

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Modelagem de Dispositivos Eletromagnéticos Através de
Métodos sem Malha**

Por

Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**MODELAGEM DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS
ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHA**

Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-
SÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Renato Simões Silva, D.Sc
(Presidente)

Prof. Renato Cardoso Mesquita, D.Sc.

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc.

Prof. José Karam Filho, D.Sc.

Prof. João Pedro de Assumpção Bastos, D.Sc.

Prof. Elson José da Silva, Ph.D

Prof. Luiz Lebensztajn, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
OUTUBRO DE 2010

Coppoli, Eduardo Henrique da Rocha

XXXX modelagem de dispositivos eletromagnéticos através de métodos sem malha / Eduardo Henrique da Rocha Coppoli. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

CXXXV, 135 p. : il.; 29 cm

Orientadore(s): Renato Simões Silva e Renato Cardoso Mesquita

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

1. Métodos sem Malha em Eletromagnetismo. 2. Meshless. 3. Eletromagnetismo. 4. Meshfree. I. Silva, Renato Simões. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD XXX.XXX

e.pí.gra.fe

When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind; it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely in your thoughts advanced to the state of Science, whatever the matter may be.”

(Fonte: Lord Kelvin - PLA, vol. 1, "Electrical Units of Measurement"-1883-05-03)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Giselle
e a meu filho Henrique que me
acompanharam e apoiaram em todos os
momentos desta trajetória.

Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas com os quais tanto aprendi, em particular aos amigos Adilson Vicente Xavier, Leonardo Goliatt da Fonseca, Dilberto da Silva Almeida Júnior e Manuel Jesus Barreda.

Aos meus orientadores, Professor Renato Simões Silva e Professor Renato Cardoso Mesquita meus sinceros agradecimentos pela confiança depositada em mim e pelo tempo dedicado a este trabalho.

À Professora Maria Teresa Sotomayor Emery, meus agradecimentos pela contribuição no texto.

Agradeço também à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Finalmente agradeço à WEG Equipamentos Elétricos S/A, em nome dos engenheiros Sebastião Lauro Nau e Alexandre Postol Sobrinho pelos dados técnicos repassados.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MODELAGEM DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS ATRAVÉS DE MÉTODOS SEM MALHA

Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

Outubro , 2010

Orientador: Renato Simões Silva, D.Sc

Co-orientador: Renato Cardoso Mesquita, D.Sc.

Métodos sem malha constituem uma classe de métodos numéricos usualmente aplicados na solução de equações diferenciais parciais (PDE). A principal característica destes métodos é que os mesmos não necessitam de uma malha como a usada nos métodos de elementos finitos. Esta característica pode ser bastante útil quando se está modelando estruturas móveis, situação onde geralmente se necessita de um processo de reconstrução da malha.

Este trabalho apresenta soluções para alguns dos principais aspectos encontrados na modelagem de dispositivos eletromagnéticos através do método sem malha denominado *Element-Free Galerkin Method*. Problemas como descontinuidade de materiais, domínios periódicos, imposição de condições de contorno essenciais, acoplamento entre as equações de campo e de circuito e modelagem de movimento são tratados nesta tese.

Problemas de eletromagnetismo com materiais descontínuos constituem uma situação muito comum e são a causa de alguns problemas para os métodos sem malha. Geralmente esta característica leva a oscilações espúrias nas curvas do campo elétrico e magnético. Para se resolver este tipo de problema é proposta a utilização de funções de peso especiais na implementação do método.

O uso de funções de peso especiais também permitirá que a imposição das

condições de contorno essenciais seja feita de maneira similar ao Método de Elementos Finitos. Este tipo de função propiciará também a simplificação da formulação variacional e do código computacional.

Uma nova abordagem para o tratamento de problemas com fronteiras periódicas é proposta, fazendo uso de funções de peso especiais e na manipulação do sistema de equações.

Este trabalho também apresenta um método que permite o acoplamento entre equações de circuito e do campo magnético no domínio do tempo para o *EFGM*. Para tal, uma máquina de indução trifásica é usada como exemplo, sendo apresentadas suas equações acopladas entre campo magnético e circuito elétrico. Como etapa final do trabalho uma abordagem de modelagem do movimento desta máquina elétrica é proposta.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

ELECTROMAGNETIC DEVICES MODELED BY MESHLESS METHODS

Eduardo Henrique da Rocha Coppoli

October, 2010

Advisor: Renato Simões Silva, D.Sc

Co-advisor: Renato Cardoso Mesquita, D.Sc.

Meshless Methods, also called Meshfree Methods are a class of numerical methods used to solve partial differential equations (PDE). The main characteristic of these methods is that they do not need a mesh like the one used in the Finite Element Method. In this sense meshless methods are very useful when modeling moving structures where it is necessary to use a remesh process.

This work presents solutions for some important problems founded in modeling electromagnetic devices with *Element-Free Galerkin Method*. Aspects such as material discontinuities, periodic domains, imposition of essential boundary conditions, field circuit coupling, eddy currents and movement modeling are treated.

Electromagnetic problems with material discontinuities is a very common situation and causes some problems to meshless methods. Very often this material characteristic take to spurious oscillations in electric and magnetic field curves. As shown in this work to solve problems like this it is necessary the use of some especial weight functions in the method implementation.

The use of these special weight functions also allows the imposition of essential boundary conditions in the meshless method like it is done in the Finite Element Method. This kind of treatment will simplify the problem formulation and the computational code.

For problems with periodic boundaries, a situation where it is possible to reduce the problem domain, a new approach is proposed based in the use of an appropriate weight function and in the system manipulation.

This work also presents a method which enables coupling between equations of electric circuits and a magnetic field for a time domain model making use of a meshless method. A three-phase induction machine is used as example and its field-circuit transient coupling equations are presented. Finally, a movement modeling approach is proposed for this machine.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelagem Matemática do Problema	8
2.1	Cálculo de Campos Magnéticos através do Potencial Vetor Magnético	8
2.1.1	Cálculo do Potencial Vetor Magnético Utilizando Discretização Temporal	10
2.2	Modelagem da Máquina de Indução	16
2.2.1	Região Fora do Rotor	17
2.2.2	Região do Rotor	18
3	Métodos sem Malha	28
3.1	Métodos sem Malha	30
3.1.1	<i>Smooth Particle Hydrodynamics</i>	32
3.1.2	<i>Element-Free Galerkin Method (EFGM)</i>	33
3.1.3	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin-MLPG Method</i>	37
3.1.4	<i>Point Interpolation Method (PIM)</i>	39
3.1.5	<i>Local Point Interpolation Method</i>	43
3.1.6	Escolha do Método sem Malha	45
4	Interpolating Element-Free Galerkin Method	48
4.1	<i>Interpolating Moving Least Squares</i>	49

4.2	<i>Interpolating Element-Free Galerkin Method</i>	54
5	Resultados	60
5.1	Pré-processamento	60
5.2	Tratamento de Distribuições Não Uniformes de Nós	61
5.3	Tratamento de descontinuidade de materiais	64
5.4	Indução de Correntes	67
5.5	Máquina de Indução	73
5.5.1	Fronteiras Periódicas	73
5.5.2	Variação do Fluxo Magnético no Interior da Máquina	82
5.5.3	Movimento da Máquina de Indução	86
6	Capítulo 6 – Conclusões	95
6.1	Visão Geral do Trabaho	95
6.2	Contribuições deste Trabalho	98
6.3	Trabalhos futuros e considerações finais	99
	Referências Bibliográficas	100
	Apêndice	
A	Fundamentos de Eletromagnetismo	104
A.1	A Lei de Coulomb	104
A.2	Intensidade de Campo Elétrico	105
A.3	Diferença de Potencial Elétrico	105
A.4	Intensidade de Campo Magnético \mathbf{H}	106
A.5	Densidade de Fluxo Magnético \mathbf{B} e Permeabilidade Magnética μ	106
A.6	Densidade de Fluxo Elétrico \mathbf{D} e Permissividade Elétrica ϵ	107

A.7	Densidade de Corrente e Condutividade	107
A.8	Equações de Maxwell	108

Lista de Figuras

Figura

1.1	Movimento da máquina elétrica através de Macro-elemento (Bastos et al. (2003)).	4
1.2	Movimento da máquina elétrica através de faixa móvel (Bastos et al. (2003)).	5
2.1	Domínio bidimensional com suas fronteiras, materiais, fonte de corrente e corrente induzida.	9
2.2	Geometria da máquina de indução.	17
2.3	Condutor do tipo barra.	19
2.4	Esquema reduzido de um rotor de uma máquina de indução com quatro barras.	23
3.1	Domínios de influência retangulares.	30
3.2	Domínio de suporte para um ponto genérico \hat{x} (Viana (1998)). . . .	31
3.3	Domínio para problemas com formulação fraca global (Liu (2003)). .	34
3.4	Domínio para problemas com formulação fraca local (Liu (2003)). .	38
4.1	Função peso do tipo spline.	55
4.2	Função peso utilizada no <i>IMLS</i>	55
4.3	Capacitor de dois materiais.	56
4.4	Potencial elétrico ao longo do capacitor de dois materiais - função peso Spline.	57
4.5	Potencial elétrico ao longo do capacitor de dois materiais- <i>IMLS</i> . . .	57

5.1	Geometria de uma máquina elétrica gerada pelo <i>Femm</i>	61
5.2	Circuito magnético estático composto por uma região de alta permeabilidade magnética separada por um entreferro e excitado por uma fonte de corrente.	63
5.3	Distribuição nodal utilizada no circuito magnético.	64
5.4	Indução magnética utilizando $d_{Ix}=0.81\text{cm}$ e $d_{Iy}=0.81\text{cm}$ e sem a correção das distâncias médias entre os nós.	65
5.5	Indução magnética utilizando $d_{Ix}=0.81\text{cm}$ e $d_{Iy}=0.81\text{cm}$ e com a correção das distâncias médias entre os nós.	65
5.6	Critério da visibilidade onde as circunferências representam a abrangência dos domínios de influência dos nós.	66
5.7	Campo elétrico na seção do capacitor de dois materiais utilizando a função peso Spline e o <i>IMLS</i> - $\alpha = 3$	67
5.8	Circuito magnético formado por material com alta permeabilidade magnética separado por um entreferro de uma região P com elevada condutividade e onde serão induzidas correntes.	68
5.9	Corrente de excitação utilizada no circuito magnético da figura 5.8.	69
5.10	Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,0025 segundos. . .	69
5.11	Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,005 segundos. . . .	70
5.12	Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,130 segundos. . . .	70
5.13	Potencial no meio da barra condutora em 0,130 segundos - <i>EFGM-FEMM</i>	71
5.14	Módulo do campo magnético no meio da barra condutora a 1,25 mm de altura - <i>EFGM-CST</i>	72
5.15	Módulo do campo magnético no meio da barra condutora a 10,625 mm de altura - <i>EFGM-CST</i>	72
5.16	Estrutura Periódica. O domínio definido pelas linhas A,B,C,D é repetido e consiste da única parte da estrutura que precisa ser analisado Bastos et al. (2003).	74

5.17	Fronteira periódica onde os nós i e i' constituem um par periódico e os círculos ao redor dos mesmos representam seus domínios de influência.	74
5.18	Montagem do sistema utilizada na imposição das condições de fronteiras periódicas ou anti-periódicas.	74
5.19	Fronteira periódica completa considerando os nós além da borda. . .	76
5.20	Estrutura Anti-periódica. O domínio definido pelas linhas A,B,C,D é repetido e consiste da única parte da estrutura que precisa ser analisado Bastos et al. (2003).	76
5.21	Estrutura periódica ou anti-periódica.	76
5.22	Fluxo resultante em uma estrutura periódica – <i>EFGM/IMLS</i> com 1498 nós.	77
5.23	Fluxo resultante em uma estrutura anti-periódica – <i>EFGM/IMLS</i> com 1498 nós.	78
5.24	Regiões para comparação do potencial magnético: <i>FEM</i> e <i>EFGM IMLS</i>	78
5.25	Distribuição do potencial ao longo da fronteira periódica <i>FEM</i> e <i>EFGM</i>	79
5.26	Distribuição do potencial ao longo da linha ortogonal à fronteira anti-periódica	79
5.27	Distribuição de fluxo magnético na máquina de indução utilizando o Método de Elementos Finitos.	80
5.28	Distribuição de fluxo magnético na máquina de indução utilizando <i>EFGM</i> com o <i>IMLS</i>	81
5.29	Potencial magnético ao longo da fronteira anti-periódica da máquina de indução.	82
5.30	Fluxo magnético no interior da máquina em $10 \Delta t$	83
5.31	Fluxo magnético no interior da máquina em $20 \Delta t$	84

5.32	Variação temporal do potencial vetor magnético no ponto $x=15,5\text{cm}$ e $y=18,9\text{cm}$ do interior do rotor.	84
5.33	Variação temporal do potencial vetor magnético no ponto $x=49,9\text{cm}$ e $y=36,7\text{ cm}$ do interior do estator.	84
5.34	Corrente induzida na terceira barra do rotor - FEM/EFGM.	85
5.35	Corrente induzida na sexta barra do rotor - FEM/EFGM.	85
5.36	Tensões induzidas na terceira e sexta barras do rotor - EFGM.	85
5.37	Esquema de rotação dos nós utilizado no movimento da máquina elétrica.	86
5.38	Disposição das fronteiras anti-periódicas após o giro.	89
5.39	Disposição dos nós após o giro. A fronteira anti-periódica ainda se encontra incompleta.	89
5.40	Disposição dos nós após o giro. Obs. A fronteira anti-periódica foi completada.	90
5.41	Disposição dos nós após o giro (ampliação). Obs. A fronteira anti- periódica foi completada.	90
5.42	Distribuição do fluxo magnético com a máquina ainda travada em $15 \Delta t$	91
5.43	Distribuição do fluxo magnético na máquina em $16 \Delta t$	92
5.44	Distribuição do fluxo magnético na máquina em $17 \Delta t$	92
5.45	Distribuição do fluxo magnético na máquina em $18 \Delta t$	92
A.1	Lei de Coulomb.	104
A.2	Campo magnético gerado por uma carga em movimento.	106
A.3	Condutor sendo percorrido por uma corrente I	108
A.4	Lei circuital de Ampère.	109
A.5	Linhas de fluxo magnético.	111
A.6	Fluxo magnético variável.	112
A.7	Fluxo elétrico devido a uma carga positiva Q	113

Lista de Tabelas

Tabela

3.1	Funções de base radiais com parâmetros da função de forma adimensionais.	42
3.2	Comparação entre funções de forma.	45
4.1	Erros nas normas L^2 e H^1 para o potencial elétrico utilizando a função peso spline e espaçamento entre nós h.	58
4.2	Erros nas normas L^2 e H^1 para o potencial elétrico utilizando a função peso $w_i(r) = \frac{1}{r^{2n+\varepsilon}}$ e espaçamento entre nós h.	58

Lista de Siglas e Abreviaturas

- **A**: Potencial vetor magnético dado em Webber/metro.
- \dot{A} : Derivada parcial em relação ao tempo da componente escalar do potencial vetor magnético.
- **A**: Unidade de corrente elétrica dada em Ampère.
- **B**: Indução magnética dada em Webber/metro².
- C^2 : Função contínua com suas primeira e segunda derivadas contínuas.
- C_k : Ordem de consistência k do método sem malha.
- d_I : Dimensão do domínio de influência
- **E**: Campo elétrico dado em Volt/metro.
- *EFGM: Element-Free Galerkin Method.*
- **H**: Campo magnético dado em Ampère/metro.
- H^0 : Espaço de funções com quadrado integrável.
- H^1 : Espaço de funções cuja derivada primeira possui quadrado integrável.
- \hat{H}^0 : Espaço das funções aproximadas com quadrado integrável, sendo que $\hat{H}^0 \subset H^0$.
- \hat{H}^1 : Espaço das funções aproximadas cuja derivada primeira possui quadrado integrável, sendo que $\hat{H}^1 \subset H^1$.
- **I**: Corrente elétrica dada em Ampère.
- I_t : Corrente na barra do rotor.
- *IMLS: Intrpolating Moving Least Squares.*
- **J**: Densidade de corrente dada em Ampère/metro²
- J_T : Densidade total de corrente dada em ampère/metro².
- J_s : Densidade de corrente externa aplicada no circuito dada em ampère/metro².

- \mathbf{J}_e : Densidade de corrente induzida dada em ampère/metro².
- \mathbf{K} : Matriz de rigidez.
- *LPIM: Local Point Interpolation Method.*
- *LRPIM: Local Radial Point Interpolation Method.*
- *MLPG: Meshless Local Petrov Galerkin.*
- *MLS: Moving Least Squares.*
- *MLSRKPM: Moving Least Squares Reproducing Kernel Particle Method.*
- \mathbf{N} : Matriz de massa.
- \mathbf{n} : Vetor unitário normal apontado para fora da fronteira.
- \mathbf{P}_m : Matriz de momento.
- *PIM: Point Interpolation Method.*
- R_t : Resistência *dc* do condutor dada em ohms.
- *RBF: Radial basis function.*
- *rad*: radianos
- *SPH: Smooth Particle Hydrodynamics.*
- \mathbf{U} : Tensão dada em Volt.
- \mathbf{U}_t : Tensão na barra do rotor dada em Volt.
- \mathbf{V} : Unidade de tensão elétrica dada em Volt.
- \mathbf{Wb} : Unidade de fluxo magnético dado em Webber.
- \widehat{W} : Função peso.
- w_i : Função peso discreta.
- \mathbf{x} : Coordenada (x,y).
- Γ : Fronteira.
- Γ_u : Fronteira de Dirichlet.
- Γ_t : Fronteira de Neumann.
- Γ_{Qi} : Fronteira dentro do domínio Ω .
- Γ_{Qu} : Fronteira dentro do domínio Ω e que intercepta a fronteira Γ_u .
- Γ_{Qt} : Fronteira dentro do domínio Ω que intercepta a fronteira Γ_t .

- Δ : Operador Laplaciano.
- ϵ : Número real positivo pequeno.
- δu : Função de teste para a função de campo.
- $\delta \lambda$: Função de teste para o multiplicador de Lagrange.
- ϕ_i : Função de forma discreta.
- Φ : Vetor função de forma.
- Φ_x : Derivada parcial do vetor função de forma em relação à coordenada x.
- Φ_y : Derivada parcial do vetor função de forma em relação à coordenada y.
- λ : Multiplicador de Lagrange.
- μ : Permeabilidade do material dada em Henry/metro.
- ν : Relutividade do material dada em Ampère×metro/Webber
- σ : Condutividade do material dada em Simens/metro.
- ∇ : Operador gradiente.
- Ω : Domínio
- Ω_Q : Domínio de quadratura.

Capítulo 1

Introdução

A modelagem computacional de um fenômeno físico usualmente passa pelo levantamento das equações que descrevem seu comportamento, sendo a maioria destes modelos baseados em equações diferenciais parciais ou EDPs.

Levantadas as equações, uma etapa natural deste processo constitui a solução destas EDPs através de um método numérico. A escolha correta deste método passa a ser um fator decisivo em questões relacionadas à precisão, estabilidade e ao custo computacional envolvidos.

Dentre os diversos métodos comumente utilizados na solução de modelos matemáticos destacam-se aqueles que fazem uso de malhas como o Método de Elementos Finitos, as Diferenças Finitas e o Método dos Volumes Finitos.

Contudo, algumas características verificadas em determinados tipos de problemas fizeram aparecer novas técnicas numéricas na tentativa de resolver tais questões. Considere, por exemplo, problemas onde as fronteiras são alteradas com o tempo, como uma máquina elétrica em movimento, ou quando trincas em uma superfície aumentam continuamente. Outro exemplo seria uma estrutura que se deforma a medida que o tempo evolui. Nestes casos, quando é aplicado um método como o de elementos finitos, o que acontece normalmente é uma acentuada deformação nos elementos gerando perda de precisão. Para contornar este tipo de situação, normalmente é construída uma nova malha a medida que estas fronteiras se movem. Este processo além de não ser trivial, pode ser computacionalmente caro,

principalmente quando se tratando de geometrias tridimensionais. Para problemas desta natureza uma nova classe de método tem sido desenvolvida, os denominados Métodos Sem Malha ou *Meshless Methods*.

Esta classe de métodos teve origem com o *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* ou Método de Hidrodinâmica de Partículas Suavizado que data de 1977. Contudo, somente a partir de 1990 tais métodos experimentaram um forte desenvolvimento, propiciado principalmente pela evolução da tecnologia de computadores digitais. A partir desta data, surgiram diversos métodos sem malha tais como o *Diffuse Element Method (DEM)*, o *Element-Free Galerkin Method (EFGM)*, o *H-p Cloud Method*, o *Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)*, o *Método Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)*, o *Point Interpolation Method (PIM)*, o *Local Point Interpolation Method (LPIM)* e o *Partition of Unit Method (PUM)*, dentre outros (Viana (2006)).

Inicialmente os métodos sem malha tiveram como principais aplicações problemas ligados à mecânica computacional, área ainda explorada intensamente. Quanto à sua aplicação em eletromagnetismo, apesar de haver registros de trabalhos em 1992, tendo Maréchal como precursor, seu uso efetivo é bem mais recente, datando de meados da década de 1990 (Viana (2006)). Atualmente estas aplicações alcançaram números expressivos com publicações em diversos periódicos e anais de congressos especializados.

A principal característica que difere estes métodos de outros, como por exemplo o Método de Elementos Finitos, consiste basicamente que nos métodos sem malha é feita a distribuição de uma quantidade de nós no domínio em estudo, sendo que nenhuma conexão ou relação é pré-estabelecida entre os mesmos. Estes nós constituirão as incógnitas a serem resolvidas. Como será mostrado neste trabalho, esta característica facilitará a modelagem de estruturas móveis.

Este trabalho foi motivado pelo desafio em se modelar uma estrutura magnética em movimento. Como modelo proposto, considerou-se uma máquina elétrica, dispositivo que apesar de estar há anos no mundo moderno está sempre em

desenvolvimento, dada sua infinidade de aplicações. O dispositivo modelado consiste basicamente em uma estrutura eletromecânica, composta por enrolamentos alimentados por correntes defasadas de 120° , localizados em uma região estática denominada estator. Esta região será responsável pelas correntes induzidas na máquina. Na região central do equipamento está o rotor, que é a parte móvel do mesmo. Nele serão induzidas correntes elétricas que originarão um fluxo magnético responsável pelo torque da máquina.

Modelar máquinas elétricas em movimento e resolver estes modelos através de métodos como o de elementos finitos, geram métodos complexos e trabalhosos que quase sempre aumentam o custo computacional. A complexidade do problema reside na maneira em como se interligar as regiões estática e girante da máquina, as quais são separadas por um "*airgap*" ou entreferro.

Dentre os métodos utilizados para tratar este problema estão:

1) Métodos com entreferros não discretizados.

Nestes métodos, uma das abordagens utilizadas consiste em se modelar o entreferro através de métodos integrais de contorno. Contudo este procedimento não se mostra eficiente quando esta região é muito estreita, como é o caso de vários modelos de máquinas elétricas.

Outra abordagem consiste em utilizar uma solução analítica dentro da região do entreferro para acoplar as partes fixa e móvel da máquina. Neste caso o entreferro torna-se uma região denominada de macro-elemento, uma vez que o mesmo leva em conta todos os nós ao seu entorno. Este procedimento também apresenta problemas de eficiência, uma vez que a solução analítica está associada a uma Série de Fourier cujo o cálculo encarece computacionalmente o processo. Além disto, uma vez que todos os nós do macro-elemento são conectados, a largura de banda da matriz de coeficientes do sistema de equações é aumentada aumentando o tempo de processamento do resultado. A figura (1.1) mostra este método para uma geometria reduzida de uma máquina elétrica em dois instantes. O primeiro antes do giro da máquina e o segundo após o giro da mesma.

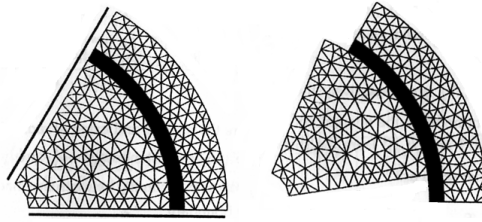


Figura 1.1: Movimento da máquina elétrica através de Macro-elemento (Bastos et al. (2003)).

2) Métodos com entreferros discretizados.

Nesta abordagem o acoplamento entre as partes móvel e fixa é realizada por elementos finitos localizados no entreferro, sendo que duas técnicas são utilizadas:

A primeira consiste em uma faixa "deslizante" de elementos localizada no entreferro que move a medida que a máquina gira. Este procedimento, contudo se torna demasiadamente complexo, uma vez que ângulo de giro da máquina deverá garantir a conexão dos nós do rotor e do estator com seus respectivos nós dos elementos que "deslizaram".

A segunda abordagem consiste em uma faixa móvel de elementos, localizada no entreferro. Conforme pode ser visto na figura (1.2) os elementos pertencentes à esta faixa se deformam de modo a acompanhar os elementos do rotor. Após ultrapassado certo ângulo de giro, pré-definido, a faixa móvel retorna à posição original. Vale ressaltar que devido à deformação dos elementos da faixa móvel, este procedimento está sujeito a perda de precisão dos resultados.

Como será visto neste trabalho, através de métodos sem malha, os problemas enumerados anteriormente relacionados ao movimento que vão desde a complexidade de sua implementação, ao aumento do custo computacional e perda de precisão são superados. Isto se deve basicamente ao fato de não haver nenhuma relação pré-estabelecida entre os nós distribuídos no domínio da máquina, relação esta que no caso do Método de Elementos Finitos é estabelecida pelos próprios elementos. O movimento constituirá uma tarefa de média complexidade e consistirá basicamente de uma rotação dos nós do rotor da máquina.

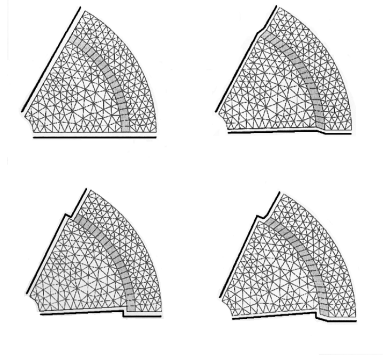


Figura 1.2: Movimento da máquina elétrica através de faixa móvel (Bastos et al. (2003)).

Contudo, conforme será mostrado neste trabalho, existem questões que deverão ser consideradas nos métodos sem malha as quais exigirão atenção e um tratamento especial que são a imposição das condições de contorno essenciais, a descontinuidade entre materiais e o maior custo computacional da função de forma, quando comparada à do Método de Elementos Finitos.

Apresentada a motivação, o objetivo deste trabalho consiste em se modelar computacionalmente dispositivos eletromagnéticos e resolver estes modelos utilizando métodos sem malha. Em particular, pretende-se modelar uma estrutura de maior complexidade como uma máquina elétrica com as particularidades inerentes à mesma.

De imediato identificou-se uma série de questões a serem definidas e superadas, como a escolha do método sem malha mais adequado e a série de implicações relacionadas ao modelo proposto e ao próprio método. Dentre as implicações estavam a não uniformidade de materiais, o uso de simetria para simplificação do problema e uma distribuição adequada de nós no domínio. Outro aspecto também merecia destaque e consistia do pré-processamento requerido pelo problema, pois como a abordagem sem malha é relativamente recente poucas ferramentas são encontradas à disposição. Como se verificou no andamento dos trabalhos mais desafios foram surgindo e superados com maior ou menor dificuldade.

A abordagem utilizada na modelagem e solução do problema se inicia pelo

levantamento das equações de campo e dos circuitos do dispositivo. Dando prosseguimento, é realizado o desenvolvimento da formulação variacional do problema e a aplicação do método sem malha denominado *Element-Free Galerkin Method*.

Este trabalho está estruturado em seis capítulos, onde se procura abordar desde a motivação do uso dos métodos sem malha, o modelo matemático do fenômeno eletromagnético, os principais métodos sem malha existentes, o método sem malha utilizado na tese, até os resultados e as conclusões.

A seguir será feita uma breve apresentação de cada capítulo:

Capítulo 2 - Modelagem Matemática do Problema: Tendo como base as equações de Maxwell, o modelo da máquina é construído de maneira gradual. Neste contexto, é apresentado um problema simples e magnetostático com uma geometria básica, porém com características importantes a serem utilizadas posteriormente. Dando seguimento, problemas mais complexos como os magnetodinâmicos são tratados. Finalmente chega-se a modelagem da máquina elétrica propriamente dita. Neste capítulo dá-se destaque à modelagem das principais partes que compõem a máquina de indução real que são: as barras de rotor, os enrolamentos de estator, o ferro do estator e o entreferro. A formulação magnética é então acoplada às equações de circuito. Finalmente, é apresentada a formulação variacional do problema, juntamente com o sistema de equações a ser resolvido.

Capítulo 3 - Métodos sem Malha: Neste capítulo são apresentados alguns dos principais métodos sem malha, mostrando suas principais características e classificações. Em particular, são avaliadas suas funções de forma, dando-se ênfase a uma característica importante sobre as mesmas que consiste da propriedade do delta de Kronecker. Esta característica se mostrará fundamental para o tratamento de descontinuidade de materiais, imposição de condições de contorno essenciais e tratamento de fronteiras periódicas. Outro objetivo deste capítulo, e talvez o mais importante, é a escolha do método sem malha a ser usado na solução do problema da máquina elétrica.

Capítulo 4 - Interpolating Element-Free Galerkin Method: Inicial-

mente é apresentado o *Moving Least Squares (MLS)*, que constitui uma das formas de aproximação mais empregadas no *EFGM*. Dando seguimento, é introduzido o *Interpolating Moving Least Squares (IMLS)*, que foi a abordagem escolhida para esta tese. É descrito, então, o método sem malha definido para o trabalho, o *Element-Free Galerkin Method*. Neste ponto são destacadas as principais características de suas funções de forma. Finalmente são mostrados resultados comparativos entre as abordagens do *EFGM* empregando o *MLS* e o *IMLS*, sendo que, nestas comparações uma breve análise de erros é mostrada tendo como base um problema eletrostático simples.

Capítulo 5 - Resultados: Neste capítulo são apresentados inicialmente os resultados que ajudaram a edificar a construção do modelo da máquina de indução. Primeiramente são mostrados os estudos relacionados à descontinuidade de materiais, onde são verificadas as reais vantagens em se utilizar o *Interpolating Moving Least Squares* ao invés do *Moving Least Squares*.

Dando continuidade ao trabalho, são apresentados aspectos relacionados à distribuição dos nós no domínio e a real necessidade de ajustes para distribuições não uniformes de nós.

Neste capítulo são mostrados, também, os esforços para a diminuição do custo computacional através da utilização de estruturas de dados como a *KD-Tree*. Posteriormente uma análise de resultados relativos à indução de correntes é realizada em um circuito magnético com uma geometria simples.

Finalmente são mostrados os resultados para a máquina elétrica, começando com a implementação das condições de contorno periódicas, resultados com a máquina travada e finalmente é apresentada uma abordagem para a implementação do movimento.

Capítulo 6 - Conclusões: As conclusões do trabalho são apresentadas, dando-se ênfase aos avanços e contribuições alcançados. São relacionadas as dificuldades encontradas no desenvolvimento da tese e finalmente são sugeridas propostas para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Modelagem Matemática do Problema

O objetivo deste capítulo é apresentar o modelo matemático da máquina de indução, que consiste da formulação eletromagnética e variacional da mesma. Para tal, inicialmente foi necessário a implementação de problemas mais simples, com o propósito de resolver questões inerentes à máquina, tais como: a descontinuidade de materiais e a indução de correntes. Neste contexto o capítulo se inicia com a formulação de um problema magnetostático com uma geometria simples. Dando seguimento, um problema magnetodinâmico com correntes induzidas é formulado. Finalmente chega-se ao modelo da máquina elétrica, propriamente dito, com sua formulação magnética e de circuito, apresentada em sua forma variacional.

2.1 Cálculo de Campos Magnéticos através do Potencial Vetor Magnético

Devido às condições de simetria, os problemas tratados neste trabalho são reduzidos a duas dimensões, sendo toda a formulação desenvolvida em 2D.

Considere o domínio bidimensional apresentado na figura (2.1), onde \mathbf{B} é a indução magnética dada em (*Webber/metro*²), \mathbf{A} é o potencial vetor magnético dado em (*Webber/metro*), \mathbf{J}_s é o vetor densidade de corrente imposto dado em (*Ampère/metro*²), \mathbf{J}_e é o vetor densidade de corrente induzido dado também em (*Ampère/metro*²), μ é a permeabilidade do material dada em (*Henry/metro*) e

σ é a condutividade do material dada em (*Si mens/metro*). Nesta figura Γ_u e Γ_t representam as fronteiras de Dirichlet e Neumann respectivamente.

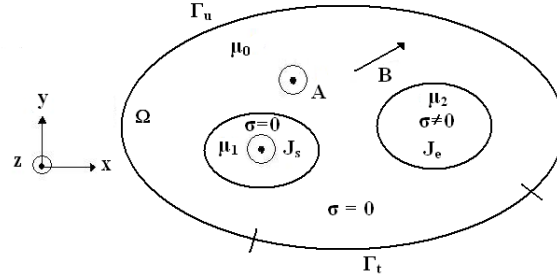


Figura 2.1: Domínio bidimensional com suas fronteiras, materiais, fonte de corrente e corrente induzida.

Considerando $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e$ a corrente total presente e sendo \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} os vetores unitários paralelos aos eixos x , y e z respectivamente. Uma vez que o \mathbf{J}_t e \mathbf{A} são perpendiculares ao plano do domínio, tem-se que $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$, $\mathbf{J} = J\mathbf{k}$.

Fazendo uso da equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_t \quad (2.1)$$

e da relação constitutiva

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (2.2)$$

onde \mathbf{H} é o campo magnético dado em (*Ampère/metro*), ν é a relutividade do material dada em (*Ampère \times metro/Webber*) (Macedo (1988)).

Aplicando o rotacional em (2.2) e sabendo que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, onde \mathbf{A} é o potencial vetor magnético tem-se:

$$\nabla \times \nu \mathbf{B} = \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_t \quad (2.3)$$

como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ou

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} \quad (2.5)$$

ou $B_x = \frac{\partial A}{\partial y}$ e $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$.

Substituindo (2.5) em (2.3) chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} = -J_t \quad (2.6)$$

onde (2.6) é a equação de Poisson para o potencial vetor magnético em duas dimensões.

2.1.1 Cálculo do Potencial Vetor Magnético Utilizando Discretização Temporal

Para o cálculo do potencial vetor magnético, utilizando discretização temporal, considere o domínio apresentado na figura (2.1):

Recorrendo a (2.3)

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e \quad (2.7)$$

Sabe-se também que \mathbf{J}_e pode ser dado por:

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico induzido e dado em (*volt/metro*).

Das equações de Maxwell tem-se que:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.9)$$

ou

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.10)$$

De (2.10), conclui-se que:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V. \quad (2.11)$$

Considerando que \mathbf{E} é gerado somente pela variação temporal de \mathbf{B} tem-se que $\nabla V = 0$ ou:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.12)$$

ou

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.12) e (2.13) em (2.7)

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{J}_s = 0. \quad (2.14)$$

Conforme visto na seção anterior, quando existe somente a componente "z" do potencial vetor magnético \mathbf{A} , o mesmo pode ser tratado como um escalar. Desta maneira (2.14) se torna:

$$\nabla \cdot \nu \nabla A - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_s = 0 \quad (2.15)$$

ou

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot \nu \nabla A = J_s(t). \quad (2.16)$$

Considerando as condições de contorno

$$A = A_u \text{ em } \Gamma_u \quad (2.17)$$

e

$$-\nu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{t} \text{ em } \Gamma_t \quad (2.18)$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal à fronteira Γ_t .

Considerando as equações (2.16), (2.17) e (2.18) o problema fica definido em sua forma forte.

O objetivo agora é obter a formulação variacional do problema e aplicar o Método de Galerkin.

Chamando $\frac{\partial A}{\partial t} = \dot{A}$, deve-se determinar A , tal que:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} - \nabla \cdot \nu \nabla A - J_s(t) \right) w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (2.19)$$

Isto é:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} \right) w d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla A) w d\Omega - \int_{\Omega} J_s(t) w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (2.20)$$

Contudo, sabe-se que

$$\nabla \cdot (g \mathbf{v}) = \nabla g \mathbf{v} + g \nabla \mathbf{v} \quad (2.21)$$

ou

$$g \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (g \mathbf{v}) - \nabla g \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Recorrendo à equação (2.22)

$$w \nabla \cdot (\nu \nabla A) = \nabla \cdot (w \nu \nabla A) - \nabla w (\nu \nabla A) \quad (2.23)$$

Logo, (2.20) pode ser dada como

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} \right) w d\Omega - \int_{\Omega} [\nabla \cdot (w \nu \nabla A)] d\Omega + \int_{\Omega} (\nu \nabla w \nabla A) d\Omega - \int_{\Omega} J_s(t) w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (2.24)$$

Aplicando o teorema da divergência no segundo termo de (2.24)

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} \right) w d\Omega - \int_{\Gamma} \left(w \nu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nu \nabla w \nabla A) d\Omega - \int_{\Omega} J_s(t) w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (2.25)$$

Tem-se que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ e como $w = 0$ em Γ_u e como $-\nu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{t}$ em Γ_t , o problema em 2.25 fica em se determinar $A \in H^1$, tal que:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} \right) w d\Omega + \int_{\Gamma_t} (w \tilde{t}) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nu \nabla w \nabla A) d\Omega - \int_{\Omega} J_s(t) w d\Omega = 0 \quad \forall A \in H^1 \text{ e } \forall w \in H^1. \quad (2.26)$$

Para o problema aproximado tem-se: determinar $A^h \in \hat{H}^1$, tal que:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A}^h \right) w^h d\Omega + \int_{\Gamma} (w^h \hat{t}) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nu \nabla w^h \nabla A^h) d\Omega - \int_{\Omega} J_s(t) w^h d\Omega = 0 \quad \forall w \in \hat{H}^1 \quad (2.27)$$

onde $\hat{H}^1 \subset H^1$

e onde:

$$A^h = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i \quad (2.28)$$

$$\dot{A}^h = \sum_{i=1}^n \dot{A}_i \phi_i \quad (2.29)$$

$$w^h = \sum_{i=1}^n w_i \phi_i. \quad (2.30)$$

Levando as expressões (2.28),(2.29) e (2.30) em (2.27)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(J_s(t) \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma \sum_{j=1}^n \dot{A}_j \phi_j \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\nu \nabla \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \nabla \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \left(\sum_{i=1}^n w_i \phi_i \hat{t} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\forall w_i \in \hat{H}^1$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \left(\dot{A}_j \phi_j \sigma \phi_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \phi_j \nu \nabla \phi_i A_j) d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\phi_i \hat{t}) d\Gamma \right]}_G - \int_{\Omega} J_s(t) \phi_i d\Omega \right\} = 0 \quad (2.32)$$

$$\forall w_i \in \hat{H}^1$$

$$\sum_{i=1}^n w_i G_i = 0 \quad \forall w_i \in \hat{H}^1 \implies G_i = 0. \quad (2.33)$$

Chamando: $N_{ij} = \int_{\Omega_j} \phi_j \sigma \phi_i d\Omega$, $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nu \nabla \phi_i d\Omega$ e $F_i = \int_{\Omega} J_s(t) \phi_i d\Omega -$

$$\int_{\Gamma_t} (\phi_i \hat{t}) d\Gamma$$

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{F}. \quad (2.34)$$

Para se discretizar a equação (2.34) no tempo, utiliza-se o algoritmo θ (Bastos et al. (2003)):

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \left[(1 - \theta) \dot{X}(t) + \theta \dot{X}(t + \Delta t) \right] \Delta t. \quad (2.35)$$

ou

$$\left[(1 - \theta) \dot{X}(t) + \theta \dot{X}(t + \Delta t) \right] = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (2.36)$$

Considerando o instante t em (2.34) tem-se:

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{A}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.37)$$

e para $t + \Delta t$

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{A}}(t + \Delta t) + \mathbf{K} \mathbf{A}(t + \Delta t) = \mathbf{F}(t + \Delta t). \quad (2.38)$$

Multiplicando (2.37) por $(1 - \theta)$ e (2.38) por θ

$$(1 - \theta) \mathbf{N} \dot{\mathbf{A}}(t) + (1 - \theta) \mathbf{K} \mathbf{A}(t) = (1 - \theta) \mathbf{F}(t) \quad (2.39)$$

$$\theta \mathbf{N} \dot{\mathbf{A}}(t + \Delta t) + \theta \mathbf{K} \mathbf{A}(t + \Delta t) = \theta \mathbf{F}(t + \Delta t). \quad (2.40)$$

Somando (2.39) com (2.40)

$$\mathbf{N} \left[(1 - \theta) \dot{\mathbf{A}}(t) + \theta \dot{\mathbf{A}}(t + \Delta t) \right] + [(1 - \theta) \mathbf{K} \mathbf{A}(t) + \theta \mathbf{K} \mathbf{A}(t + \Delta t)] = [(1 - \theta) \mathbf{F}(t) + \theta \mathbf{F}(t + \Delta t)]. \quad (2.41)$$

Utilizando (2.36), o primeiro termo do lado esquerdo de (2.41) pode ser escrito como:

$$\mathbf{N} \left[(1 - \theta) \dot{\mathbf{A}}(t) + \theta \dot{\mathbf{A}}(t + \Delta t) \right] = \mathbf{N} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}. \quad (2.42)$$

Substituindo (2.42) em (2.41)

$$\mathbf{N} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} + (1 - \theta) \mathbf{K} \mathbf{A}(t) + \theta \mathbf{K} \mathbf{A}(t + \Delta t) = (1 - \theta) \mathbf{F}(t) + \theta \mathbf{F}(t + \Delta t) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{N} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} + \mathbf{K} [(1 - \theta) \mathbf{A}(t) + \theta \mathbf{A}(t + \Delta t)] = (1 - \theta) \mathbf{F}(t) + \theta \mathbf{F}(t + \Delta t). \quad (2.44)$$

Para $\theta = 1$ chega-se à aproximação de Euler:

$$\mathbf{N} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{A}(t + \Delta t) = \mathbf{F}(t + \Delta t) \quad (2.45)$$

e

$$\underbrace{(\mathbf{N} + K \Delta t)}_{KK} A(t + \Delta t) = \underbrace{N A(t) + \Delta t F(t + \Delta t)}_{Força}. \quad (2.46)$$

Sendo que o sistema final é dado por:

$$\mathbf{K} \mathbf{K} \times \mathbf{A}(t + \Delta t) = \mathbf{Força} \quad (2.47)$$

2.2 Modelagem da Máquina de Indução

O modelo adotado neste trabalho consiste de uma máquina de indução trifásica de 2HP , quatro pólos, com alimentação em corrente e rotor do tipo gaiola de esquilo e o ferro da máquina foi considerado um material com resposta linear.

A figura (2.2) representa a configuração utilizada.

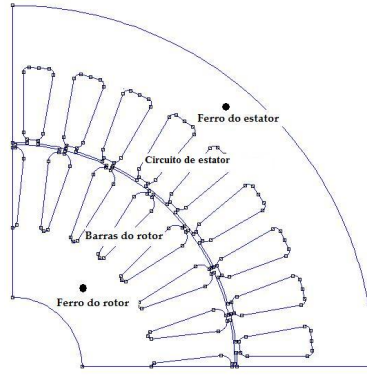


Figura 2.2: Geometria da máquina de indução.

2.2.1 Região Fora do Rotor

Seguindo desenvolvimento similar ao da seção anterior, onde:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.48)$$

e

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (2.49)$$

tem-se que:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right]. \quad (2.50)$$

Fazendo uso da relação constitutiva

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.51)$$

e substituindo (2.50) em $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ chega-se a:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right] = \sigma \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right]. \quad (2.52)$$

Dada sua geometria, a máquina elétrica pode ser representada adequadamente em duas dimensões. Como feito na seção anterior, a indução magnética

pode ser reduzida às suas componentes "x" e "y", conseqüentemente o potencial vetor magnético e a densidade de corrente possuirão somente componentes na direção "z", ou seja, $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$ e $\mathbf{J} = J\mathbf{k}$. Vale observar, ainda, que para o modelo de máquina apresentado o termo $\sigma \nabla V$ representa a corrente imposta no circuito e será substituído por J_s .

Desta maneira (2.52) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right] = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_s. \quad (2.53)$$

Observadas as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e (anti) periódica, que será descrita posteriormente, (2.53) é resolvida da mesma maneira como foi feito para (2.16).

2.2.2 Região do Rotor

Equações dos Condutores

Usualmente dois tipos de condutores são empregados em máquinas elétricas. Eles poderão ser do tipo em barra ou condutores finos para serem enrolados.

O modelo de máquina elétrica utilizado neste trabalho consiste de uma estrutura alimentada em corrente e com um rotor constituído de barras de condutores. Por este motivo será apresentada somente a formulação para condutores do tipo barra.

A figura (2.2) representa este tipo de condutor onde " S_t " é a seção do condutor, " l " seu comprimento e " σ " sua condutividade.

A diferença de potencial nos terminais do condutor U_t é dada por:

$$U_t = \int_0^l -(\nabla V) dl. \quad (2.54)$$

De (2.54) pode-se adotar a seguinte aproximação para o condutor em questão

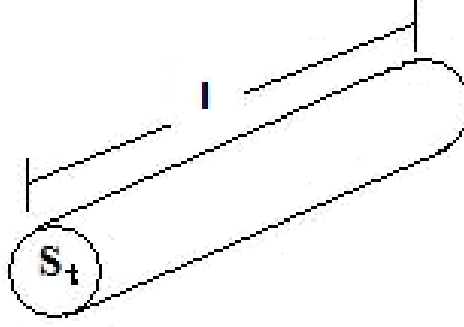


Figura 2.3: Condutor do tipo barra.

$$\nabla V = -\frac{U_t}{l}. \quad (2.55)$$

Utilizando (2.50) chega-se a:

$$I_t = \int_{S_t} J ds = - \int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds + \int_{S_t} \sigma \frac{U_t}{l} ds. \quad (2.56)$$

Será introduzido agora o conceito de resistência *d.c.* de um condutor:

$$R_t = \frac{l}{\sigma S_t}. \quad (2.57)$$

Utilizando (2.57), (2.56) poderá ser escrita como:

$$I_t = \frac{U_t}{R_t} - \int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds. \quad (2.58)$$

Temos, então, que as equações finais para os condutores do tipo barra serão dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right] - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \frac{U_t}{l} = 0 \quad (2.59)$$

e

$$U_t = R_t I_t + R_t \int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds. \quad (2.60)$$

A equação (2.60) mostra que a tensão sobre o condutor é constituída pela queda de tensão devida à resistência *d.c.* , $R_t I_t$, e pela queda de tensão devida às correntes induzidas $R_t \int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds$.

Realizando desenvolvimento similar ao empregado em (2.15) em (2.59), substituindo, contudo, J_s por $\sigma \frac{U_t}{l}$ tem-se a forma fraca: Determinar $A \in H^1$, tal que:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A} \right) w d\Omega + \int_{\Gamma_t} (wt) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nu \nabla w \nabla A) d\Omega - \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{U_t}{l} \right) w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (2.61)$$

Para o problema aproximado tem-se: determinar $A^h \in \widehat{H}^1$, tal que:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \dot{A}^h \right) w^h d\Omega + \int_{\Gamma} (w^h t) d\Gamma + \int_{\Omega} (\nu \nabla w^h \nabla A^h) d\Omega - \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{U_t}{l} \right) w^h d\Omega = 0 \quad \forall w \in \widehat{H}^1 \quad (2.62)$$

onde $\widehat{H}^1 \subset H^1$ e:

$$A^h = \sum_{i=1}^n A_i \phi_i \quad (2.63)$$

$$\dot{A}^h = \sum_{i=1}^n \dot{A}_i \phi_i \quad (2.64)$$

e

$$w^h = \sum_{i=1}^n w_i \phi_i. \quad (2.65)$$

Levando as expressões (2.63), (2.64) e (2.65) em (2.62)

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{U_t}{l} \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma \sum_{j=1}^n \dot{A}_j \phi_j \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(\nu \nabla \sum_{i=1}^n w_i \phi_i \nabla \sum_{j=1}^n A_j \phi_j \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \left(\sum_{i=1}^n w_i \phi_i t \right) d\Gamma = 0 \quad \forall w_i \in \widehat{H}^1 \quad (2.66)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \left(\dot{A}_j \phi_j \sigma \phi_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \phi_j \nu \nabla \phi_i A_j) d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\phi_i t) d\Gamma \right]}_G - \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{U_t}{l} \right) \phi_i d\Omega \right\} = 0 \quad \forall w_i \quad (2.67)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i G_i = 0 \quad \forall w_i \in \widehat{H}^1 \implies G_i = 0 \quad (2.68)$$

Chamando: $N_{ij} = \int_{\Omega_j} \phi_j \sigma \phi_i d\Omega$, $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nu \nabla \phi_i d\Omega$, $P_i = \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{U_t}{l} \right) \phi_i d\Omega$

e $T_i = \int_{\Gamma_t} (\phi_i t) d\Gamma$

Considerando-se um domínio com "n"condutores chega-se a:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\mathbf{U}_t + \mathbf{T} = 0 \quad (2.69)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez associada às derivadas das funções de forma e à relatividade do material " ν ". \mathbf{N} é matriz associada às funções de forma e condutividade do material " σ ", \mathbf{A} é o potencial vetor magnético nos nós e \mathbf{U}_t é vetor de tensões nas barras do rotor.

Ou seja:

$$K(k, j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_k^t \nu \nabla \phi_j d\Omega \quad (2.70)$$

$$N(k, j) = \int_{\Omega} \sigma \phi_k^t \phi_j d\Omega \quad (2.71)$$

e

$$P(k, j) = \int_{\Omega} \frac{\sigma_j}{l} \phi_k d\Omega. \quad (2.72)$$

Obs. Se o nó "k" estiver fora da região do condutor "j", $P(k, j) = 0$.

Aplicando (2.64) em (2.60) chega-se a:

$$U_t = R_t I_t + R_t \int_{S_t} \sigma \sum_{i=1}^n \dot{A}_i \phi_i ds \quad (2.73)$$

Considerando-se "n" condutores chega-se a:

$$\mathbf{QA} + \mathbf{RI}_t = \mathbf{U}_t \quad (2.74)$$

onde

$$R_t = \frac{l}{\sigma S_t} \quad (2.75)$$

que constitui a resistência "dc" da barra

e

$$Q(k, j) = \int_{\Omega} R_{tk} \sigma_k \phi_j d\Omega. \quad (2.76)$$

Obs. Se o nó "j" não pertencer à barra "k" do rotor, $Q(k, j) = 0$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_t \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

e

$$T_i = \int_{\Gamma_t} (\phi_i t) d\Gamma. \quad (2.78)$$

Rotor em Gaiola de Esquilo

O rotor em gaiola de esquilo é formado por barras de material condutor conectadas em suas extremidades se aproximando de uma gaiola de esquilo. Neste trabalho o modelo de máquina empregado utiliza este tipo de rotor.

A região do rotor é apresentada na figura 2.5 cujo domínio foi reduzido a quatro barras.

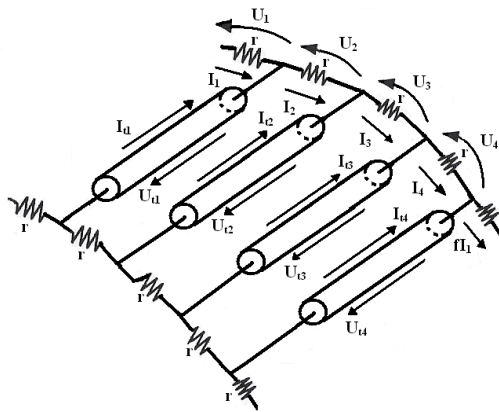


Figura 2.4: Esquema reduzido de um rotor de uma máquina de indução com quatro barras.

Pela lei das tensões de Kirchoff, considerando uma região com "n" barras:

$$2rI_1 - U_{t1} + fU_{tn} = 0 \quad (2.79)$$

$$2rI_2 - U_{t2} + U_{t1} = 0 \quad (2.80)$$

$$\vdots \quad (2.81)$$

$$2rI_i - U_{ti} + U_{ti-1} = 0$$

$$\vdots \quad (2.82)$$

$$2rI_n - U_{tn} + U_{tn-1} = 0$$

Tem-se que f=1 ou -1 para circuitos periódicos ou anti-periódicos respectivamente.

As equações (2.79) podem ser escritas como:

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{I} + \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_t = 0 \quad (2.83)$$

onde:

$$\mathbf{I} = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ \cdots \ I_n]^T \quad (2.84)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & f \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Obs. O fator "f" poderá ser 1 ou -1, dependendo se o domínio for periódico

ou anti-periódico respectivamente.

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2r \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{U} = [U_{t1} \ U_{t2} \ U_{t3} \ \cdots U_{tn}]^T. \quad (2.87)$$

A relação entre \mathbf{I} e \mathbf{I}_t é dada utilizando a Lei das correntes de Kirchoff:

$$\begin{bmatrix} I_{t1} \\ I_{t2} \\ I_{t3} \\ \vdots \\ I_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

cuja expressão também pode ser dada por:

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{C}_1^T \mathbf{I}. \quad (2.89)$$

Multiplicando (2.89) por \mathbf{C}_1^T e considerando que \mathbf{C}_2 é uma matriz diagonal e com termos iguais tem-se que:

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1^T \mathbf{I} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_t = 0.$$

Fazendo uso das equações dos condutores do tipo barra e considerando as equações anteriores chega-se a:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\mathbf{U}_t = 0 \quad (2.90)$$

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{C}_3\mathbf{U}_t + \mathbf{R}\mathbf{I}_t = 0 \quad (2.91)$$

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_t + \mathbf{C}_2 \mathbf{I}_t = 0 \quad (2.92)$$

onde:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Equações Finais da Máquina de Indução

Utilizando as equações das seções 2.2.1 e 2.2.2, chega-se às seguintes equações para a máquina de indução.

$$\mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\mathbf{U}_t - \mathbf{J} + \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{C}_3\mathbf{U}_t + \mathbf{R}\mathbf{I}_t = 0 \quad (2.95)$$

$$\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_t + \mathbf{C}_2 \mathbf{I}_t = 0 \quad (2.96)$$

onde:

$$\mathbf{J} = \int_{\Omega} J_f(t) \phi_i d\Omega \quad (2.97)$$

e J_f são as densidades de corrente impostas no estator.

Resta agora aplicar o esquema de diferenças finitas no termo temporal.

Utilizando o algoritmo θ em (2.94), de modo a chegar-se à aproximação por Euler, conforme realizado anteriormente tem-se

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{N}}{\Delta t}\right) \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{P}\mathbf{U}_t = \frac{\mathbf{N}\mathbf{A}(t)}{\Delta t} + \mathbf{J}(t+\Delta t) + \mathbf{T}. \quad (2.98)$$

Utilizando a seguinte aproximação em (2.95)

$$\dot{A} \approx \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad (2.99)$$

esta equação será expressa por

$$\frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} \mathbf{A}(t+\Delta t) + \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_t + \mathbf{R}\mathbf{I}_t = \frac{\mathbf{Q}\mathbf{A}(t)}{\Delta t} \quad (2.100)$$

Fazendo uso de (2.98), (2.100) e (2.96) o sistema final de equações será dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{N}}{\Delta t} & -\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{Q}}{\Delta t} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t+\Delta t) \\ \mathbf{U}_t \\ \mathbf{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}\mathbf{A}(t)}{\Delta t} + \mathbf{J}(t+\Delta t) + \mathbf{T} \\ \frac{\mathbf{Q}\mathbf{A}(t)}{\Delta t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Pode-se aumentar o grau de simetria da matriz de coeficientes de (2.101), uma vez que $P(k, j) = \frac{1}{lR_{tk}} Q(k, j)$, veja (2.72) e (2.76). Desta maneira, (2.101) após algumas operações elementares pode se transformar em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{N}}{\Delta t} & -\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P} & -\frac{\Delta t}{lR_{tk}} \mathbf{C}_3 & -\frac{\Delta t}{lR_{tk}} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t+\Delta t) \\ \mathbf{U}_t \\ \mathbf{I}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{N}\mathbf{A}(t)}{\Delta t} + \mathbf{J}(t+\Delta t) + \mathbf{T} \\ -\frac{1}{lR_{tk}} \mathbf{Q}\mathbf{A}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Com o sistema anterior, o modelo eletro-magnético da máquina é finalizado estando assim preparado para a modelagem do movimento da mesma.

Capítulo 3

Métodos sem Malha

Este capítulo se inicia realizando uma breve contextualização dos métodos sem malha, dando-se ênfase às suas aplicações em eletromagnetismo. A seguir, alguns destes métodos são apresentados de maneira mais detalhada, onde os principais aspectos de sua formulação são colocados. Neste ponto são mostradas as principais características, vantagens e limitações dos mesmos. Finalmente, é feita uma análise dos métodos apresentados a fim de se definir aquele que se acredita atender melhor à solução do modelo de uma máquina elétrica em movimento.

Os Métodos sem Malha ou *Meshless Methods* foram introduzidos por volta de 1977, quando Monaghan, Gingold e Lucy desenvolveram um método para resolverem problemas de astrofísica (Viana (2006)). Este método tinha como idéia básica a substituição de um fluido por um conjunto de partículas. Contudo, somente nos últimos quinze anos esta categoria de método recebeu a real atenção da comunidade científica, principalmente, em aplicações relacionadas à mecânica computacional. Neste período diversos métodos sem malha foram desenvolvidos como o *Diffuse Element Method (DEM)*, o *Element-Free Galerkin Method (EFGM)*, o *H-p Cloud Method*, o *Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)*, o *Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPG)*, o *Point Interpolation Method (PIM)*, o *Local Point Interpolation Method (LPIM)*, o *Partition of Unit Method (PUM)* dentre outros (Viana (2006)).

Quanto às suas aplicações em eletromagnetismo, pode se considerar que este

é um fato ainda mais recente.

Atribui-se a Marèchal et al. (1992) a introdução dos métodos sem malha em eletromagnetismo, quando o mesmo aplicou o *Difuse Element Method* para simular um problema eletrostático bidimensional. Neste artigo, o autor apresenta as características promissoras dos métodos sem malha, tais como a não necessidade de se construir malhas, obviamente, e um refinamento facilitado da solução em regiões de interesse. Acredita-se que este trabalho fez a comunidade científica despertar seu interesse neste tipo de método, aumentando significativamente o número de trabalhos nos anos seguintes.

Conforme mencionado, após o trabalho inicial de Marèchal, os estudos dos métodos sem malha em eletromagnetismo se expandiram bastante. Estes estudos constituíram esforços nos mais diversos sentidos, como a modelagem de dispositivos eletromagnéticos como transformadores (Cingoski et al. (1998)), o aumento de precisão para métodos como o *EFGM* (Viana e Mesquita (1999)), trabalhos sobre indução de correntes (Xuan et al. (2004)), (Xuan e Udpa (2004)) e (Bottauscio et al. (2006)), a elaboração de métodos híbridos (*FEM/EFGM*) (Cingoski et al. (2000)), problemas de magnetohidrodinâmica (Verardi et al. (2002)) além de diversas outras aplicações.

Vale citar, ainda, alguns estudos que tiveram uma influência maior sobre este trabalho de tese como por exemplo: 1) O uso de algoritmos eficientes baseados em estruturas de dados do tipo KDTree conforme proposto por (Parreira et al. (2006a)) e que possibilitaram uma diminuição significativa do custo computacional do *EFGM*. 2) O Tratamento de problemas eletromagnéticos com materiais descontínuos (Coppoli et al. (2008c)), onde os autores fazem uso de funções de forma interpolantes no *EFGM* de modo a garantir melhores resultados quando se tratando de campos elétricos que atravessam materiais diferentes. 3) A Implementação de fronteiras periódicas e anti-periódicas através do uso do *EFGM* (Coppoli et al. (2009)), onde se propõe uma nova abordagem para a implementação deste tipo de fronteira no *EFGM*.

3.1 Métodos sem Malha

Antes de se apresentar a formulação de alguns dos métodos sem malha existentes é importante a definição de alguns conceitos utilizados nestes métodos, tais como domínio de influência e domínio de suporte. É importante destacar também, a importância da escolha das funções de forma a serem utilizadas.

Quanto ao domínio de influência de um nó, o mesmo é definido como a região em que este nó exerce influência no domínio do problema (Liu e Gu (2005)). Veja a figura (3.1).

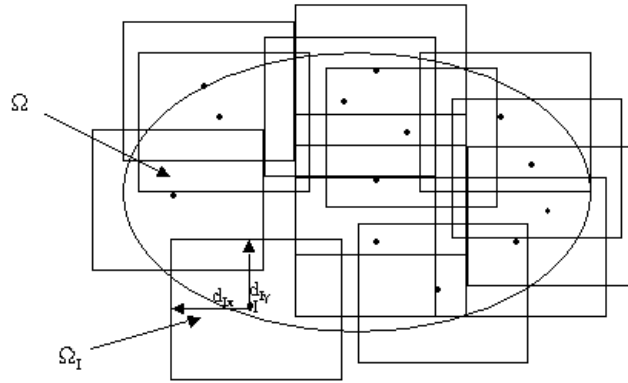


Figura 3.1: Domínios de influência retangulares.

Verificando a figura 3.1, para um ponto de interesse "I", a dimensão do domínio de influência pode ser dada por:

$$d_I = \alpha_I d_c \quad (3.1)$$

onde α_I é um valor adimensional relacionado ao domínio de influência e, d_c é a distância nodal média próxima ao nó de interesse. Pode se verificar que o valor adimensional α_I controla o tamanho do domínio de influência. Por exemplo, $\alpha_I = 2,5$ indica um domínio de influência cujo raio é 2,5 vezes o valor médio das distâncias entre os nós. Note que α_I deve ser escolhido antes do processamento de modo a se chegar aos melhores resultados possíveis. Valores de α_I entre 2.0 e

4.0 geralmente levam a bons resultados (Liu (2003)). Os domínios de influência utilizados neste trabalho foram baseados no esquema apresentado na figura (3.1), onde domínios quadrados foram escolhidos, ou seja: $d_{Ix} = d_{Iy} = \alpha_I d_c$.

Entende-se por domínio de suporte para um ponto \hat{x} qualquer, dentro do domínio do problema, como sendo a região formada pela interseção de todos os domínios de influência que atuam naquele ponto. A figura (3.2) apresenta de maneira clara este conceito onde a região sombreada $S(\hat{x})$, representa o domínio de suporte do ponto \hat{x} (Viana (1998)).

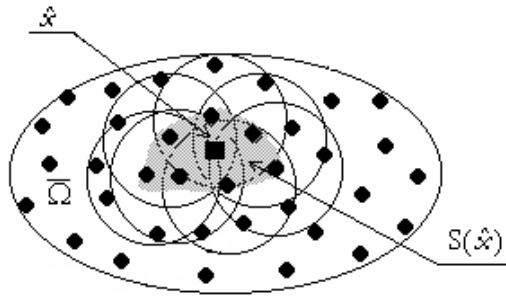


Figura 3.2: Domínio de suporte para um ponto genérico \hat{x} (Viana (1998)).

Segundo Liu (2003), a criação e escolha das funções de forma é um dos aspectos mais importantes nos métodos sem malha. Liu ainda relaciona uma série de critérios essenciais na construção e escolha destas funções, que segundo o mesmo, caso sejam satisfeitos garantirão uma implementação "fácil" dos referidos métodos, bem como uma boa precisão nos resultados.

Seguem os critérios:

- 1 - O método e sua função de forma deverão suportar uma distribuição nodal arbitrária.
- 2 - A função de forma implementada deverá satisfazer certa ordem de consistência.
- 3 - O domínio do campo de aproximação/interpolação (domínio de influência) deverá ser pequeno quando comparado ao domínio de todo o problema.

4 - O algoritmo do método com sua função de forma deverá ser eficiente computacionalmente e, se possível, deverá ser da mesma ordem de complexidade que o do Método de Elementos Finitos.

5 - Preferencialmente a função de forma deverá possuir a propriedade do delta de Kronecker.

6 - O algoritmo do método com sua devida função de forma deverá ser estável.

Valem as seguintes observações: Quanto ao critério relativo à consistência, entende-se aqui como consistência C_k , a capacidade que a aproximante da função potencial possui de reproduzir soluções exatas polinomiais de ordem k ou inferior. Neste caso pode ser dito que o método possui consistência de ordem k . Quanto ao quinto critério, relativo ao delta de Kronecker será verificado posteriormente que o mesmo facilitará a imposição das condições de contorno essenciais e a implementação de fronteiras periódicas.

7 - Preferencialmente, a aproximação da função através das funções de forma deverá ser compatível ao longo de todo o domínio, ou seja esta aproximação deverá ser contínua. Esta característica é conhecida compatibilidade (Liu (2005)).

Ainda segundo Liu (2003), o desafio presente nos Métodos sem Malha consiste no desenvolvimento de funções de forma estáveis, fáceis de usar e sem dependências de distribuições nodais pré-definidas.

3.1.1 *Smooth Particle Hydrodynamics*

O Método *SPH* usa uma representação integral para uma função $A(\mathbf{x})$, que por exemplo poderia ser a parte escalar do potencial vetor magnético e onde \mathbf{x} é um ponto qualquer, ou seja $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Esta representação integral pode ser dada por:

$$A(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\xi \quad (3.2)$$

onde $\delta(\mathbf{x})$ é a função delta de Dirac.

No *SPH*, $A(\mathbf{x})$ é aproximada pela seguinte forma integral:

$$A^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} A(\xi) \widehat{W}(\mathbf{x} - \xi, h) d\xi \quad (3.3)$$

onde $A(\mathbf{x})^h$ representa a aproximante da função $A(\mathbf{x})$, $\widehat{W}(\mathbf{x} - \xi, h)$ é a função peso ou função de suavização e h é denominado comprimento de suavização.

A integral anterior é normalmente aproximada pelo seguinte somatório:

$$A^h(x) = \sum_I \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) A_I \Delta V_I \quad (3.4)$$

onde ΔV_I representa o volume da partícula I .

Dentre as características do *SPH* pode-se destacar: 1) O *SPH*, conforme apresentado, possui função de forma que não satisfaz o delta de Kronecker. 2) Em geral o *SPH* não possui consistência de ordem C_1 em regiões próximas às fronteiras. Isto levou (Liu, 2003) a desenvolver um método que assegurava um certo grau adicional de consistência e que foi denominado *Reproducing Kernel Particle Method - RKPM*. 3) Uma das dificuldades do *SPH* quando aplicado em alguns problemas de engenharia consiste em se calcular o volume da partícula ΔV_I para um corpo arbitrário sem o uso de uma malha.

3.1.2 *Element-Free Galerkin Method (EFGM)*

O *EFGM* é um Método sem malha desenvolvido por Belytschko et al. (1994). Neste método, uma aproximação por *Moving Least Squares (MLS)* é empregada para a construção da função de forma, sendo que o Método de Galerkin é utilizado no desenvolvimento do sistema discreto de equações. Neste método se faz necessário um conjunto de células de integração distribuídas pelo domínio a fim de garantir as integrais que serão utilizadas na montagem do sistema matricial. Veja a figura 3.3:

Inicialmente será mostrado o tipo usual de aproximação utilizado neste método que é baseado em Mínimos Quadrados Móveis ou *Moving Least Squares*.

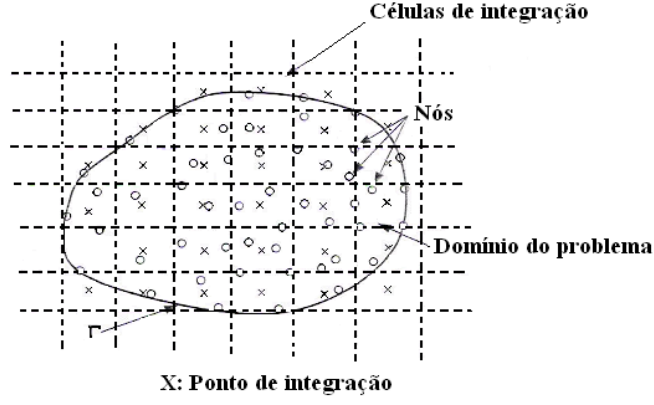


Figura 3.3: Domínio para problemas com formulação fraca global (Liu (2003)).

Seja $A(\mathbf{x})$ uma função potencial magnético, por exemplo, definida no domínio Ω . A aproximação de $A(\mathbf{x})$ em um ponto \mathbf{x} denotada por $A^h(\mathbf{x})$ pode ser dada por:

$$A^h(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

onde:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_0(\mathbf{x}), a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})\} \quad (3.6)$$

e $\mathbf{P}^T(x)$ para uma base polinomial linear pode ser dado por:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_0(\mathbf{x}), p_1(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}. \quad (3.7)$$

Seja um funcional representado por uma norma discreta ponderada em L_2

$$J = \sum_I^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_I)]^2 = \sum_I^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2. \quad (3.8)$$

Na aproximação pelo *MLS* deseja-se determinar $a(\mathbf{x})$ e, para tal minimiza-se o funcional anterior de modo que:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (3.9)$$

o que resulta no seguinte sistema linear:

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.10)$$

onde $\widehat{\mathbf{A}}$ é dada por:

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_I^n \widehat{W}_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (3.11)$$

e \mathbf{B} possui a forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (3.12)$$

com

$$\mathbf{B}_I = \widehat{W}_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \quad (3.13)$$

e \mathbf{A}_s é o vetor que apresenta os valores nodais da função potencial em todo o domínio.

Resolvendo a equação 3.10 para $a(\mathbf{x})$ obtém-se:

$$a(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_s \quad (3.14)$$

chegando-se a

$$A^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n \phi_i A_i \quad (3.15)$$

onde a função de forma para o *MLS* $\phi_I(\mathbf{x})$ é dada por:

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_I^m p_j(\mathbf{x}) \left(\widehat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{jI} = \mathbf{p}^T \widehat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B}_I. \quad (3.16)$$

Considere, agora, o problema a seguir, cujo domínio é baseado na figura (3.3):

$$-\nabla \cdot \nu \nabla A = J_s \text{ em } \Omega \quad (3.17)$$

$$A = A_u \text{ em } \Gamma_u \quad (3.18)$$

$$-\nu \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{t} \text{ em } \Gamma_t \quad (3.19)$$

Obs. Para o domínio apresentado na figura (3.3) Γ engloba fronteiras do tipo Γ_u e Γ_t .

A formulação variacional pode ser obtida de maneira similar à realizada na seção 2.1.1, ou seja determinar A tal que:

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla w \nabla A) d\Omega + \int_{\Gamma_t} (w \tilde{t}) d\Gamma - \int_{\Omega} J_s w d\Omega = 0 \quad \forall w \in H^1. \quad (3.20)$$

Aplicando-se o Método de Galerkin em (3.20), como realizado anteriormente, também, na seção 2.1.1, chega-se ao sistema de equações matriciais do problema:

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F} \quad (3.21)$$

onde:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nu \nabla \phi_i d\Omega \quad (3.22)$$

e

$$F_i = \int_{\Omega} J_s \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\phi_i \tilde{t}) d\Gamma. \quad (3.23)$$

Note que a formulação variacional do problema exige uma integração em todo

o domínio Ω , necessitando assim de uma malha de integração global, conforme apresentado na figura (3.3).

Segundo Liu (2003), valem as seguintes observações sobre o *EFGM*:

1 - O *EFGM* se comporta bem tanto para problemas lineares quanto para problemas não lineares. Um α_I variando de 1,5 a 2,5 produz bons resultados. No *EFGM*, a solução converge mais rapidamente que o equivalente em Elementos Finitos.

2 - Muitas das técnicas numéricas empregadas em Elementos Finitos podem ser utilizadas no *EFGM* para solução de problemas não lineares, realizando-se poucas modificações. A maior diferença está na interpolação da variável potencial.

3 - A função de forma desenvolvida com o *MLS* não atende ao delta de Kronecker, de modo que a imposição das condições de contorno essenciais devem ser realizadas através multiplicadores de Lagrange, pelo Método das Penalidades, através de modificações na formulação variacional, dentre outros.

4 - Dentre os desafios a serem superados com o *EFGM* estão a remoção das células de integração e fazer com que a função de forma atenda ao delta de Kronecker.

3.1.3 *Meshless Local Petrov-Galerkin-MLPG Method*

Conforme mencionado anteriormente o *EFGM* necessita de uma distribuição de células de integração em todo o domínio. Surge a pergunta: Seria possível não fazer uso da forma fraca? Segundo Liu (2003) a resposta é sim, métodos que fazem uso da forma forte como o *Finite Point Method* (Liszka and Orkisz, 1980; Onate et al., 1996; Cheng and Liu, G. R. 1999; Xu and Liu, G. R. 1999; Song et al. 1999) fizeram uso da Série de Taylor na solução destas equações. Contudo, estes tipos de Métodos não se mostraram estáveis, principalmente em uma distribuição arbitrária de nós.

Foi verificado que uma maneira de contornar este problema seria, utilizando domínios locais individuais para cada nó conforme proposto no *MLPG*.

O *MLPG* foi originalmente proposto por Atluri e Zhu (1998), tendo como idéia principal a implementação da forma integral do Método de Resíduos Ponderados confinada em um pequeno sub-domínio de um nó, obtendo-se uma "forma fraca local". Isto significa que a forma fraca é satisfeita em cada sub-domínio do problema. Logo, a forma fraca é integrada sobre um "domínio de quadratura local" que é independente dos domínios dos outros nós. Isto é possível pelo uso da formulação de Petrov-Galerkin onde se tem a liberdade em se escolher funções admissíveis e funções teste independentemente. Neste método são escolhidas funções peso que se anulam nas fronteiras destes sub-domínios ou domínios de quadratura local.

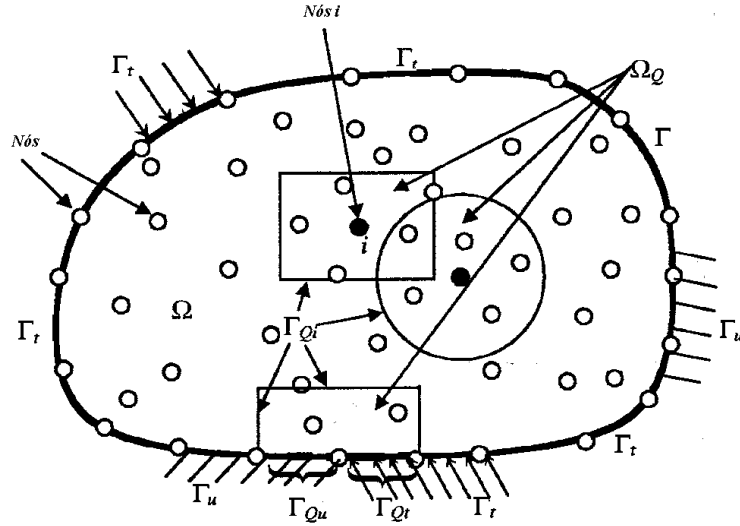


Figura 3.4: Domínio para problemas com formulação fraca local (Liu (2003)).

Na figura 3.4 pode-se verificar como o *MLPG* trata do domínio do problema. Tem-se que Ω é o domínio em estudo com fronteiras de Dirichlet Γ_u e Natural Γ_t . O domínio de quadratura é representado por Ω_Q com suas respectivas fronteiras: Γ_{Qi} localizada inteiramente dentro do domínio Ω , Γ_{Qu} , que intercepta a fronteira Γ_u e Γ_{Qt} , que intercepta a fronteira Γ_t .

Conforme pode ser visto na figura (3.4), uma dificuldade do *MLPG* consiste na integração em regiões próximas às fronteiras do domínio do problema. Isto

se dá pelo fato de que, ocasionalmente os domínios de quadratura de cada nó interceptam a fronteira do problema. Isto faz gerar domínios de quadratura locais com geometria complexa.

Segundo Liu (2003) o *MLPG* se comporta bem tanto com problemas estáticos quanto dinâmicos.

Ainda, segundo Liu (2003) o *MLPG* não é tão eficiente em termos de tempo de processamento quanto o *MEF*. Isto é explicado pelo fato das matrizes geradas serem assimétricas e suas funções de forma obtidas pelo *MLS* serem mais complexas que as equivalentes no *MEF*.

Dentre os principais desafios com o *MLPG* destacam-se: 1) Integração mais precisa. 2) Integração em fronteiras complexas. 3) Geração de matrizes simétricas. 4) Geração de funções de forma que possuam a propriedade do delta de Kronecker.

3.1.4 *Point Interpolation Method (PIM)*

O Método *PIM* foi originalmente proposto por G. R. Liu e Gu em 1999 (Liu (2003)) como uma alternativa para o Moving Least Squares, para se obter a interpolante da função desejada. O *PIM* é aplicado tanto em formulações do tipo Galerkin quanto em formulações do tipo Petrov-Galerkin. Vale observar que este método apresenta problemas para garantir a continuidade da função aproximada. Isto deve ao fato da compatibilidade de função de forma não estar assegurada, dada a maneira súbita como os nós entram ou saem do domínio de suporte (Liu (2003)). Este problema foi abordado e resolvido através do uso de subdomínios locais conforme será descrito neste capítulo.

O *PIM* interpola a função potencial $A(\mathbf{x})$ utilizando os valores nodais do domínio de suporte de um ponto de interesse x_Q :

$$A^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) \quad (3.24)$$

onde $B_i(\mathbf{x})$ são as funções de base definidas no espaço de coordenadas car-

tesianas $\mathbf{x}^T = [x, y, z]$, n é o número de nós no domínio de suporte de um ponto \mathbf{x}_Q e $a_i(\mathbf{x}_Q)$ é o coeficiente para a função de base $B_i(\mathbf{x})$.

3.1.4.1 *PIM* - Polinomial

Conforme o nome diz este é um método do tipo *PIM*, sendo baseado em uma formulação fraca global.

Para o *PIM* polinomial a função potencial é dada por :

$$A^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \quad (3.25)$$

onde \mathbf{p}^T é uma base polinomial.

O vetor \mathbf{A}_s que coleta os valores da função potencial nos nós do domínio do suporte será dado por:

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (3.26)$$

onde \mathbf{P}_Q é denominada Matriz de Momento e é dada por:

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \dots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Fazendo uso de (3.26) e assumindo que a matriz de momento possui inversa, tem-se que:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{A}_s. \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) em (3.25) obtém-se:

$$A^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i A_i(\mathbf{x}_Q) \quad (3.29)$$

ou na forma matricial

$$A^h(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})\mathbf{A}_s \quad (3.30)$$

onde a função de forma é dada por:

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}_Q^{-1}. \quad (3.31)$$

Pode acontecer que \mathbf{P}_Q^{-1} não exista em algumas situações, o que pode colocar em dúvida a eficácia do método. Porém, algumas técnicas foram desenvolvidas para resolver este problema:

1 - Mover os nós do domínio de suporte a uma pequena distância de sua posição original de forma aleatória.

2 - Fazer uso de funções de base do tipo radiais na construção das funções de forma, conforme será apresentado posteriormente.

3 - Fazer uso de funções de base radiais com termos polinomiais, conforme também será apresentado posteriormente.

4 - Realizar a triangularização da matriz. Este processo consiste em garantir a não singularidade da matriz de momento, através de um processo de triangularização. Em linhas gerais, neste processo determina-se qual nó e qual monômio está provocando a singularidade sendo que o nó é, então, retirado do domínio do suporte e o monômio é retirado da base.

Segundo Liu (2003), este processo pode ser automatizado com pouco aumento no custo computacional.

Sobre o *PIM* Polinomial vale destacar: 1) Se a base polinomial for completa de grau "n" a função de forma terá consistência de grau "n". 2) A função de forma satisfaz o delta de Kronecker. 3) A função de forma possui suporte compacto o que leva a matriz do sistema a ser do tipo banda e esparsa. 4) O PIM faz aproximações diferentes, com coeficientes diferentes em cada região. Quando se muda de região de aproximação veja (3.25), muda-se os coeficientes e há uma

Tabela 3.1: Funções de base radiais com parâmetros da função de forma adimensionais.

Item	Nome	Expressão	Parâmetro da F. Forma	Relação de Parâmetros
1	Multiquádricas (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$	$\alpha_c = C/d_c, q = q$
2	Gaussiana (EXP)	$R_i(x, y) = \exp \left[-\alpha_c (r_i/d_c)^2 \right]$	α_c	$\alpha_c = c d_c$
3	Thin Plate Spline (TPS)	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η	$\eta = \eta$
4	RBF Logarítmica	$R_i(r_i) = r_i^\eta \log r_i$	η	$\eta = \eta$

descontinuidade nas funções de forma. Isto faz gerar descontinuidade na função potencial, caracterizando a incompatibilidade do PIM. Vale observar que no *MLS* isso não ocorre porque a variação dos coeficientes é feita de maneira contínua.

3.1.4.2 *PIM Radial - RPIM*

O *PIM* Radial baseia-se também na formulação fraca global do problema, sendo que a função potencial é dada por:

$$A^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \quad (3.32)$$

onde \mathbf{a} é o mesmo da equação 3.28, e R_i é uma função base radial que pode ser por exemplo, do tipo multiquádrica, gaussiana, *thin plate*, spline ou logarítmica.

Sobre o *PIM* Radial vale destacar: 1) A matriz de momento \mathbf{R} é simétrica e possui inversa. 2) As funções de forma do *PIM* Radial não são consistentes pelo critério aqui estipulado e definido na seção 3.1. 3) Pelo fato de ser um Método *PIM* a função de forma satisfaz o delta de Kronecker, 4) Não há evidências sobre vantagens do *RPIM* fazendo uso de funções multiquádricas sobre as exponenciais (veja a tabela 3.1), 5) A eficiência computacional do *RPIM* é comparável com a do Método de Elementos Finitos, quando o mesmo número de nós é utilizado.

3.1.4.3 *PIM Radial com Reprodução Polinomial*

O *PIM* Radial com Reprodução Polinomial tem como base a forma fraca global do problema, sendo necessária uma malha de integração ao longo de todo o domínio, conforme mostrado na figura (3.3).

O Método *RPIM* com funções radiais puras, conforme descrito não, é consistente, sendo que o objetivo de acrescentar polinômios nas funções de base é garantir esta consistência.

Sua função potencial é dada por:

$$A^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} \quad (3.33)$$

onde $p_j(\mathbf{x})$ é uma base polinomial e \mathbf{b} é o vetor de coeficientes desta base.

Vale observar que segundo (Liu (2003)), a inclusão de termos polinomiais na aproximação auxilia de duas maneiras: A primeira é no aumento de precisão e a segunda é a diminuição da sensibilidade dos resultados frente aos parâmetros das funções de forma radiais.

3.1.5 *Local Point Interpolation Method*

O Método *LPIM*, originalmente proposto por G. R. Liu e Gu (2001a) usa a formulação fraca do tipo Petrov-Galerkin integrada em um sub-domínio local, ou domínio de quadratura. Este método faz uso das funções de forma do tipo *PIM* para a interpolação da variável potencial, sendo o domínio do problema semelhante ao apresentado na figura (3.4). Este tipo de abordagem permitiu resolver o problema de compatibilidade da função de forma dos métodos PIM que faziam uso da formulação fraca global. Isto se deve ao fato de que cada sub-domínio refere-se a um único nó, de modo que a aproximação da função potencial é contínua em qualquer parte do mesmo (Liu (2005)).

Segundo Liu (2003), quanto maior a dimensão do domínio de quadratura melhores são os resultados, porém domínios muito extensos apresentam, dentre outros problemas, custo computacional elevado. Foi verificado que domínios de influência com α_I entre 1,6 e 2,5 levaram a resultados satisfatórios. Um domínio

de influência com $\alpha_I < 1,5$ conduz a grandes erros por não carregar nós suficientes para a realização da interpolação da variável potencial. Também grandes erros são verificados quando um domínio de influência possui grandes dimensões, como por exemplo $\alpha_I > 2,5$ Liu (2003).

O Método *LPIM* fazendo uso de funções base radiais como, por exemplo, multiquádricas, exponencias ou *TPS* foi designado *Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM)*. Foi verificado que este método apresenta boa convergência, quando comparado aos demais métodos sem malha. Porém resultados melhores foram alcançados quando foram incluídos termos polinomiais na base radial Liu (2003).

Segundo Liu (2003) valem as seguintes observações sobre o *LRPIM*:

1 - Uma das características mais atraentes no *LRPIM* é que suas funções de forma se comportam como o delta de Kronecker.

2 - A inclusão de termos polinomiais nas funções de base radiais aumentam a precisão dos resultado. Recomenda-se incluir termos lineares.

3 - Nos estudos realizados para casos estacionários, as funções radiais exponenciais, multiquádricas ou *TPS* se mostraram estáveis para uma distribuição irregular de nós.

4- Um dos problemas com o *LRPIM* é seu custo computacional que é relativamente mais elevado quando comparado aos demais métodos sem malha.

Segundo Liu (2003), os principais pontos positivos nos métodos do tipo *PIM* são a alta precisão no ajuste de curvas e o fato das funções de forma se comportarem como delta de Kronecker, o que implica em uma imposição facilitada das condições de contorno essenciais. Dentre os desafios dos métodos *PIM*, pode se destacar a distribuição dos nós no domínio de modo que o método fique estável.

Vale, ainda, uma comparação entre os Métodos *PIM* e o *EFGM*. A construção das funções de forma no *EFGM/MLS* é mais complexa do que com o *PIM*. Além disto, o *EFGM/MLS* exige um esforço adicional para escolher e computar

Tabela 3.2: Comparação entre funções de forma.

Função de Forma	Consistência	Compatibilidade	Atende ao Delta de Kronecker
SPH	Não na fronteira e sim no Interior do Domínio	Sim para a forma contínua do SPH	NÃO
RKPM	SIM	Não está claro	NÃO
MLS	SIM	SIM	NÃO
PIM Polinomial	SIM	NÃO	SIM
PIM Radial	NÃO	NÃO	SIM
PIM Radial com base Polinomial	SIM	NÃO	SIM

estas funções de forma. Em contrapartida neste último, a aproximação da variável potencial é contínua em todo o domínio, enquanto no *PIM* é contínua por partes.

3.1.6 Escolha do Método sem Malha

Baseado nas informações sobre os métodos apresentados, a escolha sobre qual método utilizar na simulação do problema da máquina elétrica passa pelas características do problema e dos métodos em si. Dentre as principais características do modelo da máquina podem-se listar:

1) Existem fronteiras móveis de geometria relativamente complexa. 2) Há diversos tipos de materiais na estrutura. 3) O problema é de natureza dinâmica. 4) Existem fronteiras periódicas no modelo. 5) Dado o grau de complexidade do problema, métodos comprovadamente estáveis são necessários.

Frente aos problemas enumerados anteriormente e aos métodos apresentados, pode-se fazer a seguinte análise:

Para o primeiro item listado, ou seja, fronteiras móveis de geometria relativamente complexa, o problema se enquadra preferencialmente na categoria dos métodos que tratam da forma fraca de maneira global. Isto é explicado, pelo fato destes métodos evitarem uma série de implicações encontradas naqueles que fazem uso de domínio local e que são:

1 – Nestes métodos é exigida uma superposição entre os sub-domínios, para que seja garantida a solução do problema em todo o domínio. Isto consiste em

tarefa não trivial quando se considera uma distribuição não uniforme de nós.

2 – Devido ao fato de se necessitar desta superposição, muitas vezes os subdomínios interceptam regiões ou fronteiras que não deveriam, havendo necessidade de se truncar tais subdomínios.

3 – Para métodos como o *MLPG*, quando se modelam estruturas móveis, além da translação dos nós propriamente ditos é necessário o deslocamento dos pontos de integração de Gauss (Viana (2006)), condição desnecessária em métodos como o *EFGM*.

Em relação à descontinuidade de materiais, necessita-se de um método que garanta um bom comportamento da função potencial e de suas derivadas nestas condições. Descontinuidade de materiais, normalmente é um problema nos métodos sem malha que utilizam funções peso de classe C^1 ou superior, fazendo com que as funções de forma do método herdem comportamento semelhante. Esta característica se mostra prejudicial nestas situações. Nestes casos utilizam-se técnicas como por exemplo o critério da visibilidade, funções peso especiais, ou a associação das duas (Coppoli et al. (2007)).

Quanto a natureza dinâmica do problema, nenhum dos métodos apresentados mostra, segundo Liu (2003), restrição a esta característica, se comportando de maneira adequada a variações temporais de suas variáveis. Neste ponto vale fazer referência à indução de correntes, fenômeno que está diretamente relacionada a variação temporal do fluxo magnético. Para este fenômeno vale citar uma referência relacionada ao *EFGM* (Bottauscio et al. (2006)).

Para o tratamento das fronteiras periódicas do problema, será mostrado posteriormente, que os métodos cujas funções de forma se comportam como o delta de Kronecker serão os mais indicados. Isto é explicado pelo procedimento adotado nesta situação, que passa dentre outros aspectos pela imposição de valores nos nós da fronteira. Esta imposição se assemelha, em parte, à realizada pelo Método de Elementos Finitos quando este impõe suas condições de contorno de Dirichlet.

Quanto ao aspecto estabilidade e precisão, seria difícil concluir algo a res-

peito, pois em geral, os métodos estudados apresentam boas respostas aos problemas tratados. Desta maneira, esta decisão foi influenciada basicamente em experiência própria e pela bibliografia recolhida.

Com o exposto até agora, a escolha do método para o tratamento do problema em questão, uma máquina de indução, deveria recair sobre aqueles que utilizam formas fracas globais, dada as dificuldades impostas em métodos que utilizam o outro tipo de formulação, conforme citado anteriormete. Outro quesito importante seria aquele relacionado às funções de forma, ou seja o método deveria atender à propriedade do delta de Kronecker. Além disto, na escolha do método deveria ser levado em conta o legado de confiabilidade, confirmado por vasta bibliografia.

Relacionados os pontos importantes a serem considerados na escolha do método, surge o questionamento. Caso o *EFGM* incorporasse em suas funções de forma a propriedade do delta de Kronecker seria este um método apropriado para o problema, uma vez que o mesmo possui um amplo e positivo histórico no tratamento de problemas de eletromagnetismo? Conforme apresentado no próximo capítulo o problema relativo ao delta de Kronecker será resolvido através do uso de funções de peso especiais. Isto propiciará dentre outros aspectos positivos o tratamento adequado de problemas com materiais descontínuos, a imposição facilitada das condições de contorno essenciais e a implementação de fronteiras periódicas. Neste contexto, pelos aspectos relacionados anteriormente e pela experiência pregressa do autor, optou-se pelo *Element-Free Galerkin Method* neste trabalho.

Capítulo 4

Interpolating Element-Free Galerkin Method

O *Element-Free Galerkin Method* é um dos métodos sem malha mais utilizados na solução de problemas eletromagnéticos (Bottauscio et al. (2006), Cingoski et al. (1998), Parreira et al. (2006a), Parreira et al. (2006), Xuan et al. (2004) and Xuan e Udpa (2004)).

Conforme já relatado no capítulo 3, este método é considerado sem malha porque, para se obter uma solução aproximada de um problema de valor de contorno, o *EFGM* necessita somente da definição da geometria do problema. Ou seja, o método precisa apenas da distribuição do material no domínio, das fronteiras existentes, das condições de contorno, de um conjunto de nós e de células de integração distribuídos ao longo de todo o domínio.

Apesar das facilidades apresentadas por um método sem malha em aplicações como estruturas em movimento, o *EFGM* apresenta algumas desvantagens em relação ao Método de Elementos Finitos para problemas estáticos, tais como: 1) O mesmo é computacionalmente mais lento que o MEF para a mesmo grau de precisão da solução (Cingoski et al. (2000)). 2) O método necessita de técnicas especiais para o tratamento de descontinuidade de materiais, conforme será mostrado neste capítulo. 3) A imposição das condições de contorno essenciais usualmente apresenta dificuldades na sua implementação (Cingoski et al. (2000) and Coppoli

et al. (2008a)).

Normalmente, o *EFGM* emprega aproximação por mínimos quadrados móveis ou "*moving least squares*" de forma a aproximar $u(x)$ com $u^h(x)$. Esta aproximação é construída a partir de três componentes: uma função peso com suporte compacto, uma base usualmente polinomial e um conjunto de coeficientes que dependem da posição.

Será visto neste capítulo, que o uso de funções peso com singularidades transformará a aproximante em interpolante, abordagem conhecida como *Interpolating Moving Least Squares (IMLS)* (Lancaster e Salkauskas (1981)). Conforme será mostrado, isto propiciará uma melhoria nos resultados de problemas que possuam descontinuidade de materiais. Além disto, será possível a imposição das condições de contorno essenciais de maneira direta, da mesma forma como é feita pelo Método de Elementos Finitos.

4.1 *Interpolating Moving Least Squares*

Antes de descrever o *Interpolating Moving Least Squares*, é conveniente apresentar o *Moving Least Squares*. Será seguido a abordagem realizada por Maisuradze e Thompson (2003), assim como por Liu e Gu (2005) no que se refere aos aspectos básicos desta aproximação.

Uma função de aproximação pode ser dada por:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = \underbrace{\{1 \ x \ y \cdots p_m(x)\}}_{\mathbf{p}^T} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{array} \right\}}_a \quad (4.1)$$

onde $a_j(\mathbf{x})$ ($j=1, 2, \dots, m$) são os coeficientes a serem determinados, \mathbf{p} é o vetor das funções de base e $\mathbf{x}^T(x, y)$ é o vetor posição. Considerando-se todos os

nós, chega-se à seguinte equação:

$$\mathbf{U}_S = (\mathbf{P}_m)_{(n \times m)} \mathbf{a}_{(m \times 1)} \quad (4.2)$$

onde \mathbf{P}_m é denominada Matriz de Momento:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \cdots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \cdots & p_m(x_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \cdots & p_m(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(n \times m)} \quad (4.3)$$

Note que \mathbf{P}_m não é uma matriz quadrada pois $n > m$.

Na aproximação por *Moving Least Squares*, os parâmetros $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são determinados minimizando a norma discreta em L_2 dada por:

$$J = \sum_{i=1}^n w_i [u^h(x_i) - u_i]^2 \quad (4.4)$$

onde $w_i = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, ($i=1, 2, \dots, n$) é a função peso associada ao i -ésimo nó. Posteriormente, será mostrado que esta função peso possui suporte compacto para o *MLS*. Será mostrado também, que para o *IMLS* $w_i \rightarrow \infty$ quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_i$, e que w_i aproxima-se de zero assintoticamente quando \mathbf{x} se afasta de \mathbf{x}_i .

Para a condição estacionária J :

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.5)$$

que leva a seguinte relação entre \mathbf{a} e \mathbf{U}_s

$$\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{P}_m \mathbf{a} = \mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{U}_S \quad (4.6)$$

onde $\hat{\mathbf{W}}$ é a matriz diagonal construída a partir das funções peso, ou seja:

$$\hat{\mathbf{W}}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Chamando

$$\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{P}_m = \mathbf{A} \quad (4.8)$$

e

$$\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} = \mathbf{B} \quad (4.9)$$

é possível reescrever (4.6) como:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{U}_S. \quad (4.10)$$

Se a matriz \mathbf{A} não for singular, \mathbf{a} pode ser dada por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_S. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.1) chega-se a:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_S \quad (4.12)$$

ou

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \boldsymbol{\Phi}^T(x) \mathbf{U}_S \quad (4.13)$$

onde:

$$\boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (4.14)$$

é o vetor de funções de forma. Uma importante característica destas funções de forma é que as mesmas possuem suporte compacto.

Para se encontrar as derivadas de u_h é necessário se obter as derivadas das funções de forma. Para tal, (4.14) é reescrita como:

$$\boldsymbol{\Phi}^T = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B} \quad (4.15)$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (4.16)$$

Desde que \mathbf{A} seja simétrica, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ pode ser obtido de (4.16)

Fazendo

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p} \quad (4.17)$$

a derivada parcial de $\boldsymbol{\gamma}$ pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\gamma}_{,k} = \mathbf{p}_{,k} - \mathbf{A}_{,k} \boldsymbol{\gamma} \quad (4.18)$$

onde k representa as coordenadas x ou y , e a vírgula indica a derivada parcial com respeito a estas coordenadas. Fazendo uso de (4.18), a derivada parcial da função de forma Φ é dada por:

$$\Phi_{,k}^T = \gamma_{,k}^T \mathbf{B} + \gamma^T \mathbf{B}_{,k}. \quad (4.19)$$

O princípio do *Interpolating Moving Least Squares* consiste em tornar w_i infinito nos pontos considerados \mathbf{x}_i ($i=1, 2, \dots, n$) caso seja necessário interpolar nestes pontos (Lancaster e Salkauskas (1981)).

Considere, por exemplo, $w_i = \frac{1}{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^n}$. É fácil de se verificar que para $n>0$, existe uma singularidade na função peso w_i . Conforme Maisuradze e Thompson (2003), dentre as maneiras possíveis para se resolver esta questão, vale destacar duas. A primeira seria, utilizando $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^{2n} + \epsilon$ ao invés de $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)^n$ no denominador da função peso. Neste caso ϵ seria escolhido como um número positivo pequeno, na ordem de 10^{-10} , por exemplo, de modo a retirar a singularidade da função. A segunda maneira seria dividir ambos os lados de (4.6) por $\sum_{i=1}^n w_i$.

Pela segunda alternativa (4.6) é levada a:

$$\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{V}} \mathbf{P}_m \mathbf{a} = \mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{V}} \mathbf{U}_S \quad (4.20)$$

onde $\hat{\mathbf{V}}$ é uma matriz diagonal construída a partir das funções peso normalizadas, ou seja:

$$\hat{\mathbf{V}}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \hat{V}_1 & \hat{V}_2 & \dots & \hat{V}_n \end{bmatrix}.$$

Segundo Coppoli et al. (2008c), dentre as propriedades de $\hat{\mathbf{V}}$ estão seu comportamento como delta de Kronecker ($\hat{\mathbf{V}}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ para $i, j=1, 2 \dots n$).

Neste trabalho, as funções peso utilizadas no *MLS* foram do tipo spline cúbica (4.21), comum neste tipo de aproximação.

$$w\left(\frac{|x - x_i|}{d_I}\right) = w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & \text{para } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & \text{para } r > 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

onde $r = \frac{|x - x_i|}{d_I}$ e d_I constitui o domínio de influência de cada nó e está diretamente relacionado à região em que este nó atuará efetivamente.

No caso do *IMLS* foram utilizadas funções como a apresentada em (4.22). Nesta equação pode se verificar que para regiões situadas a distâncias superiores a d_I , a função peso w será nula.

$$w_i(r) = \frac{1}{r^{2n} + \varepsilon} \quad (4.22)$$

Nesta expressão, n é um número inteiro positivo e ε consiste de um número real positivo pequeno, conforme mencionado anteriormente. As figuras (4.1) e (4.2) mostram o comportamento destas funções.

Uma característica importante relacionada a este último tipo de função peso é o modo como a mesma age sobre a esparsidade da matriz. Apesar desta possuir um comportamento assintótico, as funções de forma associadas a elas possuem suporte compacto, uma vez que os domínios de influência de cada nó são limitados. Isto faz garantir a esparsidade do sistema final.

4.2 *Interpolating Element-Free Galerkin Method*

O *Interpolating Element-Free Galerkin Method* consiste basicamente em se utilizar as funções peso do tipo (4.22) para compor suas funções de forma, ou seja utilizar o *Interpolating Moving Least Squares*.

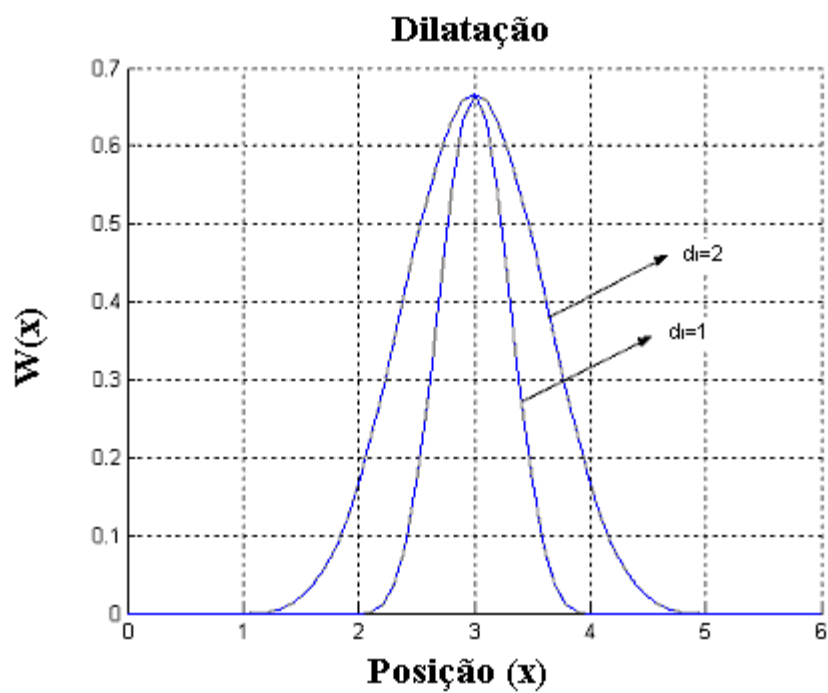


Figura 4.1: Função peso do tipo spline.

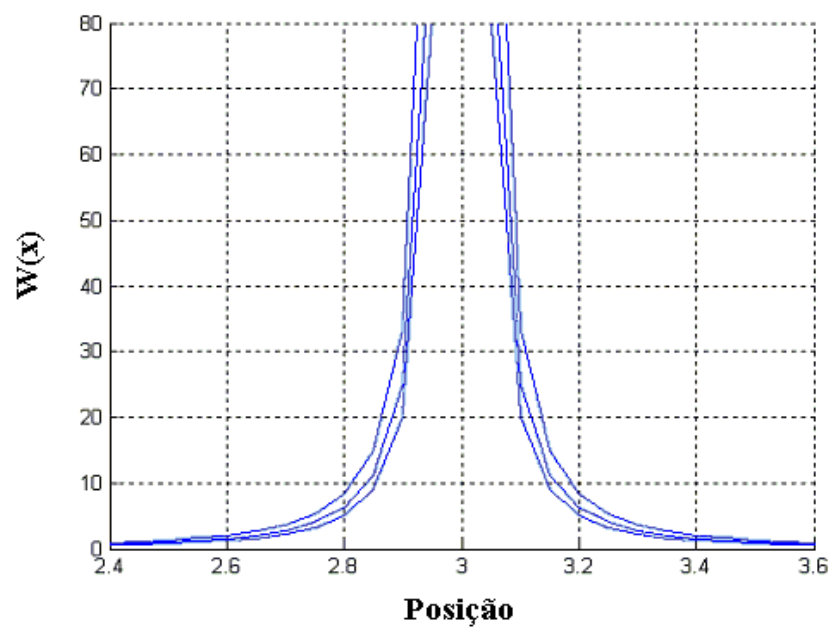


Figura 4.2: Função peso utilizada no *IMLS*.

Para uma avaliação inicial da aplicação do *Interpolating Element Free Galerkin Method* foi realizada a simulação do potencial elétrico e do campo elétrico em um capacitor hipotético de dois materiais, conforme mostrado na figura (4.3). Nestas simulações foram comparados os resultados utilizando o *MLS* com os obtidos através do *IMLS*.

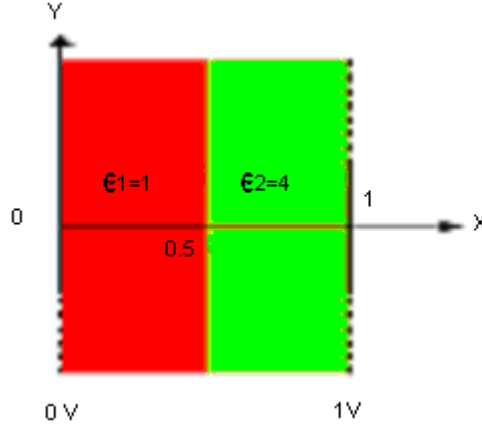


Figura 4.3: Capacitor de dois materiais.

Os efeitos do uso do *IMLS* são evidenciados nos resultados seguintes das figuras (4.4) e (4.5). Nestas simulações foram utilizados como parâmetros de (4.22) $n=5$ e $\epsilon=10^{-10}$, além de uma distribuição nodal uniforme.

A título de comparação entre os dois tipos de função peso, são apresentados nas tabelas I e II os erros nas normas L^2 e H^1 para o potencial elétrico ao longo do capacitor.

Vale destacar a redução do erro na norma L^2 que foi da ordem de 10 vezes quando se utilizou o *IMLS*.

Este capítulo apresentou a formulação básica utilizada no *Interpolating EFGM* e relacionou alguns aspectos importantes do *IMLS* tais como o comportamento de sua função peso e sua característica interpolante. Foi evidenciado também o grau de precisão obtido através do uso do *IMLS* quando comparado ao *MLS*.

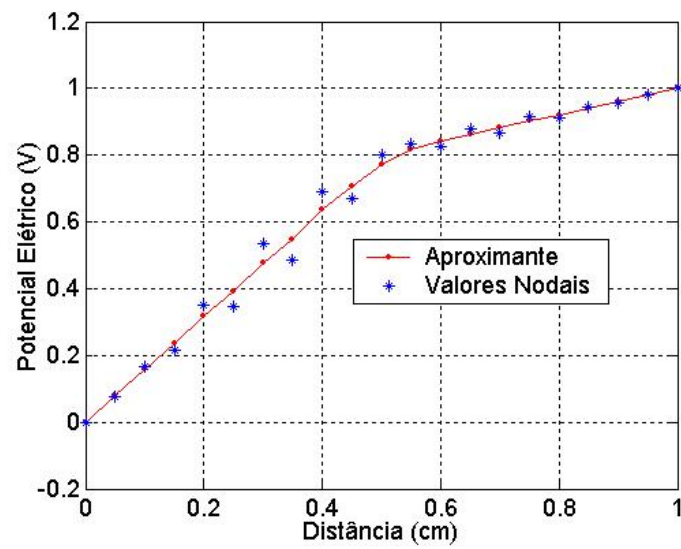


Figura 4.4: Potencial elétrico ao longo do capacitor de dois materiais - função peso Spline.

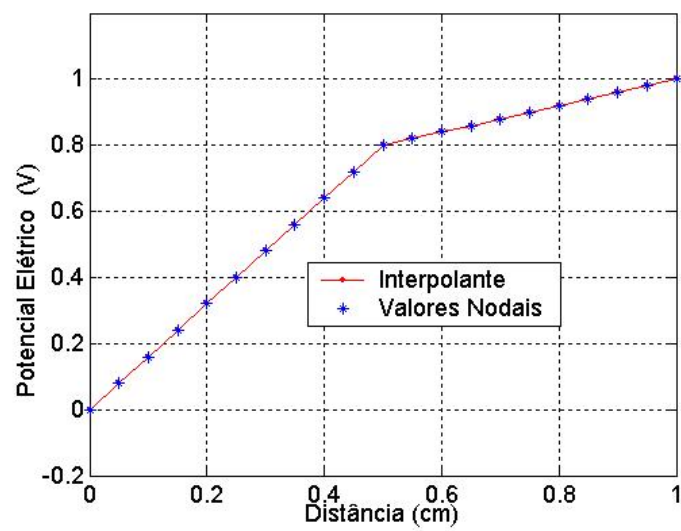


Figura 4.5: Potencial elétrico ao longo do capacitor de dois materiais- *IMLS*.

Tabela 4.1: Erros nas normas L^2 e H^1 para o potencial elétrico utilizando a função peso spline e espaçamento entre nós h .

h	Norma do erro em L^2 do Po- tencial Elétrico	Norma do erro em H^1 do Po- tencial Elétrico
0.1000000000	0.0033847161	0.1200565124
0.0500000000	0.0011961009	0.0848619102
0.0333333333	0.0006509714	0.0692841090
0.0250000000	0.0004227843	0.0599999921

Tabela 4.2: Erros nas normas L^2 e H^1 para o potencial elétrico utilizando a função peso $w_i(r) = \frac{1}{r^{2n+\varepsilon}}$ e espaçamento entre nós h .

h	Norma do erro em L^2 do Po- tencial Elétrico	Norma do erro em H^1 do Po- tencial Elétrico
0.1000000000	0.0003681628	0.0499969313
0.0500000000	0.0001251166	0.0354162721
0.0333333333	0.0000683589	0.0289347644
0.0250000000	0.0000434477	0.0250623452

Uma segunda característica do *IMLS* que merece destaque consiste do mesmo facilitar a imposição das condições de contorno essenciais no *EFGM*, realizada de maneira similar ao Método de Elementos Finitos. Isto pode ser explicado, basicamente, pelo fato da função de forma associada ao método se comportar como o delta de Kronecker, realizando assim a interpolação da função potencial elétrico

Outra característica importante do *Interpolating EFGM* é a maneira como são tratados problemas com fronteiras periódicas. Este tópico será abordado no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo será apresentada a sequência de resultados obtidos que possibilitaram a simulação de uma máquina de indução através de um método sem malha e que poderão auxiliar na modelagem de outros dispositivos eletromagnéticos através desta classe de método.

Primeiramente serão mostradas as técnicas que além de constituírem a base do trabalho, foram fundamentais na viabilização do mesmo e que são: o pré-processamento, o ganho de desempenho do código e o tratamento da distribuição de nós. Posteriormente, aspectos essenciais ao modelo da máquina elétrica são simulados como a indução de correntes, a implementação de fronteiras periódicas, simulações com a máquina travada e finalmente será apresentada a estrutura se movimentando.

5.1 Pré-processamento

No tratamento de problemas com métodos sem malha é necessário que se tenha acesso a uma distribuição de nós no domínio estudado. Sobre estes nós deve-se conhecer suas coordenadas e o material onde o mesmo se localiza. Além destas informações, é importante saber se o nó está situado em uma interface entre materiais, ou em fronteiras como a de Dirichlet, Neumann, periódica ou anti-periódica.

Para se obter estas informações, fez-se uso de um software para cálculo de campos eletromagnéticos utilizado em elementos finitos. Vale ressaltar que isto foi necessário dado a escassez de recursos de pré-processamento disponíveis para métodos sem malha. Este *software* de uso livre denominado *Femm* (Meeker (2009)) que faz uso de um gerador de malha também de uso livre denominado *Triangle* (Shewchuk (2009)), permitiu a descrição da geometria do motor em estudo, bem como as informações listadas anteriormente sobre os nós. A seguir é apresentada na figura (5.1) uma das geometrias geradas pelo *Femm* e utilizada neste trabalho.

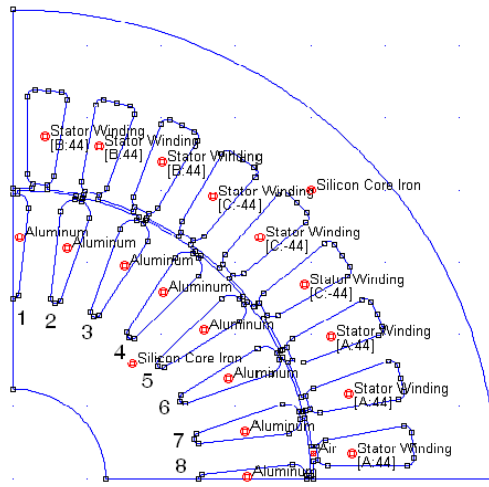


Figura 5.1: Geometria de uma máquina elétrica gerada pelo *Femm*.

5.2 Tratamento de Distribuições Não Uniformes de Nós

Uma questão importante a ser tratada tanto no *EFGM* quanto em outros métodos sem malha consiste da distribuição dos nós no domínio. Isto é importante, especialmente quando se está solucionando problemas com geometrias mais complexas. Nestas situações exige-se que a distribuição dos nós seja feita de maneira não uniforme, aumentando-se, por exemplo, sua concentração em regiões onde ocorre a maior variação na solução. Contudo esta distribuição de nós realizada de maneira não uniforme acarreta problemas para os métodos sem malha,

necessitando da aplicação de técnicas específicas baseadas no cálculo da distância média entre nós.

Neste trabalho utilizou-se uma sistemática para tratamento dos problemas oriundos da distribuição não uniforme de nós, baseada em um procedimento de determinação do domínio de influência de cada nó. Este procedimento tem como princípio a distância média dos nós vizinhos em relação a um nó específico.

Primeiramente, é necessária a determinação dos nós vizinhos em relação a um nó específico, sendo que para isto faz-se uso de um algoritmo de busca baseado em uma estrutura de dados denominada *K-D Tree*. Esta estrutura de dados ou a *K dimensional tree* constitui de uma árvore binária de pesquisa que permite um processamento eficiente de buscas geométricas multidimensionais (Kennel (2004) e Coppoli et al. (2008b)).

O método para determinar a distância média entre os nós em relação a um ponto específico é baseado em Liu e Gu (2005) e será apresentado a seguir.

Conforme já mencionado em capítulos anteriores a dimensão do domínio de influência d_I , normalmente é dada por:

$$d_I = \alpha d_c \quad (5.1)$$

onde α é um valor adimensional relacionado ao domínio de influência que normalmente varia de 2 a 4, e d_c é a distância nodal média próxima ao nó de interesse.

Em duas dimensões, uma das maneiras de se obter a distância média d_c seria utilizando a seguinte expressão:

$$d_c = \frac{\sqrt{A_I}}{\sqrt{n_{A_I}} - 1} \quad (5.2)$$

onde A_I é a área do domínio de influência calculado a partir de valores estimados de d_I (Veja a figura 3.1) e n_{A_I} é o número de nós envolvidos pela área deste domínio de influência. Vale observar que este valor estimado de d_I deverá

ser experimentado até que o resultado final de d_c produza resultados satisfatórios.

Em suma, o algoritmo para o cálculo do domínio de influência de cada nó é o seguinte:

1. Estima-se d_I para um nó específico, determinando-se então a área A_I .
2. Faz-se a contagem de nós que estão na área A_I . Para isto utiliza-se algum mecanismo de busca, que no caso teve como base uma estrutura de dados do tipo K-D Tree.
3. Utiliza-se a equação (5.2) para se calcular d_c .
4. Calcula-se d_I utilizando-se (5.1).

A figura 5.2 mostra um circuito magnético usual em forma de ferradura que foi utilizado para se verificar a importância dada à distribuição de nós em métodos sem malha.

A distribuição dos nós utilizada neste circuito é mostrada na figura (5.3).

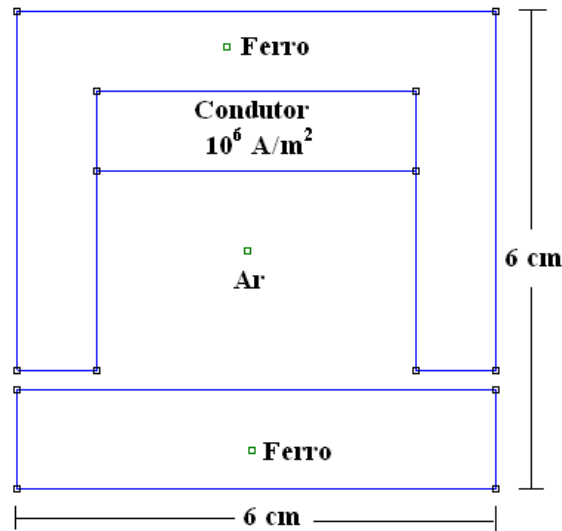


Figura 5.2: Circuito magnético estático composto por uma região de alta permeabilidade magnética separada por um entreferro e excitado por uma fonte de corrente.

Para se ter uma idéia da importância da correção das distâncias médias nodais a figura (5.4) mostra a indução magnética calculada neste circuito sem

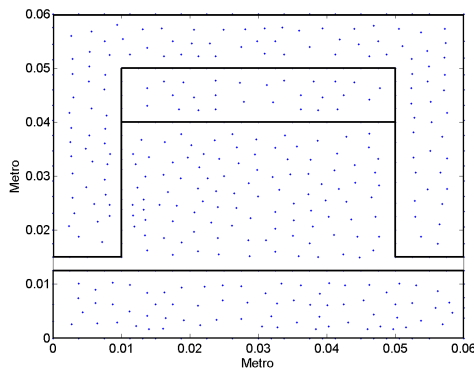


Figura 5.3: Distribuição nodal utilizada no circuito magnético.

nenhuma técnica de correção.

A figura (5.5) mostra os resultados para a indução magnética utilizando-se o algoritmo de correção apresentado anteriormente.

Nos resultados apresentados para o circuito magnético foi utilizada uma distribuição nodal de 470 pontos, conforme mostrada na figura (5.3). Foram estimados como dimensões dos domínios de influência $d_{Ix} = d_{Iy} = 0,81$. Quanto aos parâmetros do *IMLS* utilizados nestas simulações, foram usados $n=5$ e $\epsilon = 10^{-10}$. Vale observar que em ambas as simulações foi empregado o Método da Visibilidade que será descrito a seguir.

5.3 Tratamento de descontinuidade de materiais

No *Element Free Galerkin Method (EFGM)*, assim como nos demais métodos sem malha, se faz necessário a aplicação de correções quando problemas com materiais descontínuos são tratados.

Problemas com este tipo de descontinuidade são evidenciados quando se está avaliando a derivada do potencial, como por exemplo o campo elétrico e o campo magnético. Algumas das técnicas mais empregadas para se resolver esses problemas são o “Método da Visibilidade” (Coppoli et al. (2007) e Liu (2003)), o “Método das

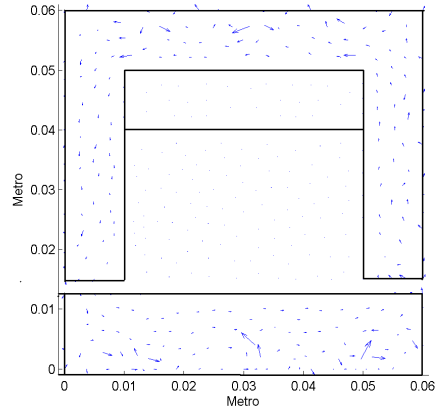


Figura 5.4: Indução magnética utilizando $d_{Ix}=0.81\text{cm}$ e $d_{Iy}=0.81\text{cm}$ e sem a correção das distâncias médias entre os nós.

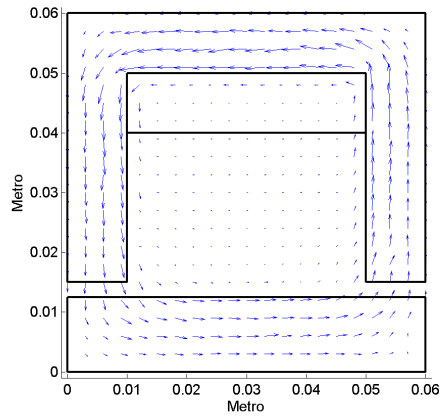


Figura 5.5: Indução magnética utilizando $d_{Ix}=0.81\text{cm}$ e $d_{Iy}=0.81\text{cm}$ e com a correção das distâncias médias entre os nós.

Penalidades” (Liu e Gu (2005)) e a alteração da formulação variacional (Cordes e Moran (1996)).

Verifica-se, contudo, que a aplicação das técnicas citadas anteriormente não são suficientes para resolver o problema de oscilações espúrias verificadas principalmente na derivada da solução. Isto pôde ser verificado em detalhes no capítulo 4, quando se mostrou o uso do *Interpolating Moving Least Squares* ao invés do *Moving Least Square (MLS)*, comumente utilizado no *EFGM*.

O Método da Visibilidade, utilizado em todas as simulações que envolviam mais de um material será descrito a seguir.

Neste método os domínios de influência de cada nó são truncados na fronteira entre os materiais. Caso estes estejam localizados sobre a mesma, deverão exercer influência nos dois lados desta fronteira. Veja a figura (5.6).

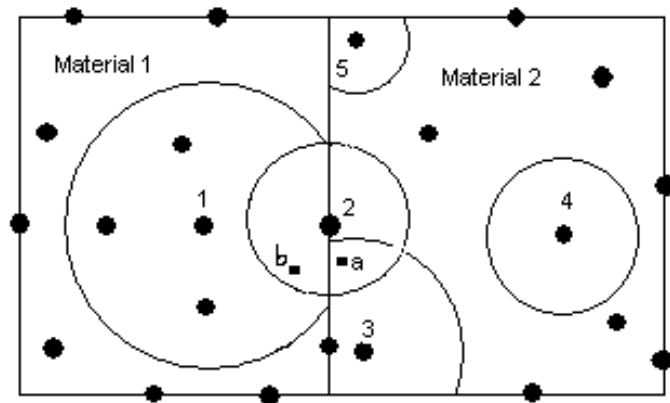


Figura 5.6: Critério da visibilidade onde as circunferências representam a abrangência dos domínios de influência dos nós.

Quanto ao uso do *IMLS* para o tratamento da descontinuidade de materiais, vamos recorrer ao exemplo do capacitor de dois materiais mostrado no capítulo 4, onde são apresentados os resultados do campo elétrico sobre uma seção deste capacitor.

Como se pode verificar na figura (5.7), o *IMLS* se mostrou eficaz na retirada das oscilações do campo elétrico. Vale observar que ambas as simulações também utilizaram o critério da visibilidade.

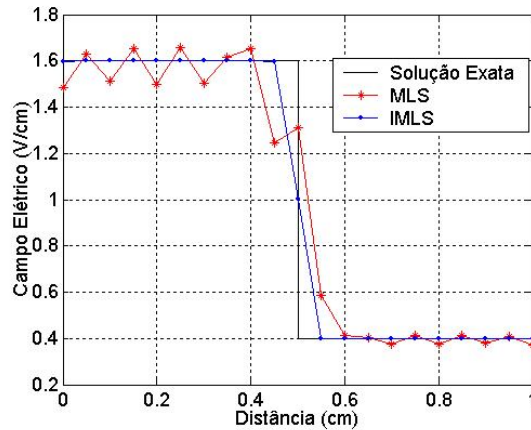


Figura 5.7: Campo elétrico na seção do capacitor de dois materiais utilizando a função peso Spline e o *IMLS* - $\alpha = 3$

A explicação para a retirada das oscilações está no fato de tanto o Método da Visibilidade, quanto o *IMLS* introduzirem descontinuidades na função peso e na função de forma associada. Esta situação, contudo, não é verificada, quando se está utilizando a *spline* cúbica, como função peso, pois a mesma é uma função de classe C^2 .

5.4 Indução de Correntes

Neste item serão verificados os efeitos das correntes induzidas em uma barra de material ferromagnético quando a mesma é submetida a um campo magnético variável no tempo. A figura (5.8) mostra o circuito magnético simulado no qual será possível avaliar também o comportamento transiente do *EFGM*, sendo que alguns dos resultados serão comparados com softwares existentes como o FEMM e CST (Computer Simulation Technology).

O circuito magnético é constituído de uma região com alta permeabilidade magnética com $\mu_r = 1000$, onde se espera que o fluxo se concentre, uma barra

condutora logo abaixo com condutividade $\sigma = 10^6(S/m)$, onde serão induzidas as correntes e uma fonte de corrente que induzirá o campo magnético na estrutura. Este circuito é apresentado na figura (5.8). Esta fonte foi propositalmente definida pelo fato do fluxo seguir o comportamento da corrente, de modo que se verifique a indução de correntes na barra quando houver a variação de fluxo e extinção das mesmas quando este se tornar constante.

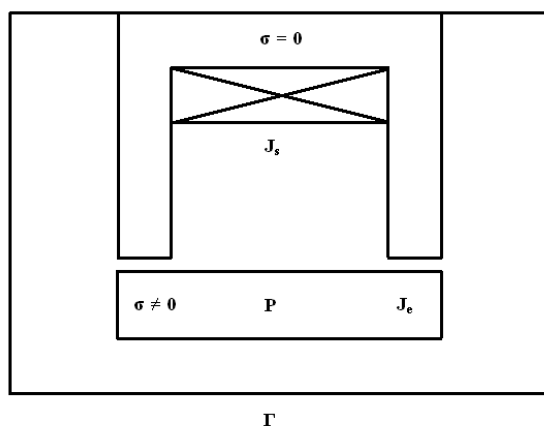


Figura 5.8: Circuito magnético formado por material com alta permeabilidade magnética separado por um entreferro de uma região P com elevada condutividade e onde serão induzidas correntes.

Para verificar o comportamento do circuito são apresentadas as distribuições de fluxo em três instantes: em 2.5 ms (figura(5.10)), em 5 ms (figura(5.11)) e em 130 ms (figura(5.12)). Conforme pode ser verificado nas duas primeiras figuras há apenas uma penetração parcial do fluxo na barra inferior do circuito. Isto se explica pelo fato das correntes induzidas neste local contrariarem a causa que lhes deram origem, gerando fluxo em sentido contrário, conforme estabelece a Lei de Lenz (Macedo (1988)).

Já na figura (5.12) pode-se ver que há uma penetração maior do fluxo na barra inferior do circuito, pois já não há variação do mesmo, o que aproxima esta situação de uma condição estacionária.

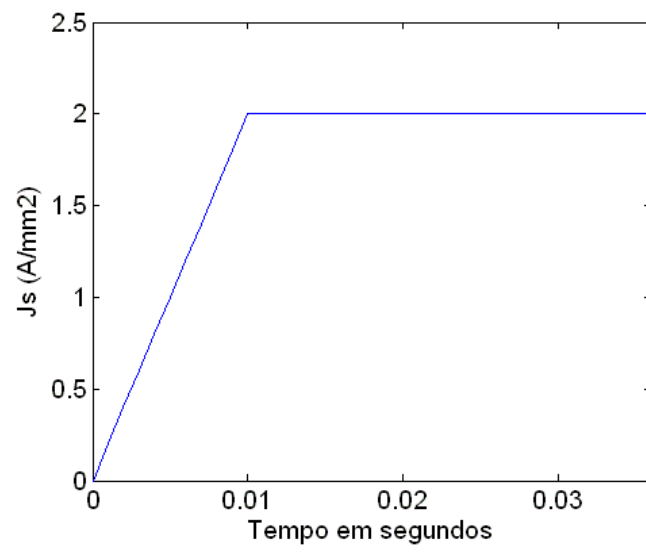


Figura 5.9: Corrente de excitação utilizada no circuito magnético da figura 5.8.

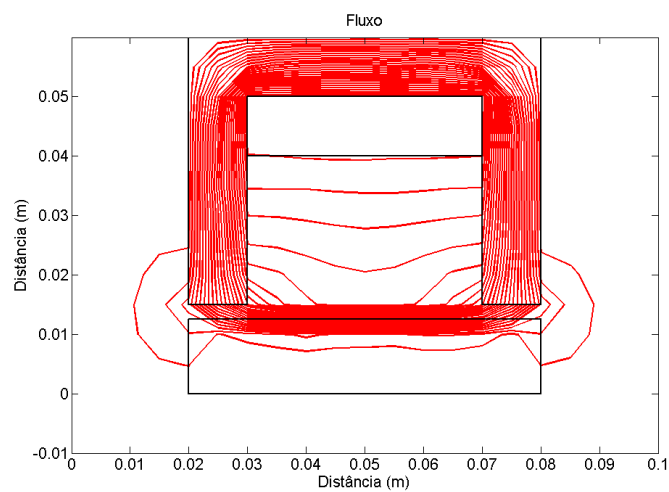


Figura 5.10: Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,0025 segundos.

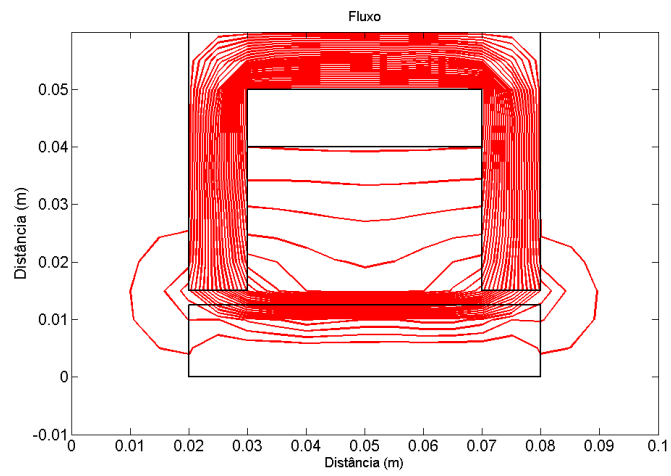


Figura 5.11: Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,005 segundos.

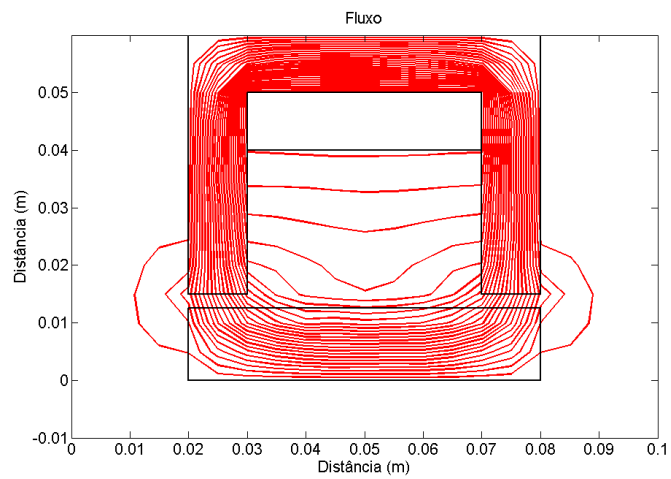


Figura 5.12: Distribuição de fluxo no circuito magnético em 0,130 segundos.

A título de validação, primeiramente, foi comparado o potencial magnético ao longo da seção no meio da barra condutora gerado pelo *EFGM* em 130 ms e pelo Método de Elementos Finitos através do software *FEMM*. Como o *FEMM* não opera no domínio do tempo foi tomado o tempo na simulação do *EFGM* no momento em que o campo já está estabilizado. A figura (5.13) apresenta estes resultados.

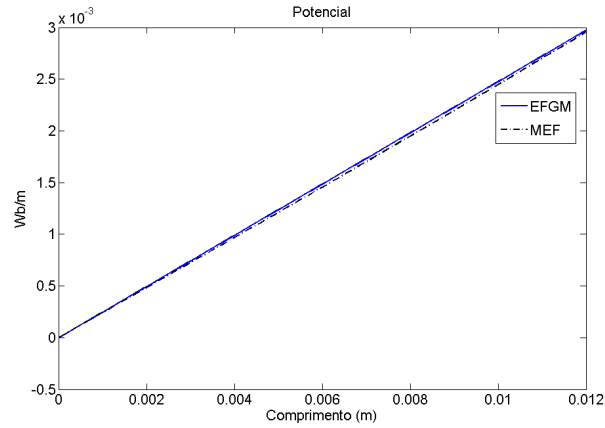


Figura 5.13: Potencial no meio da barra condutora em 0,130 segundos - *EFGM-FEMM*.

Para se verificar o comportamento do circuito ao longo do tempo, foi avaliado o módulo do campo magnético no meio da barra a 1,25 mm de altura conforme mostrado na figura (5.14) e a 10,625 mm de altura conforme apresentado na figura (5.15). Nestas duas simulações, realizadas tanto com o *EFGM* como com o *CST* pode-se avaliar o tempo de resposta do circuito.

As pequenas diferenças observadas entre as simulações utilizando o *EFGM* e o *CST* podem ser explicadas não somente pelos diferentes métodos numéricos utilizados nos dois programas, mas também pelo fato do *CST* utilizar fontes de corrente individuais. Devido a esta característica do *CST*, para se compor a densidade de corrente apresentada na figura 5.9 foram distribuídas o maior número possível de fontes de corrente na região do circuito magnético relativa à fonte (figura 5.8) de modo a se obter uma distribuição mais uniforme possível da corrente.

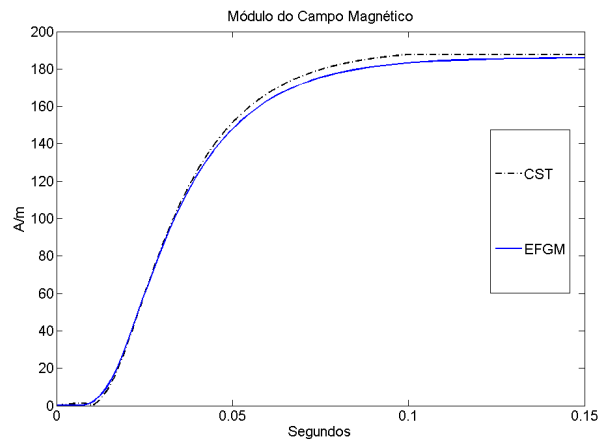


Figura 5.14: Módulo do campo magnético no meio da barra condutora a 1,25 mm de altura - *EFGM-CST*.

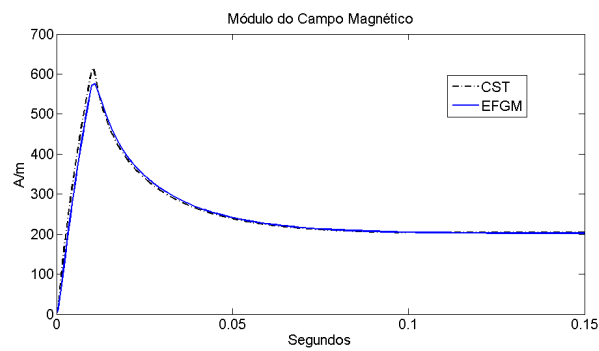


Figura 5.15: Módulo do campo magnético no meio da barra condutora a 10,625 mm de altura - *EFGM-CST*.

Mesmo com este elevado número de fontes de corrente não se pode afirmar que as regiões de fonte nos dois métodos sejam idênticas.

Quanto à comparação entre o *FEM* e o *EFGM* conforme mostrado na figura 5.13 a diferença entre os métodos numéricos utilizados nos dois programas explica a pequena discrepância entre as curvas.

5.5 Máquina de Indução

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para o modelo da máquina de indução. Uma série de desafios tiveram que ser superados para a simulação deste modelo, sendo alguns já apresentados anteriormente, tais como o tratamento de materiais não uniformes e a distribuição irregular de nós. Contudo, uma questão adicional necessita ser resolvida e refere-se à redução do domínio de estudo, uma vez que a máquina de indução possui uma simetria que pode ser explorada.

5.5.1 Fronteiras Periódicas

Para ilustrar a periodicidade de uma estrutura, tome como exemplo a figura (5.16), onde a análise pode ser resumida ao domínio englobado pelas linhas A, B, C e D. Neste caso tem-se uma estrutura periódica caracterizada pela replicação do domínio S. Para o caso de haver enrolamentos ou ímãs permanentes orientados na mesma direção, os potenciais na linha C são idênticos aos da linha D.

Para entender como o sistema matricial é montado para uma estrutura periódica, veja a figura (5.17). Considere os nós \mathbf{i}' e \mathbf{i} denominados aqui como pares periódicos. As contribuições para o nó \mathbf{i}' referentes aos nós dentro do domínio de influência deste nó deverão ser repassadas ao nó \mathbf{i} . Então, quando o sistema $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$ é resolvido, impõe-se $U_i=U_{i'}$, fazendo-se $K_{i'i'}=1$, $K_{i'i}=-1$, $F_{i'}=0$. É importante, contudo salientar que antes de fixar $K_{i'i'}=1$, este termo é montado em K_{ii} (Coppoli et al. (2009)). A figura (5.18) mostra este processo.

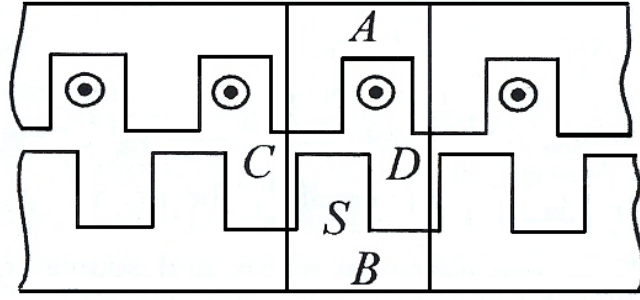


Figura 5.16: Estrutura Periódica. O domínio definido pelas linhas A,B,C,D é repetido e consiste da única parte da estrutura que precisa ser analisado Bastos et al. (2003).

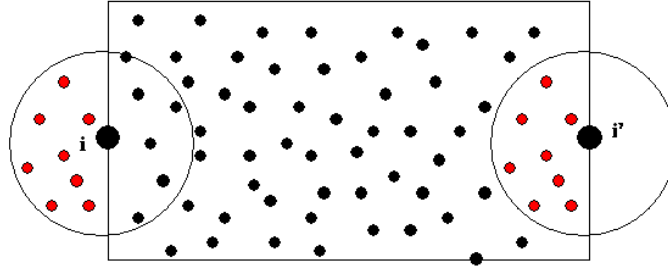


Figura 5.17: Fronteira periódica onde os nós i e i' constituem um par periódico e os círculos ao redor dos mesmos representam seus domínios de influência.

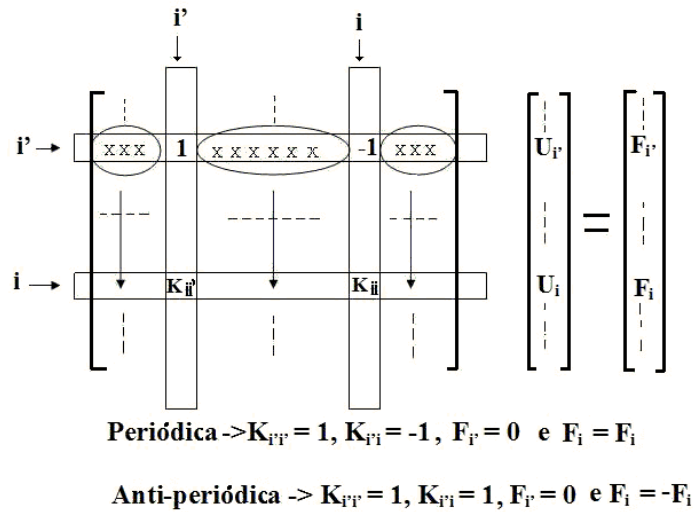


Figura 5.18: Montagem do sistema utilizada na imposição das condições de fronteiras periódicas ou anti-periódicas.

Para que o processo anteriormente descrito esteja completo é necessário que se considere os nós além da fronteira e que estarão eventualmente no domínio de suporte de um ponto de Gauss próximo à fronteira.

Para auxiliar o tratamento dado a estes nós foram denominados de nós virtuais aqueles que estão além da fronteira periódica e que na realidade são os nós do domínio após uma translação. A figura (5.19) mostra esta representação.

A seguir é apresentado um algoritmo para identificação e cômputo destes nós:

1 – Verificar os domínios de influência de todos os nós que ultrapassam as fronteiras periódicas.

2 - Para os nós cujos domínios de influência ultrapassam as fronteiras gerar os nós virtuais na fronteira oposta. Obs. Este procedimento vai representar a periodicidade do domínio.

3 – Na montagem da matriz de rigidez e do vetor força verificar se o domínio de suporte do ponto de Gauss corrente engloba os nós virtuais. Caso seja afirmativo computar a contribuição destes nós, considerando contudo, a numeração original dos nós que geraram os nós virtuais.

Um observação importante é que não há criação de nós adicionais neste processo.

Uma estrutura anti-periódica se assemelha a uma periódica, contudo, as fontes possuem alternância de polaridade, conforme mostrado na figura (5.20). É importante ressaltar que para uma estrutura anti-periódica, as contribuições passadas do nó i' para o nó i devem ter seus sinais trocados, incluindo os sinais dos termos fonte, ou seja $F_i = -F_{i'}$. Isto é devido às contribuições do nó i' que são passadas ao nó i estarem em um sub-domínio cuja fonte possui sinal oposto.

Como exemplo inicial, considere a estrutura mostrada na figura (5.21), onde os círculos são condutores de alumínio envolvidos por material ferromagnético.

Na figura (5.22) é mostrada a distribuição de fluxo gerado por uma densidade de corrente de $1\text{MA}/\text{m}^2$ fluindo em cada condutor na mesma direção. Observa-se

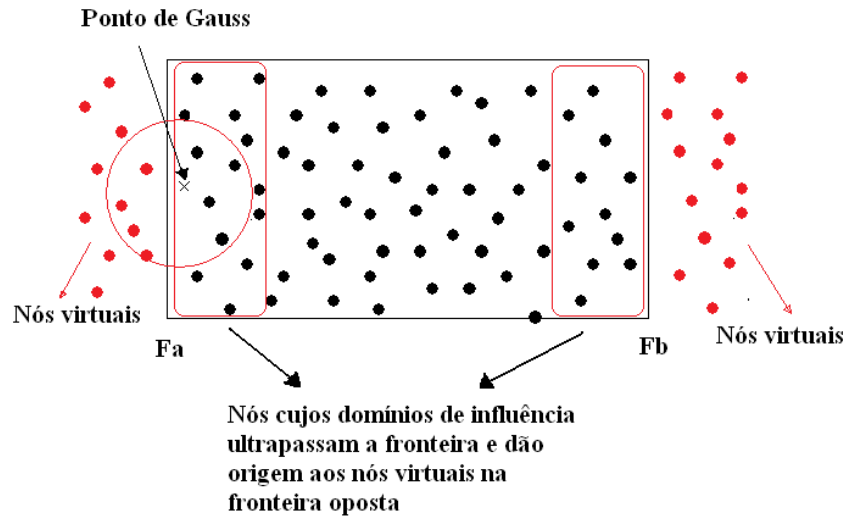


Figura 5.19: Fronteira periódica completa considerando os nós além da borda.

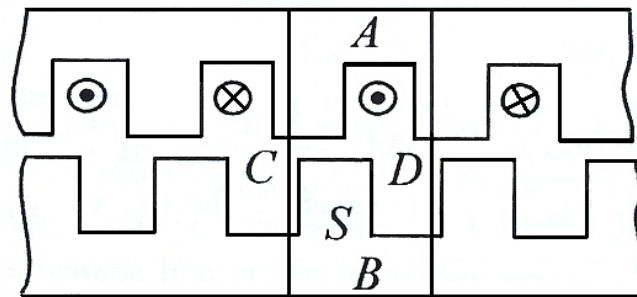


Figura 5.20: Estrutura Anti-periódica. O domínio definido pelas linhas A,B,C,D é repetido e consiste da única parte da estrutura que precisa ser analisado Bastos et al. (2003).

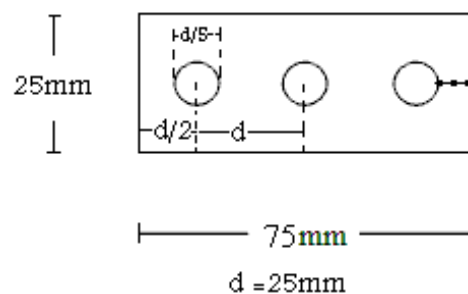


Figura 5.21: Estrutura periódica ou anti-periódica.

que as condições de contorno essenciais foram impostas nas fronteiras do topo e da base e as condições periódicas definidas nas fronteiras da esquerda e da direita.

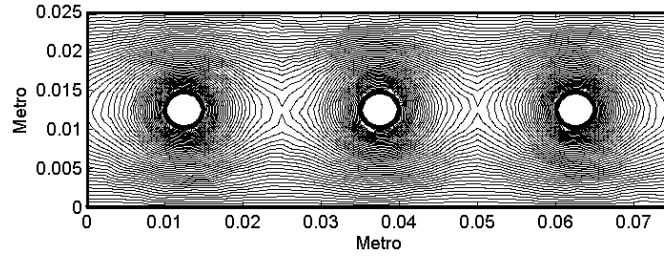


Figura 5.22: Fluxo resultante em uma estrutura periódica – *EFGM/IMLS* com 1498 nós.

Para uma estrutura anti-periódica a distribuição de fluxo é mostrada na figura (5.23), onde foram impostas correntes com sentidos alternados com $1\text{MA}/\text{m}^2$ e o mesmo número de nós.

Para se verificar a coerência dos resultados, estes foram comparados com outros obtidos utilizando o Método de Elementos Finitos através do *software Femm* (Meeker (2009)). Nesta comparação o potencial magnético é avaliado nas fronteiras periódicas e em uma linha ortogonal a estas fronteiras, conforme mostrado na figura (5.24

As figuras (5.25) e (5.26) mostram a distribuição do potencial nestas seções. Pode-se ver a proximidade entre os resultados utilizando o *EFGM* e o *FEM*, sendo que a pequena diferença entre os mesmos pode ser explicado pela diferença entre os métodos e também pelo ajuste de curva utilizado pelo *software FEMM*.

Dando continuidade ao trabalho, serão avaliadas as fronteiras do modelo da máquina de indução proposto, o qual devido às condições de simetria foi necessário a utilização de apenas $\frac{1}{4}$ do seu domínio total (Veja a figura 5.1). No modelo utilizado as fronteiras à esquerda e abaixo são anti-periódicas, dada à forma como foram distribuídos os enrolamentos do estator da máquina. Estes enrolamentos possuem a seguinte sequência $(B, -C, A), (-B, C, -A), (B, -C, A)$ e $(-B, C, -A)$, onde $B(t) = B_{\max}\text{sen}(wt - 120^\circ)$, $C = C_{\max}\text{sen}(wt + 120^\circ)$ e $A = A_{\max}\text{sen}(wt)$

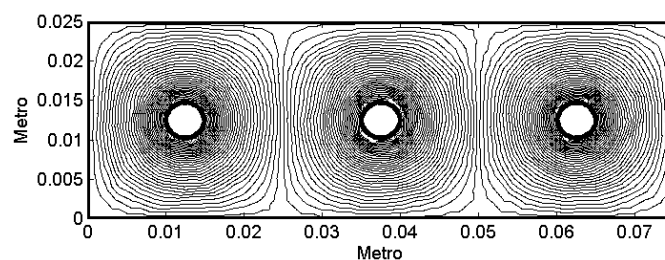


Figura 5.23: Fluxo resultante em uma estrutura anti-periódica – *EFGM/IMLS* com 1498 nós.

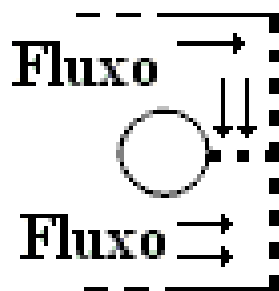


Figura 5.24: Regiões para comparação do potencial magnético: *FEM* e *EFGM IMLS*.

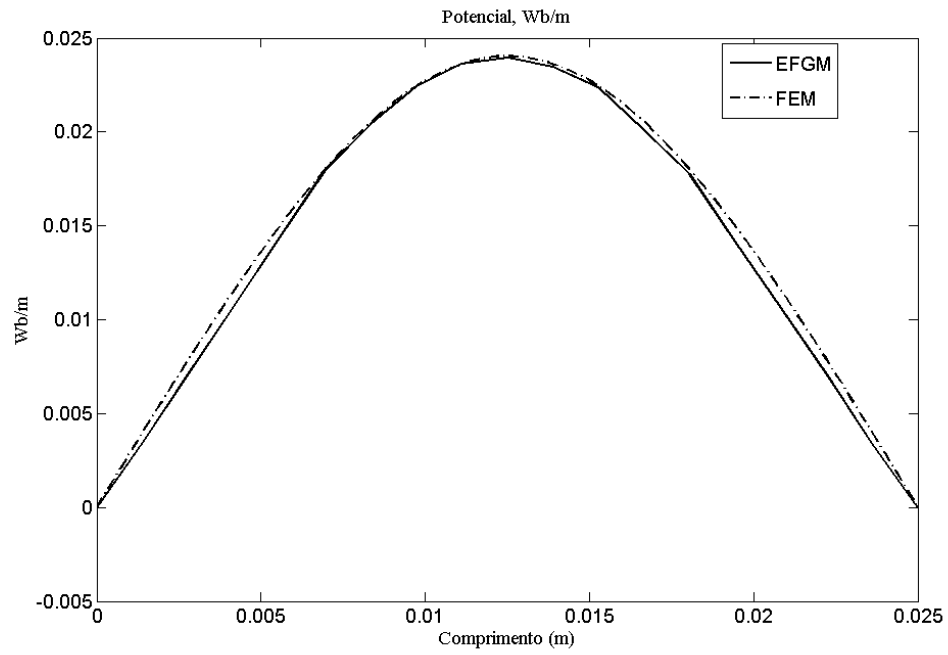


Figura 5.25: Distribuição do potencial ao longo da fronteira periódica *FEM* e *EFGM*.

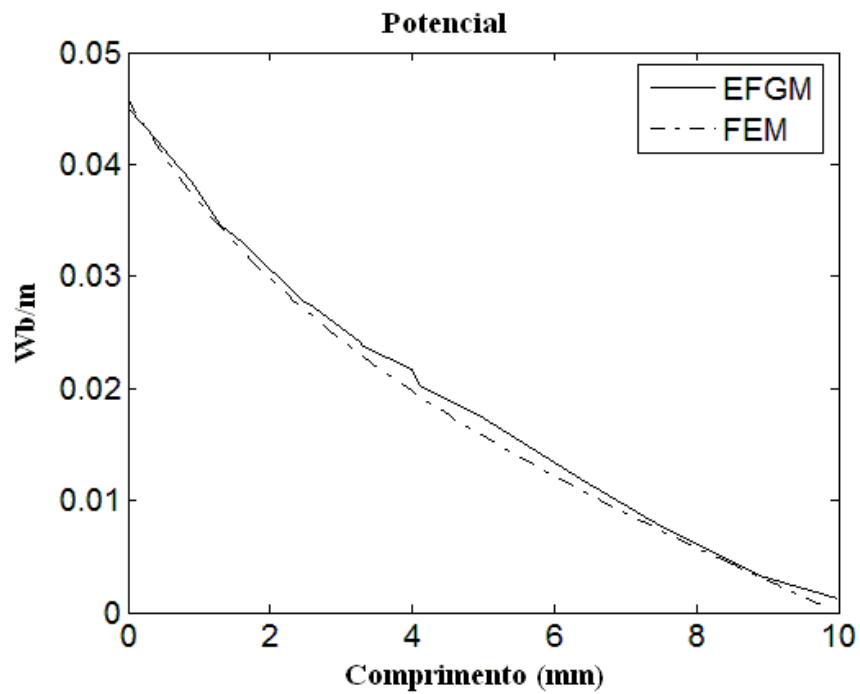


Figura 5.26: Distribuição do potencial ao longo da linha ortogonal à fronteira anti-periódica

sendo que cada ranhura do estator é percorrida por 44 Ampères/espiras e $w=2\pi f$ com $f=50\text{Hz}$.

Duas simulações serão apresentadas, a primeira utilizando o software Femm e a segunda utilizando o *Element Free Galerkin Method* com o *Interpolating Moving Least Squares*. A figura (5.27) mostra a distribuição do fluxo magnético utilizando o Método de Elementos Finitos com 12202 elementos.

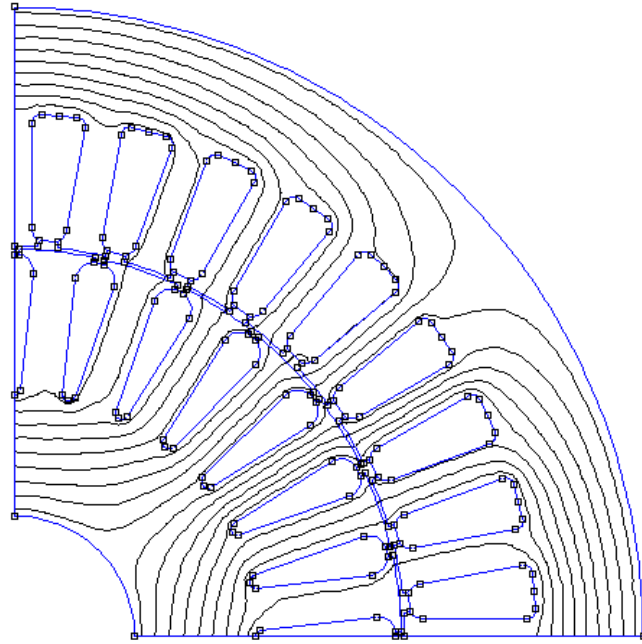


Figura 5.27: Distribuição de fluxo magnético na máquina de indução utilizando o Método de Elementos Finitos.

A figura (5.28) mostra a distribuição do fluxo magnético na máquina de indução utilizando *EFGM* com o *IMLS*. Nesta simulação foram utilizados 6295 nós e 4225 células de integração. Na função peso do *IMLS* $w_I(r)=1/(r^{2n}+\epsilon)$, foram utilizados $n=5$ e $\epsilon=10^{-10}$. Nesta figura é possível se identificar também a distribuição dos nós no domínio.

Ainda a título de comparação é mostrada na figura 5.29 a distribuição do potencial magnético ao longo da fronteira anti-periódica utilizando ambos os métodos. Pode-se perceber uma pequena discrepância entre as curvas, causada pela diferença entre os métodos utilizados na simulação, como também pelo ajuste de curva

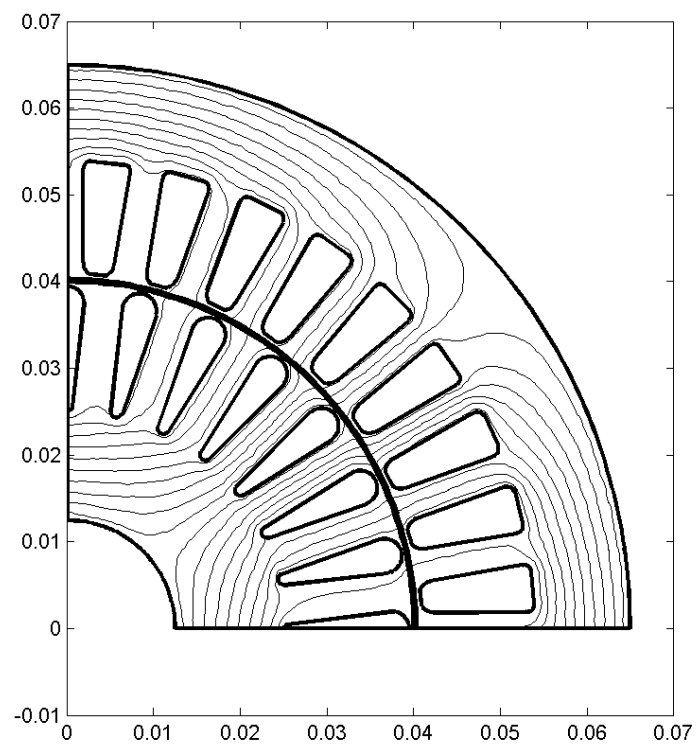


Figura 5.28: Distribuição de fluxo magnético na máquina de indução utilizando *EFGM* com o *IMLS*.

feito pelo software *FEMM*. Apesar desta pequena discrepância entre as curvas, as distribuições de fluxo com os dois métodos são praticamente idênticas conforme verificado nas figuras 5.27 e 5.28, mostrando assim um bom grau de precisão obtido com a técnica proposta com o *EFGM* para tratamento este tipo de fronteira.

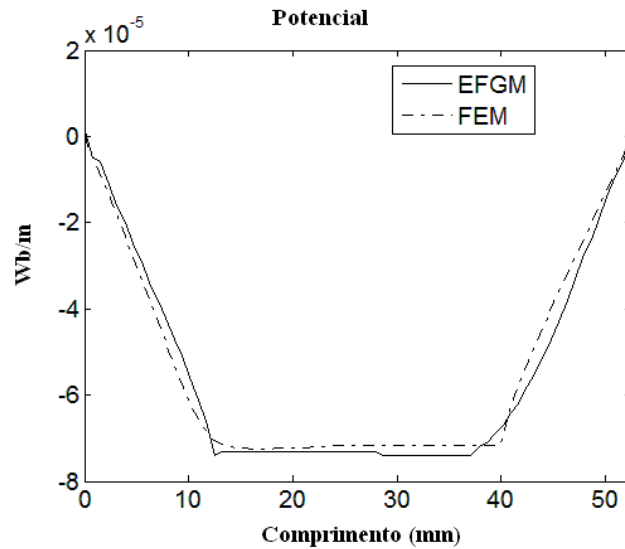


Figura 5.29: Potencial magnético ao longo da fronteira anti-periódica da máquina de indução.

5.5.2 Variação do Fluxo Magnético no Interior da Máquina

Fazendo uso das técnicas desenvolvidas até este ponto do trabalho, bem como do modelo da máquina elétrica descrito no capítulo 2, são apresentados a seguir o fluxo magnético dentro da máquina de indução para dois instantes de tempo. Vale observar que nestas simulações a máquina está com rotor travado (Coppoli et al. (2010)).

Com estes resultados é possível se verificar a variação temporal do fluxo no interior da máquina verificando regiões onde o mesmo possui maior e menor concentração. Vale observar que nestas duas simulações a máquina ainda está sendo magnetizada, pois conforme será mostrado nas figuras 5.32 e 5.33 este processo

se estende até aproximadamente 80 ms, ou $160 \Delta t$, uma vez que foi utilizado $\Delta t = 0,0005s$.

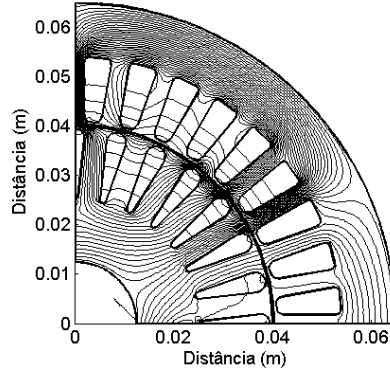


Figura 5.30: Fluxo magnético no interior da máquina em $10 \Delta t$.

Outro resultado importante consiste da variação temporal do potencial vetor magnético em pontos fixos do rotor e do estator, conforme mostrado nas figuras (5.32) e (5.33). Nestas figuras, o potencial vetor magnético é avaliado nas coordenadas $x=49,9$ cm e $y=36,7$ cm do estator e $x=15,5$ cm e $y=18,9$ cm do rotor. Com estes resultados pode-se verificar o ciclo de magnetização da máquina representado pela região do gráfico que possui uma componente contínua ou d.c., sendo que esta componente está diretamente relacionada às condições iniciais das fontes de corrente constituídas pelos enrolamentos do estator (Coppoli et al. (2010)).

Nas figuras (5.34) e (5.35) são mostradas as corrente induzidas na terceira e sexta barras do rotor e sendo feita a comparação com o resultados obtidos pelo *FEMM* (Coppoli et al. (2010)).

Na figura (5.36) são mostradas as tensões induzidas na terceira e sexta barras do rotor, onde um valor baixo era esperado dado a pequena resistência das barras do rotor (Coppoli et al. (2010)).

É importante observar que todas as simulações utilizaram 6416 nós e foram utilizadas fronteiras anti-periódicas conforme modelo original proposto (Meeker(2009)).

Os resultados relativos ao acoplamento entre circuito e campo apresentam

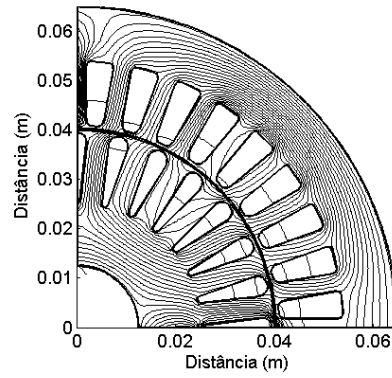


Figura 5.31: Fluxo magnético no interior da máquina em $20 \Delta t$.

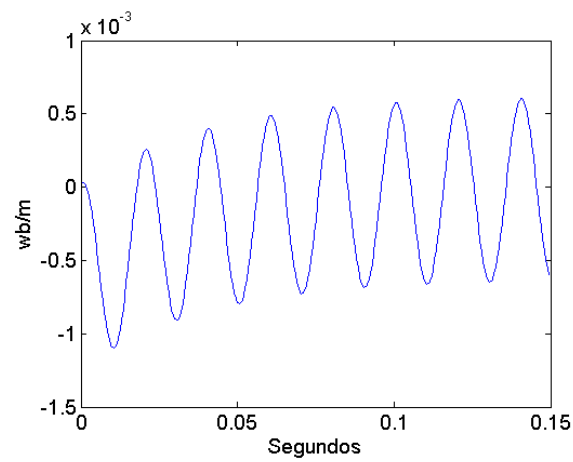


Figura 5.32: Variação temporal do potencial vetor magnético no ponto $x=15,5\text{cm}$ e $y=18,9\text{cm}$ do interior do rotor.

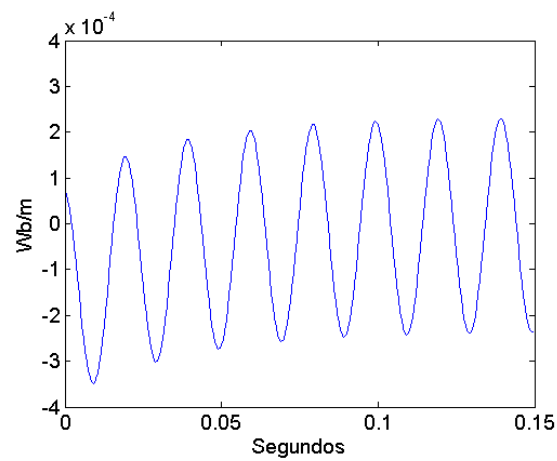


Figura 5.33: Variação temporal do potencial vetor magnético no ponto $x=49,9\text{cm}$ e $y=36,7\text{ cm}$ do interior do estator.

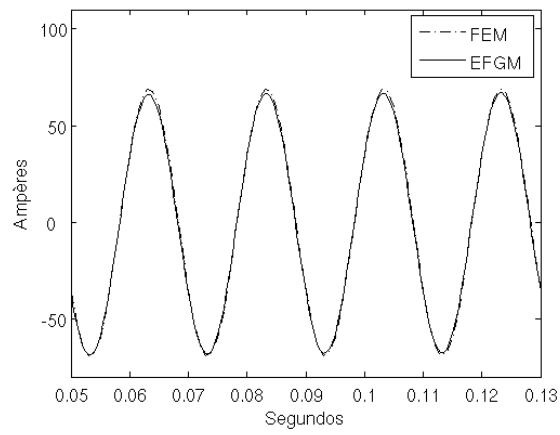


Figura 5.34: Corrente induzida na terceira barra do rotor - FEM/EFGM.

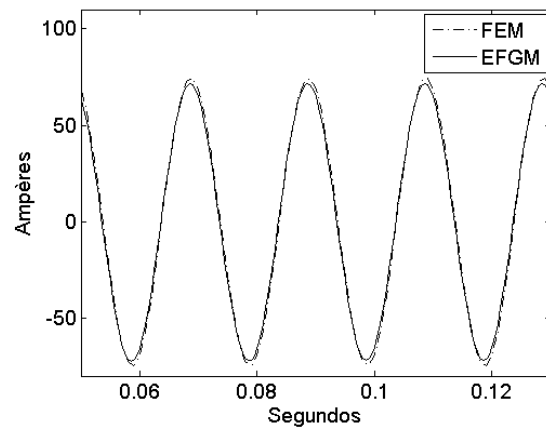


Figura 5.35: Corrente induzida na sexta barra do rotor - FEM/EFGM.

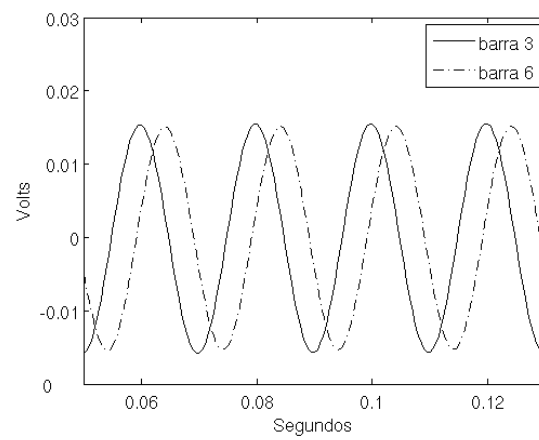


Figura 5.36: Tensões induzidas na terceira e sexta barras do rotor - EFGM.

coerência com o que era esperado e isto pode ser verificado nas simulações apresentadas. Pode-se observar esta coerência nas comparações entre o *FEM* e o *EFGM* onde elevados níveis de corrente foram obtidos, o que era de se esperar para uma máquina travada. Outro aspecto importante observado foi o período de magnetização da máquina conforme mostrado nas figuras 5.32 e 5.33 traduzido através componente dc do potencial, situação ocorrida em máquinas sendo energizadas. Os resultados para o fluxo magnético também apresentam uma distribuição coerente para as diversas regiões da máquina, valendo lembrar que estão sendo utilizadas fronteiras anti-periódicas.

5.5.3 Movimento da Máquina de Indução

Devido à técnica sem malha utilizada, a implementação do movimento da máquina elétrica não consiste de uma tarefa demasiadamente complexa. Este teve como idéia principal a rotação dos nós do rotor em um determinado ângulo, levando-se em conta os princípios físicos envolvidos, conforme explicado a seguir.

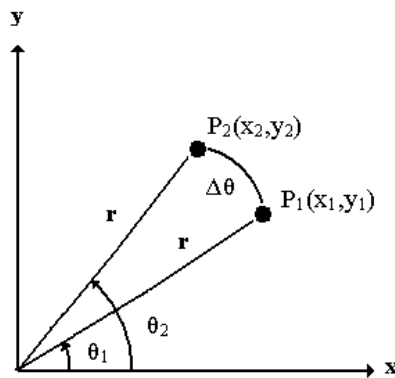


Figura 5.37: Esquema de rotação dos nós utilizado no movimento da máquina elétrica.

Veja a figura (5.37), onde o nó N é girado da posição P_1 com coordenadas x_1, y_1 para a posição P_2 , com coordenadas x_2, y_2 , perfazendo um ângulo $\Delta\theta$.

A posição P_1 é de conhecimento prévio desde o pré-processamento. Deseja-se calcular a posição P_2 obtida após um tempo Δt .

Fazendo uso da equação de escorregamento da máquina de indução:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (5.3)$$

onde: "s" é o escorregamento e constitui uma fração da velocidade do campo magnético girante produzido pelo estator (velocidade síncrona). Aqui a velocidade síncrona é designada por n_1 e n é a velocidade do rotor, sendo ambas dadas em rotações por minuto (rpm) (Toro (2009)).

A velocidade síncrona n_1 também pode ser dada por:

$$n_1 = \frac{120 \times f}{p} \quad (5.4)$$

onde, "f" é a frequência da corrente de alimentação e "p" o número de pólos da máquina (Toro (2009)).

De (5.3)

$$n = n_1 (1 - s) . \quad (5.5)$$

De (5.4) e (5.5) chega-se a:

$$n = \frac{120 \times f}{p} (1 - s) (rpm) \quad (5.6)$$

ou

$$n = \frac{120 \times f}{p} (1 - s) \frac{2\pi}{60} (rad/s). \quad (5.7)$$

Fazendo uso de (5.7) $\Delta\theta$ poderá ser dado por:

$$\Delta\theta = \frac{4f\pi}{p} (1-s) \Delta t \quad (5.8)$$

Como mostrado na figura (5.37)

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta. \quad (5.9)$$

Tem-se que:

$$\theta_2 = \tan^{-1}(y_1/x_1) + \frac{4f\pi}{p} (1-s) \Delta t \quad (5.10)$$

de modo que

$$(x_2, y_2) = (r \cos \theta_2, r \sin \theta_2) \quad (5.11)$$

onde:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (5.12)$$

Quanto ao giro do rotor são necessárias algumas informações adicionais referentes à implementação das fronteiras periódicas ou anti-periódicas. Após um giro de $\Delta\theta$ esta fronteira é alterada, conforme mostrado na figura (5.38). Neste momento é preciso o acréscimo de novos de modo a se formarem os pares periódicos com aqueles que giraram e que fazem fronteira com o entreferro.

Nas figuras (5.39), (5.40) e (5.41) é possível visualizar este procedimento, sendo que na última figura citada é feita uma ampliação da região onde foram acrescentados os nós adicionais.

Um importante aspecto a ser considerado é que os nós adicionais deverão estar simetricamente opostos a seus pares da outra fronteira. Como exemplo considere um nó na posição $(-0,005; 0,039)$ o seu par adicional deverá estar localizado em $(0,039; 0,005)$.

Este procedimento é adotado a cada Δt até que o rotor atinja 90° de rotação, sendo que após este ângulo é feita uma translação do rotor até sua posição original.

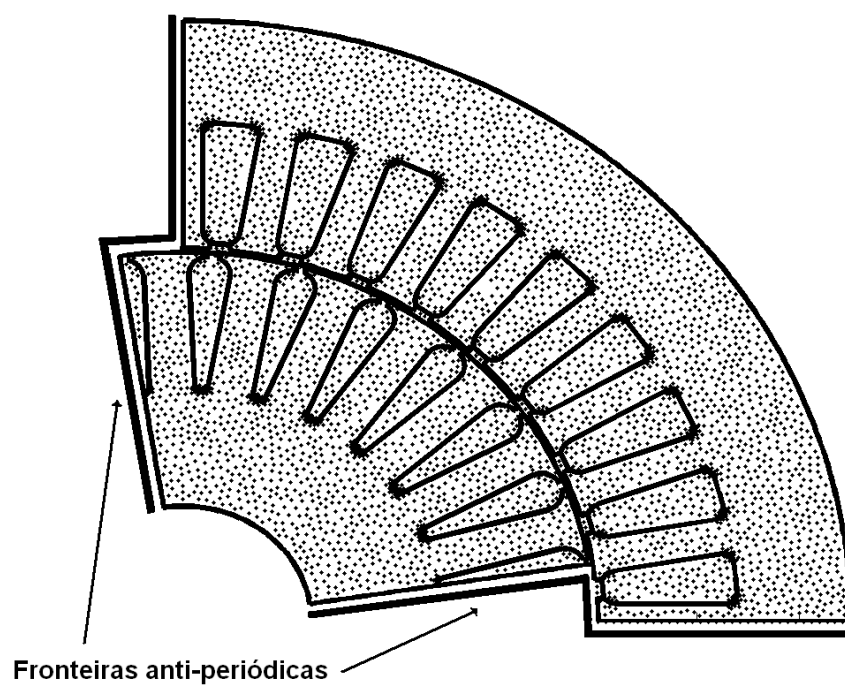


Figura 5.38: Disposição das fronteiras anti-periódicas após o giro.

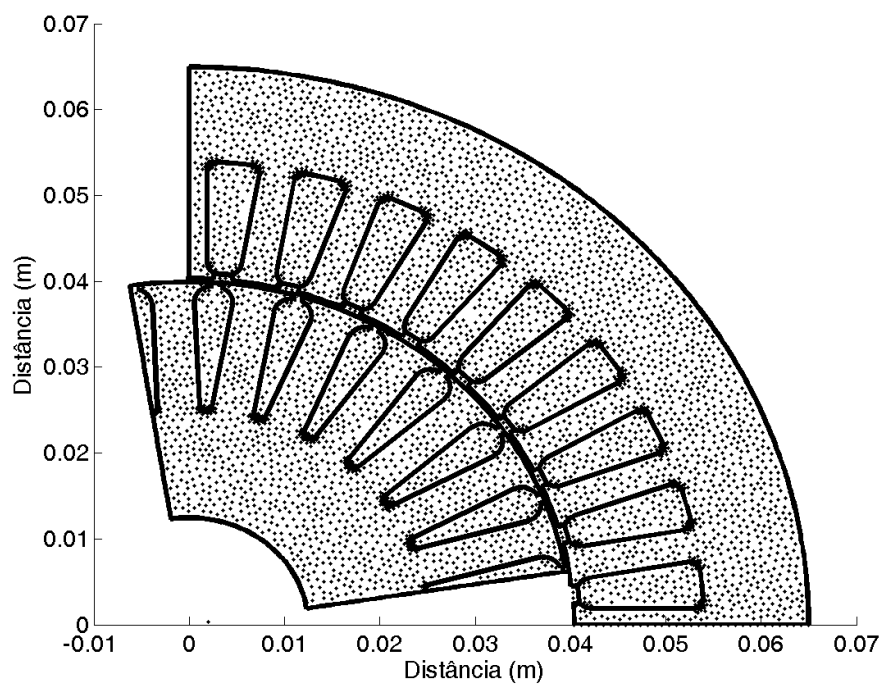


Figura 5.39: Disposição dos nós após o giro. A fronteira anti-periódica ainda se encontra incompleta.

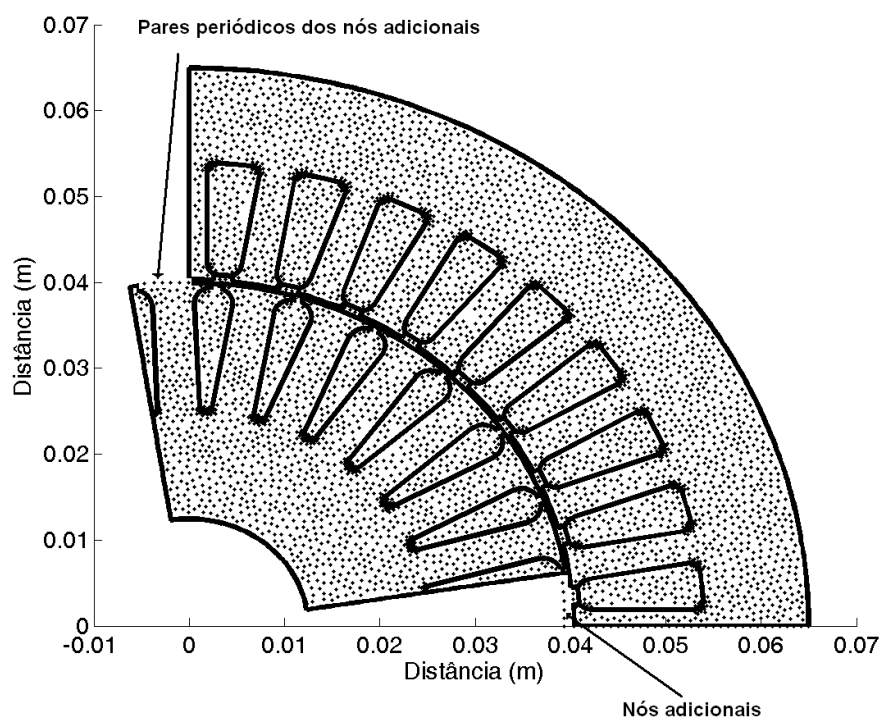


Figura 5.40: Disposição dos nós após o giro. Obs. A fronteira anti-periódica foi completada.

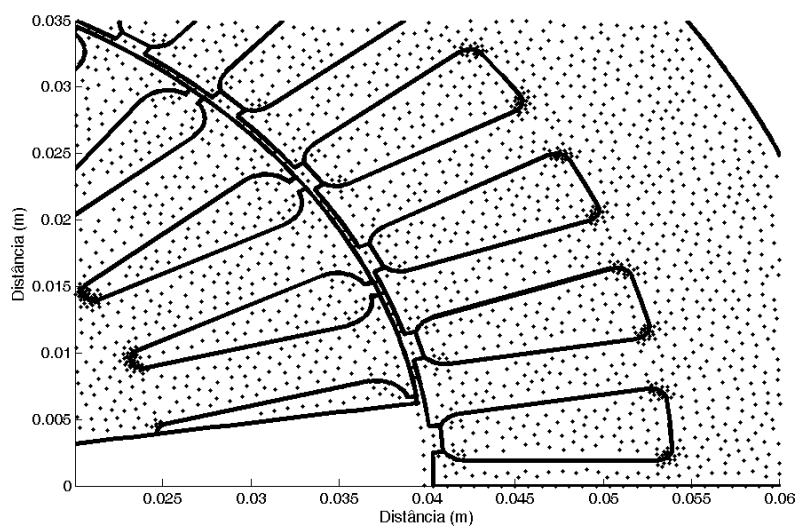


Figura 5.41: Disposição dos nós após o giro (ampliação). Obs. A fronteira anti-periódica foi completada.

A seguir são apresentadas as as distribuições do fluxo magnético em seu interior. Foi considerado o instante inicial como sendo 0,00825s (5.42), sendo que até este momento a máquina ainda estava travada. O instante inicial do movimento foi tomado neste momento para que se pudesse atingir um grau de magnetização que se aproximasse mais de uma máquina em regime. Nas figura (5.43), (5.44) e (5.45) o rotor foi girado para as três posições apresentadas nestas figuras sendo que estas posições representam deslocamentos simulando um escorregamento de 10 %, valor usualmente encontrado na prática. Pode se ver nestas figuras que o fluxo apresentou o comportamento esperado, com predominância do mesmo nas regiões do ferro do estator e do rotor onde a permeabilidade é sete mil vezes maior quando comparada à das barras do rotor e dos enrolamentos do estator. Nestas figuras ainda se pode verificar que o fluxo se distorce um pouco em algumas regiões próximas ao entreferro, uma vez que o caminho deste fluxo é alterado. Contudo na figura subsequente, após mais um deslocamento um caminho de menor relutividade é estabelecido e esta distorção é corrigida.

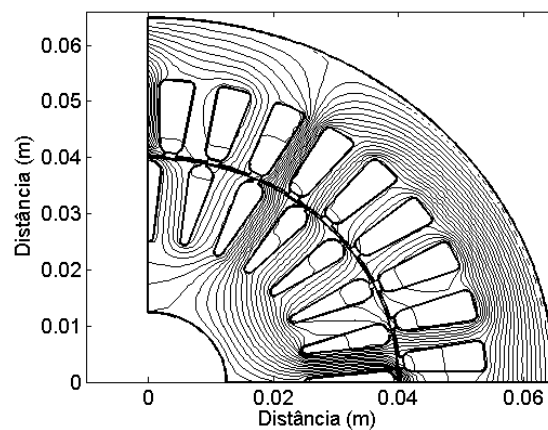


Figura 5.42: Distribuição do fluxo magnético com a máquina ainda travada em $15 \Delta t$.

Uma observação importante consiste da necessidade de se recalcular os domínios de influência na maioria das vezes que há alteração da posição do rotor da máquina. Isto é explicado pelo fato de haver uma alteração nas posições dos nós do rotor e consequentemente da distância média entre os mesmos a cada Δt . Neste

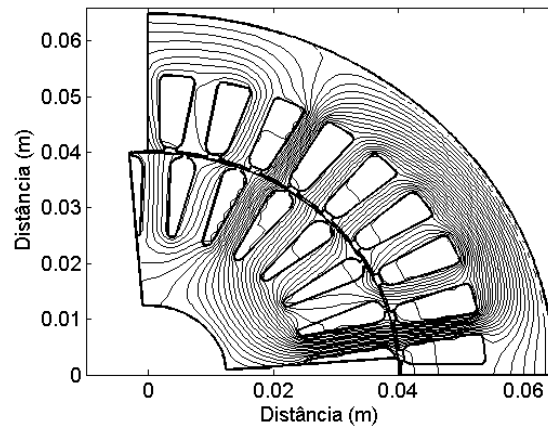


Figura 5.43: Distribuição do fluxo magnético na máquina em $16 \Delta t$.

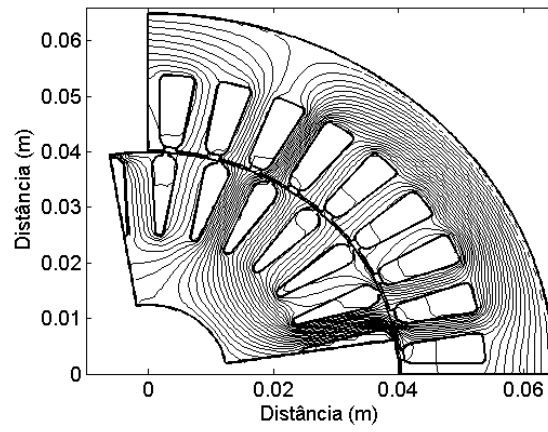


Figura 5.44: Distribuição do fluxo magnético na máquina em $17 \Delta t$.

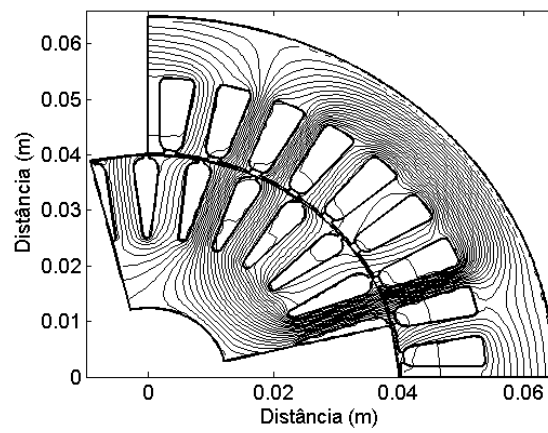


Figura 5.45: Distribuição do fluxo magnético na máquina em $18 \Delta t$.

sentido, para as simulações do movimento foi necessário recalcular os domínios de influência para os instantes $17\Delta t$ e $18\Delta t$. Para as figuras (5.42), (5.43), (5.44) e (5.45) foram utilizados $\alpha = 2.0$, $\alpha = 2.0$, $\alpha = 2.1$ e $\alpha = 2.5$ respectivamente (Veja a equação 5.1), valores estes, que apresentaram os melhores resultados finais.

Neste capítulo procurou-se mostrar a evolução dos resultados que levaram a simulação de um dispositivo eletromagnético em movimento. As etapas apresentadas, foram de grande importância não só para alcançar a simulação do modelo da máquina proposto, mas principalmente para procurar abordar algumas das principais questões envolvidas na modelagem de dispositivos eletromagnéticos como descontinuidade de materiais, indução de correntes, fronteiras periódicas e movimento de estruturas magnéticas. Estas etapas serviram também para o acúmulo de experiência, tanto no método numérico quanto no modelo físico. Além disto as mesmas resultaram na aplicação de correções necessárias ao método sem malha, como foi o caso do método da visibilidade e nos problemas gerados na descontinuidade de materiais.

Vale destacar o tratamento dado às fronteiras periódicas que possibilitou a redução do domínio de estudo e conseqüentemente do custo computacional envolvido. Este assunto foi abordado inicialmente através de um exemplo simples, com o exemplo da fita de material ferromagnético apresentado na seção 5.5.1 e que culminou em sua aplicação no modelo da máquina de indução, sendo que os resultados obtidos com *EFGM* foram confrontados com o *FEM*.

Quanto à implementação do movimento de estruturas magnéticas, é neste momento que o *EFGM* mostra sua versatilidade, quando basicamente através de uma simples alteração de coordenadas dos nós é possível simular o movimento da estrutura. Vale contudo uma observação, conforme descrito na seção 5.5.3, há uma necessidade de se recalcular os domínios de influências dos nós a cada alteração dos mesmos. Porém este processo não constitui tarefa complexa e pode ser resumido à região do domínio onde ocorreu esta alteração de posição.

Quanto ao movimento da máquina de indução propriamente dito, este pro-

cedimento exige um esforço adicional, pois existem dois aspectos que deverão ser levados em conta. O primeiro consiste da necessidade de se criar nós adicionais, conforme descrito também na seção 5.5.3. O segundo aspecto refere-se ao momento em que se está sendo realizada a simulação. Se este momento for considerado no período em que a máquina se encontra em processo de magnetização, pode-se dizer que a mesma está partindo, o que envolveria outros aspectos transitórios não tratados neste trabalho. Para se simular uma condição de regime permanente seria necessário que a máquina já tivesse realizado várias revoluções. Neste trabalho procurou-se atingir um certo nível de magnetização da máquina e a partir daí alterar a posição do rotor. Este procedimento consiste de uma aproximação, sendo que no momento está se trabalhando na condição de regime permanente descrita anteriormente e será tema abordado nos trabalhos futuros.

Finalmente vale destacar que em todas as simulações utilizou-se o *solver* *UMFPACK* (Davis (2009)), que se mostrou eficiente para o tamanho do problema tratado, bem como para o grau de condicionamento das matrizes envolvidas.

Capítulo 6

Capítulo 6 – Conclusões

Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões deste trabalho e a continuidade que se pretende dar ao mesmo.

Como mencionado em capítulos anteriores, pode-se dizer que os métodos sem malha encontram-se em um estágio inicial no que se refere às suas aplicações em eletromagnetismo. Normalmente um grande esforço é necessário para se atingir resultados que aparentemente são de fácil obtenção em outros métodos como o de elementos finitos. Pelo fato destes métodos se encontrarem em franco desenvolvimento, acredita-se que foi possível colaborar neste processo através das técnicas aqui apresentadas para modelagem de dispositivos eletromagnéticos. Procurou-se também extrair aquilo que se entende como uma das potencialidades destes métodos, que consiste de sua aplicação em modelos de estruturas em movimento.

6.1 Visão Geral do Trabalho

Este trabalho teve como objetivo a modelagem e simulação de dispositivos eletromagnéticos com métodos sem malha. Neste sentido, inicialmente foi desenvolvida a formulação matemática que representasse o modelo de uma máquina de indução.

Com o objetivo de se escolher o método sem malha apropriado para a solução do modelo proposto, foram apresentados alguns dos métodos mais difundidos, mostrando suas principais características, que incluíam vantagens e desvantagens

dos mesmos.

A escolha do método sem malha para a solução do modelo da máquina recaiu sobre o *Element-Free Galerkin Method*.

Ressalta-se que alguns autores não o considerarem um "*truly meshless method*", dada a necessidade do mesmo fazer uso de um conjunto de células de integração que cobrem todo o domínio de estudo. Quanto a este aspecto vale um destaque. Quando alguns tratam alguns métodos como verdadeiramente sem malha e outros não, vale realizar o seguinte questionamento. O que realmente se espera de um método numérico? Acredita-se que sua funcionalidade sobreponha esta questão da terminologia "*truly meshless method*". Pretende-se que questões sem uma solução adequada, ou que sejam de difícil implementação por outros métodos, sejam resolvidas por uma nova abordagem do problema. Como exemplo, pode-se citar o problema do "*remesh*", necessário em alguns problemas de elementos finitos que tratam de estruturas móveis. Quanto aos métodos sem malha que exigem um conjunto de células de integração ao longo de todo o domínio, este "*remesh*" é desnecessário, dado que as células de integração são criadas somente uma vez no pré-processamento com um custo computacional mínimo.

Voltemos então ao método sem malha escolhido ou seja o *Element-Free Galerkin Method*. Este método conforme descrito, faz uso da forma fraca global, evitando uma série de implicações encontradas em métodos que fazem uso de domínio local. Dentre estas implicações podemos citar: 1 – Nestes métodos é exigida uma superposição entre os subdomínios para que seja garantida a solução do problema no domínio inteiro. Isto consiste em tarefa não trivial quando se considera uma distribuição de nós não uniforme. 2 – Devido ao fato de exigirem esta superposição de subdomínios, muitas vezes os mesmos interceptam regiões ou fronteiras que não deveriam, havendo necessidade de se truncar tais subdomínios, 3 – Para métodos como o *MLPG*, quando se modelam estruturas móveis, além da translação dos nós propriamente ditos, é necessário o deslocamento dos pontos de integração de Gauss (Viana (2006)), condição desnecessária no *EFGM*.

Dando seguimento ao trabalho, foram verificados os principais obstáculos para a simulação de dispositivos eletromagnéticos utilizando-se o *EFGM*, dentre os quais estavam: o tratamento de distribuição não uniformes de nós, a descontinuidade de materiais e implementação de fronteiras periódicas. Grande parte destes obstáculos foram superados com o uso de funções de peso apropriadas, além de uma montagem adequada do sistema de equações.

No tratamento de distribuições não uniformes de nós foi verificada a importância dada ao cálculo dos domínios de influência dos nós, sendo que para isto foi utilizado um algoritmo para o cálculo da distância média entre eles. O exemplo dado com o circuito magnético em formato de ferradura mostrado no capítulo 5 e cujos resultados para a indução magnética são ilustrados nas figuras 5.4 e 5.5 representa bem este aspecto. Vale ressaltar, ainda, que o cálculo destes domínios constitui um fator essencial no movimento da máquina, uma vez que a cada posição da mesma este cálculo deve ser feito.

Para as questões relacionadas à descontinuidade de materiais, questão presente na maioria dos problemas de eletromagnetismo, pôde-se ver através de um exemplo simples que constituiu de capacitor de dois materiais apresentado no capítulo 5, seção 5.3 que problemas gerados por esta característica foram adequadamente solucionados, resolvendo oscilações presentes principalmente no campo elétrico e na indução magnética.

Correntes induzidas estão presentes em muitas estruturas magnéticas, tais como transformadores, máquinas de indução, etc. Para tratar este aspecto foi realizada a simulação de uma estrutura magnética simples onde poderiam ser verificadas estas correntes induzidas. Isto foi feito através de um circuito magnético em ferradura (Veja no capítulo 5, seção 5.4), onde parte da estrutura era composta de um material condutor e onde estas correntes estavam presentes. Neste exemplo foi possível avaliar a evolução no tempo do potencial e do campo magnético no material condutor e foi possível comparar os resultados com os softwares *FEMM* e *CST*.

Para a implementação de fronteiras periódicas utilizando-se o *EFGM* foi apresentado inicialmente um exemplo simples que constituia de uma fita metálica com fontes de corrente distribuídas ao longo da mesma (Veja no capítulo 5, seção 5.5.1). Neste exemplo foi possível verificar a precisão da abordagem proposta quando os resultados puderam ser comparados com o Método de Elementos Finitos, através do software *FEMM*.

Finalmente, foi simulado o modelo de uma máquina de indução trifásica de quatro pólos, estrutura onde todas as características anteriormente descritas estão presentes. Nesta etapa, inicialmente, foi simulada a máquina de indução travada, onde foram avaliados a distribuição do fluxo magnético no interior da máquina e a evolução temporal deste fluxo em pontos específicos do rotor e do estator. Ainda com a máquina travada foram avaliadas as correntes e tensões induzidas nas barras do rotor da máquina, sendo que parte destas simulações foram confrontadas com as obtidas com o *FEMM*. Posteriormente foi proposta uma abordagem para a simulação do movimento da máquina de indução e apresentados a mesma em algumas posições consecutivas.

6.2 Contribuições deste Trabalho

Pretende-se que este trabalho auxilie tanto estudiosos em métodos sem malha aplicados à engenharia elétrica, quanto desenvolvedores de softwares voltados a esta finalidade.

Acredita-se que sejam as principais contribuições deste trabalho:

1 – O tratamento de descontinuidade de materiais através do *IMLS*: Este procedimento adotado ao longo de todo o trabalho se mostrou necessário nas estruturas que apresentavam mais de um tipo de material, em especial para o campo elétrico e a indução magnética.

2 – A Implementação de fronteiras periódicas e anti-periódicas no *EFGM*: conforme visto no capítulo 5, esta implementação se tornou possível também pelo uso do *IMLS* e pela montagem adequada do sistema de equações.

3 – Modelagem de uma máquina de indução através de um método em malha, considerando a maioria de seus componentes e características físicas.

4 - Quanto ao movimento da máquina, vale destacar que foi proposta uma abordagem onde se procurou tirar proveito da principal característica encontrada nesta classe de métodos e que consiste em não haver uma relação pré existente entre os nós do domínio. Esta característica no caso do Método de Elementos Finitos consiste da malha. Isto permitiu que o movimento fosse implementado basicamente através de uma operação de translação dos nós do domínio.

6.3 Trabalhos futuros e considerações finais

Como trabalhos futuros pretende-se aperfeiçoar o modelo da máquina elétrica, implementar outros tipos de dispositivos eletromagnéticos, testar outros métodos sem malha e melhorar o desempenho do código computacional.

Para o modelo da máquina propõe-se: simular a máquina em regime permanente, incluir materiais não lineares, considerar a interação entre as forças eletromagnéticas e mecânicas presentes. Pretende-se, ainda, simular uma máquina partindo, levando em conta as questões elétricas e mecânicas envolvidas.

Além da máquina de indução, outras estruturas magnéticas móveis poderão ser testados, tais como motores de passo, freios magnéticos, etc..

No que se refere ao código computacional será trabalhada a otimização e a paralelização do mesmo, de modo a se obter o máximo desempenho possível.

Quanto ao método sem malha, pretende-se implementar e testar outros métodos sem malha, com por exemplo, aqueles baseados em formas fracas locais e que dispensam a malha de integração. Pretende-se analisar os possíveis ganhos na utilização desta classe de métodos para a simulação de dispositivos eletromagnéticos.

Referências Bibliográficas

- J. P. A. Bastos, N. E., e Sadowski. **Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods**. Marcel Dekker Inc. - New York, N. Y., 1 edição, 2003.
- T. Belytschko, Y. Y. Lu, e L. Gu. Element-free galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 37(1):229–256, 1994.
- O. Bottauscio, M. Chiampi, e A. Manzini. Eddy current problems in nonlinear media by the element-free galerkin method. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, 34(2):e823–e825, 2006.
- V. Cingoski, N. Miyamoto, e H. Yamashita. Element-free galerkin method for electromagnetic field computations. **IEEE Transactions on Magnetics**, 34(5):3236–3239, 1998.
- V. Cingoski, N. Miyamoto, e H. Yamashita. Hybrid element-free galerkin - finite element method for electromagnetic field computations. **IEEE Transactions on Magnetics**, 36(4):1543–1547, 2000.
- E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. Técnica para tratamento de descontinuidades e imposição de condições de contorno essenciais em problemas de eletromagnetismo fazendo uso do element free galerkin method (meshless). In: **XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, páginas 70–70, Florianópolis, SC, 2007.
- E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. Periodic boundary conditions in element free galerkin method. In: **International IGTE Symposium on**

- Numerical Field Calculation in Electrical Engineering**, páginas 80–80, Graz, Austria, 2008a.
- E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. Técnicas para tratamento de descontinuidade de materiais e não uniformidade de nós no element free galerkin method. In: **13 Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica - 8 Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo**, páginas 832–836, Florianópolis, SC, 2008b.
- E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. Periodic boundary conditions in element free galerkin method. **Compel - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, 28(4):921–933, 2009.
- E. H. R. Coppoli, R. C. Mesquita, e R. S. Silva. Field-circuit coupling with element-free galerkin method. In: **14th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation**, 2010.
- E. H. R. Coppoli, R. S. Silva, e R. C. Mesquita. Treatment of material discontinuity in meshless methods for em problems using interpolating moving least squares. In: **7th International Conference on Computation in Electromagnetics**, páginas 154–155, Brighton, UK, 2008c.
- L. W. Cordes e B. Moran. Treatment of material discontinuity in the element free galerkin method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 139(1):75–89, 1996.
- T. Davis. Umfpack-unsymmetric multifrontal methodkdtree, 2009. <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/> (acessado em 07/07/2008).
- M. B. Kennel. Kdtree 2: Fortran 95 and c++ software to efficiently search for near neighbors in a multi-dimensional euclidean space., 2004. <http://front.math.ucdavis.edu/author/M.Kennel> (acessado em 02/02/2008).

- P. Lancaster e P. Salkauskas. Surfaces generated by moving least square methods. **Mathematics of Computation - STOR**, 37(155):141–158, 1981.
- G. R. Liu. **Mesh Free Methods - Moving Beyond the Finite Element Method**. CRC Press - Washington, D. C., 1 edição, 2003.
- G. R. Liu e Y. T. Gu. **An Introduction to Meshfree Methods and their Programming**. Springer, Netherlands, 1 edição, 2005.
- A. Macedo. **Eletromagnetismo**. Editora Guanabara, 1 edição, 1988.
- G. G. Maisuradze e D. L. Thompson. Interpolating moving least squares methods for fitting potential energy surfaces: Illustrative approaches and applications. **J. Phys. Chem**, 1(1):7118–7124, 2003.
- Y. Marèchal, J. L. Coulomb, G. Meunier, e G. Touzot. Use of diffuse element method for electromagnetic field computation, 1992. In Digest of Fifth Biennial IEEE Conference.
- D. Meeker. Cfinite element method magnetics, 2009. <http://femm.foster-miller.net/wiki/HomePage> (acessado em 19/02/2009).
- G. F. Parreira, A. R. Fonseca, A. C. Lisboa, E. J. Silva, e R. C. Mesquita. Efficient algorithms and data structures for element-free galerkin method. **IEEE Transactions on Magnetism**, 42(4):659–662, 2006a.
- G. F. Parreira, E. J. Silva, A. R. Fonseca, e R. C. Mesquita. The element-free galerkin method in three-dimensional electromagnetic problems. **IEEE Transactions on Magnetism**, 42(2):711–714, 2006.
- J. R. Shewchuk. Triangle - a two-dimensional quality mesh generator and delaunay triangulator, 2009. <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html> (acessado em 28/07/2009).
- V. D. Toro. **Fundamentos de Máquinas Elétricas**. Editora LTC, 1 edição, 2009.

- S. L. L. Verardi, J. M. Machado, e J. R. Cardoso. The element free galerkin method applied to the study of fully developed magnetohydrodynamic duct flows. **IEEE Transactions on Magnetism**, 38(2):941–944, 2002.
- S. A. Viana. Estudo de métodos sem malha na resolução de problemas eletromagnéticos. Dissertação de Mestrado, Programa Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais / Brasil, 1998.
- S. A. Viana. **Meshless Methods Applied to Computational Electromagnetics**. Tese de Doutorado, Department of Electronic & Electrical Engineering - University of Bath / United Kingdom, 2006.
- S. A. Viana e R. C. Mesquita. Moving least square reproducing kernel method for electromagnetic field computation. **IEEE Transactions on Magnetism**, 35(3):1372–1375, 1999.
- L. Xuan, B. Shanker, Z. Zeng, e L. Udpa. Element-free galerkin method in pulsed eddy currents. **International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics**, 19(1-4):463–466, 2004.
- L. Xuan e L. Udpa. Element free galerkin method for static and quasi-static electromagnetic field computation. **IEEE Transactions on Magnetism**, 40(1):12–20, 2004.

Apêndice A

Fundamentos de Eletromagnetismo

Neste apêndice é realizada uma breve revisão dos conceitos fundamentais da teoria eletromagnética e as equações que unificaram esta teoria e que são denominadas as Equações de Maxwell.

A.1 A Lei de Coulomb

Através do experimento com uma balança de torção, Coulmb estabeleceu que a força entre duas estruturas carregadas era diretamente proporcional ao valor das cargas destas estruturas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as mesmas.

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{a}_{12}}{4\pi\epsilon R_{12}^2} (\text{Newton}). \quad (\text{A.1})$$

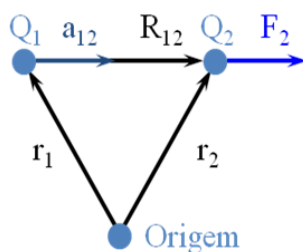


Figura A.1: Lei de Coulomb.

A.2 Intensidade de Campo Elétrico

A intensidade de campo elétrico é definida como o vetor força sobre uma unidade de carga de prova positiva.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (\text{A.2})$$

ou pela figura (A.1,) considerando a carga Q_1 como sendo a fonte de campo elétrico e a carga Q_2 como a carga de prova positiva, chega-se a:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1 \mathbf{a}_{12}}{4\pi\epsilon R_{12}^2} (V/m). \quad (\text{A.3})$$

A.3 Diferença de Potencial Elétrico

Sabe-se que o a força exercida por um campo elétrico em uma carga elétrica Q positiva é dada por

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se então dizer que a força externa necessária para deslocar esta carga, no sentido contrário ao campo será dada por:

$$\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}. \quad (\text{A.5})$$

Logo, o trabalho para mover esta carga em um intervalo $d\mathbf{l}$ será

$$dw = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{A.6})$$

sendo que o trabalho realizado para deslocar a carga em um intervalo finito, de um ponto inicial a um ponto final, dentro do campo elétrico será:

$$w = -Q \int_{inicial}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \text{ (Joules)} \quad (\text{A.7})$$

A diferença de potencial entre dois pontos é definida como sendo o trabalho para se deslocar uma carga de prova unitária positiva de um ponto a outro de um campo elétrico ou seja:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{w}{Q} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{V}) \quad (\text{A.8})$$

A.4 Intensidade de Campo Magnético H

Suponha que a carga Q ou um arranjo de cargas esteja em movimento.

Sabe-se que corrente elétrica é carga em movimento e carga em movimento é fonte de campo magnético. A figura a seguir mostra o campo gerado por uma carga elétrica em movimento.

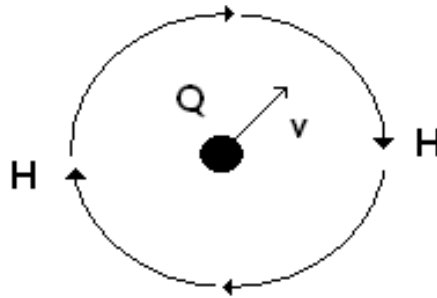


Figura A.2: Campo magnético gerado por uma carga em movimento.

A.5 Densidade de Fluxo Magnético B e Permeabilidade Magnética μ

Uma vez que \mathbf{B} é uma grandeza vetorial, pode se definir o fluxo magnético que atravessa uma superfície S como:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.(\text{Webber}) \quad (\text{A.9})$$

A permeabilidade magnética μ de um material expressa a susceptibilidade deste material a passagem do fluxo magnético.

A relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} é feita pela seguinte equação constitutiva:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (\text{A.10})$$

Vale observar que para materiais não lineares a permeabilidade μ é dependente da intensidade de campo magnético e a expressão anterior não mais representa uma reta.

A.6 Densidade de Fluxo Elétrico \mathbf{D} e Permissividade Elétrica ϵ

Realizando um paralelo com a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} , existe uma grandeza denominada densidade de fluxo elétrico \mathbf{D} .

Considere uma estrutura carregada. Sabe-se que carga é fonte de fluxo elétrico. Desta maneira, se for considerado uma superfície que envolve esta estrutura carregada pode se entender a grandeza vetorial \mathbf{D} como sendo a densidade de fluxo elétrico que atravessa esta superfície.

A relação entre \mathbf{D} e \mathbf{E} é feita pela equação constitutiva

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (\text{A.11})$$

A.7 Densidade de Corrente e Condutividade

Considere a figura (A.3) onde \mathbf{u} é um vetor unitário normal à seção do condutor. O valor médio de densidade de corrente que atravessa a área S é dado por:

$$J = \frac{I}{S} \quad (\text{A.12})$$

onde I é a corrente que percorre o condutor.

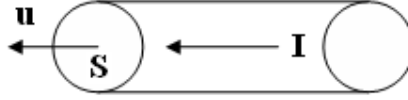


Figura A.3: Condutor sendo percorrido por uma corrente I .

Assumindo que a superfície S seja pequena, a densidade de corrente J pode ser considerada constante nesta superfície.

O vetor densidade de corrente \mathbf{J} é expresso, então por

$$\mathbf{J} = \mathbf{u} J. \quad (\text{A.13})$$

Logo, a corrente que percorre o condutor pode ser dada por:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{A.14})$$

Normalmente os materiais são classificados em materiais dielétricos, semicondutores e condutores.

A capacidade de um material condutor em conduzir corrente elétrica está associada a condutividade do material σ dada em *Siemens/metro*.

A densidade de corrente \mathbf{J} é proporcional a \mathbf{E} , sendo a constante de proporcionalidade σ , ou seja

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{A.15})$$

A.8 Equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{A.19})$$

Obs. ρ refere-se à densidade volumétrica de carga.

Será realizada agora uma breve análise em cada uma das equações de Maxwell.

A equação (A.16), também conhecida com Lei de Maxwell Ampère expressa a maneira pela qual o campo magnético está associado às correntes que o originaram as quais podem ter natureza condutiva, associada a \mathbf{J} , ou de deslocamento, associada a $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Esta lei pode ser compreendida tomando inicialmente a Lei Circuital de Ampère, que estabelece que a integral de linha do campo magnético \mathbf{H} em qualquer percurso fechado é exatamente igual à corrente enlaçada pelo percurso, ou seja:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{A.20})$$

A figura a seguir expressa adequadamente o significado desta lei.

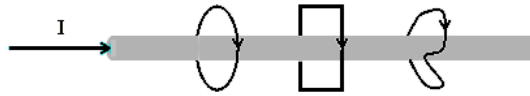


Figura A.4: Lei circuital de Ampère.

Considerando uma corrente volumar, (A.20) pode ser expressa como:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{A.21})$$

Aplicando o Teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{s}} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.22})$$

Comparando (A.21) com (A.22) chega-se a:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{A.23})$$

Maxwell, contudo verificou que esta equação estava incompleta, pois para circuitos com inclusão de dispositivos como capacitores, que são compostos por materiais dielétricos (isolantes), ainda havia a presença de corrente elétrica.

Aplicando o divergente em ambos os lados de (A.23)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A.24})$$

pois divergente do rotacional é igual a zero.

Mas

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A.25})$$

Que é a equação da continuidade. De modo que (A.24) é verdadeira somente se ρ for igual a zero o que nem sempre é verdade.

Maxwell, então acrescentou um termo em (A.23)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}. \quad (\text{A.26})$$

Tomando a divergência, novamente em ambos os lados de (A.26)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G} \quad (\text{A.27})$$

Tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (\text{A.28})$$

Substituindo ρ por $\nabla \cdot \mathbf{D}$ (A.19).

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.29})$$

Logo

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.30})$$

Então (A.27) fica $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ que é a equação (A.16).

A equação (A.17) diz que o fluxo magnético é solenoidal e que não há monopólos magnéticos. Veja a figura a seguir.

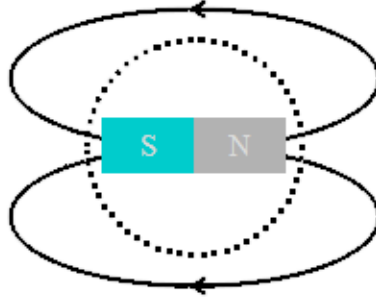


Figura A.5: Linhas de fluxo magnético.

Como as linhas de fluxo magnético são fechadas

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Aplicando o teorema da divergência na equação anterior

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \quad (\text{A.32})$$

Logo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ que é a equação (A.17), também conhecida com Lei de Gauss do Magnetismo.

No que se refere a equação (A.18) a mesma, de uma maneira indireta, mostra que a variação de fluxo magnético induz campo elétrico.

Considere um fluxo magnético variável no tempo incidindo sobre uma espira, conforme mostrado na figura a seguir.

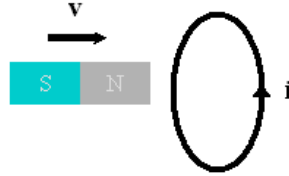


Figura A.6: Fluxo magnético variável.

O fluxo magnético que atravessa a espira é dado por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{A.33})$$

A força eletromotriz, responsável pela corrente "i" é dada por

$$f_{em} = \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.34})$$

ou por:

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (\text{A.35})$$

Combinando (A.34) com (A.35) chega-se a:

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Aplicando o Teorema de Stokes no primeiro termo de (A.36) e ajustando a mesma chega-se a:

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{A.37})$$

chegando a $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$ (A.18).

onde o termo *fem* refere-se à força eletromotriz induzida em um material.

A equação (A.19) afirma que o fluxo elétrico não é conservativo e é conhecida também como a Lei de Gauss Elétrica. Isto pode ser visualizado na figura (A.7) onde uma carga Q , localizada no centro de uma esfera imaginária gera fluxo radial para fora desta esfera.

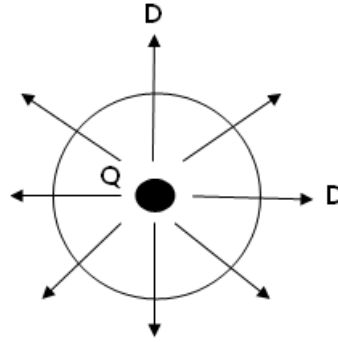


Figura A.7: Fluxo elétrico devido a uma carga positiva Q .

Para um pequeno volume ΔV pode-se dizer que:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Delta V} \rho dv \quad (\text{A.38})$$

Aplicando o Teorema da Divergência em (A.38) chega-se a:

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{\Delta V} \rho dv \quad (\text{A.39})$$

ou

$$\int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) dv = 0 \quad (\text{A.40})$$

o que se conclui que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (A.19).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)