

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gláuber Carvalho Dorsch

**Comprimento Mínimo em Mecânica  
Quântica via Modificação da Álgebra de  
Heisenberg**

VITÓRIA  
2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

GLÁUBER CARVALHO DORSCH

**Comprimento Mínimo em Mecânica Quântica via  
Modificação da Álgebra de Heisenberg**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira.

VITÓRIA  
2010

*A meus pais.*

# Agradecimentos

Meus agradecimentos vão, em primeiro lugar, aos meus pais, por tantos motivos que não se poderia enumerá-los, mas dos quais enfatizo o apoio e o incentivo que sempre me deram em toda minha vida, principalmente investindo em minha educação e, mais do que isso, possibilitando-me a ela dedicar-me integralmente, proporcionando-me, assim, todas as condições necessárias (até mesmo as mais adequadas) para que me fosse possível chegar até aqui. Devo a eles tudo o que sou e tudo o que fiz até hoje, inclusive este trabalho.

Ao amor da minha vida, Thaisa, por existir e por estar ao meu lado, compartilhando comigo tantos maravilhosos e divertidos momentos; por todas as conversas, a ajuda e a compreensão nas maiores e menores dificuldades; e por ser tão companheira, sempre me apoiando, me incentivando, e até me acompanhando em minhas empreitadas muitas vezes sem sentido. *Rakastan sinua!*

Aos meus amigos Hugo Leonardo Costa Louzada, Júnior Diniz Toniato, Dainer Marçal Dias (sábio!), Renan Picoreti, Rodolfo Camargo de Freitas e Diego Cezar Monteiro de Mendonça, que acompanharam-me do início ao fim da Graduação e/ou do Mestrado, tornando esses cursos mais suportáveis (e, muitas vezes, até mais divertidos) do que se possa imaginar.

Ao meu orientador, José Alexandre Nogueira, por toda a influência que exerceu sobre minha formação acadêmica, tanto na dedicada e atenciosa orientação deste trabalho quanto nas excelentes aulas ministradas durante minha graduação.

Ao Prof. Olivier Piguet, ao meu colega Ulysses Camara da Silva e a todos demais que levantaram questões e propuseram discussões que enriqueceram (e muito) o presente trabalho.

Aos membros da banca examinadora, pela cara atenção dedicada a esta dissertação.

E, por fim, à CAPES, que financiou este projeto.

*“Teria sido melhor ver o filme do Pelé!”*

*Chaves*

# Resumo

Embora ainda não se tenha conseguido quantizar a gravitação, há algumas evidências teóricas de que a unificação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica dá origem a um valor mínimo para o comprimento observável, um comprimento abaixo do qual a própria noção de comprimento perde sentido. Tal efeito merece ser investigado mais detalhadamente, pois age como um parâmetro regularizador natural, eliminando as divergências que infestam a Teoria Quântica de Campos.

Visando investigar algumas das consequências físicas da existência desse efeito, propomos incluí-lo no formalismo da Mecânica Quântica modificando a álgebra de Heisenberg (i.e., a relação de comutação dos operadores posição e momento,  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ ), de modo que exista um valor mínimo não-nulo para a incerteza  $\Delta x$ , que, sendo uma limitação à localizabilidade das partículas, atua como um *comprimento mínimo*. O espaço de Hilbert da teoria também deve ser adequadamente modificado. Como veremos, as mudanças não são apenas quantitativas. Pelo contrário, nosso resultado mais importante é que o conceito familiar de “medida de uma posição” deve ser reformulado, bem como outros conceitos a esse relacionados. Apresentamos, aqui, uma proposta de tal reformulação.

# Abstract

Although gravity could not be quantized yet, there are good theoretical evidences that the unification of General Relativity and Quantum Mechanics should lead to the existence of a minimal observable length, a length scale below which the very notion of length loses meaning. Such effect proves to be worth some further analysis, for it acts as a natural regulator parameter, thus avoiding the divergences that plague Quantum Field Theories.

In order to investigate some of the physical consequences of the existence of this peculiar effect, we propose to include it in the framework of Quantum Mechanics by modifying the Heisenberg algebra (i.e., the commutation relation of position and momentum operators,  $\hat{X}$  and  $\hat{P}$ ), so that a minimum non-zero value for the uncertainty  $\Delta x$  emerges, which, being a limitation to the localizability of particles, acts as a *minimal length*. The Hilbert space of the theory must be modified accordingly. As we will see, the changes are not merely quantitative. On the contrary, our main result is that the familiar concept of “position measurement” must be reformulated, as well as other concepts related to it. We present a proposal for such reformulation.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Mecânica Quântica</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.2	Relações de Comutação e Princípio de Incerteza . . . . .	15
2.3	Representação $ x\rangle$ e Funções de Onda . . . . .	19
2.4	Medidas em Mecânica Quântica . . . . .	22
2.5	Pacote Gaussiano e Ondas Planas . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Comprimento Mínimo</b>	<b>28</b>
3.1	Argumentos Qualitativos em favor de um Comprimento Mínimo . . . . .	30
3.2	Teoria de Cordas . . . . .	36
3.3	Gravitação Quântica de Laços . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Comprimento Mínimo na Mecânica Quântica</b>	<b>45</b>
4.1	Álgebra de Heisenberg Modificada . . . . .	46
4.2	Espaço de Hilbert . . . . .	48
4.3	Estados de Máxima Localização . . . . .	50
4.4	Discussões . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O início do século XX marcou a Física pelas duas grandes revoluções que o acompanharam e que abalaram os fundamentos do edifício da Mecânica Clássica, até então tida como inequestionável, considerada o ápice do conhecimento humano no que diz respeito aos fenômenos físicos. De um lado, a aplicação concomitante dos princípios do Eletromagnetismo de Maxwell e da Mecânica Clássica levaram a contradições absurdas (por exemplo, à instabilidade dos átomos e à divergência ultravioleta do espectro de radiação de um corpo negro) que só foram solucionadas perante uma mudança radical no conceito de matéria, de suas propriedades e do modo como interagem, bem como no papel desempenhado pelo processo de medida, de observação do sistema (introduzindo a impossibilidade de se realizar observações passivas, isto é, observar sem com isso modificar o sistema observado), dando origem à Mecânica Quântica. Por outro lado, a comprovação empírica de que a velocidade da luz é a mesma em todos referenciais inerciais forçou o abandono da noção de um tempo e espaço absolutos, inaugurando, com a chamada Teoria da Relatividade Restrita, o conceito de espaço-tempo que, posteriormente, na (mais abrangente) Teoria da Relatividade Geral, viria a ser interpretado como o próprio campo gravitacional, interagindo com a matéria que ele contém (o que é radicalmente contrário ao que ocorria na Mecânica Clássica, onde espaço e tempo eram totalmente independentes da matéria do Universo, atuando apenas como palco para os fenômenos físicos). Assim, a Mecânica Clássica, cujo objetivo é descrever o movimento da matéria no espaço e no tempo, mostrou-se incorreta tanto no seu conceito

de matéria quanto no de espaço e tempo.

No decorrer do século passado os físicos dedicaram-se a desenvolver cada uma dessas novas teorias separadamente, chegando até a unificar Mecânica Quântica e Relatividade Restrita, formulando uma teoria quântica da matéria que obedece à invariância da velocidade da luz sob mudança de referenciais inerciais, na teoria que foi batizada de Teoria Quântica de Campos. No entanto, foi legado ao século XXI a tarefa de levar essa revolução às últimas consequências, de concluí-la, unificando os princípios da Mecânica Quântica com a Relatividade Geral, formulando uma teoria que descreva o próprio espaço-tempo (ou, equivalentemente, o campo gravitacional) de maneira quântica e como a matéria (vista quanticamente) interage com esse “espaço-tempo quântico”. Em outras palavras, ficou legado para o século XXI a tarefa de formular uma Teoria Quântica da Gravitação.

Embora haja, hoje, algumas propostas que são fortes candidatas a merecer esse título, nenhuma delas resolve plenamente o problema. Contudo, é interessante notar que, por mais que essas propostas difiram umas das outras tanto formalmente quanto em seus resultados, todas têm em comum o fato de preverem, como consequência, um efeito que, décadas antes, já havia sido indicado como inerente a qualquer teoria que leve em conta, simultaneamente, princípios da Mecânica Quântica e da Relatividade Geral. Este efeito é a existência de um *comprimento mínimo*, ou seja, uma mínima escala de comprimento observável, ou, equivalentemente, uma máxima resolução das medidas de distâncias espaciais (ou intervalos espaço-temporais, numa formulação covariante).

A existência de um efeito como esse é de extrema importância porque, ao forçar o abandono de qualquer noção de localidade das partículas ou de eventos, isto é, ao eliminar a noção de que as interações entre os campos é pontual, de que ocorrem num ponto do espaço-tempo, age como uma renormalização natural das divergências na região do ultravioleta como as que infestam a Teoria Quântica de Campos. Assim, a quantização da gravitação, ao invés de render uma teoria não-renormalizável (como ocorre ao tentar quantizá-la usando os métodos da Teoria Quântica de Campos), ataca a causa das divergências dessas teorias, tornando-as finitas, ou seja, eliminando qualquer necessidade de renormalizações.

Esse *comprimento mínimo*, por ser um efeito aparentemente essencial à gravitação quântica, e por ter essas consequências tão interessantes, merece ser investigado mais detalhadamente. É esta a proposta deste trabalho: introduzir *ad hoc* um comprimento mínimo na Mecânica Quântica, pretendendo averiguar que conceitos permanecem válidos na presença de um tal efeito, quais devem ser abandonados, e, eventualmente, quais novos conceitos emergem.

Mais especificamente, propomos uma modificação no formalismo da Mecânica Quântica (não-relativística) de maneira a introduzir aí uma noção de uma inevitável não-localizabilidade das partículas, ou seja, introduzir uma impossibilidade de se localizar as partículas (ou um sistema qualquer) com precisão arbitrariamente grande. Isso é feito modificando-se a Álgebra de Heisenberg dos operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  de modo que, da relação de incerteza a ela associada, deduz-se a existência de um  $\Delta x_{min} > 0$  tal que  $\Delta x \geq \Delta x_{min}$  para todos os estados físicos possíveis.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No Capítulo 2 fazemos uma revisão da Mecânica Quântica tradicional, focando nos conceitos que deverão ser revistos quando introduzirmos um comprimento mínimo. Na seção 2.3 mostramos como os autovetores do operador posição ( $\hat{X}$ ), que representam partículas localizadas exatamente num ponto, não pertencem ao espaço de Hilbert da teoria, ou seja, não representam estados físicos possíveis (o que já pode ser visto como um repúdio da teoria ao conceito de localizabilidade arbitrária). Mostramos como é possível contornar essa dificuldade, sem maiores consequências, efetuando-se os cálculos com auxílio de estados *aproximadamente localizados* num ponto e, em seguida, tomando-se o limite em que essa aproximação é arbitrariamente precisa<sup>1</sup>. Na seção 2.4 discutimos um pouco mais em detalhe sobre medidas em Mecânica Quântica, e, especificamente, medidas da posição de um sistema, como um preparativo para a discussão posterior (seção 4.4) sobre como este conceito deve ser modificado na presença de um comprimento mínimo.

---

<sup>1</sup>Isso nada mais é do que um método de regularização já presente na Mecânica Quântica não-relativística!

- No Capítulo 3 discutimos o conceito de *comprimento mínimo*, apresentando alguns argumentos qualitativos que indicam que este efeito deve inevitavelmente aparecer ao se levar em conta a descrição quântica da matéria e de suas interações e a descrição do espaço-tempo em que essas interações ocorrem segundo a Relatividade Geral, evidenciando, assim, que tal efeito é inerente a qualquer teoria quântica da gravitação. Fortalecemos essa tese mostrando, a seguir, que este efeito de fato aparece nas duas candidatas a Teoria de Gravitação Quântica que mais têm atraído a atenção dos pesquisadores: a(s) Teoria(s) de Cordas e a Gravitação Quântica de Laços.
- No Capítulo 4 apresentamos a nossa proposta, de fato. Introduzimos uma modificação na Álgebra de Heisenberg, apresentando as motivações que nos levaram à escolha particular que fizemos. Em seguida discutimos mais detalhadamente as consequências desta modificação no Espaço de Hilbert da teoria, enfatizando a ausência de uma representação da posição, porque mesmo o método de regularização utilizado no Capítulo 2 falha neste caso. Com isso, o operador posição deixa de ser um observável e torna-se necessário rever o conceito de *medida da posição* de um sistema, bem como todas as demais definições e conceitos que estão relacionados a este e/ou são formulados usando autovetores de  $\hat{X}$ , como, por exemplo, a definição de *função de onda* da partícula, a noção de probabilidade de encontrá-la numa determinada região espacial, etc. Essas questões, e outras, são respondidas na seção 4.4, logo após introduzirmos o importante conceito de *Estados de Máxima Localização* na seção 4.3.
- Apresentamos nossas conclusões no Capítulo 5. Discutimos um pouco mais o papel de um comprimento mínimo na regularização da Teoria Quântica de Campos, propriedade que torna este efeito tão interessante e fundamental. Discutimos também, embora brevemente, as modificações que a presença de um comprimento mínimo induz na Relatividade Restrita, tornando necessária a introdução de mais um invariante além da velocidade da luz, a saber, o próprio comprimento mínimo. Finalizamos apresentando, como de praxe, propostas para trabalhos futuros ba-

seados nos resultados aqui obtidos.

## Capítulo 2

# Mecânica Quântica

### 2.1 Introdução

Ao fim do século XIX a Física alicerçava-se sobre um dualismo segundo o qual todo o conteúdo do Universo deveria possuir ou caráter de partícula ou de campo, sendo ambos mutuamente excludentes por possuírem características diametralmente opostas: enquanto partículas localizam-se num único ponto do espaço e têm seu movimento descrito por trajetórias parametrizadas pelo tempo, campos são definidos em todos os pontos de uma certa região espacial e sua propagação constitui o que se chama de ondas.

É sobre essa concepção de partícula que se baseia toda a Mecânica Newtoniana, fato que fica explícito ao se notar os princípios nos quais a teoria se fundamenta para descrever os objetos que pretende estudar, a saber, que:

1. O estado da partícula num instante de tempo  $t$  é representado por um ponto em seu espaço de fase  $\mathcal{M}$ , ou seja, por uma  $2n$ -upla  $(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  de números reais, onde  $n$  é o número de graus de liberdade de tal partícula.
2. As grandezas dinâmicas (tais como Energia, Momento Angular, etc.) são descritas por funções reais definidas neste espaço de fase.
3. Dada uma partícula num estado descrito pelo ponto  $P \in \mathcal{M}$ , o valor da grandeza dinâmica  $\mathcal{A}$  para essa partícula é dado por  $A(P)$ , onde  $A : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função

associada a  $\mathcal{A}$ .

Fica evidente, desses postulados, que a noção de trajetória das partículas desempenha um papel fundamental na teoria que daí se segue. No início do século XX, contudo, novos experimentos mostraram que fenômenos tipicamente ondulatórios ocorrem para objetos anteriormente considerados de natureza corpuscular, e, reciprocamente, que o que era considerado campo apresenta, em certas ocasiões, caráter de partícula. Tais resultados abalaram a concepção dualista, tornando-a insustentável e forçando seu abandono, sendo substituída por uma concepção de *dualidade* na qual os entes físicos não possuem nem caráter de campo nem de partícula, mas um terceiro que é uma síntese de ambos.

Para conciliar esses dois conceitos aparentemente contraditórios Heisenberg postulou seu conhecido Princípio de Incerteza, afirmando que, embora as partículas sejam pontuais, é impossível se medir, com precisão arbitrariamente grande, seu momento linear e sua posição no espaço num mesmo instante de tempo, de modo que não faz sentido falar em uma trajetória seguida por elas.

A mudança de paradigma promovida por essa proposição torna obsoletos os princípios nos quais a Mecânica Clássica se baseia para descrever os objetos que se dispõe a estudar (já o primeiro postulado acima deixa de ser válido), tornando necessária toda uma reformulação das descrições do estado do sistema, das grandezas observáveis, e da noção de *medida* dessas grandezas. A Mecânica que surge quando esses conceitos são devidamente reformulados de maneira a se adequarem ao Princípio de Incerteza de Heisenberg é chamada *Mecânica Quântica*, e, conforme formulada por Dirac [1, 2], tem como princípios que:

1. O estado da partícula é descrito por um vetor (unitário)  $|\psi\rangle$  num espaço de Hilbert abstrato  $\mathcal{H}$ .
2. As grandezas dinâmicas são representadas por operadores lineares auto-adjuntos atuando em  $\mathcal{H}$  cujos autovetores formam uma base desse espaço vetorial. Os valores possivelmente obtidos ao se realizar uma medida de uma grandeza  $\mathcal{A}$  são os autovalores do observável  $\hat{A}$  associado a  $\mathcal{A}$ .



3. Medir o valor da grandeza  $\mathcal{A}$  para um estado  $|\psi\rangle$  e obter exatamente o valor  $a$  significa perturbar o sistema de maneira que seu estado passe a ser  $\hat{P}_a|\psi\rangle$  (a menos de uma constante de normalização), onde  $\hat{P}_a|\psi\rangle$  é a projeção ortogonal de  $|\psi\rangle$  no subespaço  $\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}$  gerado pelos autovetores de  $\hat{A}$  associados ao autovalor  $a$ .
4. Dada uma partícula num estado descrito pelo vetor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , a probabilidade de se obter exatamente o autovalor  $a$  numa medida da grandeza  $\mathcal{A}$  é dada pelo produto interno  $\langle\psi|\hat{P}_a|\psi\rangle$ .

O penúltimo postulado expõe a diferença crucial entre Mecânica Clássica e Quântica: ao contrário da primeira, não existe, nesta última, o conceito de “observador ideal”, que realize medidas sem interferir no sistema. Pelo contrário: fazer uma medida consiste em perturbar o sistema de uma certa forma. Além disso as previsões são apenas probabilísticas, como consta no último postulado.

A exigência de que os autovetores do operador  $\hat{A}$  associado à grandeza  $\mathcal{A}$  formem uma base de  $\mathcal{H}$  é necessária para a consistência dos postulados e coerência física da teoria. Se essa condição não for satisfeita existirá um estado  $|\psi\rangle$  ortogonal a todos autovetores de  $\hat{A}$  para o qual os postulados não se aplicarão consistentemente. O Teorema Espectral da Álgebra Linear [3] garante que, quando  $\mathcal{H}$  tem dimensão finita, é suficiente que  $\hat{A}$  seja auto-adjunto (como já é requerido pelo postulado 2) para que essa condição seja satisfeita. O mesmo não obrigatoriamente vale quando a dimensão de  $\mathcal{H}$  é infinita, como é o caso na Mecânica Quântica, e, portanto, é necessário *impôr* aos operadores que representam grandezas dinâmicas essa condição extra. Um operador auto-adjunto que satisfaz essa condição é chamado, então, de um *observável*.

## 2.2 Relações de Comutação e Princípio de Incerteza

Até agora não mencionamos a forma com que a dinâmica dos sistemas é formulada nessas teorias, limitando-nos apenas ao que diz respeito à descrição dos estados desses

sistemas e das grandezas observáveis, isto é, à cinemática. Na Mecânica Clássica a dinâmica é inclusa definindo-se:

- uma álgebra das funções definidas no Espaço de Fase em questão, cujo produto é o assim chamado Colchete de Poisson, representado pelo símbolo  $\{ , \}$  (de modo que o colchete de Poisson entre duas funções  $A$  e  $B$  é  $\{A, B\}$ );
- uma função  $H$  definida no espaço de fase, chamada função Hamiltoniana do sistema, da qual a dinâmica (isto é, a variação de uma grandeza observável  $A$  qualquer no tempo) é obtida pela equação de movimento

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}. \quad (2.1)$$

Não é difícil adequar *formalmente* esse procedimento para o formalismo da Mecânica Quântica. Ao invés de uma álgebra das funções no espaço de fase, ter-se-á uma álgebra dos operadores atuando em  $\mathcal{H}$ , com produto representado por  $[ , ]$ , e ao invés de uma função Hamiltoniana  $H$  tem-se um operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ . A dificuldade é descobrir qual deve ser a forma concreta do produto  $[ , ]$  que define a álgebra dos operadores, qual a relação entre  $H$  e  $\hat{H}$  e qual é a forma da nova equação de movimento.

Para responder a essas perguntas apela-se para o Princípio da Correspondência, segundo o qual a Mecânica Quântica deve fornecer os mesmos resultados da Mecânica Clássica num limite apropriado, o que é plausível, uma vez que essa última fornece resultados em excelente acordo com os dados experimentais ao menos em alguma aproximação. Esse Princípio nos diz, então, que para cada sistema clássico existe um análogo quântico, cujos resultados tendem aos obtidos pela Mecânica Clássica para esse mesmo sistema nesse limite apropriado. O mapeamento de um sistema clássico em seu análogo quântico é chamado de *quantização* desse sistema. O procedimento padrão, o método da Quantização Canônica, consiste em promover as variáveis  $x$  e  $p$  do espaço de fase clássico a operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ . Como o domínio da função  $A$  associada à grandeza  $\mathcal{A}$  é o espaço de fase do sistema, essa função passa a ser também um operador definido por  $\hat{A} = A(\hat{X}, \hat{P})$ , que é o operador quântico associado a  $\mathcal{A}$ . Pode-se obter,

dessa maneira, o hamiltoniano quântico  $\hat{H}$  a partir da função hamiltoniana clássica  $H(x, p)$ .

Agora, se  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  comutassem, isto é, se

$$[\hat{X}, \hat{P}] \equiv \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = 0,$$

existiria uma base de  $\mathcal{H}$  formada por autovetores simultâneos desses dois operadores, ou seja, uma base formada por vetores da forma  $|x, p\rangle$  tais que

$$\hat{X}|x, p\rangle = x|x, p\rangle,$$

$$\hat{P}|x, p\rangle = p|x, p\rangle,$$

que seriam também autovetores de todos demais observáveis  $\hat{A}(\hat{X}, \hat{P})$ , de modo que se reobteria a Mecânica Clássica, apenas formulada de uma outra maneira. Ora, pelo Princípio da Incerteza de Heisenberg postulado acima um tal estado  $|x, p\rangle$ , autovetor simultâneo de  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , inexistente. Portanto, quanticamente deve-se ter

$$[\hat{X}, \hat{P}] \neq 0.$$

O comutador  $[ , ]$  satisfaz as propriedades de um colchete de Lie, por isso pode ser usado para definir uma álgebra no espaço de operadores que atuam em  $\mathcal{H}$ . Essa escolha mostra-se conveniente, pois permite que o princípio de correspondência seja satisfeito desde que, num limite apropriado, se recupere a equação de movimento clássica (2.1) e se tenha  $[\hat{X}, \hat{P}] = 0$ .

Ora, se postularmos que a forma da equação de movimento quântica é análoga à equação clássica, isto é, que é da forma

$$C \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

onde  $C$  é uma constante a se determinar, o problema se resolve impondo-se que

$$[\hat{X}, \hat{P}] = C \widehat{\{x, p\}},$$

sendo que o limite clássico é obtido quando  $C \rightarrow 0$ . Ora,  $C$  deve ser um número puramente imaginário pois  $[\hat{X}, \hat{P}]$  é um operador anti-hermiteano, portanto tem-se

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \widehat{\{x, p\}},$$

onde  $\hbar$  deve ter o valor da constante de Planck para que a teoria fique de acordo com a experiência. Como  $\{x, p\} = 1$  tem-se, finalmente,

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{I}, \quad (2.2)$$

que é a chamada Relação de Comutação de Heisenberg.

Agora, como já mencionado anteriormente, o fato de dois operadores não comutarem está intimamente relacionado à impossibilidade de se os conhecer simultaneamente com precisão arbitrariamente grande. Isso está associado ao terceiro postulado da Mecânica Quântica, pois quando dois observáveis não comutam a medida que se faz de um necessariamente interfere no estado do sistema de maneira que se perde a informação obtida pela medida da outra.

Isso aparece quantitativamente nas conhecidas Relações de Incerteza da Mecânica Quântica, que podem ser deduzidas notando-se que, como a norma de qualquer vetor de  $\mathcal{H}$  é positiva definida, então

$$\left\| \left[ \Delta\hat{A} + \frac{\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle}{2\langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle} \Delta\hat{B} \right] | \psi \rangle \right\| \geq 0, \quad (2.3)$$

onde  $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$  (e analogamente para  $\hat{B}$ ), donde se segue que

$$\langle \Delta\hat{A}^2 \rangle \langle \Delta\hat{B}^2 \rangle \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2}{4} \quad (2.4)$$

ocorrendo a igualdade em (2.4) se, e só se, (2.3) também for uma igualdade. O valor de  $\sqrt{\langle \Delta\hat{A}^2 \rangle}$  é o desvio médio padrão de uma série de medidas de  $\hat{A}$  em  $|\psi\rangle$ , ou seja, a média do quanto essas medidas desviam do valor médio. Isso pode ser interpretado como a *incerteza* dessa medida, e, portanto, a equação (2.4) mostra que, se  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ,

não é possível conhecer simultaneamente os valores das grandezas relacionadas a  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , num sistema qualquer, com uma incerteza arbitrariamente pequena, conforme já enunciado pelo Princípio de Heisenberg.

De (2.4) e (2.2) pode-se obter, ainda, uma expressão quantitativa para o Princípio da Incerteza de Heisenberg, dada por

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.5)$$

com  $\Delta x \equiv \sqrt{\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle}$  e analogamente para  $\hat{P}$ .

É digno de nota que, embora essa expressão indique uma limitação no conhecimento simultâneo da posição e momento da partícula, o conhecimento de uma dessas duas grandezas pode ser tão preciso quanto se queira, desde que se abdique de conhecer qualquer coisa sobre a outra. Ou, em outras palavras, pode-se saber a posição de uma partícula com uma precisão arbitrariamente grande, desde que se permita que a incerteza na medida do seu momento tenda para o infinito, e vice-versa.

Ver-se-á logo a seguir, no entanto, que um vetor para o qual  $\Delta x$  (ou  $\Delta p$ ) é nulo não pertence a  $\mathcal{H}$  e portanto não representa um estado físico possível, o que significa que, embora a incerteza na posição (ou no momento) possam ser arbitrariamente próximas de zero, não podem ser *exatamente* nulas.

## 2.3 Representação $|x\rangle$ e Funções de Onda

Embora a Mecânica Quântica nos obrigue a abandonar a noção de trajetória de uma partícula, substituindo sua descrição clássica, em termos de pontos do espaço-de-fase, por uma descrição em termos de vetores de um espaço vetorial abstrato, isso não nos obriga a abrir mão da noção geral de propagação da partícula no espaço-tempo, ou da distribuição de um certo sistema numa dada região espacial. Sequer se pode fazer isso, sob pena de ter uma descrição incompleta dos sistemas que a teoria pretende estudar. Considere, por exemplo, o experimento de emissão de elétrons movendo-se sob a ação de um campo magnético numa câmara de gás Argônio. Embora certamente não se

possa falar de uma trajetória seguida por um desses elétrons, também é certo que o rastro deixado por eles, visíveis graças ao gás que preenche a câmara, concentra-se mais em uma região espacial (em torno da trajetória clássica) do que em outras. Para que se possa descrever esse tipo de comportamento é preciso descobrir como recuperar informações sobre essa distribuição de um sistema qualquer no espaço a partir do vetor que descreve seu estado.

Numa primeira tentativa, consideremos o autovetor  $|x\rangle$  do operador  $\hat{X}$  associado ao autovalor  $x$ , que representa uma partícula localizada precisamente no ponto  $x$ , ou seja, uma partícula num estado tal que a incerteza na medida de sua localização é nula. De acordo com o quarto postulado  $\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle$  é a amplitude de probabilidade<sup>1</sup> de se encontrar no ponto  $x$  uma partícula que é descrita pelo vetor  $|\psi\rangle$ , e é, portanto, o campo que estávamos procurando. A função  $\psi$  assim obtida é chamada *função de onda* da partícula.

Ocorre que  $|x\rangle$  é tal que, por um lado,  $\langle x'|x\rangle = 0$  se  $x \neq x'$ , já que  $\langle x'|x\rangle$  é a amplitude de probabilidade de uma partícula localizada exatamente em  $x$  encontrar-se em  $x' \neq x$ , enquanto por outro lado, devido a essa mesma interpretação, tem-se  $\int_{-\infty}^{\infty} |\langle x'|x\rangle|^2 dx' = 1$ . Segue-se dessas propriedades que  $\langle x|x\rangle \notin \mathbb{R}$ , ou seja, a norma de  $|x\rangle$  não está bem definida. Portanto  $|x\rangle \notin \mathcal{H}$ <sup>2</sup>, e a expressão  $\langle x|\psi\rangle$  fica sem sentido.

Mas uma vez que, neste caso,  $\Delta x$  pode ser tão pequeno quanto se queira, esse problema pode ser contornado considerando-se um vetor  $|x\rangle$  como o limite de uma sequência de estados  $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ , para os quais o valor esperado de  $\hat{X}$  é  $x$  e a incerteza em  $\hat{X}$  é  $\Delta x$ , quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Ou seja, contorna-se o problema definindo-se uma sequência de estados “aproximadamente” localizados em  $x$ , e tomando-se o limite em que tal aproximação é cada vez mais precisa. A rigor, o resultado desse limite sofre das mesmas patologias anteriormente descritas para os autovetores de  $\hat{X}$ . No entanto, esse procedimento nos permite definir uma função de onda da partícula como  $\psi(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x}|\psi\rangle$ , em que primeiro efetua-se o produto interno e só depois do resultado toma-se o limite. Para uma sequência de estados  $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$  convenientemente escolhida este

<sup>1</sup>A probabilidade é  $|\psi(x)|^2$ .

<sup>2</sup>Porque, sendo  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert, o produto interno entre seus vetores deve estar bem definido.

limite está bem definido, embora  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\xi_x^{\Delta x}\rangle$  não esteja. Como  $\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle$  é a amplitude de probabilidade de um sistema descrito por  $|\psi\rangle$  encontrar-se localizado em torno de  $x$  com incerteza  $\Delta x$ , então  $\psi(x)$ , sendo o limite desta amplitude quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , é a amplitude de probabilidade de este sistema estar localizado *exatamente* em  $x$ ; ou seja, é, de fato, sua função de onda.

Devido à interpretação probabilística tem-se  $\langle \xi_x^{\Delta x} | \xi_{x'}^{\Delta x} \rangle \approx 0$  quando  $|x - x'| \gtrsim \Delta x$ . Quando  $\Delta x \approx 0$  tem-se  $\langle \xi_x^{\Delta x} | \xi_{x'}^{\Delta x} \rangle \approx 0$  quando  $x \neq x'$ , e portanto  $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$  formam, aproximadamente, um conjunto ortonormal, isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_x^{\Delta x}\rangle \langle \xi_x^{\Delta x}| dx \approx \mathbb{I}$ . Daí segue-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi | \xi_x^{\Delta x} \rangle \langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle dx \approx \langle \phi | \psi \rangle ,$$

ou, tomando o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \psi(x) dx ,$$

uma expressão para o produto escalar em termos das funções de onda.

Essa é exatamente a expressão do produto escalar que obteríamos se tivéssemos usado como base de  $\mathcal{H}$  os autovetores do operador  $\hat{X}$ , ignorando os problemas acima mencionados. Isso é uma regra: para todos os efeitos, os resultados obtidos seguindo-se essa prescrição de se tomar um limite de uma sequência de estados aproximadamente localizados em torno de  $x$  são os mesmos que se obtém usando indiscriminadamente os autovetores de  $\hat{X}$  e suas propriedades (ortogonalidade e completeza). Em outras palavras, para um observável  $\hat{A}$  qualquer vale

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x} | \hat{A} | \psi \rangle \simeq \langle x | \hat{A} | \psi \rangle , \quad (2.6)$$

onde o símbolo  $\simeq$  foi utilizado para indicar que é uma igualdade apenas formal.

Devido a isso, utiliza-se corriqueiramente a notação  $\langle x | \hat{A} | \psi \rangle$  e considera-se  $|x\rangle$  como autovetor de  $\hat{X}$ , embora por trás dessa notação esteja o processo de limite acima descrito.

Por conveniência posterior utilizar-se-á, daqui em diante, não a representação em

termos dos  $|x\rangle$ , mas a representação em termos dos vetores  $|p\rangle$  associados aos autovetores de  $\hat{P}$ . Para esses estados ocorrem exatamente os mesmos problemas que ocorreram com os  $|x\rangle$ , e tais problemas podem ser contornados da mesma forma, sem drásticas consequências graças à propriedade descrita pela equação (2.6).

## 2.4 Medidas em Mecânica Quântica

Nos postulados expostos na seção 2.1 fez-se referência a um processo de medida cujo resultado fosse *exatamente* um dos autovalores de um certo operador. Vamos, agora, discutir um pouco mais sobre medidas em Mecânica Quântica, generalizando esse resultado para casos menos restritivos.

Seja  $\hat{A}$  o operador associado à grandeza  $\mathcal{A}$ , e suponhamos inicialmente que o espectro desse operador seja discreto, dado por  $\{a_n, n \in \mathbb{M} \subset \mathbb{N}\}$ <sup>3</sup>. Para cada  $n \in \mathbb{M}$  sejam, ainda,  $\{|a_n^{(i)}\rangle, i \in \{1, \dots, k_n\}\}$  os autovetores de  $\hat{A}$  associados ao autovalor  $a_n$  (que tem, então, grau de degenerescência  $k_n$ ) e  $\mathcal{H}_n$  o subespaço gerado por esses autovetores. O operador que age num estado arbitrário projetando-o ortogonalmente em  $\mathcal{H}_n$  é, então,

$$\hat{P}_n = \sum_{i=1}^{k_n} |a_n^{(i)}\rangle \langle a_n^{(i)}| \equiv \sum_{i=1}^{k_n} \hat{P}_n^{(i)} \quad (2.7)$$

Como anteriormente ressaltado, medir o valor de uma grandeza num certo sistema é essencialmente perturbá-lo. O terceiro postulado refere-se a uma perturbação que tenha como resultado levar o sistema do estado  $|\psi\rangle$  para um estado  $\hat{P}_n|\psi\rangle$ , para um (e só um)  $n \in \mathbb{M}$ . Vamos, agora, considerar o caso mais geral, em que, ao se fazer uma medida de  $\mathcal{A}$ , o estado do sistema colapse de  $|\psi\rangle$  para  $\sum_{n \in \mathbb{M}'} c_n \hat{P}_n |\psi\rangle$ , com  $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ . Neste caso a medida fornece não um, mas um conjunto de autovalores  $\{a_n, n \in \mathbb{M}'\}$ , estando o coeficiente  $c_n$  relacionado à “intensidade” com que cada um desses autovalores é obtido nessa medida. Diz-se, então, que o aparato tem *resolução insuficientemente seletiva*<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais e  $\mathbb{M}$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

<sup>4</sup>Esta nomenclatura tem origem na Óptica. Aí, a resolução de um aparelho de medida está relacionada à distância mínima a que duas fontes luminosas pontuais devem estar uma da outra para que se possa vê-las como dois pontos distintos. Se a distância entre as duas for menor que a mínima elas serão vistas como um único borrão. No caso da Mecânica Quântica, obter vários autovalores para



Quando  $\mathbb{M}'$  possui apenas um elemento recupera-se o caso anterior já explicitado nos postulados da teoria, e a resolução da medida é dita suficientemente seletiva.

Agora consideremos o caso particular em que todos  $c_n$  são iguais à unidade, de maneira que o processo de medida tenha como resultado o colapso do sistema para o estado  $\sum_{n \in \mathbb{M}'} \hat{P}_n |\psi\rangle$ . O operador

$$\hat{P}_{\mathbb{M}'} = \sum_{n \in \mathbb{M}'} \hat{P}_n$$

tem a forma da eq. (2.7) para um projetor associado à medida de um autovalor degenerado, o que nos habilita a dar uma outra interpretação para uma medida com resolução insuficientemente seletiva, da maneira que descreveremos agora.

Dado  $\mathbb{M}' \subset \mathbb{M}$ , seja  $I_{\mathbb{M}'} = \{a_n, n \in \mathbb{M}'\}$ , e consideremos um operador com apenas dois autovalores, 0 e 1, que definimos da seguinte forma: um autovetor de 1 é um estado tal que, quando nele se mede  $\mathcal{A}$ , *todos* autovalores obtidos estão em  $I_{\mathbb{M}'}$ , enquanto, ao contrário, um autovetor de 0 é o estado tal que uma medida de  $\mathcal{A}$  só fornece autovalores que *não* pertencem a esse conjunto. Ora, o projetor associado ao autovalor 1 é exatamente  $\hat{P}_{\mathbb{M}'}$ , e, então, uma medida insuficientemente seletiva da grandeza  $\mathcal{A}$  pode ser vista como uma medida em que se obtém as respostas “sim”, caso os autovalores medidos estejam num certo intervalo pré-determinado, ou “não”, caso nenhum deles esteja nesse intervalo (ver ref. [2], Cap. III, §E-2).

Tudo isso talvez fique mais claro (certamente fica mais explícito) ao se considerar o caso em que o espectro de  $\hat{A}$  é contínuo. Aí deve-se levar em conta que, para se medir *exatamente* o autovalor  $a$  dentre um contínuo de valores possíveis, seria necessário um aparato com resolução *infinita*, que, na prática, inexistente. Isso nos é indicado pelo próprio formalismo matemático da teoria: se o resultado da medida for exatamente  $a$ , o estado do sistema após a medida será o autovetor  $|a\rangle$  associado a esse autovalor, e esse estado não pertence a  $\mathcal{H}$ , ou seja, não é um estado físico possível, porque sofre das mesmas patologias descritas para os autovetores de  $\hat{X}$  na seção anterior. Assim, para o caso contínuo o segundo postulado da Mecânica Quântica deve ser modificado: 

---

 uma única medida é análogo a enxergar esse borrão ao invés de pontos distintos.

medir um autovalor  $a$  significa, na verdade, medir um intervalo

$$I_a^{\delta a} = \left[ a - \frac{\delta a}{2}, a + \frac{\delta a}{2} \right],$$

centrado em  $a$  e de largura  $\delta a$ . O inverso dessa largura é, por definição, a resolução dessa medida. Quando o espectro é discreto existe um  $\delta a$  finito tal que esse intervalo é degenerado, isto é, contém apenas um elemento. Portanto, mesmo tendo resolução finita, o aparato ainda pode ser suficientemente seletivo, o que não acontece quando o espectro do operador é contínuo.

Consideremos, a título de exemplo, o caso concreto em que uma medida da posição de uma partícula é realizada por uma chapa fotográfica de tal modo constituída que a região que interage com a partícula fica marcada (torna-se mais clara, mais escura, muda de cor, etc.), o que possibilita se fazer a mensuração desejada. Ora, é claro que a região marcada nunca se reduzirá apenas a um ponto, pois nesse caso sequer seria visível, observável. Ela é sempre (aproximadamente) um círculo de raio  $\delta r$  (no caso de uma chapa bidimensional) ou um intervalo de comprimento  $\delta x$  no caso unidimensional.

Suponhamos que o resultado de uma tal medida seja o intervalo  $I_x^{\delta x}$ . Após a medida o estado da partícula colapsa para  $\hat{P}_x|\psi\rangle$ , onde  $\hat{P}_x$  projeta  $|\psi\rangle$  no subespaço gerado por todos autovetores de  $\hat{X}$  associados aos autovalores  $x' \in I_x^{\delta x}$ . A expressão exata para essa projeção depende de algumas hipóteses adicionais<sup>5</sup>. Ela é a projeção ortogonal se, e só se, o aparato de medida for considerado um “filtro perfeito” da função de onda incidente  $\psi_{in}$ , o que quer dizer que após a medida a função de onda torna-se

$$\psi(x) \propto \begin{cases} 0, & x \notin I_x^{\delta x} \\ \psi_{in}(x), & x \in I_x^{\delta x} \end{cases}$$

com uma constante de normalização adequada (ver Fig. 2.1). Essa hipótese é irreal<sup>6</sup>,

<sup>5</sup>A forma geral é

$$\hat{P}_x = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\delta x}(x')|x'\rangle\langle x'|dx',$$

onde  $C_{\delta x}$  é uma função cuja forma exata depende do aparato de medida mas que, como comportamento geral, apresenta um pico em torno de  $x$  e é aproximadamente zero quando  $|x' - x| \gtrsim \delta x/2$ . A função  $C_{\delta x}$  é análoga aos coeficientes  $c_n$  do caso discreto, e desempenha o mesmo papel, i.e., está associado à intensidade com que cada autovalor é obtido na medida.

<sup>6</sup>Fisicamente, ela pressupõe que a grandeza que caracteriza a marca deixada na chapa fotográfica é

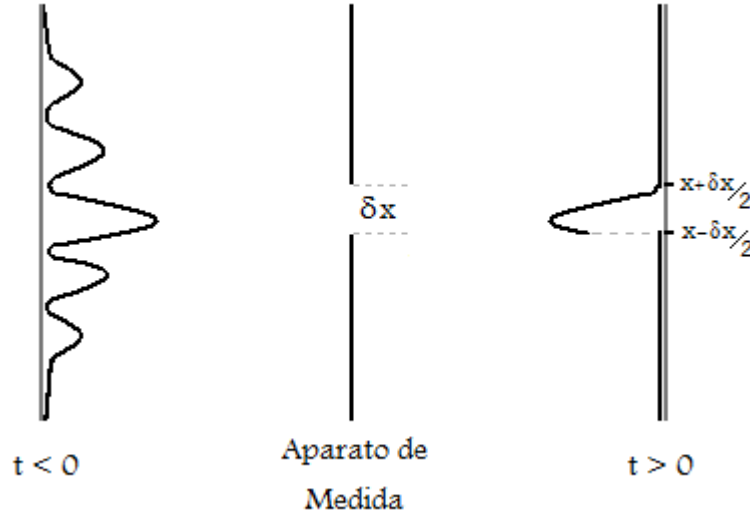


Figura 2.1: Ilustração de um processo de medida da posição de uma partícula realizada no instante  $t = 0$  por um aparato de resolução  $\delta x$ . À esquerda, a função de onda que incide no aparato de medida ( $\psi_{in}$ ). À direita, a função de onda colapsada após a medida ( $\psi$ ). Note que  $\psi$  é igual a  $\psi_{in}$  no intervalo  $\left[x - \frac{\delta x}{2}, x + \frac{\delta x}{2}\right]$  e se anula nos outros pontos, ou seja, o aparato filtra a função de onda incidente. Além disso essa filtração é perfeita porque a parte de  $\psi_{in}$  que atravessa o aparato não sofre modificação nenhuma.

mas é a mais simples e, para os fins que se deseja alcançar aqui, suficiente. Nessas condições, tem-se

$$\hat{P}_x = \int_{x - \frac{\delta x}{2}}^{x + \frac{\delta x}{2}} |x'\rangle \langle x'| dx' \quad (2.8)$$

Como no caso discreto, esse é precisamente o projetor associado a uma medida de uma grandeza com espectro degenerado, para a qual todos vetores  $|x'\rangle$  tais que  $x' \in I_x^{\delta x}$  fornecem o mesmo resultado. É como se o aparato medisse não diretamente os autovalores do operador posição  $\hat{X}$ , mas, ao invés disso, medisse se o sistema encontra-se localizado numa região espacial pré-determinada ou não.

Essa situação fica ainda mais clara quando se fala em probabilidades: não faz sentido algum perguntar sobre a probabilidade de medir um certo autovalor de  $\hat{X}$ , isto

---

uniforme no intervalo medido, mudando descontinuamente de valor fora deste intervalo. Por exemplo, no caso em que a marca é um brilho deixado na chapa pela interação com o objeto medido, é como se a intensidade desse brilho fosse uniforme numa região da placa e, fora dela, caísse abruptamente para zero. Tal descontinuidade inexistente: na prática, esse brilho tende *continuamente* a zero nas proximidades dos extremos do intervalo medido. Isso exemplifica o que se quis dizer com o fato de a função  $C_{\delta x}$  (os coeficientes  $c_n$  no caso discreto) estarem associados à *intensidade* com que cada autovalor é obtido. Note que pode haver também descontinuidade na função de onda da partícula após a medida, o que ressalta ainda mais o caráter não-físico dessa hipótese.

é, sobre a probabilidade de o sistema encontrar-se exatamente num certo ponto. A única pergunta que pode ser feita é sobre a probabilidade de se encontrar o sistema numa certa região espacial pré-determinada!

Como outro exemplo, consideremos o caso em que o aparato da Fig. 2.1 representa uma fenda de largura  $\delta x$  na qual incide a partícula. Aí, fica evidente que a pergunta sobre o autovalor de  $\hat{X}$  medido não tem sentido. O que se pode perguntar é se a partícula passou ao outro lado da fenda ou não, e qual a probabilidade de isso ocorrer.

Por fim, notamos pela Fig. 2.1 que, quando a resolução  $\delta x \rightarrow 0$ , a incerteza  $\Delta x$  da função de onda colapsada após a medida (o quanto ela está espalhada em torno de sua posição média) também tende a zero. Assim, o fato de se poder fazer medidas da posição com resolução arbitrariamente pequenas está associado ao fato de  $\Delta x$  poder ser tão pequeno quanto se queira, como se constata do Princípio de Incerteza de Heisenberg.

## 2.5 Pacote Gaussiano e Ondas Planas

As origens de todas as diferenças da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica estão no fato de, nesta última, não podermos ter conhecimento preciso da posição e do momento da partícula num instante qualquer, o que é enunciado pelo Princípio da Incerteza e expresso matematicamente pela inequação (2.5)<sup>7</sup>.

O produto  $\Delta x \Delta p$  para um estado  $|\psi\rangle$  qualquer pode, então, ser entendido como uma medida do quão não-clássico é o sistema em questão. O estado para o qual esse produto tem o menor valor possível, dado por  $\frac{\hbar}{2}$  de acordo com a inequação (2.5), é, então, um estado quântico cujo comportamento é o mais próximo possível do comportamento clássico.

Para calcular a função de onda associada a esses estados basta notar que a inequação (2.5) torna-se uma igualdade quando (2.3) é também uma igualdade, ou seja, quando

$$\left[ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right] |\psi\rangle = 0, \quad (2.9)$$

---

<sup>7</sup>E que advém da não comutatividade dos observáveis  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ .

pois o único vetor cuja norma é nula é o próprio vetor nulo. Projetando em  $\langle p|$  tem-se

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = \left[ \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} \langle \hat{P} \rangle \right] \langle p|\psi\rangle - \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} \langle p|\hat{P}|\psi\rangle . \quad (2.10)$$

Na base dos vetores  $|p\rangle$  os operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  são representados por

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\bar{\psi}(p) , \quad (2.11)$$

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \bar{\psi}(p) ,$$

o que pode ser verificado notando-se que  $|p\rangle$  atua de fato como autovetor de  $\hat{P}$  e que  $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ , como deveria ser.

Assim, a equação (2.10) torna-se

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial p} = \left[ -\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + \frac{\langle \hat{P} \rangle}{2(\Delta p)^2} \right] \bar{\psi} - \frac{1}{2(\Delta p)^2} p \bar{\psi} ,$$

cujas soluções são chamadas *função de onda Gaussiana* dada por

$$\bar{\psi}_{Gauss}(p) \propto e^{-\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} p} \exp \left( -\frac{p^2}{4(\Delta p)^2} + \frac{\langle \hat{P} \rangle}{2(\Delta p)^2} p \right) , \quad (2.12)$$

que representa uma partícula para a qual  $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ , isto é, para a qual o produto  $\Delta x \Delta p$  é o mínimo possível. Se agora se tomar o limite de  $\bar{\psi}_{Gauss}$  quando  $\Delta p \rightarrow \infty$  ter-se-á a função de onda de uma partícula para a qual  $\Delta x = 0$ , dada por

$$\bar{\psi}^{max}(p) \propto e^{-i\frac{p}{\hbar} \langle \hat{X} \rangle} , \quad (2.13)$$

ou seja, a função de onda (na representação  $|p\rangle$ ) de uma partícula exatamente localizada em  $\langle \hat{X} \rangle$  é uma onda plana com vetor de onda  $k = p/\hbar$ . Pela discussão precedente tal função de onda não representa nenhum estado físico possível, o que pode ser visto notando-se que ela não é quadrado-integrável e, portanto, a interpretação probabilística não pode a ela ser aplicada.

## Capítulo 3

# Comprimento Mínimo

A Mecânica Quântica exposta no capítulo anterior possui o grande revés de não ser uma teoria relativística, não ser sequer uma teoria invariante sob transformações de Lorentz, como devem ser todas as teorias físicas. Essa limitação restringe seu domínio de validade à escala de comprimento atômica, ou seja, a teoria é aplicável somente para explicar fenômenos originários de interações que se dão a distâncias da ordem de um raio atômico ( $\sim 10^{-10}m$ ) ou maiores. Interações a distâncias cada vez menores envolvem energias cada vez maiores e, a partir de certo ponto, efeitos relativísticos tornam-se relevantes.

A Teoria Quântica de Campos obteve sucesso na unificação dos princípios da Mecânica Quântica com os da Relatividade Especial, estendendo assim a validade da Física Teórica a escalas de comprimento ainda menores, abrangendo até mesmo interações que ocorrem no interior do núcleo atômico ( $\sim 10^{-14}m$ ). Mas, porque a teoria pressupõe, desde o início, um espaço-tempo plano de Minkowski, sabe-se já de antemão que é incapaz de descrever interações que envolvam energias altas o suficiente para que, como prevê a Relatividade Geral, a curvatura do espaço-tempo daí resultante não seja desprezível. Para abranger estas situações é necessária uma teoria quântica que seja relativística no sentido mais geral, uma teoria capaz de descrever como os campos de matéria e de *gauge* (considerados quanticamente) curvam o espaço-tempo, como são afetados por tal curvatura e, mais ainda, como quantizar o próprio espaço-tempo, que, na Relatividade Geral, nada mais é que o campo gravitacional. Em suma, é necessária

uma teoria quântica da gravitação.

A mesma questão pode ainda ser posta de outra maneira: a teoria atualmente tida como válida para descrever interações a escalas astronômicas (testada empiricamente a distâncias de até  $\sim 1mm$ ) é a Relatividade Geral, enquanto é a Teoria Quântica de Campos que descreve com sucesso as interações que ocorrem a escalas microscópicas. Ambas se reduzem à Mecânica Clássica em limites apropriados, mas nenhuma das duas reduz-se à outra e tampouco há uma única teoria que contenha essas duas como casos particulares. Assim, no estágio da Física em que nos encontramos atualmente possuímos duas descrições compartimentadas da Natureza, cada uma com seu limite de validade apropriado, mas sem existir uma interseção entre tais limites. Certamente não se espera que a Natureza comporte-se dessa maneira. Ao contrário, espera-se que a Natureza seja uma, que possa ser descrita por um único conjunto de leis válidas em todos esses domínios. Essa unidade é a (ou passa pela) teoria quântica da gravitação.

Não importa a introdução que se faça ao problema, o fato é que ainda não se obteve sucesso na tentativa de formular consistentemente uma tal unificação. Há, no entanto, algumas propostas que parecem promissoras, e, interessantemente, todas elas apontam para a existência de um efeito que parece intrínseco a uma teoria quântica da gravitação: um comprimento mínimo, isto é, uma resolução máxima finita nas medidas de distâncias espaciais, um comprimento abaixo do qual a própria noção de comprimento perde sentido.

Neste capítulo mostraremos como esse efeito aparece nas duas mais promissoras teorias de Gravitação Quântica: a Teoria de Cordas e a Gravitação Quântica de Laços. Além disso, apresentaremos alguns argumentos mostrando que a consideração simultânea de princípios da Mecânica Quântica com princípios da Relatividade Geral conduz inexoravelmente a esse efeito, evidenciando que ele é inerente a qualquer teoria que unifique essas duas grandes sub-áreas da Física.

### 3.1 Argumentos Qualitativos em favor de um Comprimento Mínimo

A Teoria Quântica de Campos tem o grande inconveniente de seus cálculos sempre resultarem em *infinitos*, não fornecendo, assim, a princípio, informações úteis sobre o que se quis calcular e, portanto, tornando a teoria *a princípio* totalmente impotente. Em muitos casos este problema pode ser contornado via procedimentos de *renormalização*, por meio dos quais se consegue extrair um número real desses infinitos. Contudo, tais procedimentos são criações *ad hoc* e “nossa confiança na correção de seus resultados é baseada somente em seus excelentes acordos com a experiência, não na consistência interna ou ordenação lógica dos princípios fundamentais da teoria” [4]. Embora essa excepcional concordância das medidas experimentais com os resultados que se obtém por meio dos métodos de renormalização já baste para a satisfação dos mais pragmáticos, essas divergências que infestam a TQC têm sido algumas vezes interpretadas como sinais de uma contradição interna da teoria, de alguma hipótese errada e/ou da ausência de alguma hipótese necessária para a adequação da teoria consigo mesma.

Heisenberg, em artigo de 1938 [5], considerou essa possibilidade, argumentando que, assim como as duas constantes fundamentais da Física até então originaram-se da solução de contradições que surgiam quando se aplicava simultaneamente princípios de dois ramos diferentes da Física — o reconhecimento da velocidade da luz  $c$  como velocidade limite do universo sendo a solução da contradição entre a Mecânica Newtoniana e o Eletromagnetismo de Maxwell, e a constante  $\hbar$  tendo origem na solução das divergências que surgem ao aplicar o Eletromagnetismo de Maxwell e a Termodinâmica para explicar o espectro de radiação de um corpo negro — assim também a unificação da Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica daria origem necessariamente a uma nova constante fundamental que exerceria o papel de comprimento mínimo e que, no entanto, não é levada em consideração na Teoria Quântica de Campos, o que seria a causa das divergências.

Porque nenhum comprimento abaixo deste comprimento mínimo pode ser obser-



vado, o comprimento de onda de qualquer radiação deve estar acima deste mínimo, o que faz esta nova constante atuar como um *cut-off ultravioleta* natural, uma renormalização natural da teoria. Nesse cenário a divergência surge porque os cálculos levam em conta mais graus de liberdade do que o campo pode de fato possuir. É interessante a analogia que se pode fazer, partindo desse raciocínio, das divergências da TQC com as divergências que ocorriam na lei de Rayleigh-Jeans também na região do ultravioleta: neste caso a solução também foi perceber que, ao considerar os níveis de energia do oscilador harmônico contínuos, se estava levando em conta graus de liberdade espúrios, sendo essa a causa do resultado divergente do cálculo. A divergência da expressão de Rayleigh-Jeans na região do ultravioleta serviu como um aviso de que alguma hipótese levada em conta nos cálculos estava errada, tendo sua correção advindo (ainda que indiretamente) da criação de uma nova constante fundamental ( $\hbar$ ). Heisenberg interpreta dessa mesma forma as divergências que ocorrem na TQC.

Nesse artigo [5] o surgimento de um valor mínimo não-nulo para o comprimento observável ainda é exemplificado da seguinte forma: ao se emitir fótons na direção de um objeto na tentativa de observá-lo com resolução cada vez maior, os fótons emitidos devem ter comprimento de onda cada vez menores; abaixo de um certo comprimento de onda, contudo, o fóton passa a ter energia suficiente para criar um par elétron-pósitron ao invés de ser espalhado e fornecer alguma informação sobre o objeto a ser observado. Portanto, a tentativa de se medir, com um fóton, um comprimento abaixo do comprimento mínimo resulta em não se fazer medição nenhuma. O mesmo argumento aparece em [4], também mostrando a limitação que existe, em Teoria Quântica de Campos, na medição das coordenadas de uma partícula qualquer.

Todavia, esse exemplo não está associado à existência de um comprimento mínimo universal, como pensava Heisenberg. Antes, ele apenas explicita a impossibilidade de se ter uma Teoria Quântica Relativística que descreva uma só partícula [6]: ao se tentar localizar essa única partícula, invariavelmente novas partículas são criadas.

Assim, a proposta de Heisenberg foi amplamente ignorada em sua época, e o mencionado artigo caiu em esquecimento, em grande parte devido aos sucessos dos métodos de renormalização até então, que “curavam” os infinitos da TQC sem necessidade de in-

troduzir uma nova constante fundamental cujas consequências físicas ainda precisariam ser entendidas.

Mas os sucessos dos métodos de renormalização tiveram um fim quando se propôs aplicar os princípios da TQC para se quantizar o campo gravitacional, numa primeira tentativa ingênua de se unificar Teoria Quântica e Relatividade Geral. Aí as (sempre presentes) divergências mostraram-se *não-renormalizáveis* [7], e os infinitos, que antes eram apenas um desconforto (pois podiam ser contornados), passaram a constituir uma limitação da teoria. Essas divergências incuráveis serviram de impulso ao ressurgimento da proposta de um comprimento mínimo para resolvê-las, dessa vez com a peculiaridade de que a inclusão da interação gravitacional, ao mesmo tempo que torna as divergências mais graves, torna também mais evidente (e aparentemente inevitável) a existência desse efeito regularizador.

O seguinte argumento a esse favor é simples, mas bastante elucidativo e convincente. Consiste em notar que, de acordo com o Princípio de Incerteza (2.5), medir a posição de uma partícula com precisão cada vez maior implica numa imprecisão proporcionalmente maior no momento linear dessa mesma partícula. Agora, de acordo com a Relatividade Geral, momento linear é capaz de curvar o espaço-tempo. Assim, incertezas na medida do momento da partícula têm como consequência flutuações quânticas na geometria espaço-temporal, ou, o que vem a ser o mesmo, no campo gravitacional, que se refletem, por sua vez, numa imprecisão no conhecimento da trajetória dessa mesma partícula. Logo, ao se tentar medir a posição de uma partícula com precisão cada vez maior produz-se uma perturbação também crescente no campo gravitacional que tem como consequência, ao contrário do que se buscava, um maior desconhecimento da posição a ser medida. É como se a relação de incerteza *efetiva* fosse da forma

$$\Delta x \Delta p \gtrsim 1 + O(\Delta p) ,$$

em que o primeiro termo corresponde ao princípio de incerteza puramente quântico (válido a escalas de energia baixas o suficiente para que se possa negligenciar a curvatura espaço-temporal), enquanto o segundo está associado ao efeito gravitacional acima

descrito e torna-se relevante a energias muito altas.

Em [8] um argumento um pouco mais quantitativo é apresentado. O autor analisa como efeitos gravitacionais afetam uma medida da posição de um objeto realizada pelo método mais simples e direto: o espalhamento de uma partícula-teste pelo conteúdo que se procura observar<sup>1</sup>. Sejam  $z$  o eixo coordenado na direção seguida pela partícula-teste após o espalhamento,  $v$  sua velocidade nesse trecho de seu movimento e  $E$  sua energia relativística. A métrica associada ao campo gravitacional dessa partícula é tal que, ao longo desse eixo,

$$ds^2 = \left( \frac{1 + 2\phi}{1 + 2\phi(1 - v^2)} + 2\phi \right) dt^2 - \left( \frac{1 - 2\phi v^2}{1 + 2\phi(1 - v^2)} - 2\phi v^2 \right) dz^2 - 2 \left( \frac{2v\phi}{1 + 2\phi(1 - v^2)} + 2v\phi \right) dt dz, \quad (3.1)$$

com  $\phi = -GE/z$  ( $c = 1$ ). Esse resultado é obtido realizando-se uma transformação de Lorentz para o referencial em que a partícula-teste está em repouso, considerando-se seu campo gravitacional nesse referencial como descrito pela métrica de Schwarzschild, e, em seguida, retornando ao referencial anterior por meio da transformação de Lorentz inversa.

Para que a informação que se pretende obter com essa interação não se perca dentro de um horizonte de um buraco negro, impossibilitando a medida que se quer fazer, deve-se ter

$$\frac{2GE}{z}(1 - v^2) < 1, \quad (3.2)$$

onde  $z$  é a distância entre a partícula-teste e o objeto medido<sup>2</sup>.

Há duas fontes principais de incerteza numa medida realizada dessa forma. A pri-

---

<sup>1</sup>É por meio de um espalhamento que funcionam desde a nossa visão dos objetos macroscópicos (sendo o fóton a partícula-teste) até os aceleradores de partículas utilizados para perscrutar escalas de comprimento cada vez menores.

<sup>2</sup>Essa condição nada mais é do que a condição

$$\frac{2GM}{r} < 1$$

escrita no referencial em que a partícula move-se com velocidade  $v$ .

meira é devido ao poder de resolução do próprio instrumento que detecta as partículas-teste, e é dada por

$$\Delta x \gtrsim \frac{\lambda}{\text{sen}\theta} = \frac{\hbar}{p\text{sen}\theta} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{E^2 - m^2}} \geq \frac{\hbar}{E} \quad (3.3)$$

( $\lambda$  é comprimento de onda da onda associada à partícula-teste,  $m$  sua massa, e  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $z$  e o eixo  $x$  no qual se está fazendo a medida). A segunda deve-se ao fato de não sabermos em que ponto exato da região de interação ocorre o espalhamento. Supondo que as partículas interagem mais fortemente quando a distância entre elas é menor ou igual a  $R$  pode-se afirmar que

$$\Delta x \sim R. \quad (3.4)$$

De (3.2), (3.3) e (3.4) tem-se

$$\Delta x^2 \gtrsim 2G\hbar(1 - v^2). \quad (3.5)$$

Assim, a única possibilidade de se ter  $\Delta x \ll \sqrt{G\hbar}$  é ter  $(1 - v^2) \ll 1$ . Consideremos, então, essa possibilidade, ou seja,  $v \approx 1$ . O elemento de linha (3.1) nessa situação torna-se

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} \left[ \left( 1 - \frac{2GE}{z}(1 + \alpha) \right) dt^2 + \frac{4GE}{z}(1 + \alpha) dt dz - \left( 1 + \frac{2GE}{z}(1 + \alpha) \right) dz^2 \right],$$

onde  $\alpha = 1 - \frac{2GE}{z}(1 - v^2)$ . Devido a (3.2) tem-se

$$0 < \alpha < 1.$$

Agora se  $u$  é a velocidade que a partícula-alvo adquire na direção do eixo  $z$  então  $dz = u dt$ , donde

$$\left[ \left( 1 - \frac{2GE}{z}(1 + \alpha) \right) + \frac{4GE}{z}(1 + \alpha)u - \left( 1 + \frac{2GE}{z}(1 + \alpha) \right) u^2 \right] dt^2 \geq 0$$

(pois a trajetória seguida por qualquer partícula é tipo-tempo ou tipo-luz, logo  $ds^2 \geq 0$ ) e então vale

$$u \geq \frac{\eta - 1}{\eta + 1} ,$$

com  $\eta = \frac{2GE}{z}(1+\alpha) \gg 1$  (pois  $v \approx 1$  implica que a energia da partícula é extremamente alta). Para que a partícula-teste esteja a uma distância maior que  $R$  da partícula-alvo, cessando (aproximadamente) a interação entre elas, o tempo necessário é

$$t \geq \frac{R}{1 - u} .$$

Nesse intervalo de tempo a partícula-alvo percorre uma distância

$$L = ut \geq R \frac{(\eta - 1)}{2} \approx \frac{R\eta}{2} \geq GE$$

na direção  $z$  e portanto

$$\Delta x \geq L \sin \theta . \quad (3.6)$$

De (3.3) e (3.6) segue, finalmente, o resultado

$$\Delta x \gtrsim \sqrt{G\hbar} .$$

De um modo geral, o argumento acima se divide em duas partes. A equação (3.5) é a condição para que a informação obtida do espalhamento não se perca num buraco negro, impossibilitando a medida que se deseja fazer. De acordo com essa equação ainda há, a princípio, uma possibilidade de se medir comprimentos infinitesimalmente pequenos, desde que a velocidade de saída da partícula-teste seja muito próxima de  $c$ . Uma análise posterior mostra, no entanto, que nesse caso o campo gravitacional dessa partícula-teste é intenso o suficiente para perturbar a trajetória da partícula-alvo, cuja posição se pretende medir, de um modo tal que a medida nunca tem incerteza menor que  $\sqrt{G\hbar}$ , que é o comprimento de Planck.

No mesmo artigo mostra-se ainda que efeitos gravitacionais impõem uma restrição também à sincronização de relógios, de modo que há uma incerteza mínima também

nas medidas de intervalos de tempo, como é de se esperar. O autor demonstra, além disso, a equivalência entre a existência de um comprimento mínimo e de flutuações do campo gravitacional, o que o leva à interessante conclusão de que *qualquer teoria que envolva um comprimento mínimo deve envolver efeitos gravitacionais de algum tipo*.

É curioso notar que logo no início desse artigo o autor recusa-se a interpretar as divergências que aparecem na TQC como originárias do pressuposto de que as partículas são pontuais, tendo precisamente esta interpretação dado origem, poucos anos depois, à hoje tão famosa Teoria de Cordas.

## 3.2 Teoria de Cordas

Há, atualmente, duas principais abordagens ao problema da unificação da Relatividade Geral com a Teoria Quântica: as Teorias de Cordas, tema da presente seção, e a Gravitação Quântica de Laços (GQL)<sup>3</sup>, da qual falaremos na seção a seguir. As duas podem ser claramente diferenciadas sob o critério da importância que cada uma dá às partes que devem ser unificadas. A maior preocupação da GQL é estar de acordo com os princípios da RG desde as suas bases, ao que paga o preço de até agora não conseguir recuperar a Física do Modelo Padrão [9]. Já a Teoria de Cordas é praticamente uma extensão da TQC, mantendo o mesmo maquinário matemático, o mesmo método de quantização via integrais de trajetória e diagramas de Feynmann (o que faz dela uma teoria perturbativa), mas com uma diferença crucial: a hipótese simples, embora radical, de que as partículas elementares não são objetos pontuais, 0-dimensionais, mas sim objetos extensos, unidimensionais, ou seja, cordas. As consequências que advêm dessa simples hipótese explicam porque essa tem sido a proposta que mais tem atraído a atenção e os esforços da comunidade científica nos últimos anos.

Primeiramente, as diferentes qualidades de partículas observáveis na natureza são aí interpretadas como diferentes modos de vibração da corda fundamental, ou seja, todas as partículas são diferentes manifestações de uma mesma coisa, o que evidencia fortemente o enorme potencial de unificação da teoria.

---

<sup>3</sup>Em inglês, *Loop Quantum Gravity*, ou LQG.

Além disso, todas teorias de cordas consistentes contêm cordas fechadas (cordas sem extremidades livres), cujo modo de vibração fundamental corresponde a uma partícula de massa nula e spin 2. Como uma partícula com essas propriedades jamais fora detectada, o fato de elas estarem inevitavelmente presentes foi considerado um dos grandes problemas dessas teorias. Essa situação se reverteu, no entanto, quando os cálculos das amplitudes de espalhamento entre essas partículas mostraram que sua interação, a baixas energias, é descrita pela ação de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral [10], de modo que elas poderiam ser interpretadas como o gráviton, o quantum do campo gravitacional! O que antes era problema passou a ser o maior trunfo das Teorias de Cordas, pois se concluiu daí que elas incluem *inevitavelmente* a interação gravitacional, isto é, não só possibilitam a unificação da Relatividade Geral com a Mecânica Quântica, mas já surgem como uma Teoria Quântica que contém a Relatividade Geral.

Outra característica marcante das Teorias de Cordas é o fato de elas possuírem apenas dois parâmetros livres [11] — a velocidade da luz  $c$  e o comprimento característico da corda  $\ell_s$  — em contraposição às dezenas de parâmetros livres existentes na Teoria Quântica de Campos. Isso significa que apenas os valores das constantes  $c$  e  $\ell_s$  não resultam do próprio formalismo da teoria e, portanto, precisam ser a ela impostos, sendo obtidos de alguma outra forma (experimentalmente, digamos), uma propriedade que faz jus à pretensão de ser uma teoria que contenha em si a explicação de Tudo.

E é justamente o parâmetro  $\ell_s$  que exerce aí o papel de comprimento mínimo, conforme mostrou-se em [12, 13]. O argumento é o seguinte. Primeiro, deve-se notar que “qualquer medida em Teoria de Cordas envolve espalhamento entre cordas” [14]. Na Teoria Quântica de Campos, em que as partículas envolvidas no espalhamento são pontuais, quanto maior a transferência de momento linear no espalhamento, melhor é a resolução da medida assim realizada, ou seja, se observa a estrutura do objeto investigado a escalas de comprimento cada vez menores. Quando as partículas espalhadas são cordas esse comportamento é reproduzido somente num certo limite de baixas energias, quando as distâncias investigadas são muito maiores que o comprimento característico da corda<sup>4</sup>. Em geral, no entanto, “maiores transferências de momento nem sempre

---

<sup>4</sup>Como é de se esperar, a baixas energias a Teoria de Cordas deve se reduzir à TQC.

correspondem a menores distâncias” [13]. Isso porque a energias muito altas a corda se alonga e passa a perscrutar *maiores* distâncias, invertendo-se, então, o comportamento que se observa no espalhamento entre partículas pontuais. Devido a esse comportamento, “a resolução nunca é menor que o comprimento da corda” [13], ou seja, há um comprimento mínimo.

Esses artigos se encerram com a sugestão de que a esse efeito corresponde, a altas escalas de energia, uma relação de incerteza *efetiva* da forma

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2} + \alpha (\Delta p)^2,$$

ao menos em primeira ordem de  $\alpha$ , que é um parâmetro relacionado ao comprimento da corda  $\ell_s$ . Em [12] o autor explicita que qualquer outra relação entre  $\Delta p$  e  $\Delta x$ , envolvendo ordens maiores de  $\alpha$ , é, a princípio, possível.

Uma outra abordagem é apresentada em [14], onde mostra-se a existência de um comprimento mínimo na Teoria de Cordas analisando a ação dessa teoria, ou seja, suas integrais de trajetória, culminando também numa proposta de modificação da relação de incerteza da forma mencionada acima.

Apesar das características, algumas das quais citadas acima, que a tornam uma teoria atraente aos que buscam uma Grande Unificação, a Teoria de Cordas tem grandes reveses que a impede de ser considerada a teoria definitiva da gravitação quântica (embora alguns de seus adeptos já a coloquem em tal patamar).

Um deles é o fato de teorias do tipo Cordas demandarem, para que sejam consistentes, que o espaço-tempo tenha dimensões extras além das 3+1 que são cotidianamente observadas. Como o espaço-tempo que observamos é 4-dimensional essas dimensões extras precisam estar compactificadas de alguma forma, isto é, suas topologias devem ser compactas e com raio de compactificação muito pequeno, de modo que, embora essas dimensões existam, nos passam despercebidas. O problema é que não existe uma única prescrição de como realizar essa compactificação e, ainda pior, cada prescrição adotada fornece resultados quantitativa e qualitativamente diferentes!

Além disso, embora seja comum falar em Teoria de Cordas, no singular, a verdade



é que existem (pelo menos) 5 diferentes teorias consistentes desse tipo<sup>5</sup>, sem que haja nenhum critério capaz de indicar qual dessas seria a correta. E, embora cada uma dessas teorias possa ser mapeada em outra por meio das chamadas *dualidades* [15], indicando que todas elas são apenas casos particulares de uma única teoria não-perturbativa, essa formulação não-perturbativa da Teoria de Cordas permanece um problema em aberto (fato que pode, por si só, ser apontado como revés dessas teorias).

O problema mais grave, contudo, diz respeito ao modo como as Teorias de Cordas encaram a Relatividade Geral e a tarefa de quantizá-la. Conforme mencionado acima, diz-se que a RG está contida nas Teorias de Cordas porque a ação de Einstein-Hilbert é recuperada, a baixas energias, ao se analisar espalhamentos envolvendo grávitons. O *grave* erro desse argumento consiste em não levar em consideração as mudanças paradigmáticas impostas pela RG, em ignorar a crítica que ela nos obriga a fazer aos conceitos que nos parecem mais sólidos e rigidamente estabelecidos antes de dar qualquer passo adiante, reduzindo-a, dessa forma, a uma teoria de campos convencional para, assim, julgar que recuperar a dinâmica do campo gravitacional (ou melhor, recuperar a ação de Einstein-Hilbert) é sinônimo de recuperar toda a teoria. Ora, antes mesmo de se pensar na dinâmica do campo gravitacional é preciso entender que, na RG, esse campo nada mais é do que o próprio espaço-tempo; que o espaço-tempo deixa de ser um mero palco à dinâmica dos demais campos e torna-se, ele mesmo, dinâmico; que, portanto, qualquer tentativa de quantizar o campo gravitacional deve tratar o espaço-tempo e todos os demais campos em pé de igualdade; ou, em outras palavras, que não se trata de quantizar campos que estão definidos num espaço-tempo, mas sim de campos definidos sobre campos [16].

Embora sem dúvida seja uma conquista marcante que a ação de Einstein-Hilbert possa ser recuperada nas Teorias de Cordas, sendo até mesmo indício de que ao menos algo nessas teorias esteja correto, na tarefa de incluir esses aspectos conceituais da RG elas falham miseravelmente. Ainda pior, ao clamarem que a RG está nelas inclusa como caso particular, engendram contradições dentro de si mesmas. Por exemplo, ao

---

<sup>5</sup>A saber, as chamadas Tipo I, Tipo IIA, Tipo IIB, Heterótica  $SO(32)$ , Heterótica  $E_8 \times E_8$ , fora a chamada Teoria M.

tomarem como ponto de partida para a quantização das cordas o método perturbativo de integrais de trajetória, já assumem estas cordas propagando-se num espaço-tempo de fundo, com uma métrica pré-determinada. Se agora nos perguntarmos o que esse espaço-tempo de fundo significa na Relatividade Geral (que as teorias de corda supostamente incluem como caso particular), ver-se-á que não significam nada, que não existem e nem podem existir!

Diante dessa situação, muitos teóricos preferiram tentar outras abordagens à quantização da Relatividade Geral, que preferivelmente tivessem como ponto de partida os paradigmas da Relatividade Geral e da Teoria Quântica, e apenas isso. A Gravitação Quântica de Laços é uma proposta desse tipo.

### 3.3 Gravitação Quântica de Laços

A maior lição que nos ensina a Relatividade Geral é que o campo gravitacional nada mais é do que o próprio espaço-tempo, ou melhor, a métrica desse espaço-tempo, de maneira que, nessa teoria, essa métrica torna-se uma variável dinâmica como qualquer outra, torna-se um campo que deve ser tratado sob as mesmas condições de todos os demais. Segue-se daí que uma teoria de Gravitação Quântica deve ser elaborada num espaço-tempo sem uma métrica de fundo, isto é, sem uma métrica fixada *a priori* [16]. Antes, o conhecimento da métrica espaço-temporal faz parte do conhecimento do estado do sistema gravitacional. Na teoria quantizada, por exemplo, a geometria está codificada nos vetores que descrevem os estados quânticos do sistema, ou seja, diferentemente de todas as demais teorias quânticas, aqui os vetores de estados do sistema não descrevem a configuração de um campo definido no espaço-tempo, e sim o estado em que se encontra o próprio espaço-tempo onde os demais campos estão localizados. Trata-se, então, como dito acima, de uma teoria de campos definidos sobre campos.

Essa exigência requer o abandono do maquinário desenvolvido para as Teorias de Campos (e bem-sucedido na ausência da interação gravitacional), por este ser fortemente baseado na existência de uma métrica de fundo com auxílio da qual se define

causalidade, invariância de Poincaré, e outras estruturas que estão nos pilares das formulações dessas teorias[16]. Alguns autores sugerem até mesmo que a causa da não-renormalizabilidade da gravitação quando quantizada por esse método seja a contradição engendrada pela utilização de um tal maquinário, que exige uma métrica de fundo, a um caso em que uma tal métrica de fundo inexistente [9].

Diante dessas exigências, o método de quantização que se mostra, à primeira vista, mais apropriado para a tarefa de quantizar a gravitação é o Método de Quantização Canônica, uma vez que ele é não-perturbativo e pode ser realizado sem qualquer menção à métrica espaço-temporal<sup>6</sup>, podendo, por isso, ser realizada independentemente de existir, ou não, uma métrica de fundo. O primeiro passo, então, é escolher as variáveis a serem utilizadas para descrever a configuração do sistema, e determinar seus momentos conjugados.

O que caracteriza a GQL é a escolha das “variáveis de Ashtekar” [17] para esse fim, com as quais a Relatividade Geral é descrita não em termos da métrica do espaço-tempo, mas de uma conexão  $A$  tomando valores numa certa álgebra de Lie (geralmente  $su(2)$ ). Com essa escolha a gravitação pode ser descrita como uma teoria de calibre *à la* Yang-Mills, e muitas técnicas conhecidas dessas teorias podem ser aplicadas ao caso gravitacional, guardadas as devidas particularidades de cada uma. Por exemplo, a invariância da RG sob difeomorfismos aparece, nessa descrição, na forma de vínculos que geram essas transformações de coordenadas arbitrárias. Em outras palavras, as transformações gerais de coordenadas (os difeomorfismos) são vistas(os) como *transformações de calibre*.

A quantização desse sistema pelo método canônico segue, então, os passos que descrevemos na seção 2.2: primeiro, as variáveis de Ashtekar (a conexão  $A$  e seu momento conjugado  $E$ ) são promovidas a operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{E}$ ; em seguida, os Colchetes de Poisson clássicos tornam-se comutadores, de maneira que  $i\hbar\widehat{\{ , \}} \rightarrow [ , ]$ ; por fim, contrói-se o espaço de estados do sistema e define-se aí um produto interno, ou seja, constrói-se o espaço de Hilbert da teoria<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup>Por isso, a LQG é também chamada *Gravitação Quântica Canônica* e se enquadra na classe de teorias de Gravitação Quântica *não-perturbativas*.

<sup>7</sup>Que, nesse estágio, é chamado *espaço de Hilbert cinemático*, porque até agora a dinâmica foi

Esta construção do espaço de Hilbert é feita com o auxílio das chamadas *redes de spin*, que são grafos  $\Gamma$  (isto é, uma coleção de  $n$  curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ) tais que cada uma das curvas é rotulada por uma representação irredutível de  $SU(2)$ <sup>8</sup> (ou seja, cada curva  $\gamma_i$  é associada a um número semi-inteiro  $j_i$ ) e cada vértice do grafo é rotulado por um tensor invariante no produto tensorial das representações  $\{j_i\}$  associadas às curvas  $\{\gamma_i\}$  que se juntam nesse vértice [18]. Dada uma rede de spin  $S$  é, então, possível definir um estado do sistema,  $|S\rangle$  (ou, equivalentemente, um funcional  $\Psi_S[A] \equiv \langle A|S\rangle$ ), seguindo uma prescrição determinada [16, 18, 19], a qual não descreveremos aqui para evitar delongas desnecessárias. O que importa, para este trabalho, é notar que estes estados  $|S\rangle$  associados à rede de spin  $S$  descrevem o estado do campo gravitacional, ou seja, descrevem a métrica do espaço-tempo! Assim, sem o conhecimento do estado  $|S\rangle$ , é impossível falar de comprimentos de curvas, áreas de superfícies ou volumes de regiões, pois a princípio essas curvas, superfícies e regiões estão num espaço-tempo sem métrica.

De fato, dada uma superfície  $\Sigma$  tipo-espaço é possível, classicamente, escrever a sua área  $A_\Sigma$  em termos das variáveis de Ashtekar que utilizamos como variáveis dinâmicas da RG, de modo que, no procedimento de quantização, em que as variáveis de Ashtekar são promovidas a operadores, também esta área se torna um operador  $\hat{A}_\Sigma$ . Assim, o valor da área de  $\Sigma$  depende do estado  $|S\rangle$  em que o operador  $\hat{A}_\Sigma$  atua, um fato já esperado pois, como dito acima, o cálculo dessa área depende da métrica, e, quanticamente, essa métrica está codificada no estado  $|S\rangle$  do campo gravitacional. Na verdade esses estados  $|S\rangle$  são autovetores deste operador área, de modo que, quando  $\Sigma$  intersecta as curvas  $\{\gamma_i, i \in L\}$  do grafo associado a  $S$ , tem-se

$$\hat{A}_\Sigma |S\rangle \propto \sum_{i \in L} \sqrt{j_i(j_i + 1)} |S\rangle,$$

onde  $j_i$  são os números semi-inteiros associados a cada uma das curvas intersectadas por  $\Sigma$ . Segue-se daí que há uma área mínima não-nula! Essa mesma conclusão é obtida quando  $\Sigma$  intersecta não somente as curvas, mas também vértices de  $S$ . É possível,

---

ignorada. O espaço de Hilbert físico é um subespaço desse espaço cinemático no qual os vínculos (em particular o vínculo Hamiltoniano, que determina a dinâmica) são obedecidos.

<sup>8</sup>No caso em que a conexão  $A$  toma valores na álgebra  $su(2)$ .

também, calcular um operador associado ao volume de uma região espacial, e os estados  $|S\rangle$  também vêm a ser autoestados desse operador, também com um espectro discreto [16, 20, 21].

Em suma, na GQL a geometria é descrita de maneira puramente quântica, pois a métrica está codificada nos vetores  $|S\rangle$  do espaço de Hilbert da teoria. Os estados  $|S\rangle$  de *redes de spin* são autovetores dos operadores associados à área de uma superfície tipo-espaço e ao volume de uma região espacial, e o espectro desses operadores é discreto, de modo que a geometria do espaço-tempo é quantizada. É intuitivo<sup>9</sup> que isso se estenda também para o comprimento [22], implicando na existência de um comprimento mínimo, e alguns cálculos indicam que isso de fato acontece [23], mas a análise do espectro deste operador envolve muito mais sutilezas.

Apesar de apresentar muitas características interessantes (em especial a de conseguir, ainda que parcialmente, formular uma teoria quântica da gravitação sem qualquer menção a uma métrica de fundo) a GQL, assim como a Teoria de Cordas, também está longe de poder dizer que teve sucesso na sua empreitada de quantizar a gravitação. Um dos pontos fracos dessa formulação é que, para que se realize a quantização pelo Método Canônico, a teoria supõe a topologia do espaço-tempo da forma  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , em que  $\Sigma$  é o espaço e  $\mathbb{R}$  o tempo. Há, então, um conjunto de vínculos que geram a invariância da teoria sob difeomorfismos em  $\Sigma$ , e o vínculo Hamiltoniano, que está associado à invariância de difeomorfismos em  $\mathbb{R}$  (ou seja, como esperado, o vínculo Hamiltoniano gera a evolução temporal do sistema). Ora, mas, como apontado por [20], a essência da Relatividade Geral é possuir invariância sob difeomorfismos em todo o *espaço-tempo*, não meramente sob difeomorfismos espaciais ou temporais vistos separadamente.

Além disso, não se sabe se o limite semi-clássico da GQL é consistente com a Relatividade Geral clássica, um pré-requisito básico a qualquer candidato à teoria quântica da gravitação, e tampouco sabe-se como acoplar a matéria ao campo gravitacional de maneira a se recuperar o Modelo Padrão num limite apropriado [9].

---

<sup>9</sup>Claro que essa intuição pode estar errada.

Pode-se ver, dessas duas breves discussões, que alguns problemas apresentados pela Teoria de Cordas é resolvido na GQL, ao que se paga o preço de deixar em aberto algumas outras questões que a Teoria de Cordas consegue resolver. Há, ainda, outras tentativas de se quantizar a gravitação, entre as quais podemos mencionar as propostas de se postular uma geometria não-comutativa [24], isto é, tal que  $[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] \neq 0$ , o que, pela equação 2.4, implica numa incerteza mínima nas medidas de (pelo menos) uma das coordenadas espaço-temporais. Ou seja, também essa abordagem à quantização da gravitação leva à existência de um comprimento mínimo<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup>Na verdade, em [24] é a existência de um comprimento mínimo, da qual podemos nos convencer pelos argumentos qualitativos que apresentamos acima, que motiva os autores a postular uma não-comutatividade entre as coordenadas  $x_\mu$ .

## Capítulo 4

# Comprimento Mínimo na Mecânica Quântica

O capítulo anterior teve como objetivo apresentar alguns argumentos mostrando que a existência de um *comprimento mínimo* é inevitável a uma teoria de gravitação quântica. Agora vamos deixar de lado essas discussões sobre a existência ou a(s) origem(ns) desse efeito para, em vez disso, admitindo-o como existente, examinarmos algumas de suas consequências.

Para isso, propomos uma modificação no formalismo da Mecânica Quântica de maneira a introduzir uma imprecisão mínima não-nula na localização de um sistema — isto é, introduzir um  $\Delta x_{min} > 0$  tal que,  $\forall |\psi\rangle, \langle\psi|(\Delta\hat{X})^2|\psi\rangle \geq (\Delta x_{min})^2$  — que, por ser um limite à resolução que se pode ter do espaço, age como um comprimento mínimo.

Essa proposta exige uma modificação da Relação de Incerteza de Heisenberg (2.5), visto que aí  $\Delta x$  pode ser arbitrariamente próximo de zero. A modificação dessa relação de incerteza, por sua vez, requer uma modificação na álgebra dos operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , o que implica na necessidade de se rever toda a construção da Mecânica Quântica exposta no Capítulo 2, onde se teve por fundamento a álgebra de Heisenberg (equação (2.2)).

Pretende-se com isso entender ao menos o comportamento fenomenológico de um sistema quântico na presença de um comprimento mínimo, e, talvez ainda mais impor-

tante, investigar quais conceitos têm ou deixam de ter significado físico na presença desse efeito, o que pode ser mantido e o que precisa ser modificado para que não se caia em contradições.

## 4.1 Álgebra de Heisenberg Modificada

Tomaremos como ponto de partida uma modificação das relações de comutação entre  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , dando origem ao que chamaremos de Álgebra de Heisenberg Modificada. Em [25] os autores consideraram uma relação de comutação da forma

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2) , \quad (4.1)$$

que dá origem a uma relação de incerteza da forma que se propõe em [12, 13] até primeira ordem do parâmetro que está relacionado ao comprimento mínimo. Enfatizamos, contudo, que essa relação de comutação despreza possíveis termos extras que podem vir a existir, de ordem  $\beta^2$  ou superior, nessa relação de incerteza efetiva. Por outro lado, em [26] os autores partem de uma modificação da relação entre vetor de onda e momento linear da partícula da forma

$$\hbar k(p) = \int_0^p e^{-\beta q^2} dq . \quad (4.2)$$

para mostrar que a presença de um comprimento mínimo atua como um efeito regularizador no cálculo da energia de Casimir.

A proposta do presente trabalho é tentar unir essas duas abordagens com uma relação de comutação que em primeira aproximação forneça (4.1) e que tenha como resultado a relação (4.2). Para que isso seja satisfeito escolhemos a álgebra dada por

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar e^{\beta\hat{P}^2} . \quad (4.3)$$

O uso da expressão “escolher a álgebra” não é inapropriado, uma vez que não há dados experimentais disponíveis sobre o eventual comportamento da natureza na presença



de um comprimento mínimo que possam servir como guia na elaboração de modelos efetivos que envolvam esse efeito, como é o caso presente. Para essa investigação experimental são necessários experimentos que envolvam energias, na melhor das hipóteses [27], da ordem de  $10^0$  Tev, escala de energia ainda pouco explorada pelos aceleradores de partículas modernos<sup>1</sup>. Essa escolha da álgebra é, a princípio, limitada apenas pela exigência de que satisfaça ao objetivo de introduzir um comprimento mínimo no formalismo, o que já é o suficiente para análises qualitativas como as que se pretende fazer aqui. Para ver que a proposta acima satisfaz essa condição basta notar que a relação de incerteza daí advinda é (de acordo com (2.4))

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \langle e^{\beta \hat{P}^2} \rangle . \quad (4.4)$$

A chamada Desigualdade de Jensen [29] garante que, para uma função real convexa  $\phi$ , vale  $\langle \phi(\hat{X}) \rangle \geq \phi(\langle \hat{X} \rangle)$ . Como  $e^{x^2}$  é convexa segue-se que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} e^{\beta \langle \hat{P}^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} e^{\beta \langle \hat{P} \rangle^2} e^{\beta (\Delta p)^2} . \quad (4.5)$$

A função

$$f(\Delta p) = \frac{e^{\beta \Delta p^2}}{\Delta p}$$

possui mínimo dado por  $\sqrt{2\beta e}$ , logo

$$\Delta x \geq \hbar \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{e}{2}} e^{\beta \langle \hat{P} \rangle^2} \geq \hbar \sqrt{\beta} \sqrt{\frac{e}{2}} , \quad (4.6)$$

donde se segue que (4.3) de fato implica na existência de um  $\Delta x_{min} > 0$ .

---

<sup>1</sup>Em 2001 o Tevatron alcançou a marca de 0.98 Tev para cada feixe de prótons acelerado, possibilitando, assim, que se alcançasse até aproximadamente 2 Tev numa colisão frontal entre eles. Somente no final do ano de 2009 essa marca foi superada pelo LHC, que conseguiu acelerar um feixe de prótons a 1.18 Tev, o que, no entanto, manteve em aproximadamente 2 Tev a energia alcançada numa colisão. Em Março de 2010 o LHC anunciou ter alcançado a marca de 3.5 Tev para cada feixe, mas a data para uma colisão, que alcançaria até 7 Tev, ainda está para ser anunciada [28].

## 4.2 Espaço de Hilbert

O próximo passo no (re)desenvolvimento do formalismo é a construção do Espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  ao qual pertencem os vetores que representam os estados físicos.

A primeira consequência de existir um  $\Delta x_{min}$  é a inexistência da representação  $|x\rangle$  para esse espaço vetorial. Isso porque, primeiramente, como todo estado físico deve satisfazer  $\Delta x \geq \Delta x_{min}$ , os autovetores do operador  $\hat{X}$  (para os quais, por definição,  $\Delta x = 0$ ) claramente não podem estar em  $\mathcal{H}$ . Isso acontecia também na MQ tradicional, mas, como exposto na seção 2.3, aí o problema podia ser contornado definindo-se um limite de estados  $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Aqui nem mesmo isso é possível pois  $\Delta x$  não pode ser menor que  $\Delta x_{min}$ , logo, não pode aproximar-se arbitrariamente de zero.

Na ausência da representação  $|x\rangle$  a alternativa mais simples é utilizar a representação no espaço dos momentos  $|p\rangle$ , que ainda é válida na álgebra aqui proposta<sup>2</sup>.

A atuação dos operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  nessa representação passa a ser

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\psi(p), \tag{4.7}$$

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar e^{\beta p^2} \frac{\partial}{\partial p} \psi(p),$$

tendo aparecido o fator exponencial na definição de  $\hat{X}$  para que a relação de comutação (4.3) seja, de fato, satisfeita. Para que  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  sejam hermiteanos define-se o produto interno entre dois vetores por

$$\langle \phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p^2} \phi^*(p)\psi(p)dp, \tag{4.8}$$

de onde se vê que a medida de integração no espaço dos momentos é modificada, i.e.,

$$dp \rightarrow e^{-\beta p^2} dp.$$

---

<sup>2</sup>Na ausência de ambas representações,  $|x\rangle$  e  $|p\rangle$ , devido a uma incerteza mínima também no momento linear, uma alternativa é trabalhar com a representação (bem mais complicada) de Bargmann-Fock. Um estudo detalhado desse caso foi realizado em [30].

Essa modificação não é inesperada. A existência de um comprimento mínimo implica numa limitação superior ao número de onda  $k$  de uma onda qualquer (porque há um limite inferior ao seu comprimento de onda), de maneira que qualquer integral no espaço de  $k$  tem limites de integração finitos. O mesmo não acontece no espaço dos momentos, que é ilimitado. Portanto uma mudança de variável de integração de  $k$  para  $p$  deve ter como Jacobiano uma função decrescente em  $p$  que compense essa diferença nos limites de integração, mantendo o resultado da integral inalterado. Em outras palavras, devido à existência de um comprimento mínimo a relação entre  $k$  e  $p$  deixa de ser linear (pois deve-se ter  $k \rightarrow \text{constante}$  quando  $p \rightarrow \infty$ ), fazendo com que o Jacobiano da transformação de variáveis  $k \rightarrow p$ , dado por  $|\partial k/\partial p|$ , deixe de ser constante. Se a álgebra proposta em (4.3) alcançar o objetivo de fornecer a relação (4.2), como veremos que de fato ocorre, esse Jacobiano será exatamente o fator  $e^{-\beta p^2}$ .

Ter que encontrar outra representação para o espaço de estados não é, no entanto, a única dificuldade a ser superada. Como os vetores  $|x\rangle$  deixam de formar uma base de  $\mathcal{H}$  o operador  $\hat{X}$  perde sua condição de observável, embora ainda seja hermiteano. Isso imediatamente levanta questões como: qual é o significado da expressão *medida da posição* (de uma partícula ou um sistema qualquer) nesse formalismo (se é que ainda tem algum, uma vez que o operador associado a uma grandeza mensurável deve ser um observável)? E como recuperar informações sobre a propagação de um certo sistema no espaço? Por exemplo, como calcular a probabilidade de se encontrar uma partícula numa certa região espacial? Na MQ tradicional essa probabilidade é calculada por meio do produto escalar de um vetor  $|x\rangle$  com o vetor que descreve o estado do sistema, prescrição que obviamente não é aplicável no formalismo presente.

Essas perguntas não podem ser simplesmente ignoradas, deixadas sem respostas, por quatro motivos principais. Primeiro, porque o formalismo que agora desenvolvemos deve se reduzir ao formalismo exposto no Capítulo 2 quando  $\beta \rightarrow 0$ , e, portanto, deve haver aqui alguma noção de localização espacial que, nesse limite, se reduza à definição dada na seção 2.3. Em segundo lugar, como já enfatizado naquela seção, uma teoria quântica que não responda a essas questões fornece uma descrição incompleta dos sistemas que são alvo de seu estudo. Além disso, já nos referimos por diversas

vezes anteriormente ao valor de  $\Delta x$  associado a cada estado físico, que, inclusive, têm aqui importância crucial por ser por meio de um  $\Delta x_{min}$  que surge o comprimento mínimo no formalismo; logo, é necessário garantir que tais  $\Delta x$  ainda existam, que façam sentido mesmo quando  $\hat{X}$  deixa de ser observável, e, mais ainda, que se entenda seu significado físico nesse caso. Por fim, porque entender algumas dessas mudanças conceituais impostas pela existência de um comprimento mínimo é precisamente um dos objetivos deste trabalho.

Para responder a essas questões, vamos, antes, introduzir o importante conceito de *Estado de Máxima Localização*.

### 4.3 Estados de Máxima Localização

Um Estado de Máxima Localização nada mais é que um estado físico para o qual  $\Delta x = \Delta x_{min}$ . Para que isso ocorra (4.4) deve ser uma igualdade, por isso vamos primeiro determinar a forma dos estados  $|\psi\rangle$  que obedecem a essa condição, e que são, por isso, generalizações do pacote de onda Gaussiano da MQ tradicional. Como já visto na seção 2.4 a relação de incerteza (4.4) é uma igualdade quando<sup>3</sup>

$$\left[ \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{i\hbar \langle e^{\beta \hat{P}^2} \rangle}{2\langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right] |\psi\rangle = 0 . \quad (4.9)$$

Como (4.4) é uma igualdade, pode-se escrever

$$\frac{\langle e^{\beta \hat{P}^2} \rangle}{2(\Delta p)^2} = \frac{\Delta x}{\hbar \Delta p} .$$

Assim, projetando em  $\langle p|$  e levando em conta (4.7) tem-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \left[ -\frac{i\langle \hat{X} \rangle}{\hbar} + \frac{\Delta x}{\hbar \Delta p} \langle \hat{P} \rangle \right] e^{-\beta p^2} \psi - \frac{\Delta x}{\hbar \Delta p} p e^{-\beta p^2} \psi ,$$

---

<sup>3</sup>Cf. eq. (2.9)

cuja solução é

$$\psi_{Gauss}(p) \propto e^{-ik\langle\hat{X}\rangle} \exp \left[ \frac{\Delta x}{\hbar\Delta p} \left( \frac{e^{-\beta p^2} - 1}{2\beta} + \hbar k \langle\hat{P}\rangle \right) \right], \quad (4.10)$$

onde

$$\hbar k(p) = \int_0^p e^{-\beta q^2} dq .$$

Com isso podemos determinar a função de onda do Estado de Máxima Localização  $|\psi_\xi^{ml}\rangle$ , definido por

$$\begin{aligned} \langle\psi_\xi^{ml}|\Delta\hat{X}^2|\psi_\xi^{ml}\rangle &= \Delta x_{min}^2 \\ \langle\psi_\xi^{ml}|\hat{X}|\psi_\xi^{ml}\rangle &= \xi . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tal estado é um caso particular de  $\psi_{Gauss}$  quando  $\Delta x = \Delta x_{min}$ , que, como se vê em (4.6), ocorre quando  $\langle\hat{P}\rangle = 0$ . Assim, tem-se

$$\psi_\xi^{ml}(p) \propto e^{-ik\xi} \exp \left( \frac{\Delta x_{min}}{\hbar\Delta p^{min}} \frac{e^{-\beta p^2} - 1}{2\beta} \right), \quad (4.12)$$

onde  $\Delta p^{min}$  é o valor de  $\Delta p$  que minimiza  $\Delta x$ <sup>4</sup>.

A equação 4.12 é a função de onda que procurávamos, que representa um Estado de Máxima Localização em torno de  $\xi$ . O fator oscilatório,  $e^{-ik\xi}$ , tem a mesma forma de uma onda plana, o que nos habilita a interpretar  $k$  como um vetor de onda, mas com a relação entre  $k$  e  $p$  sendo dada pela equação (4.2). Cumpre-se, assim, o objetivo de recuperar a relação que em [26] é *postulada* como ponto de partida para a introdução de um comprimento mínimo no formalismo.

Com essa expressão para  $k(p)$  pode-se ainda estimar uma relação entre  $\Delta x_{min}$  e o parâmetro  $\beta$ , notando, primeiramente, que quando  $p \rightarrow \infty$  o comprimento de onda  $\lambda$

---

<sup>4</sup>A notação é admitidamente ruim, pois pode induzir o leitor ao erro, levando-o a interpretar este  $\Delta p^{min}$  como o valor mínimo da incerteza dos momentos, o que não é o caso. Mantivemo-a, no entanto, por não termos encontrado uma melhor.

de uma onda qualquer aproxima-se de um  $\lambda_{min}$  tal que

$$\frac{2\hbar\pi}{\lambda_{min}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hbar k(p) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\beta q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}}.$$

Claro que este  $\lambda_{min}$  deve ser maior que o comprimento mínimo  $\Delta x_{min}$ , logo

$$\Delta x_{min} \leq \lambda_{min} = 4\hbar\sqrt{\pi\beta}.$$

Daí e de (4.6) segue-se que

$$\sqrt{\frac{e}{2}} \leq \frac{\Delta x_{min}}{\hbar\sqrt{\beta}} \leq 4\sqrt{\pi}, \quad (4.13)$$

donde

$$\Delta x_{min} = a\hbar\sqrt{\beta},$$

com

$$1,17 \approx \sqrt{\frac{e}{2}} \leq a \leq 4\sqrt{\pi} \approx 7,09,$$

ou seja,  $a \sim 1$ .

Esses estados de máxima localização,  $|\psi_{\xi}^{ml}\rangle$ , são os estados que mais se aproximam, na presença de um comprimento mínimo, dos autoestados  $|\xi\rangle$  do operador posição na MQ tradicional, como se pode constatar pela sua definição. Mais precisamente, na seção 2.3 definimos  $|\xi\rangle$  por um limite de estados  $|\xi^{\Delta x}\rangle$  quando  $\Delta x$  se aproxima de seu valor mínimo, que é, naquele caso, 0. Aqui,  $|\psi_{\xi}^{ml}\rangle$  pode também ser visto como um tal limite, mas agora com o valor mínimo de  $\Delta x$  dado por  $\Delta x_{min}$ .

É fácil ver que, quando  $\beta \rightarrow 0$ , (4.12) tende a (2.13), como esperado.

## 4.4 Discussões

É essa analogia entre os autovetores do operador  $\hat{X}$  na MQ tradicional e os Estados de Máxima Localização nessa MQ modificada que torna estes últimos úteis para responder às perguntas postas na seção 4.2, tarefa a que nos dedicamos agora.

O primeiro problema conceitual, e mais fundamental, refere-se ao significado da

expressão “medir uma posição” na presença de um comprimento mínimo. Vamos investigá-lo mais a fundo para entender onde reside a dificuldade.

Na MQ tradicional, medir a posição de um sistema é perturbá-lo de modo que seu estado, após a perturbação, pertença ao subespaço

$$\bigcup_{x \in I_{x_0}^{\delta x}} \mathcal{H}_x$$

( $\mathcal{H}_x$  é o subespaço gerado pelos autovetores associados ao autovalor  $x$ ). Diz-se, então, que o valor medido é  $x_0$  com resolução  $\delta x^{-1}$ . Essa resolução é sempre finita, embora possa tender a infinito. O projetor associado a essa medida é, na hipótese de que o aparato é um “filtro perfeito” e de que os autovalores  $x$  são não-degenerados, dado por

$$\hat{P}_{x_0}^{\delta x} = \int_{x_0 - \frac{\delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\delta x}{2}} |x\rangle\langle x| dx. \quad (4.14)$$

Duas coisas mudam quando se acrescenta um comprimento mínimo no formalismo: os autovetores de  $\hat{X}$  deixam de estar em  $\mathcal{H}$ , e surge uma resolução máxima a essa medida (pois existe um  $\delta x_{min}$ ).

A primeira modificação já basta para invalidar completamente a definição de medida da posição dada acima: não existem mais subespaços  $\mathcal{H}_x$ , não existe mais o projetor (4.14), não existem mais medidas que forneçam os autovalores de  $\hat{X}$  como resultado. Logo, deve-se utilizar uma outra definição que não envolva esses conceitos.

Ora, na seção 2.4 apresentamos uma outra interpretação de uma medida com resolução insuficientemente seletiva, que não envolve diretamente esses conceitos e, por isso, pode ser generalizada para o caso com que lidamos agora. Trata-se de definir que medir a posição do sistema com a máxima resolução possível ( $\delta x_{min}^{-1}$ ) significa fazê-lo interagir com um aparato propriamente regulado para indicar se essa interação se deu numa região espacial pré-determinada, centrada em  $\xi$  e de largura  $\delta x_{min}$ , ou não<sup>5</sup>. Em caso positivo, a perturbação faz o sistema colapsar para o respectivo Estado de Máxima

---

<sup>5</sup>Para uma interpretação semelhante a essa, generalizada para o caso covariante (isto é, em que a interação da partícula com o detector não se dá numa região espacial, mas *espaço-temporal*, isto é, considerando-se também uma incerteza mínima nas medidas de intervalo de tempo) ver [31].

Localização,  $|\psi_\xi^{ml}\rangle$ , e o projetor associado a esse resultado é

$$\hat{P}_\xi^{ml} = |\psi_\xi^{ml}\rangle\langle\psi_\xi^{ml}|. \quad (4.15)$$

Alternativamente, podemos dizer que fazer tal medição significa perturbar o sistema de maneira que ele colapse a  $|\psi_\xi^{ml}\rangle$ , para algum  $\xi \in \mathbb{R}$ . Diz-se, então, que o resultado da medida é  $\xi$ , isto é, que a partícula localiza-se neste ponto (dentro da máxima precisão com que isso pode ser dito); ou, mais precisamente, que ela se localiza numa região espacial centrada em  $\xi$  com largura  $\Delta x_{min}$ .

A rigor não podemos dizer que isso é uma medida pois não apresentamos um observável a ela associado. Mas, num sentido menos estrito, certamente podemos considerá-la como tal, pois trata-se de um procedimento que nos dá alguma informação sobre a localização do sistema. E isso é, na verdade, tudo o que procurávamos.

Sob um aspecto, esse procedimento está ainda melhor definido do que a prescrição da MQ tradicional. É que, como já discutido na seção 2.4, a forma do projetor (4.14) é fisicamente incorreta, podendo até mesmo implicar no absurdo de a função de onda colapsada após a medida ser descontínua, como está ilustrado na Fig. 2.1. Na ocasião, afirmamos que uma expressão mais correta para esse projetor, que evitaria tal descontinuidade, seria

$$\hat{P}_{x_0}^{\delta x} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\delta x}(x')|x'\rangle\langle x'|dx',$$

em que  $C_{\delta x}$  é uma função com pico em  $x_0$  e que é aproximadamente zero quando  $|x' - x_0| \gtrsim \frac{\delta x}{2}$ , mas que, fora isso, tem a forma exata indeterminada. Já no caso presente evitamos toda essa dificuldade, pois a função de onda após a medida feita com resolução máxima é  $\psi_\xi^{ml}$ , que é contínua.

Com os Estados de Máxima Localização pode-se ainda calcular a probabilidade de um sistema qualquer, cujo estado é descrito por  $|\psi\rangle$ , encontrar-se localizado em torno de  $\xi$  caso seja feita uma medida de sua posição com a máxima resolução possível (no sentido que demos acima a essa expressão). Essa probabilidade é, claro, dada por

$$\mathcal{P}_\xi^{ml} = |\langle\psi_\xi^{ml}|\psi\rangle|^2,$$



e constitui outra maneira de se saber como esse sistema se encontra distribuído no espaço.

Por fim, uma outra maneira de se recuperar informações sobre essa distribuição espacial do sistema é por meio dos valores médios calculados a partir do operador  $\hat{X}$ , como  $\langle \hat{X} \rangle$  e  $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle$ . Porque, na presença de um comprimento mínimo, este operador deixa de ser um observável, e como deixa de existir uma medida da posição do sistema realizada com uma resolução arbitrariamente grande, pode-se imaginar que esses valores médios não estejam bem definidos no formalismo presente. De fato, pelas suas definições parece que o cálculo desses valores médios envolve um processo de medida da posição do sistema<sup>6</sup>; no entanto, ao escrevê-los vetorialmente, isto é, de maneira explicitamente independente da base escolhida para  $\mathcal{H}$ , vê-se que eles são dados por

$$\begin{aligned}\langle \hat{X} \rangle &= \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle \\ \langle \Delta \hat{X}^2 \rangle &= \langle \psi | (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)^2 | \psi \rangle,\end{aligned}\tag{4.16}$$

e que, portanto, dependem tão somente dos elementos de matriz do operador  $\hat{X}$ , sendo, assim, independentes do fato de ele ser um observável ou não, de seus autovetores formarem ou não uma base do espaço.

Isso garante que ainda é possível calcular esses valores médios. Mas e quanto às suas interpretações? Ora, embora  $\hat{X}$  perca sua condição de observável, isso não afeta em nada a sua interpretação física de operador associado à posição do sistema. Só o que muda é que essa grandeza deixa de ser mensurável, no sentido estrito dado pelos postulados da teoria. Portanto, os valores médios calculados em (4.16) ainda estão relacionados à forma como o sistema se distribui no espaço. É claro que  $\langle \hat{X} \rangle$  não pode ser interpretado como a média dos valores obtidos numa série de medidas da posição, nem  $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle$  pode ser associado ao desvio médio padrão dessas medidas. Mas podemos interpretá-los num sentido menos estatístico e mais geométrico, associando

---

<sup>6</sup>Por definição, o valor médio de um operador  $\hat{A}$  é a média ponderada de seus autovalores, em que os pesos são o número de vezes que cada autovalor foi obtido numa série de medidas da grandeza associada a  $\hat{A}$ . Ver [2], p.227.

$\langle \hat{X} \rangle$  ao ponto do espaço em torno do qual se concentra a função de onda do sistema, e  $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle$  a uma medida do quanto essa função de onda está espalhada em torno desse ponto.

A existência de um  $\Delta x_{min}$  garante, então, que a função de onda de um estado físico nunca está arbitrariamente concentrada em torno de um único ponto, o que está de acordo com a interpretação que demos a esse  $\Delta x_{min}$  no começo desse capítulo, quando dissemos que ele exerce o papel de uma resolução máxima finita da localização espacial de um sistema qualquer.

# Capítulo 5

## Conclusão

A noção de que as partículas são pontuais e localizadas exatamente num ponto do espaço sempre carregou consigo divergências, mesmo nas teorias clássicas. O campo gravitacional gerado por uma partícula pontual, por exemplo, diverge naquele ponto em que a partícula se encontra (tanto na gravitação Newtoniana quanto na Relatividade Geral). Na Mecânica Quântica isso não é diferente, mas pode ser ainda mais grave, pois as divergências que surgem por essa causa podem se fazer presentes em todos os cálculos, tornando a teoria inútil por não se poder retirar dela nenhuma previsão, nenhum resultado.

No Capítulo 2 mostramos que um autovetor do operador  $\hat{X}$ , que representa uma partícula localizada precisamente num ponto do espaço, não é um estado físico, não está no espaço de Hilbert da teoria porque sua norma é infinita (divergente!). Aí, no caso não-relativístico, o problema pode ser contornado, *remendado*, sem causar maiores transtornos, como fizemos na seção 2.3: substitui-se os autovetores  $|\xi\rangle$  de  $\hat{X}$  por estados  $|\xi^{\Delta x}\rangle$  aproximadamente localizados em torno de  $\xi$ , efetua-se as contas com esses estados (que, esses sim, são estados físicos), e, em seguida, toma-se o limite do resultado obtido quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , isto é, quando esses estados tendem a estarem exatamente localizados naquele ponto do espaço. Dizemos que isto apenas remenda, mas não resolve definitivamente o problema, porque, embora se reconheça que ele seja causado pela noção de um estado exatamente localizado num ponto, essa noção não é abandonada em nenhum momento; ao contrário, o último passo dessa prescrição é

justamente tomar um limite em que se retoma o caso pontual.

Essa “solução” não só não ataca as raízes do problema, como, ainda pior, esconde-o sob uma aparência de cálculos bem-definidos, de maneira que se mantém como possível a ideia de uma localização espacial arbitrariamente precisa. Com isso, as mesmas causas dão origem a um novo problema, dessa vez sob a forma das divergências que infestam a Teoria de Campos. De fato, em [32] o autor sugere que essas divergências surgem porque os propagadores da teoria são dados por  $G(x, x') = \langle x | \hat{G} | x' \rangle$ , ou seja, são obtidos avaliando-se um certo operador entre autovetores que representam partículas localizadas *exatamente* num certo ponto. Em outras palavras, significa supor que as divergências da teoria ocorrem por se considerar a interação dos campos como locais, ocorrendo em um ponto do espaço-tempo.

Como já mencionamos, alguns métodos de renormalização conseguem resolver essas divergências, e de modo análogo ao que fizemos na seção 2.3, a saber, considerando-se que há um limite a essa localizabilidade da interação (isto é, considerando-se a existência de um *cut-off* nos comprimentos de onda dos campos), efetuando-se as contas, e em seguida tomando-se o limite em que essa localizabilidade tende a infinito. Novamente o problema não é resolvido, mas remendado, e, claro, novamente surge outro problema: desta vez com a interação Gravitacional, que mostra-se incompatível com esse tipo de prescrição, sendo, portanto, *não-renormalizável*.

Por outro lado, a inclusão da Gravitação no formalismo da Teoria Quântica traz inúmeros indícios da existência de um comprimento mínimo, de uma inerente não-localizabilidade de um sistema qualquer no espaço-tempo.

Neste trabalho propusemos a introdução de um comprimento mínimo no formalismo da Mecânica Quântica por meio de um  $\Delta x_{min} > 0$ . Como consequência, o estado maximalmente localizado em torno de um ponto  $\xi$ , dado por  $|\psi_{\xi}^{ml}\rangle$ , deixa de ser um autovetor de  $\hat{X}$ , deixa de descrever um sistema localizado *exatamente* nesse ponto. Assim, os problemas anteriores são atacados nas suas origens e são, por isso, solucionados (não apenas contornados, como antes). Se calcularmos os propagadores da Teoria de Campos avaliando um operador não entre autovetores de  $\hat{X}$ , estados exatamente localizados num ponto, mas sim entre estados de máxima localização — em outras

palavras, se definirmos  $G(\xi, \xi') = \langle \psi_{\xi}^{ml} | \hat{G} | \psi_{\xi'}^{ml} \rangle$  — ter-se-á uma teoria de campos em que as interações não ocorrem exatamente num ponto, mas numa certa região espacial (de largura  $\Delta x_{min}$ , num caso unidimensional), e espera-se, então, que a teoria seja livre de divergências ultravioletas.

Em [30] mostrou-se que de fato é isso o que acontece: a presença de um comprimento mínimo no formalismo da Teoria Quântica de Campos tem como consequência uma regularização natural da teoria para o caso do campo escalar com auto-interação do tipo  $\phi^4$ , isto é, não ocorrem divergências nos cálculos dos diagramas de Feynman em nenhuma ordem da expansão!

*Assim, é interessante notar que a tentativa de se conciliar a interação gravitacional com os princípios da Teoria Quântica, ao invés de dar origem a uma teoria com divergências incuráveis, como parece acontecer à primeira vista, acaba indicando-nos a solução derradeira de todas as divergências anteriores. A Gravitação Quântica não é uma teoria quântica não-renormalizável, mas, antes, uma teoria que dispensa renormalizações.*

Vale ainda notar que a introdução de um comprimento mínimo universal  $\ell_{min}$ , conforme proposto neste trabalho, entra em conflito com os princípios e consequências da teoria da Relatividade Restrita. De fato, se existe um comprimento mínimo  $\ell_{min}$  então o Princípio da Relatividade garante que ele é observado em quaisquer dois referenciais inerciais  $S, S'$ . Por outro lado, suponhamos que um certo objeto, em repouso com relação a  $S$ , tenha comprimento próprio  $\ell_{min}$ , e seja  $S'$  um referencial que se move uniformemente com relação a  $S$ . Devido à contração de Lorentz-Fitzgerald o comprimento desse objeto visto por  $S'$  é  $\ell < \ell_{min}$ , o que é absurdo pois  $\ell_{min}$  é um comprimento mínimo em  $S'$ !

Surgem, então, três possibilidades: (i) supor que a existência deste efeito implica na existência de referenciais inerciais privilegiados; (ii) descartar a hipótese da existência de um comprimento mínimo; (iii) tentar modificar a estrutura da Relatividade Restrita para conciliá-la com a existência de uma escala de comprimento universal.

A primeira alternativa é a menos desejável: a universalidade da Física reside no

princípio de que as leis estabelecidas para um referencial (inercial, no caso de interesse aqui) valem igualmente para todos os demais. Violar esse princípio, estabelecendo um referencial privilegiado, seria um retrocesso. É aconselhável, antes, tentar resolver a contradição de outra maneira.

A segunda opção parece plausível: como esse efeito nunca foi verificado experimentalmente e, ainda por cima, contradiz uma teoria bem estabelecida, por que não descartá-lo? Felizmente essa metodologia positivista (consequentemente simplista) nem sempre é seguida à risca pelos pesquisadores. Há motivos (puramente teóricos, diga-se de passagem) para se buscar uma teoria quântica da gravitação, que unifique os princípios da Mecânica Quântica e a Relatividade Geral, e há indícios convincentes de que essa unificação leva à existência de um comprimento mínimo; portanto, antes de descartá-lo tão rapidamente, é conveniente testar outras possibilidades. Ademais, pode-se imaginar que as transformações de Lorentz sejam apenas uma aproximação, a baixas energias, de outras transformações mais fundamentais que resolvem a contradição, mas que, pelo fato de nosso alcance experimental ainda estar nessa região de baixas energias, não observamos experimentalmente correções a essas transformações.

Isso nos leva à terceira possibilidade: modificar a Relatividade Restrita de maneira a resolver a contradição, sem abrir mão do Princípio da Relatividade e da existência do comprimento mínimo. Em [33, 34] mostrou-se que essa possibilidade existe, que é possível acrescentar aos dois postulados da Relatividade Restrita (Princípio da Relatividade e Invariância da velocidade da luz  $c$ ) um terceiro, postulando a existência de outra escala universal com dimensão de comprimento, para a qual todos os observadores inerciais medem o mesmo valor  $\ell_{min}$ , sem, com isso, cair em contradições. Essa conciliação parece, à primeira vista, absurda, pois os dois postulados da Relatividade Restrita bastam para se deduzir as transformações de Lorentz, que, como já visto, não são compatíveis com a existência de um comprimento universal. Essa dificuldade de fato existe, mas é resolvida em [33] postulando-se que a velocidade da luz depende de seu comprimento de onda  $\lambda$ , e que a velocidade  $c$  da Relatividade Restrita é apenas um limite de  $c(\lambda)$  quando  $\lambda/\ell_{min} \rightarrow \infty$ , ou seja, para comprimentos de onda muito maiores que o comprimento mínimo.

Para maiores detalhes o leitor é referido aos artigos originais já citados. O interessante a se notar aqui é que é possível conciliar os princípios da Relatividade Restrita e a existência de um comprimento mínimo, formulando uma teoria da Relatividade modificada (batizada de Relatividade Duplamente Especial<sup>1</sup>, por conter duas escalas universais,  $c$  e  $\ell_{min}$ ), de modo que não é preciso abrir mão nem da existência do comprimento mínimo nem do Princípio da Relatividade<sup>2</sup>.

Para finalizar essa questão, ressalta-se que o mesmo problema não ocorre na Gravitação Quântica de Laços. Aí, um comprimento mínimo aparece devido ao espectro de um operador Área (ou Volume) ser discreto e, porque tais operadores são invariantes sob difeomorfismo, têm o mesmo espectro em qualquer referencial. O que muda de um referencial para outro é apenas a probabilidade de se obter um certo auto-valor desses operadores, mas o valor mínimo permanece o mesmo [36].

Uma crítica que pode ser feita à proposta apresentada nesse trabalho é que os efeitos de um comprimento mínimo só devem aparecer a energias muito altas, num limite no qual a Mecânica Quântica não-relativística (com a qual lidamos aqui) já não é mais válida, de modo que, para sermos consistentes, deveríamos ter proposto uma modificação no formalismo da Teoria Quântica de Campos. Essa crítica tem fundamento, e é tanto mais concreta quanto maior for o nosso interesse em averiguar aspectos fenomenológicos e/ou até mesmo alguns resultados quantitativos de uma teoria na presença de um comprimento mínimo. No entanto, o caminho tomado por nós neste trabalho tem a vantagem de explicitar de maneira simples as inúmeras modificações *conceituais* que devem ser levadas em conta para manter a coerência do formalismo, de modo que, por estarmos agora cientes dessas sutilezas (nem um pouco triviais!) podemos, com mais segurança, propor uma modificação da Teoria Quântica de Campos análoga à que

---

<sup>1</sup>Em inglês, *Doubly Special Relativity*.

<sup>2</sup>Mais uma vez, vale ressaltar o quanto esse procedimento vai de encontro aos princípios do suposto “método científico” positivista. Trata-se, aqui, de modificar uma teoria empiricamente (muito!) bem sucedida, sem que haja quaisquer outros resultados experimentais que contradigam as suas previsões. Ao contrário, o que exige essa modificação são argumentos puramente teóricos que, por sua vez, também não têm ainda qualquer comprovação experimental (pois não há qualquer evidência experimental da existência de um comprimento mínimo)! E, graças a isso, a ciência progride. Sobre essa questão, ver [35].

fizemos aqui.

Mais do que isso, obtivemos aqui não só modificações conceituais impostas pela existência de um comprimento mínimo, mas também modificações na própria estrutura das Teorias Quânticas de Campos e nos métodos matemáticos aí utilizados. Por exemplo, como vimos logo acima não se pode mais esperar que a teoria tenha invariância de Poincaré, senão numa primeira aproximação, e tampouco é fisicamente correto expandir os campos como combinações lineares de ondas planas, ou avaliar o propagador entre autoestados do operador  $\hat{X}$ . Para substituir essas ondas planas e esses autovetores, estados de máxima localização como os que calculamos aqui devem ser utilizados.

Neste trabalho restringimo-nos ao caso unidimensional. Para o caso tridimensional uma modificação da relação de comutação entre  $\hat{X}_i$  e  $\hat{P}_j$  análoga a apresentada por nós em (4.3) tem como consequência a não comutatividade de  $\hat{X}_i$  e  $\hat{X}_j$  (para  $i \neq j$ ), o que mostra que a proposta deste trabalho está intimamente associada às propostas de se quantizar da gravitação partindo de uma *geometria não-comutativa*, como em [24].

Por fim enfatizamos que, ao modificarmos as relações de comutação entre  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  para incluir na teoria um comprimento mínimo, não temos qualquer pretensão de estarmos, com isso, sequer nos aproximando de uma quantização da gravitação. A interação gravitacional é tão peculiar que certamente a sua teoria quântica deve ser formulada com um ferramental matemático muito diferente do utilizado na Mecânica Quântica não-relativística com que trabalhamos aqui. Nosso objetivo é apenas investigar as consequências da existência de um comprimento mínimo na Mecânica Quântica. Todas essas consequências, e ainda outras, devem ser obtidas da Teoria da Gravitação Quântica, quando esta estiver pronta. Como este ainda não é o caso, nossas investigações ainda têm razão de existir.

Tendo desenvolvido esse formalismo, algumas propostas de trabalhos posteriores são estendê-lo à Teoria Quântica de Campos e aplicá-lo na resolução de alguns sistemas físicos, investigando as diferenças de resultados provocadas pela presença de um comprimento mínimo. Especificamente, nosso próximo passo será calcular a energia de Casimir com a relação  $k(p)$  modificada que obtivemos na equação 4.2.



# Referências Bibliográficas

- [1] P. A. M. Dirac, “*The Principles of Quantum Mechanics*”, Oxford University Press, 4a. Ed. (1930).
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, “*Quantum Mechanics*”, Wiley-VCH.
- [3] F. U. Coelho, M. L. Lourenço, “*Um curso de Álgebra Linear*”, EdUSP, 2a. Ed. (2005), p. 229.  
P. R. Halmos, “*Finite Dimensional Vector Spaces*”, Springer, 2a. Ed. (1987), p. 159.
- [4] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, “*Quantum Electrodynamics*”, Pergamon Press, 2a. Ed. (1982).
- [5] W. Heisenberg, “*The Universal Length Appearing In The Theory Of Elementary Particles*”, Ann. Phys. **424**, 1-2, 20-33 (1938).
- [6] L. J. Garay, “*Quantum gravity and minimum length*”, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995) [arXiv:gr-qc/9403008].
- [7] M. H. Goroff and A. Sagnotti, “*Quantum Gravity At Two Loops*”, Phys. Lett. B **160**, 81 (1985).  
“*The Ultraviolet Behavior Of Einstein Gravity*” Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986).
- [8] C. A. Mead, “*Possible Connection Between Gravitation and Fundamental Length*”, Phys. Rev. B **135**, 849 (1964).
- [9] A. Perez, “*Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams*”, Proceedings of the II International Conference on Fundamental Interactions Pedra Azul, Brazil (2004) arXiv:gr-qc/0409061.
- [10] J. Scherk and J. H. Schwarz, “*Dual Models For Nonhadrons*”, Nucl. Phys. B **81**, 118 (1974).
- [11] G. Veneziano, “*A Stringy Nature Needs Just Two Constants*”, Europhys. Lett. **2**, 199 (1986).
- [12] G. Veneziano, “*An Enlarged Uncertainty Principle from Gedanken String Collisions?*”, CERN-TH 5366 (1989).

- [13] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, “*Can Space-Time Be Probed Below The String Size?*”, Phys. Lett. B **216**, 41 (1989).
- [14] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero, “*Minimum Physical Length and the Generalized Uncertainty Principle in String Theory*”, Phys. Lett. B **234**, 276 (1990).
- [15] J. H. Schwarz, “*Lectures on superstring and M theory dualities*”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B**, 1 (1997) [arXiv:hep-th/9607201].
- [16] Carlo Rovelli, “*Quantum Gravity*”, Cambridge University Press (2004). Pre-print disponível em <http://www.cpt.univ-mrs.fr/~rovelli/book.pdf> .
- [17] A. Ashtekar, “*New Variables for Classical and Quantum Gravity*”, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [18] C. Rovelli, “*Loop Quantum Gravity*”, Living Rev. Rel. **11**, 5 (2008).
- [19] C. Rovelli and L. Smolin, “*Spin Networks and Quantum Gravity*”, Phys. Rev. D **52**, 5743 (1995) [arXiv:gr-qc/9505006].
- [20] H. Nicolai, K. Peeters and M. Zamaklar, “*Loop Quantum Gravity: An Outside View*”, Class. Quant. Grav. **22**, R193 (2005) [arXiv:hep-th/0501114].
- [21] C. Rovelli and L. Smolin, “*Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity*”, Nucl. Phys. B **442**, 593 (1995) [Erratum-ibid. B **456**, 753 (1995)] [arXiv:gr-qc/9411005].
- [22] L. Smolin, “*Generic Predictions of Quantum Theories of Gravity*”, [arXiv:hep-th/0605052].
- [23] T. Thiemann, “*A Length Operator for Canonical Quantum Gravity*”, J. Math. Phys. **39**, 3372 (1998) [arXiv:gr-qc/9606092].
- [24] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, “*Space-time Quantization Induced by Classical Gravity*”, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
- [25] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, “*Hilbert Space Representation Of The Minimal Length Uncertainty Relation*”, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995) [arXiv:hep-th/9412167].
- [26] U. Harbach and S. Hossenfelder, “*The Casimir Effect in the Presence of a Minimal Length*”, Phys. Lett. B **632**, 379 (2006) [arXiv:hep-th/0502142].
- [27] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “*The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*”, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [arXiv:hep-ph/9803315].

- [28] CERN Press Release, “*LHC Sets New World Record*”,  
<http://press.web.cern.ch/press/PressReleases/Releases2009/PR18.09E.html> .  
 CERN Press Release, “*LHC Sets New Record - Accelerates Beam to 3.5 TeV*”,  
<http://press.web.cern.ch/press/PressReleases/Releases2010/PR05.10E.html> .
- [29] Jensen, J. L. W. V. “*Sur les fonctions convexes et les inegalits entre les valeurs moyennes*” Acta Math. 30, 175-193, 1906.
- [30] A. Kempf, “*On Quantum Field Theory with Nonzero Minimal Uncertainties in Positions and Momenta*”, J. Math. Phys. **38**, 1347 (1997) [arXiv:hep-th/9602085].
- [31] M. Reisenberger and C. Rovelli, “*Spacetime States and Covariant Quantum Theory*”, Phys. Rev. D **65**, 125016 (2002) [arXiv:gr-qc/0111016].
- [32] A. Kempf, “*On the Structure of Space-Time at the Planck Scale*”, arXiv:hep-th/9810215.
- [33] G. Amelino-Camelia, “*Relativity in Space-Times with Short-distance Structure Governed by an Observer-independent (Planckian) Length Scale*”, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 35 (2002) [arXiv:gr-qc/0012051].  
 G. Amelino-Camelia, “*Testable Scenario for Relativity with Minimum-Length*”, Phys. Lett. B **510**, 255 (2001) [arXiv:hep-th/0012238].  
 G. Amelino-Camelia, “*Status of Relativity with Observer-independent Length and Velocity Scales*”, [arXiv:gr-qc/0106004].  
 N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia and J. Kowalski-Glikman, “*Deformed Boost Transformations that Saturate at the Planck Scale*”, Phys. Lett. B **522**, 133 (2001) [arXiv:hep-th/0107039].
- [34] J. Magueijo and L. Smolin, “*Generalized Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale*”, Phys. Rev. D **67**, 044017 (2003) [arXiv:gr-qc/0207085].
- [35] P. Feyerabend, “*Contra o Método*”, Ed. Unesp (2007).
- [36] C. Rovelli and S. Speziale, “*Reconcile Planck-scale Discreteness and the Lorentz-Fitzgerald Contraction*”, Phys. Rev. D **67**, 064019 (2003) [arXiv:gr-qc/0205108].

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)