

Universidade Federal do Espírito Santo

**Termodinâmica de Buracos Negros
Dilatônicos**

por

Glauber Tadaiesky Marques

Tese de Doutorado

Orientador: Dr. Júlio César Fabris

Vitória - Espírito Santo

2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

À toda minha família, a qual amo muito, que sempre me ajudou e que sem ela eu nada seria.

Agradecimentos

- À minha esposa Flávia pelo amor sempre crescente e por suportar todos os momentos difíceis e sempre entender os meus momentos de estudo. Princesa te amo;
- Aos meus pais Edmilson e Iolete, a minha irmã Glauce, e as minhas tias Izete e Ivete pela ajuda que me deram, e que dão, pela carreira que resolvi seguir e por tudo o que sou;
- Aos meus amigos da pós-graduação;
- Aos professores, e amigos, do grupo de Cosmologia e Gravitação da UFES, Prof^o's Brasil, Sergio, Roberto e Flávio;
- Não poderia deixar de agradecer a uma grande pessoa, que é o meu professor orientador e acima de tudo um grande amigo, Prof^o Júlio César Fabris, pela confiança depositada em minha pessoa durante todos esses anos;
- Ao professor Gerard Clément que me acolheu e orientou durante minha estadia na França;
- Aos meus avós Casimiro e Benedita que sempre me apoiaram, incentivaram e acreditaram em mim;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro durante esta tese;
- Ao acordo científico CAPES/COFECUB entre Brasil e França pela bolsa de doutorado sanduíche na França.

Resumo

Existem vários métodos para calcular a temperatura de um buraco negro. O objetivo desta tese é estudar e aplicar estes métodos para os buracos negros da teoria Einstein-Maxwell-dilaton (EMD), mais particularmente para os casos assintoticamente plano e não plano das soluções dilatônicas lineares, incluindo a solução não assintoticamente plana com rotação.

Como resultado mostramos que a expressão que relaciona a gravidade superficial com a temperatura ($T_{bn} = \kappa/2\pi$) não é válida para todo caso não assintoticamente plano da teoria EMD. Para o caso dilatônico linear com rotação surge uma dúvida com relação à definição usual de temperatura a partir da gravidade superficial, podendo a mesma ser re-obtida ao considerarmos um sinal negativo no auto-valor da energia. Isso parece estar relacionado com a interpretação da energia no ato da criação do par de partícula e anti-partícula na ergosfera, onde em princípio não podemos definir a noção de vácuo.

Finalmente estudamos os buracos negros topologicamente massivos (BNTM) com rotação a 1+2 dimensões, onde todas as peculiaridades que acontecem na interpretação da temperatura para o caso dilatônico linear com rotação persistem.

Abstract

There are several methods to calculate the temperature of a black hole. The aim of this thesis is to study and to apply these methods to calculate the temperature for black holes of the Einstein-Maxwell-Dilaton (EMD) theory. We will treat more specifically the cases of the linear dilaton, both for asymptotically flat and non asymptotically flat solutions. This includes the non asymptotically flat solution with rotation, the linear dilaton with rotation. We confirm some temperatures already known, calculated by the traditional formula that relates the surface gravity κ with the temperature through the expression $T_{bh} = \kappa/2\pi$. But it is shown that this relation connecting surface gravity and the temperature can not be used directly in all situations.

One question in obtaining the temperature of a black hole appears in the case of the linear dilaton with rotation, where everything seems to indicate, in order to recover that relation, a negative sign must be considered.

Finally, we study the black holes of topologically massive gravity (TMG) with rotation, in 1+2 dimensions. All the peculiarities that occur in the interpretation of temperature, in the case of linear dilaton with rotation also appear for these black holes.

Sumário

1	Introdução Geral	3
2	Buracos Negros	7
2.1	Introdução	7
2.2	Termodinâmica de buracos negros	12
2.3	As leis da termodinâmica dos buracos negros	16
3	Métodos de Cálculo da Temperatura	19
3.1	Coefficientes de Bogoliubov	19
3.2	A temperatura do buraco negro via os coeficientes de Bogoliubov	22
3.3	Temperatura via euclideanização da métrica	26
3.4	Temperatura via coeficiente de reflexão	28
3.5	Temperatura via anomalias	30
4	Termodinâmica dos Buracos Negros Dilatônicos assintoticamente Planos	35
4.1	Solução simetricamente esférica da teoria EMD	35
4.2	Solução da equação de Klein-Gordon para os buracos negros dilatônicos assintoticamente planos	37
4.2.1	Cálculo da temperatura	38
4.2.2	Geometria perto do horizonte	41
4.3	Caso extremo $r_+ = r_-$	42
4.3.1	Cálculo da temperatura	43
4.3.2	Coordenadas radiais nulas	44
4.3.3	Caso $\gamma = 0$	45
4.3.4	Caso $\gamma > 0$ e $\gamma \neq 1$	46
4.3.5	Caso $\gamma < 0$	46
4.3.6	Geometria perto do horizonte	47
5	Termodinâmica dos Buracos Negros Dilatônicos não assintoticamente Planos	51

5.1 Solução não assintoticamente plana para a ação de Einstein-Maxwell-Dilaton	51
5.1.1 Coordenadas radiais nulas	53
5.2 Equação de Klein-Gordon não massiva para os buracos negros não assintoticamente planos	54
5.2.1 Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$	55
5.2.2 Caso $\gamma = b = 0$	58
5.3 Temperatura de buracos negros não assintoticamente planos	58
5.3.1 Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$	58
5.3.2 Caso $\gamma = b = 0$	65
6 Buracos Negros Dilatônicos Lineares com Rotação	68
6.1 Dilaton linear com rotação	68
6.2 Cálculo das Geodésicas	70
6.2.1 Solução da equação de KG	72
6.3 Cálculo da Temperatura	76
6.3.1 Temperatura via euclidianização da métrica	80
6.3.2 Temperatura via anomalias	81
7 Buracos Negros Topologicamente Massivos	84
7.1 Buracos Negros Topologicamente Massivos	84
7.1.1 Solução da equação de KG	85
7.2 Cálculo da temperatura	89
7.2.1 Temperatura via anomalias	93
8 Conclusão Geral	95

Capítulo 1

Introdução Geral

A teoria da relatividade geral (RG), criada por Einstein, conduziu a uma visão geométrica do espaço-tempo onde a matéria determinaria a geometria. A teoria da RG é regida pelas equações de Einstein que permitem soluções que contêm buracos negros. Os buracos negros são corpos com um campo gravitacional tão intenso que nada pode escapar deles, nem mesmo a luz. Em um buraco negro, existe uma superfície que delimita a região onde pode haver escape e a região onde o escape para o infinito espacial não pode ocorrer. Esta superfície é chamada de *horizonte de eventos*

Tais objetos que contêm uma região de limite de escape, o horizonte de eventos, são extremamente interessantes. Um observador que ultrapasse esta região está completamente desconectado causalmente do universo exterior ao horizonte de eventos. Os buracos negros contêm uma singularidade escondida no interior do horizonte de eventos. O termo "escondido" se deve ao fato que um observador na região externa jamais receberá um sinal vindo da região singular. Em certos casos, os buracos negros podem conter uma região na qual é impossível um observador se manter estático. Por possuir esta região, chamada de ergosfera, o buraco negro pode perder energia pelo chamado processo de Penrose.

Se já não bastassem estas peculiaridades existe, ainda uma belíssima analogia entre as leis da mecânica dos buracos negros e os princípios da termodinâmica estatística. Enquanto as propriedades anteriores surgem no contexto puramente clássico da teoria, a termodinâmica é resultado da junção da teoria clássica e da teoria quântica de campos.

De fato, quando se considera campos quânticos na proximidade dos buracos negros, efeitos novos, em relação à teoria quântica usual, formulada no espaço-tempo de Minkowski, podem ser encontrados. Estes novos efeitos contrastam fortemente com as noções clássicas que estes objetos nos apresentam. Pois imagine um objeto que possa sugar tudo que esteja na sua vizinhança, devido ao seu campo gravitacional extrema-

mente forte. Agora, considere que este mesmo objeto crie partículas (ou melhor um par de partícula e anti-partícula) nas proximidades do seu horizonte de eventos. Por ter este efeito quântico, um objeto que só faria "engordar", sugando tudo que ultrapasse o horizonte de eventos, é agora obrigado entrar numa "dieta fatal", podendo evaporar, devido ao processo de criação de partículas, até desaparecer por completo. Este processo é chamado evaporação de buracos negros, e surge do fato de se considerar campos quânticos no espaço-tempo (clássico) gerado por um buraco negro. Porém, é preciso ainda uma teoria quântica da gravitação mais completa e precisa para se tentar confirmar e resolver alguns problemas causados por este efeito, a evaporação completa do buraco negro, como o paradoxo da perda de informação [1].

Este efeitos quânticos transformam o que era uma simples analogia em uma relação extremamente íntima entre os buracos negros e os princípios termodinâmicos. Nós descreveremos isto mais em detalhes posteriormente.

Várias soluções das equações de Einstein contendo buracos negros já foram encontradas. Elas podem ser assintoticamente planas, ou seja, a região localizada a uma distância muito grande do buraco negro é descrita pela métrica de Minkowski, ou ainda assintoticamente anti-deSitter (AdS), isto é, soluções das equações de Einstein com constante cosmológica (negativa), onde o limite assintótico espaço-temporal é descrito pela métrica AdS, uma região com curvatura constante. Várias outras situações já foram encontradas na literatura. Estas diferentes possibilidades surgem de acoplamentos específicos entre a gravitação a outros campos.

Trabalharemos nesta tese com soluções da teoria Einstein-Maxwell dilatônica (EMD) sendo a gravitação acoplada a um campo escalar e a um campo eletromagnético. Em princípio, o campo eletromagnético poderá também se acoplar não trivialmente ao campo escalar, o chamado dilaton. Esta teoria permite soluções assintoticamente planas, mas também soluções que não são nem assintoticamente planas e nem assintoticamente AdS. Tal configuração apresenta um interesse particular devido a sua conexão com teorias fundamentais, em particular com as teorias de cordas.

O objetivo desta tese é estudar as propriedades termodinâmicas das soluções da teoria EMD. Mais especificamente, nos dedicaremos ao cálculo da temperatura dos buracos negros que resultam desta teoria. Vários métodos de cálculo da temperatura de um buraco negro serão abordados e comparados. Verificaremos que, se por um lado em várias situações a temperatura obtida através da gravidade superficial é confirmada por um cálculo mais rigoroso, por outro existem vários casos onde isto não ocorre: diferentes métodos de cálculo de temperatura conduzem a diferentes resultados.

Nesta tese nós vamos mostrar, em primeiro lugar, que a temperatura para um caso especial dos buracos negros dilatônicos lineares não assintoticamente planos é nula, apesar de sua gravidade superficial não o ser. Da mesma forma, nos casos de buracos

negros com rotação estudados nesta tese, para que a temperatura obtida através de um cálculo quântico mais rigoroso esteja de acordo com a temperatura via gravidade superficial é preciso uma interpretação intuitiva do sinal da energia. Faremos a análise da temperatura dos buracos negros da teoria EMD, assintoticamente planos e não planos, aplicando vários métodos de cálculo de temperatura, ainda não empregados na literatura para estes buracos negros. Confirmamos os valores de temperatura para alguns casos; para outros casos, mostramos que é preciso fazer uma análise quântica mais detalhada antes de levar em consideração a relação gravidade superficial e temperatura, relação que não pode ser aplicada diretamente.

Esta tese está dividida da maneira descrita a seguir.

O capítulo 2 será dedicado a uma breve introdução histórica sobre as soluções de buracos negros seguida da seção sobre a termodinâmica de tais objetos.

No capítulo 3 serão exibidos os métodos utilizados para se encontrar a temperatura dos buracos negros. Os métodos aí descritos serão utilizados posteriormente no decorrer desta tese.

No capítulo 4 nós descreveremos a solução assintoticamente plana da teoria EMD e acharemos a temperatura destes buracos negros. Aplicaremos o modelo de colapso de uma casca esférica fina, calculando os coeficientes de Bogoliubov. Faremos também a análise dos casos extremos destas soluções.

O capítulo 5 será dedicado à análise termodinâmica das soluções estáticas nem assintoticamente planas e nem assintoticamente AdS da teoria EMD onde o parâmetro de massa da solução é feito igual a zero. Do ponto de vista clássico, tal caso permanece não trivial e admite uma temperatura não nula quando é feita análise utilizando a gravidade superficial. Porém quando é feita a análise empregando campos quânticos chega-se a conclusão de que não há criação de partículas e portanto não há um espectro de temperatura, que deve portanto ser nula. Estes efeitos são consequências da geometria desta solução. Um aspecto interessante deste estudo é que podemos ser conclusivos devido ao fato da equação de Klein-Gordon admitir uma solução exata em todo espaço, contrariamente ao que ocorre usualmente em estudos quânticos envolvendo buracos negros assintoticamente planos.

No capítulo 6 estudaremos o caso dilatônico linear com rotação. A presença da ergosfera requer uma interpretação mais cuidadosa para a obtenção da temperatura: temos que levar em conta os efeitos quânticos dentro da ergosfera para poder chegar à temperatura habitual encontrada pela gravidade superficial. Porém, existem possíveis ambigüidades, pois não se pode ter um vetor de Killing estático e assim definir um estado de vácuo. Isto impede uma análise mais rigorosa do valor da temperatura, e temos que nos restringir a uma análise mais intuitiva do cálculo desta temperatura.

O capítulo 7 é constituído do cálculo da temperatura para outro buraco negro com

rotação. Este buraco negro provém do termo de Chern-Simons acoplado à gravitação, em um espaço tridimensional. As soluções não são nem assintoticamente planas e nem assintoticamente AdS a 1+2 dimensões. As mesmas dificuldades que aparecem no caso dilatônico linear a 1+3 dimensões persistem neste caso.

No capítulo 8, apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Buracos Negros

Neste capítulo faremos uma pequena introdução sobre a noção de buracos negros e uma breve exposição das conexões entre os buracos negros e as leis da termodinâmica.

2.1 Introdução

Em 25 de novembro de 1915, Einstein apresentou à Academia Prussiana (PAW) a versão final das equações de campo da gravitação [2]. Elas se escrevem

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = K T^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein da gravitação, $K = 8\pi G/c^4$ é a constante de Einstein da gravitação, G é a constante de Newton da gravitação e c é a velocidade da luz no vácuo. Essas equações mostram que a distribuição de matéria, $T^{\mu\nu}$, determina a geometria do espaço-tempo, $G^{\mu\nu}$.

A partir de agora iremos trabalhar no sistema de unidades naturais, $\hbar = c = G = 1$, $K = 8\pi$.

Pouco tempo depois, em janeiro de 1916, o alemão Karl Schwarzschild, que na época se encontrava no exército alemão na frente russa na 1ª guerra mundial, obteve a primeira solução exata da teoria da relatividade geral para um corpo com simetria esférica. Essa solução, hoje conhecida como solução de Schwarzschild, conduz ao seguinte formato para a métrica quadri-dimensional:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

sendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ é a parte angular da métrica e M é a massa de uma partícula pontual. Surge assim o famoso raio de Schwarzschild $r_s = 2M$, que discutiremos com mais detalhes posteriormente.

Esta é a única solução com simetria esférica das equações de Einstein sem fonte (teorema de Birkhoff [3], 1923).

Durante muito tempo a região $0 < r < 2M$ foi desprezada, considerada não física, pois a superfície definida por $r = 2M$ era considerada uma verdadeira singularidade. Além do mais, $r = 2M$ se situa no interior do raio de uma estrela ordinária, r_e , sendo a solução de Schwarzschild uma solução de campo exterior. A extensão analítica máxima da métrica (2.2), como a primeira transformação de coordenadas feita por Lemaitre [4] em 1933, e a obtida por Kruskal [5] e Szekeres [6], de maneira independente em 1960, mostra que $r = 2M$ não é uma verdadeira singularidade mas sim uma singularidade de coordenadas.

Em trabalhos independentes, Reissner [7] em 1916 e Nordström [8] em 1918 encontraram a solução exata da gravitação acoplada a uma fonte eletromagnética, conhecida como equações de Einstein-Maxwell. Esta solução ficou conhecida como solução de Reissner-Nordström. Ela descreve um corpo esférico carregado de carga Q e massa M . A métrica quadri-dimensional se escreve, neste caso, como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 . \quad (2.3)$$

Observa-se que esta métrica possui duas singularidades de coordenadas em $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$.

Esta é a única solução estática das equações de Einstein com fonte [9].

Na década de 30 vários autores estudaram a possibilidade de estrelas colapsarem, como os autores das referências [10–12], e formarem um "buraco negro". O que chamamos aqui de "buraco negro" corresponde à situação onde o raio de Schwarzschild possuiria valor maior que o raio da estrela.

Em 1958 David Finkelstein [14] introduziu o conceito de horizonte de eventos, nome dado pelo físico Wolfgang Rindler, apresentando as coordenadas de Eddington-Finkelstein, baseado no trabalho de Eddington [13]. Ele mostrou que $r = 2M$ na métrica (2.2) não é uma verdadeira singularidade mas sim uma fronteira sem volta entre a região exterior $r > 2M$ e a região interior $0 < r < 2M$. Ou seja, toda a informação que um observador no exterior pode receber foi criada em $r > 2M$ e toda a informação na região $0 < r < 2M$ é desconectada causalmente para um observador na região exterior.

Em 1963 Kerr estende o trabalho de Finkelstein encontrando a solução das equações de Einstein sem fonte com rotação [15],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{2r_s r a}{\rho^2} \sin^2 \theta dt^2 d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2 , \quad (2.4)$$

onde $r_s = 2M$ é o raio de Schwarzschild, $a = J/M$ é o momento angular por unidade de massa, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$.

Carter [16] e Robinson [17] mostraram que todo buraco negro estacionário e axisimétrico, sem fonte, é caracterizado somente por dois parâmetros: sua massa e seu momento angular. Sua métrica é dada pela solução de Kerr.

Observa-se que há uma singularidade em $\Delta = 0$, o que nos fornece

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} . \quad (2.5)$$

Novamente, tal condição corresponde a singularidades de coordenadas e r_{\pm} , como no caso da métrica (2.3), são os horizontes externo e interno determinados pela extensão analítica.

Pelo invariante de Riemann $R^{\alpha\beta\mu\sigma}R_{\alpha\beta\mu\sigma}$ a única singularidade intrínseca está em $\rho = 0$ que acontece em $r = \cos\theta = 0$. Em coordenadas cartesianas isto significa

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0 .$$

Temos, portanto, um anel de singularidade com raio a que se situa no plano equatorial $z = 0$. De fato, isto pode ser visto a partir da métrica (2.4) impondo a condição $r = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para uma hiper-superfície a tempo constante, isto implica, considerando o termo dominante, que

$$ds^2 \sim -\frac{2M}{r}a^2d\varphi^2 . \quad (2.6)$$

Logo, todo anel de raio igual a a diverge quando $r \rightarrow 0$. Nesta região, os invariantes de curvatura também divergem, revelando uma verdadeira singularidade.

Buracos negros com rotação contém algumas propriedades interessantes sobre as quais vamos nos deter um pouco mais. Uma delas está no fato que, diferente dos casos de Schwarzschild e Reissner-Nordström, $g_{tt} = 0$ não fornece os horizontes de eventos antes determinados. Ao contrário, esta condição define a ergosfera. De fato,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= 0 \\ 1 - \frac{r_s r}{\rho^2} &= 0 \\ r_{\pm}(e) &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} , \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o sinal $+$ representa uma superfície limite de um espaço-tempo estacionário e a região $r_+ < r < r_+(e)$ é denominada ergosfera, uma região na qual o espaço-tempo rotaciona, inclusive a luz, no sentido da rotação do buraco negro. Note que $g_{tt} = 0$ coincide com o horizonte de eventos somente nos pólos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Um buraco negro é entendido normalmente como sendo uma região do espaço-tempo onde a gravidade é tão forte que nada pode escapar, nem mesmo a luz. Mas em 1969 Roger Penrose [18] notou que se pode extrair energia de buracos negros com rotação, ou seja, com ergosfera. O processo originalmente concebido por Penrose para ilustrar a maneira pela qual a energia pode ser extraída do buraco negro de Kerr é o

seguinte: uma partícula que chega na ergosfera por uma geodésica tipo tempo decai em dois fótons, um dos quais entra numa trajetória de energia negativa e atravessa o horizonte de eventos, enquanto o outro escapa para o infinito carregando parte da energia de rotação do buraco negro. O máximo de energia que poderia ser extraída por este processo seria

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{M_{irr}} - 1 \right) , \quad (2.8)$$

onde

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{M^2}{2} + \sqrt{\frac{M^4}{4} - \frac{J^2}{4}}} \quad (2.9)$$

é a massa irreduzível do buraco negro.

O importante aqui é enfatizar que este mecanismo é puramente clássico e que não prevê qualquer extração de energia de buracos negros sem rotação como pode ser visto imediatamente fazendo $J = 0$ na equação acima.

Para uma revisão mais detalhada sobre estas propriedades é recomendável a leitura das referências [27–29].

Sendo a métrica de Kerr uma extensão da métrica de Schwarzschild, em 1965 Ezra Newman e colaboradores [19] fazem a extensão da métrica de Reissner-Nordström e produzem a métrica,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta(e)}{\rho^2} dt^2 + \frac{2a(2Mr - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta dt d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ &- \rho^2 d\theta^2 - \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2 , \end{aligned} \quad (2.10)$$

uma solução carregada de carga Q , com momento angular J e massa M . Temos as definições,

$$\begin{aligned} \Delta &= (r - r_+)(r - r_-) = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 , \\ r_{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} , \\ \Delta(e) &= (r - r_+^{(e)})(r - r_-^{(e)}) = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2 \cos^2 \theta , \\ r_{\pm}^{(e)} &= M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} . \end{aligned}$$

Essa solução tem propriedades análogas à da métrica de Kerr. Ela é conhecida como a métrica de Kerr-Newman.

A solução de Kerr-Newman é a única solução de buraco negro estacionário e axisimétrico com fonte [20].

Em dezembro de 1967 John Wheeler cunha a expressão "buraco negro".

Tais buracos negros são caracterizados pelo teorema do "No Hair" , nome originado de um comentário feito pelo mesmo John Wheeler, que disse que "os buracos negros não têm nenhum cabelo" [21]. Isto quer dizer, por um postulado da astrofísica, que

todas as soluções de buracos negros das equações de Einstein-Maxwell da gravitação e do eletromagnetismo na relatividade geral podem ser completamente caracterizados por somente três parâmetros clássicos observados por um observador na região exterior do buraco negro ($r > r_H$): massa, carga elétrica e momentum angular. Toda informação restante sobre a matéria que deu origem ao buraco negro está contida dentro dele e "desaparece" atrás do horizonte de eventos do buraco negro e, conseqüentemente, é inacessível aos observadores externos. A carga magnética, se detectada como predita por algumas teorias, daria forma ao quarto parâmetro possuído por um buraco negro clássico.

Logo pode-se sumarizar estas quatro soluções na seguinte tabela:

	sem rotação ($J = 0$)	com rotação ($J \neq 0$)
sem carga ($Q = 0$)	Schwarzschild	Kerr
com carga ($Q \neq 0$)	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Lembramos que estas quatro soluções clássicas são assintoticamente planas. Isto quer dizer que no infinito espacial todas estas métricas se reduzem à métrica de Minkowski.

Porém, existem soluções com o comportamento assintótico diferente, como por exemplo as soluções de deSitter(dS) e anti deSitter(AdS) que provêm das equações de Einstein com constante cosmológica Λ ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.11)$$

sendo dS(AdS) para $\Lambda > 0(\Lambda < 0)$. O comportamento assintótico para tais soluções é

$$ds^2 = \frac{\Lambda r^2}{3} dt^2 - \frac{3}{\Lambda r^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad , \quad (2.12)$$

que não são assintoticamente planas mas sim dS ou AdS. Como por exemplo a métrica de Schwarzschild deSitter

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (2.13)$$

Uma questão importante, e ainda hoje um problema em aberto em relatividade geral, é a existência de uma definição satisfatória de energia. Muitos trabalhos já foram feitos em relação a este problema que consiste, essencialmente, em definir um equivalente gravitacional da densidade de energia-momento $T^{\mu\nu}$ da matéria. Porém, as quantidades obtidas são pseudotensores e estes dependem de uma escolha de referencial. Por isso, tais quantidades não são consideradas satisfatórias. Parece ser impossível obter uma definição local de energia em relatividade geral: pelo princípio de equivalência, nós podemos sempre escolher, em um ponto qualquer, um referencial localmente inercial no qual o campo gravitacional é nulo.

Existem, porém, definições que permitem calcular a massa e o momento angular no infinito. Nos casos onde o espaço-tempo é assintoticamente plano, a definição mais utilizada é a de Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [22]. Para espaços-tempos assintoticamente AdS, mencionamos a definição de Abbott e Deser [23] que adapta o método ADM a esta situação.

Porém ao longo desta tese vamos trabalhar com soluções provenientes da teoria Einstein-Maxwell-Dilaton(EMD) que além das soluções assintoticamente planas permite soluções que não são assintoticamente planas e, além do mais, diferem naquele limite assintótico dos casos dS ou AdS.

A impossibilidade de poder definir uma energia local, levou ao conceito de energia quasi-local, que é energia associada a uma superfície bidimensional do tipo-espaço. Isto permite definir a energia e o momento angular destes tipos de espaço-tempo que não são nem assintoticamente planos e nem assintoticamente AdS (sendo Penrose o primeiro a introduzir o conceito de energia quasi-local [24]).

Para um estudo mais aprofundado sobre este assunto é fortemente recomendável as referências [25, 26] e as referências ali contidas.

Um buraco negro é entendido normalmente como sendo uma região do espaço-tempo onde a gravidade é tão forte que nada pode escapar, nem mesmo a luz. Lembremos que a definição de buraco negro não provém da noção de singularidade mas sim da noção de horizonte de eventos.

A noção de singularidade em relatividade geral é entendida como a divergência de curvatura do espaço-tempo. Porém uma definição mais geral de singularidade é quando o espaço-tempo possui ao menos uma geodésica que não possa ser prolongada até um valor finito do parâmetro afim desta geodésica (existe uma singularidade no final desta geodésica). Ou seja, o espaço-tempo é geodesicamente incompleto.

2.2 Termodinâmica de buracos negros

No início dos anos 70, para analisar a perda de informação na formação de um buraco negro, Bekenstein [30, 31] formulou uma termodinâmica clássica de buracos negros. Utilizando a métrica de Kerr-Newman, ele obteve

$$dM = \tau_H dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad , \quad (2.14)$$

onde τ_H , Ω_H e Φ_H denotam a tensão superficial, a velocidade angular e o potencial elétrico sobre o horizonte de eventos, respectivamente. Além disto, M , A , J e Q são a massa, a área, o momento angular e a carga do buraco negro.

Pouco tempo depois Smarr [33] obteve a fórmula exata como sendo

$$M = 2\tau_H A + 2\Omega_H J + \Phi_H Q \quad , \quad (2.15)$$

mostrando a analogia entre as leis da mecânica dos buracos negros e as relações usuais da termodinâmica.

Vamos rever agora a obtenção da fórmula de Smarr.

Komar [34], utilizando a relação entre leis de conservação e as propriedades de invariância das leis físicas sob certos grupos de transformações de simetria, estabeleceu o fluxo generalizado de energia dado por

$$E^\mu = 2(\xi^\nu{}_{;\mu} - \xi^{\mu;\nu})_{;\nu} \quad , \quad (2.16)$$

onde (;) é a derivada covariante relacionada a uma métrica $g_{\mu\nu}$ qualquer e ξ é o gerador de uma certa translação infinitesimal do sistema de coordenada, $x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$. O termo entre parênteses é anti-simétrico, em relação aos índices μ e ν , o que garante a conservação covariante do fluxo,

$$\nabla_\mu E^\mu = 0 \quad .$$

Na forma integral, a lei de conservação do fluxo permite definir a energia total [34],

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{1}{2K} \int E^\mu dS_\mu \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dS_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde K é a constante da gravitação de Einstein e dS_μ é o elemento de volume, covariante, de uma dada hiper-supefície Σ , tipo espaço.

Pode-se escrever, utilizando a lei de Gauss, a integral (2.17) como sendo

$$E(\xi) = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Sigma} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \quad , \quad (2.18)$$

onde $dS_{\mu\nu}$ é o elemento de área, covariante, da superfície fechada $\partial\Sigma$.

Sabe-se que na relatividade geral o vetor responsável pela variação infinitesimal de um sistema de coordenadas, e que matém a métrica invariante por tais transformações infinitesimais, é o vetor de Killing. Ele é tal que $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$.

Todo vetor que satisfaz a chamada equação de Killing,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad , \quad (2.19)$$

é denominado de vetor de Killing. O vetor de Killing é o gerador de isometrias (ou do "grupo de movimento") da variedade, ou seja, ele expressa a invarância do sistema por uma dada translação infinitesimal espacial ou temporal, ou ainda por rotação, sobre a variedade.

Para um buraco negro com rotação o campo de Killing é dado por

$$\chi_\mu = \xi_\mu + \Omega_H m_\mu \quad , \quad (2.20)$$

onde ξ_μ e m_μ são os vetores de Killing relacionados a invariância sobre uma translação temporal e a simetria axial do buraco negro.

Logo a equação do fluxo (2.16) pode ser escrita como

$$E^\mu = 4\xi^\nu{}_{;\nu}{}^\mu = 4\xi^\alpha R^\mu{}_\alpha \quad , \quad (2.21)$$

onde foi usado o lema relativo ao vetor de Killing

$$\nabla_\rho \nabla_\mu \xi^\nu = R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} \xi^\sigma \quad , \quad (2.22)$$

$$\nabla_\rho \nabla^\mu \xi^\nu = R^{\nu\mu}{}_{\rho\sigma} \xi^\sigma \quad , \quad (2.23)$$

sendo $R^\nu{}_{\mu\rho\sigma}$ o tensor de Riemann e $R^\mu{}_\alpha$ o tensor de Ricci.

Assim, se ξ^μ for um vetor de Killing, E^μ é identicamente nulo em pontos onde não há matéria, pois pelas equações de Einstein $R^\mu{}_\alpha = 0$, ou seja, nos espaços que são assintoticamente planos no infinito espacial ($r \rightarrow \infty$) não há fluxo de energia, como se deveria esperar.

Pode-se, de forma similar ao que foi feito para o caso da energia, encontrar o momento angular trocando o vetor de Killing ξ pelo vetor de Killing m , e aplicar a integral de Komar, onde encontra-se

$$J = -\frac{1}{8\pi} \int_\Sigma dS_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu m^\nu \quad , \quad (2.24)$$

sendo J o momento angular total do espaço-tempo.

Porém, para um buraco negro, tem-se um termo adicional de integral de superfície, no qual a superfície fechada (H) é o contorno do horizonte de eventos. Para um buraco negro a energia total (M) é a massa do buraco negro, dada por

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dS_\mu \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu \xi^\nu \quad , \quad (2.25)$$

onde Σ é a hipersuperfície do espaço-tempo.

Utilizando o lema relativo ao vetor de Killing (2.23), na primeira integral, e o vetor de Killing para um buraco negro com rotação (2.20), na segunda integral, encontra-se

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dS_\mu R^\mu{}_\nu \xi^\nu + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^\mu (\chi^\nu - \Omega_H m^\nu) \quad .$$

Empregamos a forma alternativa das equações de Einstein,

$$R^\mu{}_\nu = 8\pi \left(T^\mu{}_\nu - \frac{\delta^\mu{}_\nu}{2} T \right) \quad ,$$

e particularizamos para o caso em que o tensor do campo de matéria é o tensor momento-energia do campo eletromagnético, a quatro dimensões $T = 0$. Esta situação particular se deve ao fato de estarmos interessados na situação em que o buraco negro é carregado.

Portanto

$$M = 2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} (\chi^{\nu} - \Omega_H m^{\nu}) \quad .$$

Para um buraco negro, onde se tem o termo adicional do horizonte de eventos, tem-se a seguinte equação para o momento angular

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS_{\mu} \nabla_{\nu} \nabla^{\mu} m^{\nu} - \frac{1}{16\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} m^{\nu} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu} m^{\nu} - J_H \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} m^{\nu} - J_H \quad , \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$J_H = \frac{1}{16\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} m^{\nu}$$

é o momento angular do buraco negro.

Logo, retornando à equação para a massa, temos

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} - 2\Omega_H J_H + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu} \\ &= 2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} (\xi^{\nu} + \Omega_H m^{\nu}) + 2\Omega_H J + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu} \\ &= 2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \chi^{\nu} + 2\Omega_H J + \frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu} \quad , \end{aligned}$$

sendo

$$2 \int_{\Sigma} dS_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \chi^{\nu} = \Phi_H Q \quad , \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{8\pi} \oint_H dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \chi^{\nu} = \frac{\kappa}{4\pi} A \quad , \quad (2.28)$$

onde κ é denominada de gravidade superficial, A a área do horizonte de eventos, Φ_H o potencial que co-rotaciona em cima do horizonte de eventos e Q a carga do buraco negro.

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\kappa}{4\pi} A + \Phi_H Q + 2\Omega_H J \\ &= 2 \frac{\kappa}{8\pi} A + \Phi_H Q + 2\Omega_H J \\ &= 2\tau_H A + \Phi_H Q + 2\Omega_H J \quad c.q.d. \quad , \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\tau_H = \kappa/8\pi$.

Acima M é uma função homogênea de grau 1/2 em (A, J, Q^2) , sendo τ_H , Ω_H e Φ_H constantes definidas sobre o horizonte.

2.3 As leis da termodinâmica dos buracos negros

Em 1971 Hawking [35] demonstrou um teorema que diz que a área de um buraco negro não diminui jamais,

$$\delta A \geq 0 \quad . \quad (2.30)$$

Este teorema lembra a segunda lei da termodinâmica, onde por nenhum processo físico a entropia pode diminuir, $\delta S \geq 0$.

Em 1973 Carter, Bardeen e Hawking [36] generalizaram os resultados obtidos por Bekenstein (2.14) e Smarr (2.15) e formularam a mecânica dos buracos negros fazendo assim uma analogia com os princípios da termodinâmica.

A mecânica dos buracos negros está contida em quatro leis, sendo estas:

1. **Lei Zero:** A gravidade superficial é constante em cima do horizonte. Faz-se assim a comparação com o princípio zero da termodinâmica onde a temperatura é constante para um corpo em equilíbrio térmico.

2. **Primeira Lei:**

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad , \quad (2.31)$$

onde faz-se a comparação com o primeiro princípio da termodinâmica $E = TdS - pdV$, sendo ΩdJ e ΦdQ os termos de trabalho.

3. **Segunda Lei:**

$$\delta A \geq 0 \quad (\text{para todo processo físico}), \quad (2.32)$$

o que pode ser comparado com o segundo princípio da termodinâmica que estabelece $\delta S \geq 0$ para todo processo físico.

4. **Terceira Lei:** A gravidade superficial κ não pode chegar a zero por nenhum processo físico. Compara-se com o terceiro princípio da termodinâmica segundo o qual $T \rightarrow 0$ não pode ocorrer via nenhum processo físico.

Há, assim, uma notável correlação entre as leis da mecânica dos buracos negros e os princípios termodinâmicos. Mais interessante ainda é a relação entre a temperatura e a gravidade superficial e a relação da entropia com a área do buraco negro. Porém, classicamente, como o próprio nome já diz, um buraco negro não faz nada mais além de absorver matéria; portanto a temperatura para um buraco negro clássico será sempre zero, mas sua entropia será diferente de zero. Logo as relações entre as leis da mecânica dos buracos negros e os princípios termodinâmicos não seriam nada mais do que uma analogia sem nenhum interesse físico.

Quando utiliza-se o termo "clássico" para um buraco negro, quer dizer que são analisados apenas os efeitos geométricos da relatividade geral. Estas relações são puramente clássicas; a mecânica quântica não intervém a este nível.

Hawking [37] em 1975, relacionando efeitos quânticos com a relatividade geral, descobriu que buracos negros emitem uma radiação, de forma idêntica ao espectro de radiação de um corpo negro, sendo a temperatura dada pela relação

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad , \quad (2.33)$$

onde T_H é a chamada temperatura Hawking, e κ a gravidade superficial que é dada pela seguinte fórmula

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} \nabla^\mu \chi^\nu \nabla_\mu \chi_\nu \Big|_{r=r_H} \quad , \quad (2.34)$$

sendo χ^μ o vetor de Killing de um espaço-tempo estacionário (2.20). Similarmente, a entropia se relaciona com a área do buraco negro pela seguinte expressão:

$$S = \frac{A}{4} \quad . \quad (2.35)$$

Estes resultados indicam que há muito mais que uma simples analogia entre as leis da mecânica dos buracos negros e a termodinâmica estatística, pois a segunda lei pode ser escrita como

$$\begin{aligned} dM &= \frac{\kappa}{2\pi} d\left(\frac{A}{4}\right) + \text{termos de trabalho}, \\ dE &= T_H dS + \text{termos de trabalho} \quad . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Lembramos que a energia de um buraco negro é dada pela sua massa. Agora existe uma relação direta entre a entropia da física estatística e entropia dos buracos negros. Entretanto, uma das consequências da radiação Hawking é que um buraco negro pode evaporar até sua área chegar a zero, violando assim a segunda lei da mecânica dos buracos negros que nos diz que $\delta A \geq 0$ e conseqüentemente, por comparação, a segunda lei da termodinâmica estatística. Porém, pode-se utilizar a generalização da segunda lei para os buracos negros [31, 32] incluindo a entropia total do universo, de modo que

$$S_T = S_{bn} + S_E \geq 0 \quad , \quad (2.37)$$

onde S_{bn} é a entropia do buraco negro, S_E a entropia do resto de matéria do universo, contida no exterior do buraco negro, e S_T a entropia total do universo. Neste caso a entropia do buraco negro diminui mas a entropia do resto do universo, no exterior do buraco negro, aumenta de tal forma que a segunda lei da termodinâmica continua sendo válida. A radiação Hawking e todas as suas consequências são efeitos puramente quânticos não tendo análogos clássicos.

Pode-se escrever a primeira e a segunda lei dos buracos negros, via processos quânticos, na forma

$$dM = T_H dS_{bn} + \text{termos de trabalho} \quad , \quad (2.38)$$

$$\delta S_{bn} \rightarrow 0 \quad \text{mas} \quad \delta S_T \geq 0 \quad . \quad (2.39)$$

Existem vários métodos para se calcular a radiação Hawking. Nós vamos mostrar no próximo capítulo estes métodos de obtenção da temperatura de Hawking. Estes métodos serão utilizados no decorrer desta tese.

Capítulo 3

Métodos de Cálculo da Temperatura

Após a descoberta de Hawking [37] que buracos negros podem, perto do horizonte, criar partículas que são irradiadas para o infinito com um espectro planckiano de um corpo negro, vários outros métodos, no decorrer dos anos, foram desenvolvidos para se calcular a radiação Hawking. Estes métodos estão em sua maioria em concordância com a gravidade superficial. Nós vamos mostrar a seguir os métodos de obtenção da temperatura de Hawking a serem utilizados durante esta tese.

3.1 Coeficientes de Bogoliubov

Definiremos em primeiro lugar os coeficientes de Bogoliubov. Para isto analisaremos algumas propriedades da teoria quântica de campos de um campo escalar livre.

Seja $\Phi(x)$ um campo escalar real não massivo e livre, num espaço-tempo plano, que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\nabla^\mu \partial_\mu \Phi(x) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

A solução desta equação é dada por,

$$\Phi(x) = \int d^3k \left[f_k(x) a_k + f_k(x)^* a_k^\dagger \right] \quad , \quad (3.2)$$

uma solução de ondas planas.

As funções $f(x)$ obedecem as seguintes relações:

$$(f_k(x), f_{k'}(x)) = -(f_k(x)^*, f_{k'}(x)^*) = \delta^3(k - k') \quad , \quad (3.3)$$

$$(f_k(x), f_{k'}(x)^*) = (f_k(x)^*, f_{k'}(x)) = 0 \quad , \quad (3.4)$$

onde

$$(f_1, f_2) = i \int \sqrt{|g(\Sigma)|} \left(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_1 \right) d\Sigma^\mu \quad (3.5)$$

é a relação de produto interno definida pela teoria usada.

Acima $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$, sendo $d\Sigma$ o elemento de volume da hipersuperfície Σ tipo espaço, $|g(\Sigma)|$ o módulo do determinante da métrica em relação à hipersuperfície e n^μ é um vetor unitário tipo tempo normal a esta hipersuperfície. A propriedade crucial do produto interno é que ele independe da escolha da hipersuperfície. Portanto para uma região plana temos

$$(f_1, f_2) = i \int \left(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_t f_1 \right) d^3x \Rightarrow A \overleftrightarrow{\partial} B = A\partial B - (\partial A)B \quad . \quad (3.6)$$

Na expressão (3.2), $\{a_k\}$ são operadores em um espaço de Hilbert \mathcal{H} com os seus hermitianos conjugados $\{a_k^\dagger\}$ satisfazendo as relações de comutações

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \\ [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Podemos fazer o espaço de Hilbert (\mathcal{H}) ser um espaço de Fock construindo um estado de vácuo $|0\rangle$ satisfazendo as propriedades

$$\begin{aligned} a_k |0\rangle &= 0 \quad \forall k \quad , \\ \langle 0|0\rangle &= 1 \quad , \end{aligned}$$

de modo que \mathcal{H} tem como base

$$\left\{ |0\rangle, a_k^\dagger |0\rangle, a_{k'}^\dagger a_k^\dagger |0\rangle, \dots \right\} \quad ,$$

onde $\langle | \rangle$ é o produto interno positivo-definido deste espaço. Portanto, $\{a_k^\dagger\}$ e $\{a_k\}$ são os operadores de criação e destruição, respectivamente. Pode-se então definir o operador número de partículas $N_K = a_k^\dagger a_k$ que satisfaz a relação

$$N_k |0\rangle = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Esta base de \mathcal{H} é determinada pela escolha dos vácuos $|0\rangle$. Entretanto, esta escolha depende da definição das bases complexas $f_k(x)$, soluções da equação de KG que satisfazem as relações (3.3) e (3.4).

Imaginemos a evolução da hipersuperfície em $\Sigma \rightarrow \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$, tal que Σ_1 não seja uma simples deformação de Σ_0 (portanto equivalente por difeomorfismo) e tomemos o operador de campo $\Phi(x)$, solução da equação de KG na hipersuperfície Σ_1 :

$$\Phi(x) = \int d^3k \left[F_k(x) b_k + F_k(x)^* b_k^\dagger \right] \quad , \quad (3.8)$$

As funções $F_k(x)$ e os operadores b_k e N_k^1 obedecem as mesmas propriedades vistas anteriormente, e $|0\rangle_1$ é o vácuo na hipersuperfície Σ_1 .

Podemos então expandir o operador de campo tanto nas bases antigas como nas novas:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int d^3k \left[f_k(x) a_k + f_k(x)^* a_k^\dagger \right] \\ &= \int d^3k' \left[F_{k'}(x) b_{k'} + F_{k'}(x)^* b_{k'}^\dagger \right] .\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que o produto interno independe da escolha da hipersuperfície e a definição do operador destruição

$$a_k = (\Phi(x), f_k(x)) = i \int \left(f_k^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi(x) \right) d\Sigma^\mu , \quad (3.9)$$

pode-se relacionar o operador destruição da hipersuperfície Σ com os operadores de criação e destruição da hipersuperfície Σ_1 sendo

$$a_k = \int \left(\alpha_{k'k} b_{k'} + \beta_{k'k}^* b_{k'}^\dagger \right) dk' , \quad (3.10)$$

onde

$$\alpha_{k'k} \doteq (F_{k'}(x), f_k(x)) , \quad (3.11)$$

$$\beta_{k'k}^* \doteq (F_{k'}^*(x), f_k(x)) . \quad (3.12)$$

Pode-se ainda encontrar que

$$a_k^\dagger = -(\Phi(x), f_k(x)^*) = \int \left(\beta_{k'k} b_{k'} + \alpha_{k'k}^* b_{k'}^\dagger \right) dk' , \quad (3.13)$$

$$b_{k'} = (\Phi(x), F_{k'}(x)) = \int \left(\alpha_{k'k}^* a_k - \beta_{k'k}^* a_k^\dagger \right) dk , \quad (3.14)$$

$$b_{k'}^\dagger = -(\Phi(x), F_{k'}(x)^*) = \int \left(\alpha_{k'k} a_k^\dagger - \beta_{k'k} a_k \right) dk , \quad (3.15)$$

sendo

$$\alpha_{k'k}^* \doteq -(F_{k'}(x)^*, f_k(x)^*) , \quad (3.16)$$

$$\beta_{k'k} \doteq -(F_{k'}(x), f_k(x)^*) . \quad (3.17)$$

Os coeficientes α e β obedecem as seguintes relações de normalização

$$\begin{aligned}\int (\alpha_{k'k} \alpha_{k''k'}^* - \beta_{k'k} \beta_{k''k'}^*) dk' &= \delta(k - k'') , \\ \int \int (\alpha_{k'k} \alpha_{k''k'}^* - \beta_{k'k} \beta_{k''k'}^*) dk' dk'' &= 1 .\end{aligned} \quad (3.18)$$

De posse das relações encontradas, das regras de comutação e das propriedades dos operadores de criação e destruição pode-se encontrar a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\langle 0 | N_k^1 | 0 \rangle &= \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \int |\beta_{kk'}|^2 dk' | 0 \rangle , \\ N_k^1 &= \int |\beta_{kk'}|^2 dk' = \int \int \beta_{kk'} \beta_{k''k'}^* dk' dk'' .\end{aligned} \quad (3.19)$$

Esta relação nos mostra que algo acontece na evolução $\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$: o que é um vácuo para um observador em Σ_0 não o é mais para um observador em Σ_1 . Daremos um exemplo deste efeito na gravitação onde utilizaremos o modelo de colapso de uma casca esférica fina [42].

3.2 A temperatura do buraco negro via os coeficientes de Bogoliubov

Utilizando a equação de KG não massiva para a métrica de Schwarzschild temos a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(x) \right) = 0 \\ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \omega^2 f(r) &+ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2M}{r^2} \frac{df(r)}{dr} \\ - \left[l(l+1) + \frac{2M}{r} \right] \frac{f(r)}{r^2} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Acima utilizou-se separação de variáveis

$$\Phi(x) = \frac{f(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad , \quad (3.20)$$

sendo $Y_l^m(\theta, \phi)$ os harmônicos esféricos.

Usando

$$dr^* = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \quad ,$$

teremos

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \left(\omega^2 - V_{eff}\right) f(r) = 0 \quad , \quad (3.21)$$

onde

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (3.22)$$

é o potencial efetivo.

Notemos que assintoticamente ($r \rightarrow \infty$) (3.21) se reduz a

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \omega^2 f(r) = 0 \quad , \quad (3.23)$$

que tem como solução

$$f(r) = A e^{i\omega r^*} + B e^{-i\omega r^*} \quad . \quad (3.24)$$

Deste modo a equação (3.20) torna-se

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} \left(A e^{-i\omega(t-r^*)} + B e^{-i\omega(t+r^*)} \right) \\ &= \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} (g_\omega + f_\omega) \quad , \end{aligned}$$

onde

$$f_\omega = B e^{-i\omega v} , \quad (3.25)$$

$$g_\omega = A e^{-i\omega u} . \quad (3.26)$$

Acima $u = t - r^*$ e $v = t + r^*$ são os chamados modos emergentes e incidentes, respectivamente.

Pela normalização do campo $\Phi(x)$,

$$(\Phi_{\omega,l,m}, \Phi_{\omega',l',m'}) = i \int d^3x \sqrt{|g|} g^{tt} \Phi_{\omega',l',m'}^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi_{\omega,l,m} , \quad (3.27)$$

encontram-se as constantes $A = B = 1/\sqrt{4\pi\omega}$.

Empregaremos o modelo da casca esférica fina, figura(3.1), e o teorema de Birkhoff, que garante que a solução exterior não varia enquanto a casca colapsa. Enquanto a casca fina colapsa, consideraremos um modo incidente v que atravessa a casca, passando pelo seu centro, tornando-se depois um modo emergente u . No início, o modo incidente vem do infinito espacial, sendo portanto definido em um espaço-tempo de Minkowski. No final, após atravessar novamente a casca, tornando-se um modo emergente, ele atingirá novamente o infinito espacial, sendo novamente definido em um espaço-tempo de Minkowski. Mas, o vácuo definido no final do processo não coincide necessariamente com o vácuo no início do processo. Disto resulta que um estado inicialmente de vácuo, sem partícula, pode se tornar no final um estado de muitas partículas. O processo de colapso gera portanto uma criação de partículas, resultando em uma temperatura para o buraco negro.

Podemos usar a técnica descrita na seção anterior. Para isto, temos que determinar o modo emergente final u como função do modo incidente inicial v , isto é, $u = u(v)$. Isto é feito considerando a continuidade do modo quântico quando atravessa pela primeira vez a casca, quando passa pelo centro do colapso, e quando atravessa pela segunda vez a casca. Sendo o espaço-tempo dentro da casca plano e fora curvo podemos começar pela segunda colagem da métrica (para uma análise mais completa veja [42]), onde

$$\begin{aligned} ds_{r < R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} &= ds_{r > R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} , \\ dT^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2 &= \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega^2 , \\ 1 - \left(\frac{dR}{dT}\right)^2 &= \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dT}\right)^2 , \\ \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &= 1 + \frac{2M}{R-2M} \left(\frac{dR}{dT}\right)^2 , \end{aligned}$$

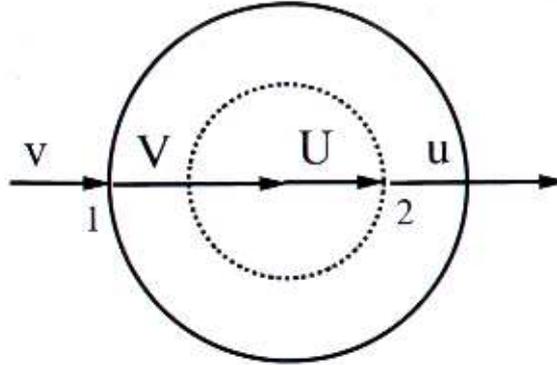


Figura 3.1: Uma onda esférica vem de \mathcal{I}^- com frente de onda satisfazendo $v = \text{constante}$, e depois de espalhada pela estrela, dirige-se a \mathcal{I}^+ com $u = \text{constante}$.

onde $R(t)$ é o raio da casca esférica e T o tempo medido pelo observador dentro da casca.

Assumimos que a saída do raio rumo a \mathcal{I}^+ se dá próximo à formação do horizonte,

$$r = 2M + C(T_0 - T) \quad , \quad (3.28)$$

sendo $T \approx T_0$, onde T_0 é o instante em que o horizonte se forma.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{(R - 2M)}{R} \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &= 1 + \frac{2MC}{(T_0 - T)} \approx \frac{2MC}{(T_0 - T)}, \\ \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &\approx \frac{4M^2}{(T_0 - T)^2}, \\ \frac{dt}{dT} &= \pm \frac{2M}{T_0 - T}, \\ t &= \mp 2M \ln \left(\frac{T_0 - T}{D} \right) \quad , \end{aligned}$$

sendo D uma constante de integração.

Perto do horizonte,

$$\begin{aligned} R^* = r^* &= r + 2M \ln(r - 2M), \\ R^* &\approx 2M \ln C(T_0 - T) \quad . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Portanto o termo de coordenada nula $u = t - r^*$ se torna

$$u = \mp 2M \ln \left(\frac{T_0 - T}{D} \right) - 2M \ln(C(T_0 - T)) \quad .$$

Considerando o sinal (-) de t , a expressão final para o modo u assume a forma

$$\begin{aligned} u &= -2M \ln \left(\frac{C(T_0 - T)^2}{D} \right) \\ &= -4M \ln \left(\frac{T_0 - T}{E} \right), \end{aligned}$$

sendo que $D/C = E^2$. O sinal (+) de t torna u um termo constante ($u \sim \ln(AD)$) que não nos interessa.

No centro da casca $U(V(v)) \approx v$:

$$\begin{aligned} U &= T - R \\ &= T - r_+ - A(T_0 - T) \\ &= (1 + A)T - r_+ - AT_0, \\ T &= \frac{r_+ + CT_0 + v}{1 + C}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(v) &= -4M \ln \left(\frac{v_0 - v}{F} \right) \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{v_0 - v}{F} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $v_0 = T_0 - 2M$, $F = E(1 + C)$ e κ é a gravidade superficial.

Decorre que as funções (3.25) e (3.26) são

$$f_\omega = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}}, \quad (3.31)$$

$$g_\omega = \frac{e^{-i\omega u(v)}}{\sqrt{4\pi\omega}}. \quad (3.32)$$

Assim os coeficientes de Bogoliubov (3.11) e (3.17) são encontrados :

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= (g_\omega, f_{\omega'}) = i \int_{-\infty}^{v_0} f_{\omega'}^* \overleftrightarrow{\partial}_v g_\omega \\ &= \frac{\omega}{2\kappa\pi\sqrt{\omega\omega'}} \Gamma(i\omega/\kappa) e^{\omega\pi/2\kappa} e^{i[\omega'v_0 - \omega(\ln F - \ln \omega')/\kappa]}, \\ \beta_{\omega\omega'} &= -(g_\omega, f_{\omega'}^*) = -\frac{\omega}{2\kappa\pi\sqrt{\omega\omega'}} \Gamma(i\omega/\kappa) e^{-\omega\pi/2\kappa} e^{-i[\omega'v_0 + \omega(\ln F + \ln \omega')/\kappa]}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \alpha_{\omega\omega'} \alpha_{\omega''\omega'}^* &= \frac{1}{2} \frac{e^{\pi\omega/\kappa}}{\sinh(\pi\omega/\kappa)}, \\ \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta_{\omega''\omega'}^* &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\pi\omega/\kappa}}{\sinh(\pi\omega/\kappa)}, \end{aligned}$$

ficando evidente que a condição de normalização (3.18) é satisfeita.

O operador número de partícula (3.19) é dado por

$$N_\omega = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} . \quad (3.33)$$

Isto é característico de um espectro planckiano com temperatura $T_H = \kappa/2\pi$. Para o caso tratado neste exemplo, a temperatura de Hawking é dada por

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} . \quad (3.34)$$

3.3 Temperatura via euclideanização da métrica

Nas referências [38–41] o problema do cômputo da temperatura do buraco negro foi focalizado empregando o método de euclideanização da métrica.

O método da euclideanização da métrica pode ser aplicado quando temos uma singularidade cônica ao passar para o tempo imaginário. Neste caso, a métrica se torna euclideana, e possui uma singularidade cônica em $r = 0$. Desconsiderando os termos angulares, a métrica euclideanizada tem a forma

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 . \quad (3.35)$$

Ela representa a métrica euclideana em coordenadas polares que descreve distâncias na superfície de um cone. O cone tem uma singularidade em $r = 0$, menos no caso quando se dobra o cone feito um funil. Nesta situação, tem-se uma periodicidade de 2π . Assim, pode-se evitar a singularidade cônica fazendo da variável temporal imaginária uma variável angular com este período.

Exemplificaremos o método usando a métrica de Schwarzschild. Neste caso, a métrica se torna singular sobre o horizonte de eventos, $r = r_H$. Passaremos o tempo da métrica para um tempo imaginário efetuando uma continuação analítica, $t \rightarrow it$, chamada de rotação de Wick, e escreveremos a métrica para uma superfície com θ e ϕ constantes. Assim tem-se que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (3.36)$$

Por simplicidade foi utilizada a assinatura da métrica (2.2) como sendo $(-, +, +, +)$.

Para se eliminar a singularidade cônica que ocorre, em $r = r_H$, transforma-se a métrica para uma métrica conforme, tal que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &= \Omega(\rho) \left(d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2\right) , \end{aligned}$$

onde $\tau = \alpha t$, sendo α uma constante que faz o fator conforme $\Omega(\rho)$ ser finito e não nulo no horizonte.

Portanto, comparando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned}\Omega(\rho)\rho^2 d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2, \\ \Omega(\rho) &= \frac{r - 2M}{r\rho^2\alpha^2}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Comparando os termos, relacionados as coordenadas espaciais, temos

$$\begin{aligned}\Omega(\rho)d\rho^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ \frac{d\rho}{\rho\alpha} &= dr^* \\ \rho &= e^{\alpha r^*}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Na expressão acima,

$$\begin{aligned}dr^* &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \\ r^* &= r + 2M \ln(r - 2M) + c,\end{aligned}$$

sendo c uma constante de integração.

Perto do horizonte o termo dominante de r^* será

$$\begin{aligned}r^* &\approx 2M \ln(r - 2M) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \ln(r - 2M),\end{aligned}$$

sendo $\kappa = 1/4M$ a gravidade superficial.

Logo,

$$\rho \approx (r - 2M)^{\alpha/2\kappa}.\tag{3.39}$$

Substituindo (3.39) em (3.37), obtém-se

$$\Omega(\rho) = \frac{r - 2M}{r\alpha^2(r - 2M)^{\alpha/\kappa}}.\tag{3.40}$$

Como $\Omega(\rho)$ é um fator finito no horizonte, a única maneira de evitar a singularidade em $r = r_H = 2M$ é assumindo

$$\alpha = \kappa.$$

Agora, para evitar a singularidade cônica, é preciso impor uma periodicidade de 2π para τ , isto é, uma periodicidade para t dada por $2\pi/\alpha$. Isto corresponde a uma temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi}.\tag{3.41}$$

Para o caso tratado neste exemplo

$$T = \frac{1}{8\pi M}.\tag{3.42}$$

Esta é a mesma temperatura encontrada por Hawking.

3.4 Temperatura via coeficiente de reflexão

O processo de cálculo dos coeficientes de transmissão e reflexão nada mais é do que um processo de espalhamento, uma onda que chega do infinito passado, ao buraco negro, tem parte da onda absorvida pelo buraco negro e parte refletida para o infinito futuro, pelo potencial efetivo do buraco negro. Os modos de propagação desta onda estão relacionados aos modos incidentes ($v = t + r^*$) e emergentes ($u = t - r^*$), como veremos a seguir.

Observa-se pela equação (3.29) que $r^* \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$ e $r^* \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 2M$, então r^* cobre todo espaço no exterior do buraco negro. O potencial efetivo (3.22) tende a zero tanto no infinito quanto em cima do horizonte, de modo que (3.21) tem agora como soluções assintóticas

$$f(r) \propto e^{\pm i\omega r^*} \quad ,$$

em conformidade com (3.24).

Pode-se assim relacionar as constantes desta solução com os modos incidentes e emergentes, onde os modos incidentes são aqueles em que a onda vai em direção ao buraco negro e os modos emergentes são aqueles que podemos entender como a parte refletida da equação de onda que é mandada de volta ao infinito futuro:

$$\begin{aligned} f(r) \times e^{-i\omega t} &\propto (Ae^{i\omega r^*} + Be^{-i\omega r^*}) \times e^{-i\omega t} \quad , \\ f(r) \times e^{-i\omega t} &\propto a_{em}e^{-i\omega u} + a_{in}e^{-i\omega v} \quad , \end{aligned}$$

sendo a_{em} e a_{in} as constantes relacionadas aos modos emergentes e incidentes. Em acordo com (3.20) estas constantes estão relacionadas a ω e l . Elas ainda satisfazem a relação

$$1 + |a_{em}|^2 = |a_{in}|^2 \quad . \quad (3.43)$$

Pode-se assim definir os coeficientes de transmissão e reflexão como sendo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{a_{in}} \quad \text{e} \quad \mathcal{R} = \frac{a_{em}}{a_{in}} \quad ,$$

de modo que

$$|\mathcal{T}|^2 + |\mathcal{R}|^2 = 1 \quad , \quad (3.44)$$

satisfaz a condição de normalização.

Valores para o coeficiente de transmissão (o que corresponde a uma onda propagando na direção do buraco negro) e do coeficiente de reflexão (correspondente à radiação espalhada para o infinito) podem ser encontrados por cálculo numérico, ou aproximadamente, em casos especiais como pode ser visto nas referências [54–57].

Para frequências muito altas o termo de ω^2 na equação (3.21) é muito maior do que o potencial efetivo V_{eff} na vizinhança de $r = 2M$. Assim, a barreira de potencial pode ser negligenciada e as ondas são pouco influenciadas pelo buraco negro. Para frequências muito baixas as ondas são quase que inteiramente barradas pela barreira de potencial não podendo assim chegar ao infinito.

Porém, do ponto de vista quântico os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser tratados como o processo de efeito túnel da mecânica quântica [58] onde o fluxo de probabilidade é dado por

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\nu \Phi . \quad (3.45)$$

Os coeficientes de transmissão e reflexão são definidos como

$$|\mathcal{T}| = \left| \frac{\mathcal{F}_\infty^{r\,in}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\,in}} \right| , \quad (3.46)$$

$$|\mathcal{R}| = \left| \frac{\mathcal{F}_{r_H}^{r\,em}}{\mathcal{F}_{r_H}^{r\,in}} \right| , \quad (3.47)$$

onde $\mathcal{F}_{r_H}^{r\,in}$ está relacionado com os modos incidentes da solução da equação de onda perto do horizonte, $\mathcal{F}_\infty^{r\,in}$ está relacionado com os modos incidentes da solução da equação de onda no limite assintótico, e $\mathcal{F}_{r_H}^{r\,em}$ está relacionado com os modos emergentes da solução da equação de onda perto do horizonte. Utiliza-se, neste caso, a condição de contorno de que no infinito a constante relacionada ao modo emergente da solução da equação de onda no limite assintótico é nula, o que enfatiza que há ambos os modos, incidentes e emergentes, na região próxima ao horizonte.

Uma vez que os coeficientes (3.46) e (3.47) obedecem à condição (3.44), os coeficientes (3.11) e (3.17) obedecem à relação (3.18). Tais relações decorrem da quantização do campo escalar. Define-se

$$\alpha = \frac{1}{\mathcal{T}} , \quad \beta = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} .$$

Utilizando a definição do operador número de partícula (3.19) e o espectro de temperatura encontrado pelo processo de Hawking (3.33), obtém-se

$$\begin{aligned} N &= \beta = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} , \\ \frac{1}{e^{\omega/T_H} - 1} &= \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}} ; \\ T_H &= - \frac{\omega}{\ln \mathcal{R}} . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Tal técnica é utilizada para buracos negros que têm uma solução da equação de onda exata em todo o espaço [59–62], podendo assim relacionar as constantes da solução na região perto do horizonte com as constantes da solução no limite assintótico, relacionando o coeficiente de reflexão \mathcal{R} à temperatura T_H .

3.5 Temperatura via anomalias

A fim de determinar a dinâmica de um campo de um determinado sistema físico utiliza-se o princípio da ação mínima. Segundo este princípio, a ação permanece invariante com relação a pequenas variações do campo, $\delta\varphi = 0$. O teorema de Noether estabelece que existe uma importante relação entre simetrias e leis de conservação. Classicamente, este teorema se aplica diretamente. Como exemplo, pode-se proceder a variação da ação de Einstein-Hilbert (S_{EH}) acrescida de um campo de matéria (S_M),

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta(S_{EH} + S_M) = 0 \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \delta \left[\sqrt{|g|} (R + 2\kappa \mathcal{L}_M) \right] = 0 \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{|g|} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \kappa T^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \delta(\text{matéria}) = 0,\end{aligned}$$

obtendo-se as equações de Einstein com matéria

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \quad ,$$

sendo

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \quad . \quad (3.49)$$

Estas equações estão diretamente relacionadas às propriedades,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.50)$$

do tensor momento-energia, que expressam as simetrias do campo de matéria e a lei de conservação que ele deve obedecer.

Porém, do ponto de vista quântico a variação da ação efetiva pode provocar anomalias. Entende-se por anomalias no processo de quantização de um sistema, simetrias clássicas que não são preservadas a nível quântico.

Anomalias, no sentido acima, ocorrem não apenas nas teorias quânticas de campo definidas no espaço-tempo de Minkowski, como também em sistemas gravitacionais, onde o espaço-tempo é clássico, e nele são definidos campos quânticos. No caso da gravitação tem-se as seguintes anomalias causadas pela variação da ação efetiva:

- Anomalia de Lorentz, equivalente à existência de uma parte anti-simétrica do tensor momento-energia,

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = - \langle T^{\nu\mu} \rangle \quad . \quad (3.51)$$

- Anomalia de Weyl, na qual o traço do tensor momento-energia não é nulo,

$$\langle T^\mu_\mu \rangle \neq 0 \quad . \quad (3.52)$$

(Conhecida também como a anomalia do traço)

- Anomalia de Einstein, onde o tensor momento-energia não se conserva covariantemente,

$$\nabla_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle \neq 0 \quad , \quad (3.53)$$

sendo $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ o valor esperado no vácuo do tensor momento energia. A partir de agora vamos carregar, por simplicidade, a notação $\langle T^{\mu\nu} \rangle = T^{\mu\nu}$.

A princípio a anomalia de Einstein depende diretamente da anomalia de Lorentz, porém, os autores da referência [44] demonstraram que pode-se ter a anomalia de Einstein pura, ou seja, a anomalia de Lorentz não ocorre mas a de Einstein sim e vice-versa.

Para uma revisão mais detalhada sobre anomalias é recomendável ver as referências [52, 53].

Vamos ilustrar o aparecimento de anomalias em sistemas gravitacionais, e sua importância no cômputo da temperatura de Hawking para o buraco negro, considerando um campo escalar livre, não massivo, que esta imerso na geometria de Schwarzschild.

Considere a decomposição da equação de ondas parciais de um campo escalar em um espaço-tempo estático esfericamente simétrico, solução das equações de Einstein D-dimensional. O elemento de linha pode ser escrito como

$$dS^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega_{(D-2)}^2 \quad , \quad (3.54)$$

onde $f(r)$ admite um horizonte em $f(r = r_H) = 0$. A gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r f(r) |_{r=r_H} \quad . \quad (3.55)$$

Seja a ação de um campo escalar sem massa

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \varphi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x r^{D-2} \sqrt{\gamma} \\ &\times \varphi \left[\frac{1}{f} \partial_t^2 \varphi - \frac{1}{r^{D-2}} \partial_r \left(r^{D-2} f \partial_r \varphi \right) - \frac{1}{r^2} \varphi \nabla_\Omega^2 \varphi \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde γ é o determinante da parte angular $d\Omega^2$ e ∇_Ω é a coleção de derivadas angulares. Fazendo o limite $r \rightarrow r_H$ e levando em consideração somente os termos dominantes a ação se escreve como

$$\begin{aligned} S[\varphi] &= \frac{r_H^{D-2}}{2} \int d^D x \sqrt{\gamma} \varphi \left[\frac{1}{f} \partial_t^2 \varphi - \partial_r (f \partial_r \varphi) \right] \\ &= \sum_n \frac{r_H^{D-2}}{2} \int dt dr \varphi_n \left[\frac{1}{f} \partial_t^2 \varphi_n - \partial_r (f \partial_r \varphi_n) \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo que na segunda linha o campo φ foi expandido em função dos harmônicos esféricos em $D - 2$ dimensões, ou seja, perto do horizonte o campo pode ser efetivamente

descrito por uma coleção infinita de campos em (1+1) dimensões no espaço (t, r) , onde r é a direção espacial na métrica

$$dS^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 \quad . \quad (3.58)$$

Assim pode-se reduzir uma teoria quântica de campos em um espaço-tempo de um buraco negro D-dimensional em um espaço-tempo bidimensional perto do horizonte.

A anomalia gravitacional tratada aqui será a da não conservação do tensor-momento energia em 2D, anomalia de Einstein. Na região $r_H < r \leq r_H + \delta$ a anomalia se dá na forma abaixo [45, 50, 51]:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu(r_H) \equiv \Xi_\nu(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu N_\nu^\mu \quad , \quad (3.59)$$

onde

$$N_\nu^\mu = \frac{1}{96\pi} \epsilon^{\beta\mu} \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad . \quad (3.60)$$

A anomalia surge quando os modos definidos após o horizonte, assim como os que incidem sobre o horizonte, são feitos nulos. Neste caso, obtém-se uma ação bi-dimensional, que representa uma teoria efetiva quiral perto do horizonte, que está conectada com uma teoria não quiral fora do horizonte, que contém tanto os modos incidentes quanto emergentes. Teorias bi-dimensionais quirais exibem anomalia gravitacional.

Para uma métrica do tipo (3.58) é fácil de se verificar a existência de uma anomalia do tipo tempo,

$$\begin{aligned} \Xi_t(r) &= \frac{1}{96\pi} \epsilon^{\beta\mu} \partial_\mu \partial_\alpha \Gamma_{t\beta}^\alpha \\ &= \frac{1}{96\pi} \epsilon^{tr} \partial_r \partial_r \Gamma_{tt}^r \\ &= \partial_r N_t^r \quad , \end{aligned}$$

sendo

$$N_t^r = \frac{1}{192\pi} \left(f'^2 + f''f \right) \quad . \quad (3.61)$$

Se ressalta que trata-se de um cenário estático e trabalha-se somente com os modos emergentes, modos estes que chegam para um observador no infinito futuro.

Deve-se resolver a equação (3.59) em duas regiões, $r_H < r \leq r_H + \delta$, onde ocorrem as anomalias, e $r > r_H + \delta$, onde não há anomalias. Para a métrica (3.58) com $\nu = t$ temos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T_t^\mu &= \partial_\mu T_t^\mu - \Gamma_{\mu t}^\sigma T_\sigma^\mu + \overbrace{\Gamma_{\mu\sigma}^\mu}^{=0} T_t^\sigma \\ &= \partial_r T_t^r - \Gamma_{tt}^r T_r^t - \Gamma_{rt}^t T_t^r \\ &= \partial_r T_t^r - \frac{1}{2} f f' g_{rr} T^{tr} - \frac{1}{2} \frac{f'}{f} g_{tt} T^{rt} \\ &= \partial_r T_t^r \quad . \end{aligned}$$

- Para $r > r_H + \delta$,

$$\begin{aligned}\partial_r T_t^r(\infty) &= 0 \\ T_t^r(\infty) &= a_0 \quad .\end{aligned}\tag{3.62}$$

- Para $r_H < r \leq r_H + \delta$,

$$\begin{aligned}\partial_r T_t^r(r_H) &= \Xi_t \\ T_t^r(r_H) &= a_H + \int_{r_H}^r dN_t^r(r) \\ T_t^r(r_H) &= a_H + N_t^r(r) - N_t^r(r_H) \quad .\end{aligned}\tag{3.63}$$

Acima a_0 e a_H são constantes de integração.

Combina-se o tensor momento-energia nas duas regiões de interesse, de modo que,

$$T_\nu^\mu = T_\nu^\mu(\infty)\Theta_H(r) + T_\nu^\mu(r_H)H(r) \quad ,\tag{3.64}$$

sendo $\Theta_H(r) = \Theta_H(r - r_H - \delta)$ e $H(r) = 1 - \Theta_H(r)$. $\Theta_H(r)$ é a função degrau de Heaviside que é 1 na região $r_H < r \leq r_H + \delta$ e zero nas outras regiões .

Lembramos que no sentido das distribuições as funções degraus têm a propriedade

$$\partial_r \Theta(r) = \delta(r - r_H) \quad ,\tag{3.65}$$

sendo $\delta(r - r_H)$ a função delta de Dirac.

Por meio de um difeomorfismo, $x' = x - \xi \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$, a parte anômala da ação efetiva é dada por

$$\begin{aligned}\int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} \xi^t \nabla_\mu T_t^\mu &= \int d^2x \xi^t \partial_r T_t^r \\ &= \int d^2x \xi^t \partial_r \left[T_t^r(\infty)\Theta_H(r) + T_t^r(r_H)H(r) \right] \\ &= \int d^2x \xi^t \left\{ \partial_r \left[N_t^r(r)H(r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(T_t^r(\infty) - T_t^r(r_H) + N_t^r(r) \right) \delta(r - r_H) \right\} \\ &= \int d^2x \xi^t \left\{ \partial_r \left[N_t^r(r)H(r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(a_0 - a_H + N_t^r(r_H) \right) \delta(r - r_H) \right\} \quad .\end{aligned}$$

O primeiro termo é eliminado classicamente pelo princípio variacional, porém para eliminar o termo da delta se requer que

$$a_0 = a_H - N_t^r(r_H) \quad .\tag{3.66}$$

Uma consequência da equação (3.59) é que ela não se transforma covariantemente, e para que isto ocorra é preciso definir um novo tensor momento-energia [52] dado por

$$\tilde{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu + \tilde{N}_\nu^\mu \quad , \quad (3.67)$$

onde

$$\tilde{N}_t^r = \frac{1}{192\pi} \left(f f'' - 2(f')^2 \right) \quad . \quad (3.68)$$

O valor da constante a_H é encontrado pela imposição de que o tensor momento-energia, covariante, seja nulo em cima do horizonte ($\tilde{T}_t^r(r_H) = 0$). Assim pode-se determinar o valor da constante a_H :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_t^r(r_H) &= T_t^r(r_H) + \tilde{N}_t^r(r_H) \\ 0 &= a_H - \frac{1}{96\pi} \left(f' |_{r=r_H} \right)^2 \\ a_H &= \frac{1}{96\pi} \left(f' |_{r=r_H} \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Observa-se que $\tilde{N}_t^r(r_H) = -2N_t^r(r_H)$, pois $f(r_H) = 0$. A equação (3.66) pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} a_0 &= a_H - N_t^r(r_H) \\ &= N_t^r(r_H) \\ &= \frac{1}{192\pi} \left(f' |_{r=r_H} \right)^2 \\ &= \frac{1}{48\pi} \kappa^2 \quad , \end{aligned}$$

onde κ é a gravidade superficial. A substituição da relação clássica da temperatura de buracos negros,

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad , \quad (3.70)$$

permite expressar o fluxo total do tensor momento-energia como

$$a_0 = \frac{\pi}{12} T_H^2 \quad . \quad (3.71)$$

Para o caso tratado aqui, buraco negro de Schwarzschild, temos que

$$a_0 = \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{8\pi M} \right)^2 \quad . \quad (3.72)$$

Observa-se que a temperatura, no limite assintótico, do buraco negro é indispensável para eliminar a anomalia gravitacional que ocorre na região próxima ao horizonte.

A extensão para buracos negros carregados e com rotação é feita nas referências [46–48].

Capítulo 4

Termodinâmica dos Buracos Negros Dilatônicos assintoticamente Planos

Neste capítulo faz-se uma breve apresentação da teoria Einstein-Maxwell-dilaton (EMD). Como a teoria EMD apresenta um campo dilatônico acoplado ao campo de Maxwell, a mesma pode ser levada, via uma transformação conforme, aos modelos da teoria de cordas como mostram as referências [63–65]. Esta é uma das razões que faz com que a teoria (EMD) seja de grande interesse.

Na primeira seção deste capítulo faremos um breve comentário das soluções esféricamente simétricas e assintoticamente planas da teoria EMD. Nas seções seguintes serão feitas as análises dos campos quânticos, junto com o cálculo da temperatura, para os casos não extremo e extremo da teoria.

4.1 Solução simetricamente esférica da teoria EMD

A teoria Einstein-Maxwell-dilaton (EMD) dada pela ação

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) , \quad (4.1)$$

contém um campo escalar, o dilaton ϕ , assim como um vetor A abeliano, que são acoplados à gravidade, sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor eletromagnético. A força de acoplamento entre o dilaton e o campo eletromagnético é medida por α , a chamada constante de acoplamento do dilaton. A ação está no referencial de Einstein.

Um dos casos mais interessantes da teoria EMD, e o caso que vamos nos deter durante esta tese, é o caso $\alpha = 1$ que trata do limite de baixas energias (compactificação de dimensões em um toro) da teoria de cordas heteróticas. Também pode ser observada como a truncação do setor bosônico da supergravidade $D = 4$, $N = 4$, sendo D o número de dimensões do espaço-tempo e N o gerador da supersimetria entre bósons e férmions.

Variando a ação (4.1) com respeito a $g^{\mu\nu}$, A_μ e ϕ , respectivamente obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2e^{-2\alpha\phi}\left(F_{\mu\beta}F_\nu{}^\beta - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right) \quad (4.2)$$

$$\nabla_\nu(e^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}) = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\phi(x) = -\frac{\alpha}{2}e^{-2\alpha\phi}F^2 \quad (4.4)$$

No artigo [66], os autores demonstraram que as soluções obtidas por Gibbons e Maeda [67, 68], são as únicas soluções assintoticamente planas, com horizonte de eventos não degenerado, descrevendo buracos negros regulares eletrostáticos e magnetostáticos da teoria EMD, sendo que o elemento de linha para a solução eletrostática é dado por

$$ds^2 = \frac{(r-r_+)(r-r_-)^\gamma}{r^{\gamma+1}}dt^2 - \frac{r^{\gamma+1}}{(r-r_+)(r-r_-)^\gamma}dr^2 - r^{1+\gamma}(r-r_-)^{1-\gamma}d\Omega^2, \quad (4.5)$$

onde

$$\gamma = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}. \quad (4.6)$$

Como α é a constante de acoplamento do dilaton com o campo eletromagnético, e pode assumir valores de $-\infty$ a ∞ , γ será definido no intervalo $-1 < \gamma \leq 1$.

O campo dilatônico $\phi(r)$ e o campo elétrico são dados por

$$e^{2\alpha(\phi(r)-\phi(\infty))} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\alpha/(1+\alpha^2)} \quad (4.7)$$

$$F^{tr} = \frac{Q}{r^2}e^{2\alpha\phi(\infty)}, \quad (4.8)$$

onde $\phi(\infty)$ é o valor de ϕ no limite assintótico.

Analisa-se a seguir a solução de buracos negros (4.5) com respeito a área do horizonte de eventos.

A área dos horizontes de eventos é dada pela equação

$$A = \int_{r=r_H} \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi. \quad (4.9)$$

Para o horizonte externo, $r = r_+$, de modo que

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2(r_+) \\ &= 4\pi r_+^{\gamma+1}(r_+ - r_-)^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Para o horizonte interno, $r = r_-$, e portanto

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2(r_-) \\ &= 0 \Rightarrow \text{para } \gamma \leq 0 \text{ e } 0 \leq \gamma < 1; \\ A &= 4\pi r_-^2 \Rightarrow \gamma = 1 \text{ (RN)}. \end{aligned}$$

O horizonte interno parece ser uma singularidade.

Utilizando as equações (4.2) e (4.7) determina-se o escalar de curvatura R ,

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2e^{-2\alpha\phi} g^{\mu\nu} \left(F_{\mu\beta} F_\nu{}^\beta - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \\
&= -\frac{2r_-^2}{r\gamma+3} \left(\frac{1-\gamma}{2\alpha} \right)^2 \frac{(r-r_+)}{(r-r_-)^{2-\gamma}} \quad , \tag{4.10}
\end{aligned}$$

onde pode-se observar que há uma divergência em $r = r_-$ e em $r = 0$.

A massa e a carga, dadas pela teoria ADM, são

$$M = \frac{r_+ + \gamma r_-}{2}, \quad Q = e^{-\alpha\phi_\infty} \sqrt{\frac{(1+\gamma)r_+ r_-}{2}}. \tag{4.11}$$

Logo, os horizontes de eventos serão dados por

$$r_\pm = \left(\frac{1+\alpha^2}{1\pm\alpha^2} \right) \left[M \pm \sqrt{M^2 - (1-\alpha^2)e^{2\alpha\phi_\infty} Q^2} \right]. \tag{4.12}$$

4.2 Solução da equação de Klein-Gordon para os buracos negros dilatônicos assintoticamente planos

A equação de Klein-Gordon (KG) não massiva para a métrica da equação (4.5) é dada por:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \partial_\nu \Phi(r) = 0 ; \\
&\left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \partial_r^2 \Phi(r) + \left\{ \frac{r_+}{r^2} + \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left[\left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{-1} \frac{r_-}{r^2} + \frac{2}{r} \right] \right\} \partial_r \Phi(r) \\
&+ \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{-1} \left(\partial_\theta^2 \Phi(r) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \Phi(r) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi(r) \right) \\
&- \left(1 - \frac{r_+}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{-2\gamma} \partial_t^2 \Phi(r) = 0.
\end{aligned}$$

Faz-se a separação de variáveis

$$\Phi(r) = \frac{f(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad ,$$

sendo $Y_l^m(\theta, \varphi)$ a função dos harmônicos esféricos.

A equação de KG torna-se, então,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left[\left(1 - \frac{r_+}{r} \right)^{-1} \frac{r_+}{r^2} + \left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{-1} \frac{\gamma r_-}{r^2} \right] \frac{df(r)}{dr} \\
&+ \left(1 - \frac{r_+}{r} \right)^{-2} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{-2\gamma} \left\{ \omega^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \left(1 - \frac{r_-}{r} \right)^{2\gamma-1} \right. \\
&\times \left. \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_+}{r^3} \left(1 - \frac{r_-}{r} \right) + \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) \frac{r_-}{r^3} \right] \right\} f(r) = 0.
\end{aligned}$$

Porém das geodésicas radiais nulas $ds^2 = d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} dt &= \pm \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\gamma} dr \quad , \\ dr^* &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\gamma} dr \quad . \end{aligned}$$

A partir disto, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{(1-\gamma)r_-}{r^2} \frac{df(r)}{dr^*} \\ + (\omega^2 - V_{eff}) f(r) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde V_{eff} é o potencial efetivo dado por

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2\gamma-1} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \frac{r_+}{r^3} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \frac{r_-}{r^3} \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Observa-se que sendo $r_- = 0$ e $r_+ = 2M$, tudo se passa como no caso de Schwarzschild e $\gamma = 1$ como no caso de Reissner-Nordström. Note que ao fazermos o limite assintótico ($r \rightarrow \infty$), e sendo $f(r)$ uma função que não cresça com r nas suas derivadas, temos

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \omega^2 f(r) = 0 \quad , \quad (4.15)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} f_\omega &= B e^{-i\omega v} \quad , \\ g_\omega &= A e^{-i\omega u} \quad . \end{aligned}$$

onde $u = t - r^*$ e $v = t + r^*$ são as coordenadas radiais nulas emergentes e incidentes, respectivamente. Sendo $\Phi(r)$ formado por bases ortonormais, fazendo o produto interno, encontra-se as constantes $A = B = 1/\sqrt{4\pi\omega}$.

4.2.1 Cálculo da temperatura

Como para métrica (4.5) não tem uma solução exata da equação de KG em todo o espaço e representa uma solução assintoticamente plana, não pode-se utilizar o método de cálculo da temperatura via o coeficiente de reflexão, para qualquer valor de γ . Assim sendo, aplica-se o método de cálculo da temperatura via o modelo de colapso de uma casca esférica fina fazendo a analogia com os coeficientes de Bogoliubov. Neste caso, como é possível a radiação monopolar do campo escalar, o teorema de Birkhoff pode não ser, em princípio, válido na teoria EMD. O único ponto delicado devido a isto poderia

vir do primeiro cruzamento, quando a condição de espaço-tempo estático seria talvez violada. Isto ocorre quando todo espaço-tempo é praticamente Minkowski. Porém, no segundo cruzamento da métrica quando o buraco negro já está quase formado, ou seja, quando o espaço-tempo já é quase estático, tal problema não compromete os passos principais do cálculo.

Procederemos então o cálculo de temperatura a partir do segundo cruzamento da métrica. Decorre da segunda colagem da métrica que

$$\begin{aligned} ds_{r < R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} &= ds_{r > R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} \\ dT^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2 &= \frac{(R - r_+)(R - r_-)^\gamma}{R^{\gamma+1}} dt^2 \\ &\quad - \frac{R^{\gamma+1}}{(R - r_+)(R - r_-)^\gamma} dR^2 \\ &\quad - R^{\gamma+1}(R - r_-)^{1-\gamma} d\Omega^2 \\ \frac{(R - r_+)(R - r_-)^\gamma}{R^{\gamma+1}} \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &= 1 + \left[\frac{R^{\gamma+1}}{(R - r_+)(R - r_-)^\gamma} - 1 \right] \left(\frac{dR}{dT} \right)^2 . \end{aligned}$$

Tem-se trabalhado num espaço-tempo sem rotação, $d\Omega/dT = 0$.

Assumindo que o ponto de saída do raio que vai para o infinito futuro ocorra próximo à formação do horizonte, $T \approx T_0$,

$$R = r_+ + C(T_0 - T) \quad ,$$

temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &\approx \frac{r_+^{2(\gamma+1)}}{(r_+ - r_-)^{2\gamma}} \frac{1}{(T_0 - T)^2} \\ t &= \pm \frac{r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln \left[\frac{(T_0 - T)}{E} \right] \quad , \end{aligned}$$

onde E é uma constante de integração.

Tendo a expressão para a coordenada radial nula u e fazendo a análise do raio na passagem pelo centro da casca, encontra-se

$$u = t - r^* = t - R^* \quad ,$$

onde o termo r^* é dado por

$$dr^* = \frac{r^{\gamma+1}}{(r - r_+)(r - r_-)^\gamma} dr \quad .$$

A integral em r pode ser resolvida apenas próximo ao horizonte, $r = r_+ + \delta \rightarrow \delta \ll 1$, implicando

$$\begin{aligned} dr^* &\approx \int \frac{r_+^{\gamma+1}}{\delta D^\gamma} d\delta \quad , \\ r^* &= \frac{r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln \delta = \frac{r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln C(T_0 - T) \quad . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Adotando o sinal negativo em t , obtém-se

$$\begin{aligned} u &= -\frac{r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln \frac{C}{E} (T_0 - T)^2 \\ &= -\frac{2r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln \frac{(T_0 - T)}{F} , \end{aligned}$$

onde $F^2 = E/C$.

No centro da casca tem-se

$$\begin{aligned} U &= T - R = T - r_+ - C(T - T_0) \approx v , \\ T &= \frac{v + r_+ + CT_0}{1 + C} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma} \ln \frac{(v_0 - v)}{G} \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{(v_0 - v)}{G} , \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde $G = F(1 + C)$, $v_0 = T_0 - r_+$ e κ é a gravidade superficial.

Fica evidente, por analogia ao caso de Schwarzschild tratado na seção 3.2 e ao caso de RN [69], que os coeficientes α e β obedecem a condição de normalização (3.18). A temperatura para estes buracos negros é dada por

$$T = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{4\pi r_+^{\gamma+1}} . \tag{4.18}$$

Sendo o termo dominante na região próxima ao horizonte, em (4.16) um termo logarítmico na forma

$$r^* \approx \frac{1}{2\kappa} \ln(r - r_+)$$

fica claro que o cálculo da temperatura via euclidianização da métrica, feita na seção 3.3, fornece o mesmo resultado da equação (4.18), encontrada via os coeficientes de Bogoliubov. O cálculo da temperatura via anomalias foi feito em [70].

Têm-se as seguintes características para o caso extremo $r_+ = r_-$:

$$\begin{aligned} \text{para } \gamma > 0 &\Rightarrow T = 0 , \\ \text{para } \gamma = 0 &\Rightarrow T = \frac{1}{4\pi r_+} , \\ \text{para } \gamma < 0 &\Rightarrow T = \infty , \end{aligned}$$

caso este que será tratado mais adiante.

4.2.2 Geometria perto do horizonte

A métrica (4.5) no limite perto do horizonte, definido por $r = r_+ + \rho \rightarrow \rho \ll 1$, torna-se

$$ds^2 \approx \frac{(r_+ - r_-)^\gamma \rho}{r_+^{\gamma+1}} dt^2 - \frac{r_+^{\gamma+1}}{(r_+ - r_-)^\gamma \rho} d\rho^2 - r_+^{\gamma+1} (r_+ - r_-)^{1-\gamma} \left\{ 1 + [2r_+ - (1 + \gamma)r_-] \frac{\rho}{(r_+ - r_-)r_+} \right\} d\Omega^2 .$$

Redefinindo $\rho' = \frac{r_+^{\gamma+1} \rho}{(r_+ - r_-)^\gamma}$, $t' = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma t}{r_+^{\gamma+1}}$ e levando em conta apenas os termos dominantes obtém-se

$$ds^2 \approx \rho' dt'^2 - \frac{1}{\rho'} d\rho'^2 - r_+^{\gamma+1} (r_+ - r_-)^{1-\gamma} d\Omega^2 . \quad (4.19)$$

A equação de KG sem massa para métrica (4.19), se escreve como

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi(\rho') = 0 , \left\{ \frac{1}{\rho'} \partial_{t'}^2 - \rho' \partial_{\rho'}^2 - \partial_{\rho'} - \frac{1}{r_+^{\gamma+1} (r_+ - r_-)^{1-\gamma}} \left(\partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta + \partial_\varphi^2 \right) \right\} \Phi(\rho') = 0 .$$

Consideremos a separação de variáveis

$$\Phi(x) = F(\rho') Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega t'} ,$$

sendo que $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos.

Tem-se então

$$\frac{\omega^2}{\rho'} F(\rho') + \rho' \partial_{\rho'}^2 F(\rho') + \partial_{\rho'} F(\rho') - \frac{l(l+1)F(\rho')}{r_+^{\gamma+1} (r_+ - r_-)^{1-\gamma}} = 0 .$$

Fazendo uma mudança de variável, $y = \rho'^P$, temos que

$$\ddot{F}(\rho') + \frac{\dot{F}(\rho')}{\rho'^P} - \left[\frac{l(l+1)}{AP^2 \rho'^{2P-2}} - \frac{\omega^2}{P^2 \rho'^{2P}} \right] F(\rho') = 0 ,$$

$$\ddot{F}(\rho') + \frac{\dot{F}(\rho')}{y} - \left[\frac{l(l+1)}{AP^2 \rho'^{2P-2}} - \frac{\omega^2}{P^2 y^2} \right] F(\rho') = 0 ,$$

sendo $A = r_+^{\gamma+1} (r_+ - r_-)^{1-\gamma}$ e $\dot{F}(\rho') = \partial_y F(\rho')$. Uma vez que $P = 1/2$,

$$\ddot{F}(\rho') + \frac{\dot{F}(\rho')}{y} - \left[\frac{4l(l+1)}{A} - \frac{4\omega^2}{y^2} \right] F(\rho') = 0 .$$

Redefinindo a variável $y \rightarrow 2\sqrt{\frac{l(l+1)}{A}} y$ e $n^2 = -4\omega^2$, obtém-se

$$y^2 \ddot{F}(\rho') + y \dot{F}(\rho') - [y^2 + n^2] F(\rho') = 0 . \quad (4.20)$$

A equação (4.20) representa a equação diferencial de Bessel modificada, cuja a solução será dada por

$$\begin{aligned} F(\rho') &= C_1 K_n(y) + C_2 I_n(y) \quad , \\ &= C_1 K_{2i\omega} \left(2 \sqrt{\frac{l(l+1)\rho'}{r_+^{\gamma+1}(r_+ - r_-)^{1-\gamma}}} \right) \\ &+ C_2 I_{2i\omega} \left(2 \sqrt{\frac{l(l+1)\rho'}{r_+^{\gamma+1}(r_+ - r_-)^{1-\gamma}}} \right) \quad , \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, porém sendo a função $I_n(x)$ uma função divergente na normalização dos modos de campo Φ a constante C_2 é necessariamente zero. Portanto,

$$\Phi(x) = C_1 K_{2i\omega} \left(2 \sqrt{\frac{l(l+1)\rho'}{r_+^{\gamma+1}(r_+ - r_-)^{1-\gamma}}} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{i\omega t'} \quad , \quad (4.21)$$

onde $\gamma = 1$ recai exatamente na mesma solução obtida para RN a qual implica que o campo Φ é uma função ortonormal [71].

4.3 Caso extremo $r_+ = r_-$

A métrica para o caso extremo é dada por

$$ds^2 = \frac{(r - r_+)^{\gamma+1}}{r^{\gamma+1}} dt^2 - \frac{r^{\gamma+1}}{(r - r_+)^{\gamma+1}} dr^2 - r^{1+\gamma}(r - r_+)^{1-\gamma} d\Omega^2 \quad , \quad (4.22)$$

onde, para $\gamma = 1$ e $r_+ = M$, a métrica torna-se idêntica a Reissner-Nordström extremo, com as seguintes características para a área do horizonte:

$$A = 4\pi R^2(r_+) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 < \gamma < 1 \quad , \\ 4\pi r_+^2 & \text{para } \gamma = 1 \text{ (RN extremo)} \quad , \end{cases}$$

pois

$$R^2 = r^{1+\gamma}(r - r_+)^{1-\gamma} \quad .$$

A carga máxima para o caso extremo é $Q_{\max} = \sqrt{1 + \alpha^2} e^{-\alpha\phi_\infty} M$, onde os horizontes de eventos serão

$$r_+ = r_- = (1 + \alpha^2)M \quad . \quad (4.23)$$

A equação de Klein-Gordon não massiva para a métrica (4.22) será

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{\gamma+1} \left\{ \partial_r^2 + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \frac{2}{r} \partial_r - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-2(1+\gamma)} \partial_t^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-2} \left(\partial_\theta^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \partial_\theta + \partial_\varphi^2 \right) \right\} \Phi = 0 \quad . \end{aligned}$$

Fazendo uma separação de variáveis, temos

$$\Phi(x) = \frac{f(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} .$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \frac{2r_+}{r^2} \frac{df(r)}{dr} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-2(1+\gamma)} \left[\omega^2 \right. \\ \left. - \frac{l(l+1)}{r^2} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{2\gamma} - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{1+2\gamma} \frac{2r_+}{r^3} \right] f(r) = 0 . \end{aligned}$$

Introduzindo a coordenada

$$dr^* = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1-\gamma} dr , \quad (4.24)$$

proveniente das geodésicas radiais nulas, encontra-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^\gamma \frac{(1-\gamma)r_+}{r^2} \frac{df(r)}{dr^*} + (\omega^2 - V_{eff}) f(r) = 0 , \quad (4.25)$$

onde V_{eff} é o potencial efetivo dado por

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{2\gamma} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \frac{2r_+}{r^3} \right] . \quad (4.26)$$

Observa-se que sendo $r_+ = M$ e $\gamma = 1$, tudo se passa como Reissner-Nordström extremo.

Pelas mesmas razões do caso não extremo, no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$), tem-se

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^{*2}} + \omega^2 f(r) = 0 , \quad (4.27)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} f_\omega &= B e^{-i\omega v} , \\ g_\omega &= A e^{-i\omega u} , \end{aligned}$$

sendo $u = t - r^*$ e $v = t + r^*$ as coordenadas radiais nulas. Considerando que Φ seja formado por bases ortonormais, fazendo o produto interno, encontra-se as constantes $A = B = 1/\sqrt{4\pi\omega}$.

4.3.1 Cálculo da temperatura

Pelos mesmos argumentos do caso não extremo vamos utilizar o modelo de colapso de uma casca esférica fina e podemos assim proceder a partir do segundo cruzamento da métrica.

Passamos então à segunda colagem da métrica, onde

$$\begin{aligned} ds_{r < R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} &= ds_{r > R_2}^2 \Big|_{r=R(t)} \\ \frac{(R - r_+)^{\gamma+1}}{R^{\gamma+1}} \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &= 1 + \left[\frac{R^{\gamma+1}}{(R - r_+)^{\gamma+1}} - 1 \right] \left(\frac{dR}{dT} \right)^2 . \end{aligned}$$

Para o segundo cruzamento da casca, pouco antes da formação do horizonte, o colapso da casca é acelerado e o raio da casca pode ser aproximado por

$$R = r_+ + C(T_0 - T) \quad ; \quad T \approx T_0 \quad .$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta^{\gamma+1}}{r_+^{\gamma+1}} - (\gamma + 1) \frac{\delta^{\gamma+2}}{r_+^{\gamma+2}} \right] \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &= 1 + \frac{[r_+^{\gamma+1} + (\gamma + 1)r_+^\gamma \delta - \delta^{\gamma+1}] C^2}{\delta^{\gamma+1}} \\ \left(\frac{dt}{dT} \right)^2 &\approx \frac{r_+^\gamma [r_+ + (\gamma + 1)\delta]}{\delta^{\gamma+1}} \\ &+ \frac{[r_+^{\gamma+1} + r_+^\gamma (\gamma + 1)\delta - \delta^{\gamma+1}]}{\delta^{\gamma+1}} \\ &\times \frac{C^2 r_+^\gamma [r_+ + (\gamma + 1)\delta]}{\delta^{2(\gamma+1)}} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\delta = C(T_0 - T)$.

A equação do lado direito de (4.28) parece não ter uma solução exata para todos os valores de γ assim como a equação (4.24). Devemos então fazer os diferentes casos $\gamma \neq 0$ e $\gamma = 0$ separadamente.

4.3.2 Coordenadas radiais nulas

As coordenadas radiais nulas provêm das geodésicas radiais nulas,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dt^2 - g_{11} dr^2 = 0 , \\ dt &= \pm \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}} dr , \\ dr^* &= \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}} dr . \end{aligned}$$

A integral em (4.24) pode ser resolvida apenas próximo ao horizonte:

$$r = r_+ + \delta \quad \delta^2 \ll \delta \ll 1 \quad ,$$

e

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{(r_+ + \delta)^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}} d\delta \\ &\approx \left[\frac{r_+^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}} + (\gamma + 1) \frac{r_+^\gamma}{\delta^\gamma} \right] d\delta . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para $\gamma = 0$

$$r^* = r_+ \ln \delta + \delta \quad . \quad (4.30)$$

Para $\gamma \neq 0, 1$

$$r^* = -\frac{r_+^{\gamma+1}}{\gamma} \delta^{-\gamma} - \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)} r_+^\gamma \delta^{1-\gamma} \quad . \quad (4.31)$$

Para $\gamma = 1$

$$r^* = 2r_+ \ln \delta - \frac{r_+^2}{\delta} \Rightarrow \text{caso idêntico a RN extremo} \quad . \quad (4.32)$$

4.3.3 Caso $\gamma = 0$

Para $\gamma = 0$ o termo dominante na equação (4.28) será

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &\approx \frac{C^2 r_+^2}{\delta^2}, \\ \left(\frac{dt}{dT}\right) &= \pm \frac{Cr_+}{\delta} = \pm \frac{r_+}{(T_0 - T)}, \\ t &= \pm r_+ \ln \frac{(T_0 - T)}{D}, \end{aligned}$$

onde D é uma constante de integração.

O termo dominante na equação (4.30) é

$$r^* \approx r_+ \ln \delta = r_+ \ln C(T_0 - T) \quad . \quad (4.33)$$

A coordenada emergente será,

$$u = -2r_+ \ln \frac{(T_0 - T)}{E},$$

onde $E^2 = D/C$.

No centro da casca temos

$$\begin{aligned} U &= T - R = T - r_+ - C(T - T_0) \approx v, \\ T &= \frac{v + r_+ + CT_0}{1 + C}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u &= -2r_+ \ln \frac{(v_0 - v)}{F} \\ &= -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{(v_0 - v)}{F} \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $F = E(1 + C)$ e $v_0 = T_0 - r_+$.

Utilizando a analogia com o caso de RN [69] encontra-se a temperatura do buraco negro:

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} = \frac{1}{8\pi M}, \quad (4.35)$$

que é a mesma temperatura obtida no caso de Schwarzschild feita no capítulo 3.

4.3.4 Caso $\gamma > 0$ e $\gamma \neq 1$

Para $\gamma > 0$ o termo dominante na equação (4.30) será

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &\approx \frac{C^2 r_+^{2(\gamma+1)}}{\delta^{2(\gamma+1)}} , \\ \left(\frac{dt}{dT}\right) &= \pm \frac{C r_+^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}} , \\ t &= \mp \frac{r_+^{\gamma+1}}{\gamma C^\gamma (T_0 - T)^\gamma} . \end{aligned}$$

O termo dominante da equação (4.31) é

$$r^* \approx - \frac{r_+^{\gamma+1}}{\gamma C^\gamma (T_0 - T)^\gamma} .$$

A coordenada emergente será

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ &= \frac{2r_+^{\gamma+1}}{\gamma C^\gamma (T_0 - T)^\gamma} \\ &= \frac{D}{(v_0 - v)^\gamma} , \end{aligned}$$

onde $D = 2r_+^{\gamma+1}(1 + C)^\gamma / C^\gamma \gamma$.

A relação entre os modos u e v aparece agora sobre a forma de uma lei de potência. A comparação com os casos conhecidos (Schwarzschild, RN e RN extremo) [69] sugere que não é possível extrair uma noção de temperatura neste caso. Não podemos assim fazer uma correlação com a primeira lei da termodinâmica, levando a crer que não há interpretação física para este caso.

Caso $\gamma = 1$

Tudo se passa como RN extremo [69] onde os coeficientes de Bogoliubov α e β não obedecem a condição de normalização. A análise via euclidianização da métrica é também problemática. Logo não há uma definição de partícula.

4.3.5 Caso $\gamma < 0$

Para $\gamma < 0$ o termo dominante na equação (4.30) será

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dT}\right)^2 &\approx \frac{C^2 r_+^{2(\gamma+1)}}{\delta^{2(\gamma+1)}} , \\ \left(\frac{dt}{dT}\right) &= \pm \frac{C r_+^{\gamma+1}}{\delta^{\gamma+1}} , \\ t &= \mp \frac{r_+^{\gamma+1}}{\gamma C^\gamma (T_0 - T)^\gamma} \\ &= \pm \frac{r_+^{\gamma+1}}{|\gamma|} C^{|\gamma|} (T_0 - T)^{|\gamma|} , \end{aligned}$$

sendo o termo dominante da equação (4.31) dado por

$$r^* = \frac{r_+^{\gamma+1}}{|\gamma|} C^{|\gamma|} (T_0 - T)^{|\gamma|} .$$

Portanto, a coordenada emergente será

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ &= -\frac{2r_+^{\gamma+1}}{|\gamma|} C^{|\gamma|} (T_0 - T)^{|\gamma|} \\ &= D(v_0 - v)^{|\gamma|} , \end{aligned}$$

onde $D = 2r_+^{\gamma+1} C^{|\gamma|} / |\gamma| (1 + c)^{|\gamma|}$.

Seguindo a analogia com o caso RN extremo, parece não haver uma definição de temperatura.

4.3.6 Geometria perto do horizonte

A métrica (4.22) perto do horizonte, $r = r_+ + \rho \rightarrow \rho \ll 1$, torna-se

$$ds^2 \approx \left(\frac{\rho}{r_+}\right)^{\gamma+1} dt^2 - \left(\frac{r_+}{\rho}\right)^{\gamma+1} d\rho^2 - r_+^{\gamma+1} \rho^{1-\gamma} d\Omega^2 .$$

Redefinindo a coordenada $\rho' = \rho/r_+^{\gamma+1}$, obtém-se

$$ds^2 \approx r_+^{\gamma+2+\gamma} \rho'^{\gamma+1} dt^2 - \frac{r_+^{\gamma+2-\gamma^2}}{\rho'^{\gamma+1}} d\rho'^2 - r_+^{\gamma+2-\gamma^2} \rho'^{1-\gamma} d\Omega^2 . \quad (4.36)$$

A equação de KG sem massa se escreve sob a forma

$$\begin{aligned} &\left[r_+^{-(\gamma^2+\gamma)} \rho'^{-(\gamma+1)} \partial_t^2 - r_+^{\gamma^2-\gamma-2} \rho'^{\gamma+1} \partial_{\rho'}^2 - 2r_+^{\gamma^2-\gamma-2} \rho'^{\gamma} \partial_{\rho'} \right. \\ &\left. - r_+^{\gamma^2-\gamma-2} \rho'^{\gamma-1} \left(\partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \psi + \partial_\varphi^2 \right) \right] \Phi(x) = 0 . \end{aligned}$$

Fazendo uma separação de variáveis

$$\Phi(x) = F(\rho') Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} ,$$

temos

$$\rho'^{\gamma+1} \partial_{\rho'}^2 F(\rho') + 2\rho'^{\gamma} \partial_{\rho'} F(\rho') + \left[\frac{r_+^{2-\gamma^2-\gamma\omega^2}}{\rho'^{\gamma+1}} - \frac{l(l+1)}{\rho'^{1-\gamma}} \right] F(\rho') = 0 .$$

Mudando de variável, $x = \rho'^{-P}$, encontra-se

$$\ddot{F}(\rho') + \frac{(P^2 - P) \dot{F}(\rho')}{\rho'^{-P}} + \left[\frac{r_+^{2-\gamma^2-\gamma\omega^2}}{P^2 \rho'^{2\gamma-2P}} - \frac{l(l+1)}{P^2 \rho'^{-2P}} \right] F(\rho') = 0 ,$$

sendo $\dot{F}(\rho') = \partial_x F(\rho')$.

A equação tem que ser resolvida separadamente para $\gamma \neq 0$ e $\gamma = 0$. Porém, vamos nos concentrar somente no caso $\gamma = 0$, sendo este o caso que nos fornece uma definição de temperatura e assim uma correlação com as leis da termodinâmica.

Caso $\gamma = 0$

A equação torna-se

$$\ddot{F}(\rho') + \frac{(P^2 - P)\dot{F}(\rho')}{P^2 x} + \left[\frac{r_+^2 \omega^2}{P^2 x^2} - \frac{l(l+1)}{P^2 x^2} \right] F(\rho') = 0 .$$

Fazendo $P = -1$, tem-se

$$\ddot{F}(\rho') + 2 \frac{\dot{F}(\rho')}{x} + \left[r_+^2 \omega^2 - l(l+1) \right] \frac{F(\rho')}{x^2} = 0 ,$$

sendo $F(\rho') = x^q$, obtém-se

$$q(q-1)x^{q-2} + 2qx^{q-2} + \left[r_+^2 \omega^2 - l(l+1) \right] x^{q-2} = 0 ,$$

$$q_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\nu ,$$

onde

$$\nu = \sqrt{r_+^2 \omega^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2} .$$

Portanto,

$$F = C_1 \rho'^{q_+} + C_2 \rho'^{q_-} ,$$

$$\Phi = \left(C_1 \rho'^{q_+} + C_2 \rho'^{q_-} \right) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} . \quad (4.37)$$

Vamos verificar se os diferentes modos do campo $\Phi(x)$ são ortonormais e assim encontrar as constantes $C_{1,2}$.

Observa-se que toda análise feita será válida somente para o caso

$$\omega \gg \frac{1}{r_+} \left(l + \frac{1}{2} \right) . \quad (4.38)$$

Para simplificar a notação chamaremos as constantes simplesmente por c . Assim, os diferentes modos se escrevem,

$$\Phi_{\omega,l,m} = c \rho'^{-\frac{1}{2}} \rho'^{\pm i\nu} e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (4.39)$$

Calculemos o produto interno entre dois modos diferentes, caracterizados por diferentes valores de ω , l e m :

$$(\Phi_{\omega,l,m}, \Phi_{\omega',l',m'}) = i \int d^3x \sqrt{-g} g^{tt} \Phi_{\omega',l',m'}^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi_{\omega,l,m} . \quad (4.40)$$

Para o caso que nós estamos estudando,

$$\sqrt{-g} = r_+^3 \rho' \sin \theta , \quad g^{tt} = \frac{1}{\rho'} . \quad (4.41)$$

Assim, o produto interno se torna,

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\omega,l,m}, \Phi_{\omega',l',m'}) &= i \int d\rho' d\theta d\varphi r_+^3 \sin\theta \Phi_{\omega',l',m'}^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi_{\omega,l,m} \\
&= r_+^3 c^2 (\omega + \omega') \int \frac{d\rho'}{\rho'} \rho'^{\pm i(\nu - \nu')} e^{-i(\omega - \omega')t} \\
&\times d\theta d\varphi \sin\theta Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \\
&= r_+^3 c^2 (\omega + \omega') \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \int_0^\infty \frac{d\rho'}{\rho'} \exp[\pm i(\nu - \nu') \ln \rho'] \\
&\times \exp[-i(\omega - \omega')t] ,
\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $x = \ln \rho'$, encontra-se

$$\begin{aligned}
(\Phi_{\omega,l,m}, \Phi_{\omega',l',m'}) &= r_+^3 c^2 (\omega + \omega') \exp[-i(\omega - \omega')t] \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \\
&\times \int_{-\infty}^\infty dx \exp[\pm i(\nu - \nu')x] , \\
\int (\Phi_{\omega,l,m}, \Phi_{\omega',l',m'}) d\omega' &= 4\pi r_+^2 c^2 \omega \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Determina-se então as constantes c :

$$c = \frac{1}{r_+ \sqrt{4\pi\omega}} . \tag{4.43}$$

Desta maneira, os modos se escrevem como

$$\begin{aligned}
\Phi &= \rho'^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r_+ \sqrt{4\pi\omega}} \left\{ \rho'^{i\nu} + \rho'^{-i\nu} \right\} e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) \\
&= \left(\frac{\rho}{r_+} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r_+ \sqrt{4\pi\omega}} \left\{ \left(\frac{\rho}{r_+} \right)^{i\nu} + \left(\frac{\rho}{r_+} \right)^{-i\nu} \right\} e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) \\
&= \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega r_+}} \left\{ \left(\frac{\rho}{r_+} \right)^{i\nu} + \left(\frac{\rho}{r_+} \right)^{-i\nu} \right\} e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) \\
&= (r - r_+)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left\{ \epsilon_1 (r - r_+)^{i\nu} + \epsilon_2 (r - r_+)^{-i\nu} \right\} e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) ,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= r_+^{q-} , \\
\epsilon_2 &= r_+^{q+} .
\end{aligned}$$

Para $\omega r_+ \gg l + \frac{1}{2}$, $\nu \rightarrow \omega r_+$, Φ se reduz a

$$\begin{aligned}
\Phi &= (r - r_+)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left\{ \epsilon_1 \exp[-i\omega(t - r_+ \ln(r - r_+))] \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_2 \exp[-i\omega(t + r_+ \ln(r - r_+))] \right\} Y_l^m(\theta, \phi) \\
&= (r - r_+)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left(\epsilon_1 e^{-i\omega u} + \epsilon_2 e^{-i\omega v} \right) Y_l^m(\theta, \phi) ,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

pois como estamos perto do horizonte $r^* \approx r_+ \ln(r - r_+)$. A aproximação está de acordo com a aproximação da óptica geométrica.

O cálculo da temperatura para estes buracos negros, extremos e não extremos, já foi feito nas referências [67, 68] sempre via a gravidade superficial. A gravidade superficial para a métrica (4.5) é dada por

$$\kappa = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{2r_+^{\gamma+1}} .$$

Porém, o cálculo feito aqui é um cálculo mais consistente, do ponto de vista de uma teoria quântica de campos. As condições de normalização para campo $\Phi(x)$ são satisfeitas tanto no limite assintótico como na região próxima ao horizonte para ambos os casos.

Capítulo 5

Termodinâmica dos Buracos Negros Dilatônicos não assintoticamente Planos

Neste capítulo trabalharemos com as soluções não assintoticamente planas da ação EMD. Estas soluções podem ser obtidas utilizando o limite próximo ao horizonte da métrica assintoticamente plana da teoria EMD estudada no capítulo anterior. Estudaremos estas soluções visando obter a temperatura dos buracos negros que elas representam. Daremos maior ênfase ao caso dilatônico linear, $\alpha = 1$ [62], que corresponde a $\gamma = 0$. Mostraremos que a temperatura obtida utilizando a gravidade superficial só concorda com a que é obtida usando outros métodos, particularmente os que empregam os coeficientes de transmissão e reflexão e o método de anomalias, quando $b \neq 0$. No caso $b = \gamma = 0$, a gravidade superficial é finita, mas a temperatura de fato é nula.

5.1 Solução não assintoticamente plana para a ação de Einstein-Maxwell-Dilaton

A partir das soluções assintoticamente planas descritas no capítulo anterior, é possível gerar soluções que não são assintoticamente planas. Nos basearemos, para tanto, no artigo [72] onde os autores fazem um limite perto do horizonte e quase extremo na métrica (4.5). Primeiramente, introduzimos um parâmetro auxiliar ϵ , e escrevemos

$$r_+ = r_- + \epsilon b \quad \text{e} \quad r = r_- + \epsilon \bar{r} \quad , \quad (5.1)$$

Considerando $\epsilon^2 \ll \epsilon \ll 1$, a métrica (4.5) é expressa como

$$ds^2 = \frac{\epsilon^{\gamma+1}(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma}{(r_- + \epsilon\bar{r})^{\gamma+1}} dt^2 - \frac{(r_- + \epsilon\bar{r})^{\gamma+1}}{\epsilon^{\gamma-1}(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma} d\bar{r}^2 - (\epsilon\bar{r})^{1-\gamma}(r_- + \epsilon\bar{r})^{1+\gamma} d\Omega^2 .$$

Os campos, elétrico (4.8) e escalar (4.7) são

$$F^{tr} = \frac{Q}{(r_- + \epsilon\bar{r})^2} e^{2\alpha\phi(\infty)} \quad ,$$

$$e^{2\alpha(\phi(r)-\phi(\infty))} = \left(\frac{\epsilon \bar{r}}{r_- + \epsilon \bar{r}} \right)^{1-\gamma} .$$

Para empregar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ troca-se a constante r_- , a variável t e fixa-se o valor do campo escalar no limite assintótico como se segue:

$$r_- = \epsilon^{-\alpha^2} r_0 \quad , \quad t = \epsilon^{-1} \bar{t} \quad \text{e} \quad \phi(\infty) = -\alpha \ln \epsilon . \quad (5.2)$$

A métrica e os campos são modificados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma}{(r_0 + \epsilon^{1+\alpha^2}\bar{r})^{\gamma+1}} d\bar{t}^2 - \frac{(r_0 + \epsilon^{1+\alpha^2}\bar{r})^{\gamma+1}}{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma} d\bar{r}^2 \\ &\quad - \bar{r}^{1-\gamma} (r_0 + \epsilon^{1+\alpha^2}\bar{r})^{1+\gamma} d\Omega^2 , \\ F^{tr} &= \frac{Q}{(r_0 + \epsilon^{1+\alpha^2}\bar{r})^2} , \\ e^{2\alpha\phi(r)} &= \left(\frac{\bar{r}}{r_0 + \epsilon^{1+\alpha^2}\bar{r}} \right)^{1-\gamma} . \end{aligned}$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$ds^2 = \frac{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma}{r_0^{\gamma+1}} d\bar{t}^2 - \frac{r_0^{\gamma+1}}{(\bar{r} - b)\bar{r}^\gamma} d\bar{r}^2 - \bar{r}^{1-\gamma} r_0^{1+\gamma} d\Omega^2 , \quad (5.3)$$

$$F^{tr} = \frac{Q}{r_0^2} , \quad (5.4)$$

$$e^{2\alpha\phi(r)} = \left(\frac{\bar{r}}{r_0} \right)^{1-\gamma} , \quad (5.5)$$

$$M = \frac{(1-\gamma)}{4} b , \quad (5.6)$$

$$Q = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} r_0 . \quad (5.7)$$

Acima b e r_0 estão relacionados a massa e a carga deste buraco negro. Visto, M e Q que são a massa e a carga, dadas por (4.11), depois das transformações feitas.

Fazendo algumas redefinições, como

$$\begin{aligned} \bar{t} &\rightarrow t , \\ \bar{r} &\rightarrow r , \quad r \rightarrow \frac{r}{r_0} , \\ b &\rightarrow \frac{b}{r_0} , \end{aligned}$$

obtém-se

$$ds^2 = (r - b)r^\gamma dt^2 - \frac{r_0^2}{(r - b)r^\gamma} dr^2 - r^{1-\gamma} r_0^2 d\Omega^2 , \quad (5.8)$$

$$e^{2\alpha\phi(r)} = r^{1-\gamma} , \quad (5.9)$$

onde esta métrica representa soluções de buracos negros nem assintoticamente planos nem assintoticamente anti-de Sitter (adS).

O escalar de curvatura, com as mudanças feitas, é dado por

$$R = \frac{(1 - \gamma^2)}{2} r^{\gamma-2} r_0^{-\gamma-1} (r - b) \quad . \quad (5.10)$$

A gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{b^\gamma}{2r_0} \quad . \quad (5.11)$$

Observe-se que quando $\gamma = b = 0$, a gravidade superficial tem o valor finito

$$\kappa = \frac{1}{2r_0} \quad , \quad (5.12)$$

como pode ser verificado impondo primeiro aquelas condições na métrica (5.3).

5.1.1 Coordenadas radiais nulas

Das geodésicas radiais nulas, tem-se que

$$\begin{aligned} dt &= \pm \frac{r_0}{(r - b)r^\gamma} dr \quad , \\ dr^* &= \frac{r_0}{(r - b)r^\gamma} dr \quad . \end{aligned}$$

Esta relação deve ser resolvida para cada valor de γ e b :

Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{(r - b)} dr \\ r^* &= r_0 \ln(r - b) + c \quad . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Caso $b = 0 \forall \gamma \neq 0$

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{r^{\gamma+1}} dr \quad , \\ r^* &= -\frac{r_0}{\gamma} r^{-\gamma} + c \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Caso $\gamma = b = 0$

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{r} dr \quad , \\ r^* &= r_0 \ln r + c \quad . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Caso $\gamma, b \neq 0$

Para esta situação, deve-se resolver a integral na região próxima ao horizonte de eventos, $r = b + \rho \rightarrow \rho \ll 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} dr^* &= \frac{r_0}{(r-b)r^\gamma} dr, \\ dr^* &= \frac{r_0}{\rho(\rho+b)^\gamma} d\rho, \\ dr^* &\approx \frac{r_0}{\rho b^\gamma} d\rho, \\ r^* &= \frac{r_0}{b^\gamma} \ln(r-b) + c. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Lembramos que as coordenadas incidentes (*in*) e emergentes (*em*) respectivamente, são dadas por $v = t + r^*$ e $u = t - r^*$.

5.2 Equação de Klein-Gordon não massiva para os buracos negros não assintoticamente planos

Para obter a temperatura dos buracos negros não assintoticamente planos utilizando o método devido aos coeficientes de reflexão e transmissão, precisamos analisar a solução exata da equação de Klein-Gordon, assim como as soluções aproximadas próxima ao horizonte e no infinito espacial.

A equação de Klein-Gordon não massiva para a métrica (5.8) é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi(x) &= 0, \\ \left\{ \frac{r_0^2}{(r-b)^2 r^{2\gamma}} \partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r - \frac{1}{r(r-b)} \left(\partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta + \partial_\varphi^2 \right) \right\} \Phi(x) &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi(x) = F(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t},$$

onde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ é a função dos harmônicos esféricos, obtêm-se

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{r^{2\gamma} (r-b)^2} - \frac{l(l+1)}{r(r-b)} \right] F(r) = 0.$$

Parece não ser possível resolver esta equação de maneira exata para qualquer valor de γ e b . Logo deve-se estudar casos particulares para cada valor de γ e b . Vamos tratar porém o caso dilatônico linear $\gamma = 0$ onde se tem a relação de temperatura muito bem definida se nós utilizamos a gravidade superficial. Daremos ênfase ao caso $b = 0$ onde, a partir da gravidade superficial, parece haver um produção de partícula, muito embora o buraco negro tenha massa nula. Mostraremos, na verdade, que trata-se de um efeito da geometria da métrica [62].

5.2.1 Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$

A equação de KG se reduz a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{(2r-b)}{(r-b)r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{(r-b)^2} - \frac{l(l+1)}{r(r-b)} \right] F(r) = 0 .$$

Fazendo a mudança de variável, $x = r/b$, encontra-se

$$\partial_x^2 F(r) + \frac{(2x-1)}{(x-1)x} \partial_x F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{(x-1)^2} - \frac{l(l+1)}{x(x-1)} \right] F(r) = 0 .$$

Redefinindo, $y = 1 - x$, obtém-se

$$(1-y)y \partial_y^2 F(r) + (1-2y) \partial_y F(r) + \left[\frac{E^2}{y} - \lambda^2 - \frac{1}{4} \right] F(r) = 0 ,$$

sendo que

$$E^2 = r_0^2 \omega^2 , \quad (5.17)$$

$$l(l+1) - r_0^2 \omega^2 = -\lambda^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda^2 = r_0^2 \omega^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 . \quad (5.18)$$

Definimos $F(r) = y^{iE} \Lambda$, o que reduz a equação de KG a

$$(1-y)y \partial_y^2 \Lambda + [1 + 2iE - (2iE + 2)y] \partial_y \Lambda + \left[E^2 - iE - \lambda^2 - \frac{1}{4} \right] \Lambda = 0 ,$$

chamamos

$$\begin{aligned} c &= 2iE + 1 , \\ a &= i(E + \lambda) + \frac{1}{2} , \\ b &= i(E - \lambda) + \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Assim,

$$(1-y)y \partial_y^2 \Lambda + [c - (a+b+1)y] \partial_y \Lambda - ab \Lambda = 0 ,$$

que é a equação diferencial hipergeométrica cuja a solução é

$$\begin{aligned} \Lambda &= C_1 F(a, b, c; y) + C_2 y^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; y) , \\ F(r) &= C_1 y^{iE} F(a, b, c; y) + C_2 y^{-iE} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; y) , \\ \Phi(x) &= \left[C_1 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{iE} F \left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, 1 + 2iE; \frac{b-r}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{-iE} F \left(\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} - \alpha, 1 - 2iE; \frac{b-r}{b} \right) \right] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} , \end{aligned}$$

(5.19)

com

$$\alpha = i(E + \lambda) , \beta = i(E - \lambda) \quad . \quad (5.20)$$

Solução perto do horizonte ($r = b + \rho \rightarrow \rho \ll 1$):

A equação de KG se reduz a

$$\partial_\rho^2 F(r) + \frac{1}{\rho} \partial_\rho F(r) + \frac{r_0^2 \omega^2}{\rho^2} F(r) = 0 \quad ,$$

sendo $F(r) = \rho^p$, encontra-se

$$\begin{aligned} p(p-1)\rho^{p-2} + p\rho^{p-2} + r_0^2 \omega^2 \rho^{p-2} &= 0 \\ p &= \pm i r_0 \omega \quad . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(r) &= A_1 \rho^{i r_0 \omega} + A_2 \rho^{-i r_0 \omega} \quad , \\ \Phi(x) &= \left[A_1 (r-b)^{i \omega r_0} + A_2 (r-b)^{-i \omega r_0} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i \omega t} \\ &= \left[A_{em} e^{-i \omega u} + A_{in} e^{-i \omega v} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) \quad , \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde foi usada (5.13).

Solução exata (5.19) perto do horizonte:

Para geometria perto do horizonte, $r - b \approx 0$, temos que (5.19) se reduz a

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\approx \left[C_1 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{iE} + C_2 \left(\frac{b-r}{b} \right)^{-iE} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i \omega t} \\ &= \left[C_1 \left(\frac{-1}{b} \right)^{iE} e^{-i \omega u} + C_2 \left(\frac{-1}{b} \right)^{-iE} e^{-i \omega v} \right] Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde foi utilizado o fato de $F(a, b, c; 0) = 1$.

Portanto comparando as equações (5.21) e (5.22), tem-se que

$$A_{em} = \left(\frac{-1}{b} \right)^{iE} C_1 \quad , \quad A_{in} = \left(\frac{-1}{b} \right)^{-iE} C_2 \quad . \quad (5.23)$$

Limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

A equação de KG se reduz, neste caso, a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{2}{r} \partial_r F(r) + \left[r_0^2 \omega^2 - l(l+1) \right] \frac{F(r)}{r^2} = 0 \quad ,$$

sendo $F(r) = r^q$, encontra-se

$$\begin{aligned} q^2 + q + r_0^2 \omega^2 - l(l+1) &= 0 \\ q_\pm &= -\frac{1}{2} \pm i \lambda \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 F(r) &= B_1 r^{q^+} + B_2 \rho^{q^-} \quad , \\
 \Phi(x) &= [B_1 r^{q^+} + B_2 r^{q^-}] Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[B_{em} e^{-i\omega u} + B_{in} e^{-i\omega v} \right] Y_l^m(\theta, \varphi) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Solução exata (5.19) no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

Neste limite assintótico tem-se que usar a formula de transformação das funções hipergeométricas

$$\begin{aligned}
 F(a, b, c; y) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-1)^a y^{-a} F(a, a+1-c, a+1-b; 1/y) \\
 &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-1)^b y^{-b} F(b, b+1-c, b+1-a; 1/y) \quad .
 \end{aligned}$$

Para as funções hipergeométricas da equação (5.19), tem-se que

$$\begin{aligned}
 F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, 1 + 2iE; \frac{b-r}{b}\right) &\approx \frac{\Gamma(1+2iE)\Gamma(-2i\lambda)}{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(\beta+1/2)} (-1)^{\alpha+1/2} \\
 &\times \left(\frac{-r}{b}\right)^{-(\alpha+1/2)} \\
 &+ \frac{\Gamma(1+2iE)\Gamma(2i\lambda)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)} (-1)^{\beta+1/2} \\
 &\times \left(\frac{-r}{b}\right)^{-(\beta+1/2)} \quad , \\
 F\left(\frac{1}{2} - \beta, \frac{1}{2} - \alpha, 1 - 2iE; \frac{b-r}{b}\right) &\approx \frac{\Gamma(1-2iE)\Gamma(-2i\lambda)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)} (-1)^{1/2-\beta} \\
 &\times \left(\frac{-r}{b}\right)^{\beta-1/2} \\
 &+ \frac{\Gamma(1-2iE)\Gamma(2i\lambda)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\beta)} (-1)^{1/2-\alpha} \\
 &\times \left(\frac{-r}{b}\right)^{\alpha-1/2} \quad ,
 \end{aligned}$$

pois, no limite assintótico ($r \gg b$),

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{b-r} \approx 0 \Rightarrow F(a, b, c; 1/y) \approx 1, \quad \frac{b-r}{b} \approx \frac{-r}{b} \quad .$$

A equação (5.19) se torna

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \Gamma(2i\lambda) b^{1/2-i\lambda} \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)} (-1)^{iE} C_1 \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\beta)} (-1)^{-iE} C_2 \right] e^{-i\omega u} \\
 &+ \Gamma(-2i\lambda) b^{1/2+i\lambda} \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(\beta+1/2)} (-1)^{iE} C_1 \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)} (-1)^{-iE} C_2 \right] e^{-i\omega v} \right\} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Comparando a equação (5.24) com (5.25) e utilizando as relações (5.23) temos que,

$$B_{em} = \Gamma(2i\lambda) \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\alpha+1/2)} b^{1/2+\beta} A_{em} + \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(1/2-\beta)} b^{1/2-\alpha} A_{in} \right], \quad (5.26)$$

$$B_{in} = \Gamma(-2i\lambda) \left[\frac{\Gamma(1+2iE)}{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(\beta+1/2)} b^{1/2+\alpha} A_{em} + \frac{\Gamma(1-2iE)}{\Gamma(1/2-\alpha)\Gamma(1/2-\alpha)} b^{1/2-\beta} A_{in} \right]. \quad (5.27)$$

Esta análise no limite assintótico é válida somente para o caso em que

$$r_0\omega \gg l + \frac{1}{2},$$

na equação (5.18), onde foi utilizado também que, no limite assintótico, $r^* = r_0 \ln(r-b) \approx r_0 \ln r$.

5.2.2 Caso $\gamma = b = 0$

A equação de KG se reduz a

$$\partial_r^2 F(r) + \frac{2}{r} \partial_r F(r) + \left[\frac{r_0^2 \omega^2}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (5.28)$$

A equação diferencial acima foi resolvida para o caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$ no limite assintótico, cuja solução é a equação (5.24) no limite em que

$$r_0\omega \gg l + \frac{1}{2}.$$

5.3 Temperatura de buracos negros não assintoticamente planos

5.3.1 Caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$

Por ter uma solução exata bem comportada, podendo-se assim relacionar as constantes da solução na região perto do horizonte com as constantes da solução no limite assintótico, usaremos a técnica de relacionar o coeficiente de reflexão \mathcal{R} à temperatura T .

A fórmula covariante do fluxo dada pela equação (3.45) é resolvida para métrica (5.8) com $\gamma = 0$ onde $g = -r_0^6 r^2$ é o determinante da métrica. Os coeficientes de transmissão e reflexão são dados pelas equações (3.46) e (3.47). Estes coeficientes obedecem à condição de normalização (3.44). Temos, então, que calcular os fluxos incidentes (*in*) e emergentes (*em*), na região próxima ao horizonte de eventos ($r = r_h$) e no limite assintótico (∞).

Usaremos a condição de contorno na qual no limite assintótico, $r \rightarrow \infty$, a constante B_{em} é nula, e na região onde calculamos os fluxos emergentes as constantes in 's são nulas e vice-versa, quando calculamos os fluxos incidentes as constantes em 's são nulas.

Calculemos agora os fluxos.

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{rem}$ onde $A_{in} = 0$,

$$\mathcal{F}_{r_H}^{rem} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_{r_H} g_{r_H}^{rr}} (F_\delta^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_r F_\delta^{em} \quad ,$$

onde $\delta = r - b$.

Portanto utilizando a solução (5.21), temos

$$\begin{aligned} \partial_r F_\delta^{em} &= \partial_r A_{em} (r - b)^{iE} \\ &= i A_{em} E (r - b)^{iE-1} \quad , \\ \partial_r (F_\delta^{em})^* &= \partial_r A_{em}^* (r - b)^{-iE} \\ &= -i A_{em}^* E (r - b)^{-(iE+1)} \quad . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r_H}^{rem} &= \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_{r_H} g_{r_H}^{rr}} (F_{r_H}^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_r F_{r_H}^{em} \\ &\approx -r_0^2 b (r - b) [(F_\delta^{em})^* \partial_r F_\delta^{em} - F_\delta^{em} \partial_r (F_\delta^{em})^*] \\ &= -4\pi r_0^2 E b A_{em} A_{em}^* \quad . \end{aligned} \tag{5.29}$$

- Para \mathcal{F}_∞^{rin} sendo agora $B_{em} = 0$

$$\mathcal{F}_\infty^{rin} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_\infty g_\infty^{rr}} (F_\infty^{in})^* \overleftrightarrow{\partial}_r F_\infty^{in} \quad .$$

Utilizando a solução (5.24),

$$\begin{aligned} \partial_r F_\infty^{in} &= \partial_r B_{in} r^{-(i\lambda+1/2)} \\ &= -B_{in} \left(i\lambda + \frac{1}{2} \right) r^{-(i\lambda+3/2)} \quad , \\ \partial_r (F_\infty^{in})^* &= \partial_r B_{in}^* r^{i\lambda-1/2} \\ &= B_{in}^* \left(i\lambda - \frac{1}{2} \right) r^{i\lambda-3/2} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\infty^{rin} &\approx -\frac{2\pi}{i} r_0^2 \left[(F_\infty^{in})^* \partial_r F_\infty^{in} - F_\infty^{in} \partial_r (F_\infty^{in})^* \right] \\ &= 4\pi r_0^2 \lambda B_{in} B_{in}^* \quad . \end{aligned} \tag{5.30}$$

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{rin}$ onde $A_{em} = 0$

$$\mathcal{F}_{r_H}^{rin} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g_{r_H} g_{r_H}^{rr}} \left(F_{\delta}^{in} \right)^* \overleftrightarrow{\partial}_r F_{\delta}^{in} ,$$

onde $\delta = r - b$.

Utilizando a solução (5.21),

$$\begin{aligned} \partial_r F_{\delta}^{in} &= \partial_r A_{in} (r - b)^{-iE} \\ &= -i A_{in} E (r - b)^{-(iE+1)} , \\ \partial_r \left(F_{\delta}^{in} \right)^* &= \partial_r A_{in}^* (r - b)^{iE} \\ &= i A_{in}^* E (r - b)^{iE-1} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r_H}^{rin} &\approx -\frac{2\pi}{i} r_0^2 b (r - b) \left[\left(F_{\delta}^{in} \right)^* \partial_r F_{\delta}^{in} - F_{\delta}^{in} \partial_r \left(F_{\delta}^{in} \right)^* \right] \\ &= 4\pi r_0^2 E b A_{in} A_{in}^* . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Portanto, os coeficientes de reflexão e transmissão serão

$$\mathcal{R} = \frac{A_{em} A_{em}^*}{A_{in} A_{in}^*} , \quad (5.32)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\lambda B_{in} B_{in}^*}{E b A_{in} A_{in}^*} . \quad (5.33)$$

Pelas equações (5.26) e (5.27) e empregando a condição de contorno $B_{em} = 0$ e das definições (5.20), encontra-se

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{\left[|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2 \right]^2}{\left[|\Gamma(1/2 + i(E - \lambda))|^2 \right]^2} A_{in} A_{in}^* , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{|\Gamma(2i\lambda)|^2 |\Gamma(1 + 2iE)|^2}{\left[|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2 \right]^2} \left\{ 1 - \frac{\left[|\Gamma(1/2 + i(E + \lambda))|^2 \right]^2}{\left[|\Gamma(1/2 + i(E - \lambda))|^2 \right]^2} \right\}^2 \\ &\times b A_{in} A_{in}^* . \end{aligned}$$

Utilizando as seguintes relações da função gamma

$$\begin{aligned} |\Gamma(iy)|^2 &= \frac{\pi}{y \sinh[\pi y]} , \\ \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 &= \frac{\pi}{\cosh[\pi y]} , \\ |\Gamma(1 + iy)|^2 &= \frac{\pi y}{\sinh[\pi y]} , \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde y é real, encontra-se

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{\cosh^2[\pi(E - \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} A_{in} A_{in}^* , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{E b \sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda]}{\lambda \cosh^2[\pi(E + \lambda)]} A_{in} A_{in}^* . \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathcal{R} = \frac{A_{em}A_{em}^*}{A_{in}A_{in}^*} = \frac{\cosh^2[\pi(E - \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} , \quad (5.35)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\lambda B_{in}B_{in}^*}{Eb A_{in}A_{in}^*} = \frac{\sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} . \quad (5.36)$$

A condição de normalização é,

$$\mathcal{T} + \mathcal{R} = \frac{\sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} + \frac{\cosh^2[\pi(E - \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} .$$

Utilizando as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) &= \frac{1}{2} [\cosh(2x) + 1] , \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y) , \end{aligned}$$

encontra-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} + \mathcal{R} &= \frac{1}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} \left\{ \sinh[2\pi E] \sinh[2\pi \lambda] + \frac{\cosh[2\pi(E - \lambda)] + 1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} \left\{ \frac{\cosh[2\pi(E + \lambda)] + 1}{2} \right\} \\ &= \frac{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]}{\cosh^2[\pi(E + \lambda)]} \\ &= 1 \quad \text{c.q.d.} . \end{aligned}$$

No limite de altas frequências, $\omega \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\omega^2 r_0^2 - \left(l - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &\approx \omega r_0 \\ &= E . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{1}{\cosh^2[2\pi E]} , \\ \mathcal{T} &= \frac{\sinh^2[2\pi E]}{\cosh^2[2\pi E]} . \end{aligned}$$

Portanto, no limite de altas frequências,

$$\begin{aligned} \cosh[2\pi E] &= \frac{e^{2\pi E} + e^{-2\pi E}}{2} \\ &\approx \frac{e^{2\pi E}}{2} , \\ \mathcal{R} &\approx \frac{4}{e^{4\pi E}} . \end{aligned}$$

Da relação de temperatura (3.48), obtemos

$$\begin{aligned}
 T_H &= -\frac{\omega}{\ln(4e^{-4\pi E})} \\
 &\approx \frac{\omega}{\ln e^{4\pi E}} \\
 &= \frac{1}{4\pi r_0}, \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

o que confirma a temperatura obtida pela gravidade superficial.

• Temperatura via anomalias

Como foi visto na seção 3.5 o elemento de linha pode ser reduzido a um elemento de linha em 2D, que pode ser usado na análise das anomalias perto do horizonte,

$$ds^2 = \frac{(r-b)}{r_0} dt^2 - \frac{r_0}{(r-b)} dr^2. \tag{5.38}$$

Por se tratar de um buraco negro carregado deve-se tratar a anomalia de calibre, dada por [46]

$$\nabla_\mu J^\mu = \pm \frac{e^2}{4\pi\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu, \tag{5.39}$$

onde J^μ é a corrente não conservada, A_ν o potencial elétrico e $\epsilon^{01} = \epsilon^{tr} = 1$, sendo que +(-) corresponde às coordenadas incidentes(emergentes). Como no caso gravitacional estaremos interessados em tratar dos modos emergentes.

Em duas dimensões (t, r) a equação (5.39) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu J^\mu &= \partial_\mu J^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu J^\lambda \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J^\mu) \\
 &= \partial_\mu J^\mu,
 \end{aligned}$$

não esquecendo que trata-se de uma solução estática, de modo que $J^\mu = J^\mu(r)$ e $A^\mu = A^\mu(r)$.

Então deve-se resolver a equação (5.39) nas duas regiões de interesse:

- $r > r_H + \delta$, onde todas as leis de conservação são satisfeitas,

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu J^\mu(\infty) &= \partial_\mu J^\mu(\infty) = \partial_r J^r(\infty) = 0, \\
 J^r(\infty) &= c_0. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

- $r_H < r \leq r_H + \delta$, onde ocorrem as anomalias,

$$\begin{aligned}
 \partial_r J^r(r_H) &= -\frac{e^2}{4\pi} \epsilon^{rt} \partial_r A_t, \\
 J^r(r_H) &= c_H + \frac{e^2}{4\pi} (A_t(r) - A_t(r_H)), \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

sendo c_0 e c_H constantes de integração.

Sob uma transformação infinitesimal de calibre, a variação da ação efetiva (omitindo os modos incidentes perto do horizonte) é dada por

$$-\delta W = \int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} \lambda \nabla_\mu J_{(2)}^\mu \quad ,$$

onde λ é um parâmetro de calibre. Como no caso da anomalia gravitacional a corrente é escrita como a soma da corrente nas duas regiões

$$J^\mu = J^\mu(\infty)\Theta_H(r) + J^\mu(r_H)H(r) \quad , \quad (5.42)$$

onde $\Theta_H(r) = \Theta_H(r - r_H - \delta)$ e $H(r) = 1 - \Theta_H(r)$.

Utilizando as equações (5.40) e (5.41), encontra-se

$$\begin{aligned} \int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} \lambda \nabla_\mu J_{(2)}^\mu &= \int d^2x \lambda \left\{ \partial_r (J_o^r \Theta_H(r)) + \partial_r [J_H^r (1 - \Theta_H(r))] \right\} \\ &= \int d^2x \lambda \left\{ \partial_r \left(\frac{e^2}{4\pi} A_t(r) H(r) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(c_0 - c_H + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r_H) \right) \delta(r - r_H) \right\} . \end{aligned}$$

Acima, o primeiro termo é zero classicamente, pois trata-se de uma derivada total. Porém, para zerar o segundo termo tem-se que

$$c_0 = c_H - \frac{e^2}{4\pi} A_t(r_H) \quad . \quad (5.43)$$

Novamente como na anomalia da conservação do tensor momento energia a equação (5.39) não se transforma covariantemente, tendo-se que definir uma nova corrente [49], como sendo

$$\tilde{J}^\mu = J^\mu \mp \frac{e^2}{4\pi\sqrt{-g}} \epsilon^{\lambda\mu} A_\lambda \quad , \quad (5.44)$$

onde o sinal positivo representa os modos emergentes.

Para determinar o valor da constante c_H , impõe-se que a corrente (5.44) seja nula em cima do horizonte, logo,

$$\begin{aligned} \tilde{J}^r(r_H) &= J_H^r(r_H) + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r_H) = 0; \\ c_H &= -\frac{e^2}{4\pi} A_t(r_H) \quad . \end{aligned} \quad (5.45)$$

A substituição de c_H na equação (5.43) determina o fluxo de carga

$$c_0 = -\frac{e^2}{2\pi} A_t(r_H) \quad . \quad (5.46)$$

O potencial fornecido pelas equações (5.4) e (5.7), é dado por

$$\begin{aligned} F^{tr} &= \frac{1}{\sqrt{2}r_0} \\ \partial_r A_t(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}r_0} \\ A_t(r_H) &= \frac{r_H}{\sqrt{2}r_0} \quad , \end{aligned} \quad (5.47)$$

lembrando que o raio do horizonte de eventos é $r_H = b$. O fluxo de carga será

$$c_0 = -\frac{e^2}{2\pi} \frac{b}{\sqrt{2}r_0} . \quad (5.48)$$

Na presença de uma corrente, mesmo classicamente, o tensor momento-energia não é conservado:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = F_{\mu\nu} J^\mu . \quad (5.49)$$

Logo, levando em conta todos os campos presentes na ação e fazendo a variação dos mesmos em $S[g_{\mu\nu}, A_\mu, \varphi]$, utiliza-se a seguinte equação para a variação do tensor momento-energia [46]

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = F_{\mu\nu} J^\mu + A_\nu \nabla_\mu J^\mu + \Xi_\nu . \quad (5.50)$$

Se ressaltar que trata-se de um cenário estático e trabalha-se somente com os modos emergentes.

Resolvendo a equação (5.50) nas regiões de interesse, para $\nu = t$

- em $r > r_H + \delta$,

$$\begin{aligned} \partial_r T_t^r(\infty) &= F_{rt} J^r(\infty) \\ \partial_r T_t^r(\infty) &= c_0 \partial_r A_t(r) \\ T_t^r(\infty) &= a_0 + c_0 A_t(r) . \end{aligned} \quad (5.51)$$

- Em $r_H < r \leq r_H + \delta$,

$$\begin{aligned} \partial_r T_t^r(r_H) &= F_{rt} J^r(r_H) + A_t(r) \partial_r J^r(r_H) + \Xi_t \\ &= J^r(r_H) \partial_r A_t(r) + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r) \partial_r A_t(r) + \partial_r N_t^r . \end{aligned}$$

Utilizando as equações (5.41), (5.45) e (5.46) decorre que

$$\begin{aligned} \partial_r T_t^r(r_H) &= \left[c_H + \frac{e^2}{4\pi} (A_t(r) - A_t(r_H)) \right] \partial_r A_t(r) \\ &+ \frac{e^2}{4\pi} A_t(r) \partial_r A_t(r) + \partial_r N_t^r \\ T_t^r(r_H) &= a_H + \int_{r_+}^r d \left(c_0 A_t(r) + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r) + N_t^r(r) \right) . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Acima a_0 e a_H são constantes de integração.

Combinando o tensor momento-energia nas duas regiões de interesse, $T^\mu{}_\nu = T_\nu^\mu(\infty)\Theta_H(r) + T_\nu^\mu(r_H)H(r)$, a parte anômala da ação efetiva é dada por

$$\int d^2x \sqrt{-g_{(2)}} \xi^t \nabla_\mu T^\mu{}_t = \int d^2x \xi^t \partial_r (T_t^r(\infty)\Theta_H(r) + T_t^r(r_H)H(r))$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^2x \xi^t \left\{ c_0 \partial_r A_t(r) + \partial_r \left[\left(\frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r) + N_t^r(r) \right) \right. \right. \\
&\times \left. \left. H(r) \right] + \left(a_0 - a_H - \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_H) + N_t^r(r_H) \right) \right. \\
&\times \left. \delta(r - r_H) \right\} .
\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos são eliminados classicamente pelo princípio variacional, porém, para eliminar o termo da delta requer-se

$$a_0 = a_H + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_H) - N_t^r(r_H) \quad , \quad (5.53)$$

de forma análoga ao caso tratado na seção 3.5, onde impõe-se que o tensor momento-energia (3.67) seja nulo em cima do horizonte, encontra-se o valor da constante a_H , como sendo (3.69). Assim, pode-se encontrar o valor do fluxo do tensor momento energia (5.53), como sendo

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_H) + \frac{\pi}{12} T_H^2 \\
&= \frac{e^2 b^2}{8\pi r_0^2} + \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{4\pi r_0} \right)^2 \quad , \quad (5.54)
\end{aligned}$$

confirmando a temperatura (5.37).

O cálculo da temperatura é bem definido mesmo sendo um pouco estranho que a temperatura não dependa do parâmetro de massa b . Mas, fazendo o cálculo da gravidade superficial para a métrica (5.3) e utilizando a relação de temperatura (2.33), temos que

$$T_H = \frac{b^\gamma}{4\pi r_0} \quad , \quad (5.55)$$

onde pode-se observar que o fato da temperatura, para caso $\gamma = 0$, não depender da massa é uma propriedade causada pela geometria do problema, sendo válida a relação de temperatura para o caso estudado.

5.3.2 Caso $\gamma = b = 0$

Este caso representa o vácuo dilatônico $|0, r_0\rangle$ que é dado pela métrica

$$ds^2 = \frac{r}{r_0} dt^2 - \frac{r_0}{r} dr^2 - r r_0 d\Omega^2 \quad , \quad (5.56)$$

que descreve também a geometria no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$) no caso dilatônico linear $\gamma = 0$ e $b \neq 0$. Note-se que neste caso, o horizonte coincide com a singularidade. Entretanto, uma vez que a singularidade é do tipo luz, temos ainda assim um verdadeiro buraco negro, visto que sinais emergindo da singularidade serão recebidos por um observador externo em um tempo infinito. Logo, temos efetivamente uma estrutura de buraco negro e não uma singularidade nua.

Utilizando o cálculo da temperatura via a gravidade superficial para a métrica (5.56), teríamos que

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_0} .$$

É muito estranho que uma métrica que representa o vácuo da teoria possa exibir criação de partículas sem uma fonte gravitacional massiva. Porém, pode-se observar que a equação de Klein-Gordon (5.28) é a mesma tanto no limite assintótico como na região próxima ao "horizonte" $r_H = b = 0$, como era de se esperar no caso de vácuo.

Esta análise fica mais clara fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$x = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) , \quad \tau = \frac{t}{r_0} ,$$

colocando a métrica na forma

$$ds^2 = \Sigma^2 \left(d\tau^2 - dx^2 - d\Omega^2 \right) , \quad (5.57)$$

onde $\Sigma = r_0 e^{x/2} = r r_0$. O vácuo no caso dilaton linear representa uma métrica conforme ao produto $M_2 \times S_2$, um espaço de Minkowski bi-dimensional com uma bi-esfera de raio unitário.

Redefinindo o campo escalar,

$$\Phi = \Sigma^{-1} \Psi , \quad (5.58)$$

a equação de KG torna-se uma equação de campos livres,

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Sigma^{-1} \Psi = 0 , \\ \Sigma^{-3} \left(\partial_\tau^2 - \partial_x^2 - \nabla_\Omega^2 + \frac{1}{4} \right) \Psi &= 0 , \end{aligned}$$

onde ∇_Ω^2 é o operador diferencial da bi-esfera.

Separando Ψ em função dos harmônicos esféricos, a equação de KG reduz-se para

$$\nabla_2^2 \Psi + \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \Psi = 0 , \quad (5.59)$$

onde ∇_2^2 é o laplaciano em M_2 . A equação (5.59) representa uma equação de ondas planas onde a norma da equação de KG em 4 dimensões se reduz à norma em M_2 :

$$\|\Phi\|^2 = \frac{1}{2i} \int d^3x \sqrt{-g} g^{0\mu} \Phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi = \frac{2\pi}{i} \int dx \Psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\tau \Psi . \quad (5.60)$$

Claramente isto reproduz uma equação de campos livres onde não há produção de partículas.

• **Temperatura via anomalias**

Seja a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \psi^* \nabla^2 \psi .$$

Redefinindo o campo $\psi = \Sigma^{-1} \Psi$, a ação para métrica (5.57) se escreve como

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \Sigma^{-1} \Psi^* \nabla^2 (\Sigma^{-1} \Psi) \\ &= \int d^4x \sin \theta \Psi^* \left(\partial_\tau^2 - \partial_x^2 - \nabla_\Omega^2 + \frac{1}{4} \right) \Psi. \end{aligned}$$

Claramente isto representa uma equação de campos livres, como mostra [62], onde não há anomalias para serem tratadas. Esta relação é compatível com a análise anterior do campo de KG.

É, assim, muito importante analisar o aspecto da teoria quântica de campos para se saber como é dada a relação da temperatura com a gravidade superficial ao invés de simplesmente usar a relação tradicional.

Capítulo 6

Buracos Negros Dilatônicos Lineares com Rotação

Neste capítulo trataremos da teoria dilatônica linear [73], $\gamma = 0 \rightarrow \alpha = 1$, visto a equação (4.6). Neste caso a teoria EMD é reduzida à teoria de cordas heteróticas em 4D [76]. No caso dilatônico linear a teoria EMD está contida dentro de uma teoria mais ampla: teoria Einstein-Maxwell-dilatônica-axiônica (EMDA). Esta teoria, com $\alpha = 1$, admite uma aplicação do modelo σ , podendo gerar uma métrica com rotação que será a generalização da métrica estática estudada no capítulo anterior para o caso $\alpha = 1$.

Será estudada neste capítulo a termodinâmica dos buracos negros que podem ser determinados nesta teoria. Consideraremos agora uma solução com rotação [73], onde a interpretação da energia para uma partícula criada dentro da ergoregião torna-se complicada pela ausência de uma definição clara de vácuo nesta região.

6.1 Dilaton linear com rotação

A ação da teoria EMDA é descrita por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^{4\phi}}{2} \partial_\mu \vartheta \partial^\mu \vartheta - \vartheta F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (6.1)$$

que além do dilaton ϕ e do vetor A , já presentes na teoria EMD, contém um campo pseudo-escalar, o axion ϑ , e onde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o dual do tensor eletromagnético dado por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (6.2)$$

sendo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ o tensor completamente anti-simétrico.

A métrica [73],

$$ds^2 = \frac{\Delta(e)}{r_0 r} dt^2 + 2a \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{r_0 r}{\Delta} dr^2 - r_0 r d\Omega^2, \quad (6.3)$$

representa a geometria do caso dilatônico linear com rotação, da teoria EMDA. Em (6.3), temos que

$$\begin{aligned}\Delta(e) &= (r - r_+^{(e)})(r - r_-^{(e)}) = r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta \quad , \\ r_{\pm}^{(e)} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad , \\ \Delta &= (r - r_+)(r - r_-) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad , \\ r_{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad ,\end{aligned}$$

e de (6.3), tem-se

$$\begin{aligned}g &= -(r_0 r \sin \theta)^2 \quad , \\ \Omega_h &= \left. \frac{gt_{\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \right|_{r=r_+} = \frac{a}{r_0 r_+} \quad , \\ A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\rho^2}{rr_0} dt + a \sin^2 \theta d\varphi \right] \quad , \\ \rho^2 &= r^2 + a \cos^2 \theta \quad , \\ \kappa &= \frac{r_+ - r_-}{2r_0 r_+} \quad ,\end{aligned}$$

sendo g o determinante da métrica, Ω_h a velocidade angular em cima do horizonte, r_{\pm} os horizontes externo e interno, $r_+^{(e)}$ o limite da região estacionária, $M = b/2$ a massa da teoria, obtida pelo formalismo quasi-local, A o quadri-potencial da teoria e κ a gravidade superficial da métrica (6.3). A métrica (6.3) e todas as identidades acima estão definidas na referência [73].

Utilizando a relação

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta_{\nu}^{\alpha} \quad , \quad (6.4)$$

encontramos as componentes contravariantes da métrica:

$$\begin{aligned}g^{tt} &= \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (gt_{\varphi})^2} = \frac{rr_0}{\Delta} \quad , \\ g^{\varphi\varphi} &= \frac{g_{tt}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (gt_{\varphi})^2} = -\frac{1}{rr_0 \sin^2 \theta} \frac{\Delta(e)}{\Delta} \quad , \\ g^{t\varphi} &= -\frac{gt_{\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} g^{tt} = \frac{a}{\Delta} \quad , \\ g^{rr} &= \frac{1}{g_{rr}} = -\frac{\Delta}{r_0 r} \quad , \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{g_{\theta\theta}} = -\frac{1}{r_0 r} \quad .\end{aligned} \quad (6.5)$$

Antes de prosseguirmos com o cálculo dos campos quânticos vamos dar uma breve passagem pelas geodésicas no espaço-tempo deste buraco negro.

6.2 Cálculo das Geodésicas

Podemos definir a lagrangiana da métrica (6.3) da seguinte forma:

$$2\mathcal{L} = \frac{\Delta(e)}{r_0 r} \dot{t}^2 + 2a \sin^2 \theta \dot{t} \dot{\varphi} - \frac{r_0 r}{\Delta} \dot{r}^2 - r_0 r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad , \quad (6.6)$$

onde adotou-se $\dot{F} = dF/ds$. A hamiltoniana do sistema será, então,

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \quad , \quad (6.7)$$

onde $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ e P_μ é o momento conjugado dado por

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad . \quad (6.8)$$

Temos as seguintes componentes dos momentos conjugados para métrica (6.3):

$$P_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{\Delta(e)}{r_0 r} \dot{t} + a \sin^2 \theta \dot{\varphi} = E \quad , \quad (6.9)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \sin^2 \theta (a \dot{t} - r_0 r \dot{\varphi}) = L \quad , \quad (6.10)$$

$$P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = -\frac{r_0 r}{\Delta} \dot{r} \quad , \quad (6.11)$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -r_0 r \dot{\theta} \quad . \quad (6.12)$$

Como a métrica não depende nem de t nem de φ temos as constantes de movimento E e L . Assim sendo, a equação (6.7) torna-se

$$2\mathcal{H} = E \dot{t} + L \dot{\varphi} - r_0 r \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) \quad .$$

Combinando as equações (6.9) e (6.10) tem-se que,

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} (r r_0 E + a L) \quad , \quad (6.13)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r r_0 \Delta} \left(r r_0 a E - \frac{\Delta(e)}{\sin^2 \theta} L \right) \quad . \quad (6.14)$$

Como \mathcal{H} independe de t pode-se deduzir que $2\mathcal{H} = \delta_1$ onde, sem perda de generalidade, se tem

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{para geodésicas tipo tempo,} \\ 0 & \text{para geodésicas tipo luz.} \end{cases}$$

Encontra-se

$$\delta_1 = \frac{r r_0}{\Delta} \left(E + \frac{a L}{r r_0} \right)^2 - \frac{L^2}{r r_0 \sin^2 \theta} - r_0 r \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) \quad .$$

Para simplificar os cálculos vamos trabalhar com as geodésicas tipo luz no plano equatorial $\theta = \pi/2$, onde temos que

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r_0^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{L}{r_0} a E + \frac{L^2}{r_0^2} M \right) \quad .$$

Ao contrário das equações da geodésica para métrica de Kerr, onde pode-se fazer uma simples relação entre as constantes L e E , como sendo $L = -aE$, aqui parece não ser possível fazer isto. A melhor escolha para que possamos resolver as equações diferenciais é fazermos $L = 0$. Assim, encontra-se

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \pm E \quad , \\ \dot{t} &= \mp \frac{rr_0}{\Delta} \dot{r} \\ dt &= \mp \frac{rr_0}{\Delta} dr \quad , \\ \dot{\varphi} &= \mp \frac{a}{\Delta} \dot{r} \\ d\varphi &= \mp \frac{a}{\Delta} dr \quad ,\end{aligned}$$

e resolve-se as equações (6.15) e (6.15) nas regiões próximas ao horizonte e no limite assintótico.

Perto do horizonte ($r = r_+ + \delta \rightarrow \delta \ll 1$):

$$\begin{aligned}dt &\approx \mp \frac{r_+ r_0}{\Delta} dr = \mp \frac{r_+ r_0}{(r_+ - r_-) \delta} d\delta \\ t &\approx \mp \frac{r_+ r_0}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) \\ r^* &= \frac{r_+ r_0}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) \quad ,\end{aligned}\tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \mp \frac{a}{\Delta} \dot{r} \approx \mp \frac{a}{(r_+ - r_-) \delta} d\delta \\ \varphi &\approx \mp \frac{a}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) \\ \varphi^* &= \frac{a}{(r_+ - r_-)} \ln(r - r_+) \quad .\end{aligned}\tag{6.16}$$

Limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}dt &= \mp \frac{rr_0}{\Delta} dr \approx \mp \frac{r_0}{r} dr \\ t &\approx \mp r_0 \ln r \\ r^* &= r_0 \ln r \quad ,\end{aligned}\tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \mp \frac{a}{\Delta} \dot{r} \approx \mp \frac{a}{r^2} dr \\ \varphi &\approx \pm \frac{a}{r} \approx 0 \\ \varphi^* &= \frac{a}{r} \approx 0 \quad .\end{aligned}\tag{6.18}$$

Podemos ver ainda que estes resultados estão de acordo com a geometria estudada.

Note que

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{a}{rr_0} \quad ,\tag{6.19}$$

representa a velocidade angular para métrica (6.3) do caso dilatônico linear com rotação.

6.2.1 Solução da equação de KG

A equação de KG para métrica (6.3) é:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = 0 , \\ & \Delta \partial_r^2 \Phi(x) + 2(r - M) \partial_r \Phi(x) + \partial_\theta^2 \Phi(x) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \Phi(x) \\ & + \frac{\Delta(e)}{\Delta \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \Phi(x) - \frac{(r_0 r)^2}{\Delta} \partial_t^2 \Phi(x) - \frac{2ar_0 r}{\Delta} \partial_t \partial_\varphi \Phi(x) = 0 . \end{aligned}$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi(x) = R(r)S(\theta)e^{i(m\varphi - \omega t)} , \quad (6.20)$$

encontra-se

$$\begin{aligned} & \left[\Delta \partial_r^2 R(r) + 2(r - M) \partial_r R(r) + \frac{1}{\Delta} (\bar{\omega} r - am)^2 R(r) \right] S(\theta) \\ & + \left[\partial_\theta^2 S(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta S(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} S(\theta) \right] R(r) = 0 , \end{aligned}$$

onde $\bar{\omega} = \omega r_0$. Introduzindo uma constante de separação:

$$\Delta \partial_r^2 R(r) + 2(r - M) \partial_r R(r) + \frac{1}{\Delta} (\bar{\omega} r - am)^2 R(r) = K^2 R(r) , \quad (6.21)$$

$$\partial_\theta^2 S(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta S(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} S(\theta) = -K^2 S(\theta) . \quad (6.22)$$

A equação angular (6.22) representa uma equação das funções associadas de Legendre, onde a constante de separação é

$$K^2 = l(l+1) , \quad l \geq |m| , \quad l = 1, 2, \dots . \quad (6.23)$$

Buscar-se-á a solução da equação radial (6.21) para o caso $M > a$, o qual representa um buraco negro.

Fazendo uma mudança de variável, $r = M + cx$; $c = -\sqrt{M^2 - a^2}$, a equação (6.21) torna-se

$$-(1 - x^2) \partial_x^2 R + 2x \partial_x R - \left[\frac{(\bar{\omega} x + \omega')^2}{1 - x^2} + l(l+1) \right] R = 0 ,$$

sendo $\omega' = (\bar{\omega} M - am)/c$.

Fazendo outra mudança de variável, $x = (\zeta + 1)/(\zeta - 1)$, obtém-se

$$\zeta^2 (\zeta - 1)^2 \partial_\zeta^2 R + \zeta (\zeta - 1)^2 \partial_\zeta R + \left\{ \frac{W_+^2}{4} \zeta^2 + \left[\frac{W_+ W_-}{2} - l(l+1) \right] \zeta + \frac{W_-^2}{4} \right\} R = 0 ,$$

sendo $W_\pm = \bar{\omega} \pm \omega'$.

Definindo as seguintes constantes

$$A_{\pm}^2 = \frac{W_{\pm}^2}{4}, \quad (6.24)$$

$$B^2 + y = \frac{(W_+ + W_-)^2}{4} - l(l+1) = \bar{\omega}^2 - l(l+1), \quad (6.25)$$

pode-se escrever a equação de KG da seguinte forma:

$$\zeta(1-\zeta)\partial_{\zeta}^2 R + (1-\zeta)\partial_{\zeta} R + \left(\frac{A_-^2}{\zeta} + \frac{B^2 + y}{1-\zeta} - A_+^2 \right) R = 0.$$

Definindo,

$$\begin{aligned} R &\equiv \zeta^{iA_-}(1-\zeta)^{iB}\Lambda(\zeta), \\ \partial_{\zeta} R &= \zeta^{iA_-}(1-\zeta)^{iB} \left[\dot{\Lambda} + i \left(\frac{A_-}{\zeta} - \frac{B}{1-\zeta} \right) \Lambda \right], \\ \partial_{\zeta}^2 R &= \zeta^{iA_-}(1-\zeta)^{iB} \left\{ \ddot{\Lambda} + 2i \left(\frac{A_-}{\zeta} - \frac{B}{1-\zeta} \right) \dot{\Lambda} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2BA_-}{\zeta(1-\zeta)} + \frac{iA_-(iA_- - 1)}{\zeta^2} + \frac{iB(iB - 1)}{(1-\zeta)^2} \right] \Lambda \right\}, \end{aligned}$$

onde adotou-se $\dot{\Lambda} = \partial_{\zeta}\Lambda$. Assim, decorre que,

$$\begin{aligned} \zeta(1-\zeta)\ddot{\Lambda} + \{1 + 2iA_- - [2i(A_- + B) + 1]\zeta\}\dot{\Lambda} + \left[A_-^2 + 2BA_- \right. \\ \left. + \frac{(1-\zeta)B^2 + y - iB}{1-\zeta} - A_+^2 \right] \Lambda = 0, \end{aligned}$$

sendo $y = iB$. Escrevendo de outro modo,

$$\zeta(1-\zeta)\ddot{\Lambda} + [d - (a+b+1)\zeta]\dot{\Lambda} - ab\Lambda = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} d &= 1 + 2iA_-, \\ a &= i(A_- + B + A_+), \\ b &= i(A_- + B - A_+), \\ B^2 + iB &= \bar{\omega}^2 - l(l+1) \\ iB_{\pm} &= \frac{1}{2} \pm i\lambda, \\ \lambda &= \sqrt{\bar{\omega}^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

A equação diferencial é do tipo hipergeométrica cuja a solução será

$$\Lambda = C_1 F(a, b, d; \zeta) + C_2 \zeta^{1-d} F(a-d-1, b-d+1, 2-d; \zeta),$$

e, portanto,

$$R = \left(\frac{r_+ - r_-}{r - r_-} \right)^{iB_+} \left[\left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{iA_-} C_1 F(a_+, b_-, d_+; (r - r_+)/ (r - r_-)) \right. \\ \left. + \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{-iA_-} C_2 F(a_-, b_+, d_-; (r - r_+)/ (r - r_-)) \right] , \quad (6.26)$$

sendo que

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \pm i(\bar{\omega} \pm \lambda) , \\ b_{\pm} = \frac{1}{2} \pm i(\omega' \pm \lambda) , \\ d_{\pm} = 1 \pm 2iA_{\pm} = 1 \pm i(\bar{\omega} - \omega') .$$

Acima usou-se B_+ , porém utilizando B_- os resultados seriam os mesmos.

Solução aproximada perto do horizonte ($r = r_+ + \delta \rightarrow \delta \ll 1$):

A equação radial (6.21) torna-se,

$$\delta^2 \partial_{\delta}^2 R + \delta \partial_{\delta} R + \frac{\Upsilon^2}{(r_+ - r_-)^2} R = 0 ,$$

onde $\Upsilon = \bar{\omega}r_+ - am$. Escolhendo a função $R = \delta^q$, tem-se

$$q^2 = - \frac{\Upsilon^2}{(r_+ - r_-)^2} \\ q_{\pm} = \pm i \frac{(\bar{\omega}r_+ - am)}{r_+ - r_-} \\ = \pm i \frac{W_-}{2} .$$

A solução geral será

$$R = A_1 e^{iW_-/2 \ln(r-r_+)} + A_2 e^{-iW_-/2 \ln(r-r_+)} . \quad (6.27)$$

onde A_1 e A_2 são constantes de integração. Porém, utilizando as equações (6.15) e (6.16), tem-se que

$$\Phi(x) = S(\theta) R(r) e^{i(m\varphi - \omega t)} \\ = S(\theta) \left(A_{em} e^{-i\omega u} e^{im\mathcal{U}} + A_{in} e^{-i\omega v} e^{im\mathcal{V}} \right) , \quad (6.28)$$

onde $\mathcal{U} = \varphi - \varphi^*$ e $\mathcal{V} = \varphi + \varphi^*$.

Solução exata (6.26) perto do horizonte ($r = r_+ + \delta \rightarrow \delta \ll 1$):

Escrevemos

$$\frac{r - r_+}{r - r_-} \approx \frac{\delta}{r_+ - r_-} , \\ \frac{r_+ - r_-}{r - r_-} = \frac{r_+ - r_-}{r_+ - r_- + \delta} \approx 1 .$$

A equação (6.26) torna-se

$$R \approx \left(\frac{1}{r_+ - r_-} \right)^{iW_-/2} C_1 e^{iW_-/2 \ln(r-r_+)} + \left(\frac{1}{r_+ - r_-} \right)^{-iW_-/2} C_2 e^{-iW_-/2 \ln(r-r_+)}, \quad (6.29)$$

pois $F(a, b, d; \delta/(r_+ - r_-)) \approx F(a, b, d; 0) = 1$.

Comparando as equações (6.27) e (6.29), obtemos,

$$\begin{aligned} A_{em} &= \left(\frac{1}{r_+ - r_-} \right)^{iW_-/2} C_1, \\ A_{in} &= \left(\frac{1}{r_+ - r_-} \right)^{-iW_-/2} C_2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Solução aproximada no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$):

A equação radial (6.21) torna-se,

$$r^2 \partial_r^2 R + 2r \partial_r R + \underbrace{[\bar{\omega}^2 - l(l+1)]}_{=\Theta} R = 0,$$

sendo $R = r^p$, encontra-se

$$\begin{aligned} p^2 + P + \Theta &= 0 \\ p_{\pm} &= -iB_{\mp}. \end{aligned}$$

A solução geral, utilizando (6.17), será

$$\begin{aligned} R &= B_1 r^{-iB_+} + B_2 r^{-iB_-}, \\ \Phi(x) &= \frac{S(\theta)}{\sqrt{r}} \left(B_{in} e^{-i\omega v} + B_{em} e^{-i\omega u} \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde B_{em} e B_{in} são constantes de integração.

Solução exata (6.26) no limite assintótico $r \rightarrow \infty$:

A equação (6.26) torna-se

$$R \approx \left(\frac{r_+ - r_-}{r} \right)^{iB_+} [C_1 F(a_+, b_+, d_+; 1) + C_2 F(a_-, b_-, d_-; 1)].$$

Pode-se usar a seguinte fórmula de transformação das funções hipergeométricas

$$\begin{aligned} F(a, b, d; y) &= \frac{\Gamma(d)\Gamma(d-a-b)}{\Gamma(d-b)\Gamma(d-a)} F(a, b, d; 1-y) \\ &+ \frac{\Gamma(d)\Gamma(a+b-d)}{\Gamma(b)\Gamma(a)} (1-y)^{d-a-b} F(a, b, d; 1-y) \end{aligned} \quad (6.32)$$

sendo $|\arg(1-y)| < \pi$.

Portanto,

$$\begin{aligned} d_{\pm} - b_{\pm} - a_{\pm} &= -2i\lambda \quad , \\ d_{\pm} - a_{\pm} &= \frac{1}{2} \mp i(\omega' \pm \lambda) = \frac{1}{2} \mp i\alpha_{\pm} \quad , \\ d_{\pm} - b_{\pm} &= \frac{1}{2} \pm i(\bar{\omega} \mp \lambda) = \frac{1}{2} \pm i\beta_{\mp} \quad . \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{\Gamma(1+iW_-)C_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\alpha_+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta_-\right)} + \frac{\Gamma(1-iW_-)C_2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha_-\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\beta_+\right)} \right] \\ &\times \Gamma(-2i\lambda) \left(\frac{r}{r_+ - r_-} \right)^{-iB_+} \\ &+ \left[\frac{\Gamma(1+iW_-)C_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\alpha_-\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta_+\right)} + \frac{\Gamma(1-iW_-)C_2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha_+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\beta_-\right)} \right] \\ &\times \Gamma(2i\lambda) \left(\frac{r}{r_+ - r_-} \right)^{-iB_-} \quad . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Comparando as equações (6.31) e (6.33), e utilizando (6.30), encontramos que

$$\begin{aligned} B_{in} &= \left[\frac{\Gamma(1+iW_-)(r_+ - r_-)^{i(B_+ + W_-/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\alpha_+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta_-\right)} A_{em} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1-iW_-)(r_+ - r_-)^{i(B_+ - W_-/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha_-\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\beta_+\right)} A_{in} \right] \Gamma(-2i\lambda) \quad , \\ B_{em} &= \left[\frac{\Gamma(1+iW_-)(r_+ - r_-)^{i(B_- + W_-/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\alpha_-\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\beta_+\right)} A_{em} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1-iW_-)(r_+ - r_-)^{i(B_- - W_-/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\alpha_+\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\beta_-\right)} A_{in} \right] \Gamma(2i\lambda) \quad . \end{aligned} \quad (6.34)$$

A análise foi feita para

$$\bar{\omega} \gg \left(l + \frac{1}{2} \right) \quad ,$$

em todos passos para o limite assintótico.

6.3 Cálculo da Temperatura

Já que temos uma solução exata bem comportada utilizaremos o método de cálculo da temperatura via o coeficiente de reflexão. Empregaremos aqui as mesmas condições de contorno utilizadas no capítulo 5 para o caso sem rotação.

Cálculo dos fluxos:

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{rem}(A_{in} = 0)$:

$$\mathcal{F}_{r_H}^{rem} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g_{r_H}^{rr} (R_\delta^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_r R_\delta^{em} \quad ,$$

onde $\delta = r - r_+$.

Utilizando a solução (6.27), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_r R_\delta^{em} &= \partial_r A_{in} (r - r_+)^{iW_-/2} \\ &= i \frac{A_{in} W_-}{2} (r - r_+)^{iW_-/2-1} \quad , \\ \partial_r (R_\delta^{em})^* &= \partial_r A_{in}^* (r - r_+)^{-iW_-/2} \\ &= -i \frac{A_{in}^* W_-}{2} (r - r_+)^{-(iW_-/2+1)} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}_{r_H}^{rem} = -2\pi W_- \sin \theta (r_+ - r_-) A_{em} A_{em}^* \quad . \quad (6.35)$$

- Para $\mathcal{F}_\infty^{rin} (B_{em} = 0)$:

$$\mathcal{F}_\infty^{rin} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g_\infty^{rr} (R_\infty^{in})^* \overleftrightarrow{\partial}_r R_\infty^{in} \quad .$$

Utilizando a solução (6.31), encontramos

$$\begin{aligned} \partial_r R_\infty^{in} &= \partial_r B_{in} r^{-(i\lambda+1/2)} \\ &= -B_{in} \left(i\lambda + \frac{1}{2} \right) r^{-(i\lambda+3/2)} \quad , \\ \partial_r (R_\infty^{in})^* &= \partial_r B_{in}^* r^{i\lambda-1/2} \\ &= B_{in}^* \left(i\lambda - \frac{1}{2} \right) r^{i\lambda-3/2} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}_\infty^{rin} = 4\pi \sin \theta \lambda B_{in} B_{in}^* \quad . \quad (6.36)$$

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{rin} (A_{em} = 0)$:

$$\mathcal{F}_{r_H}^{rin} = \frac{2\pi}{i} \sqrt{-g} g_{r_H}^{rr} (R_\delta^{in})^* \overleftrightarrow{\partial}_r R_\delta^{in} \quad ,$$

onde $\delta = r - r_+$.

Utilizando a solução (6.27), encontramos

$$\begin{aligned} \partial_r R_\delta^{in} &= \partial_r A_{in} (r - r_+)^{-iW_-/2} \\ &= -i \frac{A_{in} W_-}{2} (r - r_+)^{-(iW_-/2+1)} \quad , \\ \partial_r (R_\delta^{in})^* &= \partial_r A_{in}^* (r - r_+)^{iW_-/2} \\ &= i \frac{A_{in}^* W_-}{2} (r - r_+)^{iW_-/2-1} \quad . \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{F}_{r_H}^{r\ in} = 2\pi W_- \sin \theta (r_+ - r_-) A_{in} A_{in}^* . \quad (6.37)$$

Os coeficientes de reflexão e transmissão serão os seguintes:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{A_{em} A_{em}^*}{A_{in} A_{in}^*} , \\ \mathcal{T} &= \frac{2\lambda}{W_- (r_+ - r_-)} \frac{B_{in} B_{in}^*}{A_{in} A_{in}^*} , \end{aligned}$$

utilizando a condição $B_{em} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha_-)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta_+)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha_+)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta_-)|^2} A_{in} A_{in}^* , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{|\Gamma(1 + iW_-)|^2 |\Gamma(2i\lambda)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha_-)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta_+)|^2} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha_-)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta_+)|^2}{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha_+)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} + i\beta_-)|^2} \right\}^2 (r_+ - r_-) A_{in} A_{in}^* . \end{aligned}$$

Utilizando as relações da função Γ , (5.34), encontra-se

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{\cosh \pi\beta_- \cosh \pi\alpha_+}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_-} A_{in} A_{in}^* , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{W_- (r_+ - r_-) \sinh \pi W_- \sinh 2\pi\lambda}{2\lambda \cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_-} A_{in} A_{in}^* . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{R} = \frac{\cosh \pi\beta_- \cosh \pi\alpha_+}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_-} = \frac{\cosh \pi(\bar{\omega} - \lambda) \cosh \pi(\omega' + \lambda)}{\cosh \pi(\bar{\omega} + \lambda) \cosh \pi(\omega' - \lambda)} , \quad (6.38)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\sinh \pi W_- \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_-} = \frac{\sinh \pi(\bar{\omega} - \omega') \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi(\bar{\omega} + \lambda) \cosh \pi(\omega' - \lambda)} . \quad (6.39)$$

Utilizando as seguintes relações trigonométricas,

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x , \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y , \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y , \end{aligned} \quad (6.40)$$

encontra-se que a condição de normalização (3.44) é satisfeita.

No limite de altas frequências, $\omega \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \bar{\omega} = r_0 \omega , \\ \omega' &\approx \frac{\bar{\omega} M}{c} , \\ \omega' - \lambda &= \frac{\bar{\omega} M}{c} - \bar{\omega} = -\frac{2r_+ \bar{\omega}}{r_+ - r_-} , \\ \omega' + \lambda &= \frac{\bar{\omega} M}{c} + \bar{\omega} = -\frac{2r_- \bar{\omega}}{r_+ - r_-} , \\ \mathcal{R} &\approx \frac{\cosh \pi(\omega' + \lambda)}{\cosh \pi(2\bar{\omega}) \cosh \pi(\omega' - \bar{\omega})} . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Buracos negros com rotação parecem precisar de uma análise mais cuidadosa para a interpretação de energia, devido à presença da ergosfera. A definição do vácuo na ergosfera é ambígua, de forma similar ao problema da definição do vácuo para observadores acelerados em rotação no espaço-tempo de Minkowski [74, 75]. Faremos a análise para os possíveis sinais, onde supomos estarem relacionados à energia, e veremos os resultados de temperatura obtidos.

1. **Energia positiva e negativa:** Esta é uma tentativa de se obter a mesma temperatura obtida pela gravidade superficial. Porém, esta interpretação parece depender da escolha do sinal da energia de uma partícula criada dentro da ergosfera. Pelo processo de Penrose, lembrando de que este é um processo clássico, um observador no infinito futuro pode ver uma partícula se cindir em um par de partícula e anti-partícula, com energia negativa, dentro da ergoregião [18, 27]. Esta análise, porém, é mais complicada para a criação deste par de partícula e anti-partícula via um processo quântico pois não se pode, em princípio, definir um campo de Killing global tipo tempo nesta região.

Faremos então a seguinte suposição para o termo $\cosh \pi(\omega' + \lambda)$ na equação (6.41). Supondo que o momento de criação do par de partícula e anti-partícula esteja relacionado a um estado de energia negativa ($\omega < 0$), relacionado ao termo $\cosh \pi(\omega' + \lambda)$, teríamos que

$$\begin{aligned} \cosh \pi(\omega' + \lambda) &= \frac{e^{-2r_+ \pi \bar{\omega} / (r_+ - r_-)} + e^{2r_- \pi \bar{\omega} / (r_+ - r_-)}}{2} \\ &\approx \frac{e^{-2r_+ \pi \bar{\omega} / (r_+ - r_-)}}{2} . \end{aligned}$$

Neste caso, o termo $\cosh \pi(2\bar{\omega}) \cosh \pi(\omega' - \lambda)$ está relacionado à uma função de onda com energia positiva ($\omega > 0$), ou seja,

$$\cosh \pi(2\bar{\omega}) \cosh \pi(\omega' - \lambda) \approx \frac{e^{2\pi(2r_+ - r_-)\bar{\omega} / (r_+ - r_-)}}{4} .$$

No limite de altas frequências,

$$\mathcal{R} \approx 2e^{-4\pi r_+ \bar{\omega} / (r_+ - r_-)} .$$

Utilizando a relação de temperatura (3.48), encontra-se

$$\begin{aligned} T_H &= -\frac{\omega}{\ln 2e^{-4\pi r_+ \bar{\omega} / (r_+ - r_-)}} \\ &\approx \frac{\omega}{4\pi r_+ \bar{\omega} / (r_+ - r_-)} . \end{aligned}$$

Lembrando que $\bar{\omega} = r_0 \omega$, temos

$$T_H = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_0 r_+} , \quad (6.42)$$

o que confirma a temperatura obtida pela gravidade superficial.

2. **Energias positivas:** Pela aparente falta de possibilidade de se ter uma definição de vácuo dentro da ergosfera poderíamos proceder com os cálculos habituais utilizando ambas as funções $\mathcal{F}_{r_H}^{rem}$ e $\mathcal{F}_{r_H}^{rin}$ com os seu modos de energias positivas. Isto nos fornece, no limite altas frequências,

$$\begin{aligned} \cosh(\omega' + \lambda) &\approx \frac{e^{2r_- \pi \bar{\omega}/(r_+ - r_-)}}{2} , \\ \cosh \pi(2\bar{\omega}) \cosh \pi(\omega' - \lambda) &\approx \frac{e^{2\pi(2r_+ - r_-)\bar{\omega}/(r_+ - r_-)}}{4} . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R &\approx 2e^{-4\pi\bar{\omega}} \\ &\Downarrow \\ T_H &= \frac{1}{4\pi r_0} , \end{aligned} \quad (6.43)$$

que é diferente da temperatura obtida via a gravidade superficial.

Pode-se observar que embora este buraco negro tenha dois horizontes de eventos, (6.43) parece nos indicar que o caso extremo não tem temperatura nula.

6.3.1 Temperatura via euclidianização da métrica

Neste método a variável θ tem uma periodicidade de 2π , de modo que a métrica (6.3) se reduz a

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r_0 r} dt^2 + \frac{r_0 r}{\Delta} dr^2 . \quad (6.44)$$

Trocamos a assinatura da métrica para tornar a métrica euclidiana 2D, fazendo-a $(+, +)$.

Seguindo os mesmos passos dos cálculos feitos no capítulo 3, e fazendo a rotação de Wick, temos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta}{r_0 r} dt^2 + \frac{r_0 r}{\Delta} dr^2 \\ &= \Omega(\rho) \left(d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2 \right) , \end{aligned}$$

onde $\tau = \alpha t$, sendo α uma constante que faz o fator conforme $\Omega(\rho)$ ser finito e não nulo sobre o horizonte.

Comparando os termos equivalentes, encontra-se

$$\begin{aligned} \Omega(\rho) &= \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r r_0 \rho^2 \alpha^2} , \\ \frac{d\rho}{\rho \alpha} &= \frac{r r_0}{\Delta} dr = dr^* \\ \rho &= e^{\alpha r^*} . \end{aligned} \quad (6.45)$$

Perto do horizonte, utilizando a equação (6.15), temos que

$$\rho \approx (r - r_+)^{\alpha r_+ r_0 / (r_+ - r_-)} = (r - r_+)^{\alpha / 2\kappa} \quad . \quad (6.46)$$

Portanto,

$$\Omega(\rho) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r r_0 (r - r_+)^{\alpha / \kappa} \alpha^2} \quad . \quad (6.47)$$

Para mantermos as propriedades do fator conforme sobre o horizonte, temos que

$$\alpha = \kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+ r_0} \quad .$$

A temperatura será então

$$T = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+ r_0} \quad , \quad (6.48)$$

o que confirma (6.42) e não (6.43).

6.3.2 Temperatura via anomalias

Buracos negros com rotação apresentam uma carga representada pelo número quântico azimutal m [47] onde pode-se trabalhar como no caso de buracos negros carregados.

Vamos considerar um campo de matéria onde o espaço de fundo deste campo é a métrica (6.3). A ação de um campo escalar carregado será

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \phi^* \nabla^2 \phi \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \phi = g^{\mu\nu} (\nabla_\mu - ieA_\mu) (\nabla_\nu - ieA_\nu) \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) - 2ie g^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \phi - e^2 g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \phi - ie \nabla_\mu (A^\mu \phi) \quad . \end{aligned}$$

Fazendo uma expansão em harmônicos esféricos, utilizando as relações (6.4) e (6.5), e estando na região próxima ao horizonte, $r = r_+ + \delta$, encontra-se

$$\begin{aligned} S &\approx \int d^2x r_{+r_0} \sin \theta \phi_{lm}^* \left\{ -\partial_r \left(\frac{\Delta}{r_+ r_0} \partial_r \phi_{lm} \right) + \frac{r_+ r_0}{\Delta} \left\{ \partial_t^2 \phi_{lm} \right. \right. \\ &+ \frac{2i}{r_+ r_0} \left[am - e \frac{(r^2 + a^2)}{\sqrt{2}} \right] \partial_t \phi_{lm} \\ &- \left. \left. \left[\frac{a^2 m^2}{(r_+ r_0)^2} + 2em \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{(r^2 + a^2)}{(r_+ r_0)^2} - \frac{e^2 (r^2 + a^2)}{2 (r_+ r_0)^2} \right] \phi_{lm} \right\} \right\} \\ &\approx \int d^2x r_{+r_0} \sin \theta \phi_{lm}^* \left\{ -\partial_r \left(\frac{\Delta}{r_0 r_+} \partial_r \phi_{lm} \right) + \frac{r_0 r_+}{\Delta} \left\{ \partial_t \phi_{lm} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left[\frac{iam}{r_0 r_+} - \frac{ie}{r_+ r_0} \frac{(r^2 + a^2)}{\sqrt{2}} \right] \phi_{lm} \right\}^2 \right\} \\ &r = r_+ + \delta \Rightarrow r \approx r_+ \quad . \end{aligned}$$

Da teoria quântica de um campo escalar carregado temos que

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -g_{rr}^{-1} = f(r) \quad , \\ f(r) &= \frac{\Delta}{r_0 r} \quad , \\ \mathcal{A}_t(r) &= \frac{e}{rr_0} \frac{(r^2 + a^2)}{\sqrt{2}} - \frac{ma}{r_0 r} = eA_t^{(1)} + mA_t^{(2)} \quad , \end{aligned}$$

onde m faz o papel de uma carga na topologia $U(1)$ para o campo bidimensional ϕ_{lm} . Como ocorre na métrica de Kerr-Newman [47] temos um potencial que é a soma de dois termos: O primeiro termo é originado da carga elétrica r_0 , do campo elétrico do buraco negro, e o segundo termo é um potencial de calibre induzido pela métrica, que está associado a assimetria da métrica de fundo (6.3).

O procedimento para calcular o fluxo de Hawking via anomalias é agora idêntico ao caso de um buraco negro carregado, como foi feito no capítulo anterior.

Temos a corrente conservada

$$\partial_r J^r(\infty) = 0, \quad J^r(\infty) = c_0 \quad .$$

Para a parte anômala faz-se o cálculo para os dois potenciais.

Primeiro determina-se o fluxo de corrente $U(1)$. Em $d = 4$ o fluxo $U(1)$ corresponde ao fluxo do momento angular obtido para a radiação de Hawking para um buraco negro com rotação.

Para a parte anômala, temos

$$\begin{aligned} \partial_r J^{(2)r}(r_H) &= \frac{m^2}{4\pi} \partial_r A_t^{(2)} \\ J^{(2)r}(r_H) &= c_H^{(2)} + \frac{m^2}{4\pi} (A_t^{(2)}(r) - A_t^{(2)}(r_H)) \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$A_t^{(2)}(r_H) = -\frac{a}{r_0 r_H} \quad . \quad (6.49)$$

Para a parte anômala vinda do campo elétrico gerado pela métrica (6.3), tem-se

$$\begin{aligned} \partial_r J^{(1)r}(r_H) &= \frac{e^2}{4\pi} \partial_r A_t^{(1)} \\ J^{(1)r}(r_H) &= c_H^{(1)} + \frac{e^2}{4\pi} (A_t^{(1)}(r) - A_t^{(1)}(r_H)) \quad . \end{aligned}$$

Então,

$$A_t^{(1)}(r_H) = \frac{(r_H^2 + a^2)}{r_H r_0 \sqrt{2}} \quad . \quad (6.50)$$

Da equação (5.46), o fluxo de carga, gerado pela carga r_0 , será

$$c_0^{(1)} = -\frac{e}{2\pi} \mathcal{A}_t(r_H) = \frac{e}{2\pi} \left[m\Omega_H - \frac{e}{r_+ r_0} \frac{(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{2}} \right] \quad , \quad (6.51)$$

lembrando que Ω_H é a velocidade angular em cima do horizonte.

De forma análoga, o fluxo do momento angular será

$$c_0^{(2)} = -\frac{m}{2\pi} \mathcal{A}_t(r_H) = \frac{m}{2\pi} \left[m\Omega_H - \frac{e}{r_+ r_0} \frac{(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{2}} \right] . \quad (6.52)$$

Finalmente a equação das anomalias dada por (5.50) para o tensor momento-energia na região $r \in [r_+, r_+ + \delta]$, próximo ao horizonte, é dada por

$$\partial_r T_t^r = \mathcal{F}_{rt} \mathcal{J}^r + \mathcal{A}_t \partial_r \mathcal{J}^r + \Xi_t , \quad (6.53)$$

onde $\mathcal{F}_{rt} = \partial_r \mathcal{A}_t$. \mathcal{J}^r como definido antes satisfaz $\partial_r \mathcal{J}^r = \frac{1}{4\pi} \partial_r^2 \mathcal{A}_t$. Aplicando o mesmo método do caso estático, o fluxo do tensor momento-energia é determinado como

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\mathcal{A}_t^2(r_H)}{4\pi} + \frac{\pi}{12} T_H^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[m\Omega_H - \frac{e}{r_+ r_0} \frac{(r_+^2 + a^2)}{\sqrt{2}} \right]^2 + \frac{\pi}{12} \left(\frac{r_+ - r_-}{4\pi r_0 r_+} \right)^2 , \end{aligned} \quad (6.54)$$

sendo que a temperatura está em acordo com (6.42).

Pode-se observar que se fizermos $a = 0$, as equações dos fluxos de carga (6.52) e do tensor momento energia (6.54) recaem nas equações (5.48) para o fluxo de carga, e (5.54) para o fluxo do tensor momento-energia para o caso estático estudado no capítulo anterior.

Tudo parece confirmar a temperatura (6.42). Porém como ter realmente certeza que uma partícula criada por um processo quântico pode ser vista com energia negativa numa região, ergosfera, onde não se pode definir um estado de vácuo?

Fica então a dúvida de qual temperatura podemos eleger como verdadeira.

Capítulo 7

Buracos Negros Topologicamente Massivos

Neste capítulo trataremos dos buracos negros topologicamente massivos em (1+2)-dimensões. Acopla-se um termo de Chern-Simon à gravitação em 1+2 dimensões na ação da relatividade geral em 3D, termo este presente na ação da supergravidade. O interesse de se estudar uma teoria em 3D, quando tudo leva a crer que precisamos de dimensões extras para se quantizar a gravitação, reside no emprego da mesma como laboratório para teorias mais complexas. Uma novidade que aparece nesta solução que vamos estudar, é que a ergoregião não tem limites, ou seja, ela se estende até o infinito. Encontra-se uma solução exata, em todo o espaço, para a equação de Klein-Gordon na geometria determinada por estes buracos negros. Em função disto, empregaremos a técnica de relacionar a temperatura ao coeficiente de reflexão. As mesmas características que aparecem no caso dilatônico linear com rotação, estudado no capítulo anterior, aparecem aqui. Aplicamos depois a técnica do cálculo da temperatura via anomalias, que nos conduz à mesma temperatura encontrada pela gravidade superficial.

7.1 Buracos Negros Topologicamente Massivos

Em 1982, Deser, Jackiw e Templeton [77] introduziram a Gravitação Topologicamente Massiva (GTM) que nada mais é do que a generalização da relatividade geral em 3D acoplada a um termo de Chern-Simons. A ação desta teoria é

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \left[\sqrt{-g} R + \frac{1}{\mu} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} \left(\partial_{\nu} \Gamma_{\beta\sigma}^{\nu} + \frac{2}{3} \Gamma_{\nu\tau}^{\nu} \Gamma_{\sigma\beta}^{\tau} \right) \right] , \quad (7.1)$$

onde R é o escalar de curvatura, Γ o símbolo de Christoffel, G a constante de Newton da gravitação e μ a constante de acoplamento do termo de Chern-Simons. O termo de Chern-Simons é também chamado de termo topológico, pois ele não depende explicitamente da métrica. Por outro lado, este termo faz aparecer um grau de liberdade dinâmico: uma partícula de spin 2 e massa μ . Por isto a expressão topologicamente

massivo.

Variando a ação em relação à $g_{\mu\nu}$ encontra-se a seguinte equação de movimento:

$$G_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{\mu} C_{\nu}^{\mu} = 0 \quad , \quad (7.2)$$

onde

$$C_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \left(R_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\nu\beta} R \right) \quad (7.3)$$

é o tensor de Cotton, cujo traço C_{μ}^{μ} é nulo.

Uma possível solução é a métrica de Clément, Moussa e Leygnac [78] que é dada na forma

$$ds^2 = 3dt^2 - (4\rho + 6\omega) dt d\varphi + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} + r^2 d\varphi^2 \quad , \quad (7.4)$$

onde $r^2 = \rho^2 + 4\omega\rho + 3\omega^2 + \rho_0^2/3$, $\rho_{\pm} = \pm\rho_0$ são os horizontes de eventos externo e interno, $\Omega_H = 3/(2\rho_0 + 3\omega)$ a velocidade angular sobre o horizonte, $g = -1$ é o determinante da métrica e ω é uma constante de integração da teoria.

A gravidade superficial é dada por

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}\rho_0}{2\rho_0 + 3\omega} \quad . \quad (7.5)$$

7.1.1 Solução da equação de KG

A equação de KG para a métrica (7.4) é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \Phi(x) = 0 \quad ,$$

$$\left\{ (\rho^2 - \rho_0^2) \partial_{\rho}^2 + 2\rho \partial_{\rho} - \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \left[3\partial_{\varphi}^2 + r^2 \partial_t^2 + (4\rho + 6\omega) \partial_t \partial_{\varphi} \right] \right\} \Phi(x) = 0 \quad .$$

Fazendo a separação de variáveis

$$\Phi(x) = R(\rho) e^{i(m\varphi - Et)} \quad , \quad (7.6)$$

a equação de KG se escreve como

$$(\rho^2 - \rho_0^2) \partial_{\rho}^2 R + 2\rho \partial_{\rho} R + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \left[3m^2 + r^2 E^2 - (4\rho + 6\omega) Em \right] R = 0 \quad . \quad (7.7)$$

Utilizando a seguinte mudança de variável,

$$\zeta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \quad ,$$

$$\partial_{\rho} R = \frac{2\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2} \partial_{\zeta} R \quad ,$$

$$\partial_{\rho}^2 R = \frac{4\rho_0}{(\rho + \rho_0)^3} \left[\frac{\rho_0}{(\rho + \rho_0)} \partial_{\zeta}^2 - \partial_{\zeta} \right] R \quad ,$$

temos que a equação de KG se escreve como

$$\begin{aligned} & \zeta^2(1-\zeta)^2\partial_\zeta^2 R + \zeta(1-\zeta)^2\partial_\zeta R \\ & + \left\{ \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\omega}{\rho_0} + \frac{3\omega^2}{4\rho_0^2} \right) E^2 + \left(\frac{m}{\rho_0} - \frac{3m\omega}{2\rho_0^2} \right) E + \frac{3m^2}{4\rho_0^2} \right] \zeta^2 \right. \\ & + \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3\omega^2}{2\rho_0^2} \right) E^2 + 3\frac{m\omega}{\rho_0^2} E - \frac{3m^2}{2\rho_0^2} \right] \zeta \\ & \left. + \left(\frac{1}{3} + \frac{\omega}{\rho_0} + \frac{3\omega^2}{4\rho_0^2} \right) E^2 - \left(\frac{m}{\rho_0} + \frac{3m\omega}{2\rho_0^2} \right) E + \frac{3m^2}{4\rho_0^2} \right\} R = 0 \quad . \end{aligned}$$

Definindo as seguintes constantes

$$A_\pm^2 = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{2}{3} \pm \frac{\omega}{\rho_0} \right) E \mp \frac{m}{\rho_0} \right] \right\}^2, \quad (7.8)$$

$$B^2 + y = E^2, \quad (7.9)$$

encontra-se

$$\zeta(1-\zeta)\partial_\zeta^2 R + (1-\zeta)\partial_\zeta R + \left(\frac{A_+^2}{\zeta} + \frac{B^2 + y}{1-\zeta} - A_-^2 \right) R = 0 \quad .$$

Definindo,

$$\begin{aligned} R &= \zeta^{iA_+}(1-\zeta)^{iB}\Lambda(\zeta), \\ \partial_\zeta R &= \zeta^{iA_+}(1-\zeta)^{iB} \left[\dot{\Lambda} + i \left(\frac{A_+}{\zeta} - \frac{B}{1-\zeta} \right) \Lambda \right], \\ \partial_\zeta^2 R &= \zeta^{iA_+}(1-\zeta)^{iB} \left\{ \ddot{\Lambda} + 2i \left(\frac{A_+}{\zeta} - \frac{B}{1-\zeta} \right) \dot{\Lambda} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{2BA_+}{\zeta(1-\zeta)} + \frac{iA_+(iA_+-1)}{\zeta^2} + \frac{iB(iB-1)}{(1-\zeta)^2} \right] \Lambda \right\}, \end{aligned}$$

onde adotou-se $\dot{\Lambda} = \partial_\zeta \Lambda$.

Segue que

$$\begin{aligned} & \zeta(1-\zeta)\ddot{\Lambda} + \{1 + 2iA_+ - [2i(A_+ + B) + 1]\zeta\}\dot{\Lambda} \\ & + \left[A_+^2 + 2BA_+ + \frac{(1-\zeta)B^2 + y - iB}{1-\zeta} - A_-^2 \right] \Lambda = 0 \quad . \end{aligned}$$

Sendo $y = iB$, temos que

$$\zeta(1-\zeta)\ddot{\Lambda} + [d - (a+b+1)\zeta]\dot{\Lambda} - ab\Lambda = 0 \quad ,$$

onde

$$d = 1 + 2iA_+ \quad ,$$

$$a = i(A_+ + B + A_-) \quad ,$$

$$b = i(A_+ + B - A_-) \quad ,$$

$$B^2 + iB = E^2$$

$$iB\pm = \frac{1}{2} \pm i\lambda \rightarrow \lambda = \sqrt{E^2 - 1/4} \quad .$$

Temos uma vez mais a equação diferencial hipergeométrica cuja a solução é dada por,

$$\begin{aligned} \Lambda &= C_1 F(a, b, d; \zeta) + C_2 \zeta^{1-d} F(a-d-1, b-d+1, 2-d; \zeta) \quad , \\ R &= \left(\frac{2\rho_0}{\rho + \rho_0} \right)^{iB_+} \left[\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right)^{iA_+} C_1 F(a_+, b_+, d_+; (\rho - \rho_0)/(\rho + \rho_0)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho + \rho_0} \right)^{-iA_+} C_2 F(a_-, b_-, d_-; (\rho - \rho_0)/(\rho + \rho_0)) \right] \quad , \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \frac{1}{2} + i \left(\lambda \pm \frac{2}{\sqrt{3}} E \right) = \frac{1}{2} + i(\lambda \pm \chi) \quad , \\ b_{\pm} &= \frac{1}{2} + i \left[\lambda \pm \frac{\sqrt{3}}{\rho_0} (\omega E - m) \right] = \frac{1}{2} + i(\lambda \pm \eta) \quad , \\ d_{\pm} &= 1 \pm 2iA_+ = 1 \pm i(\chi + \eta) \quad . \end{aligned}$$

Nestas expressões, foi usado B_+ e $C_{1,2}$ são constantes de integração.

Solução aproximada perto do horizonte ($\rho = \rho_0 + \delta \rightarrow \delta \ll 1$):

A equação (7.7) se escreve como,

$$\delta^2 \partial_\delta^2 R + \delta \partial_\delta R + A_+^2 R = 0 .$$

Definindo $R = \delta^q$, encontra-se

$$\begin{aligned} q^2 + A_+^2 &= 0 \\ q_{\pm} &= \pm iA_+ \quad . \end{aligned}$$

A função R será

$$R = A_1 e^{iA_+ \ln(\rho - \rho_0)} + A_2 e^{-iA_+ \ln(\rho - \rho_0)} \quad , \quad (7.11)$$

onde A_1 e A_2 são constantes de integração.

Solução exata perto do horizonte:

A equação (7.10) se escreve como

$$R \approx \left(\frac{1}{2\rho_0} \right)^{iA_+} C_1 e^{iA_+ \ln(\rho - \rho_0)} + \left(\frac{1}{2\rho_0} \right)^{-iA_+} C_2 e^{-iA_+ \ln(\rho - \rho_0)} \quad , \quad (7.12)$$

pois $F(a, b, d; \delta/2\rho_0) \approx F(a, b, d; 0) = 1$.

Comparando as equações (7.11) e (7.12), deduzimos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{1}{2\rho_0} \right)^{iA_+} C_1 \quad , \\ A_2 &= \left(\frac{1}{2\rho_0} \right)^{-iA_+} C_2 \quad . \end{aligned} \quad (7.13)$$

Solução aproximada no limite assintótico ($\rho \rightarrow \infty$):

A equação (7.7), $r^2 \approx \rho^2$, se escreve como,

$$\rho^2 \partial_\rho^2 R + 2\rho \partial_\rho R + E^2 R = 0 \quad ,$$

sendo $R = \rho^p$, obtém-se

$$\begin{aligned} p^2 + P + E^2 &= 0 \\ p_\pm &= -iB_\mp \quad , \end{aligned}$$

e

$$R = B_1 \rho^{-iB_+} + B_2 \rho^{-iB_-} \quad , \quad (7.14)$$

onde B_1 e B_2 são constantes de integração.

Solução exata no limite assintótico ($\rho \rightarrow \infty$):

A equação (7.10) se escreve como

$$\begin{aligned} R \approx \left(\frac{2\rho_0}{\rho} \right)^{iB_+} & [C_1 F(a_+, b_+, d_+; 1) \\ & + C_2 F(a_-, b_-, d_-; 1)] \quad . \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de transformação das funções hipergeométricas (6.32), tem-se que

$$\begin{aligned} d_\pm - b_\pm - a_\pm &= -2i\lambda \quad , \\ d_\pm - a_\pm &= \frac{1}{2} - i(\lambda \mp \eta) = \frac{1}{2} - i\alpha_\mp \quad , \\ d_\pm - b_\pm &= \frac{1}{2} - i(\lambda \mp \chi) = \frac{1}{2} - i\beta_\mp \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{\Gamma(1 + 2iA_+) C_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\alpha_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta_-\right)} + \frac{\Gamma(1 - 2iA_+) C_2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\alpha_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta_+\right)} \right] \\ &\times \Gamma(-2i\lambda) \left(\frac{\rho}{2\rho_0} \right)^{-iB_+} \\ &+ \left[\frac{\Gamma(1 + 2iA_+) C_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_+\right)} + \frac{\Gamma(1 - 2iA_+) C_2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_-\right)} \right] \\ &\times \Gamma(2i\lambda) \left(\frac{\rho}{2\rho_0} \right)^{-iB_-} \quad . \quad (7.15) \end{aligned}$$

Comparando as equações (7.14) e (7.15), e utilizando (7.13), temos que

$$\begin{aligned} B_1 &= \left[\frac{\Gamma(1 + 2iA_+) (2\rho_0)^{i(B_+ + A_+)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\alpha_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta_-\right)} A_1 + \frac{\Gamma(1 - 2iA_+) (2\rho_0)^{i(B_+ - A_+)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\alpha_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\beta_+\right)} A_2 \right] \\ &\times \Gamma(-2i\lambda) \quad , \\ B_2 &= \left[\frac{\Gamma(1 + 2iA_+) (2\rho_0)^{i(B_- + A_+)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_+\right)} A_1 + \frac{\Gamma(1 - 2iA_+) (2\rho_0)^{i(B_- - A_+)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_-\right)} A_2 \right] \\ &\times \Gamma(2i\lambda) \quad . \quad (7.16) \end{aligned}$$

Temos que $A_1 \rightarrow A_{em}$, $A_2 \rightarrow A_{in}$, $B_2 \rightarrow B_{em}$, $B_1 \rightarrow B_{in}$.

7.2 Cálculo da temperatura

Por apresentar uma solução exata bem comportada em todo o espaço, podemos utilizar o procedimento de calcular a temperatura via o coeficiente de reflexão. As funções definidas na geometria determinada por estes buracos negros obedecem as condições de contorno já expostas em casos anteriores.

Cálculo dos fluxos:

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{\rho em}$:

$$\mathcal{F}_{r_H}^{\rho em} = \frac{2\pi}{i} g_{r_H}^{\rho\rho} (R_\delta^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_\rho R_\delta^{em} \quad ,$$

onde $\delta = \rho - \rho_0$.

Utilizando a solução (7.11), temos

$$\begin{aligned} \partial_\rho R_\delta^{em} &= \partial_\rho A_{em} (\rho - \rho_0)^{iA_+} \\ &= iA_{em} A_+ (\rho - \rho_0)^{iA_+ - 1} \quad , \\ \partial_\rho (R_\delta^{em})^* &= \partial_\rho A_{em}^* (\rho - \rho_0)^{-iA_+} \\ &= -iA_{em}^* A_+ (\rho - \rho_0)^{-(iA_+ + 1)} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r_H}^{\rho em} &\approx \frac{2\pi}{i} 2\rho_0 \delta (R_\delta^{em})^* \overleftrightarrow{\partial}_\rho R_\delta^{em} \\ &= 4\pi(\chi + \eta)\rho_0 A_{em} A_{em}^* \quad . \end{aligned} \quad (7.17)$$

- Para $\mathcal{F}_\infty^{\rho in}$:

$$F_\infty^{\rho in} = \frac{2\pi}{i} g_\infty^{\rho\rho} (R_\infty^{in})^* \overleftrightarrow{\partial}_\rho R_\infty^{in} \quad .$$

Utilizando a solução (7.14), temos

$$\begin{aligned} \partial_\rho R_\infty^{in} &= \partial_\rho B_{in} \rho^{-(i\lambda + 1/2)} \\ &= -B_{in} \left(i\lambda + \frac{1}{2} \right) \rho^{-(i\lambda + 3/2)} \quad , \\ \partial_\rho (R_\infty^{in})^* &= \partial_\rho B_{in}^* \rho^{i\lambda - 1/2} \\ &= B_{in}^* \left(i\lambda - \frac{1}{2} \right) \rho^{i\lambda - 3/2} \quad . \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_\infty^{\rho in} = -4\pi\lambda B_{in} B_{in}^* \quad . \quad (7.18)$$

- Para $\mathcal{F}_{r_H}^{\rho in}$:

$$F_{r_H}^{\rho in} = \frac{2\pi}{i} g_{r_H}^{\rho\rho} \left(R_{\delta}^{in} \right)^* \overleftrightarrow{\partial}_{\rho} R_{\delta}^{in} \quad ,$$

onde $\delta = \rho - \rho_0$.

Utilizando a solução (7.11), temos

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} R_{\delta}^{in} &= \partial_{\rho} A_{in} (\rho - \rho_0)^{-iA_+} \\ &= -i A_{in} A_+ (\rho - \rho_0)^{-(iA_++1)} \quad , \\ \partial_{\rho} \left(R_{\delta}^{in} \right)^* &= \partial_{\rho} A_{in}^* (\rho - \rho_0)^{iA_+} \\ &= i A_{in}^* A_+ (\rho - \rho_0)^{iA_+-1} \quad . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{r_H}^{\rho in} &\approx \frac{2\pi}{i} 2\rho_0\delta \left(R_{\delta}^{in} \right)^* \overleftrightarrow{\partial}_{\rho} R_{\delta}^{in} \\ &= -4\pi(\chi + \eta)\rho_0 A_{in} A_{in}^* \quad . \end{aligned} \quad (7.19)$$

Os coeficientes de reflexão e transmissão serão dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{A_{em} A_{em}^*}{A_{in} A_{in}^*} \quad , \\ \mathcal{T} &= \frac{\lambda}{(\chi + \eta)\rho_0} \frac{B_{in} B_{in}^*}{A_{in} A_{in}^*} \quad , \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_+\right)|^2 |\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_+\right)|^2}{|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_-\right)|^2 |\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_-\right)|^2} A_{in} A_{in}^* \quad , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{|\Gamma(1 + 2iA_+)|^2 |\Gamma(2i\lambda)|^2}{|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_+\right)|^2 |\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_+\right)|^2} \left\{ 1 - \frac{|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_+\right)|^2 |\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_+\right)|^2}{|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha_-\right)|^2 |\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta_-\right)|^2} \right\}^2 \\ &\times 2\rho_0 A_{in} A_{in}^* \quad . \end{aligned}$$

Utilizando as relações da função Γ (5.34), encontra-se

$$\begin{aligned} A_{em} A_{em}^* &= \frac{\cosh \pi\beta_- \cosh \pi\alpha_-}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_+} A_{in} A_{in}^* \quad , \\ B_{in} B_{in}^* &= \frac{\rho_0(\chi + \eta)}{\lambda} \frac{\sinh 2\pi A_+ \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_+} A_{in} A_{in}^* \quad . \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\mathcal{R} = \frac{\cosh \pi\beta_- \cosh \pi\alpha_-}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_+} = \frac{\cosh \pi(\lambda - \chi) \cosh \pi(\lambda - \eta)}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \quad , \quad (7.20)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\sinh 2\pi A_+ \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi\beta_+ \cosh \pi\alpha_+} = \frac{\sinh \pi(\chi + \eta) \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \quad . \quad (7.21)$$

Utilizando as relações trigonométricas (6.40) encontra-se que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} + \mathcal{T} &= \frac{\cosh \pi(\lambda - \chi) \cosh \pi(\lambda - \eta) + \sinh \pi(\chi + \eta) \sinh 2\pi\lambda}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \\
&= \frac{\sinh \pi(\chi + \eta) \cosh \pi\lambda \sinh \pi\lambda + \cosh \pi(\chi + \eta) \sinh^2 \pi\lambda}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \\
&\quad + \frac{\cosh \pi\chi \cosh \pi\eta}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \\
&= \frac{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)}{\cosh \pi(\lambda + \chi) \cosh \pi(\lambda + \eta)} \\
&= 1 \quad ,
\end{aligned}$$

i.e., a condição de normalização (3.44) é satisfeita.

No limite de altas frequências, $E \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sqrt{E^2 - 1/4} \approx E \quad , \\
\eta &= \frac{\sqrt{3}}{\rho_0}(\omega E - m) \approx \sqrt{3} \frac{\omega}{\rho_0} E \quad , \\
\chi &= \frac{2}{\sqrt{3}} E \quad , \\
\chi \pm \lambda &= \frac{2}{\sqrt{3}} E \pm E > 0 \quad , \\
\eta - \lambda &= \sqrt{3} \frac{\omega}{\rho_0} E - E \quad : \\
\text{para } \omega > \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} &\rightarrow \eta - \lambda > 0 \quad , \\
\text{para } \omega < \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} &\rightarrow \eta - \lambda < 0 \quad \text{e} \quad \eta + \lambda \begin{cases} > 0 & \text{para } \omega > -\rho_0/\sqrt{3} \quad , \\ = 0 & \text{para } \omega = -\rho_0/\sqrt{3} \quad , \\ < 0 & \text{para } \omega < -\rho_0/\sqrt{3} \quad , \end{cases} \\
\text{para } \omega = \frac{\rho_0}{\sqrt{3}} &\rightarrow \eta - \lambda = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Por se tratar de um buraco negro com rotação precisamos fazer as mesmas análises do caso estudado para o buraco negro dilatônico linear com rotação. Este caso é um pouco mais delicado: como pode ser observado na métrica (7.4) este buraco negro não tem um limite para ergosfera sendo então deduzido que a ergosfera se estende até o infinito não podendo ter um observador estático na região $r > r_H$, mas somente um observador estacionário.

1. **Energia positiva e negativa:** Procedendo como no caso do dilaton linear com rotação, temos que

$$\begin{aligned}
\cosh(\chi \pm \lambda) &\approx \frac{e^{\pm\pi(2\pm\sqrt{3})E/\sqrt{3}}}{2} \quad , \\
\cosh(\eta \pm \lambda) &\approx \frac{e^{\pm\pi(\sqrt{3}\omega\pm\rho_0)E/\rho_0}}{2} \quad ,
\end{aligned}$$

onde o sinal $+(-)$ esta relacionada com a função $\mathcal{F}_\infty^{\rho in}(\mathcal{F}_{r_H}^{\rho em})$ com $E > 0(E < 0)$.

- Para $\omega \geq \rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &\approx e^{-2\pi(3\omega+2\rho_0)E/\sqrt{3}\rho_0} .\end{aligned}$$

Utilizando a relação de temperatura (3.48), encontra-se

$$\begin{aligned}T_H &= -\frac{E}{\ln \mathcal{R}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\rho_0}{2\pi(3\omega + 2\rho_0)} ,\end{aligned}\tag{7.22}$$

que é a temperatura encontrada via gravidade superficial.

- Para $-\rho_0/\sqrt{3} \leq \omega \leq \rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &\approx e^{-2\pi(2+\sqrt{3})E/\sqrt{3}} , \\ T_H &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi(2 + \sqrt{3})} ,\end{aligned}\tag{7.23}$$

que não é a temperatura dada pela gravidade superficial mas está de acordo com $\omega = \rho_0/\sqrt{3}$ em (7.22).

- Para $\omega \leq -\rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &\approx e^{-2\pi(2\rho_0-3\omega)E/\sqrt{3}\rho_0} , \\ T_H &= \frac{\sqrt{3}\rho_0}{2\pi(2\rho_0 - 3\omega)} ,\end{aligned}\tag{7.24}$$

que não é a temperatura dada pela gravidade superficial.

Na referência [78] mostra-se que todo caso para $\omega < 0$ é provido de curvas tipo tempo fechadas situadas no exterior do buraco negro, $\rho > \rho_H$, podendo ser detectada por um observador nesta região, quebrando assim a causalidade. As situações aceitáveis são aquelas com $\omega > 0$, cujos espectros de temperaturas são dados por (7.22), para $\omega \geq \rho_0/\sqrt{3}$, e (7.23), para $0 \leq \omega \leq \rho_0/\sqrt{3}$, que estão de acordo com a temperatura dada pela gravidade superficial para os limites $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \rho_0/\sqrt{3}$.

2. **Energias positivas:** Mantendo o conceito de que não podemos ter uma definição de vácuo dentro da ergosfera, neste caso em todo o espaço pois a ergosfera parece se estender até o infinito, vamos seguir com o procedimento feito no capítulo anterior.

- Para $\omega \geq \rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &\approx e^{-4\pi E} , \\ T_H &= \frac{1}{4\pi} ,\end{aligned}\tag{7.25}$$

que não é a temperatura obtida pela gravidade superficial.

- Para $-\rho_0/\sqrt{3} < \omega \leq \rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &\approx e^{-2\pi(\rho_0 + \sqrt{3}\omega)E/\rho_0} , \\ T_H &= \frac{\rho_0}{2\pi(\rho_0 + \sqrt{3}\omega)} ,\end{aligned}\tag{7.26}$$

que não está de acordo com a gravidade superficial mas esta de acordo com o caso $\omega = \rho_0/\sqrt{3}$.

- Para $\omega \leq -\rho_0/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\cosh \pi(\chi - \lambda) \cosh \pi(\eta - \lambda)}{\cosh \pi(\chi + \lambda) \cosh \pi(\eta + \lambda)} \\ &= e^0 , \\ T_H &\rightarrow \infty ,\end{aligned}\tag{7.27}$$

que parece ser um caso de super-radiância.

Porém, como já foi dito antes, casos com $\omega < 0$ não são fisicamente aceitáveis. Mesmo que o fossem, estes casos não fariam sentido algum pois, pelo coeficiente (7.20), para se ter $\mathcal{R} \rightarrow 1$ seria necessário $E \rightarrow 0$, o que realmente não faz sentido.

7.2.1 Temperatura via anomalias

Como já foi discutido antes, trabalharemos com a ação de um campo escalar carregado onde

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x \sqrt{-g} \phi^* \nabla^2 \phi \\ &= \int d^3x \phi^* \left\{ -\partial_\rho \left[(\rho^2 - \rho_0^2) \partial_\rho \phi \right] + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \left[3\partial_\varphi^2 \phi + r^2 \partial_t^2 \phi + (4\rho + 6\omega) \partial_t \partial_\varphi \phi \right] \right\} .\end{aligned}$$

Fazendo uma expansão no número quântico azimutal m na região próxima ao horizonte ($\rho \rightarrow \rho_0$), temos que

$$S = \int d^2x \phi_m^* \left\{ -\partial_\rho \left[(\rho^2 - \rho_0^2) \partial_\rho \phi_m \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^2 - \rho_0^2} \left[-3m^2 \phi_m + r^2 \partial_t^2 \phi_m + i(4\rho + 6\omega)m \partial_t \phi_m \right] \Big\} \\
& \approx \int d^2x \frac{(2\rho_0 + 3\omega)}{\sqrt{3}} \phi_m^* \left\{ -\partial_\rho \left[\left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\rho_0 + 3\omega} \right) \sqrt{3} \partial_\rho \phi_m \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\rho_0 + 3\omega}{\rho^2 - \rho_0^2} \right) \left[\partial_t \phi_m + im \frac{3\phi_m}{(2\rho_0 + 3\omega)} \right]^2 \right\} . \tag{7.28}
\end{aligned}$$

Teremos

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -g_{\rho\rho}^{-1} = f(\rho) \quad , \\
f(\rho) &= \left(\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2\rho_0 + 3\omega} \right) \sqrt{3} \quad , \\
A_t(\rho) &= -\frac{3}{(2\rho + 3\omega)} \quad .
\end{aligned}$$

Seguindo os passos anteriores para um buraco negro com rotação, onde agora o único fluxo de carga é representado pelo número quântico azimutal m , teremos o fluxo de carga e do tensor momento-energia como sendo

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{m^2}{4\pi} A_t^2(\rho_H) + \frac{\pi}{12} T_H^2 \\
&= \frac{m^2 \Omega_H^2}{4\pi} + \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt{3} \rho_0}{2\pi(3\omega + 2\rho_0)} \right)^2 . \tag{7.29}
\end{aligned}$$

Como em todos os casos estudados anteriormente, o fluxo de carga representa um potencial químico quando se fala de física estatística, o que está perfeitamente de acordo com a termodinâmica de buracos negros. A radiação Hawking é dada por uma distribuição de Planck, de um corpo negro, com os potenciais químicos para o momento angular azimutal, m , e para a carga elétrica, e , dos campos irradiados pelo buraco negro. Para uma distribuição bosônica o espectro é dado por

$$N_{e,m} = \frac{1}{e^{\beta(\omega - e\Phi_H - m\Omega_H)} - 1} \quad , \tag{7.30}$$

onde Ω_H é a velocidade angular em cima do horizonte, Φ é o potencial elétrico, que aqui é zero, e β é o inverso da temperatura.

A termodinâmica de buracos negros a 3D, como os buracos negros BTZ, também foram estudados via anomalias como mostra [79].

A equação (7.29) parece confirmar a equação (7.22), que nos fornece o valor da temperatura obtida pela gravidade superficial. Isto, a princípio, nos leva a crer que devemos considerar o sinal negativo para E , nos modos das funções de ondas emergentes ($\mathcal{F}_\infty^{\rho em}$), dentro da ergosfera, para buracos negros com rotação. Porém é preciso uma análise quântica mais detelhada para se entender a escolha deste sinal negativo para estes tipos de buracos negros com rotação estudados nesta tese.

Capítulo 8

Conclusão Geral

Ao longo desta tese procurou-se estudar e confirmar a relação da temperatura dos buracos negros com a gravidade superficial, $T_{bn} = \kappa/2\pi$, para os buracos negros aqui estudados. Fizemos primeiro uma revisão histórica das propriedades das soluções clássicas de buracos negros obtidos no âmbito da relatividade geral. Estudamos depois as leis da termodinâmica dos buracos negros, fazendo uma revisão um pouco mais detalhada dos métodos de cálculo da temperatura dos mesmos. Utilizamos todos estes métodos ao longo desta tese.

No capítulo 4 trabalhamos com as soluções assintoticamente planas da teoria EMD. Confirmamos resultados encontrados pela gravidade superficial, para o caso da temperatura, empregando os coeficientes de Bogoliubov para testar a primeira lei da termodinâmica dos buracos negros. Foi feita uma análise mais quantitativa para o caso extremo com $\gamma = 0$, o qual recai na ação das cordas heteróticas. Este é um caso interessante merecendo, assim, um estudo mais detalhado. Porém estas soluções assintoticamente planas já estavam, de certo modo, bem estudadas [67, 68]: fizemos apenas a confirmação destes resultados utilizando outro método ainda não empregado para o cálculo da temperatura destes buracos negros, sendo utilizado o modelo de colapso de uma casca esférica fina. Este capítulo serviu como uma prévia para a análise das soluções não assintoticamente planas derivadas nos capítulos seguintes.

No capítulo 5 começamos a trabalhar com as soluções estáticas que não são nem assintoticamente planas e nem assintoticamente AdS da teoria EMD. Como no caso das soluções assintoticamente planas, os casos mais interessantes estão concentrados na teoria dilatônica linear, $\gamma = 0$, que fornecem os espectros de temperatura mais coerentes. Porém como estes buracos negros apresentam propriedades assintóticas que não estamos habituados a trabalhar, isto gera dificuldade na interpretação dos resultados, como no caso do vácuo dilatônico onde há a presença de uma carga escalar, r_0 , e, também, por se tratar de um efeito da própria geometria não pode-se tirar uma

interpretação mais clara do potencial elétrico. Vimos isso quando aplicamos o processo de anomalias para o cálculo da temperatura para o caso $\gamma = 0 \forall b \neq 0$. Porém o caso $\gamma = b = 0$ nos dá um bom exemplo de que não podemos simplesmente calcular a gravidade superficial e empregá-la na definição de temperatura: devemos fazer o cálculo mais detalhado das propriedades do campo quântico para saber se esta relação é válida ou não. Foi mostrado neste caso que a relação da temperatura com a gravidade superficial não é válida. Isso é um efeito da geometria do espaço-tempo estudado e não um efeito termodinâmico, criação de partículas, como foi mostrado.

No capítulo 6 trabalhamos com o caso dilatônico linear com rotação, onde devemos fazer uma analogia com o processo de Penrose para um partícula clássica que entra na ergosfera com uma energia e sai com outra, muito embora o processo de criação de partículas seja quântico. Supusemos que a partícula criada dentro da ergosfera seja vista, por um observador no infinito futuro, com energia negativa. Supusemos a energia negativa, para se ter $\omega < 0$, para poder justificar o resultado da equação (6.42) que coincide com o resultado obtido pela gravidade superficial. Devido aos resultados encontrados, via o método de euclidianização da métrica, e via o método de anomalias, tudo nos leva a crer que devemos aceitar este sinal negativo, em princípio para ω , e fazer uma interpretação quântica mais detalhada para entender a razão deste sinal.

No capítulo 7 fizemos o estudo termodinâmico dos buracos negros topologicamente massivos onde agora a ergoregião se estende até o infinito. Fica bem claro que a temperatura via a gravidade superficial é a que faz sentido para este tipo de buraco negro com rotação, ou seja, temos que levar em conta o sinal negativo para ω , neste caso para E que representa os autovalores de energia, para os modos emergentes $\mathcal{F}_\infty^{\rho em}$.

Entretanto, fica como uma futura proposta de trabalho fazer uma análise quântica mais detalhada para estes buracos negros com rotação para podermos compreender melhor esta escolha de sinal.

Finalmente, a maior contribuição que esta tese deixa é o de se entender como a gravidade superficial se relaciona com a temperatura. O procedimento direto de cálculo da temperatura utilizando a gravidade superficial pode conduzir a erros.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Castiñeiras, Luís C. B. Crispino, George E. A. Matsas e Daniel A. T. Vanzella, *SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL* **11**, 70-75 (2006);
- [2] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Preussischen Akademie der Wissenschaften (PAW), 844 (1915);
- [3] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, (1923), (Cambridge, MA : Harvard University Press);
- [4] G. Lemaître, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Ser. **53**, 51 (1933);
- [5] M. D. Kruskal, *Phys. Rev.* **119**, 1743 (1960) ;
- [6] G. Szekeres, *Publ. Mat. Debrecen.* **7**, 285 (1960) ;
- [7] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie*, *Annalen der Physik* **50**, 106 (1916);
- [8] G. Nordström, *On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*, *Proc. Kon. Ned. (Amsterdam) Akad. Wet.* **26**, 1201 (1918);
- [9] W. Israel, *Commun. Math. Phys.* **8**, 245 (1968) ;
- [10] S. Chandrasekhar, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91**, 456 (1931);
- [11] S. Chandrasekhar, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **95**, 207 (1935);
- [12] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *Physical Review* **55**, 374 (1939);
- [13] A. Eddington, *Nature* **113**, 192 (1924);
- [14] D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **110**, 965 (1958);
- [15] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963);
- [16] B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331 (1971);

- [17] D. C. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 905 (1975);
- [18] R. Penrose, *Rev. del Nuovo Cimento* **1**, 252-276 (1969);
- [19] E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, e R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965);
- [20] P. O. Mazur, *J. Phys.* **A 15**, 3173 (1982);
- [21] R. Ruffini e J. A. Wheeler, *Introducing the Black Hole*, *Physics Today* **24**, 30-41(1971);
- [22] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, *The Dynamics of General Relativity*, em *Gravitation : An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962);
- [23] L. Abbott e S. Deser, *Nucl. Phys.* **B 195**, 76 (1982);
- [24] R. Penrose, *Proc. R. Soc.* **A 381**, 53 (1982);
- [25] László B. Szabados, *Living Rev. Rel.* **7**, 4 (2004);
- [26] Cédric Leygnac, *Trous noirs non asymptotiquement plats*, tese em física teórica pela UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1 (França)(2004);
- [27] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago: editado por University of Chicago (1984);
- [28] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, New York: editado por Oxford University (1992);
- [29] Derek Raine e Edwin Thomas, *Black Holes An Introduction*, London: editado por Imperial College (2005);
- [30] J. Bekenstein, *Ph. D. Thesis*, Princeton University, (1972);
- [31] J. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D 7**, 2333 (1973);
- [32] J. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D 12**, 3077 (1975);
- [33] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973);
- [34] A. Komar, *Phys. Rev* **113**, 934 (1959);
- [35] S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344-1346 (1971);
- [36] J. M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973);
- [37] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975);

- [38] S. W. Hawking, G.T. Horowitz e S.F. Ross, *Phys. Rev.* **D 51**, 4302 (1995);
- [39] S. W. Hawking, *The path integral approach to quantum gravity em General Relativity, an Einstein centenary survey*, ed. S.W. Hawking e W. Israel (Cambridge: Cambridge University press, 1979);
- [40] A. Gosh e P. Mitra, *Phys. Lett.* **B 357**, 295 (1995);
- [41] A. Ghosh e P. Mitra, *Temperature of extremal black holes*, gr-qc/9507032;
- [42] L. H. Ford, *Quantum field theory in curved spacetime, Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School*, editado por J. C. A. Barata, A. P. C. Malbouisson e S. F. Novaes, World Scientific, Singapore (1998);
- [43] Michio Kaku, *Quantum Field Theory-A MODERN INTRODUCTION*, editado por Oxford (1993);
- [44] L. Alvarez Gaumé e P. Ginsparg, *Ann. Phys. (N.Y.)* **161**, 423 (1985);
- [45] S. P. Robson e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 011303 (2005);
- [46] S. Iso, H. Umetsu e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 151302 (2006);
- [47] S. Iso, H. Umetsu e F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D 74**, 044017 (2006);
- [48] Keiju Murata e Jiro Soda, *Phys. Rev.* **D 74**, 044018 (2006);
- [49] W. A. Bardeen e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B 244**, 421 (1984);
- [50] L. Alvarez-Gaume e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 234**, 269 (1984);
- [51] R. Bertlmann e E. Kohlprath, *Ann. Phys. (N.Y.)* **288**, 137 (2001);
- [52] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, editado por Oxford (2000);
- [53] K. Fujikawa e H. Suzuki, *Path integrals and quantum anomalies*, editado por Oxford (2004);
- [54] Luís C. Crispino, *Phys.Rev.* **D 77**, 047503 (2008);
- [55] Luís C. Crispino, Ednilton S. Oliveira e George E. Matsas, *Phys.Rev.* **D 76**, 107502 (2007);
- [56] Luís C. Crispino, Ednilton S. Oliveira, Atsushi Higuchi e George E. Matsas , *Phys.Rev.* **D 75**, 104012 (2007);
- [57] Jorge Castiñeiras, Luís C. Crispino, Rodrigo Murta e George E. Matsas, *Phys.Rev.* **D 71**, 104013 (2005);

- [58] R. Brout, S. Massar, R. Parentani e Ph. Spindel, *Phys. Rep.* **260**, 329-446 (1995);
- [59] K. Ghoroku e A. L. Larsen, *Phys. Lett.* **B 328**, 28 (1994);
- [60] M. Natsuume, N. Sakai e M. Sato, *Mod. Phys. Lett.* **A 11**, 1467 (1996);
- [61] Won Tae Kim e Jhon J. Oh, *Phys. Lett.* **B 461**, 189-195 (1999);
- [62] G. Clément, J. C. Fabris e G. T. Marques, *Phys. Lett.* **B 651**, 54 (2007);
- [63] A. Ghosh e P. Mitra, *Phys.Rev. Lett.* **73**, 2521 (1994);
- [64] Daniel J. Loranž e William A. Hiscock, *Phys.Rev.* **D 55**, 3893 (1997);
- [65] Elias C. Vagenas e Saurya Das, *JHEP* **025**, 0610 (2006);
- [66] M. Mars e W. Simon, *Adv. Theor. Math. Phys.* **6**, 279 (2003);
- [67] G.W. Gibbons e K. Maeda, *Nucl. Phys.* **B 298**, 741 (1988);
- [68] D. Garfinfle, G.T. Horowitz e A. Strominger, *Phys. Rev.* **D 43**, 3140 (1991);
- [69] F.G. Alvarenga, A.B. Batista, J.C. Fabris e G.T. Marques, *Phys. Lett.* **A 320**, 83-94 (2003);
- [70] Qing-Quan Jiang , Shuang Qing Wu e Xu Cai, *Phys. Rev.* **D 75**, 064029 (2006);
- [71] J. Castiņeiras, L.C.B. Crispino, G.E.A. Matsas e D.A.T. Vanzella, *Phys.Rev.* **D 65**, 104019 (2002);
- [72] G. Clément e C. Leygnac, *Phys. Rev.* **D 70**, 084018 (2004);
- [73] G. Clément, D. Galštsov e C. Leygnac, *Phys. Rev.* **D 67**, 024012 (2003);
- [74] Paul C. W. Davies, Tevian Dray e Corinne A. Manogue, *Phys. Rev.* **D 53**, 4382 (1996);
- [75] Luís C. B. Crispino, Atsushi Higuchi e George E. A. Matsas, *REVIEWS OF MODERN PHYSICS* **80**, 787 (2008);
- [76] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press (1998);
- [77] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982); *Annals of Physics NY* **140**, 372 (1982);
- [78] Karim Ati Moussa, Gérard Clément e Cedric Leygnac, *Class. Quatum Grav.* **20**, L277 (2003);
- [79] M. R. Setare, *Eur. Phys. J.* **C 49**, 865 (2007).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)