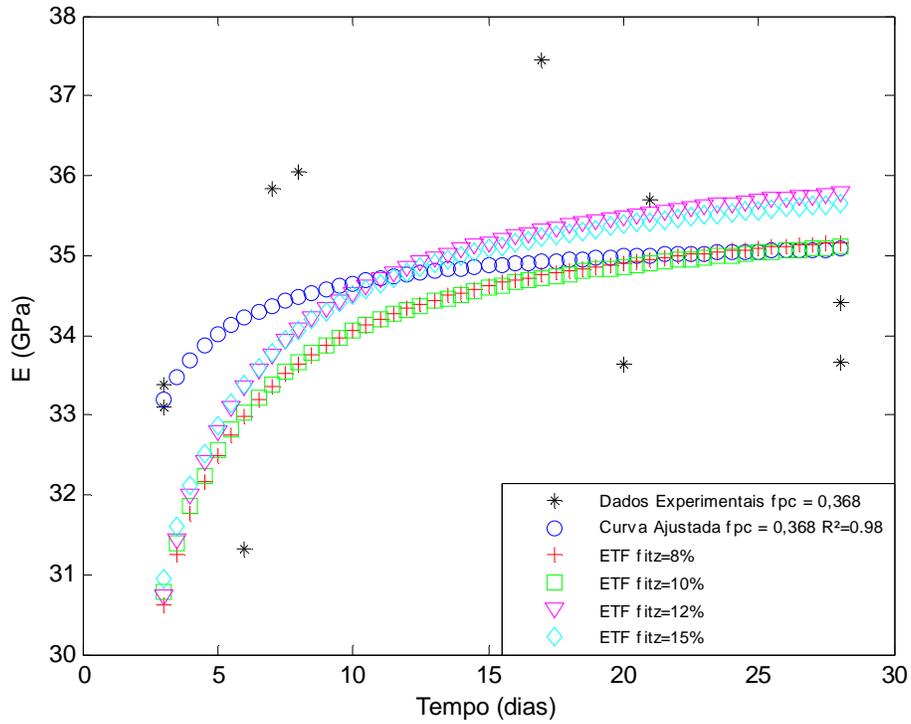


Figura 7.31: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,368$).

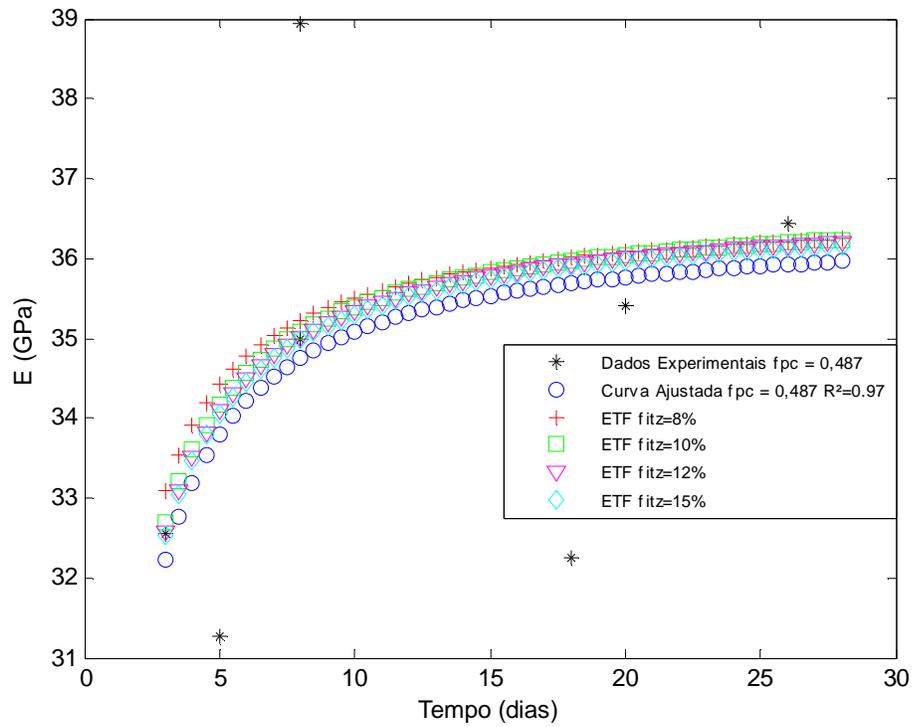


Figura 7.32: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de três fases ($f_{pc} = 0,487$).

7.3.4.2 Modelo de Mori-Tanaka.

Nas figuras 7.33, 7.34 e 7.35 são apresentadas as comparações da evolução com o tempo do módulo de elasticidade para os concretos estudados com a aplicação do método de Mori-Tanaka com inclusão esférica.

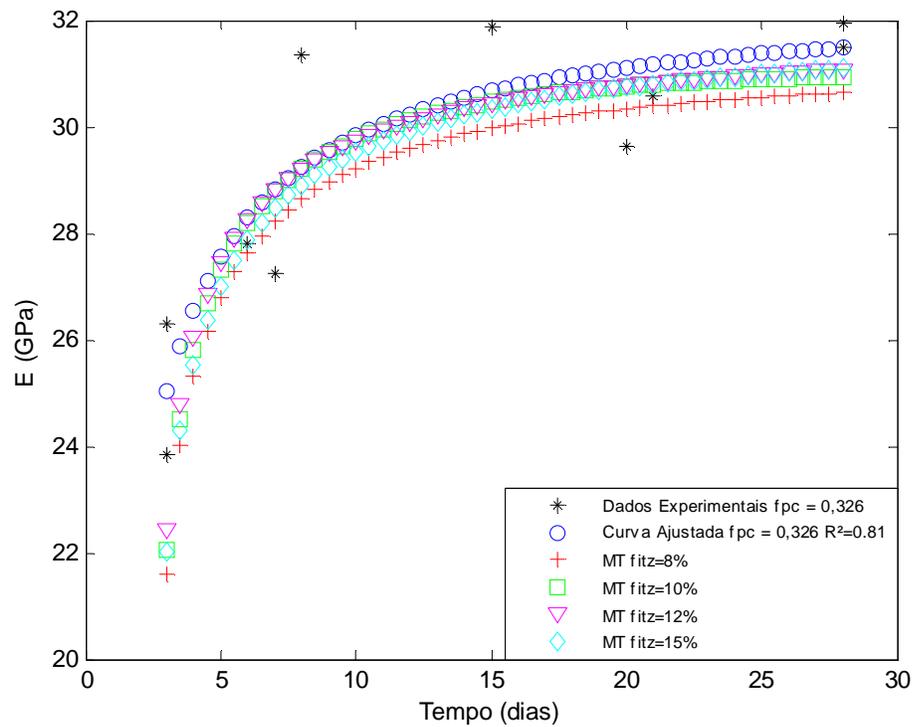


Figura 7.33: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,326$).

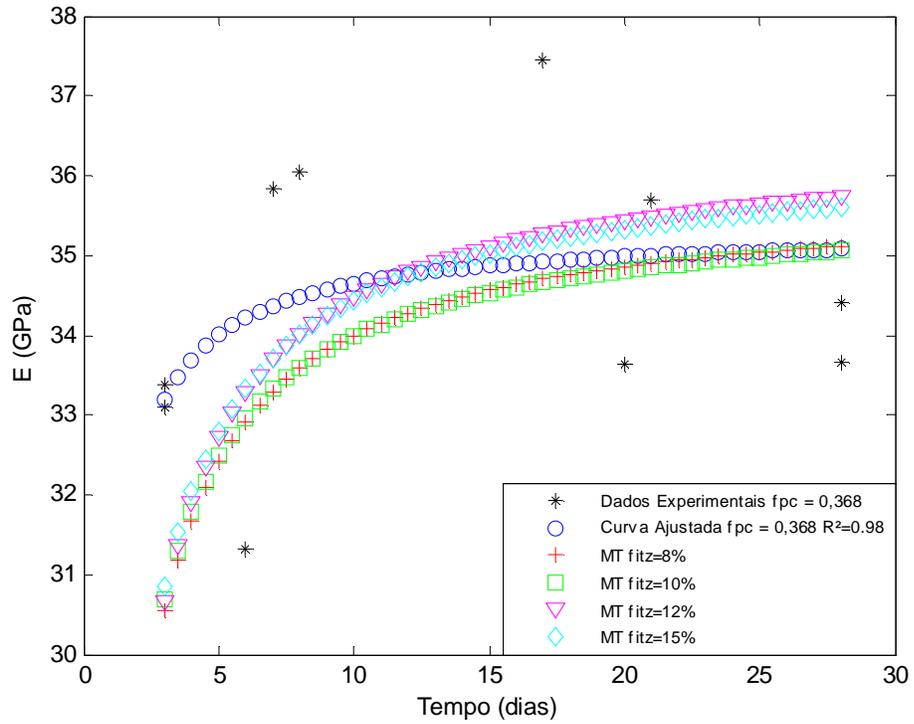


Figura 7.34: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,368$).

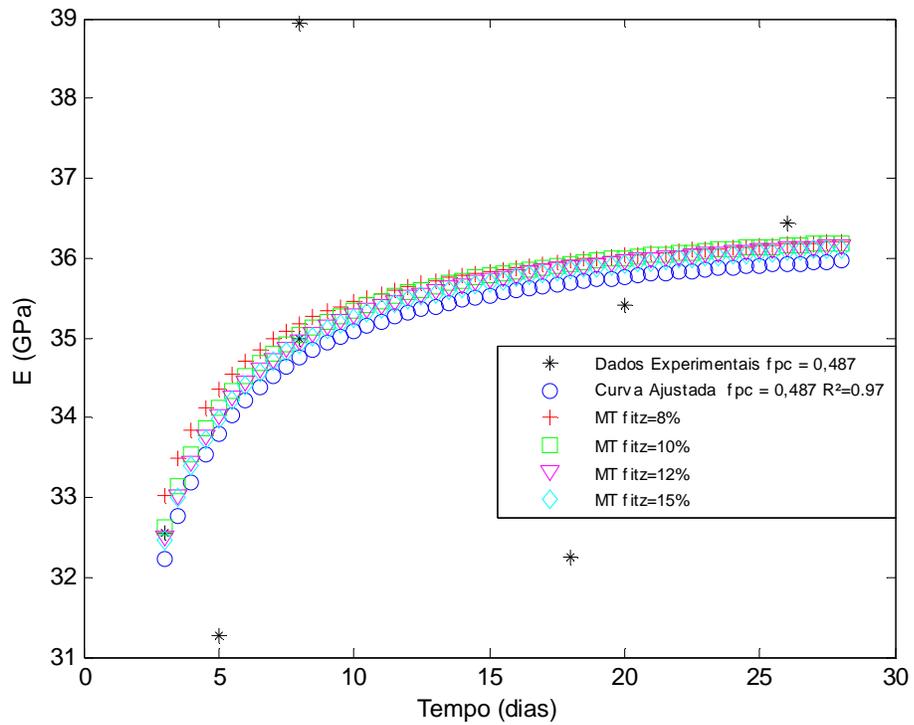


Figura 7.35: Estudo comparativo do módulo de elasticidade do concreto obtido com o modelo de Mori-Tanaka ($f_{pc} = 0,487$).

A aplicação do modelo de Mori-Tanaka apresentou resultados semelhantes aos obtidos com a aplicação do modelo de três fases, ambos com inclusões esféricas.

7.4 Considerações finais.

De posse dos resultados apresentados, em resumo, pode-se destacar:

- Destaca-se, entre as expressões propostas nas normas, a encontrada no CEB/90, que se ajustou bem aos dados experimentais, principalmente para os concretos de maior resistência à compressão. No trabalho de ARAÚJO (2000) também são apresentados resultados satisfatórios sobre a aplicação desta expressão;
- A proposta apresentada pela NBR 6118:2003, assim como a do ACI, que apresenta equação semelhante, mostrou-se conservadora para concretos com resistência intermediária, apresentados valores inferiores aos valores experimentais e, para o concreto de 45 MPa, ocorreu uma inversão no comportamento, gerando valores superiores;
- A expressão proposta na antiga NB1/78 produz resultados que não são representativos para o módulo de elasticidade dos concretos convencionais, apresentando sempre resultados superiores, o que geraria imprecisão na determinação dos deslocamentos em elementos estruturais de concreto armado;
- Expressões como as propostas por DAL MOLIN & MONTEIRO (1996) e GOMES (1995) são apropriadas para a determinação do módulo de elasticidade do concreto em função do tempo, ressaltando as maiores divergências encontradas com a expressão de GOMES (1995) quando a fração de pasta de cimento aumenta para valores em torno de 0,487;
- A modelagem micromecânica, mesmo com suas simplificações em relação ao material compósito e suas fases, sem a consideração da zona de transição na modelagem, não reproduziu, de maneira satisfatória o comportamento evolutivo do módulo de elasticidade do concreto com o tempo frente aos dados experimentais;
- A consideração da zona de transição na modelagem e a variação do seu módulo de elasticidade com o tempo, acompanhando o mesmo comportamento apresentado

pela matriz de argamassa, conduzem a baixos erros em relação às curvas experimentais obtidas;

- Observa-se que as frações de volume de zona de transição utilizadas nas análises não promoveram variação significativa no módulo de elasticidade do concreto, mas a sua consideração interfere diretamente no módulo de elasticidade desta zona. As informações relatadas na literatura apontam haver uma variação na espessura da zona de transição, sendo esta diretamente interligada à quantidade de pasta de cimento e agregados da mistura, do qual se presume que as resistências características à compressão estudadas abrangem grande parte dos concretos convencionais produzidos;
- As relações propostas na literatura fazem referência ao módulo de elasticidade da zona de transição oscilando em torno de 30% a 50% de sua respectiva matriz, fazendo em muitas situações relação à matriz de pasta de cimento. Nas análises considerando a matriz como a argamassa, que engloba a pasta de cimento e as partículas de agregado miúdo, esta relação encontra-se num intervalo mais amplo que o apresentado nas referências bibliográficas, mostrando uma relação variável no tempo pelo fato de, assim como a argamassa, a zona de transição apresentar aumento de resistência e rigidez ao longo do tempo.

Vale salientar que as conclusões sobre as expressões apresentadas são qualitativas e quantitativas, sendo estas ponderações relativas aos dados experimentais obtidos nesta pesquisa.



Capítulo 8

Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Do estudo realizado podem ser tiradas as seguintes conclusões:

- As diversas relações apresentadas na literatura para a determinação do módulo de elasticidade do concreto estão relacionadas à resistência à compressão. A obtenção de relações não lineares entre estas propriedades pode ser observada também em função do tempo, mas apresentando grandes diferenças em relação ao comportamento experimental obtido, ressaltando-se que as relações propostas presumem aplicação de agregados graúdos encontrados em regiões específicas.
- A expressão proposta pela NBR 6118:2003 carece de maiores explicações, pois apresenta dispersões que até são aceitáveis em relação aos dados experimentais obtidos neste estudo. Sabendo-se da relação do módulo de elasticidade do concreto com as propriedades das fases constituintes, a mesma deveria prever coeficientes de ajuste em função das mesmas e não apenas um coeficiente, que não qualifica a sua utilização nas diversas regiões do Brasil.
- A expressão proposta pelo CEB/90 foi a que melhor se aproximou das relações experimentais, sendo observado resultados semelhantes em relação à aplicação em ARAÚJO (2000) e ARAÚJO (2008).

- Expressões como as propostas por GOMES (1995) e DAL MOLIN & MONTEIRO (1996) apresentam uma boa estimativa do módulo de elasticidade do concreto, baseados nos resultados experimentais, que vão do intervalo de 25 MPa a 45 MPa.
- O comportamento do módulo de elasticidade mostra uma dependência forte com a fração de pasta de cimento, tendo sua influência associada também ao tempo, que regula o aumento tanto da resistência à compressão quanto do módulo de elasticidade desta fase.
- O parâmetro diâmetro máximo, que tem uma relação direta com a camada de zona de transição, não apresentou contribuição significativa na variabilidade do módulo de elasticidade do concreto.
- A variação do módulo de elasticidade da zona de transição, comparado ao de sua matriz de argamassa, assim como o obtido para o compósito, se apresentaram dentro dos intervalos relatados na literatura, mas a manutenção destes intervalos fica condicionada à fração de volume considerada, que proporciona maiores oscilações.
- Das observações feitas em relação aos resultados numéricos, valores entre 10% e 12% de fração de volume caracterizam bem a zona de transição, que comprovadamente não apresenta espessura constante.
- Pode-se confirmar resultados relatados na literatura que mostram que a relação existente entre o módulo de elasticidade da zona de transição e da pasta de cimento varia entre 0,3 e 0,5 e, de acordo com os resultados apresentados, esta relação também se mostra satisfatória entre a argamassa e sua zona de transição.
- A hipótese assumida de associar a camada de zona de transição com a matriz de argamassa através de um modelo em série, quando aplicada em conjunto com os modelos de micromecânica, apresentou bons resultados que puderam ser constatados com as baixas diferenças encontrados em relação aos dados experimentais.
- Em função dos resultados é possível concluir sobre a necessidade de consideração da zona de transição para a determinação das propriedades elásticas do concreto. A caracterização de suas propriedades elásticas frente as propriedades da matriz pode produzir resultados representativos para uma gama maior de concretos.

Como sugestões para trabalhos futuros, seguindo a mesma linha apresentada neste, destacam-se:

- Com a utilização de microscopia eletrônica, fazer uma caracterização de como varia a espessura da zona de transição em função do tempo, ou seja, em função da maturidade da pasta de cimento. A partir desta idéia, com a espessura determinada, pode-se aplicar uma relação de como variam as propriedades elásticas da zona de transição interfacial com o tempo, para a aplicação em análises numéricas;
- Desenvolver o estudo numérico-experimental para concretos de alta resistência, cuja influência de adições modifica o comportamento da matriz, levando-se em consideração a hipótese de que para estes concretos existe a probabilidade de o rompimento acontecer no agregado graúdo e na interface entre a pasta de cimento e o agregado graúdo. Acrescentar a este estudo a visualização das superfícies fraturadas com microscopia eletrônica, averiguando as hipóteses de que a ruptura ocorre no agregado;
- Promover um estudo sobre a aplicação da modelagem micromecânica para concretos de alta resistência, elaborando uma qualificação da zona de transição para diferentes adições minerais em função da espessura e de suas propriedades elásticas, e avaliar a aplicação em diversos modelos, mostrando a adequação dos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILAR, M. T. P.; SILVA, A. P.; CORRÊA, E. C. S.; CETLIN, P. R. (2006). **Análise da capacidade de deformação do concreto: módulo de Young x módulo de deformação**, 17º Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, Foz do Iguaçu – PR.

AKÇAOĞLU, T.; TOKYAY, M.; ÇELİK, T. (2004). **Effect of coarse aggregate size and matrix quality on ITZ and failure behavior of concrete under uniaxial compression**, Cement and Concrete Composites, Vol. 26, p. 633-638.

AKÇAOĞLU, T.; TOKYAY, M.; ÇELİK, T. (2005). **Assessing the ITZ microcracking via scanning electron microscope and its effect on the failure behavior of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 35, p. 358-363.

ALMEIDA, S. F. (2005). **Análise dinâmica experimental da rigidez de elementos de concreto submetidos a danificação progressiva até a ruptura**, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

ALONSO, E.; MARTÍNEZ, L.; MARTÍNEZ, W.; VILLASEÑOR, L. (2002). **Mechanical properties of concrete elaborated with igneous aggregates**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 317-321.

AL-ORAIMI, S. K.; TAHA, R.; HASSAN H. F. (2006). **The effect of the mineralogy of coarse aggregate on the mechanical properties of high-strength concrete**, Construction and Building materials, Vol. 20, p. 499-503.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)**. Detroit, 1995.

AMPARANO, F. E.; XI, Y.; ROH, Y.-S. (2000). **Experimental study on the effect of aggregate content on fracture behavior of concrete**, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 67, p. 65-84.

ARAÚJO, J. M. (2000). **O módulo de deformação longitudinal do concreto**, Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, nº 01, p. 9-16.

ARAÚJO, J. M. (2003). **Curso de concreto armado**. Editora Dunas, 2ª Edição, Vol. 3, Rio Grande do Sul - RS.

ARAÚJO, J. M. (2008). **Modelos para previsão do módulo de deformação longitudinal do concreto: NBR 6118 versus CEB**, Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, nº 12, p. 81-91.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5738: Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos-de-prova**, Rio de Janeiro, 2003.

____. **NBR 5739: Concretos - Ensaios de compressão de corpos-de-prova cilíndricos**, Rio de Janeiro, 2007.

____. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, Rio de Janeiro, 2003.

____. **NBR 8522: Concreto – Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão**, Rio de Janeiro, 2008.

____. **NBR 8522: Concreto – Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação e da curva tensão – deformação**, Rio de Janeiro, 2003.

____. **NBR 8802: Concreto endurecido – Determinação da velocidade de propagação de onda ultra-sônica**, Rio de Janeiro, 1994.

____. **NBR 9776: Agregados – Determinação da massa específica de agregados miúdos por meio do frasco de Chapman**, Rio de Janeiro, 1987.

____. **NBR 10341: Agregado graúdo para concreto - Determinação do módulo de deformação estático e do diagrama tensão-deformação em rocha matriz - Método de ensaio**, Rio de Janeiro, 2006.

____. **NBR 12655: Concreto de cimento Portland - Preparo, controle e recebimento - Procedimento**, Rio de Janeiro, 2006.

____. **NBR NM 23: Cimento Portland e outros materiais em pó – Determinação da massa específica**, Rio de Janeiro, 2000.

____. **NBR NM 248: Agregados – Determinação da composição granulométrica**, Rio de Janeiro, 2003.

COMITÉ MERCOSUR DE NORMALIZACION. NM 77 – **Concreto: Preparação das bases dos corpos-de-prova e testemunhos cilíndricos para ensaio de compressão**, Argentina, 1996.

BASHEER, L.; BASHEER, P. A. M.; LONG, A. E. (2005). **Influence of coarse aggregate on the permeation, durability and the microstructure characteristics of ordinary Portland cement concrete**, Construction and Building Materials, Vol. 19, p. 682–690.

BENVENISTE, Y. (1987). **A new approach to the application of Mori –Tanaka’s theory in composite material**, Mechanics of Materials, Vol. 6, p. 147-157.

BESHR, H.; ALMUSALLAM A. A.; MASLEHUDDIN, M. (2003). **Effect of coarse aggregate quality on the mechanical properties of high strength concrete**, Construction and Building Materials, Vol. 17, p. 97–103.

BÖHM, H. J. (2008). **Continuum micromechanics of materials**, Composites Engineering, Part II, ILSB/TUW.

BONGERS, J. P. W.; RUTTEN, H. S. (1998). **Concrete in multiaxial compression – a multilevel analysis**, HERON, Vol. 43, nº 3, p. 159-180.

BOUMIZ, A.; VERNET, C.; TENOUDJI, F. C. (1996). **Mechanical properties of cement pastes and mortars at early ages: evolution with time and degree of hydration**, Advanced Cement Based Materials, Vol. 3, p. 94-106.

BURYACHENKO, V. (2007). **Micromechanics of heterogeneous materials**, SPRINGER.

CANESSO, F. A. C.; CORRÊA, E. C. S.; SILVA, A. P.; AGUILAR, M. T. P.; CETLIN, P. R. (2007). **Módulo de elasticidade estático e dinâmico de concretos convencionais**, 49º Congresso Brasileiro do Concreto, Bento Gonçalves – RS.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. (2005). **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: Segundo a NBR 6118:2003**, EdUFSCar, 2ª ed., São Carlos - SP.

CAVALCANTE NETO, J. B.; EVANGELISTA JR., F.; SOUZA, F. V.; SOARES, J. B. (2003). **A computational modeling approach for homogenization techniques based on the finite element method**, XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto – MG, Brazil.

CHRISTENSEN, R. M.; LO, K. H. (1979). **Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models**, Journal Mechanics and Physics Solids, Vol. 27, p. 315-330.

CLÍMACO, J. C. T. S. (2005). **Estruturas de concreto armado: Fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação**. Editora UnB, Brasília – DF.

COMITÈ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. Lausanne, 1993.

COSTA, M. A. O.; SANTOS, S. B.; CASCUDO, O.; CASTRO, A. (2008). **Avaliação das propriedades mecânicas do concreto com diferentes tipos de aditivos superplastificantes**, 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador – BA.

CUNHA, C. A. M. C.; ZARZAR, F. C. J.; MELO, M. J. A. C.; MONTEIRO, E. C. B.; HELENE, P. R. L. (2006). **Estudo da resistência à compressão e módulo de elasticidade em concretos com diferentes traços**, 48º Congresso Brasileiro do Concreto, Rio de Janeiro – RJ.

CUPERTINO, M. A. L.; CASTRO, A.; INÁCIO, J. J.; ANDRADE, M. A. S. (2007). **Avaliação de fatores de ensaio que interferem nos resultados de módulo de elasticidade do concreto**, 49º Congresso Brasileiro do Concreto, Bento Gonçalves – RS.

CUPERTINO, M. A. L.; INÁCIO, J. J.; PEREIRA, A. C.; FARIAS, L. A.; SILVA, A. R.; ANDRADE, M. A. S.; OLIVEIRA, N. M. (2008). **Análise da influência da dimensão básica do corpo-de-prova no módulo de elasticidade**, 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador – BA.

DA GUARDA, M. C. C. (2005). **Cálculo de deslocamentos em pavimentos de edifícios de concreto armado**, Tese, Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

DEVORE, J. L. (2006). **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**, THOMSON, 6ª Ed.

DIAMOND, S. (2001). **Consideration on image analysis as applied to investigations of the ITZ in concrete**, Cement and Concrete Composites, Vol. 23, p. 171-178.

DIAMOND, S.; HUANG, J. (2001). **The ITZ in concrete – a different view based on image analysis and SEM observations**, Cement and Concrete Composites, Vol. 23, p. 179-188.

DONZA, H.; CABRERA, O.; IRASSAR, E. F. (2002). **High-strength concrete with different fine aggregate**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 1755–1761.

FALCÃO BAUER, L. A. (2000). **Materiais de Construção**, Livros Técnicos e Científicos Editora SA, volume 1, Rio de Janeiro - RJ.

FURNAS (1997). **Concretos – massa, estrutural, projetado e compactado com rolo: ensaios e propriedades**, Editora PINI.

GARBOCZI, E. J.; BENTZ, J. G. (2001). **Analytical formulas for interfacial transition zone properties**, Advanced Cement Based Materials, Vol. 6, p. 99-108.

GARBOCZI, E. J.; BERRYMAN, D. P. (1997). **Elastic moduli of a material containing composite inclusions: effective médium theory and finite element computations**, Mechanics of Materials, Vol. 33, p. 455-470.

GOODMAN, R. E. (1989). **Introduction to rock mechanics**, JOHN WILEY & SONS, 2^a Ed.

HAECKER, C.-J.; GARBOCZI, E. J.; BULLARD, J. W.; BOHN, R. B.; SUN, Z.; SHAH, S. P.; VOIGT, T. (2005). **Modeling the linear elastic properties of Portland cement paste**, Cement and Concrete Research, Vol. 35, p. 1948 – 1960.

HARRISON, J. P; HUDSON, J. A. (2000a). **Engineering rock mechanics: an introduction to the principles**, PERGAMON, 2^a Reimp.

HARRISON, J. P; HUDSON, J. A. (2000b). **Engineering rock mechanics part 2: illustrative worked examples**, PERGAMON.

HASHIN, Z. (1988). **The differential scheme and its application to cracked materials**, Journal Mechanics and Physics Solids, Vol. 36, n° 06, p. 719-734.

HASHIN, Z.; MONTEIRO, P. J. M. (2002). **An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and cement paste**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 1291-1300.

HERNÁNDEZ, M. G.; ANAYA, J. J.; IZQUIERDO, M. A. G.; ULLATE, L. G. (2002). **Application of micromechanics to the characterization of mortar by ultrasound**, Ultrasonics, vol. 40, p. 217-221.

HERNÁNDEZ, M. G.; ANAYA, J. J.; ULLATE, L. G.; IBAÑEZ, A. (2006). **Formulation of a new micromechanic model of three phases for ultrasonic characterization of cement-based materials**, Cement and Concrete Research, Vol. 36, p. 609-616.

JIANG, L. (1999). **The interfacial zone and bond strength between aggregates and cement pastes incorporating high volumes of fly ash**, Cement and Concrete Composites, Vol. 21, p. 313-316.

KIMURA, A. (2007). **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo do edifício como uso de sistemas computacionais**, Editora PINI.

KWAK, H.-G.; KIM, J.-K. (2006). **Determination of efficient shoring system in RC frames structures**, Building and Environment, vol. 41, p. 1913-1923.

LEE, K. M.; PARK, J. H. (2008). **A numerical model for elastic modulus of concrete considering interfacial transition zone**, Cement and Concrete Research, Vol. 38, p. 396-402.

LEEMAN, A.; MUNCH, B.; GASSER, P.; HOLZER, L. (2006). **Influence of compaction on the interfacial transition zone and the permeability of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 36, p. 1425-1433.

LI, G.; ZHAO, Y.; PANG, S.-S. (1999a). **Four-phase sphere modeling of effective bulk modulus of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 29, p. 839-845.

LI, G.; ZHAO, Y.; PANG, S.-S.; LI, Y. (1999b). **Effective Young's modulus estimation of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 29, p. 1455-1462.

LIAO, K.-Y.; CHANG, P.-K.; PENG, Y.-N.; , YANG, C.-C. (2004). **A study on characteristics of interfacial transition zone in concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 34, p. 977-989.

LIMA, E. P.; HELENE, P. R. L. (2001). **Influência do volume de pasta na zona de transição pasta/agregado com relação às propriedades mecânicas e de durabilidade do concreto**, Boletim Técnico – USP, São Paulo.

LUTZ, M. P.; MONTEIRO, P. J. M.; ZIMMERMAN, R. W. (1997). **Inhomogeneous interfacial transition zone model for the bulk modulus of mortar**, Cement and Concrete Research, Vol. 27, nº 7, p. 1113-1122.

LUTZ, M. P.; ZIMMERMAN, R. W. (2005). **Effect of an inhomogeneous interphase zone on the bulk modulus and conductivity of a particulate composite**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, p. 429-437.

MA, H.; HU, G.; HUANG, Z. (2004). **A micromechanical method for particulate composites with finite particle concentration**, Mechanics of Materials, Vol. 36, p. 359-368.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. (1994). **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**, Editora PINI, 1ª edição, São Paulo -SP.

MEIRELES NETO, M.; ALBUQUERQUE, A. T.; CABRAL, A. E. B. (2010). **Estudo do módulo de elasticidade de concretos produzidos em Fortaleza – CE – Brasil**, XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, San Juan - Argentina.

MELO NETO, A. A.; HELENE, P. R. L. (2002). **Módulo de elasticidade: dosagem e avaliação de modelos de previsão do módulo de elasticidade de concretos**, 44º Congresso Brasileiro do Concreto, Belo Horizonte – MG.

MONTEIRO, P. J. M. (1993). **Caracterização da microestrutura do concreto: fases e interfaces; aspectos de durabilidade e de microfissuração**, Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP.

MONTEIRO, P. J. M.; KIRCHHEIM, A. P.; CHAE, S.; FISCHER, P.; MACDOWELL, A. A.; SCHAIBLE, E.; WENK, H. R. (2009). **Characterizing the nano and micro structure of concrete to improve its durability**, Cement and Concrete Composites, Vol. 31, p. 577-584.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. (2003). **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**, LTC, 2ª Ed.

MURA, T. (1987). **Micromechanics of defects in solids**, Martinus Nijhoff Publishers, Second Edition.

NADEAU, J. C. (2002). **Water– cement ratio gradients in mortars and corresponding effective elastic properties**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 481–490.

NADEAU, J. C. (2003). **A multiscale model for effective moduli of concrete incorporating ITZ, water-cement ratio gradients, aggregate size distributions, and entrapped voids**, Cement and Concrete Research, Vol. 33, p. 103-113.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. (1999). **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**, Second Revised Edition, Elsevier, North-Holland.

NEUBAUER C. M.; JENNINGS, H. M.; GARBOCZI, E. J. (1996). **A three-phase model of the elastic and shrinkage properties of mortar**, Advanced Cement Based Materials, Vol. 4, p. 6-20.

NEVILLE, A. M. (1997). **Propriedades do concreto**, Editora PINI, 2ª edição, São Paulo - SP.

OZTURAN, T.; CEÇEN, C. (1997). **Effect of coarse aggregate type on mechanical properties of concretes with different strengths**, Cement and Concrete Research, Vol. 27, No. 2, p. 165-170.

PAULON, V. A.; MONTEIRO, P. J. M. (1991). **Estudos da microestrutura da zona de transição entre a pasta de cimento e o agregado**, Boletim Técnico – USP, São Paulo.

PASA, V. F.; PACHECO, A. R.; CAMPOS FILHO, A.; MAGHOUS, S. (2008). **Modelo micromecânico para as propriedades elásticas macroscópicas do concreto reforçado com fibras**, 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador – BA.

PERSSON, B. (2004). **Justification of fédération internationale de béton, fib, 2000 model for elastic modulus of normal and high-performance concrete, HPC**, Cement and Concrete Research, vol. 34, p. 651-655.

PITANGUEIRA, R. L. S. (1998). **Mecânica de estruturas de concreto com inclusão de efeitos de tamanho e de heterogeneidade**, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ.

PUENTE, I.; AZKUNE, M.; INSAUSTI, A. (2007). **Shore-slab interaction in multistory reinforced concrete buildings during construction: an experimental approach**, Engineering Structures, vol. 29, p. 731-741.

QU, J.; CHERKAOUI, M. (2006). **Fundamentals of micromechanics of solids**, John Wiley & Sons.

RAMESH, G.; SOTELINO, E. D.; CHEN, W. F. (1996). **Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials**, Cement and Concrete Research, Vol. 26, nº 4, p. 611- 622.

REN, Z.-Y.; ZHENG, Q.-S. (2004). **Effects of grain sizes, shapes, and distribution on minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals**, Mechanics of Materials, Vol. 36, p. 1217-1229.

REVISTA CONCRETO E CONSTRUÇÕES, **Módulo de elasticidade é parâmetro fundamental para a durabilidade da estrutura de concreto**, IBRACON, Nº 48, 2007.

RODRIGUES, P. P. F. (1998). **Parâmetros de dosagem do concreto**, Associação Brasileira de Cimento Portland.

SAHU, S.; BADGER, S.; THAULOW, N.; LEE, R. J. (2004). **Determination of water-cement ratio of hardened concrete by scanning electron microscopy**, Cement and Concrete Composites, Vol. 26, p. 987-992.

SANTOS, S. B.; GAMBALE, E. A.; ANDRADE, M. A. S. (2006). **Modelos de predição do módulo de elasticidade do concreto**, 48º Congresso Brasileiro do Concreto, Rio de Janeiro.

SHANNAG, M. J. (2000). **High strength concrete containing natural pozzolan and silica fume**, Cement and Concrete Composites, Vol. 22, p. 399-406.

SILVA, F. B.; MONTE, R.; BARROS, M. M. S. B. (2007). **Avaliação do módulo de deformação em materiais cimentícios: ensaios estáticos ou dinâmicos?**, 49º Congresso Brasileiro do Concreto, Bento Gonçalves – RS.

SIMEONOV, P.; AHMAD, S. (1994). **Effect of transition zone on the elastic behavior of cement-based composites**, Cement and Concrete Research, vol. 25, nº 1, p. 165-176.

SMILAUER, V.; BITTNAR, Z. (2006). **Microstructure-based micromechanical prediction of elastic properties in hydrating cement paste**, Cement and Concrete Research, Vol. 36, p. 1708-1718.

SPIEGEL, M. R. (1993). **Estatística**, Makron Books, Coleção Schaum, 3ª Edição.

SPIEGEL, M. R.; SCHILLER, J.; SRINIVASAN, R. A. (2004). **Probabilidade e estatística**, BOOKMAN, Coleção SCHAUM, 2ª Ed.

VIERA, T. M.; VASCONCELOS, A. S.; LAGO, L. B.; BRANCO, V. H. L.; SOUZA, P. S. L. (2008). **Influência da dimensão do corpo-de-prova de concreto e da forma de**

capeamento, nos resultados de resistência à compressão e módulo de elasticidade, 50° Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador – BA.

VILARDELL, J.; AGUADO, A.; AGULLO, L.; GETTU, R. (1998). **Estimation of the modulus of elasticity for dam concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 28, n° 1, p. 93-101.

WANG, X.-S.; WU, B.-S.; WANG, Q.-Y. (2005). **Online SEM investigation of microcracks characteristics of concretes at various temperatures**, Cement and Concrete Research, Vol. 35, p. 1385-1390.

WU, K.-R.; CHEN, B.; YAO, W.; ZHANG, D. (2001). **Effect of coarse aggregate type on mechanical properties of high-performance concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 29, p. 1983-1987.

WU, K.-R.; LIU, J.-L.; ZHANG, D.; YAN, A. (1999). **Rupture probability of coarse aggregate on fracture surface of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 29, p. 1983-1987.

YANG, C- C.; HUANG, R. (1995). **Double inclusion model for approximate elastic moduli of concrete material**, Cement and Concrete Research, Vol. 26, n° 1, p. 83-91.

YANG, C- C.; HUANG, R. (1996). **A two-phase model for predicting the compressive strength of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 26, n° 10, p. 1567-1577.

YANG, C.-C. (1998). **Effect of the transition zone on the elastic moduli of mortar**, Cement and Concrete Research, Vol. 28, No. 5, p. 727–736.

YANG, C.-C; HUANG, R. (1998). **Approximate strength of lightweight aggregate using micromechanics method**, Advanced Cement Based Materials, Vol. 7, p. 133-138.

ZHAO, X.-H.; CHEN, W. F. (1998). **Effective elastic moduli of concrete with interface layer**, Computers and Structures, Vol. 66, N° 2-3. p. 275-288.

ZHENG J.-J.; ZHOU X.-Z. (2006). **A numerical method for predicting the elastic modulus of concrete made with two different aggregates**, Journal of Zhejiang University SCIENCE A, Vol. 7, p. 293-296.

ZHOU, F. P.; LYDON, F. D.; BARR, B. I. G. (1995). **Effect of coarse aggregate on elastic modulus and compressive strength of high performance concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 25, No. 1, p. 177-186.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7217: Agregados – determinação da composição granulométrica**, Rio de Janeiro, 1987.

ALMEIDA, I. R. (2002). **Influência do módulo de elasticidade do agregado graúdo no módulo de elasticidade de concretos de alto desempenho**, Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, Brasília – DF.

ALMUSALLAM, A. A.; BESHAR, H.; MASLEHUDDIN, M.; AL-AMOUDI, O. S. B. (2004). **Effect of silica fume on the mechanical properties of low quality coarse aggregate concrete**, Cement and Concrete Composites, Vol. 26, p. 891–900.

ALTUS, E.; HERSZAGE, A. (1995). **A two dimensional micromechanic fatigue model**, Mechanics of Materials, Vol. 20, p. 209-223.

ANDRADE, L. B.; ROCHA, J. C.; CHERIAF, M. (2006). **Evaluation of concrete incorporating bottom ash as a natural aggregates replacement**, Waste Management.

ARAÚJO, R. M.; GOGOLA, G. W.; LIMA, A. J. M.; RISTOW NETO, R.; WEBER, S. L. (2006). **Influência do teor de metacaulim na resistência do cimento Portland**, In: Congresso Brasileiro do Concreto, 48º, Rio de Janeiro – RJ, Anais.

BENTZ, D. P.; GARBOCZI, E. J. (1999). **Computer modelling of interfacial transition zone: microstructure and properties**, RILEM report n° 20.

BOURDETTE, B.; RINGOT, E.; OLLIVIER, P. (1995). **Modelling of the transition zone porosity**, Cement and Concrete Research, Vol. 25, n° 4, p. 741-751.

CÂNDIDO, W. F.; BORGES, L. L. J.; BITTENCOURTT, R. M. (2007). **Avaliação da resistência à compressão e módulo de elasticidade do concreto quando submetido a carregamento de longa duração ($\Delta t = 90$ dias)**, 49º Congresso Brasileiro do Concreto, Bento Gonçalves – RS.

CARNEIRO, A. M. P.; REGIS, P. A.; RODRIGUES, P.; SILVA, A. P. C.; BARCELAR, E. A.; ANDRADE, G. (2003). **Análise das curvas de resistência à compressão de concretos produzidos com agregados com curvas de distribuição granulométrica otimizada**, 45° Congresso Brasileiro do Concreto, Vitória – ES.

CARNEIRO, A. M. P.; BARATA, M. S.; PICANÇO, M. S. (2002). **Análise de Propriedades de Concretos Produzidos com Agregados de Composição Granulométrica Otimizada**, 44° Congresso Brasileiro do Concreto, Belo Horizonte – MG.

CERVENKA, J.; PAPANIKOLAOU, V. K. (2008). **Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete**, International Journal of Plasticity, Vol. 24, p. 2192-2220.

CHEN, J.; XU, L.; LI, H. (2008). **Investigation on a direct modeling strategy for the effective elastic moduli prediction of composite material**, Materials Science and Engineering A, Vol. 491, p. 385-389.

CHI, J. M.; HUANG, R.; YANG, C. C.; CHANG, J. J. (2003). **Effect of aggregate properties on the strength and stiffness of lightweight concrete**, Cement and Concrete Composites, Vol. 25, p. 197-205.

COLLINS, F. G.; SANJAYAN, J. G. (1999). **Workability and mechanical properties of alkali activated slag concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 29, p. 455-458.

CWIRZEN, A.; PENTTALA, V. (2005). **Aggregate - cement paste transition zone properties affecting the salt-frost damage of high-performance concretes**, Cement and Concrete Research, Vol. 35, p. 671-679.

DIAMOND, S. (2001). **Considerations in image analysis as applied to investigations of the ITZ in concrete**, Cement and Concrete Composites, Vol. 23, p. 171-178.

DIAMOND, S.; HUANG, J. (2001). **The ITZ in concrete – a different view on image analysis and SEM observations**, Cement and Concrete Composites, Vol. 23, p. 179-188.

FREED, Y.; ABOUDI, J. (2009). **Micromechanical prediction of the two-way shape memory effect in shape memory alloy composites**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, p. 1634-1647.

FURNAS (1997). **Concretos – massa, estrutural, projetado e compactado com rolo: ensaios e propriedades**, Editora PINI.

GENIN, G. M.; BIRMAN, V. (2009). **Micromechanics and structural response of functionally graded, particulate-matrix, fiber-reinforced composites**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, p. 2136-2150.

GHONIEM, N. M.; BUSO, E. P.; KIOUSSIS, N.; HUANG, H. (2003). **Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview**, Philosophical Magazine, Vol. 83, p. 3475-3528.

GONÇALVES, A. B.; ALBUQUERQUE, N. G. B.; PINHO, J. R. S.; OLIVEIRA, D. R. C. (2006). **Avaliação do módulo de elasticidade do concreto C30 convencional com seixo rolado da região Norte**, 48º Congresso Brasileiro do Concreto, Rio de Janeiro – RJ.

HÄFNER, S.; ECKARDT, S.; LUTHER, T.; KÖNKE, C. (2006). **Mesoscale modeling of concrete: geometry and numerics**, Computer and Structures, Vol. 84, p. 450-461.

HASHIN, Z. (1988). **The differential scheme and its application to cracked materials**, Journal Mechanics and Physics Solids, Vol. 36, nº 06, p. 719-734.

HUNG, L. T.; DORMIEUX, L.; JEANNIN, L.; BURLION, N.; BARTHÉLÉMY, J.-F. (2008). **Nonlinear behavior of matrix-inclusion composites under high confining pressure: application to concrete and mortar**, C. R. Mecanique, Vol. 336, p. 670-676.

KANAUN, S. K.; LEVIN, V. M. (2008). **Self-consistent methods for composites**, SPRINGER.

KHATRI, R. P.; SIRIVIVATNANON, V. (1995). **Effect of different supplementary cementitious materials on mechanical properties of high performance concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 25, No. 1, p. 209-220.

KIM, J.-K.; HAN, S. H.; SONG, Y. C. (2002). **Effect of temperature and aging on the mechanical properties of concrete - Part I: Experimental results**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 1087–1094.

KIM, J.-K.; HAN, S. H.; PARK, S. K. (2002). **Effect of temperature and aging on the mechanical properties of concrete - Part II: Prediction model**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 1095–1100.

KURUKURI, S. (2005). **Homogenization of damaged concrete meso-structures using representative volume elements – implementation and application to Slang**, Master Thesis, University Weimar, Germany.

LI, G.; ZHAO, Y.; PANG, S.-S. (1998). **A three-layer built-in analytical modeling of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 28, n° 7, p. 1057-1070.

LI, Y.-X.; CHEN, Y.-M.; WEI, J.-X.; HE, X.-Y.; ZHANG, H.-T.; ZHANG, W.-S. (2006). **A study on the relationship between porosity of the cement paste with mineral additives and compressive strength of mortar based on this paste**, Cement and Concrete Research, Vol. 36, p. 1740-1743.

MAGALHÃES, A. G.; FRANÇA, E. P.; AGUILAR, M. T. P.; CALIXTO, J. M., VASCONCELOS, W. L. (2006). **A influência de agregados graúdos de diferentes mineralogias nas propriedades mecânicas do concreto de alto desempenho**, 17° CBECIMat – Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, Foz do Iguaçu – PR.

MATTEI, N. J.; MEHRABADI, M. M.; ZHU, H. (2007). **A micromechanical constitutive model for the behavior of concrete**, Mechanics of Materials, Vol. 39, p. 357-379.

MERCIER, S.; MOLINARI, A. (2009). **Homogenization of elastic–viscoplastic heterogeneous materials: Self-consistent and Mori-Tanaka schemes**, International Journal of Plasticity, Vol. 25, p. 1024-1048.

MOHAMAD-HUSSEIN, A.; SHAO, J. F. (2007). **Modelling of elastoplastic behaviour with non-local damage in concrete under compression**, Computers and Structures, Vol. 85, p. 1757-1768.

MÜHLICH, U.; ZYBELL, L.; KUNA, M. (2009). **Micromechanical modelling of size effects in failure of porous elastic solids using first order plane strain gradient elasticity**, Computational Materials Science.

NADEAU, J. C. (2002). **Water– cement ratio gradients in mortars and corresponding effective elastic properties**, Cement and Concrete Research, Vol. 32, p. 481–490.

NUNES, F. W. G. (2005). **Resistência e módulo de elasticidade de concretos usados no Rio de Janeiro**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

OLIVEIRA, B. F.; CREUS, G. J. (2004). **Um modelo analítico-numérico para o estudo dos efeitos do envelhecimento em materiais compósitos**, XXXI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Mendoza – ARG.

OLLIVIER, J. P.; MASO, J. C.; BOURDETTE, B. (1995). **Interfacial transition zone in concrete**, Advanced Cement Based Materials, Vol. 2, p. 30-38.

OUAAR, A. (2006). **Micromechanics of rate-independent multi-phase composites. Application to Steel Fiber-Reinforced Concrete**, Thèse du grade de docteur, Université Catholique de Louvain.

QIAN, X.; LI, Z. (2001). **The relationships between stress and strain for high-performance concrete with metakaolin**, Cement and Concrete Research, Vol. 31, p. 1607–1611.

RAO, G. A. (2001). **Influence of silica fume on long-term strength of mortars containing different aggregate fractions**, Cement and Concrete Research, Vol. 31, p. 7- 12.

SANAHUJA, J.; DORMIEUX, L.; CHANVILLARD, G. (2007). **Modelling elasticity of a hydrating cement paste**, Cement and Concrete Research, Vol. 37, p. 1427-1439.

SIDDIQUE, R. (2004). **Performance characteristics of high-volume Class F fly ash concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 34, p. 487–493.

SIDDIQUE, R. (2003). **Effect of fine aggregate replacement with Class F fly ash on the mechanical properties of concrete**, Cement and Concrete Research, Vol. 33, p. 539–547.

SILVA, A. S. R.; AZEVEDO, M. T.; AZEVEDO, A. P.; NEVES, J. B.; SPINOLA, A. S.; CARMO, A. A. (2008). **Estudo para avaliação da resistência à compressão e do módulo de elasticidade pelo método mecânico e do ultra-som de concretos produzidos em Salvador – BA**, 50º Congresso Brasileiro do Concreto, Salvador – BA.

SMILAUER, V.; BITTNAR, Z. (2006). **Microstructure-based micromechanical prediction of elastic properties in hydrating cement paste**, Cement and Concrete Research.

SOUZA, P. S. L.; DAL MOLIN, D. C. C. (2003). **Verificação da influência do uso de metacaulim de alta reatividade, proveniente de rejeito industrial, na resistência à compressão de concretos – relatório final**, 45º Congresso Brasileiro do Concreto, Vitória – ES.

SPAGNOLI, A. (2009). **A micromechanical lattice model to describe the fracture behaviour of engineered cementitious composites**, Computational Materials Science.

SUN, Q.-P.; LEXCELLENT, C. (1996). **On the unified micromechanics constitutive description of one-way and two-way shape memory effects**, Journal de Physique IV, Vol. 6.

UCHIKAWA, H.; HANEHARA, S.; HIRAO, H. (1996). **Influence of microstructure on the physical properties of concrete prepared by substituting mineral powder for part of fine aggregate**, Cement and Concrete Research, Vol. 26, No. 1, p. 101-111.

UNGER, J. F.; KÖNKE, C. (2008). **Neural networks as material models within a multiscale approach**, Computers and Structures.

VOYIADJIS, G. Z.; TAGIEDDIN, Z. N.; KATTAN, P. I. (2008). **Anisotropic damage-plasticity model for concrete**, International Journal of Plasticity, Vol. 24, p. 1946-1965.

WANG, H.; LI, Q. (2006). **Prediction of elastic modulus and Poisson's ratio for unsaturated concrete**, International Journal of Solids and Structures.

WONG, R. C. K.; CHAU, K. T. (2005). **Estimation of air void and aggregate spatial distributions in concrete under uniaxial compression using computer tomography scanning**, Cement and Concrete Research, Vol. 35, p. 1566-1576.

APÊNDICES

APÊNDICE A

OUTROS MODELOS DE MICROMECAÂNICA

A.1 Método da inclusão equivalente

Também conhecido como problema da inclusão equivalente de Eshelby, tem como hipótese básica a consideração de um elipsóide de material elástico homogêneo envolto por um sólido elástico homogêneo infinito.

Através deste estudo, Eshelby mostrou que na inclusão elipsoidal o campo de tensão ou deformação resulta uniforme quando sobre a mesma é imposto um campo de deformação ou tensão uniforme.

Considera-se inicialmente este sólido contendo uma inclusão elipsoidal de mesmo material, livre de tensão e deformação em um estágio inicial.

Aplicando um campo de deformação uniforme ε^* sobre a inclusão, a deformação resultante sobre a inclusão devida à presença da matriz é dada pela equação A1:

$$\varepsilon_i = S : \varepsilon^* \quad (\text{A.1})$$

em que S é o tensor de Eshelby. Este tensor tem dependência das propriedades elásticas da matriz e da geometria da inclusão.

Para chegar a tal conclusão assume-se que a matriz impõe uma restrição de deformação à inclusão. Caso contrário, a deformação final na inclusão seria dada por ε^* .

O problema de Eshelby consiste em determinar o campo de deformação uniforme ε^* que, baseado no problema original de inclusão elipsoidal de material diferente da matriz (figura A1), deveria ser imposta a inclusão de mesmo material da matriz (figura A2), para que se encontrassem campos de deformação e tensão finais iguais na mesma (PASA et al., 2008).

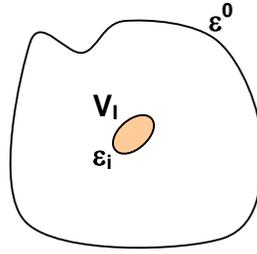


Figura A1: Sólido homogêneo com inclusão de diferente material.

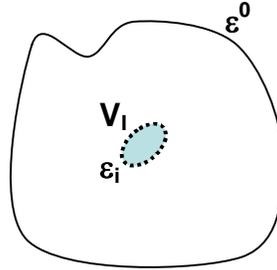


Figura A2: Sólido homogêneo com inclusão de mesmo material.

Para os dois problemas descritos no parágrafo anterior, temos as deformações para o caso original e o caso idealizado expressos pelas equações A.2 e A.3, respectivamente:

$$\varepsilon_i = \varepsilon^0 + \varepsilon_{pt} \quad (\text{A.2})$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon^0 + S : \varepsilon^* \quad (\text{A.3})$$

em que ε_{pt} representa a deformação proveniente de uma perturbação (inclusão).

Pode-se escrever a deformação elástica na inclusão ε_{elast} como apresentada na equação A.4:

$$\varepsilon_{elast} = \varepsilon_i - \varepsilon^* \quad (\text{A.4})$$

Tendo a relação constitutiva da inclusão e aplicando a relação constitutiva para a deformação elástica, temos o seguinte (equação A.5):

$$\sigma_i = C_M : (\varepsilon_i - \varepsilon^*) = C_i : \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Simplificando a equação A.5, chega-se a equação A.6:

$$\varepsilon^* = C_M^{-1} : (C_M - C_i) : \varepsilon_i \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a equação A.6 na equação A.3, tem-se (equação A.7):

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o + S : C_M^{-1} : (C_M - C_i) : \varepsilon_i \quad (\text{A.7})$$

Pode-se escrever a equação A.7 através da relação $\varepsilon_i = A_i : \varepsilon^0$, em que A_i é o tensor de concentração de deformação, dado pela equação A.8:

$$A_i = [I - S : C_M^{-1} : (C_M - C_i)]^{-1} \quad (\text{A.8})$$

em que I é o tensor identidade e S é o tensor de Eshelby.

De forma semelhante, pode-se expressar $\sigma_i = B_i : \sigma^0$, resultando na equação A.9:

$$\sigma_i = C_i : \varepsilon_i = C_i : A_i : \varepsilon^0 = C_i A_i : D : \sigma^0 \quad (\text{A.9})$$

e chega-se ao tensor concentração de tensão, fornecido na equação A.10:

$$B_i = C_i : [I - S : C_M^{-1} : (C_M - C_i)]^{-1} : D \quad (\text{A.10})$$

Conhecido o tensor de Eshelby, consegue-se determinar as deformações locais na inclusão. Os tensores de Eshelby para inclusões esféricas e cilíndricas estão apresentados nas equações A.11 e A.12, respectivamente:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{(7-5\nu)}{15(1-\nu)} & \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & \frac{(7-5\nu)}{15(1-\nu)} & \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & \frac{(5\nu-1)}{15(1-\nu)} & \frac{(7-5\nu)}{15(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(4-5\nu)}{15(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4-5\nu)}{15(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{(5.C(1,1) + C(1,2))}{8.C(1,1)} & \frac{(5.C(1,2) - C(1,2))}{8.C(1,1)} & \frac{C(1,2)}{2.C(1,1)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(5.C(1,2) - C(1,2))}{8.C(1,1)} & \frac{(5.C(1,1) + C(1,2))}{8.C(1,1)} & \frac{C(1,2)}{2.C(1,1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(3.C(1,1) - C(1,2))}{8.C(1,1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

em que $C(1,1)$ e $C(1,2)$ são dados pelas equação A.13:

$$\begin{aligned} C(1,1) &= \frac{E(1-2\nu)}{1-\nu-2\nu^2} \\ C(1,2) &= \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

em que ν é o coeficiente de Poisson.

A.2 Método Auto-Consistente

O problema apresentado por Eshelby tinha como hipótese uma única inclusão elipsoidal envolta em um meio infinito.

Nos materiais compósitos, a solução obtida por Eshelby pode não ser aplicável no caso de haver várias inclusões e a distância entre estas permitir que a deformação decorrente de uma inclusão tenha efeito em outra inclusão, como visualizado na figura A.3.

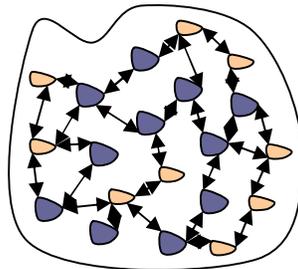


Figura A.3: Interação entre as inclusões no material compósito.

O método auto-consistente utiliza a estratégia do método da inclusão equivalente, através da consideração de uma única inclusão envolvida pelo material homogeneizado ou efetivo. Com isto, podem-se determinar as propriedades efetivas do compósito.

Sendo f_i a fração volumétrica de inclusão, pode-se expressar a deformação média no compósito como mostrado na equação A.14:

$$\langle \varepsilon \rangle = f_i \langle \varepsilon \rangle_i + (1 - f_i) \langle \varepsilon \rangle_M \quad (\text{A.14})$$

Das relações $\langle \varepsilon \rangle_i = A_I : \langle \varepsilon \rangle$ e $\langle \sigma \rangle_i = B_I : \langle \sigma \rangle$, pode-se escrever a equação A.15:

$$I = f_i A_I + (1 - f_i) A_M \quad (\text{A.15})$$

em que I é o tensor identidade. Isolando A_M tem-se (equação A.16):

$$A_M = \frac{1}{1 - f_i} (I - f_i A_I) \quad (\text{A.16})$$

Escrevendo a tensão média no compósito (equação A.17):

$$\langle \sigma \rangle = f_i \langle \sigma \rangle_i + (1 - f_i) \langle \sigma \rangle_M \quad (\text{A.17})$$

e substituindo a relação constitutiva e as relações de deformação na matriz e na inclusão, tem-se (equação A.18):

$$\bar{C}^* : \langle \varepsilon \rangle = f_i C_i : A_I : \langle \varepsilon \rangle + (1 - f_i) C_M : A_M : \langle \varepsilon \rangle \quad (\text{A.18})$$

Aplicando a expressão de A_M (equação A.16) na equação acima, chega-se a equação A.19:

$$\bar{C}^* = f_i C_i : A_I + (1 - f_i) C_M : \frac{1}{1 - f_i} (I - f_i A_I). \quad (\text{A.19})$$

Simplificando esta expressão, tem-se (equação A.20):

$$\bar{C}^* = C_M + f_i (C_i - C_M) : A_I \quad (\text{A.20})$$

em que A_I é fornecido pela equação A.21:

$$A_I = \left[I - S^* : \bar{C}^{*-1} : (\bar{C}^* - C_i) \right]^{-1} \quad (\text{A.21})$$

Para a solução aplicando este método é necessário o conhecimento prévio do tensor efetivo do compósito, que não é conhecido. Para resolver tal problema, utiliza-se uma solução iterativa, apresentada na equação A.22:

$$\bar{C}_{n+1}^* = C_M + f_i(C_i - C_M) : \left[I - S_n^* : \bar{C}_n^{*-1} : (\bar{C}_n^* - C_i) \right]^{-1} \quad (\text{A.22})$$

em que \bar{C}_1^* pode ser adotado como um valor médio entre a matriz e a inclusão. Com base neste valor, calcula-se S_1^* e, em seguida, determina-se \bar{C}_2^* . O processo iterativo se encerrará quando determinada tolerância para o \bar{C}^* for atingida. O parâmetro n representa a variável contadora, sendo este valor determinado pela tolerância estabelecida como requisito da solução do problema.

Exemplo do procedimento de cálculo pelo método auto-consistente é apresentado no anexo B.

A.3 Esquema diferencial

Da equação básica da micromecânica e sabendo que na inclusão a relação $\langle \varepsilon \rangle_i = A_i : \langle \varepsilon \rangle$ é válida, descreve-se para o caso de uma única inclusão ($i=1$) a seguinte relação (equação A.23):

$$\bar{C} - C_M = f_i(C_i - C_M) : A_I \quad (\text{A.23})$$

em que A_I é apresentado na equação A.24:

$$A_I = \frac{1}{f_i}(C_i - C_M)^{-1} : (\bar{C} - C_M) \quad (\text{A.24})$$

e \bar{C} é determinado em função de f_i , conforme pode ser visualizado na figura A.4:

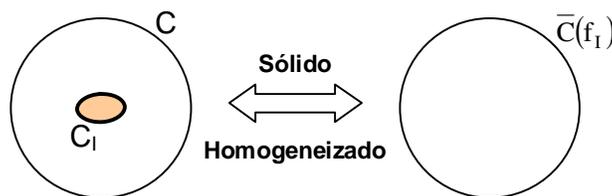


Figura A.4: Hipótese assumida na homogeneização do material compósito.

De conhecimento prévio, sabe-se que o volume do compósito é dado pela soma do volume da inclusão e do volume da matriz e que a fração volumétrica destas fases se dá pelo quociente do volume desta pelo volume total. A idéia básica do esquema diferencial é baseada na admissão de um incremento δV_I no volume de inclusão, de forma que o volume total do compósito tenha o acréscimo gerado por esta parcela (equação A.25):

$$V = V_M + V_i + \delta V_i \quad (\text{A.25})$$

e a respectiva fração volumétrica de inclusão possa ser calculada como o disposto na equação A.26:

$$f_i + \delta f_i = \frac{V_i + \delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i} \quad (\text{A.26})$$

A fração volumétrica do incremento de inclusão no compósito pode ser calculada pela equação A.27:

$$\delta \xi = \frac{\delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i}. \quad (\text{A.27})$$

Determinando δf_I através da subtração $(f_i + \delta f_i) - (f_i)$, tem-se (equação A.28):

$$\delta f_i = \frac{V_i + \delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i} - \frac{V_i}{V_M + V_i} \quad (\text{A.28})$$

Manipulando algebricamente a expressão acima, obtém-se a equação A.29:

$$\delta f_i = \frac{\delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i} - \frac{f_i \delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i} \quad (\text{A.29})$$

Somando os termos em δV_i e substituindo o valor encontrado pela expressão de $\delta \xi$, chega-se a equação A.30:

$$\delta f_i = (1 - f_i) \frac{\delta V_i}{V_M + V_i + \delta V_i} = (1 - f_i) \delta \xi \quad (\text{A.30})$$

Aplicando a relação básica da micromecânica (equação A.23) para o caso em que há o acréscimo no volume de inclusão e para o caso em que não há variação de volume, pode-se escrever, respectivamente, para os casos citados, as equações A.31 e A.32:

$$\bar{C}(f_i + \delta f_i) - C_M = (f_i + \delta f_i)(C_i - C_M) : A_I(C_i, C_M, f_i + \delta f_i) \quad (\text{A.31})$$

$$\bar{C}(f_i) - C_M = f_i(C_i - C_M) : A_I(C_i, C_M, f_i). \quad (\text{A.32})$$

Realizando a subtração das duas últimas equações, obtém-se a equação A.33:

$$\bar{C}(f_i + \delta f_i) - \bar{C}(f_i) = \frac{\delta f_i}{1 - f_i} (C_i - \bar{C}(f_i)) : A_I(C_i, \bar{C}(f_i), \delta f_i). \quad (\text{A.33})$$

Fazendo o limite quando $\delta V_i \rightarrow 0$, a equação A.33 se reduz a condição apresentada na equação A.34:

$$d\bar{C} = \frac{df_i}{1 - f_i} (C_i - \bar{C}(f_i)) : A_I^{dil}. \quad (\text{A.34})$$

Isolando as parcelas diferenciais no primeiro membro da equação A.34, obtém-se a expressão que rege a determinação das propriedades efetivas de materiais compósitos pelo esquema diferencial, dada de acordo com a equação A.35:

$$\frac{d\bar{C}}{df_i} = \frac{1}{1 - f_i} (C_i - \bar{C}(f_i)) : A_I^{dil} \quad (\text{A.35})$$

em que A_I^{dil} é dado pela equação A.36:

$$A_I^{dil} = \left\{ I - S(f_i) : \bar{C}(f_i)^{-1} : [\bar{C}(f_i) - C_i] \right\}^{-1}. \quad (\text{A.36})$$

Para o caso em que a fração volumétrica de inclusão for nula, só havendo matriz, o tensor efetivo do compósito \bar{C} será igual ao tensor efetivo da matriz, ou seja, $\bar{C}(0) = C$.

De forma análoga para o tensor de flexibilidade, a obtenção da equação diferencial se dá através da equação A.37:

$$\frac{d\bar{D}}{df_i} = \frac{1}{1 - f_i} (D_i - \bar{D}(f_i)) : B_I^{dil} \quad (\text{A.37})$$

em que B_I^{dil} é dado pela equação A.38:

$$B_I^{dil} = \left\{ I - S(f_i) : \bar{D}(f_i)^{-1} : [\bar{D}(f_i) - D_i] \right\}^{-1} \quad (\text{A.38})$$

A.4 Modelos esféricos multifásicos

Os modelos esféricos de n fases se baseiam na aplicação de modelos bifásicos, fazendo a determinação de propriedades efetivas médias entre duas fases concêntricas, transformando em problemas de duas fases.

Segundo QU & CHERKAOUI (2006), o modelo de quatro fases foi desenvolvido para levar em consideração fases que são encontradas em alguns materiais avançados em que, em geral, uma interface é introduzida entre a matriz e a partícula.

O módulo de deformação volumétrico efetivo do compósito pode ser calculado pelo modelo esférico de 4 fases conforme equação A.39 e observado na figura A.5:

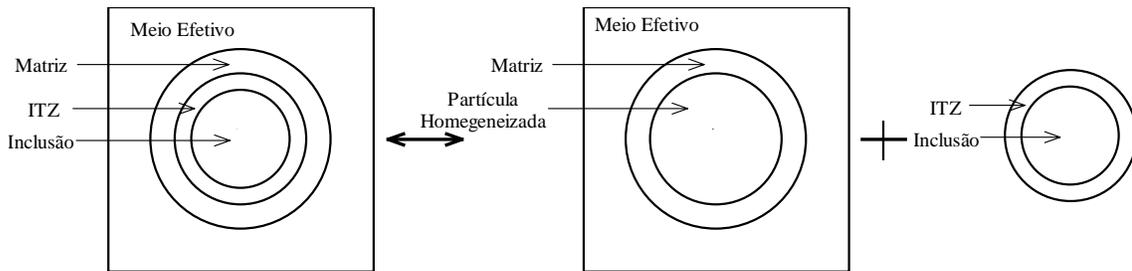


Figura A.5: Modelo esférico de 4 fases.

$$\bar{K} = K_M + \frac{(K_e - K_M)(3K_M + 4G_M)\left(\frac{b^3}{c^3}\right)}{3K_M + 4G_M + 3(K_e - K_M)\left(1 - \frac{b^3}{c^3}\right)} \quad (\text{A.39})$$

em que \bar{K} é o módulo volumétrico do compósito, K_M e G_M são os módulos volumétrico e de cisalhamento da matriz e K_e é módulo volumétrico efetivo entre a partícula e a interface, dado pela equação A.40:

$$K_e = K_{itz} + \frac{(K_i - K_{itz})(3K_{itz} + 4G_{itz})\left(\frac{a^3}{b^3}\right)}{3K_{itz} + 4G_{itz} + 3(K_i - K_{itz})\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right)} \quad (\text{A.40})$$

em que K_{itz} e G_{itz} são os módulos volumétrico e de cisalhamento da interface e K_i é módulo volumétrico da inclusão.

Nota-se das equações A.39 e A.40 a dependência do módulo volumétrico do compósito não só com o módulo das fases, mas também com as dimensões das fases consideradas.

Para um modelo esférico multifásico, exposto na figura A.6, parte-se da mesma idéia dos modelos de 3 e 4 fases, em que o módulo volumétrico pode ser calculado segundo a equação A.41, válida para $n \geq 2$:

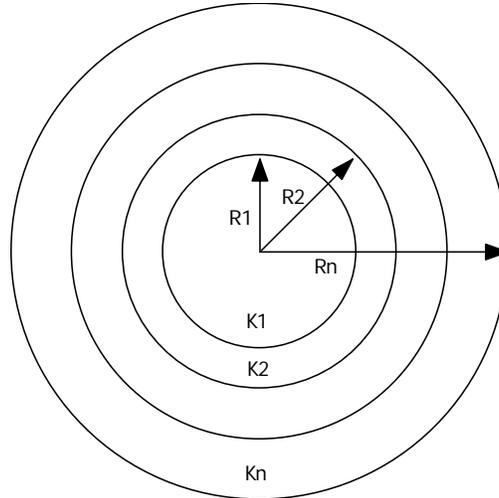


Figura A.6: Modelo esférico de n fases.

$$\bar{K}_n = K_n + \frac{(\bar{K}_{n-1} - K_n)(3K_n + 4G_n) \left(\frac{R_{n-1}^3}{R_n^3} \right)}{3K_n + 4G_n + 3(\bar{K}_{n-1} - K_n) \left(1 - \frac{R_{n-1}^3}{R_n^3} \right)} \quad (\text{A.41})$$

em que R_n e R_{n-1} são os raios das fases n e $n-1$, K_n e G_n são os módulos volumétrico e de cisalhamento da fase n e \bar{K}_{n-1} é o módulo volumétrico efetivo da fase $n-1$, representativa da junção interface – partícula.

O módulo de cisalhamento efetivo para o modelo multifásico pode ser calculado pela equação A.42:

$$\frac{\bar{G}}{G_n} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{A.42})$$

em que \bar{G} é o módulo de cisalhamento do compósito ou fases consideradas, G_n é o módulo de cisalhamento da n -ésima fase e as constantes A , B e C podem ser encontradas em QU & CHERKAOUI (2006).

A.5 Método inverso

Método desenvolvido por HASHIN & MONTEIRO (2002), tendo como principal meta a determinação das propriedades elásticas da interface para a utilização em concretos e argamassas. O modelo de análise consiste de um modelo de três fases, conforme mostrado na figura A.7.

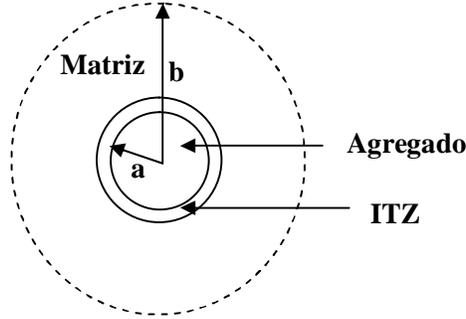


Figura A.7: Modelo para análise do método inverso.

As deformações e tensões médias podem ser descritas como uma média ponderada das propriedades das fases, de acordo com as equações A.43 e A.44:

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon \rangle_i f_i + \langle \varepsilon \rangle_{itz} f_{itz} + \langle \varepsilon \rangle_M f_M \quad (\text{A.43})$$

$$\langle \sigma \rangle = C_i \langle \varepsilon \rangle_i f_i + C_{itz} \langle \varepsilon \rangle_{itz} f_{itz} + C_M \langle \varepsilon \rangle_M f_M \quad (\text{A.44})$$

Efetuando a eliminação de deformação média na inclusão na expressão acima, aplicando a equação constitutiva para o material compósito e dividindo todos os termos pela deformação média no compósito, obtém-se a equação A.45:

$$\bar{C} = C_M + (C_i - C_M) \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_i}{\langle \varepsilon \rangle} \right) f_i + (C_{itz} - C_M) \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_{itz}}{\langle \varepsilon \rangle} \right) f_{itz} \quad (\text{A.45})$$

Escrevendo a equação A.45 para os módulos volumétrico e de cisalhamento, \bar{K} e \bar{G} , respectivamente, chega-se às equações A.46 e A.47:

$$\bar{K} = K_M + (K_i - K_M) \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_i}{\langle \varepsilon \rangle} \right) f_i + (K_{itz} - K_M) \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle_{itz}}{\langle \varepsilon \rangle} \right) f_{itz} \quad (\text{A.46})$$

$$\bar{G} = G_M + (G_i - G_M) \left(\frac{e_{ij}^I}{e_{ij}} \right) f_i + (G_{itz} - G_M) \left(\frac{e_{ij}^{ITZ}}{e_{ij}} \right) f_{itz} \quad (\text{A.47})$$

Os termos encontrados ε e e_{ij} são as componentes isotrópica e deviadora do tensor de deformação ε_{ij} , fornecidos pela relação (equação A.48):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij} \quad (\text{A.48})$$

em que δ é o delta de Kronecker.

Assumindo um deslocamento no contorno infinito no compósito, este é tomado em função da tensão média através de sua componente isotrópica na direção radial ($u_{r(r \rightarrow \infty)} = \langle \varepsilon \rangle r$), no qual o problema torna-se radialmente simétrico, em que $u_r = u_u(r)$, $u_\phi = u_\theta = 0$. Então, pode-se expressar o problema, para o caso apresentado na figura 5.16, através das equações A.49 e A.50, que descrevem a análise por meio do módulo volumétrico do compósito e do módulo equivalente:

$$\bar{K} = K_M + \frac{f_M + f_i}{1/(K_e - K_M) + 3f_M/(3K_M - 4G_M)} \quad (\text{A.49})$$

$$K_e = K_{iz} + \frac{f_i/(f_M + f_i)}{1/(K_i - K_{iz}) + [3f_{iz}/(f_{iz} + f_i)]/(3K_M - 4G_M)} \quad (\text{A.50})$$

Para o caso do módulo de cisalhamento efetivo, assume-se o deslocamento medido em uma distância da inclusão como função da componente deviadora do tensor de deformação ($u_i(x)_{x \rightarrow \infty} = e_{ij}x_j$), no qual se podem expressar, para esta restrição nos deslocamentos, as componentes de deslocamento ao longo das direções radial e angular através da equação A.51:

$$u_r = 2\beta r P(\cos \theta), u_\theta = \beta r \dot{P}(\cos \theta), u_\phi = 0_{r \rightarrow \infty} \quad (\text{A.51})$$

em que P é o segundo polinômio de Legendre, dado pela equação A.52:

$$P(\cos \theta) = P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1), \dot{P}(\cos \theta) = \frac{dP_2}{d\theta} = -3\cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.52})$$

LUR'E (1964) apud HASHIN & MONTEIRO (2002) propôs a solução para o problema, na consideração de um problema axisimétrico em relação ao eixo x_3 , cuja solução é apresentada na equação A.53:

$$\left. \begin{aligned}
u_r &= \beta \left[12\nu\rho^2 A + 2B + \frac{2(5-4\nu)}{\rho^3} C - \frac{3}{\rho^5} D \right] r P \\
u_\theta &= \beta \left[(7-4\nu)\rho^2 A + B + \frac{2(1-2\nu)}{\rho^3} C - \frac{D}{\rho^5} \right] r \dot{P} \\
\sigma_{rr} &= 2\beta G \left[-6\nu\rho^2 A + 2B - \frac{4(5-\nu)}{\rho^3} C - \frac{12}{\rho^5} D \right] r P \\
\sigma_\theta &= 2\beta G \left[(7+2\nu)\rho^2 A + B + \frac{2(1-\nu)}{\rho^3} C - \frac{4}{\rho^5} D \right] r \dot{P}
\end{aligned} \right\} \quad (A.53)$$

em que A, B, C e D são constantes, ν é o coeficiente de Poisson e $\rho = \frac{r}{a_2}$.

A solução deste problema deve passar pela consideração de condições de contorno entre as fases matriz, agregado (inclusão), interface e meio efetivo, com os quais se obtêm as seguintes condições de contorno, apresentadas na equação A.54:

$$\left. \begin{aligned}
u_r^0 &= 2\beta r P, \quad u_\theta^0 = \beta r \dot{P} \quad r \rightarrow \infty \\
u_r^0(a_M, \theta) &= u_r^M(a_M, \theta), \quad u_\theta^0(a_M, \theta) = u_\theta^M(a_M, \theta) \\
\sigma_{rr}^0(a_M, \theta) &= \sigma_{rr}^M(a_M, \theta), \quad \sigma_{r\theta}^0(a_M, \theta) = \sigma_{r\theta}^M(a_M, \theta) \\
u_r^M(a_{ITZ}, \theta) &= u_r^{ITZ}(a_{ITZ}, \theta), \quad u_\theta^M(a_{ITZ}, \theta) = u_\theta^{ITZ}(a_{ITZ}, \theta) \\
\sigma_{rr}^M(a_{ITZ}, \theta) &= \sigma_{rr}^{ITZ}(a_{ITZ}, \theta), \quad \sigma_{r\theta}^M(a_{ITZ}, \theta) = \sigma_{r\theta}^{ITZ}(a_{ITZ}, \theta) \\
u_r^{ITZ}(a_i, \theta) &= u_r^i(a_i, \theta), \quad u_\theta^{ITZ}(a_i, \theta) = u_\theta^i(a_i, \theta) \\
\sigma_{rr}^{ITZ}(a_i, \theta) &= \sigma_{rr}^i(a_i, \theta), \quad \sigma_{r\theta}^{ITZ}(a_i, \theta) = \sigma_{r\theta}^i(a_i, \theta) \\
u_r^i(0, \theta) &= u_\theta^i(0, \theta) = 0
\end{aligned} \right\} \quad (A.54)$$

em que a_M , a_{ITZ} e a_i representam os raios da matriz, interface e inclusão, respectivamente, seguindo o modelo apresentado na figura A.7 e o índice 0 representa o meio homogêneo efetivo. Resolvendo para as duas primeiras e duas últimas condições de contorno encontram $A_0=C_I=D_I=0$ e $B_0=1$. Determinados os valores de 4 constantes, restaram ainda 12 constantes a serem obtidas, podendo estas soluções serem expressas da forma: $C_0, D_0=A_1, A_2$ para o meio efetivo, $A_M, B_M, C_M, D_M=A_3, A_4, A_5, A_6$ para a matriz, $A_{ITZ}, B_{ITZ}, C_{ITZ}, D_{ITZ}=A_7, A_8, A_9, A_{10}$ para a zona de interface e $A_i, B_i=A_{11}, A_{12}$ para a inclusão. A manipulação das equações A.49, A.50, A.51 e as relações entre as constantes apresentadas levam à condição $C_0=0$.

Partindo deste ponto, pode-se determinar esta condição através de uma relação determinantal [HASHIN (1991) apud HASHIN & MONTEIRO (2002)], apresentada na equação A.55:

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{a}_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_4 & \mathbf{a}_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \mathbf{a}_{57} & \mathbf{a}_{58} & \mathbf{a}_{59} & \mathbf{a}_{510} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & \mathbf{a}_{67} & \mathbf{a}_{68} & \mathbf{a}_{69} & \mathbf{a}_{610} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & \mathbf{a}_{77} & \mathbf{a}_{78} & \mathbf{a}_{79} & \mathbf{a}_{710} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & \mathbf{a}_{87} & \mathbf{a}_{88} & \mathbf{a}_{89} & \mathbf{a}_{810} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{97} & \mathbf{a}_{98} & \mathbf{a}_{99} & \mathbf{a}_{910} & a_{911} & a_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{107} & \mathbf{a}_{108} & \mathbf{a}_{109} & \mathbf{a}_{1010} & a_{1011} & a_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{117} & \mathbf{a}_{118} & \mathbf{a}_{119} & \mathbf{a}_{1110} & a_{1111} & a_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{127} & \mathbf{a}_{128} & \mathbf{a}_{129} & \mathbf{a}_{1210} & a_{1211} & a_{1212} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.55})$$

em que os coeficientes da matriz estão apresentados em HASHIN & MONTEIRO (2002).

Entretanto, não se sabe as propriedades da interface. Em contrapartida, as propriedades das outras fases e do compósito são conhecidas. Tendo como base estes fatos, resolvendo a equação determinantal, obtêm-se as equações A.56 e A.57, através das quais se podem determinar o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson da interface:

$$c_{00} + c_{10}g_{iM} + c_{20}g_{iM}^2 + c_{30}g_{iM}^3 + c_{40}g_{iM}^4 + c_{11}g_{iM}v_{itz} + c_{21}g_{iM}^2v_{itz} + c_{31}g_{iM}^3v_{itz} + c_{41}g_{iM}^4v_{itz} + c_{12}g_{iM}v_{itz}^2 + c_{22}g_{iM}v_{itz}^2 + c_{32}g_{iM}^3v_{itz}^2 + c_{42}g_{iM}^4v_{itz}^2 = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$b_{00} + b_{01}v_{itz} + b_{01}v_{itz}^2 + b_{10}g_{iM} + b_{11}g_{iM}v_{itz} + b_{12}g_{iM}v_{itz}^2 + b_{20}g_{iM}^2 + b_{21}g_{iM}^2v_{itz} + b_{22}g_{iM}^2v_{itz}^2 = 0 \quad (\text{A.57})$$

MÉTODOS DE ANÁLISE ESTATÍSTICA

B.1 Considerações iniciais

A obtenção dos dados decorrentes de ensaios de resistência à compressão e de módulo de elasticidade são eventos que podem apresentar grandes dispersões nos resultados, que podem ocorrer por diversos motivos, como exemplo, falta de centralização do corpo-de-prova na prensa de ensaio, superfícies irregulares e não planas, tipo de capeamento utilizado, tamanho do corpo-de-prova, problemas na moldagem, etc.

Para se efetuar um tratamento da qualidade dos dados experimentais, obtidos de ensaios com corpos-de-prova, foram utilizadas duas técnicas estatísticas, a saber: teste de intervalo de confiança e análise de variância pelo método ANOVA.

Estas técnicas tem como objetivo avaliar se algum dado experimental se encontra fora de um intervalo em torno de parâmetros da população (média e desvio padrão), assim como avaliar a influência de alguma das variáveis estudadas no comportamento das propriedades estudadas em relação ao material, auxiliando nas curvas ajustadas para definir tal comportamento.

Por se tratar de assuntos difundidos e consagrados na literatura técnica, a revisão bibliográfica acerca dos métodos pesquisados e utilizados se dará de forma breve e sucinta.

Muitos pacotes computacionais possuem grande partes destas formulações implementadas e de fácil interface para a utilização do usuário. Dentre estes, podem ser citados os softwares MINITAB, STATISTICA e MATLAB.

B.2 Intervalos de confiança

Um intervalo de confiança denota a idéia de que existe um determinado nível de confiança de que a média de certa população se encontra dentro daquele intervalo.

Na análise de muitos problemas, para ser assegurada que uma média de uma amostra pode ser um valor representativo daquela população, torna-se necessário delimitar intervalos que garantam a sua significância, relacionando o grau de incerteza associado uma estimativa, sendo este intervalo denominado de intervalo de confiança.

Segundo MONTGOMERY & RUNGER (2003), uma estimativa do intervalo de confiança para um parâmetro μ pode ser escrita como (equação B.1):

$$l \leq \mu \leq u \quad (\text{B.1})$$

em que os pontos finais l e u dependem dos valores apresentados pela estatística μ e são chamados de limites inferior e superior de confiança. A equação B.1 denota os limites de um intervalo de confiança 100 $(1-\alpha)\%$ para o parâmetro μ , se a probabilidade deste valor se encontrar dentro deste intervalo for de (equação B.2):

$$P(L \leq \mu \leq U) = 1 - \alpha \quad (\text{B.2})$$

em que L e U denotam variáveis aleatórias que descrevem os limites de confiança e $(1-\alpha)$ é chamado de coeficiente de confiança.

O intervalo definido na equação B.2 é definido como bilateral, pois associa limites inferior e superior para μ .

Os limites L e U são encontrados admitindo uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2/n e considerando a distribuição normal padrão da estatística Z , dada pela equação B.3:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (\text{B.3})$$

em que Z a distribuição normal reduzida, \bar{X} é média de uma amostra aleatória de tamanho n , σ^2 representa a variância conhecida.

Esta distribuição pode ser observada na figura B.1, onde para o nível de confiança desejado, pode-se escrever a equação B.4:

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha \quad (\text{B.4})$$

de forma que, substituindo na equação B.4 a equação B.3, tem-se a equação B.5 e representada na figura B.1:

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1 - \alpha \quad (\text{B.5})$$

$$P\left\{\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

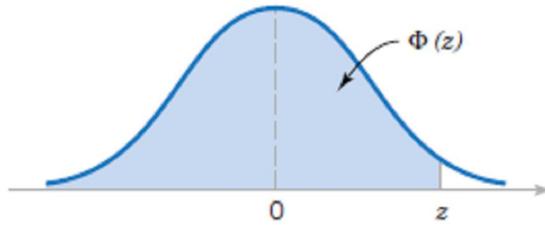


Figura B.1: Intervalo de confiança com a estatística Z.

Da condição expressa na equação B.5, pode-se definir o intervalo de confiança para a média com variância conhecida como colocado na equação B.6:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{B.6})$$

sendo $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ o ponto superior com $100 \frac{\alpha}{2} \%$ da distribuição normal padrão.

Para amostras provenientes de uma população normal, ou para amostras de tamanho $n \geq 30$, independente da forma da população, o intervalo de confiança apresentado na equação 6.6 apresentará bons resultados. Para pequenas amostras, originadas de população não normal, não se espera que o intervalo descrito apresente resultados exatos.

Uma distribuição utilizada para análise de pequenas amostras, ou seja, população com $n < 30$, é a distribuição de *Student t*. Estas distribuições podem ser consideradas como pertencentes a teoria exata da amostragem, em que estas servem tanto para as pequenas quanto para as grandes amostras [SPIEGEL (1993) e SPIEGEL et al. (2004)].

Da estatística, tem-se (equação B.7):

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n-1} \quad (\text{B.7})$$

Mediante o emprego de uma tabela da distribuição t, a média da população pode ser estimada dentro dos limites especificados. Para tal, determina-se o nível de confiança que se deseja trabalhar. Por exemplo, para um nível de confiança de 95%, tem-se a situação apresentada na equação B.8:

$$-t_{0,95} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n-1} < t_{0,95} \quad (\text{B.8})$$

Logo, pode-se determinar a média da população pela equação B.9, conforme apresentado na figura B.2:

$$\bar{X} - t_{0,95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0,95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \quad (\text{B.9})$$

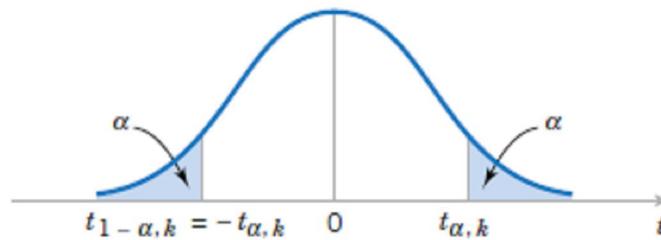


Figura B.2: Distribuição da estatística $t_{\alpha, v}$.

Para a determinação do parâmetro t, além do nível de confiança, é necessária a determinação do número de graus de liberdade v. Este parâmetro é definido como o número de n observações independentes da amostra menos o número k dos parâmetros populacionais que devem ser estimados por meio de observações amostrais.

Para o caso da distribuição de *Student t*, $k = 1$, logo $v = n - 1$.

Para esta situação, com nível de confiança igual a 95%, tem-se o valor do parâmetro t igual a 2,92 (ver tabela B1).

Tabela B.1: Distribuição de Student t.

$\nu \backslash \alpha$.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

B.3 Modelos de regressão

Regressão é um modelo de relação entre uma variável aleatória dependente y e uma ou mais variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n . Estes modelos podem ser:

- Regressão linear simples: $y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$
- Regressão linear múltipla: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon$
- Regressão não linear: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$

em que y é a variável dependente ou variável explicada, x é a variável explicativa, β são os parâmetros de regressão e ε é o erro devido ao caráter aleatório de y .

Os três tipos de regressão listados acima serão expostos de forma sucinta nos itens abaixo, aliados a análise de variância das curvas de regressão.

B.3.1 Regressão linear simples

Na regressão linear simples considera-se uma única variável independente x relacionada à variável resposta y , cujo valor esperado é dado pela equação B.10:

$$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon \quad (\text{B.10})$$

em que β são os coeficientes desconhecidos e ε é o erro aleatório.

Para se estimar os parâmetros de regressão uma estratégia bastante utilizada é a do método dos mínimos quadrados, que busca reduzir a distância entre os pontos na direção y , conforme observado na figura B.3. As estimativas de mínimos quadrados da interseção e da inclinação no modelo de regressão linear simples são (equação B.11):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

em que $\bar{y} = (1/n)\sum_{i=1}^n y_i$ e $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$.

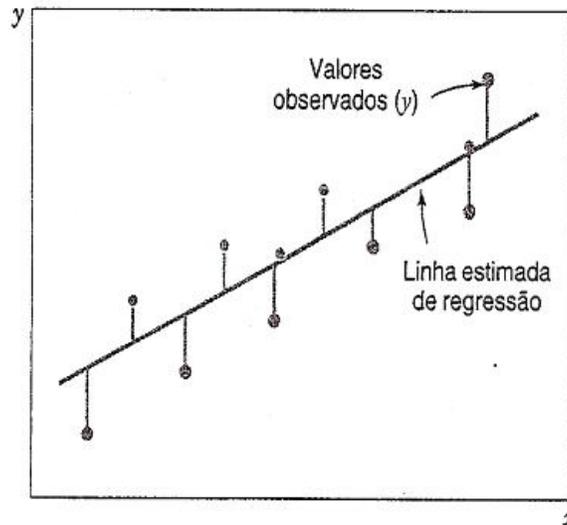


Figura B.3: Desvio dos dados em relação ao modelo estimado de regressão (MONTGOMERY & RUNGER, 2003).

Para a curva de regressão obtida, com as estimativas dos coeficientes que definem inclinação e interseção da reta é possível obter estimativas do intervalo de confiança desses parâmetros. Segundo MONTGOMERY & RUNGER (2003), sob suposição de que as observações sejam normal e independentemente distribuídas, os intervalos de confiança de 100 (1- α) % para β_1 e β_0 na regressão linear simples são apresentados pela equação B.12:

$$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \quad (\text{B.12})$$

$$\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right]}$$

em que $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são os estimadores dos coeficientes de regressão.

A regressão linear pode ser usada para a análise de alguns modelos que possam ser representados por uma função não linear. Neste sentido, estes modelos são chamados de intrinsecamente lineares, pelo fato de suas equações básicas poderem ser transformadas em uma equação linear.

DEVORE (2006) apresenta as funções não lineares mais comuns de serem linearizadas, descritas na tabela B.2:

Tabela B.2: Funções intrinsecamente lineares comuns (DEVORE, 2006).

Função	Transformação p/ linearizar	Forma linear
$y = \alpha e^{\beta x}$	$y' = \ln(y)$	$y' = \ln(\alpha) + \beta x$
$y = \alpha x^{\beta}$	$y' = \log(y); x' = \log(x)$	$y' = \log(\alpha) + \beta x'$
$y = \alpha + \beta \log(x)$	$x' = \log(x)$	$y = \alpha + \beta x'$
$y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$	$x' = \frac{1}{x}$	$y = \alpha + \beta x'$

B.3.2 Regressão polinomial

O modelo linear, exposto no item B.3.1, é um modelo geral que pode ser utilizado para ajustar qualquer relação que se apresente linear nos parâmetros desconhecidos β , englobando dentro desta generalização modelos de regressão polinomial.

Em muitas situações, analisando aspectos teóricos ou o gráfico de dispersão de dados, implica em dizer que uma regressão pode apresentar um ou mais picos (máximos ou mínimos relativos), representando a regressão polinomial uma aproximação mais satisfatória.

O modelo de regressão polinomial pode ser expresso pela equação B.13:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k + \varepsilon \quad (\text{B.13})$$

Segundo DEVORE (2006), a estimativa dos coeficientes de regressão para o ajuste polinomial são aqueles que resolvem a equação B.14:

$$f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\beta}_2 x_i^2 + \dots + \hat{\beta}_k x_i^k)]^2 \quad (\text{B.14})$$

sendo que se todos os x_1, x_2, \dots, x_k são todos diferentes de zero, existe pelo menos um polinômio de grau $n-1$ que se ajusta aos dados.

Para a solução da equação B.14 considera-se o fato de que a equação se apresenta linear em relação aos coeficientes, sendo os coeficientes calculados pela equação B.15:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum x_i + \hat{\beta}_2 \sum x_i^2 + \dots + \hat{\beta}_k \sum x_i^k &= \sum y_i \\
\hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_i^3 + \dots + \hat{\beta}_k \sum x_i^{k+1} &= \sum x_i y_i \\
\vdots & \\
\hat{\beta}_0 \sum x_i^k + \hat{\beta}_1 \sum x_i^{k+1} + \hat{\beta}_2 \sum x_i^{k+2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum x_i^{2k} &= \sum x_i^k y_i
\end{aligned}
\tag{B.15}$$

6.3.3 Regressão linear múltipla

Quando um sistema possui uma resposta y que depende das variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_k , diz-se que há uma relação funcional entre a variável dependente e as variáveis independentes, dada pela equação B.16

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \tag{B.16}$$

cujos parâmetros tem a mesma designação que para a regressão linear simples.

A solução dos coeficientes de regressão linear múltipla pode ser efetuada utilizando abordagem matricial, conforme processo descrito a seguir.

Considere $n > k$ observações da variável resposta, ou seja, y_1, y_2, \dots, y_n , sendo que, para cada resposta, tem-se as observações das variáveis de regressão. Na forma matricial, a equação B.13 pode ser escrita como na equação B.17:

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{B.17}$$

em que:
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ e } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

No caso acima, y é um vetor $n \times 1$ das observações, X é uma matriz $n \times p$ ($p=k+1$) dos níveis das variáveis independentes, β é um vetor $p \times 1$ dos coeficientes de regressão e ε é um vetor $n \times 1$ dos erros aleatórios.

O método dos mínimos quadrados é utilizado para estimar os parâmetros do modelo de regressão múltipla. Neste processo, os coeficientes β são obtidos de forma que os erros sejam minimizados, em que através de procedimentos matemáticos chega-se a equação B.18:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y \quad (\text{B.18})$$

em que a matriz resultante $X'X$ geralmente é não singular (MONTGOMERY & RUNGER, 2003).

A equação B.15 fornece a solução geral para o ajuste de um modelo por mínimos quadrados, não importando quantas sejam as observações ou quantos parâmetros sejam necessários para caracterizar o modelo, desde que as matrizes X e y sejam ampliadas de forma adequada.

Além disso, a equação só pode ser aplicada se os modelos forem lineares nos parâmetros, não apresentando termos contendo produtos entre coeficientes.

O resíduo gerado pelo modelo de regressão pode ser determinado pela subtração da resposta exata pela resposta fornecida pelo modelo, dado na equação B.19:

$$\varepsilon = y - \hat{y} \quad (\text{B.19})$$

em que, na análise matricial, é representado por um vetor de ordem $n \times 1$.

Para este tipo de regressão, o intervalo de confiança para os coeficientes β_j ($j = 1, 2, \dots, k$), para um nível de significância escolhido, é dado pela equação B.20:

$$\hat{\beta}_j - t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \leq \beta_j \leq \hat{\beta}_j + t_{\alpha/2, n-p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}} \quad (\text{B.20})$$

em que C_{jj} é o j -ésimo elemento da matriz $(X'X)^{-1}$ e $\hat{\sigma}^2$ é a estimativa da variância do erro, dada pela equação B.21:

$$\hat{\sigma}^2 = MQE = \frac{SQ_E}{n-p} \quad (\text{B.21})$$

em que MQE representa o erro médio quadrático.

B.3.4 Critérios para a seleção de um modelo

Segundo MONTGOMERY & RUNGER (2003), um número de critérios pode ser usado para a avaliação e comparação de diferentes modelos de regressão. Um critério comumente utilizado no coeficiente de determinação R^2 , que varia no intervalo de 0 a 1.

Para um modelo de regressão de p termos, o fator R^2 é dado pela equação B.22:

$$R^2 = \frac{SQ_R(p)}{SQ_T} = 1 - \frac{SQ_E(p)}{SQ_T} \quad (\text{B.22})$$

em que $SQ_R(p)$ e $SQ_E(p)$ denotam a soma quadrática da regressão e a soma quadrática dos erros, respectivamente, para um modelo com uma variável p .

O termo R^2 representa a percentagem de variabilidade que é explicada pela curva de regressão.

O parâmetro R^2 deve ser utilizado com cuidado para a avaliação de um modelo de regressão, pois este pode não explicar a adequação de um modelo devido ao fato de quando se acresce uma variável ao modelo, o valor de R^2 aumentará, mas não implicando, necessariamente, num modelo melhor ajustado.

Nos modelos de regressão, o parâmetro R^2 é frequentemente ajustado ao número de parâmetros do modelo, através da equação B.23:

$$R_a^2 = \frac{(n-1)R^2 - k}{n - (k+1)} \quad (\text{B.23})$$

em que R_a é o fator de correlação ajustado e R é o fator de correlação.

B.4 Análise de variância ANOVA

A estratégia da análise de variância ANOVA é um teste de hipóteses de médias de duas ou mais populações, sendo uma técnica muito usada para verificar a adequação do ajuste do modelo de regressão a um conjunto de dados.

No método ANOVA, a condição é baseada em um tratamento, que é uma condição imposta ao objeto que se deseja medir ou avaliar em um experimento.

Os tratamentos são chamados de variáveis independentes. Quando, em um experimento, se está interessado em estudar apenas um tipo de variável independente, diz-se que este possui apenas um fator. Em um experimento, um fator pode ter várias categoriais que são chamadas de níveis.

Outro fator a ser considerado é a repetição, que representa o número de vezes que um tratamento aparece no experimento. O número de repetições, em um

experimento, vai depender também dos recursos disponíveis, do tipo de experimento (delineamento) e, também, da variabilidade do experimento ou da variável resposta.

Este teste verifica se há uma relação linear entre as variáveis de resposta y_i e um subconjunto de variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_k . A hipótese nula a ser testada coloca que todos os coeficientes de regressão β são iguais à zero, em contrapartida a hipótese não-nula verifica se existe pelo menos um coeficiente β_j diferente de zero. Desta forma, tem-se que:

- $H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$;
- $H_1 = \beta_j \neq 0$ para pelo menos um j .

A rejeição de H_0 implica que pelo menos uma das variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_k contribui significativamente para o modelo. Este procedimento de teste é chamado de Análise de Variância (ANOVA) que está resumidamente apresentado na tabela B.3.

Tabela B.3: Exemplo de tabela de análise de variância ANOVA.

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F_0
Regressão	SS_R	$p - 1$	MS_R	MS_R / MS_E
Resíduos	SS_E	$n - p$	MS_E	
Total	SS_T	$n - 1$		

Com isso, o procedimento de teste para H_0 consiste em calcular a estatística F_0 conforme apresentado na equação B.24:

$$F_0 = \frac{\frac{SS_R}{p-1}}{\frac{SS_E}{n-p}} = \frac{MS_R}{MS_E} \quad (\text{B.24})$$

em que:

- SS_R = soma de quadrado da regressão;
- SS_E = soma de quadrado residual;
- MS_R = quadrado médio da regressão;

- MS_E = quadrado médio residual;
- p = número de parâmetros do modelo;
- n = número total de observações.

O quociente MS_R/MS_E tem distribuição $F_{\alpha, n-p}$, portanto rejeita-se H_0 se F_0 for maior que $F_{\alpha, n-p}$. Alternativamente, rejeita-se H_0 se o p-valor para a estatística F_0 for menor do que α (nível de significância do experimento).

O teste do parâmetro F permite apenas concluir que algumas variáveis explicativas são realmente importantes.

A distribuição estatística F (chamada F de Fischer) pode ser visualizada na figura B.4 e os dados relativos a esta distribuição estão apresentados na tabela B.4.

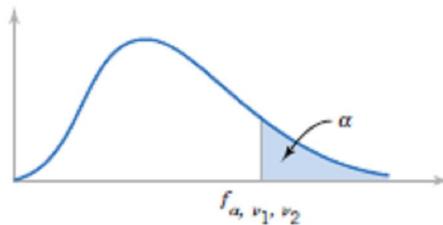


Figura B.4: Curva F e valor crítico F_{α, v_1, v_2} (DEVORE, 2006).

Para a análise de variância com múltiplos fatores, de forma semelhante ao definido acima, podem ser testadas as hipóteses de rejeição para os diversos fatores e para a interação entre os termos.

Para o caso de dois fatores, os testes de hipótese podem ser determinados, para uma dada significância, através da tabela B.5:

Tabela B.4: Distribuição F de Fischer.

$v_1 \backslash v_2$	Degrees of freedom for the numerator (v_1)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.51	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabela B.5: Análise de variância para o caso de dois fatores (DEVORE, 2006).

Hipóteses	Valor do teste estatístico	Região de rejeição
H_{0A} versus H_{aA}	$f_A = \frac{SS_A}{SS_E}$	$f_A \geq F_{\alpha, J-1, IJ(K-1)}$
H_{0B} versus H_{aB}	$f_B = \frac{SS_B}{SS_E}$	$f_B \geq F_{\alpha, J-1, IJ(K-1)}$
H_{0AB} versus H_{aAB}	$f_{AB} = \frac{SS_{AB}}{SS_E}$	$f_{AB} \geq F_{\alpha, (I-1)(J-1), IJ(K-1)}$

Os valores dos quadrados médios apresentados na tabela B.5 são determinados por meio da equação B.25:

$$\begin{aligned}
SS_T &= \sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}^2 - \frac{1}{ijk} x_{\dots}^2 \quad gl = ijk - 1 \\
SS_E &= \sum_i \sum_j \sum_k x_{ijk}^2 - \frac{1}{k} \sum_i \sum_j x_{ij}^2 \quad gl = ij(k-1) \\
SS_A &= \frac{1}{jk} \sum_i x_{i..}^2 - \frac{1}{ijk} x_{\dots}^2 \quad gl = i - 1 \\
SS_B &= \frac{1}{jk} \sum_j x_{.j.}^2 - \frac{1}{ijk} x_{\dots}^2 \quad gl = j - 1 \\
SS_{AB} &= \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{\dots})^2 \quad gl = (i-1)(j-1)
\end{aligned} \tag{B.25}$$

em que $SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$ e a soma dos quadrados da interação SS_{AB} podem ser obtidas por subtração.

Para o caso de mais fatores, a análise é realizada como para o caso de dois fatores, conforme apresentado em DEVORE (2006) e MONTGOMERY & RUNGER (2003).

ANEXOS

ANEXO A

RESULTADOS DOS ENSAIOS COM CONCRETO

São apresentados nas tabelas A1, A2 e A3 os valores dos módulos de elasticidade dos concretos analisados nesta pesquisa. As designações utilizadas pelas abreviações 25-1, 35-1 e 45-1, respectivamente, para os concretos produzidos com resistência característica à compressão de 25 MPa ($f_{pc} = 0,326$), 35 MPa ($f_{pc} = 0,368$) e 45 MPa ($f_{pc} = 0,487$). Os termos 1, 2 e 3, que seguem as abreviações propostas para os traços designam as moldagem dos concretos com a referida resistência característica à compressão.

São também avaliados nas referidas tabelas os respectivos intervalos de confiança para a amostragem de 3 corpos-de-prova por idade, fazendo-se uso do intervalo de *student t*, conforme apresentado no apêndice B.2, para pequenas amostras.

A utilização destes intervalos serve como critério de exclusão de dados que apresentem grandes desvios-padrão em relação à média das amostras avaliadas.

Tabela A1: Valores de módulo de elasticidade e intervalos de confiança para o concreto de 25 MPa.

Traço	Módulo de Elasticidade (GPa)					
	Idade	Valores	Média	Desvio-Padrão	Intervalos de Confiança	Média Ajustada
25-1	3	24,71 24,15 22,67	23,84	1,05	ICS = 25,73 ICI = 21,95	23,84
	7	11,96 26,61 22,67	22,15	8,85	ICS = 32,16 ICI = 12,14	27,25
	15	32,77 31,37 31,48	31,87	0,77	ICS = 32,74 ICI = 31,00	31,87
	28	29,51 32,24 34,11	31,95	2,32	ICS = 35,48 ICI = 29,32	31,95
25-2	3	25,64 27,03 26,24	26,31	0,70	ICS = 27,10 ICI = 25,52	26,31
	8	32,36 32,20 29,50	31,35	1,60	ICS = 32,39 ICI = 28,77	31,35
	21	32,01 27,85 31,86	30,58	2,36	ICS = 33,25 ICI = 27,91	31,94
	35	30,14 34,82 30,76	31,91	2,54	ICS = 34,78 ICI = 29,04	31,91
25-3	6	29,56 26,45 27,46	27,82	1,58	ICS = 29,61 ICI = 26,03	27,82
	20	27,92 28,64 32,32	29,63	2,36	ICS = 32,30 ICI = 26,96	29,63
	28	32,21 30,04 32,18	31,48	1,24	ICS = 32,88 ICI = 30,08	31,48
ICS – Limite superior do intervalo de confiança ICI – Limite inferior do intervalo de confiança						

Tabela A2: Valores de módulo de elasticidade e intervalos de confiança para o concreto de 35 MPa.

Traço	Módulo de Elasticidade (GPa)					
	Idade	Valores	Média	Desvio-Padrão	Intervalos de Confiança	Média Ajustada
35-1	3	34,95 33,07 31,26	33,09	1,85	ICS = 35,18 ICI = 31,00	33,09
	7	33,79 38,89 34,80	35,83	2,70	ICS = 38,89 ICI = 32,77	35,83
	17	38,05 37,45 36,82	37,44	0,62	ICS = 38,14 ICI = 36,74	37,44
	28	33,30 33,66 36,35	34,40	1,61	ICS = 36,22 ICI = 32,79	34,40
35-2	3	34,45 34,27 31,45	33,39	1,68	ICS = 35,29 ICI = 31,49	33,39
	8	33,70 38,29 36,13	36,04	2,29	ICS = 38,63 ICI = 33,45	36,04
	21	39,61 33,74 33,75	35,70	3,38	ICS = 39,52 ICI = 31,88	35,70
	35	31,82 39,43 34,40	35,22	3,87	ICS = 39,60 ICI = 30,84	35,22
35-3	6	30,21 31,84 31,92	31,33	0,97	ICS = 32,43 ICI = 30,23	31,33
	20	29,38 33,90 33,36	32,21	3,47	ICS = 36,14 ICI = 28,28	32,21
	28	30,80 32,03 35,26	32,70	2,31	ICS = 35,31 ICI = 30,09	32,70
ICS – Limite superior do intervalo de confiança ICI – Limite inferior do intervalo de confiança						

Tabela A1: Valores de módulo de elasticidade e intervalos de confiança para o concreto de 45 MPa.

Traço	Módulo de Elasticidade (GPa)					
	Idade	Valores	Média	Desvio-Padrão	Intervalos de Confiança	Média Ajustada
45-1	3	26,61 31,64 33,48	30,58	3,56	ICS = 34,61 ICI = 26,55	30,58
	8	37,45 40,24 39,10	38,93	1,40	ICS = 40,51 ICI = 37,35	38,93
	20	37,14 35,42 33,69	35,41	1,73	ICS = 37,37 ICI = 33,45	35,41
	34	34,20 41,83 35,35	37,13	4,12	ICS = 41,79 ICI = 32,47	37,13
45-2	5	28,58 30,51 34,67	31,26	3,11	ICS = 34,78 ICI = 27,74	31,26
	8	34,31 33,21 37,46	34,99	2,21	ICS = 37,49 ICI = 32,49	34,99
	18	31,59 32,92	32,25	0,94	ICS = 33,55 ICI = 30,95	32,25
	26	35,77 37,10	36,43	0,94	ICS = 37,73 ICI = 35,13	36,43
ICS – Limite superior do intervalo de confiança ICI – Limite inferior do intervalo de confiança						

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)