

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Estabilização Assintótica e Controle no Problema de
Conexões em Série de Vigas**

Por

Edgar Manuel Chipana Huamaní

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA E CONTROLE NO PROBLEMA
DE CONEXÕES EM SÉRIE DE VIGAS**

Edgar Manuel Chipana Huamaní

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISI-
TOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Jaime Edilberto Muñoz Rivera, D.Sc
(Presidente)

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc.

Prof. Gustavo A. Perla Menzala, D.Sc.

Prof. Jose Felipe Linares Ramirez, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 2010

Chipana Huamaní, Edgar Manuel

C541e Estabilização Assintótica e Controle no Problema de Conexões em Série de Vigas / Edgar Manuel Chipana Huamaní. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

xi, 92 p. : il.; 29 cm

Orientadore(s): Jaime Edilberto Muñoz Rivera e Santina de Fátima Arantes

Dissertação (M.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

1. Vigas. 2. Sistema hiperbólico. 3. Estabilidade assintótica. I. Muñoz Rivera, Jaime Edilberto. II. Arantes, Santina de Fátima. III. LNCC/MCT. IV. Título.

CDD 627.177 23

“ A nossa maior glória não reside no fato de
nunca cairmos, mas sim em levantarmo-nos
sempre depois de cada queda” .

Confúcio-(551-479 a.c.)

Dedicatória

Dedico este trabalho a meu saudosso pai (em memória), pelos seus incentivos. A minha esposa Vanda, pelo companherismo e dedicação. A minha mãe e a meus filhos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sem o seu amparo não poderia concretizar este objetivo.

Aos meus orientadores: Prof. Jaime Edilberto Muñoz Rivera e Santina de Fátima Arantes, pelos ensinamentos, conselhos e dedicação que contribuíram para o meu aperfeiçoamento acadêmico e profissional.

A minha família, em especial para a minha esposa Vanda, pelo carinho e compreensão. A minha mãe, pelo eterno apoio, incentivo e confiança, que tornaram sempre possíveis as minhas realizações pessoais e profissionais, superando a tristeza da minha ausência física.

Aos membros da Pós-graduação do LNCC, pela oportunidade.

Aos meus colegas do LNCC, em especial para o amigo Adilson Vicente Xavier, pelos bons conselhos ao longo do mestrado.

Aos meus colegas da IFRJ-Campus Nilópolis, em especial para o amigo Wallace V. Nunes.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA E CONTROLE NO PROBLEMA DE CONEXÕES EM SÉRIE DE VIGAS

Edgar Manuel Chipana Huamaní

Novembro , 2010

Orientador: Jaime Edilberto Muñoz Rivera, D.Sc

Co-orientador: Santina de Fátima Arantes, D.Sc.

Neste trabalho, estudamos a modelagem de um sistema de N vigas interconectadas entre si, onde um de seus extremos está engastado e o outro está submetido a um mecanismo dissipativo do tipo friccional. Mostramos a boa colocação do modelo, usando a teoria de semigrupos; e usando o método de energia, provamos que o sistema é exponencialmente estável. Finalmente, através dos métodos numéricos, confirmamos estas propriedades para o correspondente modelo discreto. Fazemos a modelagem numérica e obtemos gráficos que mostram a evolução da solução do modelo.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

**ASYMPTOTIC STABILIZATION AND CONTROL IN THE
PROBLEM OF SERIALY CONNECTED BEAMS**

Edgar Manuel Chipana Huamaní

November, 2010

Advisor: Jaime Edilberto Muñoz Rivera, D.Sc

Co-advisor: Santina de Fátima Arantes, D.Sc.

In this work, we study the model of a system of N beams interconnected with each other, where one of its ends is clamped and the other is submitted to a dissipative mechanism of frictional type. We show that model is well posed, using the semigroup theory, and using energy method, we prove that the system is exponentially stable. Finally, through numerical methods, we confirm these properties for the corresponding discrete model. We obtain the numerical modeling and graphics showing the evolution of the model solution.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Notação Básica de Alguns Espaços	1
1.2	Espaços L^p	2
1.3	Espaço de Distribuições	3
1.4	Espaços de Sobolev	4
1.5	Desigualdades Importantes	5
1.6	Semigrupos	7
1.7	Método da Energia	10
2	Modelagem Matemática da Equação de Vigas	13
2.1	Introdução	13
2.2	Modelos Matemáticos Unidimensionais para o Problema de Vigas .	15
2.2.1	Magnitudes Físicas	16
2.2.2	A Equação de Euler-Bernoulli	17
2.2.3	A Equação de Timoshenko	18
2.2.4	Principais Diferenças	20
2.3	Problema Modelo 1 - Uma Viga	21
2.4	Problema Modelo 2 - Conexão em Série de Vigas	22
2.5	Alguns Modelos Dissipativos	24
3	Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial para uma Viga	30
3.1	Introdução	30

3.2	Existência e Unicidade da Solução	31
3.2.1	Problema de Cauchy Abstrato	32
3.2.2	Espaço de Fase e Domínio do Operador	33
3.2.3	Equação Resolvente	34
3.2.4	Natureza do Operador A e Densidade do Domínio	37
3.2.5	Prova da Existência e Unicidade	40
3.3	Decrescimento da Energia Total	44
3.4	Decaimento Exponencial da Energia	45
4	Resultados Numéricos para uma Viga	51
4.1	Problema Numérico	51
4.2	Formulação Variacional	52
4.3	Discretização do Problema	52
4.4	Resultados Computacionais	54
5	Estabilização Exponencial Uniforme de Conexões em Série de Vigas	62
5.1	Introdução	62
5.2	Controlabilidade do Sistema	64
5.3	Existência e Unicidade	67
5.3.1	Problema de Cauchy Abstrato	68
5.3.2	Definição do Espaço de Fase e Domínio do Operador	69
5.3.3	Natureza do Operador	70
5.3.4	Equação Resolvente	72
5.4	Decaimento Exponencial da Energia	77
	Referências Bibliográficas	91

Apêndice

Lista de Figuras

Figura

2.1	Viga engastada.	15
2.2	Forças cortantes e momentos, no modelo Clássico.	17
2.3	Forças cortantes e momentos, no modelo Timoshenko.	19
2.4	Conexão em série de vigas.	22
4.1	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=12.5$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$	55
4.2	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$	55
4.3	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=50$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$	55
4.4	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=100$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$	56
4.5	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=3.125$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 8$	56
4.6	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 4$	57
4.7	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$	58
4.8	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=50$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$	58
4.9	Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=100$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$	58
4.10	(a) $u(L, t)$ (b) $E(t)$	59
4.11	Gráfico de $u(x, t)$, para $EI=223,2$ e $\gamma = 0,005$ em $0 \leq t \leq 4$	59
4.12	(a) $u(L, t)$ (b) $E(t)$	60
4.13	Gráfico de $u(x, t)$, para $EI=223,2$ e $\gamma = 0,01$ em $0 \leq t \leq 4$	60
4.14	(a) $u(L, t)$ (b) $E(t)$	61
4.15	Gráfico de $u(x, t)$, para $EI=223,2$ e $\gamma = 0,05$ em $0 \leq t \leq 4$	61

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados importantes a serem utilizados no decorrer do desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações, embora sejam omitidas por se tratarem de conceitos básicos, contarão com as suas respectivas referências bibliográficas.

1.1 Notação Básica de Alguns Espaços

Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n , denotaremos por

(i) $C(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é contínua}\}.$

(ii) Suporte de uma função contínua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ao conjunto denotado por $Supp(u)$ e definido como

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

(iii) $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega); u \text{ tem suporte compacto}\}.$

(iv) $C^1(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega); u \text{ é diferenciável e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega), \forall i, 1 \leq i \leq n \right\}.$

(v) $C^k(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega); \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \in C(\Omega), |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, |\alpha| \leq k \right\}.$

(vi) $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$

(vii) $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$

1.2 Espaços L^p

Neste trabalho, as integrais realizadas sobre o conjunto aberto Ω , são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções utilizadas.

Definição 1.2.1 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Definiremos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, tais que

$$\|u\|_{L^p} < \infty,$$

onde

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e $L^\infty(\Omega)$, ao conjunto de funções mensuráveis limitadas, isto é

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, u \text{ mensurável e } \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\},$$

onde

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ c \in \mathbb{R}, |u(x)| \leq c \text{ quase sempre} \}.$$

Nota 1.2.1 \mathbb{K} representa o corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Nota 1.2.2 As funções $\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas. Neste caso, é importante destacar que o espaço $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como sendo um conjunto de classes de equivalência de funções, onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω .

Nota 1.2.3 Os espaços $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach. Para o caso do espaço $L^2(\Omega)$, ele é também um espaço de Hilbert, com o produto interno usual da integral dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

onde

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Além disso, o espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$.

1.3 Espaço de Distribuições

Definição 1.3.1 (Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$) Sejam $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Diremos que φ_n converge para φ , se:

- (i) Existe $K \subset \Omega$, K compacto, tal que $Supp(\varphi_n - \varphi) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) A sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para φ sobre K em Ω , assim como as suas derivadas em todas as ordens.

Definição 1.3.2 (Funções Testes) O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência citada acima, é denominado de espaço das funções testes e é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.3.3 (Espaço de Distribuições) Todo funcional linear e contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado uma distribuição sobre Ω . O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e é chamado de espaço das distribuições sobre Ω , isto é,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, denotaremos $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado a φ .

Definição 1.3.4 (Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$) Diremos que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 1.3.1 $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))].

□

Definição 1.3.5 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Diz-se que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f|_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$. O conjunto $L^p_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

O funcional $T \equiv T_u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$, com $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi dx,$$

define uma distribuição sobre Ω .

Lema 1.3.1 (Du Bois Raymond) Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Então $T_u \equiv 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

1.4 Espaços de Sobolev

Seja um $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e conexo, com fronteira regular $\partial\Omega$. Definiremos o espaço Sobolev de ordem m , como sendo

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ é o operador derivação de ordem α no sentido distribucional, isto é

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Este espaço munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}}^p = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_{L^p}^p dx, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u(x)\|_{L^\infty},$$

é um espaço de Banach.

No caso de $p = 2$, o espaço é também de Hilbert, cuja norma e produto

interno são, respectivamente

$$(u, v)_{W^{m,2}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

e

$$\|u\|_{W^{m,2}}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u(x)\|_{L^2}^2 dx.$$

Neste caso, usamos a notação $H^m(\Omega)$, no lugar de $W^{m,2}(\Omega)$.

Para $m = 0$, $H^0(\Omega)$ é identificado pelo conjunto $L^2(\Omega)$.

O fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$, que é um subespaço de $W^{m,p}(\Omega)$.

No caso de $p = 2$, usamos a notação $H_0^m(\Omega)$, no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para $p = 2$, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$, será denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Identificando o espaço $L^2(\Omega)$ com seu dual, resulta que

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \approx (L^2(\Omega))' \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

com imersões contínuas e densas. Ver [Brézis (Madrid (1984))].

Nota 1.4.1 O espaço $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

1.5 Desigualdades Importantes

Lema 1.5.1 (Desigualdade de Young) Sejam $a, b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$. Então

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

Lema 1.5.2 (Desigualdade de Hölder) Seja $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ com

$$1 < p, q < \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}, \quad \forall u \in L^p(\Omega), \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Quando $p = 2$, a desigualdade de Hölder é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

Lema 1.5.3 (Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um domínio aberto limitado de \mathbb{R}^n . Então, existe uma constante positiva C , tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde C é denominada a constante de Poincaré.

No caso em que $p = 2$, temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

Teorema 1.5.1 (Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert. Dado $F \in H^*$ ($F : H \rightarrow \mathbb{R}$, linear e contínuo), existe um único $u \in H$, tal que

$$F(v) = \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

Teorema 1.5.2 (Lax-Milgram) Seja $B(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, onde H é um espaço de Hilbert com produto interno expresso por $(.,.)_H$. Se existem α e β , tais que

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H \quad (\text{continuidade de } B)$$

e

$$B(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \forall u, v \in H \quad (\text{coercividade de } B).$$

Então, para todo $F \in H^*$, existe um único $u \in H$, tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

Teorema 1.5.3 [Regularidade Elíptica] Sejam L um operador diferencial elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sendo $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições. Seja u solução de $Lu = f$, no sentido distribucional, com $f \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^{2m}(\Omega)$.

Prova: Ver [Brézis (Madrid (1984))]. □

1.6 Semigrupos

Definição 1.6.1 Considere X um espaço de Banach. Uma família de operadores $T(t) : X \rightarrow X$, onde $0 \leq t < +\infty$, é chamada de Semigrupo de Operadores se

i) $T(0) = I$

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo t e s , tal que $0 \leq t, s < \infty$.

Definição 1.6.2 Um semigrupo $T(t)$ em X , onde $0 \leq t < \infty$, é dito Semigrupo Fortemente Contínuo, ou de Classe C_0 , se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.6.3 O operador linear A , com domínio

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\},$$

é denominado gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$, se

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x |_{t=0}, \quad \forall x \in D(A).$$

Definição 1.6.4 Seja A , operador em X , um espaço de Banach. Denominaremos o conjunto resolvente de A , o conjunto

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; w \mapsto (\lambda I - A)^{-1} w \in \mathcal{L}(X) \},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) = \{ L : X \rightarrow X; L \text{ é linear e contínuo} \}.$$

Definição 1.6.5 Denominaremos de espectro de A o conjunto

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Definição 1.6.6 Um semigrupo $T(t)$ em X , onde $0 \leq t < \infty$, é dito Semigrupo de Contrações, se

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 1.6.7 Seja H um espaço de Hilbert. Diremos que o operador A é dissipativo, se

$$\operatorname{Re} (Au, u)_H \leq 0, \quad \forall u \in H.$$

Teorema 1.6.1 (Hille-Yosida) Um operador linear A , sobre um espaço de Banach X , é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações se, e somente se

- (i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.
- (ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))].

□

Teorema 1.6.2 (Lumer Phillips) Seja X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio denso em X .

- (i) Se A é dissipativo e existe um real $\lambda_0 > 0$, tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$. Então, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre X .
- (ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre X . Então, $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))]. □

Teorema 1.6.3 Seja A é um operador linear dissipativo em X . Se $\overline{D(A)} = X$ então, A é fechado.

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))]. □

Teorema 1.6.4 Seja A é um operador linear dissipativo, tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Então, se X é reflexivo, temos que $\overline{D(A)} = X$.

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))]. □

Teorema 1.6.5 Seja A um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Banach X , onde

$$\frac{dU}{dt} = AU, \tag{1.1}$$

$$U(0) = U_0. \tag{1.2}$$

Então, para todo U_0 , existe uma única solução $U(t)$ para o sistema (1.1)-(1.2), tal que

- (i) Se $U_0 \in X$, então $U(t) \in C(0, \infty; X)$.
- (ii) Se $U_0 \in D(A)$, então $U(t) \in C(0, \infty; D(A)) \cap C^1(0, \infty; X)$.

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))]. □

Teorema 1.6.6 Seja A um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t)$, no espaço de Banach X . Se para algum p , $1 \leq p < \infty$

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p dt < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Então, existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$, tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}.$$

Prova: Ver [Pazy (New York (1983))]. □

Teorema 1.6.7 Seja $S : X \rightarrow X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in \mathcal{L}(X)$, tal que

$$\|B\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|},$$

então $S + B$ é linear contínuo e inversível.

Prova: Ver [Rivera (Rio de Janeiro (2007))]. □

Teorema 1.6.8 Seja X um espaço de Banach e A um operador linear dissipativo, com domínio denso em X . Se $0 \in \rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Prova: Ver [Rivera (Rio de Janeiro (2007))]. □

1.7 Método da Energia

Este método consiste em construir um funcional \mathcal{L} equivalente a energia, isto é, existem constantes positivas C_1 e C_2 , tais que

$$C_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_2 E(t)$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \lambda \mathcal{L}(t) \leq 0.$$

De onde, multiplicando por $e^{\lambda t}$, segue que

$$e^{\lambda t} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \lambda e^{\lambda t} \mathcal{L}(t) \leq 0$$

$$\frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} \mathcal{L}(t)\} \leq 0.$$

Passando integral, temos

$$e^{\lambda t} \mathcal{L}(t) - e^{\lambda 0} \mathcal{L}(0) \leq 0.$$

Ou seja

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\lambda t}.$$

Assim

$$C_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\lambda t} \leq C_2 E(0)e^{-\lambda t}.$$

Isto é, existe uma constante $C = \frac{C_2}{C_1} > 0$, tal que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}.$$

Resultado que nos leva a concluir, que a solução decai exponencialmente a zero quando tempo tende ao infinito.

Nota 1.7.1 Considerando A um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t)$, onde

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt < \infty, \quad \forall x \in X,$$

com norma do espaço de fase X , sendo a norma da energia, isto é

$$\|U\|_X^2 = E(t).$$

Então, pelo Teorema 1.6.6, existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$, tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}.$$

Logo, da desigualdade

$$\|T(t)U_0\|_X^2 \leq \|T(t)\|^2 \|U_0\|_X^2.$$

Teremos

$$\frac{E(t)}{E(0)} \leq \|T(t)\|^2 \leq M^2 e^{-2\mu t}.$$

Em consequência disso, segue

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}, \text{ onde } C = M^2 > 0 \text{ e } \lambda = 2\mu > 0.$$

Capítulo 2

Modelagem Matemática da Equação de Vigas

2.1 Introdução

Embora desde a antiguidade, com os egípcios, os gregos e os romanos, a humanidade sempre se mostrou interessada na pesquisa por diversos tipos de materiais, usados em estruturas de construção, criando e utilizando princípios estatísticos, para o estudo de resistência dos materiais. Estes registros infelizmente foram perdidos e destruídos na Idade Média, sendo recuperados apenas com a chegada do Renascimento, com os estudos realizados por Leonardo da Vinci (1452-1519), mas fatos históricos relatam que os primeiros estudos sobre análise estrutural e resistência dos materiais, como ciência, correspondem a Galileu Galilei (1564-1642), a quem lhe foi atribuído inúmeros documentos de pesquisa nessa área, assim como, a elaboração das primeiras publicações sobre o problema de viga engastada, com carga própria e adicional, embora com resultados incorretos, serviram como estímulo para outras pesquisas na época. Robert Hooke (1635-1703) fez importantes contribuições sobre o estudo da elasticidade dos materiais formulando a conhecida lei que leva o seu nome. Edme Mariotte (1654-1684) fez estudos de elasticidade sobre fibras de uma viga, observando dilatação e compressão de alguns elementos no momento da flexão, levantando o conceito da existência de uma linha neutra que divide a zona comprimida da zona tracionada em uma viga. Outros estudos

foram feitos sobre flexões de vigas, destacando-se entre eles, as contribuições dadas pela família Bernoulli: Jacob (1654-1705) voltou a estudar o problema de Galileu, fazendo a suposição de que seções planas numa viga continuam planas durante a sua flexão, infelizmente sem muitos resultados significativos, devido a seu pouco interesse nessa área. Ao contrário dele, o seu irmão Johann (1667-1748) aprofundou-se mais no assunto, levando a enunciar o "Princípio dos Deslocamentos Virtuais", que ainda hoje é usado no estudo de deflexões elásticas em estruturas, Johann estimulou outros estudiosos: como o seu discípulo Leonhard Euler (1707-1783) e seu filho Daniel Bernoulli (1700-1782), os quais fizeram amplos estudos sobre a curvatura elástica de barras, vigas e colunas flexionadas, que ainda usamos na atualidade. Vários outros pesquisadores fizeram importantes contribuições nessa área como: Charles Coulomb (1736-1806), Benoit Paul E. Clapeyron (1799-1864), Adhemar J. C. de Barré de Saint-Venant (1797-1886), com publicações sobre Teoria de Elasticidade, Agustín-Louis Cauchy (1789-1857), Otto Christian Mohr (1835-1918), que desenvolveu um método gráfico para representar o estado de tensões em um ponto, entre outros, que aperfeiçoaram formulações aplicadas no estudo do problema de vigas, como o célebre ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972), que trouxe uma nova formulação para este problema.

Neste capítulo, faremos um estudo dos dois principais modelos unidimensionais usados na mecânica estrutural do estudo de comportamento de vigas. Faremos um comentário sobre as principais vantagens e desvantagens técnicas pela escolha de um dos modelos. Citaremos, também, como motivação, alguns trabalhos existentes na literatura que investigam a estabilidade do sistema com agentes externos de amortecimento, como por exemplo, a termoelasticidade, atuando sobre uma viga e uma composição da mesma.

2.2 Modelos Matemáticos Unidimensionais para o Problema de Vigas

Dois modelos matemáticos são muito usados na atualidade, para o estudo de deformações de uma viga unidimensional. São eles: o modelo de Euler-Bernoulli, também chamada de Teoria Clássica de Barras e o modelo de Timoshenko. O primeiro deles, na sua modelagem, desconsidera a hipótese do efeito da inércia de rotação e a deformação de cisalhamento da viga, que são considerados no segundo modelo. Embora existam estas diferenças, ambos os modelos apresentaram bons resultados de aproximação, com o problema real.

Antes de fazer o estudo destes modelos, faremos uma exposição dedutiva sobre a relação elástica existente entre o momento fletor e a deflexão de uma viga nas condições de Euler-Bernoulli. Sendo assim, consideremos uma viga engastada \overline{AB} , como mostra a Figura 2.1, onde para um melhor entendimento geométrico, tomaremos apenas $u \times x$ e simplificaremos a notação, usando $u = u(x)$, como sendo a função que descreve o deslocamento transversal da viga.

Figura 2.1: Viga engastada.

Sabemos pela definição da curvatura de flexão σ , que

$$\sigma = \frac{1}{r}, \text{ onde } r \text{ é o raio de curvatura.}$$

15

Além disso, da análise infinitesimal do elemento $\overline{P_1P_2}$, podemos observar que

$$ds = rd\theta \quad \text{e} \quad dx \approx ds.$$

De onde, sob condições especiais, por se tratar de pequenas flexões, teremos

$$\sigma = \frac{d\theta}{dx}.$$

Assim como

$$tg\theta = \frac{du}{dx}, \quad \text{onde } \theta \approx tg\theta \text{ para pequenos ângulos.}$$

Logo, a curvatura de flexão será dada por

$$\sigma = \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Finalmente, pela Lei de Hooke para materiais elásticos, temos

$$\sigma = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI},$$

onde M é o momento fletor e EI a rigidez de flexão, composta pelo módulo de Young E e o momento de inercia I da viga. Assim, segue a seguinte relação elástica

$$M = EI \frac{d^2u}{dx^2}. \tag{2.1}$$

A seguir citaremos a interpretação física de algumas expressões matemáticas que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

2.2.1 Magnitudes Físicas

No estudo da equação de vigas, destacamos algumas expressões mais usadas, cuja interpretação física é mostrada na tabela abaixo

u	Deflexão transversal
$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$	Velocidade transversal
$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x$	Rotação
$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{xt}$	Velocidade angular
$M = -E_i I_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -E_i I_i u_{xx}$	Momento fletor (cortante)
$\frac{\partial M}{\partial t} = -E_i I_i \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = -E_i I_i u_{xxt}$	Taxa de variação do momento
$V = -E_i I_i \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -E_i I_i u_{xxx}$	Cisalhamento
$\frac{\partial V}{\partial t} = -E_i I_i \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} = -E_i I_i u_{xxx t}$	Taxa de cisalhamento.

2.2.2 A Equação de Euler-Bernoulli

Para deduzir esta equação, analisaremos primeiro as forças e momentos, que atuam sobre um elemento de viga, como está representado na Figura 2.2, onde seções planas, inicialmente perpendiculares ao eixo do elemento, permanecerão planas e perpendiculares após a sua deformação. Consideremos, também, $M = M(x, t)$ e $V = V(x, t)$ como sendo, o momento fletor e a força de cisalhamento, respectivamente.

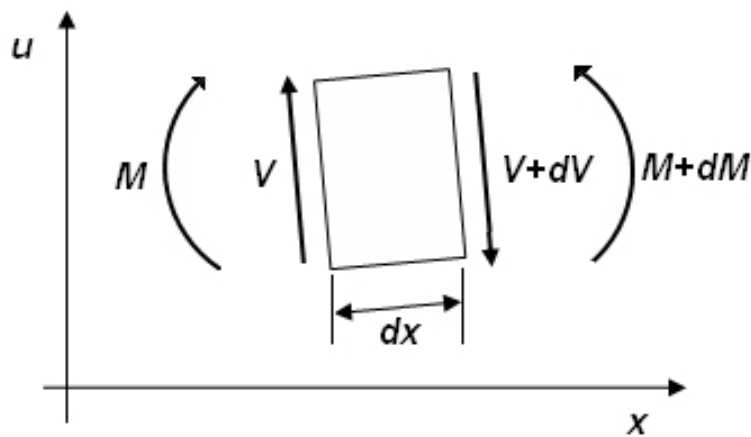


Figura 2.2: Forças cortantes e momentos, no modelo Clássico.

Fazendo uma análise infinitesimal de corpo livre, das forças verticais sobre o

elemento, teremos

$$-(V + dV) + V = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

onde ρ é a densidade de massa e A é a área da seção transversal da viga. Além disso, da equação do momento resultante, em relação à face direita do elemento, deduzimos que

$$(M + dM) - V dx - M = 0.$$

De onde, obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V. \quad (2.3)$$

Finalmente, da relação elástica

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

substituída em (2.3) e posteriormente o resultado em (2.2), seguirá a equação

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, T), \quad (2.4)$$

que corresponde ao modelo clássico de Euler-Bernoulli para uma viga, onde m representa a massa por unidade de comprimento.

2.2.3 A Equação de Timoshenko

Para deduzir esta equação, consideraremos que a viga apresenta uma deformação gerada pelo cisalhamento, onde a reta central do elemento da viga não coincide com a perpendicular à face da seção transversal do elemento, como é mostrado na Figura 2.3, onde o ângulo de inclinação laminar α é igual à inclinação

da curvatura ϕ menos a inclinação do eixo central $\frac{\partial u}{\partial x}$, isto é,

$$\alpha = \phi - \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Neste caso, existem duas relações elásticas para esta viga, que são

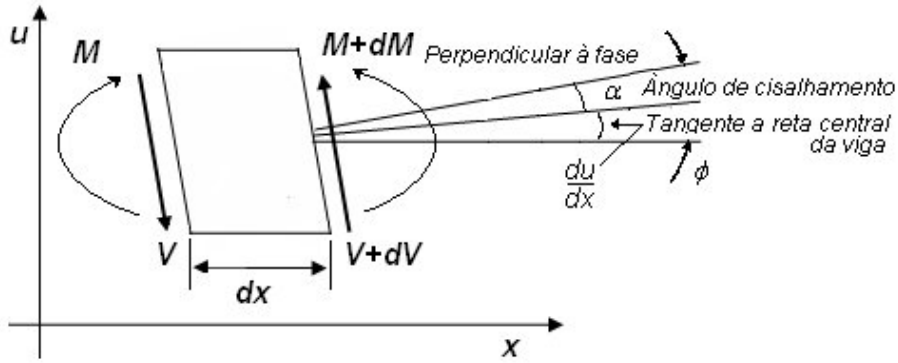


Figura 2.3: Forças cortantes e momentos, no modelo Timoshenko.

$$\phi - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V}{kAG} \quad (2.5)$$

e

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2.6)$$

onde G e k são, respectivamente, o módulo de rigidez e o fator de mudança de deformação da seção transversal.

É importante destacar que a relação elástica dada pela equação (2.1), representa um caso particular destas duas relações, onde o módulo da rigidez do material é extremamente grande, tornando o ângulo de inclinação α praticamente nulo.

Completando, temos duas outras equações dinâmicas, que são

$$-V + \frac{\partial M}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{momento}) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{força}). \quad (2.8)$$

Logo, substituindo (2.5) e (2.6) em (2.7) e (2.8), respectivamente, teremos o seguinte sistema acoplado

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + kAG \left[\phi - \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[kAG \left(\phi - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.10)$$

que corresponde ao modelo de Timoshenko para uma viga, onde se descreve o equilíbrio do torque rotacional e o equilíbrio das forças transversais, por unidade de comprimento.

Agora, se consideramos a barra uniforme e a sua seção transversal permanecendo constante, eliminando ϕ nas duas equações, podemos ter

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k\rho IG}{(E + kG)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Esta nova equação apresenta, respectivamente, expressões relacionadas ao movimento transversal, a força laminar, ao movimento rotacional e ao momento de torção. Ficando assim evidente, que a equação de Euler-Bernoulli é um caso especial desta equação, onde os termos rotacional e laminar são desconsiderados.

2.2.4 Principais Diferenças

Como foi observado, o modelo de Timoshenko é aparentemente mais completo do que o modelo clássico de Euler-Bernoulli, pois considera as deformações geradas pelo cisalhamento e a inércia de rotação. Embora exista esta diferença, ambos modelos são muito usados em pesquisas sobre vibrações de estruturas, pois apresentam bons resultados numéricos, nas aproximações que descrevem o comportamento de deformação de uma viga.

O estudo das soluções numéricas através do método de elementos finitos, no modelo Timoshenko é menos complexo, já que podem ser usados elementos lineares, tanto no deslocamento como nas rotações, pois ambos podem ser

tratados de forma independente. Por outro lado, elementos finitos para o modelo Euler-Bernoulli, requer da utilização de polinômios cúbicos, pois a rotação não é considerada independente.

Com estas considerações, podemos dizer que a equação clássica de Euler-Bernoulli, que será usada neste trabalho, apresenta evidentemente, menor complexidade analítica no estudo de suas principais propriedades, mas acarretará uma maior dificuldade, com relação ao estudo numérico.

2.3 Problema Modelo 1 - Uma Viga

Para resolver o problema de vigas, usando o modelo clássico de Euler-Bernoulli

$$mu_{tt} + EIu_{xxxx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, T),$$

é necessário incorporar quatro condições de contorno, pois existem derivadas espaciais até a quarta ordem, assim como duas condições iniciais, devido as derivadas temporais, que correspondem a configuração inicial e à velocidade inicial da viga, que são

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad (0, L).$$

As condições de contorno são decorrentes do problema analisado. Para nosso caso, estudaremos uma viga engastada na extremidade esquerda e livre na extremidade direita, de onde decorrem as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, T).$$

Além disso, consideraremos a existência de um estabilizador externo, atuando na extremidade direita, proporcional a velocidade nesse extremo.

$$u_{xxx}(L, t) = \gamma u_t(L, t) \quad \text{em} \quad (0, T).$$

Neste trabalho, mostraremos que com esta condição, podemos obter uma

forte estabilização exponencial uniforme, resultado que servirá como motivação para o problema mais complexo de N vigas.

Nota 2.3.1 Considerando S a área da seção transversal da viga, o nosso modelo clássico de Euler-Bernoulli, pode também ser dado por

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, T),$$

onde ρ é a massa específica e $\alpha = \frac{EI}{S}$ é a rigidez de flexão por unidade de área.

2.4 Problema Modelo 2 - Conexão em Série de Vigas

Nesta subseção, faremos uma exposição do modelo matemático unidimensional para uma composição em série de vigas, que será estudado neste trabalho, cujo esboço da sua representação geométrica é dada pela seguinte figura

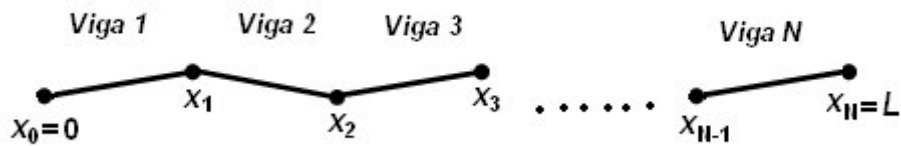


Figura 2.4: Conexão em série de vigas.

Consideraremos que esta composição pode ser definida como sendo uma junção de N segmentos

$$J_i = [x_{i-1}, x_i], \quad \text{onde} \quad x_{i-1} < x_i \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq N.$$

Assumiremos que cada elemento é uniforme, com densidade linear de massa m_i e rigidez flexão $E_i I_i$ constantes, em cada segmento, onde cada viga satisfaz a equação diferencial parcial

$$m_i u_{tt} + E_i I_i u_{xxxx} = 0 \quad \text{sobre} \quad (x_{i-1}, x_i), \quad \text{para} \quad t > 0,$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{em } 0 \leq x \leq L,$$

e condições de contorno determinadas pelo tipo de acoplamento entre as vizinhanças de seus elementos.

O equilíbrio nas junções lineares x_i , dependerá do modelo mecânico adotado, nas conexões, os quais definirão o comportamento de certas variáveis físicas em x_i^- e x_i^+ . Em nosso caso, consideraremos apenas dois tipos de junções: o suporte rígido e ângulo guia, que se caracterizam por gerar descontinuidade em uma das variáveis de estado u , θ , M ou V , deixando as outras três contínuas, como é mostrado na tabela abaixo.

Tipo de Junção	Variáveis Descontínuas	Variáveis Contínuas
<i>Suporte Rígido</i>	V	u, θ, M
<i>Ângulo Guia</i>	M	u, θ, V

Sendo assim, considerando que em x_i haja um suporte rígido de junção com controle $w_{0i}(t)$, teremos as seguintes condições de contorno intermediárias em x_i

$$u(x_i^-, t) = u(x_i^+, t)$$

$$u_x(x_i^-, t) = u_x(x_i^+, t)$$

$$-E_i I_i u_{xx}(x_i^-, t) = -E_{i+1} I_{i+1} u_{xx}(x_i^+, t), \quad \text{isto é, } M^- = M^+$$

$$E_i I_i u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}(x_i^+, t) = w_{0i}(t) \quad \text{para } 1 \leq i \leq N - 1.$$

Para o caso de junção com ângulo guia, teremos no lugar das duas últimas condições

$$- [E_i I_i u_{xx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xx}(x_i^+, t)] = w_{1i}(t)$$

e

$$E_i I_i \cdot u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} \cdot u_{xxx}(x_i^+, t) = 0, \quad \text{isto é, } M^- = M^+; \quad 1 \leq i \leq N - 1.$$

Em nosso trabalho, faremos um estudo do primeiro caso, correspondente a junção com suporte rígido, onde procuraremos condições para obter uma forma forte de estabilização exponencial uniforme, com controladores em série, nas junções e com apenas um estabilizador, formado pela velocidade resposta, considerado no final desta série, no termo $x_N = L$, dado por

$$E_N I_N u_{xxx}(L, t) = k_{0N} u_t(L, t) \quad \text{onde } k_{0N} > 0.$$

Para o segundo caso, o estudo segue de forma análoga.

2.5 Alguns Modelos Dissipativos

A partir dos modelos básicos apresentados, uma diversidade de modelos sobre estruturas elásticas e flexíveis foram já estudados, destacando-se aqueles onde existem decaimento da energia no sistema, estes tipos de modelos são denominados dissipativos. A procura por mecanismos dissipativos naturais tem despertado grande interesse de pesquisadores na atualidade, com estudos sobre supressão de vibrações e ruídos em instrumentos sensíveis, usados na indústria aeronáutica e na automotiva, dentre estes mecanismos dissipativos destacam-se: os efeitos provocados pela mudança de temperatura no material, conhecido como termoelasticidade, efeitos físicos da memória do sistema, viscoelasticidade e magnetoelasticidade, amortecimentos por atrito e por contato, entre outros.

Existem na literatura diversos sistemas dissipativos do tipo Euler-Bernoulli, onde o principal foco de estudo consiste em observar as propriedades assintóticas da solução do sistema, com a finalidade de obter um controle sobre os mesmos, analisando o tipo de taxa de decaimento que pode ser obtido.

Descreveremos, por exemplo, a formulação de um modelo termoelástico, onde

a alta frequência de vibração da viga, gera uma quantidade considerável de calor. Neste caso, a tensão vertical da viga é dada por

$$\sigma(x, t) = -\frac{EI}{S} u_{xxx} - \mu\phi_x,$$

onde ϕ é campo de temperatura da viga, $\mu > 0$ é a constante de acoplamento, que é proporcional ao coeficiente de expansão térmica. Podemos, também, observar a existência do termo de variação térmica $\mu\phi_x$ que aparece devido as altas frequências de vibrações da viga.

Além disso, o fluxo de calor é dado por

$$q(x, t) = k\phi_x + \mu u_{xt},$$

onde k é a condutividade térmica. Com isto, a equação do movimento ficará definida por

$$\rho u_{tt} - \sigma_x = f(x, t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, T).$$

Que implica em

$$\rho u_{tt} + \frac{EI}{S} u_{xxxx} + \mu\phi_{xx} = f(x, t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, T).$$

Além disso, pela equação da energia

$$c\phi_t - q_x(x, t) = g(x, t),$$

onde c é o calor específico e g a fonte externa de calor, segue

$$c\phi_t - k\phi_{xx} - \mu u_{xxt} = g(x, t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, T).$$

Com estes resultados, podemos concluir que o modelo termoelástico básico,

para uma viga clássica, será definido por

$$\rho u_{tt} + \frac{EI}{S} u_{xxxx} + \mu \phi_{xx} = f(x, t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, T),$$

$$c\phi_t - k\phi_{xx} - \mu u_{xxt} = g(x, t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, T),$$

onde as condições iniciais e de contorno serão decorrentes da natureza do problema analisado.

Existem inúmeras pesquisas que usam este modelo termoelástico básico, citaremos alguns trabalhos, como por exemplo: [Arantes e Rivera (2008)], onde se estuda o problema termoelástico, que descreve as vibrações dinâmicas de uma viga engastada em um de seus extremos e livre no outro, onde existem dois obstáculos estacionários g_1 e g_2 , na parte inferior e superior, respectivamente. Este problema é definido pelas equações

$$au_{tt} + u_{xxxx} + b\phi_{xx} = f \quad \text{em } (0, 1) \times (0, +\infty),$$

$$\phi_t - \phi_{xx} - cu_{xxt} = g \quad \text{em } (0, 1) \times (0, +\infty).$$

Com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \text{em } (0, 1),$$

condições de contorno

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

$$\phi(1, t) = \phi_x(0, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty)$$

e condições clássicas de não penetração de Signorini, no extremo direito

$$g_1 \leq u(1, t) \leq g_2 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

$$\sigma(1, t) > 0 \quad \text{se} \quad u(1, t) = g_1,$$

$$\sigma(1, t) < 0 \quad \text{se} \quad u(1, t) = g_2,$$

$$\sigma(1, t) = 0 \quad \text{se} \quad g_1 < u(1, t) < g_2.$$

Os autores conseguem mostrar a existência da solução e o decaimento exponencial do mesmo.

Considerando o mesmo modelo termoelástico básico temos, também, o trabalho desenvolvido por [Rivera et al. (2008)]. Eles investigaram o comportamento dinâmico unidimensional entre duas vigas termoelásticas engastadas, de comprimento L_0 e $L - L_0$, em contato unilateral, com obstáculos dinâmicos g_1 e g_2 , na parte superior e inferior, respectivamente, que estão fixos a viga do extremo direito. Este modelo é representado pelas equações

$$u_{tt} + k_1 u_{xxxx} + m_1 \phi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L_0) \times (0, T),$$

$$c\phi_t - \tau_1 \phi_{xx} - m_1 u_{xxt} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L_0) \times (0, T),$$

$$v_{tt} + k_2 v_{xxxx} + m_2 \phi_{xx} = 0 \quad \text{em} \quad (L_0, L) \times (0, T),$$

$$c\varphi_t - \tau_2 \varphi_{xx} - m_2 v_{xxt} = 0 \quad \text{em} \quad (L_0, L) \times (0, T).$$

Com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \text{em} \quad (0, L_0),$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{em} \quad (L_0, L),$$

condições de contorno

$$u(0, t) = u_x(0, t) = \phi_x(0, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, T),$$

$$v(L, t) = v_x(L, t) = \varphi_x(L, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, T),$$

$$u_{xx}(L_0, t) = \phi(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, T),$$

$$v_{xx}(L_0, t) = \varphi(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, T),$$

e condições de Signorini

$$v(L_0, t) - g_2 \leq u(L_0, t) \leq v(L_0, t) + g_1 \quad \text{em } (0, T),$$

$$\sigma(t) = \sigma_1(L_0, t) = \sigma_2(L_0, t), \quad \text{em } (0, T),$$

onde

$$\sigma_1(L_0, t) = -k_1 u_{xxx}(L_0, t) - m_1 \phi_x(L_0, t),$$

$$\sigma_2(L_0, t) = -k_2 v_{xxx}(L_0, t) - m_2 \varphi_x(L_0, t),$$

isto é

$$\sigma(t) > 0 \quad \text{se } v(L_0, t) - g_2 = u(L_0, t),$$

$$\sigma(t) < 0 \quad \text{se } u(L_0, t) = v(L_0, t) + g_1,$$

$$\sigma(t) = 0 \quad \text{se } v(L_0, t) - g_2 < u(L_0, t) < v(L_0, t) + g_1.$$

Os autores, também, conseguem mostrar a existência e decaimento exponencial da solução.

Em ambos exemplos, a prova da unicidade é ainda uma questão em aberto.

Finalizando, citaremos o trabalho de [Oquendo e Rivera (2002)]. Eles estudam o comportamento dinâmico de uma viga unidimensional composta por dois materiais, um deles sensível a diferenças térmicas, enquanto o outro é indiferente a variações de temperatura, o primeiro de comprimento L_0 e o outro $L - L_0$, respectivamente. O modelo matemático que descreve o comportamento dessa viga é definido pelas equações

$$\rho_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} + \varepsilon \phi_{xx} = 0 \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, +\infty),$$

$$\rho_0\phi_t - \beta_0\phi_{xx} - \varepsilon u_{xxt} = 0 \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, +\infty),$$

$$\rho_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} = 0 \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, +\infty).$$

Com condições de contorno

$$u(0, t) = u_x(0, t) = v(L, t) = v_x(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

condições de transporte

$$u(L_0, t) - v(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

$$u_x(L_0, t) - v_x(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) - \beta_2 v_{xx}(L_0, t) = 0 \quad \text{em } (0, +\infty),$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) - \beta_2 v_{xxx}(L_0, t) = -\varepsilon\phi_x(L_0, t) \quad \text{em } (0, +\infty),$$

e dados iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \text{em } (0, L_0),$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{em } (L_0, L).$$

Os autores provam a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução do sistema, independente do comprimento L_0 . Com isso, eles mostraram que o material composto herda as propriedades assintóticas da parte termoelástica, indiferentemente do tamanho deste material na composição.

Capítulo 3

Existência, Unicidade e Decaimento

Exponencial para uma Viga

3.1 Introdução

Neste capítulo, faremos um estudo analítico sobre as principais propriedades, do modelo Euler-Bernoulli, para uma viga engastada de comprimento L , que possui um único estabilizador, proporcional a velocidade, como comentado no capítulo 2, cujo modelo completo é dado por

$$\begin{aligned} mu_{tt} + EIu_{xxxx} &= 0 && \text{em } (0, L) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) &= 0 && \text{em } (0, +\infty) \\ u_x(0, t) &= 0 && \text{em } (0, +\infty) \\ u_{xx}(L, t) &= 0 && \text{em } (0, +\infty) \\ u_{xxx}(L, t) &= \gamma u_t(L, t) && \text{em } (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) && \text{em } (0, L), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde a densidade de massa m e a rigidez de flexão EI do material são considerados constantes.

Mostraremos a existência e unicidade de solução do sistema (3.1), assim como a característica dissipativa da energia e o decaimento exponencial da solução.

Para provar a existência e unicidade, faremos uso do método de semigrupos de operadores lineares, que consiste em transformar o sistema (3.1) no problema

equivalente de Cauchy abstrato

$$\frac{dU}{dt} = AU$$

$$U(0) = U_0,$$

onde verificaremos as condições impostas no Teorema de Hille-Yosida, com relação ao operador A , encontrado neste sistema, de tal forma a considerá-lo um gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$, garantindo assim que $U(t) = T(t)U_0$ representará a solução da equação de Cauchy.

Na demonstração do decaimento exponencial da solução do sistema (3.1), usaremos a técnica de multiplicadores, conhecida também como método da energia. Provaremos que a energia do sistema, definida por

$$E(t) = \int_0^L \frac{1}{2} [m |u_t|^2 + EI |u_{xx}|^2] dx,$$

decai exponencialmente, isto é, que existem constantes reais positivas C e γ , tais que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}.$$

3.2 Existência e Unicidade da Solução

Como já foi comentado, para mostrar a existência e unicidade da solução do sistema (3.1), faremos uso do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.6.1) e do Teorema 1.6.5, citados no Capítulo 1, onde verificaremos as condições necessárias e suficientes, para que o operador linear associado ao problema, seja um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, o que nos garante a existência e unicidade procurada. Com esse objetivo, primeiramente transformaremos nosso sistema num problema de Cauchy abstrato, definiremos o operador associado, o espaço de fase onde deverá atuar o semigrupo, assim como o domínio deste operador. Posteriormente, estudaremos a natureza do resolvente $\rho(A)$ e faremos uma análise sobre as condições a serem verificadas no problema, resultados que classificaremos como

Lemas da demonstração principal.

3.2.1 Problema de Cauchy Abstrato

Com a finalidade de melhorar analiticamente o problema (3.1), tomaremos $\frac{EI}{m} = \alpha$. Assim, teremos a equação

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} = 0,$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad (0, L).$$

De onde, considerando $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$, segue

$$\frac{d}{dt}U = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha(\cdot)_{xxxx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}.$$

Portanto, podemos reescrever a primeira equação do sistema (3.1), pelo seguinte sistema diferencial de primeira ordem no tempo

$$\frac{dU}{dt} = AU$$

$$U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, nosso operador linear A , associado ao problema será definido por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha(\cdot)_{xxxx} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

3.2.2 Espaço de Fase e Domínio do Operador

Pela definição dada a energia do sistema, fica evidente a escolha do seguinte espaço de fase

$$X = X_1 \times X_2 = V \times H,$$

onde

$$V = \{u \in H^2(0, L); u(0) = u_x(0) = 0\} \quad \text{e} \quad H = L^2(0, L).$$

Assim, da definição do domínio de um operador e das condições de nosso problema, segue

$$D(A) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X; \quad AU \in X, \quad u_{xxx}(L) = \gamma v(L), \quad u_{xx}(L) = 0 \right\}.$$

Como

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha(\cdot)_{xxxx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\alpha u_{xxxx} \end{pmatrix}.$$

Temos

$$D(A) = \{u \in V, v \in H; v \in V, u_{xxxx} \in H, u_{xxx}(L) = \gamma v(L), u_{xx}(L) = 0\}.$$

Logo, nosso domínio será dado por

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X; u \in H^4(0, L) \cap V, v \in V, u_{xxx}(L) = \gamma v(L), u_{xx}(L) = 0 \right\}.$$

Com essas definições não é difícil ver que $D(A)$ é denso em X , assim como, o operador A é fechado, pois todo operador diferencial é fechado no sentido das distribuições. Embora na literatura, sejam considerados resultados relevantes, neste trabalho confirmaremos estas afirmações.

3.2.3 Equação Resolvente

Usando a definição dada ao conjunto resolvente de um operador, encontraremos a equação que define λ .

Tomando

$$U = (\lambda I - A)^{-1} F,$$

temos

$$(\lambda I - A)U = F,$$

que implica em

$$\lambda U - AU = F.$$

De onde, considerando

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A) \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X,$$

teremos as equações

$$\lambda u - v = f \tag{3.3}$$

$$\lambda v + \alpha u_{xxxx} = g. \tag{3.4}$$

Eliminando v nas equações acima e usando as condições de contorno dadas em (3.1), teremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \lambda^2 u + \alpha u_{xxxx} &= g + \lambda f \quad \text{em} \quad (0, L) \\ u(0) &= 0 \\ u_x(0) &= 0 \\ u_{xx}(L) &= 0 \\ u_{xxx}(L) &= \gamma \lambda u(L) - \gamma f(L), \end{aligned} \tag{3.5}$$

que corresponde a equação resolvente do operador A .

Com isto, o processo de encontrar os valores para λ , de tal forma a pertencer

ao resolvente $\rho(A)$, decorrerá da análise da boa colocação deste sistema.

A seguir, citaremos um Lema que nos garante a existência e unicidade do sistema 3.5, onde usaremos basicamente o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5.2) e o Teorema da Regularidade Elíptica (Teorema 1.5.3).

Lema 3.2.1 Para todo λ em \mathbb{R} , com $\lambda \geq 0$, existe uma única solução para o sistema (3.5), onde

$$u \in V = \{u \in H^2(0, L); u(0) = u_x(0) = 0\}, \quad f \in V \quad \text{e} \quad g \in L^2(0, L).$$

Prova: Faremos inicialmente a formulação variacional do problema.

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.5) por $w \in V$ e integrando de 0 a L , temos

$$\int_0^L \lambda^2 u w dx + \alpha u_{xxx} w|_0^L - \alpha \int_0^L u_{xxx} w_x dx = \int_0^L [g + \lambda f] w dx$$

$$\int_0^L \lambda^2 u w dx + \alpha u_{xxx}(L) w(L) - \alpha u_{xx} w|_0^L + \alpha \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx = \int_0^L [g + \lambda f] w dx.$$

De onde, usando as condições iniciais, obtemos

$$\int_0^L \lambda^2 u w dx + \alpha \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx + \alpha \gamma \lambda u(L) w(L) = \int_0^L [g + \lambda f] w dx + \alpha \gamma f(L) w(L).$$

Logo, tomando o funcional $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$B(u, w) = \int_0^L \lambda^2 u w dx + \alpha \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx + \alpha \gamma \lambda u(L) w(L),$$

segue claramente, que B é bilinear.

Considerando em V , o produto interno

$$(u, w)_V = \int_0^L u w dx + \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx + u(L) w(L)$$

e sua norma induzida

$$\|u\|_V^2 = \int_0^L |u|^2 dx + \int_0^L |u_{xx}|^2 dx + |u(L)|^2,$$

para $\lambda \geq 0$, teremos que

$$|B(u, w)| \leq \beta_1 \left| \int_0^L u w dx + \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx + u(L)w(L) \right| = \beta_1 |(u, w)_V|,$$

onde $\beta_1 = \max \{\lambda^2, \alpha, \alpha\gamma\lambda\} > 0$. Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluimos que B é contínuo, isto é

$$|B(u, w)| \leq \beta_1 \|u\|_V \|w\|_V, \quad \forall u, w \in V \text{ e } \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, tomando $\beta_2 = \min \{\lambda^2, \alpha, \alpha\gamma\lambda\} > 0$, com $\lambda \geq 0$, temos

$$B(u, u) = \int_0^L \lambda^2 |u|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx + \alpha\gamma\lambda |u(L)|^2 \geq \beta_2 \|u\|_V^2,$$

isto é

$$B(u, u) \geq \beta_2 \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V \text{ e } \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

De onde segue, a coercividade de B . Por outro lado, definindo $F : V \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$F(w) = \int_0^L [g + \lambda f] w dx + \alpha\gamma f(L)w(L),$$

temos imediatamente que F é linear e contínua.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5.2), existe uma única $u \in V$, tal que

$$B(u, w) = F(w).$$

Em consequência disso, temos

$$\int_0^L \lambda^2 u w dx + \alpha \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx + \alpha\gamma\lambda u(L)w(L) = \int_0^L [g + \lambda f] w dx + \alpha\gamma f(L)w(L).$$

Logo, como $C_0^\infty(0, L) \subset V$, em particular para todo $w \in C_0^\infty(0, L)$, segue

$$\int_0^L \lambda^2 u w dx + \int_0^L u_{xx} w_{xx} dx = \int_0^L [g + \lambda f] w dx,$$

que implica em

$$\int_0^L [\lambda^2 u + u_{xxxx}] w = \int_0^L [g + \lambda f] w dx, \quad \forall w \in C_0^\infty(0, L).$$

Assim, concluímos que existe uma única $u \in V$, tal que

$$\lambda^2 u + u_{xxxx} = g + \lambda f, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

□

Nota 3.2.1 Fazendo uso do Teorema da Regularidade Elíptica (Teorema 1.5.3), no operador elíptico $[\lambda^2 + (\cdot)_{xxxx}]$, concluímos também, que $u \in H^4(0, L)$, sendo assim, $u \in V \cap H^4(0, L)$. Logo, como u satisfaz as condições de contorno em (3.5), teremos

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A).$$

Portanto, para todo $F \in X$, existirá um único $U \in D(A)$, tal que

$$\lambda U - AU = F, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Nota 3.2.2 Pelo Lema 3.2.1, observamos que o sistema (3.5) possui boa colocação, isto é, a equação resolvente é válida para todo $\lambda \geq 0$, assim concluímos que $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$.

3.2.4 Natureza do Operador A e Densidade do Domínio

Analisaremos se o operador autônomo A , definido em (3.2) é dissipativo, possui domínio denso e é fechado. Com este objetivo, apresentaremos os seguintes Lemas.

Lema 3.2.2 O operador linear A , definido em (3.2), é dissipativo.

Prova: Considerando o produto interno, no espaço de Hilbert X , como sendo

$$(F, U)_X = \left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_X = \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx + \int_0^L g \overline{v} dx.$$

Para todo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, segue

$$(AU, U)_X = \left(\begin{pmatrix} v \\ -\alpha u_{xxxx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_X$$

que implica em

$$(AU, U)_X = \alpha \int_0^L v_{xx} \overline{u_{xx}} dx - \alpha \int_0^L u_{xxxx} \overline{v} dx.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^L u_{xxxx} \overline{v} dx &= \alpha u_{xxx} \overline{v} \Big|_0^L - \alpha \int_0^L u_{xxx} \overline{v_x} dx \\ &= \alpha u_{xxx}(L) \overline{v}(L) - \alpha u_{xx} \overline{v_x} \Big|_0^L + \alpha \int_0^L u_{xx} \overline{v_{xx}} dx \\ &= \alpha \gamma |v(L)|^2 + \alpha \int_0^L u_{xx} \overline{v_{xx}} dx. \end{aligned}$$

Substituindo, na relação acima, obtemos

$$(AU, U)_X = \alpha \int_0^L v_{xx} \overline{u_{xx}} dx - \alpha \int_0^L u_{xx} \overline{v_{xx}} dx - \alpha \gamma |v(L)|^2.$$

Logo, tomando a parte real, chegaremos em

$$\operatorname{Re} [(AU, U)_X] = -\alpha \gamma |v(L)|^2 \leq 0.$$

□

Lema 3.2.3 O domínio do operador A , definido em (3.2), é denso no espaço de fase X .

Prova: Como $D(A) \subset X$, sabemos que

$$\overline{D(A)} \oplus D(A)^\perp = X.$$

Basta provar que

$$D(A)^\perp = \{\mathbf{0}\},$$

onde $\mathbf{0}$ representa o elemento idênticamente nulo, no espaço X .

De fato, tomemos $F \in X$, tal que

$$(W, F)_X = 0, \quad \forall W \in D(A).$$

Sabemos que, para todo $\lambda > 0$ existe um único $U \in D(A)$, onde

$$\lambda U - AU = F.$$

Então, teremos

$$(W, \lambda U - AU)_X = 0, \quad \forall W \in D(A).$$

Logo, para $W = U$, segue

$$\lambda \|U\|_X^2 - (U, AU)_X = 0.$$

Considerando a parte real e usando o resultado de A ser dissipativo, obtemos

$$U = \mathbf{0}, \text{ que implica em } F = \mathbf{0}.$$

□

Lema 3.2.4 O operador A , definido em (3.2), é fechado.

Prova: Usando os Lemas 3.2.2 e 3.2.3, o resultado segue como consequência da aplicação do Teorema 1.6.3. \square

Nota 3.2.3 Usando o Lema 3.2.1, confirmamos também, a densidade do domínio de nosso operador. Onde, tomando $\lambda = 1$, obtemos que

$$\forall F \in X, \quad \exists! U \in D(A); \quad (I - A)U = F.$$

Isto é, $\text{Im}(I - A) = X$. Logo, do Teorema 1.6.4, segue o resultado.

3.2.5 Prova da Existência e Unicidade

Nesta subseção, faremos o fechamento da prova da existência e unicidade para o sistema (3.1). Além disso, comentaremos a mesma demonstração, usando o Teorema de Lumer-Phillips (1.6.2).

Teorema 3.2.1 Sejam $(u_0, u_1) \in D(A)$ e $T > 0$, então existe uma única solução para o sistema (3.1), satisfazendo

$$(u, u_t) \in C(0, \infty; D(A)) \cap C^1(0, \infty; V \times H),$$

onde

$$V = \{u \in H^2; u(0) = u_x(0) = 0\}, \quad H = L^2(0, L), \quad X = V \times H \quad \text{e}$$

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X; u \in H^4(0, L) \cap V, v \in V, u_{xxx}(L) = \gamma v(L), u_{xx}(L) = 0 \right\}.$$

Prova: Sabemos, dos resultados já encontrados, que o operador A é fechado e seu domínio é denso em X . Além disso, pelo Lema 3.2.1, temos $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$. Resta apenas provar que para todo $\lambda > 0$, teremos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

De fato, multiplicando a primeira equação do resolvente (3.3) por $\alpha \overline{u_{xxxx}}$ e integrando de 0 a L , chegamos a

$$\int_0^L \alpha \lambda u \overline{u_{xxxx}} dx - \int_0^L \alpha v \overline{u_{xxxx}} dx = \int_0^L \alpha f \overline{u_{xxxx}} dx.$$

Logo, pela integração por partes, segue

$$\alpha \lambda u \overline{u_{xxx}}|_0^L - \int_0^L \alpha \lambda u_x \overline{u_{xxx}} dx - \alpha v \overline{u_{xxx}}|_0^L + \int_0^L \alpha v_x \overline{u_{xxx}} dx = \alpha f \overline{u_{xxx}}|_0^L - \int_0^L \alpha f_x \overline{u_{xxx}} dx.$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \alpha \lambda u(L) \overline{v(L)} - \alpha \lambda u_x \overline{u_{xx}}|_0^L + \int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \alpha |v(L)|^2 + \alpha v_x \overline{u_{xx}}|_0^L - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx \\ = \alpha f(L) \overline{v(L)} - \alpha f(0) \overline{u_{xxx}(0)} - \alpha f_x \overline{u_{xx}}|_0^L + \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx. \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} \alpha \lambda u(L) \overline{v(L)} + \int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \alpha |v(L)|^2 - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx \\ = \alpha f(L) \overline{v(L)} - \alpha f(0) \overline{u_{xxx}(0)} - \alpha f_x \overline{u_{xx}}|_0^L + \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx, \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned} \alpha \lambda u(L) \overline{v(L)} + \int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \alpha |v(L)|^2 - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx \\ = \alpha f(L) \overline{v(L)} - \alpha f(0) \overline{u_{xxx}(0)} - \alpha f_x(0) \overline{u_{xx}(0)} + \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx. \end{aligned}$$

De onde, segue

$$\begin{aligned} \alpha [\lambda u(L) - v(L) - f(L)] \overline{v(L)} + \int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx \\ = -\alpha f(0) \overline{u_{xxx}(0)} - \alpha f_x(0) \overline{u_{xx}(0)} + \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como, $\lambda u - v = f$, temos

$$\lambda u(L) - v(L) - f(L) = 0,$$

$$\lambda u(0) - v(0) = 0 - 0 = f(0),$$

$$\lambda u_x(0) - v_x(0) = 0 = f_x(0).$$

Logo, substituindo as igualdades acima em (3.6), obtemos

$$\int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx = \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx. \quad (3.7)$$

Da mesma forma, multiplicando a segunda equação do resolvente (3.4) por \bar{v} e integrando por partes de 0 a L , segue

$$\int_0^L [\lambda v + \alpha u_{xxx}] \bar{v} dx = \int_0^L g \bar{v} dx,$$

isto é

$$\int_0^L \lambda |v|^2 dx + \alpha u_{xxx} \bar{v} \Big|_0^L - \int_0^L \alpha u_{xxx} \bar{v}_x dx = \int_0^L g \bar{v} dx,$$

que implica em

$$\int_0^L \lambda |v|^2 dx + \alpha u_{xxx}(L) \bar{v}(L) - \alpha u_{xx} \bar{v}_x \Big|_0^L + \int_0^L \alpha u_{xx} \bar{v}_{xx} dx = \int_0^L g \bar{v} dx.$$

Consequentemente, encontramos

$$\int_0^L \lambda |v|^2 dx + \alpha |v(L)|^2 + \int_0^L \alpha u_{xx} \bar{v}_{xx} dx = \int_0^L g \bar{v} dx. \quad (3.8)$$

Somando (3.7) e (3.8), chegaremos a

$$\begin{aligned} \int_0^L \alpha \lambda |u_{xx}|^2 dx - \int_0^L \alpha v_{xx} \overline{u_{xx}} dx + \int_0^L \lambda |v|^2 dx + \alpha |v(L)|^2 + \int_0^L \alpha u_{xx} \bar{v}_{xx} dx \\ = \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx + \int_0^L g \bar{v} dx. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \lambda \left[\int_0^L \alpha |u_{xx}|^2 dx + \int_0^L |v|^2 dx \right] + 2 \operatorname{Im} \left(\int_0^L \alpha u_{xx} \overline{v_{xx}} dx \right) i + \alpha |v(L)|^2 \\ = \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx + \int_0^L g \overline{v} dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, da definição dada para o produto interno em X

$$(F, U)_X = \left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_X = \int_0^L \alpha f_{xx} \overline{u_{xx}} dx + \int_0^L g \overline{v} dx,$$

com norma induzida

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_X^2 = \int_0^L \alpha |u_{xx}| dx + \int_0^L |v| dx.$$

Tomando a parte real, obtemos

$$\lambda \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_X^2 + \alpha |v(L)|^2 = \operatorname{Re} \left[\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{pmatrix} \right)_X \right]$$

$$\lambda \|U\|_X^2 \leq \operatorname{Re} [(F, U)_X] \leq |(F, U)_X| \leq \|F\|_X \|U\|_X$$

$$\|U\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|F\|_X$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1} F\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|F\|_X$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Assim, pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.6.1) e o Teorema 1.6.5, concluímos o desejado.

Onde, para

$$U_0 \in X, \quad \text{temos } U \in C(0, \infty; X).$$

Isto é

$$(u_0, u_1) \in V \times H, \text{ temos } u \in C(0, \infty; V) \cap C^1(0, \infty; H).$$

Enquanto que para

$$U_0 \in D(A), \text{ temos } U \in C(0, \infty; D(A)) \cap C^1(0, \infty; X).$$

Ou seja,

$$(u_0, u_1) \in D(A), \text{ temos}$$

$$(u, u_t) \in C(0, \infty; D(A)) \cap C^1(0, \infty; V \times H).$$

□

Nota 3.2.4 A existência e unicidade do problema, também pode ser provada usando o Teorema de Lumer Phillips (Teorema 1.6.2), onde a condição dissipativa de A e a existência de $\lambda_0 > 0$, tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, já foram demonstradas.

3.3 Decrescimento da Energia Total

Definição 3.3.1 Definiremos como energia total do sistema (3.1) a seguinte expressão

$$E(t) = \int_0^L \frac{1}{2} [m |u_t|^2 + EI |u_{xx}|^2] dx. \quad (3.10)$$

Teorema 3.3.1 O sistema (3.1) é dissipativo.

Prova: Consideremos regularidade suficiente para a solução u .

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.1) por u_t e integrando de 0 a L , obtemos

$$m \int_0^L u_{tt} u_t dx + EI \int_0^L u_{xxxx} u_t dx = 0. \quad (3.11)$$

Pela integração por partes, segue

$$\int_0^L u_{xxxx} u_t dx = u_{xxx} u_t \Big|_0^L - \int_0^L u_{xxx} u_{xt} dx = u_{xxx} u_t \Big|_0^L - u_{xx} u_{xt} \Big|_0^L + \int_0^L u_{xx} u_{xxt} dx,$$

que implica em

$$\int_0^L u_{xxxx} u_t dx = u_{xxx}(L, t) u_t(L, t) - u_{xxx}(0, t) u_t(0, t) - u_{xx}(L, t) u_{xt}(L, t) + u_{xx}(0, t) u_{xt}(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d|u_{xx}|^2}{dt} dx.$$

De onde, obtemos

$$\int_0^L u_{xxxx} u_t dx = \gamma [u_t(L, t)]^2 - u_{xxx}(0, t) u_{xt}(0, t) + u_{xx}(0, t) u_{xt}(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d|u_{xx}|^2}{dt} dx.$$

Logo, pela condição $u_x(0, t) = 0$, temos que $u_{xt}(0, t) = 0$, sendo assim

$$\int_0^L u_{xxxx} u_t dx = \gamma [u_t(L, t)]^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d|u_{xx}|^2}{dt} dx. \quad (3.12)$$

Além disso, como

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d|u_t|^2}{dt} dx, \quad (3.13)$$

substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11), segue

$$\frac{m}{2} \int_0^L \frac{d|u_t|^2}{dt} dx + EI \left\{ \gamma [u_t(L, t)]^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d|u_{xx}|^2}{dt} dx \right\} = 0.$$

Ou seja

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} [m |u_t|^2 + EI |u_{xx}|^2] dx = -EI \gamma [u_t(L, t)]^2.$$

Isto é

$$\frac{d}{dt} E(t) = -EI \gamma [u_t(L, t)]^2. \quad (3.14)$$

O que nos mostra claramente que o sistema é dissipativo, isto é, a energia do sistema é decrescente com relação ao tempo. \square

3.4 Decaimento Exponencial da Energia

Aqui apresentaremos o resultado principal deste capítulo, para isto, usaremos o método da energia que se baseia na construção de um funcional de Lyapunov

\mathcal{L} equivalente a energia. Antes de atingir este objetivo, provaremos alguns Lemas que serão usados na demonstração do decaimento exponencial.

Lema 3.4.1 Seja o funcional $\mathcal{F} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^L x u_x u_t dx.$$

Então, existe uma constante $c > 0$, tal que

$$|\mathcal{F}(t)| \leq cE(t), \quad \text{isto é,} \quad \left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| \leq cE(t).$$

Prova: De fato, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| &\leq L \left| \int_0^L u_x u_t dx \right| \leq L \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| \leq LC_p \left(\int_0^L |u_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| \leq L \frac{C_p}{\sqrt{EI m}} \left(m \int_0^L |u_{xx}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(EI \int_0^L |u_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young, chegamos em

$$\left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| \leq \frac{LC_p}{\sqrt{EI m}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\int_0^L m |u_{xx}|^2 dx + EI \int_0^L |u_t|^2 dx \right] \right\},$$

que implica

$$\left| \int_0^L x u_x u_t dx \right| \leq \frac{LC_p}{\sqrt{EI m}} E(t). \quad (3.15)$$

Finalmente, tomando $c = \frac{LC_p}{\sqrt{EI m}}$, o resultado segue. \square

Lema 3.4.2 Dado o funcional \mathcal{F} , definido no Lema 3.4.1, temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) = \frac{L}{2} |u_t(L, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx - \frac{EI}{m} L \gamma u_x(L, t) u_t(L, t) - \frac{3EI}{2m} \int_0^L |u_{xx}|^2 dx.$$

Prova: Derivando \mathcal{F} em relação ao tempo e usando (3.1), obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^L x u_x u_t dx = \int_0^L x [u_{xt} u_t + u_x u_{tt}] dx,$$

que implica em

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) = \int_0^L x \left[u_{xt} u_t - \frac{EI}{m} u_x u_{xxxx} \right] dx = \int_0^L x u_{xt} u_t dx - \frac{EI}{m} \int_0^L x u_x u_{xxxx} dx. \quad (3.16)$$

Agora, sabemos que

$$\int_0^L x u_{xt} u_t dx = x \frac{|u_t|^2}{2} \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx = \frac{L}{2} |u_t(L, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx. \quad (3.17)$$

Além disso

$$\begin{aligned} \int_0^L x u_x u_{xxxx} dx &= x u_x u_{xxx} \Big|_0^L - \int_0^L [u_x + x u_{xx}] u_{xxx} dx \\ &= L u_x(L, t) \gamma u_t(L, t) - \int_0^L u_x u_{xxx} dx - \int_0^L x u_{xx} u_{xxx} dx, \end{aligned}$$

de onde, segue

$$\int_0^L x u_x u_{xxxx} dx = L \gamma u_x(L, t) u_t(L, t) - u_x u_{xxx} \Big|_0^L + \int_0^L |u_{xx}|^2 dx - x \frac{|u_{xx}|^2}{2} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{|u_{xx}|^2}{2} dx,$$

que decorre em

$$\int_0^L x u_x u_{xxxx} dx = L \gamma u_x(L, t) u_t(L, t) + \frac{3}{2} \int_0^L |u_{xx}|^2 dx. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em (3.16), finalmente obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) = \frac{L}{2} |u_t(L, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx - \frac{EI}{m} L \gamma u_x(L, t) u_t(L, t) - \frac{3EI}{2m} \int_0^L |u_{xx}|^2 dx.$$

□

Lema 3.4.3 Dado o funcional de Lyapunov $\mathcal{L} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{L}(t) = tE(t) + m \int_0^L x u_x u_t dx. \quad (3.19)$$

Temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \forall t \geq T_1.$$

Prova: Derivando o funcional de Lyapunov, em relação ao tempo, usando (3.14)

e o Lema 3.4.2, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= E(t) - tEI\gamma [u_t(L, t)]^2 + \frac{mL}{2} |u_t(L, t)|^2 - \frac{m}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad - EIL\gamma u_x(L, t) u_t(L, t) - \frac{3EI}{2} \int_0^L |u_{xx}|^2 dx, \end{aligned}$$

que acarreta em

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = -tEI\gamma |u_t(L, t)|^2 + \frac{mL}{2} |u_t(L, t)|^2 - EIL\gamma u_x(L, t) u_t(L, t) - EI \int_0^L |u_{xx}|^2 dx. \quad (3.20)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|u_x(L, t)|^2 = \left[\int_0^L u_{xx} dx \right]^2 \leq \int_0^L |u_{xx}|^2 dx. \quad (3.21)$$

Sabemos, também, que

$$-u_x(L, t) u_t(L, t) \leq \delta |u_x(L, t)|^2 + \frac{1}{4\delta} |u_t(L, t)|^2,$$

de onde, multiplicando esta expressão por $EIL\gamma$ e tomando $\delta = \frac{1}{L\gamma}$, segue

$$-EIL\gamma u_x(L, t) u_t(L, t) \leq -EI |u_x(L, t)|^2 + \frac{EIL^2\gamma^2}{4} |u_t(L, t)|^2. \quad (3.22)$$

Usando (3.21) e (3.22) em (3.20), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -tEI\gamma |u_t(L, t)|^2 + \frac{mL}{2} |u_t(L, t)|^2 + EI |u_x(L, t)|^2 \\ &\quad + \frac{EIL^2\gamma^2}{4} |u_t(L, t)|^2 - EI |u_x(L, t)|^2, \end{aligned}$$

que decorre em

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq - \left[tEI\gamma - \frac{mL}{2} - \frac{EIL^2\gamma^2}{4} \right] |u_t(L, t)|^2.$$

Tomando

$$T_1 = \frac{2mL + EIL^2\gamma^2}{4EI\gamma},$$

o resultado segue, isto é

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq 0, \quad \forall t \geq T_1.$$

□

Teorema 3.4.1 Seja u a solução do sistema (3.1) obtida no Teorema 3.2.1. Então, a energia total $E(t)$ decai exponencialmente a zero, quando o tempo vai para o infinito; isto é, existem constantes positivas C e λ , tais que a energia do sistema satisfaz

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Prova: Considerando o funcional de Lyapunov definido em (3.19) e o Lema 3.4.3, temos que existe $c_1 = c_1(T_1) > 0$, tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(T_1) \leq c_1E(0), \quad \forall t \geq T_1.$$

Além disso, do Lema 3.4.3, temos

$$tE(t) - mcE(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq tE(t) + mcE(t).$$

Logo, segue

$$[t - mc] E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1E(0), \quad \forall t \geq T_1.$$

Considerando $T_2 = \max \{T_1, mc\}$, para algum $c_2 = c(T_2) > 0$, temos

$$E(t) \leq \frac{c_2 E(0)}{[t - mc]}, \quad \forall t > T_2.$$

Assim, chegamos a

$$\int_{T_2}^{\infty} E(t)^2 dt < (c_2)^2 E(0)^2 \int_{T_2}^{\infty} \left[\frac{1}{t - mc} \right]^2 dt < \infty.$$

Finalmente, usando o fato da energia ser limitada, e a norma do sistema como sendo a energia, pelo Teorema 1.6.6, concluimos que existem constantes positivas C e λ , tais que a energia do sistema satisfaz

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Capítulo 4

Resultados Numéricos para uma Viga

4.1 Problema Numérico

Para a solução numérica do problema de vigas unidimensional de equação

$$mu_{tt} + EIu_{xxxx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, +\infty), \quad (4.1)$$

condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, +\infty)$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, +\infty)$$

$$u_{xx}(L, t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, +\infty)$$

$$u_{xxx}(L, t) = \gamma u_t(L, t) \quad \text{em} \quad (0, +\infty)$$

e condições iniciais dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ e } u_t(x, 0) = u_1(x),$$

faremos uso do método de elementos finitos semidiscreto, que se caracteriza por usar elementos finitos, na parte espacial e diferenças finitas, na parte temporal.

A seguir, encontraremos a formulação variacional do problema e a sua respectiva discretização.

4.2 Formulação Variacional

Consideremos o espaço

$$V = \{u \in H^2(0, L) \mid u(0) = u_x(0) = 0\}.$$

Multiplicando (4.1) por $v \in V$ e integrando de 0 a L , temos

$$m \int_0^L u_{tt} v dx + EI \int_0^L u_{xxxx} v dx = 0.$$

Pela integração por partes, segue

$$m \int_0^L u_{tt} v dx + EI u_{xxx} v|_0^L - EI \left[\int_0^L u_{xxx} v_x dx \right] = 0$$

$$m \int_0^L u_{tt} v dx + EI u_{xxx}(L) v(L) - EI u_{xx} v_x|_0^L + EI \left[\int_0^L u_{xx} v_{xx} dx \right] = 0$$

$$m \int_0^L u_{tt} v dx + EI u_{xxx}(L) v(L) + EI \left[\int_0^L u_{xx} v_{xx} dx \right] = 0$$

$$m \int_0^L u_{tt} v dx + EI \gamma u_t(L) v(L) + EI \left[\int_0^L u_{xx} v_{xx} dx \right] = 0.$$

Assim, teremos

$$m (u_{tt}, v) + EI \gamma u_t(L) v(L) + EI (u_{xx}, v_{xx}) = 0, \quad (4.2)$$

que corresponde a formulação variacional de nosso problema.

4.3 Discretização do Problema

O método semidiscreto a ser usado terá a seguinte estrutura

(i) Na discretização espacial consideramos o espaço de elementos finitos

$$V_h = \{v_h \in V; v_h^e \in P^3(\Omega^e)\} \subset V,$$

onde $\Omega = (0, L)$, v_h^e a restrição de v_h no elemento "e" e $P^3(\Omega^e)$ o conjunto de polinômios cúbicos de Hermite definidos em Ω^e . Neste caso, consideramos a partição de $\bar{\Omega}$ em P subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento h , onde $x_0 = 0$ e $x_P = L$.

(ii) Para a parte temporal, usamos o método de Euler Implícito de diferenças finitas, cuja aproximação dos termos u_t e u_{tt} são dados por

$$u_t(x, t_j) = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta t},$$

$$u_{tt}(x, t_j) = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta t^2}.$$

Neste caso, dividimos o intervalo $[0, T]$ em subintervalos $[t_{j-1}, t_j]$, onde $t_j = j \Delta t$, $j = 1, \dots, k$ com $t_0 = 0$ e $t_k = T$.

Sendo assim, discretizando o problema variacional (4.2), temos

$$\left(\frac{u_{h,j+1} - 2u_{h,j} + u_{h,j-1}}{\Delta t^2}, v_h \right) + \alpha \gamma \left(\frac{u_{P,j} - u_{P,j-1}}{\Delta t} \right) v_P + \alpha \left([u_{xx}]_{h,j+1}, [v_{xx}]_h \right) = 0. \quad (4.3)$$

Além disso

$$\frac{u_{h,1}(x) - u_{h,0}(x)}{\Delta t} = (u_1)_h(x)$$

$$u_{h,1}(x) = u_{h,0}(x) + \Delta t (u_1)_h(x)$$

$$u_{h,1}(x) = (u_0)_h(x) + \Delta t (u_1)_h(x). \quad (4.4)$$

Finalmente, de (4.3) e (4.4), chegamos a discretização completa de nosso problema, como sendo

$$\frac{m}{\Delta t^2} (u_{h,j+1}, v_h) + EI \left([u_{xx}]_{h,j+1}, [v_{xx}]_h \right) = \frac{m}{\Delta t^2} (2u_{h,j} - u_{h,j-1}, v_h) - \frac{EI\gamma}{\Delta t} (u_{P,j} - u_{P,j-1}) v_P.$$

Com condições iniciais

$$u_{h,0}(x) = (u_0)_h(x) \quad \text{e} \quad u_{h,1}(x) = (u_0)_h(x) + \Delta t (u_1)_h(x).$$

Nota 4.3.1 Como m representa a massa por unidade de comprimento, então se dividimos a nossa discretização completa, pela área da seção transversal S da viga, teremos

$$\frac{\rho}{\Delta t^2} (u_{h,j+1}, v_h) + \alpha \left([u_{xx}]_{h,j+1}, [v_{xx}]_h \right) = \frac{\rho}{\Delta t^2} (2u_{h,j} - u_{h,j-1}, v_h) - \frac{\alpha\gamma}{\Delta t} (u_{P,j} - u_{P,j-1}) v_P.$$

4.4 Resultados Computacionais

Nesta seção, apresentaremos e analisaremos vários resultados numéricos, os quais confirmarão nossos resultados teóricos. Com este objetivo, dividiremos esta apresentação em três situações. Nas duas primeiras, tomaremos valores arbitrários para a massa e o coeficiente de rigidez, no último consideraremos valores usados com muita frequência em simulações de estruturas flexíveis, como adotado nos trabalhos de [Chen et al. (1987)]. Em todos os casos, tomaremos malhas de 90 elementos, comprimento de viga $L = 1(m)$, $\Delta t = 10^{-5}(s)$ e condições iniciais dadas por

$$u(x, 0) = \frac{1}{5}L^2x^2 - \frac{2}{15}Lx^3 + \frac{1}{30}x^4 \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

- (1) Consideremos inicialmente o coeficiente de amortecimento $\gamma = 0$ e analisemos os gráficos das oscilações de uma viga em $u(L, t)$, para $0 \leq t \leq 2$, com valores arbitrários para o coeficiente de rigidez EI , como mostram as Figuras 4.1-4.4.

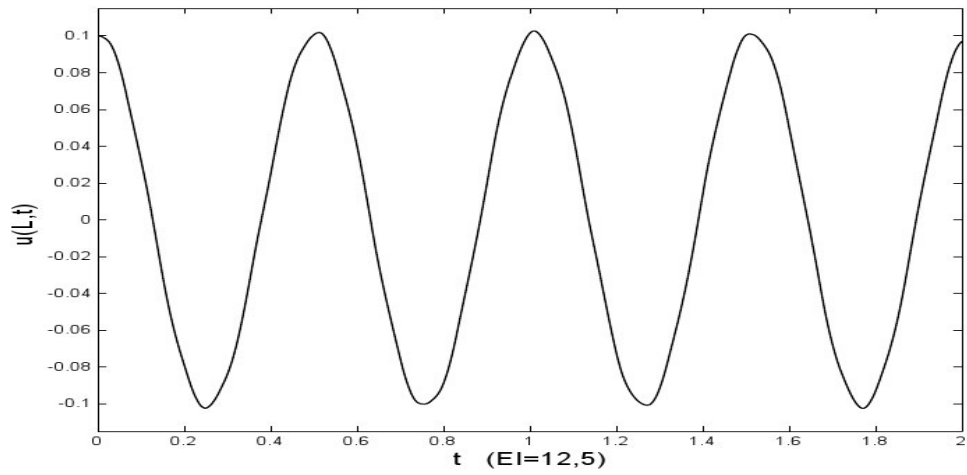


Figura 4.1: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=12.5$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$.

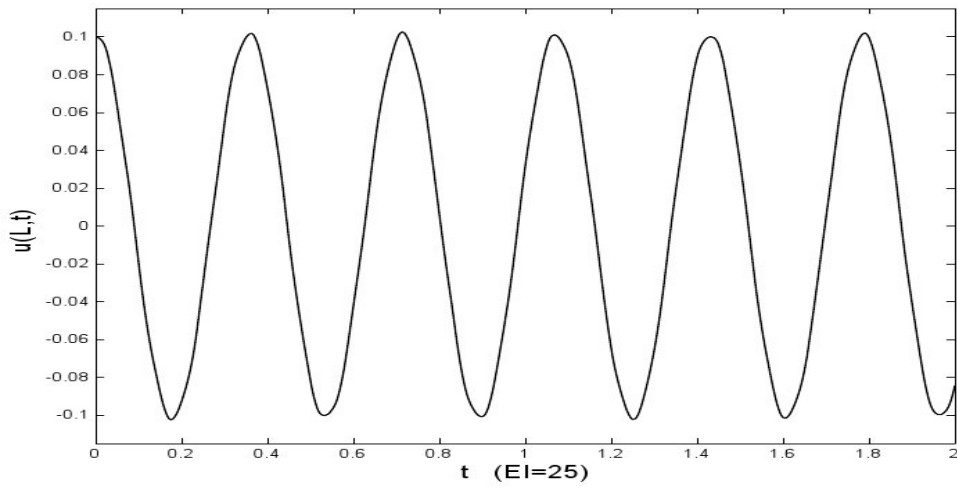


Figura 4.2: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$.

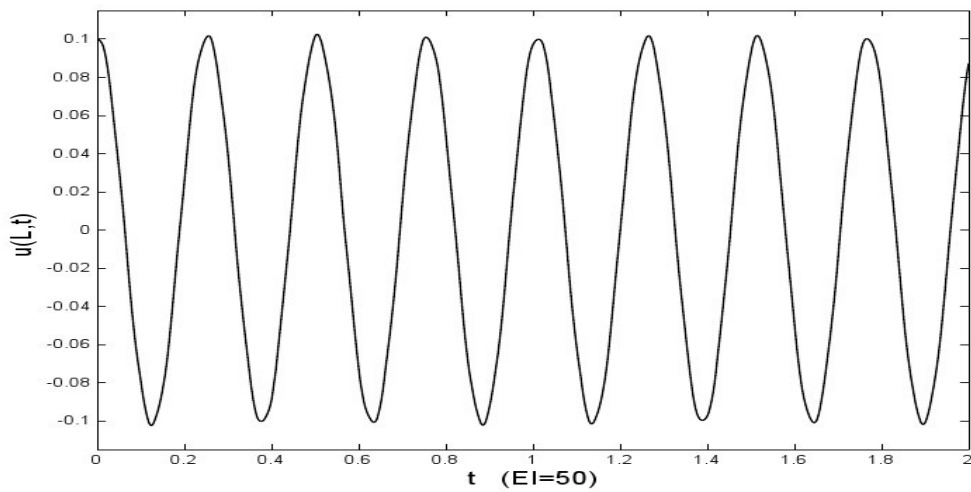


Figura 4.3: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=50$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$.

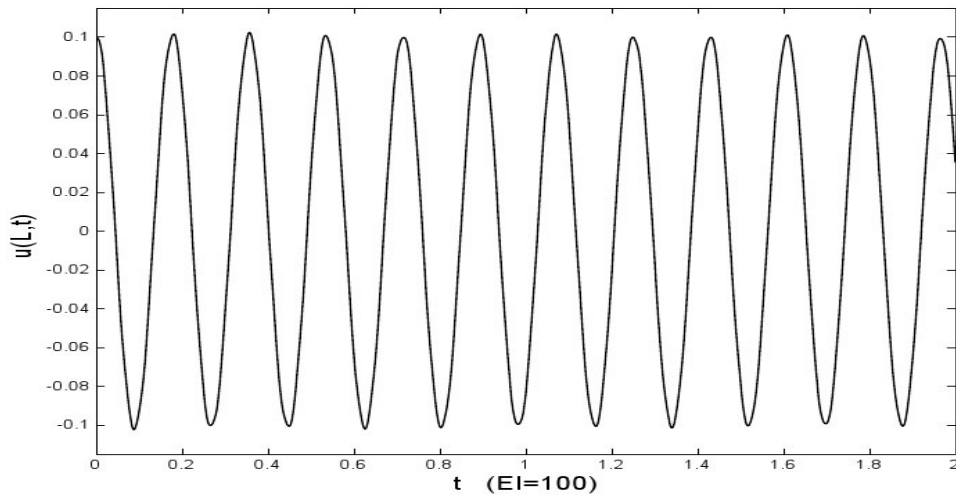


Figura 4.4: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=100$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 2$.

Observamos claramente que em todos os casos, não há nenhuma taxa de decaimento da solução, isto se deve ao fato do coeficiente de amortecimento ser nulo ($\gamma = 0$). Este resultado se confirma independentemente do tempo considerado, como pode ser visto nas Figuras 4.5 e 4.6, abaixo, que correspondem aos gráficos de $u(L,t)$ com coeficientes de rigidez iguais a 3,125 e 25 em $0 \leq t \leq 8$ e $0 \leq t \leq 4$, respectivamente. Considerando que o coeficiente de elasticidade é dado pela razão existente entre a rigidez de flexão e a massa, podemos então concluir que quanto maior é a elasticidade da viga, maior será o seu número de oscilações.

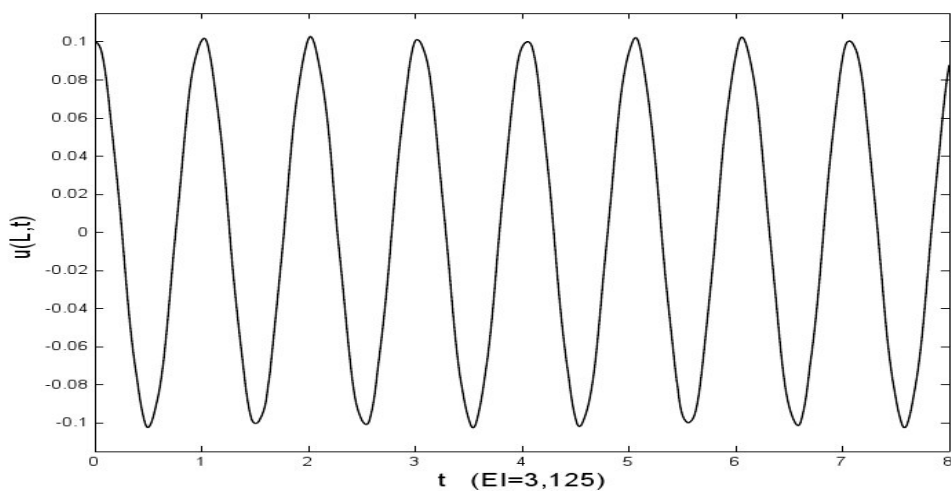


Figura 4.5: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=3,125$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 8$.

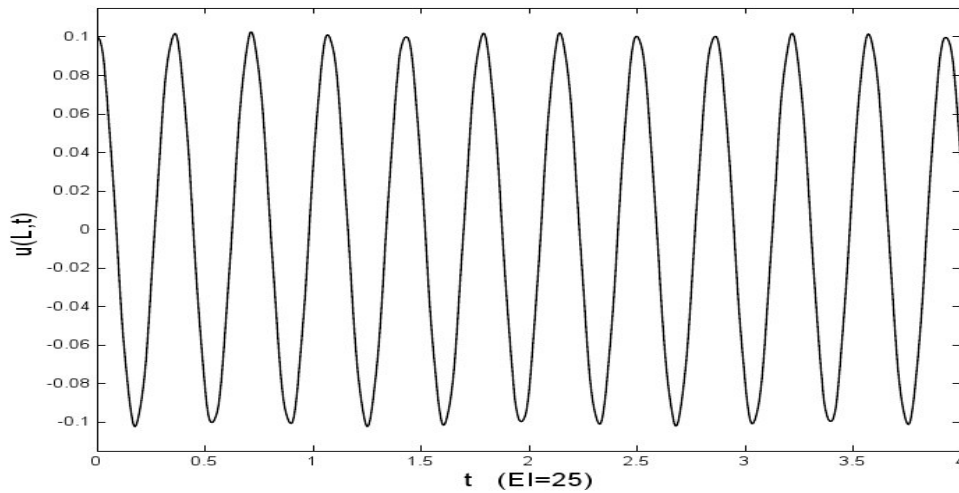


Figura 4.6: Gráfico de $u(L, t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0$ e $0 \leq t \leq 4$.

Além disso, comparando as Figuras 4.3 e 4.4 com 4.5 e 4.6 respectivamente, podemos também confirmar que existe uma relação entre o período de oscilação da viga e sua elasticidade. Este é um fato esperado se comparamos o nosso problema, no seu extremo direito, com o movimento harmônico simples de uma mola, onde a relação entre o período de oscilação T , a massa m e o coeficiente de elasticidade k é dada por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Sendo assim, como o valor de m é o mesmo em todas as vigas, evidenciamos uma relação entre o período e o coeficiente de rigidez, entre duas vigas, dada por

$$T_1\sqrt{E_1I_1} = T_2\sqrt{E_2I_2}.$$

- (2) No segundo caso, consideraremos três vigas, com a mesma massa $m = 1$ e o mesmo coeficiente de amortecimento $\gamma = 0,005$ em $0 \leq t \leq 1$. Analisaremos os gráficos de $u(L, t)$, para coeficientes de rigidez iguais a 25, 50 e 100, como é mostrado nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, respectivamente. Neste caso, podemos concluir que quanto maior é a elasticidade de uma viga, a sua amplitude de oscilação decairá mais rapidamente, se usamos o mesmo coeficiente de amortecimento.

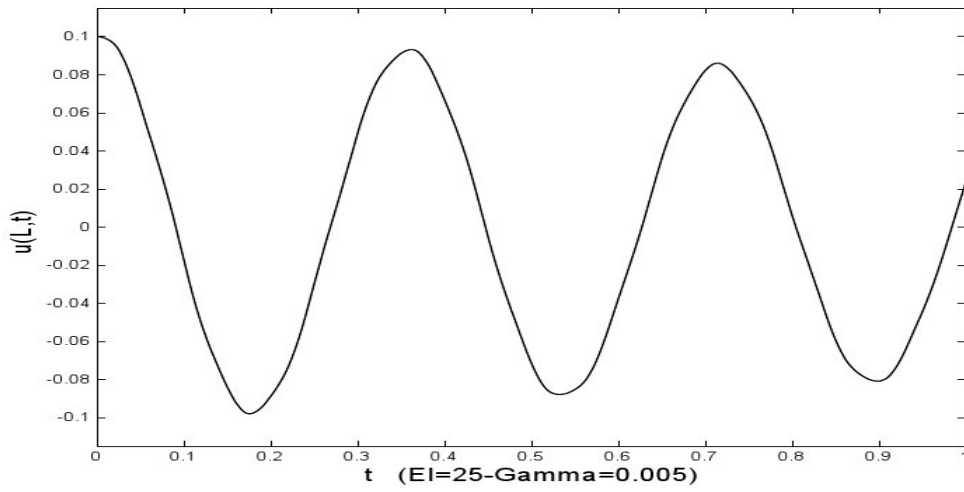


Figura 4.7: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=25$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$.

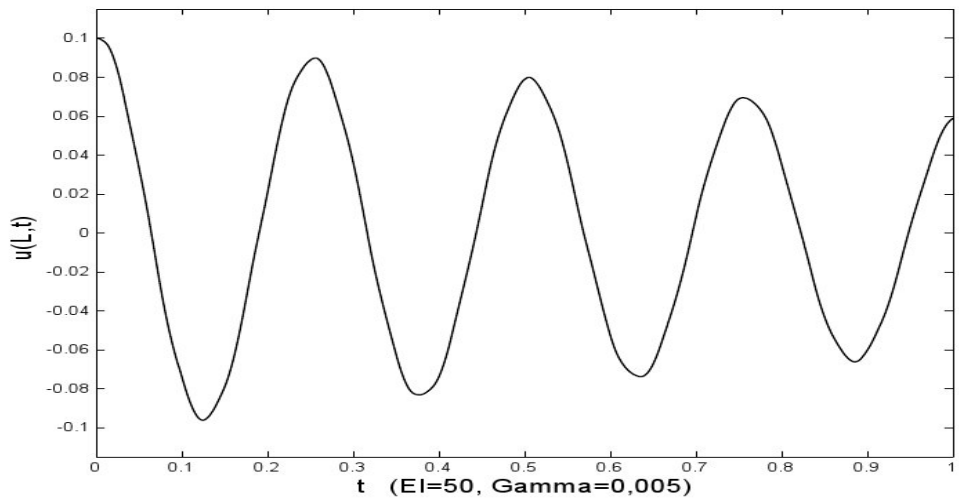


Figura 4.8: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=50$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$.

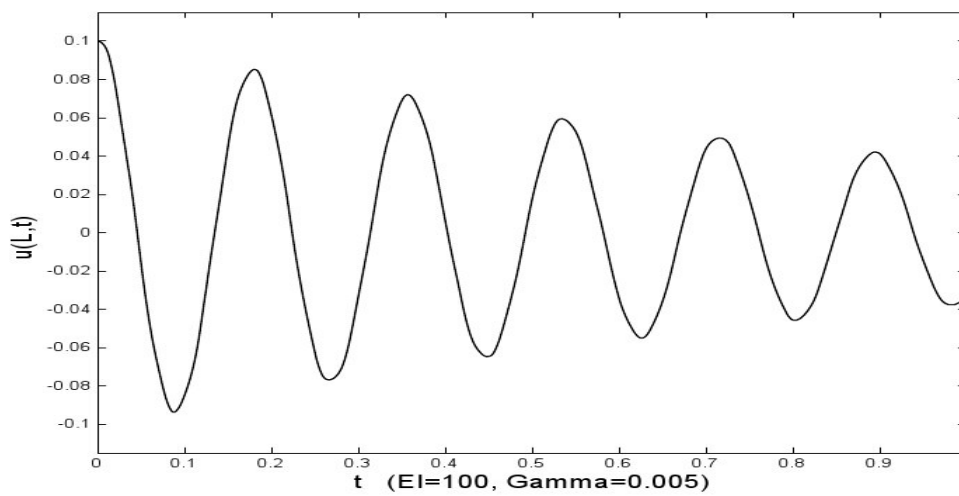


Figura 4.9: Gráfico de $u(L,t)$, para $EI=100$, $\gamma = 0,005$ e $0 \leq t \leq 1$.

(3) No terceiro e último caso, tomaremos $EI = 223,2$, $m = 3,58$ e consideraremos três valores diferentes para o coeficiente de amortecimento γ , em $0 \leq t \leq 4$. Apresentaremos os gráficos de $u(L, t)$, $u(x, t)$ e da energia $E(t)$, para cada valor γ , como mostram as Figuras 4.10-4.15, onde podemos observar claramente a influência do amortecimento na estabilidade de uma viga, fato que também se confirma ao observar o decaimento exponencial da energia. Para $\gamma = 0,005$, temos os seguintes gráficos

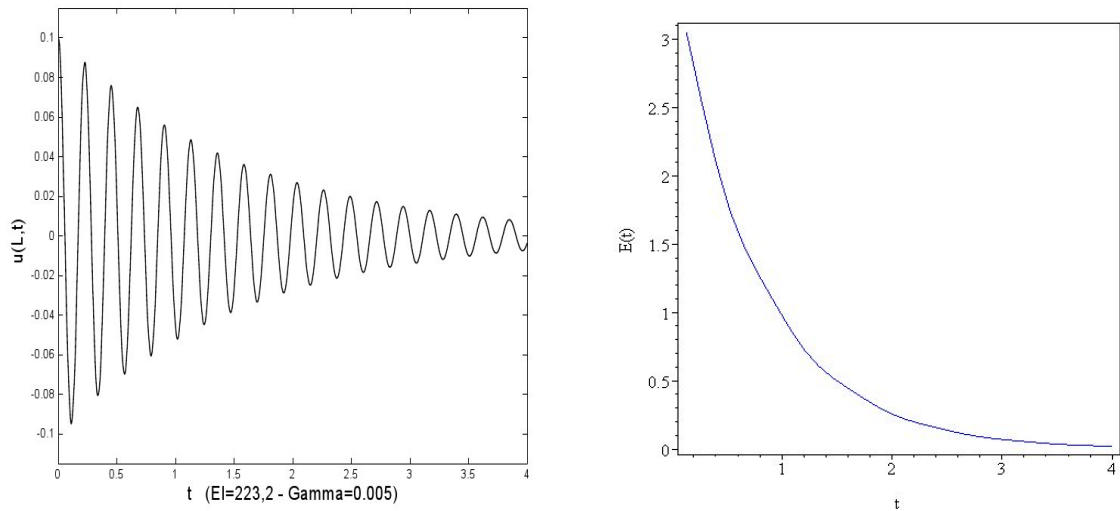


Figura 4.10: (a) $u(L, t)$ (b) $E(t)$

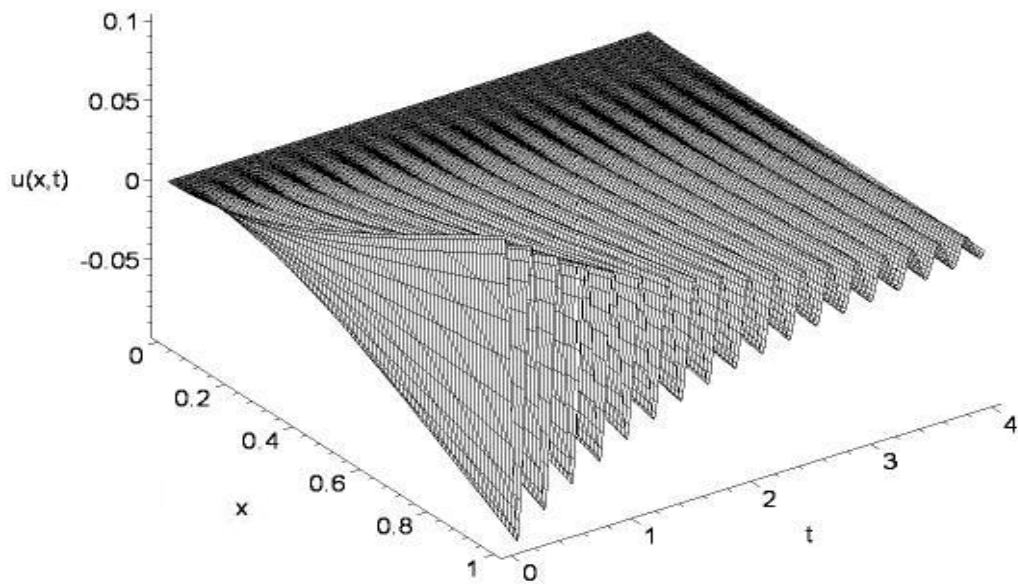


Figura 4.11: Gráfico de $u(x, t)$, para $EI=223,2$ e $\gamma = 0,005$ em $0 \leq t \leq 4$.

Para $\gamma = 0,01$, obtemos os gráficos

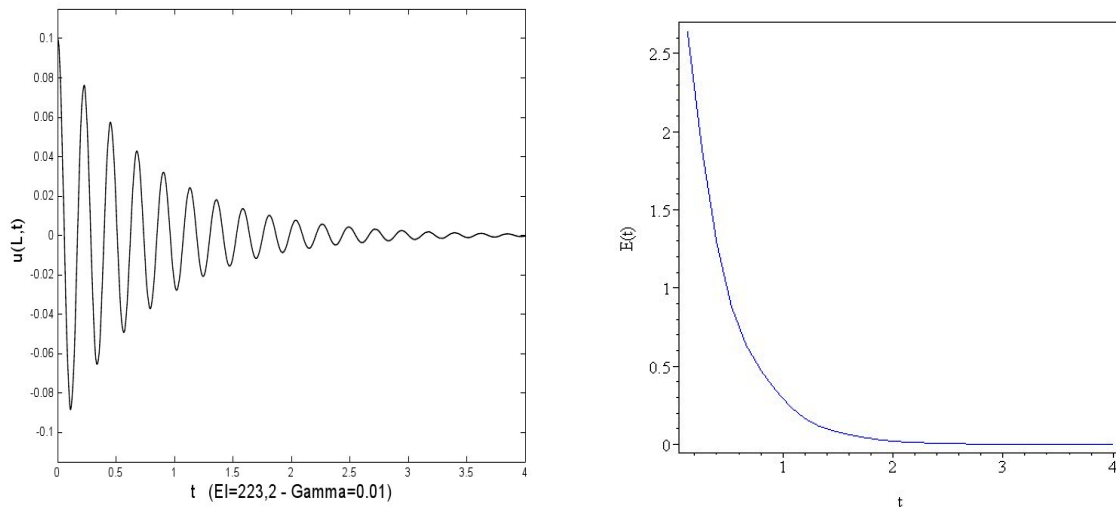


Figura 4.12: (a) $u(L,t)$

(b) $E(t)$

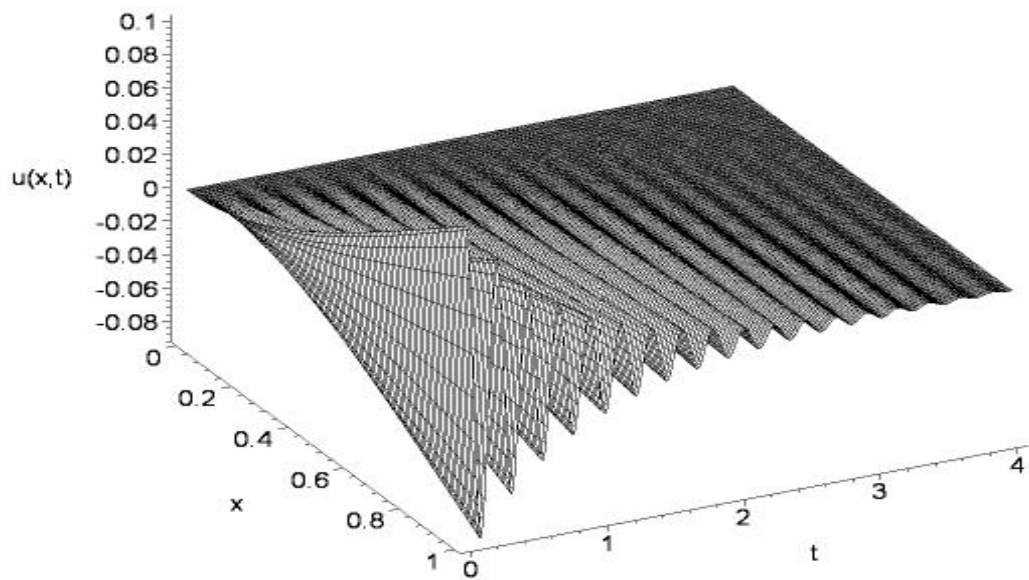


Figura 4.13: Gráfico de $u(x,t)$, para EI=223,2 e $\gamma = 0,01$ em $0 \leq t \leq 4$.

Finalmente, para $\gamma = 0,05$, segue os gráficos

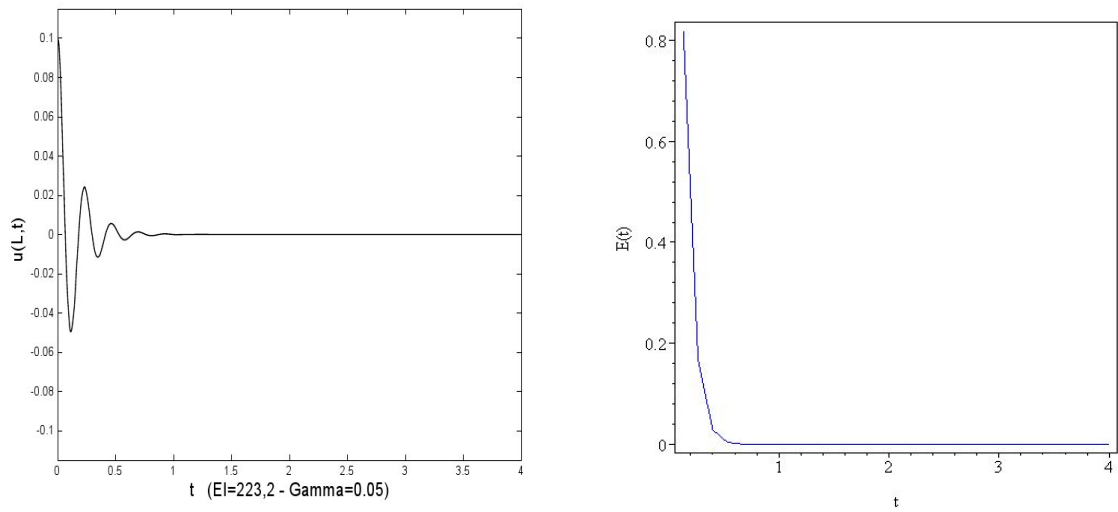


Figura 4.14: (a) $u(L, t)$

(b) $E(t)$

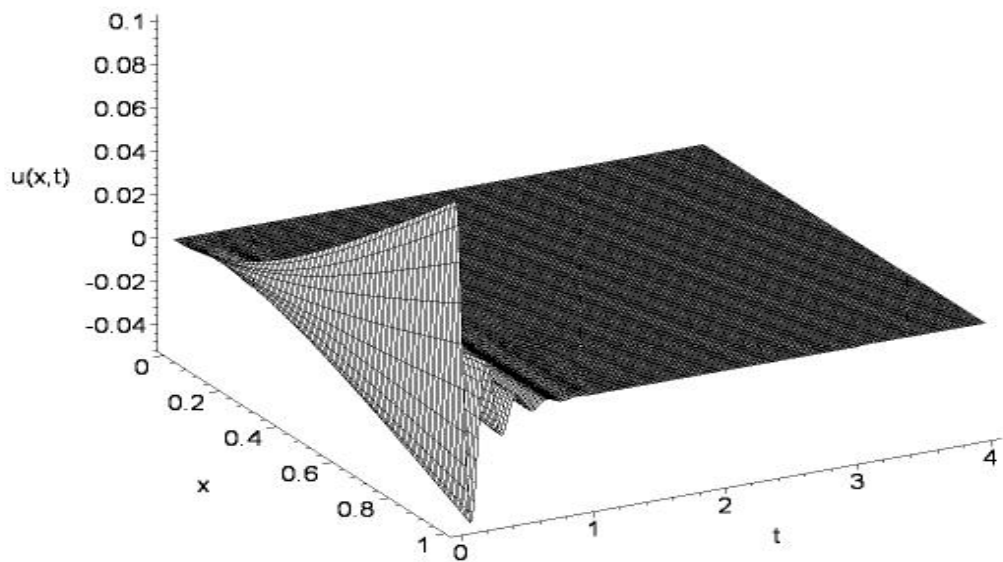


Figura 4.15: Gráfico de $u(x, t)$, para $EI=223,2$ e $\gamma = 0,05$ em $0 \leq t \leq 4$.

Capítulo 5

Estabilização Exponencial Uniforme de Conexões em Série de Vigas

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos os principais resultados deste trabalho, que correspondem ao estudo da existência e unicidade, assim como, a estabilidade exponencial uniforme da solução do problema de conexões em série de vigas. A estrutura a ser estudada apresenta N vigas fortemente ligadas, com controladores nos nós intermediários, uma viga engastada e um único estabilizador localizado no extremo direito, do último elemento. Mostraremos que este único estabilizador é suficiente para conseguir o controle de vibrações para este tipo de estruturas, desde que haja uma certa distribuição decrescente na sequência dos elementos, segundo as suas propriedades elásticas.

O modelo matemático para este problema unidimensional é representado por um sistema acoplado, composto por N equações diferenciais parciais

$$m_i u_{tt} + E_i I_i u_{xxxx} = 0 \text{ sobre } (x_{i-1}, x_i), \text{ com } i = 1, 2, \dots, N \text{ e } t > 0. \quad (5.1)$$

Representaremos as N vigas unidimensionais pelo segmento $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ e assumiremos que todos os elementos da composição possuem densidade de massa m_i e rigidez flexão $E_i I_i$ constantes em cada J_i .

As condições iniciais, de continuidade, de contorno e de transporte são definidas

por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.2)$$

$$u(x_0, t) = u_x(x_0, t) = u_{xx}(L, t) = 0 \quad (5.3)$$

$$u(x_i^-, t) = u(x_i^+, t) \quad (5.4)$$

$$u_x(x_i^-, t) = u_x(x_i^+, t) \quad (5.5)$$

$$- [E_i I_i u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}(x_i^+, t)] = w_{1i}(t), \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad (5.6)$$

$$E_i I_i u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}(x_i^+, t) = w_{0i}(t), \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad (5.7)$$

onde, apenas um dos controladores $w_{1i}(t)$ ou $w_{0i}(t)$, deverá ser usado. A condição desta escolha dependerá do tipo de controlador utilizado nas junções. Para o caso da junção com suporte rígido, temos

$$w_{1i}(t) = 0 \quad \text{e} \quad w_{0i}(t) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq N - 1. \quad (5.8)$$

Assim como

$$w_{1i}(t) \neq 0 \quad \text{e} \quad w_{0i}(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq N - 1, \quad (5.9)$$

no caso da junção com controlador do tipo ângulo guia.

Além disso

$$E_N I_N u_{xxx}(L, t) = k_{0N} u_t(L, t) \quad \text{onde} \quad k_{0N} > 0, \quad (5.10)$$

representa o único estabilizador da estrutura, localizado no extremo direito do último elemento da composição.

De forma geral, assumiremos que os controladores têm a seguinte composição

$$w_{0i}(t) = k_{0i} u_t(x_i, t) - c_i u_{xt}(x_i, t), \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N - 1$$

e

$$w_{1i}(t) = c_i u_t(x_i, t) + k_{1i} u_{xt}(x_i, t), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N - 1.$$

Embora, nos limitemos ao estudo analítico, para

$$k_{0i} \geq 0, \quad k_{1i} = 0 \quad \text{e} \quad c_i = 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N - 1,$$

isto é, para conexões do tipo suporte rígido, os procedimentos e conclusões servem como modelo para o estudo de outras situações. Antes de provar a existência e unicidade do sistema (5.1)-(5.7), faremos um estudo sobre a sua controlabilidade.

5.2 Controlabilidade do Sistema

Antes de comentar sobre a teoria de controle para o nosso problema de N vigas, faremos primeiro um estudo analítico da sua formulação variacional.

Para isto, consideremos as funções

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N m_i \chi_{J_i}(x) \quad \text{e} \quad \mathbf{EI} = \mathbf{EI}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N E_i I_i \chi_{J_i}(x),$$

onde $\chi_{J_i}(x)$ representa a função característica do sub-intervalo intervalo (x_{i-1}, x_i) , e tomemos

$$V = \{u \in H^2(0, L); u(0) = u_x(0) = 0\}.$$

Então, podemos representar a nossa formulação variacional do sistema, como sendo

$$\int_0^L \mathbf{M} u_{tt} v dx + \int_0^L \mathbf{EI} u_{xxxx} v dx = 0,$$

que implica em

$$\sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xxxx} v dx = 0.$$

Logo, integrando por partes e levando em consideração a descontinuidade em algu-

mas variáveis, nas junções, obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i u_{xxx} v \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} - \sum_{i=1}^N E_i I_i u_{xx} v_x \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xx} v_{xx} dx = 0.$$

Usando (5.3)-(5.7), segue

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xx} v_{xx} dx + w_{01}(t)v(x_1) + w_{11}(t)v_x(x_1) \\ & + w_{02}(t)v(x_2) + w_{12}(t)v_x(x_2) + \dots + w_{0N}(t)v(x_N) + w_{1N}(t)v_x(x_N) = 0, \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xx} v_{xx} dx \\ & + \begin{bmatrix} v(x_1) & v_x(x_1) & v(x_2) & v_x(x_2) & \cdots & v(x_N) & v_x(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{01}(t) \\ w_{11}(t) \\ w_{02}(t) \\ w_{12}(t) \\ \vdots \\ w_{0N}(t) \\ w_{1N}(t) \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

De onde, definindo o operador C , como sendo

$$v \rightarrow Cv = (v(x_1), v_x(x_1), v(x_2), v_x(x_2), \dots, v(x_N), v_x(x_N)),$$

isto é,

$$vC^t = \begin{bmatrix} v(x_1) & v_x(x_1) & v(x_2) & v_x(x_2) & \cdots & v(x_N) & v_x(x_N) \end{bmatrix}$$

e

$$W(t) = \begin{bmatrix} w_{01}(t) \\ w_{11}(t) \\ w_{02}(t) \\ w_{12}(t) \\ \vdots \\ w_{0N}(t) \\ w_{1N}(t) \end{bmatrix},$$

chegamos a

$$\sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xx} v_{xx} dx + v C^t W(t) = 0.$$

Assim, concluimos que o termo

$$v C^t W(t),$$

é responsável pelo controle do sistema, de onde, assumindo

$$W(t) = K C u_t(t),$$

temos

$$\sum_{i=1}^N m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{tt} v dx + \sum_{i=1}^N E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_{xx} v_{xx} dx + v C^t K C u_t(t) = 0,$$

isto é

$$\int_0^L \mathbf{M} u_{tt} v dx + \int_0^L \mathbf{E} \mathbf{I} u_{xx} v_{xx} dx + v C^t K C u_t(t) = 0,$$

que representa um sistema equivalente para o problema.

Nota 5.2.1 Em nosso trabalho, consideraremos a matriz K como sendo compostas por N sub-matrizes K_i , de ordem 2×2 , com $1 \leq i \leq N$, localizadas ao longo da

diagonal, onde todas as outras entradas são nulas, isto é

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & \dots & & & 0 \\ \vdots & K_2 & \dots & & \\ & \vdots & K_3 & \dots & \\ & & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & & & \vdots & K_N \end{bmatrix}.$$

O que equivale a dizer, que os nossos controladores nas junções apresentam apenas respostas locais.

Além disso, assumiremos que as sub-matrizes K_i são da forma

$$K_i = \begin{bmatrix} k_{0i} & -c_i \\ c_i & k_{1i} \end{bmatrix}, \quad k_{0i} \geq 0, \quad k_{1i} \geq 0, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

de onde, usando a condição

$$W(t) = KCu_t(t),$$

implica em assumir que

$$k_{0i}u_t(x_i, t) - c_i u_{tx}(x_i, t) = w_{0i}(t), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N$$

e

$$c_i u_t(x_i, t) + k_{1i} u_{tx}(x_i, t) = w_{1i}(t), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

5.3 Existência e Unicidade

Para demonstrar a boa colocação de nosso problema, usaremos métodos similares aos usados no capítulo 3, para uma viga. Apresentaremos, também, definições e resultados importantes que antecedem a demonstração principal. Utilizaremos neste caso, o Teorema de Lumer Phillips (Teorema 1.6.2) ou os Teoremas 1.6.7 e 1.6.8.

Para começar, definiremos o operador linear \mathcal{A} , o espaço de fase e o domínio

onde ele deverá atuar.

5.3.1 Problema de Cauchy Abstrato

Substituindo $\frac{E_i I_i}{m_i} = \alpha_i$ na equação (5.1), segue

$$u_{tt} + \alpha_i u_{xxxx} = 0, \quad \text{em } (x_{i-1}, x_i).$$

Considerando $U^i = \begin{pmatrix} u^i \\ u_t^i \end{pmatrix}$, onde $u^i = u|_{(x_{i-1}, x_i)}$, definiremos a representação abstrata de Cauchy, em cada sub-intervalo (x_{i-1}, x_i) , como sendo

$$\frac{d}{dt} U^i = \begin{pmatrix} u_t^i \\ u_{tt}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha_i (\cdot)_{xxxx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ u_t^i \end{pmatrix}.$$

Portanto, o operador linear A_i em cada sub-intervalo, será definido por

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha_i (\cdot)_{xxxx} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Sendo assim, tomando

$$U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^N \end{pmatrix}, \quad \text{com } U^i = \begin{pmatrix} u^i \\ u_t^i \end{pmatrix},$$

podemos obter a seguinte representação abstrata de Cauchy, para o sistema completo

$$\frac{d}{dt}U = \begin{pmatrix} U_t^1 \\ U_t^2 \\ \vdots \\ U_t^{N-1} \\ U_t^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^{N-1} \\ U^N \end{pmatrix}.$$

Logo, fica evidente a definição de nosso operado \mathcal{A} , como sendo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & A_N \end{pmatrix}, \text{ onde } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

5.3.2 Definição do Espaço de Fase e Domínio do Operador

Procedendo de forma análoga, ao caso de uma viga, consideremos

$$X^i = \{U^i \in H^2(x_{i-1}, x_i) \times L^2(x_{i-1}, x_i)\},$$

$$U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^N \end{pmatrix}, \text{ onde } U^i = \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}, \quad u^i = u|_{(x_{i-1}, x_i)} \quad \text{e} \quad v^i = v|_{(x_{i-1}, x_i)}.$$

Logo, podemos definir o espaço de fase X , como sendo

$$X = \left\{ U \in \prod_{i=1}^N X^i; u^1(0) = u_x^1(0) = 0, u^i(x_i^-) = u^{i+1}(x_i^+), \right. \\ \left. u_x^i(x_i^-) = u_x^{i+1}(x_i^+), 1 \leq i \leq N-1 \right\}. \quad (5.13)$$

Sendo assim, o domínio do operador, para o caso da conexão com suporte rígido, será definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \{ & U \in X; \mathcal{A}U \in X, u_{xxx}^N(L) = \gamma v^N(L), u_{xx}^N(L) = 0, \\ & E_i I_i u_{xxx}^i(x_i^-) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}^{i+1}(x_i^+) = k_{0i} v^i(x_i), \quad k_{0i} \geq 0, \\ & \alpha_i u_{xx}^i(x_i^-) = \alpha_{i+1} u_{xx}^{i+1}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq N-1 \}, \end{aligned}$$

de onde, segue

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \{ & U \in X; U^i \in H^4(x_{i-1}, x_i) \times H^2(x_{i-1}, x_i), u_{xxx}^N(L) = \gamma v^N(L), u_{xx}^N(L) = 0, \\ & E_i I_i u_{xxx}^i(x_i^-) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}^{i+1}(x_i^+) = k_{0i} v^i(x_i), \quad k_{0i} \geq 0, \\ & \alpha_i u_{xx}^i(x_i^-) = \alpha_{i+1} u_{xx}^{i+1}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq N-1 \}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De forma similar ao Capítulo 3, para o caso de uma viga, não é difícil ver, que \mathcal{A} é fechado e seu domínio $D(\mathcal{A})$ é denso no espaço de fase X .

5.3.3 Natureza do Operador

Lema 5.3.1 O operador linear \mathcal{A} , definido em (5.11)-(5.12), é dissipativo.

Prova: Consideremos o produto interno, no espaço de Hilbert X , como sendo

$$(F, U)_X = \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_{xx}^i \overline{u_{xx}^i} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i \overline{v^i} dx \right],$$

onde

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^N \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^N \end{pmatrix}, \quad \text{com } F^i = \begin{pmatrix} f^i \\ g^i \end{pmatrix} \quad \text{e } U^i = \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}.$$

Para todo $U \in D(\mathcal{A})$, temos

$$(\mathcal{A}U, U)_X = \left(\begin{pmatrix} v^1 \\ -\alpha_1 u_{xxxx}^1 \\ v^2 \\ -\alpha_2 u_{xxxx}^2 \\ \vdots \\ v^N \\ -\alpha_N u_{xxxx}^N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ \vdots \\ u^N \\ v^N \end{pmatrix} \right),$$

que implica em

$$(\mathcal{A}U, U)_X = \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_{xx}^i \overline{u_{xx}^i} dx - \alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xxxx}^i \overline{v^i} dx \right]$$

de onde, aplicando integração por partes, segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_X &= \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_{xx}^i \overline{u_{xx}^i} dx \right] - \sum_{i=1}^N \frac{E_i I_i}{m_i} u_{xxx}^i \overline{v^i} \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \alpha_i u_{xx}^i \overline{v^i} \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} - \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i \overline{v_{xx}^i} dx \right]. \end{aligned}$$

Logo, usando as condições de contorno, de transmissão e de continuidade

$$v_x^1(0) = 0, \quad \alpha_i u_{xx}^i(x_i^-) = \alpha_{i+1} u_{xx}^{i+1}(x_i^+) \quad \text{e} \quad v^i(x_i^-) = v^{i+1}(x_i^+), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N-1,$$

teremos

$$(\mathcal{A}U, U)_X = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_{xx}^i \overline{u_{xx}^i} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i \overline{v_{xx}^i} dx \right] - \sum_{i=1}^N \frac{E_i I_i}{m_i} u_{xxx}^i \overline{v^i} \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}.$$

Considerando a parte real, chegamos em

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_X = - \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^N \frac{E_i I_i}{m_i} u_{xxx}^i \overline{v^i} \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right].$$

Finalmente, tomando $m = \max \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$, conseguimos

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_X = -\operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^N \frac{E_i I_i}{m_i} u_{xxx}^i \bar{v}^i \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right] \leq -\operatorname{Re} \left[\frac{N}{m} \sum_{i=1}^N E_i I_i u_{xxx}^i \bar{v}^i \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right],$$

que implica

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_X \leq -\frac{N}{m} \sum_{i=1}^N |v^i(x_i)|^2 \leq 0.$$

□

5.3.4 Equação Resolvente

Considerando

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ \vdots \\ F^N \end{pmatrix} \in X \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^N \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}),$$

com

$$F^i = \begin{pmatrix} f^i \\ g^i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U^i = \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \end{pmatrix}.$$

Substituindo em

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F,$$

teremos

$$\begin{pmatrix} \lambda u^1 - v^1 \\ \lambda v^1 + \alpha_1 u_{xxxx}^1 \\ \lambda u^2 - v^2 \\ \lambda v^2 + \alpha_2 u_{xxxx}^2 \\ \vdots \\ \lambda u^N - v^N \\ \lambda v^N - \alpha_N u_{xxxx}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 \\ g^1 \\ f^2 \\ g^2 \\ \vdots \\ f^N \\ g^N \end{pmatrix},$$

que podemos representar, como

$$\begin{cases} \lambda u^i - v^i = f^i \\ \lambda v^i + \alpha_i u_{xxxx}^i = g^i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5.15)$$

Agora, eliminando v^i e usando as condições de contorno, de continuidade e de transporte, teremos

$$\begin{aligned} \lambda^2 u^i + \alpha_i u_{xxxx}^i &= g^i + \lambda f^i \text{ em } (x_{i-1}, x_i) \\ u^1(0) = u_x^1(0) &= u_{xx}^N(L) = 0 \\ u_{xxx}^N(L) &= \gamma \lambda u^N(L) - \gamma f^N(L) \\ u^i(x_i^-) &= u^{i+1}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ u_x^i(x_i^-) &= u_x^{i+1}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ E_i I_i u_{xxx}^i(x_i^-) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}^{i+1}(x_i^+) &= k_{0i} [\lambda u^i(x_i) - f^i(x_i)], \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ \alpha_i u_{xx}^i(x_i^-) &= \alpha_{i+1} u_{xx}^{i+1}(x_i^+), \quad 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned} \quad (5.16)$$

que correspondem a forma geral das equações do resolvente para o operador \mathcal{A} .

De forma similar ao problema de uma viga, estudaremos a boa colocação deste sistema, neste caso, apenas para $\lambda = 0$. Usaremos, também, o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.5.2) e o Teorema da Regularidade Elíptica (Teorema 1.5.3).

A seguir, definiremos os espaços que serão usados no próximo Lema.

$$\mathbb{X}^i = \{u^i \in H^2(x_{i-1}, x_i)\},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{X} = & \left\{ \mathbb{U} \in \prod_{i=1}^N \mathbb{X}^i; u^1(0) = u_x^1(0) = 0, u^i(x_i^-) = u^{i+1}(x_i^+), \right. \\ & u_x^i(x_i^-) = u_x^{i+1}(x_i^+), \quad \alpha_i u_{xx}^i(x_i^-) = \alpha_{i+1} u_{xx}^{i+1}(x_i^+), \\ & \left. E_i I_i u_{xxx}^i(x_i^-) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}^{i+1}(x_i^+) = k_{0i} u^i(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.2 Para $\lambda = 0$, existe uma única solução para o sistema (5.16), onde

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix} \in \mathbb{X}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^N \end{pmatrix} \in \prod_{i=1}^N [H^2(x_{i-1}, x_i)],$$

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ \vdots \\ g^N \end{pmatrix} \in \prod_{i=1}^N [L^2(x_{i-1}, x_i)].$$

Prova: Substituindo $\lambda = 0$, na equação (5.15), teremos

$$\begin{cases} -v^i = f^i \\ \alpha_i u_{xxxx}^i = g^i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Resta, verificar a existência de solução para

$$\alpha_i u_{xxxx}^i = g^i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

munida das condições de contorno, continuidade e transmissão dadas em (5.16). Faremos inicialmente a formulação variacional do problema, com a finalidade de definir adequadamente os funcionais a serem usados na demonstração. De fato,

multiplicando as equações por w^i , onde

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^N \end{pmatrix} \in \mathbb{X}$$

e integrando em 0 e L , teremos

$$\sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xxxx}^i w^i dx \right] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i w^i dx$$

que implica

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i u_{xxx}^i w^i \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} - \sum_{i=1}^N \alpha_i u_{xx}^i w_x^i \Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} + \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i w_{xx}^i dx \right] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i w^i dx,$$

de onde, segue

$$-\sum_{i=1}^N \alpha_i k_{0i} v^i(x_i) w^i(x_i) + \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i w_{xx}^i dx \right] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i w^i dx,$$

isto é

$$\sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i w_{xx}^i dx \right] = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i w^i dx + \sum_{i=1}^N \alpha_i k_{0i} f^i(x_i) w^i(x_i),$$

onde, $k_{0N} = \gamma E_N I_N$.

Logo, tomando os seguintes funcionais

$$B : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definidos por

$$B(\mathbb{U}, \mathbb{W}) = \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i w_{xx}^i dx \right],$$

$$F(\mathbb{W}) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g^i w^i dx + \sum_{i=1}^N \alpha_i k_{0i} f^i(x_i) w^i(x_i).$$

Com produto interno e norma no espaço \mathbb{X} , como sendo

$$(\mathbb{U}, \mathbb{W})_{\mathbb{X}} = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u_{xx}^i w_{xx}^i dx,$$

$$\|\mathbb{U}\|_{\mathbb{X}}^2 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u_{xx}^i|^2 dx.$$

Não é difícil ver que B é um funcional bilinear coercivo e contínuo, assim como, a linearidade e continuidade do funcional F . Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $\mathbb{U} \in \mathbb{X}$, tal que

$$B(\mathbb{U}, \mathbb{W}) = F(\mathbb{W}), \quad \forall \mathbb{W} \in \mathbb{X}.$$

De onde, concluímos

$$\exists! \mathbb{U} \in \mathbb{X}; \quad \alpha_i u_{xxxx}^i = g^i, \quad \text{com } 1 \leq i \leq N.$$

□

Nota 5.3.1 Pela elipticidade dos operadores $\alpha_i(\cdot)_{xxxx}$, temos também, que $u^i \in H^4(x_{i-1}, x_i)$. Portanto, passando para os espaços X e $D(\mathcal{A})$, concluímos que

$$\forall F \in X, \quad \exists! U \in D(\mathcal{A}), \quad \text{tal que } -\mathcal{A}U = F.$$

Nota 5.3.2 Pelo Lema 5.3.2 e a Nota 5.3.1, concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Nota 5.3.3 Do Lema 5.3.2 e a Nota 5.3.1, concluímos também, que \mathcal{A} é sobrejetivo, portanto, é inversível. Logo, tomando

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I).$$

Pelo Teorema (1.6.7) e considerando

$$B = \lambda \mathcal{A}^{-1}, \quad S = -I \quad \text{e} \quad |\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

segue que $(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I)$ é inversível, assim temos

$$\lambda I - \mathcal{A} \text{ é, também, inversível.}$$

Nota 5.3.4 Da observação anterior, segue também, que $D(\mathcal{A})$ é denso em X . Basta usar o Lema 3.2.3, do capítulo 3.

A seguir enunciaremos o Teorema que garante a Existência e Unicidade do problema de conexão em série de vigas, para conexões do tipo suporte rígido.

Teorema 5.3.1 Sejam $U_0 \in D(\mathcal{A})$ e $t > 0$. Então, existe uma única solução para o sistema (5.1)-(5.7), satisfazendo

$$U(t) \in C(0, \infty; D(\mathcal{A})) \cap C^1(0, \infty; X).$$

Prova: Como $D(\mathcal{A})$ é denso e \mathcal{A} é fechado, por se tratar de um operador diferencial no espaço das distribuições, assim como \mathcal{A} é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$ (conjunto resolvente), o resultado segue da aplicação do Teorema 1.6.8. \square

5.4 Decaimento Exponencial da Energia

Consideraremos a conexão entre as junções do tipo suporte rígido, e o mecanismo de controle, como sendo proporcional a velocidade no ponto da respectiva junção.

A continuação, citaremos definições e Lemas importantes a serem utilizados na demonstração principal.

Definição 5.4.1 Definiremos como energia total do sistema de N vigas acopladas,

a seguinte expressão

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_i(t), \quad (5.17)$$

onde

$$E_i(t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx. \quad (5.18)$$

Definição 5.4.2 Definiremos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(t), \quad (5.19)$$

onde

$$\mathcal{L}_i(t) = (1 - \varepsilon)t \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i x u_t u_x dx, \quad (5.20)$$

com $0 < \varepsilon < 1$.

Lema 5.4.1 Dado o funcional \mathcal{L}_i , definido em (5.20), temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} [Q_x^i] dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} [R^i] dx, \quad (5.21)$$

onde

$$\begin{aligned} Q^i(x, y) &= 2E_i I_i (1 - \varepsilon)t [u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}] - m_i x |u_t|^2 \\ &\quad + 2E_i I_i x u_x u_{xxx} - 2E_i I_i u_x u_{xx} - E_i I_i x |u_{xx}|^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

e

$$R^i(x, t) = \varepsilon m_i |u_t|^2 + E_i I_i (2 + \varepsilon) |u_{xx}|^2. \quad (5.23)$$

Prova: De fato, derivando (5.20) em relação ao tempo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= (1 - \varepsilon) \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx \\ &\quad + (1 - \varepsilon)t \int_{x_{i-1}}^{x_i} [2m_i u_t u_{tt} + 2E_i I_i u_{xx} u_{xxt}] dx \end{aligned}$$

$$+2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i x u_{tt} u_x dx + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i x u_t u_{xt} dx. \quad (5.24)$$

De (5.1), segue que

$$m_i u_{tt} = -E_i I_i u_{xxxx}.$$

Substituindo a igualdade acima em (5.24), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= (1 - \varepsilon) \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx \\ &+ 2(1 - \varepsilon) t E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-u_{xxxx} u_t + u_{xx} u_{xxt}] dx \\ &- 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_{xxxx} u_x dx + 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i x u_t u_{xt} dx. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sabemos que ocorre

$$[u_{xxx} u_t]_x = u_{xxxx} u_t + u_{xxx} u_{tx}$$

e

$$[u_{xx} u_{tx}]_x = u_{xxx} u_{tx} + u_{xx} u_{txx}.$$

De onde, obtemos

$$[u_{xx} u_{tx} - u_{xxx} u_t]_x = u_{xx} u_{txx} - u_{xxxx} u_t. \quad (5.26)$$

Substituindo (5.26) em (5.25), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= (1 - \varepsilon) \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx \\ &+ 2(1 - \varepsilon) t E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_{xx} u_{tx} - u_{xxx} u_t]_x dx \\ &- 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_{xxxx} u_x dx + 2m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_t u_{xt} dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Sabemos, também, que

$$[x |u_t|^2]_x = |u_t|^2 + 2x u_t u_{tx},$$

isto é

$$xu_t u_{tx} = \frac{1}{2} \{ [x |u_t|^2]_x - |u_t|^2 \}. \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.27), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_t|^2 dx + E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx - \varepsilon m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_t|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx + 2(1 - \varepsilon)t E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_{xx} u_{tx} - u_{xxx} u_t]_x dx \\ &\quad - 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_{xxxx} u_x dx + m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [x |u_t|^2]_x dx - m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_t|^2 dx, \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx - \varepsilon m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_t|^2 dx - \varepsilon E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx \\ &\quad + 2(1 - \varepsilon)t E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_{xx} u_{tx} - u_{xxx} u_t]_x dx - 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_{xxxx} u_x dx \\ &\quad + m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [x |u_t|^2]_x dx. \end{aligned}$$

Agrupando de forma conveniente, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= 3E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx - 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} x u_{xxxx} u_x dx \\ &\quad - 2(1 - \varepsilon)t E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [u_{xxx} u_t - u_{xx} u_{tx}]_x dx + m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} [x |u_t|^2]_x dx \\ &\quad - 2E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx - \varepsilon m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_t|^2 dx - \varepsilon E_i I_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u_{xx}|^2 dx, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} E_i I_i [2x u_{xxxx} u_x - 3 |u_{xx}|^2] dx \\ &\quad - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{ 2(1 - \varepsilon)t E_i I_i [u_{xxx} u_t - u_{xx} u_{tx}] \}_x dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i x |u_t|^2]_x dx \end{aligned}$$

$$- \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{2E_i I_i |u_{xx}|^2 + \varepsilon m_i |u_t|^2 + \varepsilon E_i I_i |u_{xx}|^2\} dx. \quad (5.29)$$

Finalmente, sabendo que

$$\begin{aligned} [2xu_{xxx}u_x - 2u_{xx}u_x - x|u_{xx}|^2]_x &= 2u_{xxx}u_x + 2xu_{xxxx}u_x + 2xu_{xxx}u_{xx} - 2u_{xxx}u_x \\ &\quad - 2u_{xx}u_{xx} - |u_{xx}|^2 - 2xu_{xx}u_{xxx}, \end{aligned}$$

segue a relação

$$[2xu_{xxx}u_x - 2u_{xx}u_x - x|u_{xx}|^2]_x = 2xu_{xxxx}u_x - 3|u_{xx}|^2. \quad (5.30)$$

Logo, substituindo (5.30) em (5.29) e agrupando, chegaremos ao resultado desejado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{E_i I_i [2xu_{xxx}u_x - 2u_{xx}u_x - x|u_{xx}|^2] \\ &\quad - m_i x |u_t|^2 + 2(1 - \varepsilon)t E_i I_i [u_{xxx}u_t - u_{xx}u_{tx}]\}_x dx \\ &\quad - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{\varepsilon m_i |u_t|^2 + E_i I_i (2 + \varepsilon) |u_{xx}|^2\} dx. \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.2 Seja \mathcal{L} , o funcional de Lyapunov definido em (5.19)-(5.20), onde u é solução do sistema (5.1)-(5.7). Se

$$m_{i+1} \geq m_i \quad \text{e} \quad E_i I_i \geq E_{i+1} I_{i+1}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, (N - 1),$$

então

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(t) \leq 0, \quad \text{para} \quad t > T_1,$$

isto é

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} [Q_x^i] dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [R^i] dx \right\} \geq 0 \quad \text{para} \quad t > T_1.$$

Prova: Inicialmente trabalharemos com o termo R^i . Sabemos pela definição dada

no Lema 5.4.1, que

$$R^i(x, t) = \varepsilon m_i |u_t|^2 + E_i I_i (2 + \varepsilon) |u_{xx}|^2.$$

Portanto

$$R^i(x, t) \geq \varepsilon [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2], \quad (5.31)$$

que implica em

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} [R^i] dx \right\} \geq 0.$$

Resta agora, provar que

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} [Q_x^i] dx \right\} = \sum_{i=1}^N \{Q^i(x_i, t) - Q^i(x_{i-1}, t)\} \geq 0. \quad (5.32)$$

Para facilitar a notação e a visualização da demonstração, faremos um reagrupamento adequado e definiremos de forma simplificada certos grupos de equações.

Sendo assim, da expressão

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \{Q^i(x_i, t) - Q^i(x_{i-1}, t)\} &= \underbrace{Q^1(x_1, t)}_1 - \underbrace{Q^1(x_0, t)}_0 + \underbrace{Q^2(x_2, t)}_2 - \underbrace{Q^2(x_1, t)}_1 + \underbrace{Q^3(x_3, t)}_3 \\ &\quad - \underbrace{Q^3(x_2, t)}_2 + \dots + \underbrace{Q^{N-1}(x_{N-1}, t)}_{N-1} - \underbrace{Q^{N-1}(x_{N-2}, t)}_{N-2} + \underbrace{Q^N(x_N, t)}_N - \underbrace{Q^N(x_{N-1}, t)}_{N-1}. \end{aligned}$$

Reagrupando e denotando $S_i(t)$ como sendo

$$S_0(t) = -Q^1(x_0, t) = -Q^1(0, t), \quad (5.33)$$

$$S_i(t) = Q^i(x_i, t) - Q^{i+1}(x_i, t), \quad \text{onde } 1 \leq i \leq N-1, \quad (5.34)$$

e

$$S_N(t) = Q^N(x_N, t) = Q^N(L, t). \quad (5.35)$$

Obtemos

$$\sum_{i=1}^N \{Q^i(x_i, t) - Q^i(x_{i-1}, t)\} = \sum_{i=0}^N S_i(t). \quad (5.36)$$

Além disso, da definição dada no Lema 5.4.1 para Q^i , onde

$$Q^i(x, y) = \underbrace{2E_i I_i (1 - \varepsilon) t [u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}]}_{Q^{i1}} - \underbrace{m_i x |u_t|^2}_{Q^{i2}} \\ + \underbrace{2E_i I_i x u_x u_{xxx}}_{Q^{i3}} - \underbrace{2E_i I_i u_x u_{xx}}_{Q^{i4}} - \underbrace{E_i I_i x |u_{xx}|^2}_{Q^{i5}},$$

podemos fazer a seguinte reagrupação

$$Q^{i1}(x, t) = 2E_i I_i (1 - \varepsilon) t [u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}] \quad (5.37)$$

$$Q^{i2}(x, t) = - m_i x |u_t|^2 \quad (5.38)$$

$$Q^{i3}(x, t) = 2E_i I_i x u_x u_{xxx} \quad (5.39)$$

$$Q^{i4}(x, t) = - 2E_i I_i u_x u_{xx} \quad (5.40)$$

$$Q^{i5}(x, t) = - E_i I_i x |u_{xx}|^2. \quad (5.41)$$

Desta forma, teremos

$$Q^i(x, y) = \sum_{j=1}^5 Q^{ij}(x, y).$$

Aproveitando esta notação, podemos definir

$$S^{0j}(t) = -Q^{1j}(x_0, t) = -Q^{1j}(0, t), \quad \text{onde } 1 \leq j \leq 5, \quad (5.42)$$

$$S^{ij}(t) = Q^{ij}(x_i, t) - Q^{i+1,j}(x_i, t), \quad \text{onde } 1 \leq i \leq N - 1 \text{ e } 1 \leq j \leq 5, \quad (5.43)$$

e

$$S^{Nj}(t) = Q^{Nj}(x_N, t) = Q^{Nj}(L, t), \quad \text{onde } 1 \leq j \leq 5. \quad (5.44)$$

Ou seja

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^5 S^{ij}(t), \quad \text{onde } 0 \leq i \leq N, \quad (5.45)$$

que implica em

$$\sum_{i=1}^N \{Q^i(x_i, t) - Q^i(x_{i-1}, t)\} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^5 S^{ij}(t). \quad (5.46)$$

No que segue, faremos um estudo analítico das expressões $S_0(t)$, $S_i(t)$ em $1 \leq i \leq N-1$, $S_N(t)$ e observaremos as condições a serem impostas, para que elas assumam sempre valores não negativos.

(i) **Analisando a expressão $S_0(t)$.**

Como $x_0 = 0$, usando (5.22) e (5.33), temos

$$\begin{aligned} S_0(t) = & -2E_1 I_1 (1 - \varepsilon) t [u_t(0, t) u_{xxx}(0, t) - u_{xt}(0, t) u_{xx}(0, t)] \\ & + 2E_1 I_1 u_x(0, t) u_{xx}(0, t). \end{aligned}$$

Pelas condições de contorno dadas em (5.3), segue

$$u_t(0, t) = u_{xt}(0, t) = 0.$$

Em consequência disso, obtemos

$$S_0(t) = 0.$$

(ii) **Analisando a expressão $S_i(t)$ para $1 \leq i \leq N-1$.**

Neste caso, observaremos separadas as expressões S^{i1} , S^{i2} , S^{i3} , S^{i4} e S^{i5} .

De fato, usando (5.37) e (5.43), para S^{i1} , teremos

$$S^{i1}(t) = Q^{i1}(x_i, t) - Q^{i+1,1}(x_i, t),$$

que implica em

$$S^{i1}(t) = 2E_i I_i (1 - \varepsilon) t [u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}] - 2E_{i+1} I_{i+1} (1 - \varepsilon) t [u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}].$$

Agrupando e usando as definições dadas para os controladores em (5.6) e (5.7), segue

$$S^{i1}(t) = 2(1 - \varepsilon)t \left\{ \underbrace{u_t [E_i I_i u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}(x_i^+, t)]}_{w_{0i}(t)} - \underbrace{u_{xt} [E_i I_i u_{xx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xx}(x_i^+, t)]}_{-w_{1i}(t)} \right\}.$$

Considerando um suporte rígido nas junções, com controlador de cisalhamento proporcional a velocidade na junção, isto é, o controlador $w_{1i}(t) = 0$ e supondo $w_{0i}(t) = k_{0i}u_t$, chegamos a

$$S^{i1}(t) = 2(1 - \varepsilon)k_{0i}t |u_t(x_i, t)|^2 \geq 0. \quad (5.47)$$

Para S^{i2} , temos

$$S^{i2}(t) = Q^{i2}(x_i, t) - Q^{i+1,2}(x_i, t).$$

De onde, usando (5.38), segue

$$S^{i2}(t) = (-m_i + m_{i+1})x_i |u_t(x_i, t)|^2.$$

Logo, concluímos que

$$S^{i2}(t) \geq 0, \text{ se } m_{i+1} \geq m_i. \quad (5.48)$$

Analisando S^{i3} , vemos que

$$S^{i3}(t) = Q^{i3}(x_i, t) - Q^{i+1,3}(x_i, t).$$

Assim de (5.39), temos

$$S^{i3}(t) = 2x_i u_x \underbrace{\left[E_i I_i u_{xxx}(x_i^-, t) - E_{i+1} I_{i+1} u_{xxx}(x_i^+, t) \right]}_{w_{0i}(t)},$$

de onde, segue

$$S^{i3}(t) = 2k_{0i} x_i u_x(x_i, t) u_t(x_i, t). \quad (5.49)$$

Este termo é absorvido por $S^{i1}(t)$ e $\int_{x_{i-1}}^{x_i} [R^i] dx$.

Para S^{i4} , obtemos

$$S^{i4}(t) = Q^{i,4}(x_i, t) - Q^{i+1,4}(x_i, t).$$

Considerando (5.40), chegamos a

$$S^{i4}(t) = 2u_x \underbrace{\left[-E_i I_i u_{xx}(x_i^-, t) + E_{i+1} I_{i+1} u_{xx}(x_i^+, t) \right]}_{w_{1i}(t)}.$$

Considerando um suporte rígido nas junções, segue

$$S^{i4}(t) = 0. \quad (5.50)$$

Finalmente, analisando S^{i5} , usando (5.41) e (5.44), concluímos que

$$\begin{aligned} S^{i5}(t) &= Q^{i,5}(x_i, t) - Q^{i+1,5}(x_i, t) \\ &= x_i \left[-E_i I_i |u_{xx}(x_i^-, t)|^2 + E_{i+1} I_{i+1} |u_{xx}(x_i^+, t)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Da condição do suporte rígido nas junções, temos

$$E_i I_i u_{xx}(x_i^-, t) = E_{i+1} I_{i+1} u_{xx}(x_i^+, t),$$

o que implica em

$$E_i I_i |u_{xx}(x_i^-, t)|^2 = \frac{(E_{i+1} I_{i+1})^2}{E_i I_i} |u_{xx}(x_i^+, t)|^2.$$

Assim, substituindo esta expressão na equação acima, segue

$$\begin{aligned} S^{i5}(t) &= x_i \left[-\frac{(E_{i+1} I_{i+1})^2}{E_i I_i} |u_{xx}(x_i^+, t)|^2 + E_{i+1} I_{i+1} |u_{xx}(x_i^+, t)|^2 \right] \\ &= x_i \left[-\frac{(E_{i+1} I_{i+1})^2}{E_i I_i} + E_{i+1} I_{i+1} \right] |u_{xx}(x_i^+, t)|^2. \end{aligned}$$

De onde, obtemos

$$S^{i5}(t) = x_i [-E_{i+1} I_{i+1} + E_i I_i] \left(\frac{E_{i+1} I_{i+1}}{E_i I_i} \right) |u_{xx}(x_i^+, t)|^2.$$

Logo, concluímos que

$$S^{i5}(t) \geq 0, \quad \text{se} \quad E_i I_i \geq E_{i+1} I_{i+1}. \quad (5.51)$$

(iii) **Analisando a expressão** $S_N(t)$.

Como $x_N = L$, de (5.22) e (5.35), segue

$$\begin{aligned} S_N(t) &= 2E_N I_N (1 - \varepsilon) t [u_t(L, t) u_{xxx}(L, t) - u_{xt}(L, t) u_{xx}(L, t)] \\ &\quad - m_N L |u_t(L, t)|^2 + 2E_N I_N L u_x(L, t) u_{xxx}(L, t) \\ &\quad - 2E_N I_N u_x(L, t) u_{xx}(L, t) - E_N I_N L |u_{xx}(L, t)|^2. \end{aligned}$$

Usando as condições (5.3) e (5.10), temos

$$\begin{aligned} S_N(t) &= 2E_N I_N (1 - \varepsilon) t [u_t(L, t) k_{0N} u_t(L, t)] - m_N L |u_t(L, t)|^2 \\ &\quad + 2E_N I_N L u_x(L, t) k_{0N} u_t(L, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2k_{0N}E_N I_N(1 - \varepsilon)t |u_t(L, t)|^2 - m_N L |u_t(L, t)|^2 \\
&\quad + 2k_{0N}E_N I_N L u_x(L, t)u_t(L, t).
\end{aligned}$$

De onde, fazendo uso da relação

$$- |u_x(L, t)| |u_t(L, t)| \geq -\frac{1}{2} |u_x(L, t)|^2 - \frac{1}{2} |u_t(L, t)|^2,$$

temos

$$\begin{aligned}
S_N(t) &\geq 2k_{0N}E_N I_N(1 - \varepsilon)t |u_t(L, t)|^2 - m_N L |u_t(L, t)|^2 \\
&\quad - 2k_{0N}E_N I_N L |u_x(L, t)| |u_t(L, t)| \\
&\geq 2k_{0N}E_N I_N(1 - \varepsilon)t |u_t(L, t)|^2 - m_N L |u_t(L, t)|^2 \\
&\quad + k_{0N}E_N I_N L |u_x(L, t)|^2 + k_{0N}E_N I_N L |u_t(L, t)|^2 \\
&= 2k_{0N}E_N I_N(1 - \varepsilon)t |u_t(L, t)|^2 + [k_{0N}E_N I_N - m_N] |u_t(L, t)|^2 \\
&\quad + k_{0N}E_N I_N L |u_t(L, t)|^2.
\end{aligned}$$

Logo, existirá um T_1 , suficientemente grande, tal que

$$S_N(t) \geq 0, \quad \text{para } t > T_1. \quad (5.52)$$

Portanto, de (5.46)-(5.52), concluímos que.

Se

$$m_{i+1} \geq m_i \quad \text{e} \quad E_i I_i \geq E_{i+1} I_{i+1}.$$

Então

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^5 S^{ij}(t) \geq 0, \quad \text{para } t > T_1.$$

□

Teorema 5.4.1 Considerando u solução do sistema (5.1)-(5.7), satisfazendo as

condições do Teorema 5.3.1, assim como

$$m_{i+1} \geq m_i \quad \text{e} \quad E_i I_i \geq E_{i+1} I_{i+1}, \quad \text{com} \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Então, existem $\mu, \lambda > 0$, tais que a energia do sistema, tem decaimento exponencial uniforme, isto é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx \\ & \leq \mu e^{-\lambda t} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_1|^2 + E_i I_i |(u_0)_{xx}|^2] dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Prova: Considerando o funcional de Lyapunov definido em (5.19)-(5.20) e o Lema 5.4.2, existe $c_1 = c(T_1) > 0$, tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(T_1) \leq c_1 E(0), \quad \forall t \geq T_1.$$

Além disso, é fácil mostrar que existe $c_2 > 0$, tal que

$$\left| \int_0^L 2xu_t(x, t)u_x(x, t)dx \right| \leq c_2 E(t).$$

Logo, tomando $M = \max \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ e $c = c_2 M$, segue

$$[2(1 - \varepsilon)t - c] E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq [2(1 - \varepsilon)t + c] E(t), \quad \text{para} \quad t \geq T_1,$$

que implica em

$$[2(1 - \varepsilon)t - c] E(t) \leq c_1 E(0), \quad \text{para} \quad t \geq T_1.$$

Considerando $T_2 = \max \left\{ T_1, \frac{c}{2(1 - \varepsilon)} \right\}$, para algum $c_2 = c(T_2) > 0$, temos

$$E(t) \leq \frac{c_2 E(0)}{[2(1 - \varepsilon)t - c]}, \quad \text{para} \quad t > T_2.$$

Como a energia $E(t)$ é limitada em $[0, T_2]$, a inequação se estende para as condições

iniciais. Então, teremos

$$\int_{T_2}^{\infty} E(t)^2 dt \leq c_2^2 E(0)^2 \int_{T_2}^{\infty} \left[\frac{1}{2(1-\varepsilon)t - c} \right]^2 dt < \infty.$$

De onde, aplicando o Teorema 1.6.6 e usando a norma da energia

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \right\|_X^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i |u_t|^2 + E_i I_i |u_{xx}|^2] dx,$$

concluimos a existência de $\mu, \lambda > 0$, tais que

$$E(t) \leq \mu e^{-\lambda t} E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

□

Nota 5.4.1 Considerando $\alpha = \frac{EI}{m}$, como sendo o coeficiente de elasticidade de uma viga, então

$$m_{i+1} \geq m_i \quad \text{e} \quad E_i I_i \geq E_{i+1} I_{i+1}, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

implicará em

$$\frac{E_{i+1} I_{i+1}}{m_{i+1}} \leq \frac{E_i I_i}{m_i},$$

isto é

$$\alpha_{i+1} \leq \alpha_i, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Conclusão 5.4.1 Os resultados encontrados fornecem uma importante interpretação física, com relação a estabilidade em uma conexão de vigas em série. Se os coeficientes de elasticidade das vigas ligadas em série, guardam uma relação decrescente, desde seu extremo engastado até o seu extremos livre, então a supressão de vibrações é conseguida com apenas um agente amortecedor externo, localizado em seu extremo livre, e mecanismos de controle, usados nas junções.

Referências Bibliográficas

- R. A. Adams. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York (1975).
- S. Arantes e J. E. M. Rivera. Exponential decay for a thermoelastic beam between two stops. **Journal of Thermal Stresses**, 31:537–556, 2008.
- H. Brézis. **Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, Madrid (1984).
- G. Chen, M. C. Delfour, A. M. Krall, e G. Payres. Modeling stabilization and control of serially connected beams. **SIAM J. Control Optim.**, 25(3):526–546, 1987. ISSN 0363-0129.
- A. M. Gomes. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. IM-UFRJ, Rio de Janeiro (2005).
- T. J. Hughes. **The finite Element Method-Linear Static and Dynamical Finite Element Analysis**. Dover Publications, New York (2000).
- J. L. Lions e E. Magenes. **Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications**. Springer-Verlag, New York (1972).
- H. P. Oquendo e J. E. M. Rivera. The transmission problem for thermoelastic beams. **Advances in Mathematical Science and Applications**, 12:1–20, 2002.
- A. Pazy. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York (1983).

- J. E. M. Rivera. **Introdução às Equações Diferenciais Parciais**. LNCC-Petrópolis, Rio de Janeiro (2004)a.
- J. E. M. Rivera. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. LNCC-Petrópolis, Rio de Janeiro (2004)b.
- J. E. M. Rivera. **Semigrupos e Equações Diferenciais Parciais**. LNCC-Petrópolis, Rio de Janeiro (2007).
- J. E. M. Rivera, G. Bonfanti, e M. G. Naso. Global existence and exponential stability for a contact problem between two thermoelastic beams. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 345:186–202, 2008.
- S. R. Singiresu. **Vibrações Mecânicas**. Pearson Prentice Hall, São Paulo (2008).
- W. T. Thomson. **Teoria da Vibração com Aplicações**. Interciência Ltda., Rio de Janeiro (1978).
- S. P. Timoshenko. **History of Strength of Materials**. Mac Graw-Hill, New York (1953).
- S. P. Timoshenko. **Theory of Elasticity**. Mc Graw - Hill, New York (1970).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)