

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**RADIAÇÃO DE HAWKING E
ANOMALIAS GRAVITACIONAIS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Daniel Alf Drehmer

**Santo André, SP, Brasil
2009**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

RADIAÇÃO DE HAWKING E ANOMALIAS GRAVITACIONAIS ‡

por

Daniel Alf Drehmer

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin, apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da UFABC em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin

Santo André, SP, Brasil
2009

‡Trabalho financiado parcialmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

Deixo meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho ou para a minha própria formação, e em especial:

- ◇ À CAPES e à UFABC, o suporte financeiro deste trabalho;
- ◇ Ao professor Dr. Wilson Tonin Zanchin, a orientação desde os tempos da graduação e principalmente por ter se mostrado uma pessoa imensamente paciente e compreensível, e ter se tornado um amigo que sempre terá meu respeito e consideração;
- ◇ A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Física da UFABC, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho e da minha formação geral em física. Em especial agradeço ao professor Alex Gomes Dias as suas valorosas aulas de Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos, mas principalmente por sempre ter sido um grande exemplo de esforço e dedicação, capaz de motivar qualquer estudante a superar suas dificuldades;
- ◇ Aos meus bons e fiéis amigos David Sanmartin, Wagner Garcia e Fábio Breunig, a convivência e parceria nos tempos de Graduação e que durante o Mestrado apesar de fisicamente distantes sempre me motivaram através de longas e agradáveis conversas;
- ◇ Por último e mais importante, ao meu pai Ingon, minha mãe Selia, meu irmão Neimar, minha irmã Carla e meus tios Airton e Valdir por sempre terem apoiado minhas decisões e me motivado para enfrentar todas as dificuldades.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-graduação em Física
Universidade Federal do ABC

RADIAÇÃO DE HAWKING E ANOMALIAS GRAVITACIONAIS

AUTOR: DANIEL ALF DREHMER

ORIENTADOR: VILSON TONIN ZANCHIN

Data e Local da Defesa: Santo André, 04 de Agosto de 2009

A radiação de Hawking é considerada um dos efeitos quânticos mais impressionantes emergentes na teoria de gravitação semiclássica. A relação entre a radiação de Hawking e anomalias conformes é extremamente bem estabelecida, tendo advento em meados da década de setenta com o trabalho seminal de Christensen e Fulling, os quais mostram que para o buraco negro de Schwarzschild o fluxo de energia da radiação de Hawking deve-se inteiramente a anomalia conforme do traço do tensor de energia-momento, mostrando dessa forma que a origem da anomalia de traço se deve ao fenômeno de criação de partículas no horizonte de eventos do buraco negro. Recentemente Robinson e Wilczek propuseram um novo método para determinar o fluxo de energia da radiação de Hawking empregando anomalias gravitacionais e anomalias de gauge. A generalidade do método proposto por Robinson e Wilczek proporcionou a este grande aceitação, impulsionando o surgimento de um grande número de trabalhos onde são calculados o fluxo de energia da radiação de Hawking para os mais diversos buracos negros. Nesta dissertação fazemos uso dos métodos desenvolvidos por Christensen e Fulling e por Robinson e Wilczek para determinar os fluxos de energia da radiação de Hawking emitida por buracos negros estáticos em espaços-tempos assintoticamente Minkowski e anti-de Sitter. Primeiro apresentamos os métodos citados e revisamos sua aplicação de forma geral para uma métrica genérica que descreve os buracos negros de nosso interesse. Posteriormente fixamos uma dada métrica e determinamos a forma exata do tensor de energia-momento anômalo correspondente. Este estudo é feito para os buracos negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Schwarzschild-anti-de Sitter e para a *black brane*, considerando cada um dos dois métodos citados acima.

Palavras-chave: Buracos negros; anomalias de traço; anomalias gravitacionais; anomalias de gauge; tensor de energia-momento; radiação de Hawking.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-graduação em Física
Universidade Federal do ABC

HAWKING RADIATION AND GRAVITATIONAL ANOMALIES

AUTHOR: DANIEL ALF DREHMER
ADVISER: VILSON TONIN ZANCHIN
PLACE AND DATE: Santo André, August 4th, 2009

The Hawking radiation is considered one of the most striking quantum effects arising in the semiclassical theory of gravitation. The relationship between the Hawking radiation and the conformal anomalies is very well established. It has emerged in the middle of the seventies with the seminal work by Christensen and Fulling, where it was shown that for the Schwarzschild black hole the energy flux of the Hawking radiation is due entirely to the presence of the conformal anomaly of the stress tensor. This has also demonstrated that the arising of the trace anomaly is caused by the particle creation phenomenon close to the black hole horizon. Recently Robinson and Wilczek presented a new approach to obtain the energy flux of Hawking Radiation using gauge and gravitational anomalies. The generality of this new method has motivated a great number of studies calculating the energy flux of the Hawking radiation for many different black holes. In the present work we use the methods developed by Christensen and Fulling and by Robinson and Wilczek to calculate the energy fluxes of the Hawking radiation emitted by static black holes in asymptotically anti-de Sitter and asymptotically Minkowski spacetimes. First we present each method and review the main applications using a generic metric which describes the black holes of our interest. Later we chose a specific metric and determine the exact form of the anomalous stress tensor. This is done for both of the above mentioned methods, and for the Schwarzschild, Reissner-Nordström, Schwarzschild-anti-de Sitter black holes, and finally for the black brane.

Keywords: black holes, trace anomalies, gravitational anomalies, gauge anomalies, stress tensor, Hawking radiation.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Revisão Histórica e Motivação	1
1.2	Objetivos e Estrutura da Dissertação	3
1.3	Notação e Convenções	4
2	Teoria de Gravitação Semiclássica e Efeitos Quânticos na Gravitação	5
2.1	Relatividade Geral	6
2.2	Buracos Negros	8
2.3	Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos	10
2.3.1	Fundamentos da TQCEC	11
2.3.2	Criação de Partículas por Campos Gravitacionais	14
2.3.3	Radiação de Hawking	16
2.4	Anomalias	20
2.4.1	Anomalias Conformes	22
2.4.2	Anomalias de Gauge	23
2.4.3	Anomalias Gravitacionais	23
3	Alguns Espaços-Tempos Estáticos	25
3.1	Introdução	25
3.2	Espaços-Tempos Esféricos Assintoticamente Planos - Minkowski	26
3.2.1	O Buraco Negro de Schwarzschild	27
3.2.2	O Buraco Negro de Reissner-Nordström	30
3.3	Espaços-Tempos Esféricos Assintoticamente Anti-de Sitter	33
3.3.1	O Buraco Negro de Schwarzschild-Anti-de Sitter	35
3.3.2	Branas Negras/Black Strings	36
4	Radiação de Hawking e Anomalias de Traço: Método Christensen-Fulling	38
4.1	Introdução	38
4.2	O Método de Christensen e Fulling	39
4.3	Forma Geral do Tensor de Energia-Momento Anômalo	40
4.3.1	Para Buracos Negros Quadridimensionais	40
4.3.2	Para Buracos Negros Bidimensionais	43
4.4	As Anomalias de Traço para o Campo Escalar	45
4.4.1	Para Buracos Negros Quadridimensionais	45
4.4.2	Para Buracos Negros Bidimensionais	46

4.5	O TEM da Radiação de Hawking: Campo Escalar, Espaços Bidimensionais	47
4.5.1	Para o Buraco Negro de Schwarzschild	47
4.5.2	Para o Buraco Negro de Reissner-Nordström	49
4.5.3	Para o Buraco Negro de Schwarzschild Anti-de Sitter	50
4.5.4	Para a Black Brane/Black String	51
4.6	Adaptação do Método de Christensen e Fulling para Espaços-Tempos AdS	52
5	Radiação de Hawking e Anomalias: Método Robinson-Wilczek	55
5.1	Introdução	55
5.2	O Método de Robinson e Wilczek	55
5.3	Campo Escalar na Presença de Buracos Negros Neutros	58
5.3.1	Na Presença de um Buraco Negro de Schwarzschild	61
5.3.2	Na Presença de um Buraco Negro de Schwarzschild-anti de Sitter	61
5.4	Campo Escalar Carregado na Presença de um Buraco Negro Carregado	62
5.4.1	Na Presença de um Buraco Negro de Reissner-Nordström	65
5.4.2	Na Presença de uma <i>Black String</i> /Branas Negras Carregadas	65
6	Considerações Finais	67
A	Invariantes de Curvatura dos Espaços-Tempos e o Traço do TEM	74
A.1	Os Símbolos de Christoffel	75
A.2	Curvatura	75
A.2.1	Tensor de Riemann	75
A.2.2	Tensor de Ricci	77
A.2.3	Escalar de Ricci	77
A.3	O Traço Anômalo do TEM	77
B	Equação de Onda Para o Campo Escalar em Espaços-Tempos Curvos	80
B.1	Buracos Negros Esféricos	81
B.2	Branas Negras/Black String	82

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Penrose de um buraco negro de Schwarzschild formado a partir do colapso gravitacional de uma casca esférica	17
3.1	Diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal	29
3.2	Diagrama de Penrose de um buraco negro de Schwarzschild formado por colapso gravitacional	30
3.3	Diagrama de kruskal das quatro regiões da máxima extensão analítica da métrica de Reissner-Nordström descritas pelas coordenadas (U^+, V^+) . .	32
3.4	Diagrama de kruskal das quatro regiões da máxima extensão analítica da métrica de Reissner-Nordström descritas pelas coordenadas (U^-, V^-) . .	33
3.5	Diagrama de Penrose da máxima extensão analítica da métrica de Reissner-Nordström, e diagrama de Penrose de um buraco negro de Reissner-Nordström formado por colapso gravitacional	34

Lista de Tabelas

3.1	Geometria das Superfícies de (t, r) Constantes	26
A.1	Dependência de $Z(\theta)$ com a	74
A.2	Símbolos de Christoffel	75
A.3	Tensor de Riemann	76
A.4	Tensor de Ricci	77

Capítulo 1

Introdução

1.1 Revisão Histórica e Motivação

Uma das questões de maior interesse na física teórica nas últimas décadas tem sido a formulação de uma teoria de Gravitação Quântica (GQ) consistente. Apesar dos grandes esforços realizados para a obtenção desta, pouco progresso tem sido feito e ainda estamos longe da formulação de uma teoria que descreva a gravidade em um nível quântico. Na ausência de uma teoria de Gravitação Quântica consistente e buscando informações a respeito do que seria o comportamento quântico da gravidade ou da influência da gravidade sobre os fenômenos quânticos, teorias efetivas e teorias semiclássicas vem sendo usadas para tentar compreender este tema. Dentre estes modelos, um dos de maior repercussão e aceite é a Gravidade Semiclássica, na qual os campos de matéria são quantizados sobre um *background* curvo que é descrito por uma métrica clássica. Esta abordagem é conhecida como Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos (TQCETC) [1, 2, 3]. Este modelo surge como uma união entre a Relatividade Geral (RG) e a Teoria Quântica de Campos (TQC). De uma forma geral pode-se dizer que o objetivo fundamental desta teoria é descrever a evolução dos campos quânticos em um *background* curvo clássico, que é solução para as equações de Einstein, usando os métodos padrão da Teoria Quântica de Campos. Assim, a Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos está estruturada de forma que apenas os campos da matéria são quantizados enquanto o campo gravitacional ainda é descrito classicamente em acordo com a Relatividade Geral.

A aplicação desse método de quantização, onde se mantém as características geométricas clássicas do espaço-tempo, torna-se importante no estudo da evolução dos campos da matéria em espaços-tempos dinâmicos, bem como, para estudar a evolução destes campos quânticos nas vizinhanças de fontes de gravidade intensas, como por exemplo, os buracos negros. É neste último cenário que surge o fenômeno de criação e emissão de partículas por campos gravitacionais. Em 1974, ao estudar os campos quantizados na vizinhança de

um objeto submetido ao colapso gravitacional formando assim um buraco negro, Hawking conseguiu mostrar que quando considerados do ponto de vista quântico, buracos negros são instáveis, podendo decair através da emissão de radiação térmica numa temperatura característica que é determinada inteiramente pelas propriedades gravitacionais do buraco negro [4, 5]. Este fenômeno é atualmente conhecido pelo nome de radiação de Hawking e devido a suas implicações é considerado um dos efeitos quânticos mais surpreendentes até hoje conhecidos.

Antes da descoberta de Hawking acreditava-se que após sua formação os buracos negros seriam eternos, e dado que nenhuma forma de energia poderia sair do horizonte de eventos a massa de um buraco negro estático jamais diminuiria. As principais características clássicas dos buracos negros foram estudadas por Hawking, Bardeen, Carter e Penrose, e reunidas em um conjunto de quatro teoremas conhecidos como as leis da mecânica dos buracos negros [6, 7, 8, 9, 10]. As leis da mecânica dos buracos negros [6] apresentam uma grande semelhança com as leis da termodinâmica. Entre estas a que mais se destaca é a segunda lei, que afirma que “*a área do horizonte de eventos de um buraco negro não pode diminuir no tempo*”, estabelecendo assim a analogia entre a área do horizonte de eventos de um buraco negro e a entropia. As semelhanças entre as leis da dinâmica dos buracos negros e as leis da Termodinâmica também são ressaltadas por Bekenstein [11, 12], que sugere a possibilidade de associarmos uma entropia aos buracos negros, e que esta deva ser um múltiplo da área do horizonte de eventos do buraco negro. Mas até então estas semelhanças eram consideradas apenas coincidências, uma vez que a temperatura dos buracos negros seria nula. Com a descoberta de Hawking de que buracos negros podem emitir radiação com um espectro característico de radiação de corpo negro com uma temperatura que depende apenas de suas propriedades gravitacionais, sendo dada por

$$T = \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \kappa,$$

onde \hbar é a constante de Dirac, c é a velocidade da luz no vácuo, k_B é a constante de Boltzmann e κ é a gravidade superficial no horizonte de eventos, que para um [buraco negro](#) com massa M é dada por $\kappa = \frac{c^4}{4GM}$, foi possível associar uma entropia aos buracos negros dada por

$$S_{bn} = \frac{c^3 k_B}{4\hbar G} A$$

onde A é área do horizonte de eventos do buraco negro. As principais razões pelas quais este resultado é considerado uma das grandes descobertas da física teórica são sua generalidade, pois ao que tudo indica este é um resultado fundamental, e sendo assim pode ser

considerado uma teste pelo qual qualquer modelo candidato a teoria de Gravitação Quântica deve passar. Esta generalidade se deve ao fato de que ele é reproduzido por vários outros métodos, entre os quais destacam-se os apresentados nas referências [13, 14, 15]. Além disso, este resultado dá origem à termodinâmica dos buracos negros [16, 17, 18], estabelecendo uma conexão entre Termodinâmica, Mecânica Quântica e Relatividade Geral.

Outro resultado importante da quantização dos campos em espaços-tempos curvos é o surgimento de anomalias. Na Teoria Quântica de Campos, anomalias aparecem como um conflito entre uma simetria respeitada pela ação clássica e o procedimento de quantização, i.e., uma simetria da ação clássica que é quebrada no processo de quantização dos campos [19]. Dentro deste contexto as anomalias em simetrias de gauge se apresentam como correntes de gauge não conservadas e podem representar inconsistências na formulação da teoria, implicando principalmente em problemas na interpretação probabilística da mecânica quântica. No caso das anomalias gravitacionais [20] temos uma quebra na covariância geral, a qual se manifesta como a não conservação do tensor de energia-momento, $\nabla_\mu T_\nu^\mu \neq 0$. As anomalias conformes [21, 22, 23] aparecem como uma quebra da invariância da ação frente a uma transformação conforme da métrica e dos campos, manifestando-se explicitamente no tensor de energia-momento que adquire traço não nulo no processo de regularização, $\langle T_\alpha^\alpha \neq 0 \rangle$, o qual é nulo na teoria clássica.

As anomalias conformes apresentadas por Capper e Duff [22] foram inicialmente vistas como um problema devido ao processo de regularização usado, e desta forma as anomalias deveriam ser removidas com o emprego de algum método de regularização consistente e, desta forma, não teriam interpretação física. Porém, Christensen e Fulling [24] conseguiram relacionar as anomalias conformes com o fenômeno da criação de partículas por campos gravitacionais, e ainda mostrar que em duas dimensões a radiação de Hawking se deve inteiramente às anomalias conformes. Recentemente Robinson e Wilczek [25] conseguiram mostrar que é possível usar também anomalias gravitacionais e de gauge para obter o fluxo de energia da radiação de Hawking.

1.2 Objetivos e Estrutura da Dissertação

No presente trabalho apresentamos um estudo sobre o fenômeno da evaporação de buracos negros, focando-nos principalmente na relação entre a radiação de Hawking e o surgimento de anomalias na Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos, usando os dois métodos citados acima para determinar o tensor de energia-momento da radiação de Hawking emitida por [alguns](#) buracos negros em espaços-tempos assintoticamente Minkowski e assintoticamente anti-de Sitter.

A dissertação se organiza da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentamos uma revisão sobre as bases teóricas necessárias para a compreensão do fenômeno de evaporação de buracos negros, que engloba a teoria da Relatividade Geral de Einstein e a Teoria Quântica de Campos, após isto abordamos a união destas teorias na formulação da teoria de Gravitação Semiclássica dando ênfase ao aspecto dos efeitos gerados pela gravidade sobre os campos da matéria. Fazemos ainda uma revisão sobre buracos negros e o surgimento de anomalias na Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos. No Capítulo 3 descrevemos os espaços-tempos nas vizinhanças dos buracos negros considerados neste trabalho. Nos Capítulos 4 e 5 fazemos uso dos métodos que empregam respectivamente anomalias conformes e [anomalias de gauge](#) para calcularmos o tensor de energia-momento da radiação de Hawking para os buracos negros descritos no Capítulo 3. Para finalizar fazemos uma comparação entre os métodos apontando seus pontos fortes e fracos enfatizando os resultados obtidos.

1.3 Notação e Convenções

Exceto quando explicitado de forma contrária, usaremos neste trabalho o sistema de unidades no qual todas as constantes fundamentais da natureza são normalizadas à unidade, i.e. ($c = G = K_B = \hbar = 1$).

A convenção de sinais para as componentes da métrica é $(-, +, +, +)$. Índices gregos variam de 0 a 3 enquanto índices latinos variam de 1 a 3, i.e., ($x = x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$) e ($x^i = x^1, x^2, x^3$).

Valores esperados de quantidades físicas, X , calculados através da mecânica quântica serão expressos entre *bra-ket's*, $\langle X \rangle$, enquanto quantidades clássicas serão expressas da forma convencional, com símbolos em itálico, X .

Definições e convenções adicionais são apresentadas no Apêndice A.

Capítulo 2

Teoria de Gravitação Semiclássica e Efeitos Quânticos na Gravitação

A Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos são consideradas os dois principais pilares da física moderna. A Relatividade Geral de Einstein é a teoria padrão para descrever a gravidade. Sua formulação foi uma verdadeira revolução para Física, uma vez que mudou totalmente nossa compreensão dos fenômenos gravitacionais e do espaço-tempo. Por outro lado, a Teoria Quântica de Campos é a nossa melhor descrição da [física das partículas elementares](#). Entretanto, é impossível, do ponto de vista computacional, aplicar a Teoria Quântica de Campos para sistemas com um número extremamente grande de partículas como aglomerados estelares, sistemas planetários ou galáxias, onde a física predominante é determinada pela interação gravitacional entre estes corpos. Da mesma forma, a Relatividade Geral não é uma boa teoria para descrever a interação gravitacional em escalas de distâncias muito pequenas, como a escala de Planck ($l_p \sim 10^{-33} \text{ cm}$), para determinar o papel da gravidade em um fenômeno de criação de pares ou na colisão de partículas em grandes aceleradores, pois nessa escala esperamos que possam surgir efeitos quânticos relevantes a ponto de mudar a descrição da interação gravitacional. A incompatibilidade entre estas teorias se deve principalmente ao fato da Relatividade Geral ser uma teoria puramente clássica, onde os valores dos observáveis físicos, tanto quanto a métrica do espaço-tempo, apresentam valores bem definidos. No estágio atual de nosso conhecimento da natureza, a Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos são duas teorias muito boas para prever e explicar os fenômenos físicos em seus respectivos regimes de [validade](#). Espera-se que numa teoria de gravidade quântica, onde o campo gravitacional seja tratado em pé de igualdade com os campos da matéria, isto é, onde a métrica do espaço-tempo seja quantizada da mesma forma que os campos de matéria, a Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos sejam limites a ser satisfeitos por esta teoria mais fundamental. Atualmente existem algumas propostas de teorias de gravidade quântica, sendo as

principais a Teoria de Cordas, [26, 27], e a *Loop Quantum Gravity*, [28, 29, 30, 31, 32]. Entretanto, estas propostas promissoras ainda encontram-se em estágios iniciais carecendo tanto de confirmações experimentais que possam fundamentar seus princípios quanto de desenvolvimento teórico para fazer previsões bem definidas.

Apesar de carecermos de uma teoria de gravitação quântica completa e consistente, dispomos de uma teoria que para fins práticos é totalmente satisfatória, e embora sendo apenas uma aproximação, prediz alguns fenômenos que por sua generalidade podem ser considerados manifestações reais de uma teoria de gravitação quântica. Esta teoria conhecida como Gravitação Semiclássica é construída de tal forma que a gravidade é descrita classicamente de acordo com a Relatividade Geral enquanto os campos da matéria são descritos através dos princípios da Teoria Quântica de Campos. Tal interface teórica tem origem no trabalho de Parker [33], que estuda a criação de partículas em um universo em expansão. Os principais aspectos desta abordagem são por um lado usar a equação semiclássica de Einstein para explicar como os campos da matéria tornam-se fontes de gravidade, e por outro, estudar os efeitos da gravidade sobre os campos quânticos através da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos.

Nas seções que se seguem nos concentramos neste último aspecto, procedendo da seguinte forma: primeiro fazemos uma breve revisão sobre os fundamentos da Relatividade Geral e da Teoria Quântica de Campos, partindo então para a descrição da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos. Posteriormente apresentamos alguns dos efeitos causados pela gravidade sobre os campos quânticos dando ênfase à radiação de Hawking. No final do capítulo apresentamos uma consequência deste procedimento de quantização conhecido como anomalias conformes e anomalias gravitacionais.

2.1 Relatividade Geral

A Relatividade Geral apresentada em sua forma definitiva por Einstein em 1915 é atualmente a melhor teoria para descrever a gravidade em nível clássico. A teoria pode ser resumida pela afirmação de que o espaço-tempo tem suas propriedades geométricas totalmente definidas por seu conteúdo de matéria e energia. Ou, de forma recíproca, que a forma como a matéria e a energia se distribuem no espaço e no tempo é totalmente determinada pelas propriedades do espaço e do tempo.

Os pilares sobre os quais a Relatividade Geral é formulada são três princípios considerados fundamentais. O primeiro é o princípio da equivalência, que estabelece a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo:

O resultado de qualquer experimento local, em um laboratório em movimento em um sistema de referência inercial, é independente da velocidade do laboratório e sua localização no espaço-tempo.

Uma consequência desta afirmação é que um referencial inercial em um ponto onde exista um campo gravitacional é localmente equivalente a um referencial acelerado na ausência do campo gravitacional.

O segundo princípio fundamental no qual Relatividade Geral se apóia é o princípio de covariância geral, que estabelece que:

As leis físicas devem ter a mesma forma para todos os observadores inerciais.

Por último temos o princípio de invariância da velocidade da luz:

A velocidade da luz no vácuo é uma constante (c), que independe da velocidade do referencial onde esteja sendo feita a medida.

Matematicamente as propriedades locais do espaço-tempo são totalmente determinadas por sua geometria, sendo esta totalmente caracterizada por um objeto matemático denominado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual determina “como as distâncias devem ser medidas” num determinado espaço-tempo, ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$). Esta métrica é obtida resolvendo-se as equações de Einstein, que são a base matemática da Relatividade Geral. Em sua forma compacta, as equações de Einstein são dadas por

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = kT_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

No lado esquerdo de (2.1), o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, carrega a informação a respeito de como a matéria e a energia se distribuem geometricamente no espaço e no tempo. O tensor de Einstein é dado por (veja também o Apêndice A)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que é definido a partir da contração do primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann, isto é,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.3)$$

onde o tensor de Riemann, ou tensor de curvatura, é definido em termos das conexões de

Christoffel ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$) por

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\eta\sigma}^\lambda, \quad (2.4)$$

com

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.5)$$

O outro termo (R) é o escalar de Ricci, obtido pela contração do tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

No caso particular em que o tensor de Riemann é zero, ($R_{\mu\nu\sigma}^\lambda = 0$), o espaço-tempo é dito plano, chato, ou de Minkowski, e a métrica pode ser posta na forma da métrica de Minkowski, ($g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$).

O segundo termo do lado esquerdo da equação de Einstein, Eq. (2.1), é proporcional à constante cosmológica Λ . No caso em a constante cosmológica é nula ($\Lambda = 0$), e para distribuições localizadas de matéria e energia, o espaço-tempo é assintoticamente Minkowski. Isto é, a grandes distâncias das fontes de gravidade a curvatura do espaço-tempo tende à zero, o tensor de Riemann (2.4) se anula.

No lado direito da equação (2.1), a constante k está definida em termos da constante de Newton da gravitação universal (G) como $k \equiv 8\pi G$. O tensor $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, que carrega a informação a respeito da dinâmica do sistema, ou seja, a informação a respeito da constituição de matéria e energia do espaço-tempo. O tensor de energia-momento é definido como a variação da ação dos campos da matéria em relação a uma variação arbitrária da métrica, ou seja:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.7)$$

Portando, a forma mais geral de se escrever as equações de campo de Einstein é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

2.2 Buracos Negros

A existência de buracos negros talvez seja a previsão mais surpreendente da teoria da gravitação de Einstein. Sob o olhar da física clássica, buracos negros podem ser definidos como regiões no espaço-tempo onde a densidade de energia é tão grande que o campo

gravitacional resultante é tão intenso, i.e., a curvatura do espaço-tempo é tão grande que nada pode escapar desta região, nem mesmo a luz. Assim, qualquer corpo que se aproxime suficientemente de um buraco negro está condenado a morrer em seu centro. Apesar da existência desta classe de objetos ser especulada desde o final do século XVII por Michell, Cavendish e Laplace, a previsão matemática de que buracos negros poderiam existir teoricamente foi feita por Schwarzschild em 1916, logo após Einstein apresentar sua teoria de gravitação [34].

A aplicação mais simples e direta da teoria de Relatividade Geral de Einstein consiste em estudar o campo gravitacional nas vizinhanças de um objeto com simetria esférica em um espaço assintoticamente Minkowski, ($\Lambda = 0$), no vácuo, ($T_{\mu\nu} = 0$). Nesse caso, as equações de campo de Einstein (2.8) assumem a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

ou, equivalentemente, $R_{\mu\nu} = 0$. A resolução desta equação sob as condições acima estabelecidas fornece como resultado a métrica de Schwarzschild [34], para a qual o quadrado do elemento de caminho é dado por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.10)$$

onde M é a massa do objeto. Esta métrica é importante pois descreve muito bem a geometria do espaço-tempo nas vizinhanças de fontes de gravidade com simetria esférica, como por exemplo estrelas e planetas. Porém, sua característica mais importante é dada pelo fato que para $r = 2M$ o coeficiente da parte temporal da métrica, (g_{tt}), anula-se. Este ponto é conhecido como o raio de Schwarzschild ($R_S = 2M$). A superfície de “raio” constante $r = 2M$, é conhecida como horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. Para a região interior ao horizonte de eventos ($r < 2M$), o coeficiente temporal da métrica muda de sinal, i.e. $f(r < 2M) < 0$, e como consequência um observador que cruzar esta superfície para a região interior ao horizonte de eventos do buraco negro teria que se mover com uma velocidade maior que a da luz para retornar a região exterior e, portanto, ficaria confinado no interior do buraco negro. Assim, buracos negros podem ser caracterizados pelo fato que nenhuma forma de energia pode escapar do interior do horizonte de eventos. Dessa forma, o que define a existência de um buraco negro é a presença do horizonte de eventos. O horizonte de eventos é uma superfície nula (tipo-luz), que separa os pontos do espaço-tempo que podem ser conectados ao infinito através de uma trajetória tipo-tempo, dos que não podem.

Outro fato importante que merece ser ressaltado é que buracos negros são totalmente caracterizados por três parâmetros globais: massa (M), carga elétrica (Q) e momento angular (J), sendo estas as únicas informações acessíveis a um observador externo ao horizonte de eventos. Esta afirmação é conhecida como teorema de *no hair*.

As principais características de alguns buracos negros de interesse para a realização deste trabalho são apresentadas no Capítulo 3.

2.3 Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos

A Teoria Quântica de Campos pode ser vista como uma aplicação da Mecânica Quântica onde o sistema que está sendo quantizado trata-se de um campo ao invés de uma partícula ou um sistema destas. Da mesma forma, como na Mecânica Quântica, o processo de quantização é composto de quatro etapas fundamentais: A obtenção da lagrangiana ou das equações de movimento que descrevem a dinâmica do sistema clássico que está sendo quantizado; A escolha do procedimento de quantização a ser empregado (quantização canônica, integrais de caminho, etc...); A caracterização dos estados quânticos obtidos e interpretação física dos estados quânticos e das quantidades observáveis. Uma revisão completa sobre a Teoria Quântica de Campos e de como cada uma dessas etapas é implementada é encontrada em [35, 36, 37].

No caso da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos, o *background* onde os campos que estão sendo quantizados evoluem é descrito por uma métrica que é solução das equações de campo de Einstein (2.8). De uma forma geral o processo de quantização segue os mesmos passos que na Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos minkowskianos. Entretanto, o fato de a Relatividade Geral não ser uma teoria invariante frente às transformações de Lorentz impõe dificuldades na caracterização dos estados quânticos e, por conseqüência, na interpretação física dos estados dos observáveis. Na quantização dos campos em espaços-tempos planos, o estado de vácuo é independente do observador, ou seja ele é invariante frente a qualquer mudança de referencial e assim pode-se definir o conceito de partícula de maneira unívoca. Ao contrário do que ocorre na Teoria Quântica de Campos usual, em espaços-tempos curvos a ausência da invariância de Lorentz faz com que o vácuo não possa ser definido de forma única para todos os observadores, e portanto, o conceito de partícula se torna dependente do observador [38, 39, 40, 41, 42].

2.3.1 Fundamentos da TQCEC

No que segue, apresentamos de forma sucinta as principais etapas do processo de quantização canônica dos campos em espaços-tempos curvos. Para evitar demasiadas dificuldades matemáticas vamos considerar um campo escalar $\phi(x)$, porém os conceitos fundamentais e técnicas envolvidas são em sua maioria aplicáveis a situações mais realistas envolvendo campos fermiônicos e bosônicos. Uma descrição completa da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos pode ser encontrada em [1, 43, 44].

A ação clássica para um campo escalar $\phi(x)$ evoluindo em um espaço-tempo curvo quadridimensional é, em geral, escrita na forma

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} (\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2), \quad (2.11)$$

A equação de movimento a ser satisfeita pelo campo $\phi(x)$ é a equação de Klein-Gordon generalizada, obtida através da variação da integral de ação (2.11) em relação ao campo ϕ ,

$$\square \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi = 0, \quad (2.12)$$

na qual \square representa o operador de d'Alembert covariante, m é a massa do campo escalar, R é o escalar de Ricci (2.6), ξ é uma constante de acoplamento que carrega a informação de como o campo $\phi(x)$ interage com o campo gravitacional. Em particular, duas escolhas de ξ tem interesse físico: $\xi = 0$, que define o acoplamento mínimo e $\xi = \frac{1}{6}$ que é conhecido como acoplamento conforme. Nesse caso, no limite de campo não massivo, $m = 0$, a teoria é invariante frente a transformações conformes da métrica,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Frente a uma transformação desse tipo, os campos da matéria sofrem variações dadas por

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-\sigma(x)} \phi, \quad (2.14)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu, \quad (2.15)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-\frac{3}{2}\sigma(x)} \psi, \quad (2.16)$$

onde ϕ representa campos escalares, A_μ , campos vetoriais de gauge e ψ , campos fermiônicos. Observa-se que campos de gauge vetoriais não variam frente a transformações conformes da métrica. Esta invariância do potencial eletromagnético frente a transformações conformes se deve ao fato da Teoria Eletromagnética tratar-se de uma teoria relativística em sua gênese.

De uma forma geral, para que a ação seja invariante frente a transformações conformes é necessário que os campos sejam não massivos. Nesse caso, a identidade de Noether correspondente à simetria da teoria frente a estas transformações pode ser escrita como

$$\left[2g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} + \sum_i k_i \Phi_i \frac{\delta}{\delta \Phi_i} \right] S[g_{\mu\nu}; \Phi_i] = 0, \quad (2.17)$$

onde k_i representa o peso conforme do referido campo:

$$k_i = -1 \quad \text{para campos escalares} \quad \phi, \quad (2.18)$$

$$k_i = -\frac{3}{2} \quad \text{para campos de gauge} \quad A_\mu, \quad (2.19)$$

$$k_i = 0 \quad \text{para férmions} \quad \psi. \quad (2.20)$$

Um conceito importante para que a quantização canônica possa ser feita de forma consistente é a definição de produto interno. Para tal, consideremos duas soluções complexas da equação de Klein-Gordon clássica (2.12), $u_i(x)$ e $u_j(x)$. A densidade de corrente de Klein-Gordon é dada por

$$\begin{aligned} J^\mu[u_i, u_j] &= -i [u_i^*(x) \nabla^\mu u_j(x) - (\nabla^\mu u_i^*(x)) u_j(x)] \\ &= -i [u_i^*(x) \overleftrightarrow{\nabla}^\mu u_j(x)], \end{aligned} \quad (2.21)$$

que é uma quantidade conservada ($\nabla_\mu J^\mu[u_i, u_j] = 0$). Com isso, pode-se definir o produto interno entre as duas soluções da equação de Klein-Gordon através da relação

$$\langle u_i(x), u_j(x) \rangle \equiv - \int_\Sigma J_\mu[u_i, u_j] d\Sigma^\mu, \quad (2.22)$$

com $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$, onde $d\Sigma$ é o elemento de volume em uma superfície tipo-espaço arbitrária Σ , e n^μ é um vetor tipo-tempo, futuro-dirigido, normal a superfície Σ . O produto escalar acima definido satisfaz às seguintes propriedades de ortonormalidade:

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= \delta(i, j), \\ \langle u_i^*, u_j^* \rangle &= -\delta(i, j), \\ \langle u_i^*, u_j \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A quantização canônica é implementada definindo-se a densidade de momento $\pi(x)$,

canonicamente conjugado ao campo $\phi(x)$, por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (2.24)$$

e impondo-se as seguintes condições de comutação em tempos iguais para os operadores de campo:

$$[\phi(t, x^i), \pi(t, y^j)] = i\delta^{(3)}(x^i - y^j), \quad (2.25)$$

$$[\phi(t, x^i), \phi(t, y^j)] = 0, \quad (2.26)$$

$$[\pi(t, x^i), \pi(t, y^j)] = 0, \quad (2.27)$$

com a função delta de Dirac obedecendo a condição $\int_{\Sigma_t} \delta^{(3)}(x^i - y^j) d^3x = 1$.

O conjunto das soluções da equação de movimento (2.12), $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$, formam uma base completa em relação ao produto interno de Klein-Gordon (2.21) para o campo $\phi(x)$ e para o momento canonicamente conjugado $\pi(x)$. Porém, como o produto escalar de Klein-Gordon não é positivo-definido em espaços-tempos curvos, não pode-se atribuir à $u_i(x)$ as soluções de frequência positiva e à $u_i^*(x)$ as soluções de frequência negativa de forma unívoca. Entretanto, é possível expandir o campo $\phi(x)$ em termos dessas soluções que formam um conjunto completo, i.e.,

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (2.28)$$

Os operadores de “destruição” (a_i) e de “criação” (a_i^\dagger) são obtidos pelo produto interno dos modos $u_i(x)$ com o campo $\phi(x)$, ou seja,

$$a_i = \langle u_i(x), \phi(x) \rangle, \quad a_i^\dagger = \langle u_i^*(x), \phi(x) \rangle. \quad (2.29)$$

As relações de comutação do campo $\phi(x)$ com seu momento canonicamente conjugado $\pi(x)$ definem a álgebra a ser satisfeita pelos operadores de destruição e criação, a qual é dada pelos comutadores

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad (2.30)$$

e

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta(i, j), \quad (2.31)$$

sendo que estado de vácuo $|0\rangle$ é definido pela ação aniquilamento do operador de destruição,

$$a_i |0\rangle = 0 |0\rangle. \quad (2.32)$$

De posse da álgebra construída acima, é possível construir o espaço de Fock para o sistema. Para isso considera-se a ação do operador de criação sobre o estado de vácuo,

$$a_i^\dagger |0\rangle = 1|1_i\rangle, \quad (2.33)$$

obtendo-se o estado de partícula única. Os estados de múltiplas partículas, por sua vez, são obtidos pela ação sucessivas deste operador sobre o estado de vácuo.

2.3.2 Criação de Partículas por Campos Gravitacionais

Consideremos agora um espaço-tempo arbitrário composto por três regiões distintas: Uma região (A) que é plana (Minkowski), ($g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$), e representa o passado; uma segunda região (B), também plana que representa o futuro; e uma região (C) intermediária às regiões (A) e (B) e que tem curvatura não nula ($R \neq 0$).

Na região (A) é possível definir um conjunto de modos $\{p_i(x), p_i^*(x)\}$, que são soluções para a equação de Klein-Gordon (2.12) formando uma base ortonormal em relação ao produto interno (2.22), para o campo $\phi(x)$ e para densidade de momento conjugada $\pi(x)$. Nesse caso, podemos escolher $p_i(x)$ como sendo as soluções de frequência positiva em relação a uma coordenada temporal conveniente para esta região, e $p_i^*(x)$ representando as soluções de frequência negativa. Assim, o campo $\phi(x)$ pode ser decomposto como

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i p_i(x) + a_i^\dagger p_i^*(x) \right]. \quad (2.34)$$

Nesta região (A), os operadores de criação e destruição são definidos por $a_i^\dagger |0\rangle_{in} \equiv |1_i\rangle_{in}$ e $a_i |0\rangle_{in} \equiv 0|0\rangle_{in}$, respectivamente. Os índices *in* foram introduzidos para indicar a região interna (A).

De maneira análoga, é possível definir para a região (B) um novo conjunto de modos $\{q_j(x), q_j^*(x)\}$, que são soluções para a equação de Klein-Gordon e formam uma nova base para o campo e seu momento canonicamente conjugado nesta região. Sendo assim, o campo $\phi(x)$ pode ser decomposto na forma seguinte

$$\phi(x) = \sum_j \left[b_j q_j(x) + b_j^\dagger q_j^*(x) \right]. \quad (2.35)$$

Agora, os operadores de criação b_j^\dagger e de destruição b_j são definidos respectivamente por $b_j^\dagger |0\rangle_{out} \equiv |1_j\rangle_{out}$ e $b_j |0\rangle_{out} \equiv 0|0\rangle_{out}$, onde os índices *out* foram introduzidos para indicar a região externa (B).

Para a região intermediária (C), onde a curvatura do espaço-tempo não é nula, não é

conveniente definir modos de frequência positiva, pois a não invariância de Lorentz nesta região faz que existam, em princípio, infinitas possibilidades para tal e, entretanto, nenhuma delas é privilegiada. Porém, a formulação da Mecânica Quântica em termos do operador densidade garante que estas soluções existem.

Os modos $\{p_i(x), p_i^*(x)\}$ e $\{q_i(x), q_i^*(x)\}$ formam conjuntos completos e são soluções para a equação de Klein-Gordon em todas regiões do espaço-tempo de curvatura nula. Portanto, pode-se expandir os modos *in* em termos dos modos *out*, e vice-versa. Ou seja, pode-se expandir os modos $p_i(x)$ em termos dos modos $q_j(x)$,

$$p_i(x) = \sum_j [\alpha_{ij} q_j(x) + \beta_{ij} q_j^*(x)], \quad (2.36)$$

e, também, os modos $q_i(x)$ em termos dos modos $p_i(x)$,

$$q_j(x) = \sum_i [\alpha_{ij}^* p_i(x) - \beta_{ij} p_i^*(x)]. \quad (2.37)$$

Estas expansões são conhecidas como transformações de Bogolubov, com os coeficientes de Bogolubov dados por

$$\alpha_{ik} = \langle p_i(x), q_k(x) \rangle \quad \text{e} \quad \beta_{ij} = -\langle p_i(x), q_j^*(x) \rangle. \quad (2.38)$$

Da ortonormalidade dos modos $p_i(x)$ e $q_j(x)$, os quais satisfazem condições análogas às dadas nas Eqs. (2.23), segue que os coeficientes de Bogolubov devem satisfazer às relações

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0, \quad (2.39)$$

e

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \quad (2.40)$$

Igualando as equações (2.34) e (2.35) e substituindo na equação resultante os resultados dados pelas Eqs. (2.36) e (2.37), juntamente com a condição de ortonormalidade (2.23), obtém-se as transformações de Bogolubov para os operadores de criação e destruição,

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* b_j - \beta_{ij}^* b_j^\dagger), \quad (2.41)$$

e

$$b_j = \sum_i (\alpha_{ij} a_i - \beta_{ij}^* a_i^\dagger). \quad (2.42)$$

Agora, vamos supor que o estado descrito por $p_i(x)$ na região (A) seja o estado de vácuo desta região ($|0\rangle_{in}$). Além disso, o operador número de partículas na região (B) é dado por $N_j = b_j^\dagger b_j$. Portanto, tomando o valor esperado de N_j no estado de vácuo definido na região (A) temos que o número de partículas criadas pelo operador de criação b_j no vácuo $|0\rangle_{in}$ é dado por

$$\langle N_j \rangle =_{in} \langle 0 | b_j^\dagger b_j | 0 \rangle_{in} = \sum_i |\beta_{ij}|^2. \quad (2.43)$$

Isto significa que, caso qualquer um dos coeficientes de Bogolubov β_{ij} seja não nulo, um observador na região (B) irá medir um número de partículas $\langle N_j \rangle = \sum_i |\beta_{ij}|^2$ no estado de vácuo $|0\rangle_{in}$ da região (A). Esse número não nulo na região (B) é atribuído ao processo de criação de partículas pelo campo gravitacional na região (C).

2.3.3 Radiação de Hawking

A radiação de Hawking consiste no fenômeno de criação de partículas em espaços-tempos curvos onde exista um horizonte de eventos [4, 5]. Este efeito tem origem ao aplicarmos os conceitos descritos na seção anterior ao espaço-tempo de um buraco negro. Como veremos nesta seção, o efeito da emissão térmica de partículas por buracos negros se deve a uma mistura de modos com frequências positivas e negativas que ocorre quando os campos da matéria se propagam por regiões muito próximas ao horizonte de eventos. De forma geral seguiremos as mesmas etapas do trabalho original de Hawking, considerando a evolução de um campo escalar não massivo $\phi(x)$ no espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild. Uma revisão detalhada sobre radiação de Hawking é encontrada em [2, 3, 45]. Apesar deste ser o modelo mais simples possível, as idéias fundamentais podem ser aplicadas a qualquer tipo de campo evoluindo no espaço-tempo de um buraco negro arbitrário. Uma descrição detalhada do espaço-tempo de Schwarzschild é dada na seção 3.2.1. Portanto, apresentaremos aqui apenas as características mais relevantes para a o entendimento do fenômeno de criação de partículas por buracos negros.

Vamos assumir que o buraco negro foi formado em algum momento em um passado distante, ($t \rightarrow -\infty$), pelo colapso gravitacional de uma casca esférica de matéria, sendo que o colapso se dá de tal forma que a simetria esférica do espaço-tempo exterior ao objeto seja preservada. A Figura 2.1 mostra o diagrama de Penrose deste espaço-tempo.

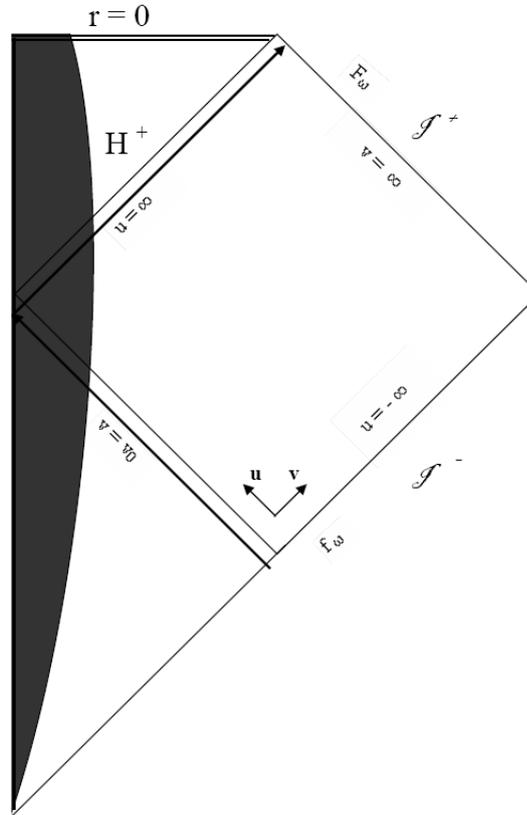


Figura 2.1: Diagrama de Penrose do colapso gravitacional de um objeto esfericamente simétrico. A região escura representa o interior do objeto. O diagrama é limitado à esquerda pela *worldline* do objeto. A linha horizontal superior corresponde à singularidade física na origem $r = 0$. Geodésicas nulas fazem um ângulo de 45° com a vertical e a superfície H^+ corresponde ao horizonte de eventos. Um raio de luz futuro-dirigido com $v < v_0 = \text{const}$, que parte do infinito nulo do passado (\mathcal{I}^-), atinge a superfície do objeto colapsando e é refletido para o infinito nulo do futuro (\mathcal{I}^+) como um raio de luz com $u = \text{const}$. Raios de luz com $v > v_0$ atingem a superfície do objeto após a formação do horizonte e são absorvidos pelo buraco negro.

A geometria do espaço-tempo exterior a superfície esférica é descrita pela métrica de Schwarzschild (ver a Seção 3.2.1)

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta^2 d\phi^2, \\
 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta^2 d\phi^2, \\
 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta^2 d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Nesta métrica a coordenada tartaruga r^* é definida por $\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, e as coordenadas

do cone de luz por $u = t - r^*$, e $v = t + r^*$.

O espaço-tempo na região interior da casca esférica é plano, e pode ser descrito pela métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta^2 d\varphi^2, \\ &= -dUdV + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta^2 d\varphi^2, \end{aligned} \quad (2.45)$$

com $U = T - r$ e $V = T + r$. A coordenada r é a mesma nas duas regiões e é definida de forma que a área da superfície da casca esférica seja a mesma quando medida por um observador dentro ou fora desta, $A = 4\pi r^2$.

A evolução de um campo escalar não massivo minimamente acoplado com a gravidade nesse espaço-tempo é governada pela equação de onda $\square\phi(x) = 0$. Para essa geometria, o campo $\phi(x)$ pode ser decomposto de em ondas parciais em termos de harmônicos esféricos (veja-se o Apêndice B) na forma

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{lm} \frac{\phi_{lm}(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.46)$$

e, portanto, a equação de onda é separável.

Vamos considerar agora que antes do colapso gravitacional começar não existam partículas escalares no espaço-tempo. Portanto, o estado quântico é o estado de vácuo dos modos *ingoing*, $|\phi\rangle = |0\rangle_{in}$. Tais modos *ingoing* são soluções para a equação de onda que formam um conjunto completo em relação às condições de ortonormalidade (2.23), com o produto escalar de Klein-Gordon (2.22) tomando como superfície de integração o infinito nulo do passado, e possuindo frequências puramente positivas em \mathcal{I}^- . Assim, no limite $v \rightarrow \infty$, temos que os modos *ingoing* são tais que $\phi_{(in)lm}(t, r)$ é da forma $\phi_{(in)lm}(t, r) \sim e^{-i\omega'v}$. Como consequência, a forma assintótica dos modos *ingoing* que formam a base para o campo $\phi(x)$ em \mathcal{I}^- é

$$f_{\omega'lm}(x) \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{4\pi\omega' r}} e^{-i\omega'v}. \quad (2.47)$$

De forma análoga, podemos definir os modos *outgoing* como soluções para a equação de onda com frequência puramente positiva no infinito nulo do futuro \mathcal{I}^+ . Isto é, $\phi_{(out)lm} \sim e^{-i\omega u}$, a medida que $u \rightarrow \infty$. Ou seja, a forma assintótica dos modos que formam a base para o campo $\phi(x)$ em \mathcal{I}^+ é

$$F_{\omega lm}(x) \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\sqrt{4\pi\omega r}} e^{-i\omega u}. \quad (2.48)$$

Para calcular os coeficientes de Bogolubov (2.38) e obter o número de partículas emitidas pelo buraco negro (2.43) é preciso obter a relação entre os modos *ingoing* e *outgoing*. Para obter tais relações, vamos considerar partículas que são produzidas muito tempo após o colapso gravitacional começar. Estas partículas são descritas por modos que partem de \mathcal{I}^- com frequências altas, atravessam a superfície da casca esférica na eminência da formação do horizonte de eventos, e são refletidas para \mathcal{I}^+ com um *redshift* na frequência. Como as frequências dos modos emitidos de \mathcal{I}^- são extremamente altas, pode-se descrever a propagação destes modos no espaço-tempo usando a aproximação de ótica geométrica. Assim, temos que um raio de luz *ingoing* com $v = \text{const} < v_0$ parte de \mathcal{I}^- , atravessa a casca esférica e é emitido para \mathcal{I}^+ como um modo *outgoing* com $u = g(v) = \text{const}$. A relação para os modos *outgoing* que partem de \mathcal{I}^+ , atravessam a superfície esférica e chegam em \mathcal{I}^- , é $v = g^{-1}(u) = \text{const}$. A forma da função $g(v)$ depende das características do colapso gravitacional. Para o caso de uma casca esférica de matéria, tem-se

$$u = g(v) = -4M \ln \left(\frac{v - v_0}{C} \right) \equiv -4M \ln \left(\frac{v'}{C} \right), \quad (2.49)$$

onde C é uma constante e v_0 é o maior valor possível que v pode assumir antes que o horizonte de eventos se forme. Portanto, a forma assintótica dos modos *ingoing* que chegam até \mathcal{I}^+ é

$$f_{\omega'lm} \sim \frac{Y_{lm}}{\sqrt{4\pi\omega'r}} e^{-i\omega'[v_0 - Ce^{-u/4M}]}. \quad (2.50)$$

Por outro lado, a forma assintótica dos modos *outgoing* em \mathcal{I}^- é

$$F_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}}{\sqrt{4\pi\omega r}} e^{i4M\omega \ln[v'/C]}. \quad (2.51)$$

Os modos *outgoing* podem ser expressos em termos dos modos *ingoing* usando-se a relação (2.37), resultando em

$$F_{\omega lm} = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega'\omega lm}^* f_{\omega'lm} - \beta_{\omega'\omega lm} f_{\omega'lm}^*). \quad (2.52)$$

A partir disso, os coeficientes de Bogolubov relevantes obtidos a partir de (2.38) são

$$\alpha_{\omega'\omega lm}^* = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^\infty dv' e^{-i\omega'v'} e^{i4M\omega \ln(v'/C)}, \quad (2.53)$$

e

$$\beta_{\omega'\omega lm} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} e^{i\omega v_0} \int_0^\infty dv' e^{i\omega'v'} e^{i4M\omega \ln(v'/C)}. \quad (2.54)$$

Além do mais, as integrais dadas nas expressões acima estão relacionadas por

$$\int_0^\infty dv' e^{-i\omega'v'} e^{i4M\omega \ln(v'/C)} = -e^{4\pi M\omega} \int_0^\infty dv' e^{i\omega'v'} e^{i4M\omega \ln(v'/C)}. \quad (2.55)$$

Portanto, os coeficientes de Bogolubov satisfazem a relação

$$\alpha_{\omega'\omega lm}^* = e^{4\pi M\omega} \beta_{\omega'\omega lm}. \quad (2.56)$$

Usando a condição (2.40), segue que

$$\sum_{\omega'} (e^{8\pi M\omega} - 1) |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1. \quad (2.57)$$

Assim, o número de partículas criadas no estado de vácuo dos modos $F_{\omega lm}$ é dado por

$$\langle N_{\omega lm} \rangle = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}\omega} - 1}, \quad (2.58)$$

que corresponde a um espectro de radiação de corpo negro com temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (2.59)$$

onde κ é a gravidade superficial do buraco negro. Além disso, o fluxo de energia destas partículas que chegam até o infinito nulo do futuro (\mathcal{I}^+) é dado por

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{\kappa^2}{48\pi}. \quad (2.60)$$

2.4 Anomalias

Na Teoria Quântica de Campos anomalias são efeitos quânticos que surgem no processo de quantização dos campos e que violam alguma das simetrias da ação clássica. A forma mais comum na qual se manifestam são como quantidades não conservadas, podendo representar inconsistências na formulação da teoria. Porém, em alguns casos as anomalias se devem ao surgimento de novos fenômenos físicos sem análogos clássicos, o que ocorre por exemplo no caso da radiação de Hawking, onde as partículas emitidas pelo buraco negro carregam um fluxo de energia para o infinito. Matematicamente este fluxo de energia manifesta-se como uma quebra da covariância geral e da invariância conforme

do tensor de energia-momento. No que segue apresentamos três exemplos de anomalias que são úteis para o cálculo dos fluxos de energia da radiação de Hawking. Duas destas, a anomalia conforme e a anomalia gravitacional, têm origem no processo de quantização dos campos em espaços-tempos curvos. O terceiro exemplo de anomalia é a anomalia de gauge, a qual se manifesta também em espaços-tempos planos. Uma revisão matemática completa sobre anomalias é encontrada em [19]. No que segue descrevemos os principais pontos para uma melhor compreensão de como as anomalias surgem na Teoria Quântica de Campos e de sua aplicação para o cálculo dos fluxos de radiação de Hawking.

A forma mais simples para a ação do vácuo da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos (sem campos de matéria) pode ser escrita como

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{ED}, \quad (2.61)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert, que fornece as equações de campo de Einstein (2.8),

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} (R + 2\Lambda); \quad (2.62)$$

e S_{ED} envolve derivadas do tensor métrico de ordens superiores, sendo dada por

$$S_{ED} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} (a_1 F + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2), \quad (2.63)$$

com R sendo o escalar de Ricci, e E e F são quantidades dadas em termos dos tensores de curvatura, conforme definidas no Apêndice A, em (A.17) e (A.18) respectivamente. Portanto, a ação (2.61) descreve apenas o *background* clássico da teoria.

Na presença de campos da matéria, a dinâmica da evolução destes é governada pela ação (2.11) quando forem campos escalares ($\phi(x)$). Para campos fermiônicos ($\psi(x)$), a ação livre é da forma

$$S_{fermion} = i \int d^4x \sqrt{|g|} (\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - im \bar{\psi} \psi), \quad (2.64)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac. Além disso, para campos de gauge (do tipo Yang-Mills) ($A_\mu^a(x)$), a ação livre é dada por

$$S_{vetor} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{|g|} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.65)$$

com o tensor de campo dado por $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$.

De posse da ação de *background* (2.61) e das ações para os campos da matéria (2.11),

(2.64) e (2.65), pode-se definir a ação efetiva para a gravidade $W[g_{\mu\nu}]$ através da integrais de caminho de Feynman por

$$e^{iW[g_{\mu\nu}]} = \int \mathcal{D}\Phi_i e^{iS[\Phi_i; g_{\mu\nu}]}, \quad (2.66)$$

onde Φ_i representa o conjunto de todos os campos da matéria presentes, e $\mathcal{D}\Phi_i$ é o operador covariante de integração funcional. $S[\Phi_i; g_{\mu\nu}]$ representa a ação clássica contendo todos os campos da matéria e os termos de interação entre estes, a ação clássica do vácuo (2.61), e os termos de interação dos campos da matéria com o *background*. Portanto, a dinâmica da evolução quântica do sistema totalmente descrita por esta ação efetiva.

2.4.1 Anomalias Conformes

As anomalias conformes, também conhecidas como anomalias de traço [21, 22], manifestam-se como uma quebra da simetria conforme, que torna-se explícita no tensor de energia-momento, sendo que este adquire traço no processo de renormalização.

Frente às transformações conformes (2.13), a ação efetiva (2.66) se torna divergente. Entretanto, é possível contornar este problema adicionando-se contra-termos que anulam a parte divergente. Porém, como consequência, a teoria se torna anômala, o que se manifesta através do traço do tensor de energia-momento, o qual passa a ser não nulo.

A forma geral do traço anômalo do tensor de energia-momento (T^α_α) pode ser escrita em termos das características geométricas do espaço-tempo [21]. Para espaços-tempos bidimensionais o traço anômalo do tensor de energia-momento é dado por:

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = \frac{1}{24\pi} R, \quad (2.67)$$

onde R é o escalar de curvatura. Em espaços-tempos quadridimensionais, a forma geral da anomalia de traço do tensor de energia-momento em termos dos invariantes geométricos do espaço-tempo é

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle = \beta F + \beta' \left(E - \frac{2}{3} \square R \right), \quad (2.68)$$

onde os coeficientes β e β' dependem dos campos considerados e podem ser escritos na forma

$$\beta = \frac{1}{120(4\pi)^2} (N_S + 6N_F + 12N_V), \quad (2.69)$$

$$\beta' = -\frac{1}{360(4\pi)^2} (N_S + 11N_F + 62N_V), \quad (2.70)$$

sendo que as quantidades N_S , N_F e N_V representam respectivamente o número de campos com *spin* 0, 1/2 e 1. Ou seja, N_S é o número de campos escalares presentes no espaço-tempo, N_F , de férmions de Dirac e N_V , de campos vetoriais, respectivamente.

2.4.2 Anomalias de Gauge

Anomalias de gauge são efeitos da teoria quântica de campos que surgem como uma quebra na simetria de gauge. Manifestam-se como correntes não conservadas quando os campos sofrem uma transformação de gauge. No caso de espaços-tempos bidimensionais com a presença de um potencial de gauge $\mathbf{A} = A_\mu \mathbf{d}x^\mu$, a forma consistente da anomalia de gauge para campos abelianos, carregados e com simetria *chiral* é dada em [19] e [46] como sendo

$$\nabla_\mu J^\mu = \pm \frac{e^2}{4\pi} \bar{\varepsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \pm \frac{e^2}{4\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu, \quad (2.71)$$

onde os sinais + e – correspondem a campos *left-handed* e *right-handed*, respectivamente, e $\varepsilon^{01} = -\varepsilon_{01} = 1$. A corrente J^μ em (2.71) é chamada de corrente consistente pois satisfaz a condição de consistência de Wess-Zumino, o que significa que a condição de integrabilidade

$$\frac{\delta J^\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} = \frac{\delta J^\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} \quad (2.72)$$

é satisfeita. Entretanto, esta corrente não se transforma de forma covariante. Uma corrente de gauge covariantemente conservada pode ser definida a partir desta, sendo dada em [47] por

$$\tilde{J}^\mu = J^\mu \mp \frac{e^2}{4\pi\sqrt{|g|}} A_\lambda \varepsilon^{\lambda\mu}, \quad (2.73)$$

para a qual a anomalia de gauge é dada por

$$\nabla_\mu \tilde{J}^\mu = \pm \frac{e^2}{4\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.74)$$

No caso do potencial de gauge ser o potencial eletromagnético, tem-se que $F^{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell.

2.4.3 Anomalias Gravitacionais

As anomalias gravitacionais têm origem na quantização dos campos em espaços-tempos curvos, manifestando-se como uma quebra na lei de covariância geral, ou seja, como

violação na lei de conservação da energia-momento, $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu \neq 0$. Para um campo escalar *chiral outgoing*, isto é, com orientação *right-anded* evoluindo em um espaço-tempo bidimensional com curvatura constante, a forma consistente da anomalia gravitacional é [19, 48]

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \frac{1}{96\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\beta\delta} \partial_\delta \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\beta}, \quad (2.75)$$

onde $\Gamma^\alpha_{\nu\beta}$ são as conexões de Christoffel. O tensor de energia-momento presente na equação acima satisfaz uma condição de consistência análoga à (2.72), onde é considerada a variação em relação à métrica, ou seja,

$$\frac{\delta T^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\nu\mu}(y)} = \frac{\delta T^{\nu\mu}(y)}{\delta g_{\mu\nu}(x)}. \quad (2.76)$$

Pode-se também obter uma forma covariantemente conservada para o tensor de energia-momento anômalo, para a qual a anomalia covariante assume a forma

$$\nabla_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu = -\frac{1}{96\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu R, \quad (2.77)$$

com R sendo o escalar de Ricci.

Capítulo 3

Alguns Espaços-Tempos Estáticos

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos as métricas que descrevem as geometrias dos espaços-tempos nas vizinhanças dos buracos negros estáticos para os quais calculamos o tensor de energia-momento da radiação de Hawking. Consideramos espaços-tempos que são distintos tanto em seu conteúdo de matéria e energia quanto em seu comportamento assintótico no infinito espacial (geralmente caracterizado pelo limite $r \rightarrow \infty$), a saber: espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter e espaços-tempos assintoticamente Minkowski. No que segue apresentamos uma descrição das principais características desses espaços-tempos ressaltando os pontos relevantes para o presente trabalho.

A geometria dos espaços-tempos na vizinhança dos buracos negros considerados neste trabalho é descrita por métricas que, em coordenadas do tipo Schwarzschild (t, r, θ, φ) , podem ser escritas na seguinte forma geral

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + Z^2(\theta)d\varphi^2), \quad (3.1)$$

onde $f(r)$ é uma função contínua que depende apenas da coordenada r ,

$$f(r) = a + \alpha^2 r^2 - \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2}. \quad (3.2)$$

Os parâmetros b e c são proporcionais à massa e ao quadrado da carga elétrica, α está relacionado com a constante cosmológica por, $\alpha^2 = -\frac{1}{3}\Lambda$. O horizonte de eventos corresponde à raiz cujo valor de r é o maior valor dentre os que anulam $f(r)$, tal que $f(r) > 0$

para $r > r_h$. A geometria das superfícies de t e r constantes é dada por

$$d\Omega = d\theta^2 + Z^2(\theta)d\varphi^2, \quad (3.3)$$

onde a função $Z(\theta)$ é determinada pelo valor de a , sendo as possibilidades apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Geometria das Superfícies de (t, r) Constantes

Geometria	a	$Z(\theta)$
Hiperbólica	-1	$\sinh \theta$
Planar	0	$1, \theta$
Esférica	1	$\sin \theta$

Em vários estudos é interessante truncarmos a métrica (3.1) nas coordenadas (θ, φ) ficando com um espaço-tempo de dimensão $(1 + 1)$ que descreve a região exterior de um buraco negro bidimensional, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \quad (3.4)$$

A função horizonte $f(r)$, dada na Eq. (3.2), não é alterada por esta redução dimensional.

3.2 Espaços-Tempos Esféricos Assintoticamente Planos - Minkowski

Por espaços-tempos assintoticamente Minkowski, às vezes também identificados como espaços-tempos assintoticamente planos, entendemos que no limite $r \rightarrow \infty$, ou seja, em pontos distantes das fontes de curvatura, a métrica que descreve estes espaços-tempos aproxima-se da métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + (dx^i)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Isso exige que no limite assintótico a curvatura destes espaços-tempos seja nula. Evidentemente, para espaços-tempos com tais características as equações de Einstein exigem que a constante cosmológica seja nula, $\Lambda = 0$. Dentro desta classe de geometrias consideraremos

as métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström que são descritas de forma completa por Chandrasekhar em [49] e por Townsend [50], e cujas características relevantes para este trabalho são apresentadas a seguir.

3.2.1 O Buraco Negro de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.6)$$

é uma solução das equações de Einstein para o vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (3.7)$$

Para obtermos (3.6) como solução de (3.7) assume-se ainda que o espaço-tempo é esfericamente simétrico e estático. As coordenadas t , r , θ e φ são comumente chamadas de coordenadas de Schwarzschild.

A métrica (3.6) é uma boa aproximação para descrever o campo gravitacional nas vizinhanças de objetos como estrelas, planetas e buracos negros com geometria esférica e sem carga elétrica. Esta solução apresenta duas singularidades, sendo uma sobre toda a superfície $r = 2M$. Nestes pontos $g_{tt} = 0$ e $g_{rr} \rightarrow \infty$, a outra singularidade está em $r = 0$, onde estas componentes da métrica divergem. O lugar geométrico onde a coordenada radial assume o valor $r = 2M$ é conhecida com o raio de Schwarzschild (r_s) do objeto, sendo a singularidade neste ponto apenas uma singularidade aparente que se deve a má escolha do sistema de coordenadas, podendo ser removida através de uma mudança de coordenadas. De fato, conforme mencionaremos a seguir, as quantidades físicas de interesse são bem definidas nesta superfície. Entretanto, a singularidade na origem, i.e., em $r = 0$, é uma singularidade física, uma vez que ela não pode ser removida por uma mudança de coordenadas. Esta diferença entre as singularidades fica explícita ao considerarmos quantidades que independem da escolha do sistema de coordenadas, como por exemplo o escalar de Kretschmann, que para esta geometria é dado por

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}.$$

Como podemos ver, nada especial ocorre em $r = 2M$, ao contrário do que acontece em $r = 0$, onde a curvatura é infinitamente grande e, conseqüentemente, os fenômenos físicos

não podem ser descritos de forma consistente. Ou seja, é impossível realizar medidas de quantidades físicas no ponto $r = 0$.

Conforme dito mais acima, a métrica de Schwarzschild dada na forma (3.6) é boa para descrever a geometria de espaços-tempos na região exterior a estrelas e outros objetos esféricos para os quais o raio de sua superfície é maior que seu raio de Schwarzschild, ($r > r_s$). Para buracos negros, quando estamos interessados também na região onde o raio r é menor que o raio de Schwarzschild, ($r < r_s$), é necessário fazer uma mudança de coordenadas de forma que o intervalo $0 < r < r_s$ e também a superfície $r = r_s$ façam parte da região fisicamente acessível do espaço-tempo. Dentre algumas dessas mudanças de coordenadas podemos citar as que sugerem o uso de uma nova coordenada radial r^* , e outras que usam coordenadas do cone de luz u e v . Essas coordenadas são tais que a métrica de Schwarzschild pode ser escrita nas formas

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a coordenada tartaruga r^* é definida por $\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{f(r)}$. As coordenadas nulas u e v são definidas respectivamente por

$$u = t - r^*, \quad (3.9)$$

$$v = t + r^*. \quad (3.10)$$

A descrição completa da geometria do espaço-tempo de Schwarzschild é feita a partir da máxima extensão analítica da métrica de Schwarzschild, escrevendo-a em termos das coordenadas de kruskal-Sekeres [51],

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dUdV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.11)$$

com

$$U = -e^{-u/4M},$$

$$V = e^{v/4M},$$

sendo que $r(U, V)$ é determinado implicitamente por

$$UV = - \left(\frac{r - 2M}{2M} \right) e^{\frac{r}{2M}}.$$

Uma representação da geometria de Schwarzschild é então obtida pelo diagrama de Kruskal da máxima extensão analítica, conforme apresentado na Figura 3.1. Vale observar que

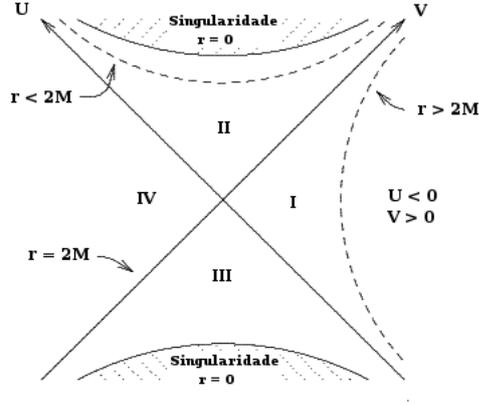


Figura 3.1: Na figura acima é apresentado um diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Sekeres (U, V) . O setor (I) corresponde à região do espaço-tempo exterior ao horizonte de eventos, $r = 2M$ que é indicado pelas retas à 45° que se cruzam na origem, $U = V = 0$, esta região é assintoticamente plana. O setor (II) corresponde à região interior ao horizonte de eventos, que contém a singularidade física em $r = 0$. Os setores (III) e (IV) deste diagrama correspondem a um outro espaço-tempo assintoticamente plano (setor (III)) e a um buraco branco (setor (IV)) com uma singularidade física em $r = 0$ e um horizonte de eventos $r = 2M$.

para buracos negros formados a partir do colapso gravitacional de estrelas esféricas, apenas os setores (I) e (III) deste espaço-tempo são aplicáveis, e tal espaço-tempo pode ser representado pelo diagrama mostrado na Figura 3.2.

Para a análise feita a seguir vamos truncar a métrica (3.6) nas coordenadas (t, r) , desconsiderando a parte angular, resultado num espaço-tempo bidimensional com métrica dada por

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) \\
 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv = - \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Os diagramas das Figuras 3.1 e 3.2 correspondem de fato à métrica bidimensional escrita na Eq. (3.12).

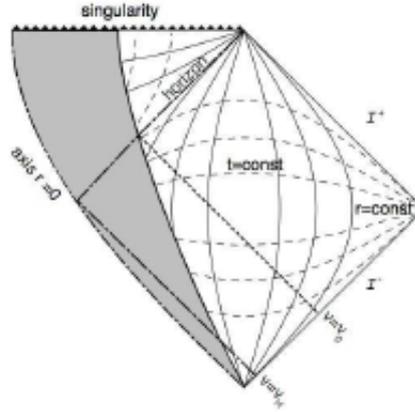


Figura 3.2: Neste diagrama as regiões (III) e (IV) da máxima extensão analítica não aparecem, uma vez que são inacessíveis para buracos negros formados por colapso gravitacional. A região em branco corresponde ao exterior da estrela e é análogo ao setor (I) da Figura 3.1. A região em cinza corresponde ao interior da estrela.

3.2.2 O Buraco Negro de Reissner-Nordström

Analogamente ao espaço-tempo de Schwarzschild, a métrica que descreve o espaço-tempo de Reissner-Nordström ,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.13)$$

é uma solução para as equações de Einstein sem constante cosmológica, com simetria esférica e estática. Porém, o tensor de energia-momento do lado direito da equação de Einstein não é do vácuo, e sim o tensor de energia-momento de Maxwell,

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (3.14)$$

com $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, onde $A_\mu = \frac{Q}{r} \delta_\mu^t$ é o potencial de gauge eletromagnético. Portanto, a solução de Reissner-Nordström para as equações de Einstein-Maxwell descreve o espaço-tempo nas vizinhanças de um buraco negro de massa M e carga elétrica Q .

A geometria correspondente à métrica (3.13) depende fortemente da função

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + Q^2 = (r - r_+)(r - r_-), \quad (3.15)$$

a qual apresenta duas raízes dadas por

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.16)$$

Para valores de massa e carga elétrica tais que $M^2 > Q^2$, as duas raízes são reais e distintas. A raiz r_+ , é o horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström, sendo interpretada da mesma forma que o horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. A outra raiz, r_- , é um horizonte de Cauchy. Dependendo do valor de r a função $\Delta(r)$ pode assumir valores positivos ou negativos e o espaço-tempo descrito pela métrica (3.13) é constituído por três regiões distintas:

$$\begin{aligned} A: & \quad 0 < r < r_-, \quad \Delta > 0, \\ B: & \quad r_- < r < r_+, \quad \Delta < 0, \\ C: & \quad r_+ < r < \infty, \quad \Delta > 0. \end{aligned}$$

As singularidades da métrica (3.13) em r_{\pm} não são singularidades físicas e se devem apenas à escolha do sistema de coordenadas. Novamente, estas podem ser removidas fazendo mudanças de coordenadas apropriadas. Para tanto vamos definir a coordenada tartaruga r^* por

$$dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr, \quad (3.17)$$

que depois da integração resulta em

$$r^* = r_+ \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left(\frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left(\frac{|r - r_-|}{r_-} \right), \quad (3.18)$$

onde κ_{\pm} representam as gravidades superficiais sobre os horizontes,

$$\kappa_{\pm} = \frac{(r_{\pm} - r_{\mp})}{2r_{\pm}^2}. \quad (3.19)$$

Com esta mudança de coordenadas podemos definir as coordenadas nulas u e v de forma análoga ao caso do buraco negro de Schwarzschild conforme as Eqs. (3.9) e, conseqüentemente, obter a máxima extensão analítica para métrica de Reissner-Nordström em termos de coordenadas tipo Kruskal-Sekeres definidas por

$$U^{\pm} = -e^{-\kappa_{\pm} u}, \quad (3.20)$$

$$V^{\pm} = e^{\kappa_{\pm} v}. \quad (3.21)$$

O índice sobrescrito positivo designa as coordenadas válidas nas regiões A e C onde $\Delta > 0$,

e o negativo designa as coordenadas para a região B , onde $\Delta < 0$. Para a região C , a métrica em termos das coordenadas de Kruskal-Sekeres do buraco negro de Reissner-Nordström é

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{-2\kappa_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\left(\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1 \right)} dU^+ dV^+ + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi), \quad (3.22)$$

sendo $r(U^+, V^+)$ determinado implicitamente por

$$U^+ V^+ = -e^{-2\kappa_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}.$$

Esta métrica descreve quatro regiões da máxima extensão analítica do espaço-tempo de Reissner-Nordström, as quais estão representadas na Figura 3.3

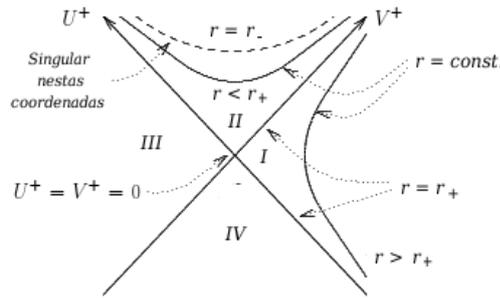


Figura 3.3: O setor (I) deste diagrama é análogo ao setor (I) da Figura 3.1, e descreve a região exterior ao horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström. O setor (II) corresponde à região entre o horizonte de eventos e o horizonte de Cauchy ($r_- < r < r_+$). Os setores (III) e (IV) idênticos aos (I) e (II), porém estão no espaço-tempo do buraco branco.

No ponto $r = r_-$ a métrica (3.22) apresenta uma singularidade. Assim, a região B não pode ser descrita pelas coordenadas (U^+, V^+) pois a métrica (3.22) é complexa nessa região. A região B pode ser descrita usando as coordenadas (U^-, V^-) em termos das quais a métrica é dada por

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_-^2} \frac{e^{-2\kappa_- r}}{r^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r} \right)^{\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right)} dU^- dV^- + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi), \quad (3.23)$$

com

$$U^- V^- = -e^{-2\kappa_- r} \left(\frac{r_- - r}{r_-} \right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}.$$

A métrica (3.23) descreve o espaço-tempo de Reissner-Nordström nas quatro regiões na vizinhança do ponto $U^- = V^- = 0$, apresentadas na Figura 3.4

Como mostrado por Carter [52], o espaço-tempo de Reissner-Nordström pode ser esten-

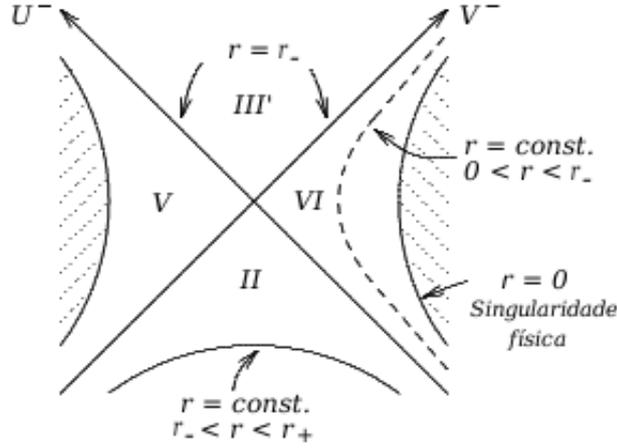


Figura 3.4: Neste diagrama o setor (II) é o mesmo apresentado na Figura 3.3 e está conectado ao espaço-tempo exterior pelos setores (I), (III) e (IV), podendo ser descrito por ambas as métricas (3.22) e (3.23). O setor (VI) representa a região interior ao horizonte de Cauchy ($r = r_-$) e contém a singularidade física em $r = 0$. O setor (III') está conectada a uma outra região espaço-tempo que é idêntica as regiões (I), (II) e (IV). Sendo (I) e (IV) novas regiões assintoticamente planas.

dido como uma coleção infinita de regiões análogas as descritas nas Figuras 3.3 e 3.4, A Figura 3.5 mostra o diagrama de Penrose completo para o buraco negro de Reissner-Nordström, e também o diagrama para um buraco negro de Reissner-Nordström formado a partir do colapso gravitacional de poeira eletricamente carregada.

No decorrer deste trabalho consideraremos o buraco negro de Reissner-Nordström bi-dimensional, usando a métrica truncada nas coordenadas (t, r) ,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2. \quad (3.24)$$

3.3 Espaços-Tempos Esféricos Assintoticamente Anti-de Sitter

Espaços-tempos maximamente simétricos com curvatura constante e negativa são conhecidos como espaços-tempos anti-de Sitter (AdS). Tais espaços-tempos são soluções das

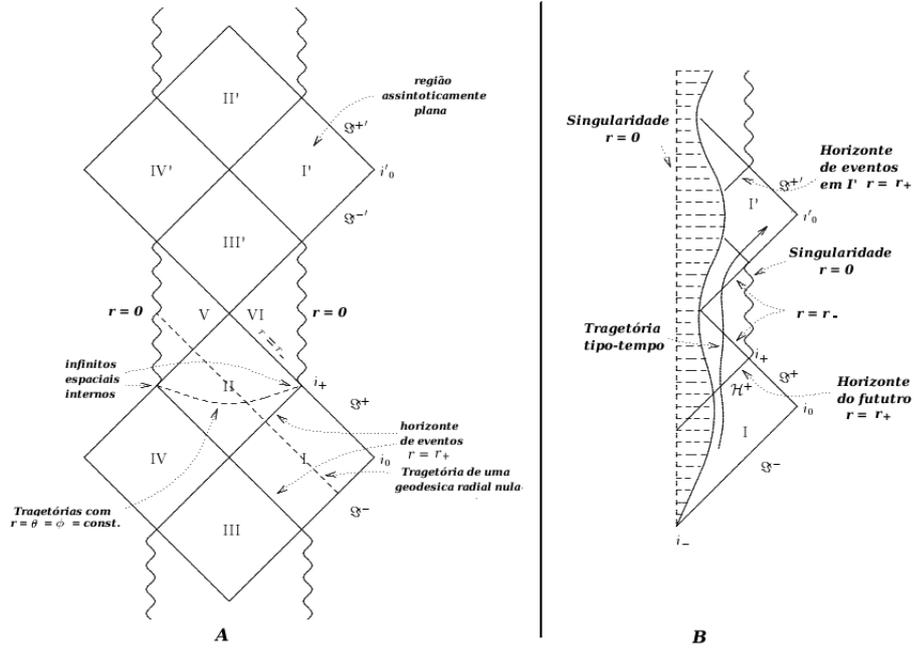


Figura 3.5: **(A)**: Diagrama de Penrose completo da máxima extensão analítica de um buraco negro de Reissner-Nordström mostrando todos os setores descritos pelas Figuras 3.3 e 3.4. **(B)**: Diagrama de um buraco negro de Reissner-Nordström formado a partir do colapso gravitacional, evidenciando que uma trajetória tipo-tempo pode viajar livremente na região entre o horizonte de eventos e o horizonte de Cauchy sem estar condenada a cair na singularidade física em $r = 0$.

equações de campo de Einstein para o vácuo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

que correspondem às equações de Einstein na presença de uma constante cosmológica negativa,

$$\Lambda = \frac{1}{4}R, \quad (3.26)$$

os quais são, portanto, espaços-tempos com curvatura escalar de Ricci constante. Uma das implicações físicas da constante cosmológica é, no limite Newtoniano, a presença de um termo atrativo adicional na força gravitacional efetiva.

A métrica que descreve o espaço-tempo anti-de Sitter é dada por

$$ds^2 = -(1 + \alpha^2 r^2) dt^2 + \frac{1}{(1 + \alpha^2 r^2)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi), \quad (3.27)$$

onde

$$\alpha^2 = -\frac{1}{3}\Lambda, \quad (3.28)$$

e (t, r, θ, φ) são coordenadas tipo Schwarzschild. É fácil perceber que no limite assintótico $r \rightarrow \infty$ este espaço-tempo não se aproxima do espaço-tempo de Minkowski.

Espaços-tempos com constante cosmológica negativa admitem soluções que contém **buracos negros**. Apesar destes espaço-tempos não serem globalmente anti-de Sitter, no limite assintótico são AdS. Neste trabalho consideramos apenas as soluções Schwarzschild-anti-de Sitter e as soluções tipo *black string* [53, 54]. Nas seções que seguem apresentamos uma breve descrição da geometria do espaço-tempo nas vizinhanças destes **buracos negros**.

3.3.1 O Buraco Negro de Schwarzschild-Anti-de Sitter

O espaço-tempo de Schwarzschild-anti-de Sitter é uma solução para as equações de campo de Einstein no vácuo com simetria esférica e na presença de uma constante cosmológica negativa. A métrica que descreve tal espaço-tempo é dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \alpha^2 r^2\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \alpha^2 r^2\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi). \quad (3.29)$$

Esta métrica representa um espaço-tempo assintoticamente anti-de Sitter com a presença de um buraco-negro cujo horizonte de eventos está localizado em

$$r_h = \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2} \left(M + \sqrt{M^2 + \frac{1}{27\alpha^2}} \right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2} \left(M - \sqrt{M^2 + \frac{1}{27\alpha^2}} \right)}. \quad (3.30)$$

As outras duas raízes da equação $g_{tt}(r) = 0$ são imaginárias, e portanto, existe somente uma singularidade coordenada na métrica (3.29).

A singularidade coordenada da métrica (3.29) em $r = r_h$ pode ser removida fazendo-se as mudanças de coordenadas da mesma forma que para os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström. A coordenada tartaruga r^* , definida por $dr^* = \frac{dr}{1 - 2M/r + \alpha^2 r^2}$, é dada em [55] como sendo

$$2\kappa r^* = \ln \left| \frac{r}{r_h} - 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r^2 + rr_h + r_h^2 + \alpha^{-2}}{r_h^2 + \alpha^{-2}} \right) + F(r), \quad (3.31)$$

sendo κ a gravidade superficial no horizonte de eventos e onde definimos

$$F(r) \equiv \frac{3r_h^2 + 2\alpha^{-2}}{r_h \sqrt{3r_h^2 + 4\alpha^{-2}}} \arctan \left(\frac{2r \sqrt{3r_h^2 + 4\alpha^{-2}}}{4r_h^2 + 4\alpha^{-2} + rr_h} \right), \quad (3.32)$$

Definindo as coordenadas de Kruskal-Sekeres por $U = -e^{-\kappa u}$, e $V = e^{\kappa v}$, com $u = t - r^*$ e $v = t + r^*$, a métrica do espaço-tempo de Schwarzschild-anti-de Sitter pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -\frac{r_h (r^2 + r_h r + r_h^2 + \alpha^{-2})^{\frac{3}{2}}}{r \kappa^2 \sqrt{r_h^2 + \alpha^{-2}}} \alpha^2 e^{F(r)} dU dV + r^2(U, V) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi), \quad (3.33)$$

sendo que $r(U, V)$ é determinado implicitamente por

$$UV = -\frac{\left(\frac{r}{r_h} - 1\right) \sqrt{r_h^2 + \alpha^{-2}}}{r^2 + r_h r + r_h^2 + \alpha^{-2}} e^{-F(r)}. \quad (3.34)$$

3.3.2 Branas Negras/Black Strings

A designação branas negras *black branes*, ou *black Strings* é dada a uma família de buracos negros em espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter, para os quais a topologia do horizonte de eventos pode ser toroidal, cilíndrica ou planar. A forma mais geral para a métrica que descreve os espaços-tempos na vizinhança destes buracos negros foi obtida por Lemos e Zanchin [53]. Neste trabalho nos concentramos apenas nos casos sem rotação, para os quais a métrica é [56]

$$ds^2 = -\left(\alpha^2 r^2 - \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(\alpha^2 r^2 - \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma^2}{r^2}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2). \quad (3.35)$$

Nesta métrica, β e γ estão relacionados respectivamente com a massa e a carga elétrica do buraco negro, sendo seus valores dependentes das especificações dos intervalos de domínio das coordenadas, ou seja, dependem da topologia do buraco negro. A topologia do horizonte de eventos destes buracos negros é caracterizada por tais especificações, sendo que as topologias possíveis são: (i) planar, para a qual as coordenadas (t, r, θ, φ) estão definidas nos intervalos $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ e $\varphi \in (-\infty, \infty)$, com os parâmetros

de massa e carga elétrica dados respectivamente por $\beta = 4M$ e $\gamma^2 = 4Q^2$; (ii) cilíndrica, com os intervalos $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\varphi \in (-\infty, \infty)$, e cuja massa e carga elétrica são dadas por $\beta = 4M$ e $\gamma^2 = 4Q^2$; (iii) toroidal, com intervalos $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi]$ e $\varphi \in (0, 2\pi)$, para a qual temos $\beta = \frac{2M}{\pi}$ e $\gamma^2 = \frac{4Q^2}{\pi}$.

Consideraremos neste trabalho os casos (i) e (ii), para os quais a topologia do horizonte de eventos do buraco negro é, respectivamente, planar e cilíndrica. Nesses casos a métrica (3.35) toma a forma

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4M}{r} + \frac{4Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(\alpha^2 r^2 - \frac{4M}{r} + \frac{4Q^2}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.36)$$

Para valores de massa e carga elétrica tais que $Q^2 \leq \frac{3}{4} \sqrt{\frac{M^4}{\alpha^2}}$, esta métrica apresenta dois horizontes dados por

$$r_- = \frac{B}{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{8Q^2}{\sqrt[3]{3A}} - \frac{2\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9}\alpha^2} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt[3]{3M}}{\alpha^2 B}}, \quad (3.37)$$

e

$$r_+ = \frac{B}{\sqrt[3]{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{8Q^2}{\sqrt[3]{3A}} - \frac{2\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9}\alpha^2} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt[3]{3M}}{\alpha^2 B}}, \quad (3.38)$$

sendo

$$B = \sqrt{\frac{4\sqrt[3]{3}\alpha^2 Q^2 + \sqrt[3]{A^2}}{\alpha^2 \sqrt[3]{A}}}, \quad (3.39)$$

com

$$A = 9M^2 \alpha^2 + \sqrt{81M^4 \alpha^4 - 192Q^6 \alpha^6}. \quad (3.40)$$

A superfície $r = r_+$ corresponde ao horizonte de eventos, enquanto que a superfície $r = r_-$ é um horizonte de Cauchy. Vê-se, então, que a métrica (3.36) representa um buraco negro análogo ao buraco negro de Reissner-Nordström-anti-de Sitter.

Capítulo 4

Radiação de Hawking e Anomalias de Traço: Método Christensen-Fulling

4.1 Introdução

Obter o tensor de energia momento da radiação de Hawking usando as técnicas convencionais da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos é um processo extremamente complicado, isto quando executável. Na tentativa de contornar estes problemas foram propostos alguns métodos que empregam o conhecimento de anomalias para impor restrições importantes sobre a forma funcional do tensor de energia-momento, ou no caso de algumas geometrias privilegiadas, determinar por completo o tensor de energia-momento da radiação de Hawking e de outros efeitos quânticos que surgem na presença de campos gravitacionais. Dentre tais métodos destaca-se, por sua eficiência e praticidade, o método proposto por Christensen e Fulling [24], onde se determina o tensor de energia-momento da radiação de Hawking usando o conhecimento da anomalia conforme, a qual é dada em termos dos invariantes geométricos do espaço-tempo. Nas seções que se seguem apresentamos uma revisão sobre este método, dando ênfase à fundamentação teórica do mesmo e ressaltando as vantagens e limitações do seu emprego.

Uma vez realizada a revisão do método proposto por Christensen e Fulling [24], passaremos ao estudo do processo de evaporação de buracos negros, obtendo assim o tensor de energia-momento da radiação de Hawking emitida pelos buracos negros estáticos descritos no Capítulo 3, restringindo nossa atenção ao caso de um campo escalar. Primeiro usamos a lei de conservação da energia-momento para obter a forma geral das componentes do tensor de energia-momento, as quais serão dadas em termos da anomalia de traço e de duas constantes de integração. Isto será feito para espaços-tempos quadri e bidimensionais. De posse de tais expressões, escrevemos a anomalia do traço para o campo escalar em termos dos invariantes geométricos do espaço-tempo. Por último, determinamos as constantes de integração para o caso bidimensional através da imposição de condições de contorno fisicamente aceitáveis para o tensor de energia-momento que representa o estado de vácuo da radiação de Hawking. Com isso, podemos comparar nossos resultados com o tensor de energia-momento da radiação de Hawking encontrados na literatura e calculados através de outros métodos.

4.2 O Método de Christensen e Fulling

Na metade da década de setenta quando Capper e Duff apresentaram os primeiros resultados a respeito do surgimento de anomalias na teoria da gravitação semiclássica usando o método de regularização dimensional [22, 23], havia uma discussão intensa sobre se as anomalias possuíam alguma interpretação física ou se eram apenas uma consequência da má escolha do processo de regularização como argumentado por muitos [57, 58, 43, 59, 60, 61, 62]. Nesse contexto o trabalho de Christensen e Fulling é de grande importância pois mostra que as anomalias gravitacionais são realmente uma consequência física da quantização dos campos em um *background* curvo, e que o surgimento delas se deve ao processo de criação de partículas. Em duas dimensões a radiação de Hawking se deve inteiramente a anomalia de traço. Outro ponto relevante deste método é sua simplicidade, uma vez que permite obter o tensor de energia-momento da radiação de Hawking sem a necessidade de realizar os cálculos complexos da teoria quântica de campos. De uma forma geral, o método é o descrito a seguir.

Parte-se da equação de conservação da energia-momento,

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (4.1)$$

Resolve-se esta equação para a região de estados estacionários, onde os valores esperados das componentes do tensor de energia-momento são aproximadamente independentes do tempo, e assume-se que as simetrias do espaço-tempo podem ser estendidas para o tensor de energia-momento dos campos quânticos evoluindo nesse espaço-tempo, ou seja, para um buraco negro com simetria esférica assume-se que o tensor de energia-momento seja esféricamente simétrico.

A equação de conservação da energia, em geral, fornece equações diferenciais para as componentes não nulas do tensor de energia-momento. Porém, a independência temporal do tensor de energia-momento implica que a componente puramente temporal T_t^t , fique indeterminada. Entretanto, esta pode ser obtida em termos do traço anômalo e das outras componentes não nulas, sendo dada por:

$$T_t^t = T_{\alpha}^{\alpha} - T_i^i. \quad (4.2)$$

As componentes do tensor de energia-momento são obtidas através da resolução das equações diferenciais, que em geral feita por integração direta. Para espaços-tempos que admitem redução dimensional consistente para duas dimensões para a obtenção de um espaço-tempo bidimensional equivalente, ou no caso em que a métrica pode ser truncada, este

procedimento fornece as componentes não nulas do tensor de energia-momento em termos de uma função que é totalmente determinada quando o traço anômalo é conhecido e de duas constantes de integração. Sendo que seu valor exato pode ser obtido fazendo-se por considerações física a respeito de seu comportamento no infinito espacial e sobre os horizontes do passado e do futuro, onde se estabelecem condições de contorno bem definidas e fisicamente aceitáveis para determinar os valores das constantes de integração. O sucesso da aplicação deste método para buracos negros quadridimensionais está fortemente relacionado com as simetrias da parte “angular” do espaço-tempo. Além das duas constantes de integração e da função dependente do traço anômalo, a determinação das componentes transversais é dada em função do traço anômalo e de uma função que geralmente não é conhecida, podendo ainda a equação de conservação fornecer uma equação identicamente nula. Porém, para algumas geometrias privilegiadas é possível determinar as componentes transversais usando argumentos semiclássicos e considerações geométricas.

4.3 Forma Geral do Tensor de Energia-Momento Anômalo

Nesta seção estudamos o processo de evaporação de buracos negros usando os métodos que usam as anomalias de traço para obter a forma geral do tensor de energia-momento da radiação de Hawking. Estamos interessados em espaços-tempos estáticos e com simetria tal que a métrica pode ser escrita na forma (3.1), ou, para os espaços-tempos bidimensionais truncados, na forma (3.4).

4.3.1 Para Buracos Negros Quadridimensionais

As geometrias dos espaços-tempos na vizinhança dos buracos negros considerados neste trabalho podem ser descrita por uma métrica na forma geral dada no capítulo anterior, cf. Eq. (3.1). Para os espaços-tempos descritos por tal métrica, e assumindo que os campos da matéria preservam as simetrias do espaço-tempo, as únicas componentes do tensor de energia-momento possivelmente não nulas são: T_t^t , T_t^r , T_r^t , T_r^r , T_θ^θ e T_ϕ^ϕ . Com estas considerações, a equação de conservação de energia,

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (4.3)$$

fornece as seguintes equações diferenciais

$$\partial_r T_t^r + \frac{2}{r} T_t^r = 0, \quad (4.4)$$

$$\partial_r T_r^r + \left(\frac{f'}{2f} + \frac{2}{r} \right) T_r^r - \frac{f'}{2f} T_t^t - \frac{2}{r} T_\theta^\theta = 0, \quad (4.5)$$

e

$$T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi. \quad (4.6)$$

A equação (4.4) pode ser integrada para T_t^r fornecendo

$$T_t^r(r) = -\frac{A}{r^2}, \quad (4.7)$$

onde A é uma constante de integração. A componente T_t^t pode ser escrita em termos do traço, e das outras três componentes da diagonal principal do tensor de energia-momento,

$$T_t^t = T_\alpha^\alpha - T_r^r - 2T_\theta^\theta. \quad (4.8)$$

Usando esta relação, a equação (4.5) pode ser escrita como

$$\partial_r T_r^r + \frac{1}{r^2 f} \left[(2rf + r^2 f') T_r^r - (2rf - r^2 f') T_\theta^\theta - \frac{f'}{2f} T_\alpha^\alpha \right] = 0, \quad (4.9)$$

cuja solução em termos de $f(r)$ e $f'(r)$ é

$$T_r^r(r) = \frac{1}{r^2 f} \{ B - A + H_{4D} + G_{4D} \}, \quad (4.10)$$

com

$$H_{4D}(r) = \int_{r_h}^r \frac{r'^2 f'(r')}{2} T_\alpha^\alpha(r') dr', \quad (4.11)$$

e

$$G_{4D}(r) = \int_{r_h}^r \left(r' f(r') - \frac{r'^2 f'(r')}{2} \right) T_\theta^\theta(r') dr'. \quad (4.12)$$

Colecionando esses resultados obtemos a forma geral do TEM, o qual, em termos da coordenada tartaruga, r^* , pode ser expresso como a soma de quatro termos

$$T_\nu^* \mu = T_\nu^* \mu^{(1)} + T_\nu^* \mu^{(2)} + T_\nu^* \mu^{(3)} + T_\nu^* \mu^{(4)}, \quad (4.13)$$

onde definimos

$$T_{\nu}^{*\mu(1)} = \begin{bmatrix} T_{\alpha}^{\alpha}(r) - \frac{1}{r^2 f(r)} H_{4D}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 f(r)} H_{4D}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$T_{\nu}^{*\mu(2)} = \frac{A}{r^2 f(r)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$T_{\nu}^{*\mu(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{G_{4D}(r)}{r^2 f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_{4D}(r)}{r^2 f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\theta}^{\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\theta}^{\theta}(r) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

e

$$T_{\nu}^{*\mu(4)} = \frac{B}{r^2 f(r)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Note-se que apenas $T_{\nu}^{*\mu(1)}$ depende do traço anômalo do tensor de energia-momento, que apenas $T_{\nu}^{*\mu(2)}$ tem componentes não nulas fora da diagonal principal, e que apenas $T_{\nu}^{*\mu(3)}$ carrega as informações a respeito das componentes transversais do tensor de energia-momento. A solução do problema depende do fornecimento do traço anômalo $T_{\alpha}^{\alpha}(r)$, através da função $H_{4D}(r)$, e das componentes transversais do tensor de energia-momento anômalo $T_{\theta}^{\theta}(r) = T_{\phi}^{\phi}(r)$, via função $G_{4D}(r)$. Dadas tais funções, as constantes A e B são determinadas por condições de contorno (assintóticas) adequadas. Porém, dado que em geral não temos informação sobre as componentes transversais do tensor de energia-momento, o método não é eficaz para espaços-tempos quadridimensionais. De fato, as componentes transversais do tensor de energia-momento (cf. Eq. (4.6)) não são conhecidas e a função (4.12) fica indeterminada. Portanto não se pode obter o tensor de energia-momento de forma fechada. Apesar disso, no caso da geometria de Schwarzschild é possível estimar as componentes transversais através de argumentos indiretos [24]. Porém, tal procedimento é peculiar a esta geometria, não podendo ser generalizado e, por isso, não o reproduziremos

aqui.

4.3.2 Para Buracos Negros Bidimensionais

A métrica (3.1) pode ser truncada, eliminando-se as coordenadas (θ, φ) , resultando num espaço-tempo de $(1 + 1)$ dimensões que descreve a região exterior de um buraco negro bidimensional. A função horizonte (3.2) não é alterada por esta redução dimensional. Como as componentes angulares foram suprimidas, a equação de conservação da energia-momento (4.3), fornece apenas duas equações diferenciais para as componentes não nulas do tensor de energia-momento, sendo estas:

$$\partial_r T_t^r = 0, \quad (4.18)$$

$$\partial_r T_r^r + \frac{f'}{2f} (2T_r^r - T_\alpha^\alpha) = 0, \quad (4.19)$$

A solução da Eq. (4.18) é

$$T_t^r = -A = \text{constante}, \quad (4.20)$$

correspondendo a um fluxo constante de energia. Para a componente T_r^r temos que a Eq. (4.19) tem solução geral da forma

$$T_r^r(r) = \frac{1}{f(r)} \{B - A + H_{2D}(r)\}, \quad (4.21)$$

onde

$$H_{2D}(r) = \int_{r_h}^r \frac{f'(r')}{2} T_\alpha^\alpha(r') dr. \quad (4.22)$$

Assim, no caso bidimensional e em termos da coordenada tartaruga, o tensor de energia-momento fica

$$T_\nu^* \mu = T_\nu^* \mu^{(1)} + T_\nu^* \mu^{(2)} + T_\nu^* \mu^{(3)}, \quad (4.23)$$

onde definimos

$$T_\nu^* \mu^{(1)} = \begin{bmatrix} T_\alpha^\alpha(r) - \frac{H_{2D}(r)}{f(r)} & 0 \\ 0 & \frac{H_{2D}(r)}{f(r)} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$T_\nu^* \mu^{(2)} = \frac{A}{f(r)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

e

$$T_v^* \mu^{(3)} = \frac{B}{f(r)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Para determinarmos as constantes de integração A e B é conveniente escrever o tensor de energia-momento em termos das coordenadas nulas u e v , em função das quais temos

$$T_{uu} = \frac{1}{4} [2B + 2H_2(r) - f(r)T_\alpha^\alpha(r)], \quad (4.27)$$

$$T_{vv} = T_{uu} - A, \quad (4.28)$$

e

$$T_{uv} = T_{vu} = -\frac{1}{4} f(r)T_\alpha^\alpha(r). \quad (4.29)$$

O método proposto por Christensen e Fulling foi inicialmente aplicado ao buraco negro de Schwarzschild considerando anomalias de traço devido a um campo escalar. Em tal caso, para que o tensor de energia-momento anômalo corresponda ao tensor de energia-momento da radiação de Hawking, é necessário que as condições do vácuo de Unruh sejam satisfeitas [42, 63], i.e., que na região assintótica não exista um fluxo de partículas entrando do infinito em direção ao horizonte de eventos $T_{vv}(r \rightarrow \infty) = 0$, e que no horizonte do passado ($V = 0$, nas coordenadas de Kruskal) não haja fluxo de energia, $T_{uu}(V \rightarrow 0) = 0$. Com estas condições de contorno, temos que

$$A = \lim_{r \rightarrow \infty} [T_{uu}(r) - T_{vv}(r)], \quad (4.30)$$

$$B = 0, \quad (4.31)$$

e, para um campo escalar, a constante A é dada por

$$A = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} [H_{2D}(r) - f(r)T_\alpha^\alpha(r)]. \quad (4.32)$$

Então, como a constante A representa o fluxo de energia da radiação de Hawking no infinito, deve-se ter

$$T_{uu}(r \rightarrow \infty) = \frac{\hbar}{48\pi} \kappa^2, \quad (4.33)$$

onde κ^2 é a gravidade superficial do buraco negro bidimensional.

As expressões gerais para os tensores de energia-momento em quatro dimensões, (4.14) a (4.17), e para duas dimensões (4.24) a (4.26), fornecem a forma correta do tensor de energia-momento anômalo independentemente do tipo de campo considerado. No caso bidimensional é possível obtermos de forma exata o fluxo de energia devido à radiação de

Hawking. Para isto, é necessário fornecermos somente valor do traço do tensor de energia-momento. O caso particular de um campo escalar em espaços-tempos bidimensionais é estudado a seguir.

Apesar dos resultados listados acima terem sido obtidos com base num buraco negro de Schwarzschild, acredita-se que os mesmos se apliquem de maneira geral aos buracos negros estáticos descritos no Capítulo 3. Vale notar porém que a equação (4.32) pressupõe que a quantidade $H_{2D}(r) - f(r) T_{\alpha}^{\alpha}(r)$ seja bem comportada no infinito radial. Este fato requer uma análise cuidadosa no caso de espaços-tempos que não são assintoticamente triviais. Conforme vemos a seguir, no caso de espaços-tempos assintoticamente **anti-de Sitter** tais dificuldades podem ser suplantadas. Por outro lado, no caso de espaços-tempos assintoticamente de Sitter, o limite $r \rightarrow \infty$, não está bem definido, uma vez que há um horizonte cosmológico num valor finito de $r = r_c$. A singularidade métrica no horizonte cosmológico cria problemas adicionais na aplicação do método de Christensen e Fulling a espaços-tempos tipo de Sitter. Uma solução para este tipo de problema foi proposta por Mottola e Vaulin [64], mas não a analisaremos no presente trabalho.

4.4 As Anomalias de Traço para o Campo Escalar

Neste trabalho consideramos apenas um campo escalar $\phi(x)$ evoluindo nos espaços-tempos nas vizinhanças de buracos negros. Neste caso, ao considerarmos as equações (2.69) e (2.70) temos: $N_S = 1$ e $N_f = N_V = 0$. Portanto,

$$\beta = -3\beta' = \frac{1}{120(4\pi)^2}. \quad (4.34)$$

A seguir escrevemos a forma geral das anomalias de traço para este caso particular.

4.4.1 Para Buracos Negros Quadridimensionais

Quando os resultados 4.34 para os espaços-tempos descritos pela métrica quadridimensional (3.1), com a função horizonte (3.2), obtemos que o traço do tensor de energia-momento anômalo (cf. Eq. (2.68)) é dado por

$$T_{\alpha}^{\alpha}(r) = -\frac{1}{270(4\pi)^2} \left[18\alpha^4 + \frac{4\alpha^2 a}{r^2} - \frac{a^2}{r^4} + \frac{18ab}{r^5} - \frac{12b^2}{r^6} - \frac{2ac}{r^6} + \frac{72bc}{r^7} - \frac{78c^2}{r^8} \right]. \quad (4.35)$$

Além disso, função $H_{4D}(r)$ definida pela Eq. (4.11) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
H_{4D}(r) = & -\frac{1}{810(4\pi)^2} \left\{ 9\alpha^6(r^4 - r_h^4) + 4\alpha^4 a(r^2 - r_h^2) + 18\alpha^4 b(r - r_h) + \right. \\
& -2\alpha^2 ab \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_h} \right) + (18\alpha^2 b^2 + 16\alpha^2 ac) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_h^2} \right) + \\
& + \frac{1}{3} (a^2 b - 144\alpha^2 bc) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_h^3} \right) + \frac{222bc^2}{7} \left(\frac{1}{r^7} - \frac{1}{r_h^7} \right) + \\
& + \frac{1}{2} (-4ab^2 - a^2 c + 78\alpha^2 c^2) \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_h^4} \right) + \\
& + \frac{2}{5} (ab^3 + 14abc) \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_h^5} \right) + \\
& - (18b^2 c + 4ac^2) \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_h^6} \right) - \frac{39c^3}{2} \left(\frac{1}{r^8} - \frac{1}{r_h^8} \right) + \\
& \left. -2\alpha^2 (a^2 + 18\alpha^2 c) \ln(r - r_h) \right\}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Por sua vez, a forma geral função $G_{4D}(r)$ não pode ser determinada. Devido a tal fato, não analisaremos aqui os espaços-tempos quadridimensionais, nem mesmo nos casos particulares de Schwarzschild e Reissner-Nordström, nos quais este problema pode ser contornado [24].

4.4.2 Para Buracos Negros Bidimensionais

Em espaços-tempos bidimensionais, a anomalia de traço do tensor de energia-momento (2.67) depende apenas do escalar de curvatura que para a geometria descrita pela métrica (3.4) vale $R = -f''(r)$. Logo, temos que

$$T_\alpha^\alpha = -\frac{1}{24\pi} \left(2\alpha^2 - \frac{2b}{r^3} + \frac{6c}{r^4} \right) \tag{4.37}$$

Substituindo este resultado na função (4.22) que depende do traço anômalo temos

$$\begin{aligned}
H_{2D}(r) = & \frac{1}{48\pi} \left[-2\alpha^4 (r^2 - r_h^2) - 2\alpha^2 b \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_h} \right) + 4\alpha^2 c \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_h^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{b^2}{2} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_h^4} \right) + 2bc \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_h^5} \right) - 2c^2 \left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_h^6} \right) \right]. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Vale a pena acrescentar que, para o caso de um campo escalar num espaço-tempo bi-dimensional, com métrica da forma (3.4), o traço do tensor de energia-momento anômalo

é dado por $T_\alpha^\alpha = -\frac{1}{24\pi}f''(r)$. Assim, obtém-se $H_{2D}(r) = \frac{1}{24\pi} \left(\kappa^2 - \frac{[f'(r)]^2}{4} \right)$, onde κ é a gravidade superficial do buraco negro. Além disso, tem-se $f(r)T_\alpha^\alpha(r) = -\frac{1}{24\pi}f(r)f''(r)$. Portanto, para buracos negros estáticos e com simetria esférica ou plana, a constante A , que determina o fluxo da radiação de Hawking, é dada por

$$A = \frac{1}{48\pi}\kappa^2 + \frac{1}{48\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(f(r)f''(r) - \frac{[f'(r)]^2}{4} \right). \quad (4.39)$$

Interessantemente, se $f'(r)$ e, conseqüentemente, $f''(r)$ se anulam no infinito a constante A fornece o fluxo de energia da radiação de Hawking conforme determinado por um observador inercial. Por outro lado, se $f'(r)$ não se anula no infinito, a constante A pode não estar bem definida. Veremos a seguir que este é o caso de buracos negros em espaços-tempos assintoticamente de Sitter e anti-de Sitter.

4.5 O TEM da Radiação de Hawking: Campo Escalar, Espaços Bidimensionais

No caso dos espaços-tempos bidimensionais, obtidos pelos truncamentos das métricas quadridimensionais, é possível obter a forma exata do tensor de energia-momento anômalo determinando os valores das constantes de integração A e B . Consideraremos a seguir os quatro buracos negros cujas geometrias foram descritas no Capítulo 3. O primeiro caso a ser revisto é o buraco negro de Schwarzschild, para o qual este método foi empregado no trabalho original de Christensen e Fulling [24], apresentamos os resultados aqui apenas para verificação de concordância de nossos resultados. Após isto aplicamos o mesmo procedimento para os buracos negros de Reissner-Nordström, Schwarzschild-anti-de Sitter e para *black branes*.

4.5.1 Para o Buraco Negro de Schwarzschild

Vamos reproduzir aqui, resumidamente, a análise realizada no trabalho original de Fulling e Christensen [24] para o buraco negro de Schwarzschild. Em tal caso, o termo proporcional a massa em (3.2) é $b = 4M$, a carga elétrica é nula, $c = 0$, e o espaço-tempo é esfericamente simétrico, $a = 1$, e assintoticamente Minkowski, $\alpha = 0$. A anomalia do

traço do tensor de energia-momento em duas dimensões (4.37) resulta na forma

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \frac{M}{6\pi r^3}, \quad (4.40)$$

e a função que depende da anomalia de traço (4.38) fica

$$H_{2D}(r) = \frac{M^2}{24\pi} \left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4} \right). \quad (4.41)$$

Assim, usando estas duas últimas equações e a Eq. (4.32), obtém-se

$$A = \frac{1}{768\pi M^2}, \quad (4.42)$$

o qual corresponde exatamente ao fluxo da radiação de Hawking. Além disso, pelos argumentos mencionados acima, obtém-se $B = 0$.

Para comparação, vamos escrever explicitamente as componentes do tensor de energia-momento anômalo. Usando as Eqs. (4.40) e (4.41), a parte do tensor de energia-momento dependente da anomalia (4.24) fica

$$T_{\nu}^{*\mu(1)} = \frac{M}{6\pi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \begin{bmatrix} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M}{4} \left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) & 0 \\ 0 & \frac{M}{4} \left(\frac{1}{16M^4} - \frac{1}{r^4}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Por outro lado, as componentes do tensor de energia-momento que dependem das constantes de integração A e B são dadas por

$$T_{\nu}^{*\mu(2)} = \frac{A}{1 - \frac{2M}{r}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad T_{\nu}^{*\mu(2)} = \frac{B}{1 - \frac{2M}{r}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Além disso, sabemos que o valor esperado do tensor de energia-momento da radiação de Hawking para o buraco negro de Schwarzschild foi calculado por Hawking [4], sendo dado por

$$\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle = \frac{1}{768\pi M^2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Tomando o limite $r \rightarrow \infty$, em (4.43), (4.44) e comparado com o resultado obtido por Hawking, pode-se determinar as constantes de integração como sendo $A = \frac{1}{768\pi M^2}$ e $B = 0$, coincidindo com o resultado original obtido por Christensen e Fulling [24].

4.5.2 Para o Buraco Negro de Reissner-Nordström

Para o buraco negro de Reissner-Nordström, que corresponde a um buraco negro esfericamente simétrico, $a = 1$, de massa M ($b = 2M$), com uma carga elétrica não nula que contribui para a curvatura através do parâmetro $c = Q^2$, em um espaço-tempo assintoticamente plano, $\alpha = 0$, a anomalia conforme é dada por

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{4M}{r^3} - \frac{6Q^2}{r^4} \right). \quad (4.46)$$

Assim,

$$H_{2D}(r) = \frac{1}{24\pi} \left(-\frac{M^2}{r^4} + \frac{2MQ^2}{r^5} - \frac{Q^4}{r^6} + \frac{M^2}{r_h^4} - \frac{2MQ^2}{r_h^5} + \frac{Q^4}{r_h^6} \right), \quad (4.47)$$

onde o raio do horizonte de eventos é $r_h = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$. Substituindo as funções dadas nas Eqs. (4.46) e (4.47) na Eq. (4.32), obtemos

$$A = \frac{M^2 - Q^2}{48\pi r_h^4}, \quad (4.48)$$

resultado que é consistente com a forma geral do fluxo de radiação de Hawking dado por $\frac{1}{48\pi} \kappa^2$, uma vez que no presente caso temos $\kappa = \frac{M}{r_h^2} - \frac{Q^2}{r_h^3}$.

No limite assintótico ($r \rightarrow \infty$) a parte do tensor de energia-momento que depende da anomalia de traço, (4.24), assume a forma

$$T_{\nu}^{*\mu(1)} = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{M}{r_h^2} - \frac{Q^2}{r_h^3} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

enquanto que a componente (4.25) resulta em

$$T_{\nu}^{*\mu(2)} = A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Agora, para verificar o resultado da Eq. (4.48), comparamos com os valores esperados das componentes do tensor de energia-momento da radiação de Hawking emitida pelo buraco negro de Reissner-Nordström, os quais foram calculados por Hiscock [65] e por Balbinot *et al* [66]. As componentes nas coordenadas nulas (u, v) são dadas por

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{M^2 - Q^2}{2r_h^4} - \frac{M}{r^3} + \frac{3(M^2 + Q^2)}{2r^4} - \frac{3MQ^2}{r^5} + \frac{Q^4}{r^6} \right), \quad (4.51)$$

$$\langle T_{vv} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(-\frac{M}{r^3} + \frac{3(M^2 + Q^2)}{2r^4} - \frac{3MQ^2}{r^5} + \frac{Q^4}{r^6} \right), \quad (4.52)$$

e

$$\langle T_{uv} \rangle = \langle T_{vu} \rangle = \frac{1}{24\pi} \left(-\frac{M}{r^3} + \frac{2M^2}{r^4} + \frac{3Q^2}{2r^4} - \frac{4MQ^2}{r^5} + \frac{3Q^4}{2r^6} \right). \quad (4.53)$$

Fazendo a transformação de coordenadas para (t, r^*) e tomando o limite $r \rightarrow \infty$, temos

$$\langle T_{\nu}{}^{\mu}(r \rightarrow \infty) \rangle = \frac{M^2 - Q^2}{48\pi r_h^4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Comparando estes resultados com (4.49) e (4.25) e (4.26) no limite assintótico, determina-se que as constantes de integração são $A = \frac{M^2 - Q^2}{48\pi r_h^4}$, e $B = \frac{-Q^2}{24\pi r_h^2} \left(1 - \frac{2M}{r_h} + \frac{Q^2}{r_h^2} \right) = 0$, confirmando o resultado obtido pelo método de Christensen e Fulling (4.48).

4.5.3 Para o Buraco Negro de Schwarzschild Anti-de Sitter

Para obter a função horizonte do buraco negro de Schwarzschild-anti-de Sitter tomamos o parâmetro de massa como sendo, $b = 2M$ em (3.2). Como este buraco negro não possui carga elétrica, $c = 0$, e a simetria do horizonte de eventos é esférica, $a = 1$. Assim, a função horizonte resulta na forma

$$f(r) = 1 + \alpha^2 r^2 - \frac{2M}{r}. \quad (4.55)$$

A anomalia de traço do tensor de energia-momento para esta geometria é

$$T_{\alpha}{}^{\alpha} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{4M}{r^3} - 2\alpha^2 \right), \quad (4.56)$$

e a função que depende da anomalia de traço (4.38) fica

$$H_{2D}(r) = \frac{1}{24\pi} \left(-\frac{M^2}{r^4} - \frac{2M\alpha^2}{r} - \alpha^4 r^2 + \frac{M^2}{r_h^4} + \frac{2M\alpha^2}{r_h} + \alpha^4 r_h^2 \right). \quad (4.57)$$

Assim, ao tentarmos aplicar a fórmula (4.32), obtemos

$$A = \frac{1}{48\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\alpha^4 r^2 + 2\alpha^2 + \frac{M^2}{r_h^4} + \frac{2M\alpha^2}{r_h} + \alpha^4 r_h^2 \right], \quad (4.58)$$

o que é obviamente inconsistente com o que é esperado para o fluxo de energia da radiação de Hawking e conforme já calculado de forma direta. Por outro lado, pelo método de

Christensen e Fulling, em termos das coordenadas nulas (u, v) e no limite assintótico, $r \rightarrow \infty$, temos que

$$T_{uu}(\infty) = \frac{1}{48\pi} \left(2\alpha^2 + \alpha^4 r_h^2 + \frac{2\alpha^2 M}{r_h} + \frac{M^2}{r_h^4} \right) = \frac{1}{48} \kappa^2 + \frac{\alpha^2}{24\pi}, \quad (4.59)$$

de onde, juntamente com a Eq. (4.28), obtém-se

$$A = \frac{1}{48\pi} \kappa^2 + \frac{\alpha^2}{24\pi} - \lim_{r \rightarrow \infty} T_{vv}(r), \quad (4.60)$$

indicando que o fluxo de energia é bem definido somente se $T_{vv}(r)$ é bem comportado no infinito. Porém, por esta via, o método de Christensen e Fulling não determina tal fluxo completamente, uma vez que $T_{vv}(r)$ não é conhecido, a menos que seja determinado diretamente. De fato, Hemming e Keski-Vakkuri [67] calcularam os valores esperados do tensor de energia-momento da radiação de Hawking de partículas escalares e sem massa para o buraco negro de Schwarzschild, sendo estas em termos das coordenadas nulas dadas por

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{1}{48\pi} \left(\alpha^4 r_h^2 + \frac{2\alpha^2 M}{r_h} + \frac{M^2}{r_h^4} \right) = \frac{\kappa^2}{48\pi}, \quad (4.61)$$

e

$$\langle T_{vv} \rangle = \langle T_{uv} \rangle = \langle T_{vu} \rangle = 0. \quad (4.62)$$

Esse resultado é incompatível com a Eq. 4.59. Outra forma de confirmar a inconsistência do método de Christensen-Fulling para [espaços-tempos assintoticamente AdS](#) é comparar a Eq. (4.20) com o resultado obtido por Zeng, Lin e Yango [68] para o fluxo assintótico da radiação de Hawking, $T_t^r(\rightarrow \infty) = \frac{\kappa^2}{48\pi}$. Daí obtém-se a constante A como sendo

$$A = -\frac{1}{48\pi} \left(\alpha^4 r_h^2 + \frac{2\alpha^2 M}{r_h} + \frac{M^2}{r_h^4} \right),$$

que é o valor correto do fluxo de energia devido a radiação de Hawking para o buraco-negro Schwarzschild-AdS, mas que é inconsistente com a Eq. (4.60).

4.5.4 Para a Black Brane/Black String

Para este buraco negro carregado com simetria plana em um espaço-tempo assintoticamente anti-de Sitter temos: $a = 0$, $b = 4M$ e $c = 4Q^2$. Portanto a função horizonte (3.2) é

dada por

$$f(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{4M}{r} + \frac{4Q^2}{r^2}. \quad (4.63)$$

A anomalia conforme do tensor de energia-momento é

$$T_\alpha^\alpha = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{8M}{r^3} - \frac{24Q^2}{r^4} - 2\alpha^2 \right), \quad (4.64)$$

logo

$$H_{2D}(r) = \frac{1}{24\pi} \left(-\alpha^4 r^2 - \frac{4\alpha^2 M}{r} + \frac{8\alpha^2 Q^2}{r^2} - \frac{4M^2}{r^4} + \frac{16MQ^2}{r^5} - \frac{16Q^4}{r^6} + \alpha^4 r_h^2 + \frac{4\alpha^2 M}{r_h} - \frac{8\alpha^2 Q^2}{r_h^2} + \frac{4M^2}{r_h^4} - \frac{16MQ^2}{r_h^5} + \frac{16Q^4}{r_h^6} \right) \quad (4.65)$$

Então, a Eq. (4.32) produz

$$A = \frac{1}{24\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\alpha^4 r^2 + \alpha^4 r_h^2 + \frac{4\alpha^2 M}{r_h} - \frac{8\alpha^2 Q^2}{r_h^2} + \frac{4M^2}{r_h^4} - \frac{16MQ^2}{r_h^5} + \frac{16Q^4}{r_h^6} \right], \quad (4.66)$$

um resultado inesperado, a exemplo do que ocorre para o espaço-tempo Schwarzschild-anti-de Sitter. O cálculo direto **do fluxo** de energia da radiação de Hawking no infinito para este buraco-negro foi feito por Peng e Wu [69], **como sendo** $T_t^r(r \rightarrow \infty) = \frac{\kappa^2}{48\pi}$. Com isso conseguimos determinar constante de integração A ,

$$A = -\frac{1}{48\pi} \left(\alpha^4 r_h^2 + \frac{4\alpha^2 M}{r_h} - \frac{8\alpha^2 Q^2}{r_h^2} + \frac{2M^2}{r_h^4} - \frac{16MQ^2}{r_h^5} + \frac{16Q^4}{r_h^6} \right). \quad (4.67)$$

Os resultados mostrados acima evidenciam a inconsistência da fórmula estabelecida por Christensen e Fulling para determinar uma das constantes de integração e assim determinar o fluxo de energia da radiação de Hawking no caso de espaços-tempos assintoticamente AdS. No que segue propomos uma alternativa para **remover** tal inconsistência.

4.6 Adaptação do Método de Christensen e Fulling para Espaços-Tempos AdS

Conforme vimos acima, a determinação de uma das constantes de integração segundo a sugestão de Christensen e Fulling resulta numa indeterminação para espaços-tempos as-

sintoticamente não triviais. A seguir, sugerimos uma alternativa para resolver tal problema que tem validade para todos os espaços com estrutura assintótico do tipo dos espaços anti-de Sitter.

Considere-se o espaço-tempo AdS puro cuja métrica é da forma (3.1) com a [função horizonte](#) dada por $f(r) = 1 + \alpha^2 r^2$. Nesse caso, o traço anômalo do tensor de energia-momento devido a um campo escalar conformemente acoplado é dado por $T_\alpha^\alpha = -\frac{\alpha^2}{12\pi}$. Com isso, dado que não existe buraco negro, resulta $H_{2D}(r) = -\frac{\alpha^4}{24\pi}r^2$ e tem-se

$$T_v^{*\mu(1)} = -\frac{\alpha^2}{24\pi f(r)} \begin{bmatrix} 2 - \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 r^2 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

$$T_v^{*\mu(2)} = \frac{A}{f(r)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

e

$$T_v^{*\mu(3)} = \frac{B}{f(r)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Visto que não há buraco negro no espaço-tempo anti-de Sitter, o tensor de energia-momento anômalo encontrado acima não pode corresponder a radiação de Hawking. Além disso, as componentes do TEM em termos das coordenadas nulas u e v divergem no infinito. De fato, considerando que devemos ter $B = 0$, resulta

$$T_{uu} = \frac{\alpha^2}{48\pi}, \quad (4.71)$$

$$T_{vv} = \frac{\alpha^2}{48\pi} - A, \quad (4.72)$$

e

$$T_{uv} = T_{vu} = -\frac{1}{4}f(r)T_\alpha^\alpha(r) = \frac{\alpha^2}{48\pi}(1 + \alpha^2 r^2). \quad (4.73)$$

Embora não se tenha uma interpretação física para este tipo de resultado, a análise [acima](#) permite propor uma modificação do método de Christensen e Fulling para espaços-tempos estáticos assintoticamente anti-de Sitter, de modo que o tensor de energia-momento proveniente da anomalia de traço possa ser associado unicamente à anomalia de traço associada a curvatura do espaço-tempo causada pela presença do buraco negro. Na prática, isso pode ser feito subtraindo do traço do tensor de energia-momento anômalo, T_α^α , a componente do espaço-tempo de fundo, $T_{(b)\alpha}^\alpha$, o que corresponde à curvatura do espaço-tempo de fundo, ou equivalentemente, à curvatura do espaço-tempo na região assintótica, despre-

zando a presença do buraco negro. Assim, nos casos estudados neste trabalho, a anomalia de traço efetiva a ser considerada é definida por

$$T_{(ef)\alpha}^{\alpha} = T_{\alpha}^{\alpha} - T_{(b)\alpha}^{\alpha}. \quad (4.74)$$

Uma forma de justificar a presença do termo de *background* $T_{(b)\alpha}^{\alpha}$ é considerando-o como tendo origem em termos de superfície que surgem da variação da ação dos campos gravitacional e da matéria S , conforme o procedimento estabelecido por [70]. Porém, detalhes acerca desta interpretação estão além do escopo deste trabalho.

Para o caso de um buraco negro bidimensional estático num espaço-tempo assintoticamente anti-de Sitter, esta definição resulta em

$$T_{(ef)\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{24\pi} \left(f''(r) - f''_{(b)}(r) \right), \quad (4.75)$$

onde $f_{(b)}(r)$ é o fator conforme da métrica do espaço-tempo de fundo. Com isso, usando o traço efetivo definido acima e repetindo os procedimentos que conduzem a determinação do fluxo da radiação de Hawking para um observador inercial, que corresponde à constante de integração A , resulta,

$$A = \frac{1}{48\pi} \kappa^2 + \frac{1}{48\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[f(r)f''(r) - f_{(b)}(r)f''_{(b)}(r) - \frac{1}{4} \left([f'(r)]^2 - [f'_{(b)}(r)]^2 \right) \right]. \quad (4.76)$$

Não é difícil mostrar que o segundo termo no lado direito da equação acima se anula e resulta

$$A = \frac{1}{48\pi} \kappa^2, \quad (4.77)$$

conforme esperado para o fluxo de energia da radiação de Hawking. Além disso, pode-se mostrar também que a componente $T_{uv} = T_{vu}$, agora dadas por

$$T_{uv} = T_{vu} = -\frac{1}{4} f(r) T_{(ef)\alpha}^{\alpha}(r), \quad (4.78)$$

têm limite bem definido no infinito, ou seja, $T_{uv}(\infty) = T_{vu}(\infty) = 0$, assim como $T_{vv}(\infty) = 0$, consistentemente com os casos de espaços-tempos assintoticamente Minkowski e com os cálculos diretos do tensor de energia-momento para o caso de um campo escalar [67, 69].

Capítulo 5

Radiação de Hawking e Anomalias: Método Robinson-Wilczek

5.1 Introdução

Neste capítulo analisamos como o método de Robinson e Wilczek [25] é usado para obter o fluxo de energia da radiação de Hawking emitida por alguns dos buracos negros descritos no [Capítulo 3](#). Uma vez que a redução dimensional da ação depende da natureza de campo que está evoluindo nas vizinhanças do buraco negro, da topologia do horizonte de eventos, além da forma explícita da função horizonte $f(r)$, torna-se difícil apresentar uma forma geral para a implementação deste método e do tensor de energia-momento da radiação de Hawking obtido através de sua aplicação, como foi feito para o caso das anomalias conformes na Seção 4.3.1. Porém, uma vez definida a geometria do espaço-tempo e os parâmetros globais de massa e carga elétrica do buraco-negro em questão, é possível encontrar o fluxo da radiação de Hawking para cada caso, conforme veremos a seguir.

5.2 O Método de Robinson e Wilczek

O método desenvolvido por Robinson e Wilczek faz uso do conhecimento de anomalias de gauge e de anomalias gravitacionais para calcular os fluxos de energia-momento e os fluxos de carga da radiação de Hawking emitida por buracos negros (veja-se, e. g., [25, 71, 72]). Para descrever de forma geral este método vamos considerar um campo escalar carregado, $\phi(x)$, evoluindo em um espaço-tempo quadridimensional cuja geometria é descrita por uma métrica na forma (3.1), com a presença de um potencial de gauge, $\mathbf{A} = -\frac{Q}{r}\mathbf{d}t$. A equação de onda que descreve a evolução dos campos quânticos da matéria

no espaço-tempo pode ser decomposta em ondas parciais como feito no Apêndice B. A ação livre, $S_{livre}[\phi]$, para um campo escalar $\phi(x)$ é dada por

$$S_{livre}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi^* \mathcal{D}_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu \phi \right), \quad (5.1)$$

onde o operador derivada covariante, \mathcal{D}_μ , para um campo escalar carregado é dado por, $\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu$, e para um campo neutro, $\mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu$. Expandindo as derivadas parciais na ação em termos da métrica temos

$$S_{livre}[\phi] = \frac{1}{2} \int dt dr d\theta d\varphi r^2 Z^2(\theta) \phi^* \left[-\frac{1}{f(r)} \mathcal{D}_t^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r) \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\Omega^2 \right] \phi, \quad (5.2)$$

onde ∂_Ω^2 é o operador de momento angular

$$\partial_\Omega^2 = \frac{1}{Z(\theta)} \partial_\theta (Z(\theta) \partial_\theta) + \frac{1}{Z^2(\theta)} \partial_\varphi^2. \quad (5.3)$$

Uma vez definida a integral da ação em termos da métrica, o passo seguinte no método Robinson-Wilczek é proceder-se à redução dimensional da ação resultante. Para isso, faz-se uma decomposição em ondas parciais dos campos da matéria na forma $\phi = R_{l,m}(t, r) Y(\theta, \varphi)$, e realiza-se a integração nas coordenadas angulares resultando em

$$S_{livre}[\phi] \simeq \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int dt dr r^2 R_{l,m}^* \left[-\frac{1}{f(r)} \mathcal{D}_t^2 + \partial_r (f(r) \partial_r) - \frac{\lambda}{r^2} \right] R_{l,m}(t, r). \quad (5.4)$$

Por último, realiza-se a mudança de coordenadas pra a coordenada tartaruga, $r \rightarrow r^*$, escrevendo a ação (5.4) na forma

$$S_{livre}[\phi] \simeq \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int dt dr^* r^2 R_{l,m}^* \left[-\mathcal{D}_t^2 + \partial_{r^*}^2 + V_\lambda(r(r^*)) \right] R_{l,m}(t, r). \quad (5.5)$$

onde $V_\lambda(r(r^*))$ é o potencial efetivo (cf. Eq. (B.7) do Apêndice A). Note-se que potencial radial efetivo anula-se no horizonte de eventos, pois $f(r) = 0$ par $r = r_h$, e, próximo ao buraco negro, a ação (5.4) reduz-se a forma

$$S_{livre}[\phi] \simeq \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int dt dr^* r^2 R_{l,m}^* \left[-\mathcal{D}_t^2 + \partial_{r^*}^2 \right] R_{l,m}(t, r). \quad (5.6)$$

Portanto, a física na região próxima ao horizonte de eventos pode ser descrita usando uma coleção infinita de campos bidimensionais, $R_{l,m}(t, r)$, propagando-se em um espaço-tempo bidimensional dado pelo setor “ $r - t$ ” do espaço-tempo quadridimensional, com ação efe-

tiva dada na Eq. (5.6). A métrica que descreve a geometria deste espaço-tempo bidimensional é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \quad (5.7)$$

A ação (5.6) mostra que, além dos campos da matéria e das fontes de gravidade, tem-se ainda a presença de um campo de gauge acoplado ao campo $\phi(x)$ através da sua carga e , resultando no termo $eA_t = -\frac{eQ}{r}$ na ação bidimensional, e um *dilaton*, $\Psi = r^2$, que surge na redução dimensional.

Uma vez feita a redução dimensional na ação, o ponto fundamental do método de Robinson e Wilczek consiste na consideração que na região próxima ao horizonte de eventos os modos *ingoing* dos campos da matéria são classicamente irrelevantes, podendo ser ignorados nesta região. Fazendo esta hipótese, a teoria quântica efetiva torna-se *chiral*, o que leva ao surgimento das anomalias de gauge e das anomalias gravitacionais descritas nas Seções 2.4.2 e 2.4.3, respectivamente. Assim, o espaço-tempo exterior ao buraco negro é dividido em duas regiões de interesse designadas por (O) e (H) , sendo que (O) é a região onde a teoria preserva as simetrias clássicas, a qual se estende das proximidades do horizonte de eventos até o infinito, ($(O) \in [r_h + \varepsilon, \infty]$), enquanto que (H) é a região próxima ao horizonte de eventos, ($(H) \in [r_h, r_h + \varepsilon]$), onde a teoria se torna anômala.

A forma consistente da anomalia de gauge, cf. Eq. (2.71), na região (H) do espaço-tempo bidimensional é tal que

$$\partial_r J_{(H)}^r = \frac{e^2}{4\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon^{rt} \partial_r A_t, \quad (5.8)$$

Enquanto que a forma covariante (2.74) é dada por

$$\partial_r \tilde{J}^r = \frac{e^2}{4\pi\sqrt{|g|}} \varepsilon_{rt} F^{rt}. \quad (5.9)$$

Para a anomalia gravitacional a forma consistente (2.75) foi calculada em [48, 20, 19]) sendo dada por

$$\nabla_\mu T_{(H)}^\mu{}_\nu = \partial_\mu N^\mu{}_\nu, \quad (5.10)$$

onde o tensor $N^\mu{}_\nu$ é dado por

$$N^t{}_t = N^r{}_r = 0, \quad (5.11)$$

$$N^r{}_t = \frac{1}{192\pi} (f'(r)^2 + f''(r)f(r)), \quad (5.12)$$

$$N^t{}_r = \frac{-1}{192\pi f(r)^2} (f'(r)^2 - f''(r)f(r)). \quad (5.13)$$

Ou seja, a anomalia gravitacional é puramente tipo-tempo, pois somente a componente tipo tempo da Eq. 5.10 é diferente de zero. Portanto, a única componente não-nula da anomalia gravitacional covariante (2.77), satisfaz à equação

$$\nabla_r \tilde{T}_{(H)t}^r = \partial_r \tilde{N}^r_t, \quad (5.14)$$

onde usou-se a definição

$$\tilde{N}^r_t = \frac{1}{96\pi} \left(f''(r)f(r) - \frac{f'(r)^2}{2} \right). \quad (5.15)$$

Usando as identidades de Ward obtém-se os fluxos de energia-momento e de corrente devidos às anomalias gravitacionais e de gauge, respectivamente, sendo que o tensor de energia-momento e a corrente de gauge totais são dados pelas somas destes em cada uma das regiões (O) e (H), isto é:

$$J^\mu = J_{(O)}^\mu \Theta(r_h) + J_{(H)}^\mu H(r), \quad (5.16)$$

e

$$T^\mu_\nu = T_{(O)\nu}^\mu \Theta(r - r_h - \varepsilon) + T_{(H)\nu}^\mu H(r), \quad (5.17)$$

onde definiu-se

$$H(r) = 1 - \Theta(r - r_h - \varepsilon). \quad (5.18)$$

Por último, usa-se o fato de que a teoria efetiva que descreve os fenômenos quânticos deve ser invariante frente a transformações de gauge e a transformações de difeomorfismo, mostrando que os fluxos de corrente e de energia-momento que restauram a invariância da ação efetiva correspondem àqueles da radiação de Hawking.

A seguir analisaremos alguns exemplos de aplicação do método descrito acima. Para simplificar a apresentação, faremos a descrição do método separadamente para cada um dos buracos negros estudados, introduzindo gradativamente os elementos necessários para a realização dos cálculos envolvidos em cada exemplo.

5.3 Campo Escalar na Presença de Buracos Negros Neutros

Por simplicidade, consideremos inicialmente um campo escalar neutro $\phi(x)$, evoluindo no espaço-tempo de um buraco negro sem carga elétrica. Como visto acima, após fazermos

a decomposição do campo em ondas parciais e a redução dimensional da ação, a métrica bidimensional que descreve este espaço-tempo é dada por (5.7), com a presença de um *dilaton*, $\Psi = r^2$. Na região (O), que se estende das proximidades do horizonte de eventos até o infinito, o tensor de energia-momento é conservado

$$\nabla_{\mu} T_{(O)\nu}^{\mu} = \partial_r T_{(O)t}^r = 0, \quad (5.19)$$

enquanto que na região (H) ocorre a quebra da covariância geral, e o tensor de energia-momento não é mais conservado

$$\nabla_{\mu} T_{(H)\nu}^{\mu} \neq 0. \quad (5.20)$$

O tensor de energia-momento em cada um dos setores do espaço-tempo pode ser obtido pela integração direta das equações (5.19) e (5.10), resultando

$$T_{(O)t}^r = a_O \quad (5.21)$$

e

$$T_{(H)t}^r = a_H + N^r{}_t(r) - N^r{}_t(r_h), \quad (5.22)$$

onde a_O e a_H são constantes de integração. De acordo com a interpretação de Robinson e Wilczek [72], a_O representando o fluxo de energia no infinito ($r \rightarrow \infty$), sendo a quantidade à ser determinada. O tensor de energia-momento total pode ser escrito como uma soma de (5.21) e (5.22), respeitando-se os limites de validade em cada região. Isto é,

$$\begin{aligned} T^r{}_t &= T_{(O)t}^r \Theta(r - r_h - \varepsilon) + T_{(H)t}^r H(r), \\ &= a_O \Theta(r - r_h - \varepsilon) + [a_H + N^r{}_t(r) - N^r{}_t(r_h)] H(r). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Tomando-se divergente deste tensor de energia-momento temos que

$$\partial_r T^r{}_t = [a_O - a_H + N^r{}_t(r_h)] \delta(r - r_h - \varepsilon) + \partial_r [N^r{}_t(r) H(r)]. \quad (5.24)$$

Para verificarmos que esses resultados são consistentes com o que se obtém da teoria de campos, consideremos agora a ação efetiva bidimensional na Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos. A contribuição para a ação efetiva da métrica $g_{\mu\nu}$, devida ao acoplamento com os campos da matéria ϕ , é dada na Ref. [25] e se escreve na forma

(veja-se também a Eq. (2.66) no Capítulo 2)

$$W[g_{\mu\nu}] \equiv -i \ln \left(\int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi, g_{\mu\nu}]} \right), \quad (5.25)$$

com $\mathcal{D}[\phi]$ representando o operador de integração funcional, $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ sendo o funcional de ação, que é composto pela ação clássica de Einstein, pela ação dos campos livres, e por um termo de interação. Frente a uma transformação geral de coordenadas, a variação da ação clássica é dada por

$$\delta_\lambda S = - \int d^2x \sqrt{|g|} \lambda^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu, \quad (5.26)$$

sendo λ o parâmetro variacional. A invariância da teoria quântica frente a esta transformação de coordenadas implica que a ação efetiva seja invariante, isto é,

$$\begin{aligned} -\delta_\lambda W &= \int d^2x \sqrt{|g|} \lambda^\nu \nabla_\mu T_\nu^\mu \\ &\int d^2x \lambda^t [a_O - a_H + N^r{}_t(r_h)] \delta(r - r_h - \varepsilon) + \partial_r [N^r{}_t(r) H(r)] = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

O termo $\partial_r [N^r{}_t(r) H(r)]$, cuja contribuição para o tensor de energia-momento é $T_t^r = -N_t^r(r) H(r)$, cancela-se por considerarmos a contribuição dos modos *ingoing* classicamente irrelevantes. Portanto para que a variação da ação efetiva seja nula, a condição

$$a_O - a_H + N^r{}_t(r_h) = 0 \quad (5.28)$$

deve ser satisfeita.

As componentes do tensor de energia-momento representam quantidades físicas mensuráveis e, portanto, devem ter valores bem definidos em todo o espaço-tempo, incluindo o horizonte de eventos. Esta condição de regularidade implica que as componentes do tensor de energia-momento covariante devem se anular no horizonte de eventos, i.e., $\tilde{T}_{(H)t}^r(r_h) = T_{(H)t}^r(r_h) + \frac{1}{192\pi} [f(r_h) f'(r_h) - 2f'^2(r_h)] = 0$. Assim, usando (5.22) segue que

$$a_H = 2N_t^r(r_h), \quad (5.29)$$

e, portanto,

$$a_O = N^r{}_t(r_h) = \frac{\kappa^2}{48\pi}, \quad (5.30)$$

que corresponde a um fluxo de energia visto por um observador no infinito. O cálculo do tensor de energia-momento da radiação de Hawking coincide com este resultado [5]. Assim podemos interpretar este resultado considerando que o fluxo de energia que restaura

a covariância geral da teoria quântica efetiva coincide com o fluxo de energia das partículas emitidas pelo buraco-negro. Portanto, a anomalia se deve ao fenômeno de criação de partículas pelo buraco negro.

5.3.1 Na Presença de um Buraco Negro de Schwarzschild

A análise apresentada na última seção aplica-se de imediato ao caso de um campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild. A geometria esférica permite a decomposição do campo escalar $\phi(x)$ em termos das funções esféricas harmônicas, $\phi(t, r, \theta, \varphi) \sim R_{lm}(t, r)Y_l(\theta, \varphi)$, conforme resumido no [Apêndice B](#). Então, repetindo os procedimentos descritos na [Seção 5.3](#), obtemos que o fluxo da radiação de Hawking de acordo com um observador no infinito é dado por

$$a_0 = \frac{1}{48\pi} \left(\frac{M}{r_h^2} \right)^2 = \frac{1}{48\pi} \frac{1}{16M^2}, \quad (5.31)$$

concordando com o resultado obtido na [Seção 4.5.1](#), pelo método de Christensen e Fulling (cf. Eq. (4.42)).

5.3.2 Na Presença de um Buraco Negro de Schwarzschild-anti de Sitter

De forma análoga, a análise acima aplica-se também ao caso de um campo escalar no espaço-tempo de [Schwarzschild-anti de Sitter](#). Novamente a constante a_0 determina o fluxo da radiação de Hawking,

$$a_0 = \frac{\kappa^2}{48\pi} = \frac{1}{48\pi} \left(\alpha^2 r_h + \frac{M}{r_h^2} \right)^2. \quad (5.32)$$

Vale observar que este resultado está em concordância com o que foi obtido pelo método de Christensen e Fulling somente depois da modificação proposta na [Seção 4.6](#) (cf. Eq. (4.77)).

5.4 Campo Escalar Carregado na Presença de um Buraco Negro Carregado

Consideramos agora um campo escalar carregado $\phi(x)$ no espaço-tempo nas vizinhanças de um buraco de Reissner-Nordström, descrito na Seção (3.2.2), cuja métrica que descreve a geometria do espaço-tempo é dada por (3.13). O potencial de gauge devido a presença do campo elétrico é

$$\mathbf{A} = A_t \mathbf{dt}. \quad (5.33)$$

Após fazermos a redução dimensional da ação, a métrica bidimensional que descreve o espaço-tempo é dada por (3.24). Na região $(H) \in [r_h, r_h + \varepsilon]$, próxima ao horizonte de eventos, além da anomalia gravitacional, teremos a presença de uma anomalia de gauge devida a omissão dos modos *ingoing* do campo carregado, que são classicamente irrelevantes nessa região.

A forma consistente da anomalia de gauge para campos de gauge abelianos neste espaço-tempo é dada por (5.8). Portanto, nesta região a corrente anômala satisfaz à equação

$$\partial_r J_{(H)}^r = \frac{e^2}{4\pi} \varepsilon^{rt} \partial_r A_t. \quad (5.34)$$

Na região $(O) \in [r_h + \varepsilon, \infty]$, distante do horizonte, a corrente de gauge é conservada,

$$\partial_r J_{(O)}^r = 0. \quad (5.35)$$

Resolvendo as duas últimas equações, obtemos as correntes de gauge em cada região como sendo

$$J_{(O)}^r = c_O, \quad (5.36)$$

e

$$J_{(H)}^r = c_H + \frac{e^2}{4\pi} [A_t(r) - A_t(r_h)], \quad (5.37)$$

onde c_O e c_H são constantes de integração.

Analogamente ao procedimento usado no caso dos buracos negros neutros, vamos comparar os resultados acima com o que se obtém a partir da ação efetiva da TCETC. Neste caso, a ação efetiva deve ser invariante frente a uma transformação de gauge, i.e, devemos ter

$$-\delta W = \int d^2x \sqrt{|g|} \lambda \nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (5.38)$$

onde a corrente gauge J^μ é dada pela soma da parte conservada e da parte anômala,

$$J^\mu = [J_{(O)}^r \Theta(r_h) + J_{(H)}^r H(r)] \delta_r^\mu, \quad (5.39)$$

com δ_r^μ sendo o delta de Kronecker. Portanto, a variação total da ação efetiva é dada por

$$-\delta W = \int d^2x \lambda \left[\delta(r - r_h - \varepsilon) \left(J_{(O)}^r - J_{(H)}^r + \frac{e^2}{4\pi} A_t \right) + \partial_r \left(\frac{e^2}{4\pi} A_t H(r) \right) \right] = 0. \quad (5.40)$$

O último termo da equação (5.40) se cancela por efeitos quânticos dos modos *ingoing* classicamente irrelevantes. Assim, para que a invariância frente a transformações de gauge seja re-estabelecida, o coeficiente da função delta de Dirac deve **anular-se**, ou seja,

$$c_O - c_H + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r_h) = 0. \quad (5.41)$$

Deve-se fixar o valor do fluxo de corrente no horizonte de eventos. Como a corrente J^μ deve ser um invariante de gauge, é conveniente assumir que a corrente covariante dada por (2.73) seja nula no horizonte, $\left(\tilde{J}^r = J^r + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r) H(r) = 0 \right)$. Assim, temos que

$$c_H = + \frac{e^2}{4\pi} A_t(r_h). \quad (5.42)$$

Além deste fluxo de carga, temos ainda um fluxo de energia-momento devido a quebra da covariância geral na região próxima do horizonte (H). As formas da anomalia gravitacional consistente e covariante são as mesmas que no caso do buraco-negro de Schwarzschild, sendo dadas respectivamente por (5.10) e (5.14). Entretanto, a presença do campo elétrico no *background* faz com que o tensor de energia-momento não seja conservado nem mesmo na teoria clássica.

Sob uma transformação de difeomorfismo da forma $x \rightarrow x' - \xi$, a métrica varia por $\delta g^{\mu\nu} = -(\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu)$; o campo de gauge, por $\delta A_\mu = \xi^\mu \partial_\nu A_\mu + \xi^\nu \partial_\mu A_\nu$; o *dilaton*, por $\delta \Psi + \xi^\mu \partial_\mu \Psi$. Além disso, a ação dos campos da matéria, $S[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi, \Psi]$, é invariante, $\delta S[g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi, \Psi] = 0$. Portanto, a forma correta para as identidades de Ward considerando a presença da anomalia gravitacional é

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = F_{\mu\nu} J^\mu + A_\nu \nabla_\mu J^\mu - \frac{\partial_\nu \sigma}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \sigma} + \nabla_\mu N^\mu{}_\nu, \quad (5.43)$$

onde o tensor de energia-momento é definido por $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$, e a corrente associada

com o campo de gauge é dada por $J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta A_\mu}$.

Consideremos agora a componente tipo-tempo da identidade de Ward (5.43) na região (O) , que resulta

$$\partial_r T^r{}_{t(O)} = F_{rt} J^r_{(O)}. \quad (5.44)$$

Ao efetuarmos a integração nesta última equação obtemos o tensor de energia-momento nesta região

$$T^r{}_{t(O)} = a_O + c_O A_t(r). \quad (5.45)$$

Na região (H) temos

$$\partial_r T^r{}_{t(H)} = F_{rt} \tilde{J}^r_{(H)} + \partial_r N^r{}_{t}, \quad (5.46)$$

com, $F_{rt} \tilde{J}^r_{(H)} = F_{rt} J^r_{(H)} + A_t \nabla_\mu J^\mu_{(H)}$, e $\tilde{J}^r_{(H)} = c_O + \frac{e^2}{2\pi} A_t(r)$. Assim, fazendo a integração o tensor de energia-momento nesta região fica

$$T^r{}_{t(H)} = a_H + \int_{r_h}^r dr \partial_r \left(c_{(O)} A_t + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2 + N^r{}_{t} \right). \quad (5.47)$$

Finalmente, obtemos a variação total na ação efetiva:

$$\begin{aligned} -\delta W &= \int d^2x \sqrt{|g|} \xi^t \nabla_\mu T^\mu{}_{t}, \\ &= \int d^2x \xi^t \left[c_O \partial_r A_t(r) + \partial_r \left(\frac{e^2}{4\pi} A_t^2 + N^r{}_{t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(T^r{}_{t(O)} - T^r{}_{t(H)} + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2 + N^r{}_{t} \right) \delta(r - r_h - \varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde o primeiro termo é um efeito do campo elétrico presente no *background*, enquanto que o segundo termo deve ser cancelado por efeitos quânticos dos modos *ingoing* desprezados. Assim, para a invariância de difeomorfismo ser restaurada, o coeficiente da função delta de Dirac deve se anular,

$$a_O = a_H + \frac{e^2}{4\pi} A_t^2(r_h) - N^r{}_{t}(r_h). \quad (5.49)$$

Impondo a condição de que o tensor de energia-momento covariante, $\tilde{T}^\mu{}_\nu$, deve ser nulo no horizonte de eventos, obtemos

$$a_H = 2N^r{}_{t}(r_h) = \frac{\kappa^2}{24\pi}. \quad (5.50)$$

Portanto, o fluxo total de energia devido a produção de partículas carregadas pelo buraco

negro é dado por

$$a_0 = \frac{e^2}{4\pi} A_r^2(r_h) + \frac{\kappa^2}{48\pi}. \quad (5.51)$$

A forma específica desse fluxo para alguns buracos negros carregados é obtida a seguir.

5.4.1 Na Presença de um Buraco Negro de Reissner-Nordström

A análise apresentada na última seção aplica-se de imediato ao caso de um campo escalar carregado (e também sem carga) no espaço-tempo de Reissner-Nordström. A geometria esférica permite a decomposição do campos escalar $\phi(x)$ em termos as funções esféricas harmônicas, $\phi(t, r, \theta, \varphi) \sim R_{lm}(t, r) Y_l(\theta, \varphi)$, conforme resumido no Apêndice B. Após a redução dimensional, o espaço-tempo é descrito pela métrica $ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2$, com $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$, na presença de um potencial de gauge $\mathbf{A} = -\frac{Q}{r}\mathbf{dt}$ e do campo de dilaton $\Psi = r^2$. Então, repetindo os procedimentos descritos na Seção 5.3, obtemos que o fluxo da radiação de Hawking de acordo com um observador no infinito é dado por (cf. Eq. (5.51))

$$a_0 = \frac{e^2 Q^2}{4\pi r_h^2} + \frac{1}{48\pi} \left(\frac{M}{r_h^2} - \frac{Q^2}{r_h^3} \right)^2 = \frac{e^2 Q^2}{4\pi r_h^2} + \frac{1}{48\pi} \left(\frac{M^2}{r_h^4} - \frac{Q^4}{r_h^4} \right), \quad (5.52)$$

O segundo termo deste resultado concorda com o resultado da aplicação do método de Christensen e Fulling, obtido na Seção 4.5.2 (cf. Eq. (4.48)). O primeiro termo não aparece no resultado obtido através do método de Christensen e Fulling pois ele se deve a presença da anomalia de gauge que só surge se o campo for carregado. Porém, de acordo com o resultado de Hawking [5] este termo se deve a um potencial químico presente no *background* que contribui para a energia das partículas emitidas pelo buraco negro.

5.4.2 Na Presença de uma Black String/Brana Negra Carregada

Consideremos agora um campo escalar carregado $\phi(x)$, evoluindo no espaço-tempo de uma *black string* carregada [69], descrita na azSeção 3.3.2. Após fazermos a redução dimensional na ação $S_{livre}[\phi]$, que descreve a evolução dos campos da matéria, a evolução destes na região próxima ao horizonte de eventos pode ser descrita por por uma coleção

infinita de campos bidimensionais, para os quais a ação é,

$$S_{livre}[\phi] \simeq \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int dk \int dt dr r^2 R_m^*(k; t, r) \left[-\frac{1}{f(r)} \mathcal{D}_t^2 + f(r) \partial_r^2 \right] R_m(k; t, r), \quad (5.53)$$

onde $\mathcal{D}_t = \partial_t + ieA_t$, $f(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{4M}{r} + \frac{4Q^2}{r^2}$, e $A_t(r) = \frac{2Q}{r}$. O espaço-tempo onde estes campos evoluem é descrito pela métrica bidimensional $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2$, um campo de gauge $\mathbf{A} = -\frac{2Q}{r} \mathbf{dt}$, e por um dilaton $\Psi = r^2$.

Daí, seguindo os passos descritos na Seção 5.4 acima, encontramos que o fluxo de energia da radiação de Hawking devido ao *black string* carregado é dado por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4\pi} A_t^2(r_h) + \frac{1}{96\pi} \left(\frac{f'(r_h)^2}{2} \right) = \frac{1}{4\pi} A_t^2(r_h) + \frac{\kappa^2}{48\pi} \\ &= \frac{e^2 Q^2}{4\pi r_h^2} + \frac{1}{48\pi} \left(\frac{6M}{r_h^2} - \frac{8Q^2}{r_h^3} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Note que novamente surge um termo que depende da carga das partículas emitidas. Entretanto o outro termo desse fluxo de energia que não depende do fluxo de partículas carregadas é idêntico ao resultado encontrado pelo método de Christensen e Fulling modificado, conforme feito na Seção 4.6.

Capítulo 6

Considerações Finais

Na presente dissertação apresentamos um estudo sobre a radiação de Hawking, que consiste no efeito de evaporação de buracos negros. Tal efeito tem importância crucial no contexto da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos sendo considerado um dos efeitos que indiscutivelmente deve fazer parte das previsões feitas por uma Teoria de Gravidade Quântica ainda a ser formulada. O principal objetivo do presente trabalho consistiu numa revisão a respeito da relação entre a radiação de Hawking e o surgimento de anomalias na Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos, e do uso desta relação para a obtenção do tensor de energia-momento da radiação de Hawking através de métodos que utilizam o conhecimento prévio destas anomalias. Esta relação foi demonstrada pela primeira vez por Christensen e Fulling no final da década de setenta, quando estes conseguiram mostrar que no espaço-tempo bidimensional a radiação de Hawking emitida pelo buraco negro de Schwarzschild se deve inteiramente à presença da anomalia conforme do traço do tensor de energia-momento. A principal importância do trabalho de Christensen e Fulling está no fato de fornecer uma justificativa física para a anomalia de traço, descartando assim a hipótese de que seu surgimento se deva à inconsistências do método de regularização empregado para a remoção das divergências da teoria quântica efetiva. Recentemente Robinson e Wilczek apresentaram uma nova proposta para obter o fluxo de energia da radiação de Hawking empregando anomalias gravitacionais. Esta proposta motivou o surgimento de dezenas de artigos na área, pois uma extensão do método proposto inicialmente, que inclui ainda o uso de anomalias de gauge permitiu a aplicação do método para as mais diversas geometrias.

Nesta dissertação foram aplicados os métodos de Christensen e Fulling e de Robinson e Wilczek para calcular o tensor de energia-momento da radiação de Hawking de buracos negros em espaços-tempos assintoticamente Minkowski e assintoticamente anti-de Sitter.

No Capítulo 4, descrevemos o método de Christensen e Fulling fazendo uma generali-

zação deste para uma métrica que possibilita descrever espaços-tempos estáticos das mais diversas geometrias e topologias. Esta generalização tornou-se possível pelo fato de deixarmos a função horizonte sem a especificação dos parâmetros globais de massa e carga elétrica. Dessa forma conseguimos obter uma representação geral para o tensor de energia-momento em função da anomalia de traço e de duas constantes de integração. Após isto, especificamos os parâmetros globais de massa e de carga elétrica de forma a obtermos os buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström, e determinamos as constantes de integração por considerações físicas feitas sobre os valores esperados das componentes do tensor de energia-momento nos limites assintóticos, e por comparação com resultados conhecidos, obtendo resultados consistentes. Porém, quando especificamos os parâmetros globais da função horizonte de maneira a recuperarmos a geometria de buracos negros em espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter, encontramos inconsistências nos resultados previstos pelo método de Christensen e Fulling pois obtivemos que as constantes de integração apresentavam um termo que não é constante e que divergia no infinito. Tal inconsistência no resultado se deve ao fato de que a anomalia de traço do tensor de energia-momento, dada em termos dos invariantes de curvatura do espaço-tempo, diverge no infinito espacial. Este problema pode ser contornado como mostrado no final do Capítulo 4, ao observarmos que em espaços-tempos assintoticamente anti-de Sitter a teoria se torna anômala mesmo *sem* a presença do buraco negro. Assim, se subtrairmos do tensor de energia-momento a parte que corresponde à anomalia de traço na ausência do buraco negro, obtemos um resultado consistente com o previsto pela universalidade da radiação de Hawking. Entretanto, a subtração deste termo parece ser apenas um truque matemático, para o qual até o momento não encontramos interpretação física.

No Capítulo 5, estudamos o método proposto por Robinson e Wilczek, no qual ao invés de usar-se a anomalia conforme do traço do tensor de energia-momento, usa-se o conhecimento da anomalia gravitacional no caso de campos neutros e, no caso de campos carregados, emprega-se ainda a anomalia de gauge. Uma vez que, nesta abordagem, divide-se o espaço-tempo em dois setores, sendo que somente no setor próximo ao horizonte de eventos do buraco negro a teoria se torna anômala, e as constantes de integração são determinadas por condições de contorno sobre o horizonte de eventos, não é necessário fazer a análise das componentes do tensor de energia-momento no limite assintótico e, portanto, não surgem termos que divergem no infinito. Assim, os resultados obtidos através desse método para os buracos negros de Schwarzschild-anti-de Sitter e para a *black string* não apresentam inconsistências.

De uma forma geral, podemos fazer uma comparação entre os dois métodos apontando como vantagens no método de Robinson e Wilczek dois pontos principais: (i) o mé-

todo pode ser empregado para calcular a radiação de Hawking emitida por buracos negros em espaços-tempos que não são assintoticamente Minkowski, para os quais o método de Christensen e Fulling falha e precisa ser adaptado; (ii) pode-se considerar a evolução de qualquer tipo de campo seja ele vetorial, spinorial ou escalar enquanto que o método de Christensen e Fulling é aplicável somente para os campos cuja anomalia de traço seja conhecida *a priori*. Por outro lado, o método de Christensen e Fulling apresenta a vantagem de determinar todas as componentes do tensor de energia-momento, enquanto o método de Robinson e Wilczek apenas determina o fluxo de energia da radiação.

Na continuação do trabalho, resta-nos ainda fazer a interpretação física para o fato do traço do tensor de energia-momento não ser nulo para espaços-tempos assintoticamente de Sitter e anti-de Sitter, mesmo na ausência de buracos negros, e, assim, dar interpretação física para a adaptação do método de Christensen e Fulling feita no final do Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994).
- [2] L. H. Ford, (1997), arXiv:gr-qc/9707062.
- [3] T. Jacobson, (2003), arXiv:gr-qc/0308048.
- [4] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [5] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [6] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [7] S. W. Hawking and R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **314**, 529 (1970).
- [8] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25**, 152 (1972).
- [9] B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331 (1971).
- [10] S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344 (1971).
- [11] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [12] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **9**, 3292 (1974).
- [13] M. K. Parikh and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5042 (2000).
- [14] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).
- [15] A. Strominger and C. Vafa, *Physics Letters B* **379**, 99 (1996), arXiv:hep-th/9601029.
- [16] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **12**, 3077 (1975).
- [17] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13**, 191 (1976).
- [18] P. C. W. Davies, *Proc. Roy. Soc. (London)* , 499 (1977).
- [19] R. A. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory* (Oxford Science Publications, Oxford, England, 1996).
- [20] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **234**, 269 (1984).

- [21] M. J. Duff, Nucl. Phys.B **125**, 334 (1977).
- [22] D. M. Capper and M. J. Duff, Nuovo Cimento A Serie **23**, 173 (1974).
- [23] S. Deser, M. J. Duff, and C. J. Isham, Nuclear Physics B **111**, 45 (1976).
- [24] S. M. Christensen and S. A. Fulling, Phys. Rev. D **15**, 2088 (1977).
- [25] S. P. Robinson and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **95**, 011303 (2005), gr-qc/0502074.
- [26] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004).
- [27] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, UK., 2007).
- [28] C. Rovelli, Living Reviews in Relativity **1** (1998).
- [29] A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).
- [30] A. Ashtekar, Phys. Rev. D **36**, 1587 (1987).
- [31] C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **61**, 1155 (1988).
- [32] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **331**, 80 (1990).
- [33] L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
- [34] K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189 (1916), physics/9905030.
- [35] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics (Chs 1 - 10) and Relativistic Quantum Field Theory (Chs 10 - 19)*. (McGraw-Hill Book Company, New York, USA, 1965).
- [36] M. Kaku, *Quantum field theory: A Modern introduction* (Oxford University Press, New York, USA, 1993).
- [37] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, New York, USA, 1995).
- [38] S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850 (1973).
- [39] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **10**, 3194 (1974).
- [40] W. G. Unruh, Particle detectors and black holes, in *1st Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, pp. 527–536, 1977.
- [41] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **13**, 2720 (1976).
- [42] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

- [43] R. M. Wald, *Commun. Math. Phys.* **54**, 1 (1977).
- [44] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
- [45] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, *Physics Reports* **260**, 329 (1995).
- [46] K. Fujikawa and H. Suzuki, Oxford, UK: Clarendon (2004) 284 p.
- [47] W. A. Bardeen and B. Zumino, *Nucl. Phys. B* **244**, 421 (1984).
- [48] R. A. Bertlmann and E. Kohlprath, *Annals Phys.* **288**, 137 (2001), hep-th/0011067.
- [49] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, England, 1983).
- [50] P. K. Townsend, (1997), arXiv:gr-qc/9707012.
- [51] M. D. Kruskal, *Physical Review* **119**, 1743 (1960).
- [52] B. Carter, *Physics Letters* **21**, 423 (1966).
- [53] J. P. S. Lemos and V. T. Zanchin, *Phys. Rev. D* **54**, 3840 (1996).
- [54] V. T. Zanchin, A. Kleber, and J. P. S. Lemos, *Phys. Rev. D* **66**, 064022 (2002).
- [55] R. Garattini, *Classical and Quantum Gravity* **17**, 3335 (2000), arXiv:gr-qc/0006076.
- [56] R.-G. Cai and Y.-Z. Zhang, *Phys. Rev. D* **54**, 4891 (1996), gr-qc/9609065.
- [57] B. S. DeWitt, *Phys. Rept.* **19**, 295 (1975).
- [58] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D* **14**, 2490 (1976).
- [59] S. L. Adler, J. Lieberman, and Y. J. Ng, *Ann. Phys.* **106**, 279 (1977).
- [60] F. Englert, C. Truffin, and R. Gastmans, *Nucl. Phys. B* **117**, 407 (1976).
- [61] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B* **73**, 209 (1978).
- [62] M. R. Brown and A. C. Ottewill, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A389**, 379 (1983).
- [63] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 787 (2008).
- [64] E. Mottola and R. Vaulin, *Phys. Rev. D* **74**, 064004 (2006), gr-qc/0604051.
- [65] W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **15**, 3054 (1977).
- [66] R. Balbinot, S. Fagnocchi, A. Fabbri, S. Farese, and J. Navarro-Salas, *Phys. Rev. D* **70**, 064031 (2004).
- [67] S. Hemming and E. Keski-Vakkuri, *Phys. Rev. D* **64**, 044006 (2001).

- [68] X.-X. Zeng, K. Lin, and S.-Z. Yang, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 2533 (2008).
- [69] J.-J. Peng and S.-Q. Wu, *Phys. Lett. B* **661**, 300 (2008), arXiv:0801.0185.
- [70] J. D. Brown and J. York, James W., *Phys. Rev. D* **47**, 1407 (1993), gr-qc/9209012.
- [71] S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 151302 (2006).
- [72] S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, *Phys. Rev. D* **74**, 044017 (2006), hep-th/0606018.

Apêndice A

Invariantes de Curvatura dos Espaços-Tempos e o Traço do TEM

Neste apêndice apresentamos os tensores de Riemann, Ricci, o escalar de curvatura e os produtos destes que estão envolvidos no cálculo do traço anômalo do tensor de energia-momento das geometrias usadas neste trabalho, as quais são descritas pela métrica

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (Z^2(\theta)d\theta^2 + d\phi^2), \quad (\text{A.1})$$

onde a função horizonte $f(r)$ é dada por

$$f(r) = a + \alpha^2 r^2 - \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2}, \quad (\text{A.2})$$

sendo os parâmetros b e c proporcionais à massa e ao quadrado da carga elétrica, respectivamente, e α está relacionado com a constante cosmológica por $\alpha^2 = -\frac{3}{3}\Lambda$. A geometria das superfícies de t e r constantes é definida pela escolha da constante a , conforme mostrado na tabela A.1.

Tabela A.1: Dependência de $Z(\theta)$ com a

Geometria	a	$Z(\theta)$
Hiperbólica	-1	$\sinh \theta$
Planar	0	1
Esférica	1	$\sin \theta$

A.1 Os Símbolos de Christoffel

Os coeficientes de Christoffel são definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.3})$$

sendo simétricos por permutações de μ e ν ,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (\text{A.4})$$

Para a métrica (A.1) os coeficientes não nulos são dados na Tabela abaixo.

Tabela A.2: Símbolos de Christoffel

$\Gamma_{tr}^t = \frac{f'(r)}{2f(r)}$	$\Gamma_{tt}^r = \frac{f'(r)f(r)}{2}$	$\Gamma_{rr}^r = -\frac{f'(r)}{2f(r)}$	$\Gamma_{rr}^{\theta} = -rf(r)Z^2(\theta)$
$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -rf'(r)$	$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{\dot{Z}(\theta)}{Z(\theta)}$	$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r}$

A.2 Curvatura

A.2.1 Tensor de Riemann

O tensor de Riemann é definido por

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\eta}\Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda}. \quad (\text{A.5})$$

O qual pode ser escrito com os quatro índices covariantes

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = g_{\lambda\alpha}R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}, \quad (\text{A.6})$$

que satisfaz as seguintes propriedades

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = R_{\nu\sigma\lambda\mu}, \quad (\text{A.7})$$

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = -R_{\mu\lambda\nu\sigma} = -R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\lambda\sigma\nu}, \quad (\text{A.8})$$

e

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} + R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\lambda\nu\sigma\mu} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Ou ainda, com os quatro índices contravariantes

$$R^{\lambda\mu\nu\sigma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\gamma} R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}. \quad (\text{A.10})$$

As componentes do tensor de Riemann não nulas são dadas na Tabela A.3.

Tabela A.3: Tensor de Riemann

$R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}$	$R_{\lambda\mu\nu\sigma}$	$R^{\lambda\mu\nu\sigma}$
$R^t{}_{rtr} = -\frac{f''(r)}{2f(r)}$	$R_{trtr} = -\frac{f''(r)}{2}$	$R^t{}_{rtr} = -\frac{f''(r)}{2}$
$R^t{}_{\theta t\theta} = -\frac{rf'(r)Z(\theta)^2}{2}$	$R_{t\theta t\theta} = -\frac{rf(r)f'(\theta)Z(\theta)^2}{2}$	$R^{t\theta t\theta} = -\frac{f'(r)}{2r^3f(r)Z(\theta)^2}$
$R^t{}_{\varphi t\varphi} = -\frac{rf'(r)}{2}$	$R_{t\varphi t\varphi} = -\frac{rf(r)f'(r)}{2}$	$R^{t\varphi t\varphi} = -\frac{f'(r)}{2r^3f(r)}$
$R^r{}_{trr} = -\frac{f(r)f''(r)}{2}$	$R_{rttr} = -\frac{f''(r)}{2}$	$R^{rttr} = -\frac{f''(r)}{2}$
$R^r{}_{\theta\theta r} = \frac{rf'(r)Z(\theta)^2}{2}$	$R_{r\theta\theta r} = \frac{rf'(r)Z(\theta)^2}{2f(r)}$	$R^{r\theta\theta r} = \frac{f(r)f'(r)}{2r^3Z(\theta)^2}$
$R^r{}_{\varphi\varphi r} = \frac{rf'(r)}{2}$	$R_{r\varphi\varphi r} = \frac{rf'(r)}{2f(r)}$	$R^{r\varphi\varphi r} = \frac{f(r)f'(r)}{2r^3}$
$R^\theta{}_{t\theta} = -\frac{f(r)f'(r)}{2r}$	$R_{\theta t\theta} = -\frac{rf(r)f'(r)Z(\theta)^2}{2}$	$R^{\theta t\theta} = -\frac{f'(r)}{2r^3f(r)Z(\theta)^2}$
$R_{\theta r r\theta} = -\frac{f'(r)}{2rf(r)}$	$R_{\theta r r\theta} = -\frac{rf'(r)Z(\theta)^2}{2f(r)}$	$R^{\theta r r\theta} = -\frac{f(r)f'(r)}{2r^3Z(\theta)^2}$
$R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} = -f(r)$	$R_{\theta\varphi\varphi\theta} = r^2f(r)Z(\theta)^2$	$R^{\theta\varphi\varphi\theta} = \frac{f(r)}{r^6Z(\theta)^2}$
$R^\varphi{}_{t\varphi} = -\frac{f(r)f'(r)}{2r}$	$R_{\varphi t\varphi} = -\frac{rf(r)f'(r)}{2}$	$R^{\varphi t\varphi} = -\frac{f'(r)}{2r^3f(r)}$
$R^\varphi{}_{r\varphi r} = -\frac{f'(r)}{2rf(r)}$	$R_{\varphi r\varphi r} = -\frac{rf'(r)}{2f(r)}$	$R^{\varphi r\varphi r} = -\frac{f'(r)f(r)}{2r^3}$
$R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = -f(r)Z(\theta)^2$	$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -r^2f(r)Z(\theta)^2$	$R^{\varphi\theta\varphi\theta} = -\frac{f(r)}{r^6Z(\theta)^2}$

A.2.2 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci é obtido pela contração do primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (\text{A.11})$$

que é simétrico em μ e ν . As componentes não nulas do tensor de Ricci são apresentadas na Tabela A.4.

Tabela A.4: Tensor de Ricci

$R_{\mu\nu}$	$R^{\mu\nu}$
$R_{tt} = \frac{f(r)f'(r)}{r} + \frac{f(r)f''(r)}{2}$	$R^{tt} = \frac{f'(r)}{rf(r)} + \frac{f''(r)}{2f(r)}$
$R_{rr} = -\frac{f'(r)}{rf(r)} - \frac{f''(r)}{2f(r)}$	$R^{rr} = -\frac{f(r)f'(r)}{r} - \frac{f(r)f''(r)}{2}$
$R_{\theta\theta} = -Z^2(\theta)f(r) - rf'(r)Z^2(\theta)$	$R^{\theta\theta} = -\frac{f(r)}{r^4Z^2(\theta)} - \frac{f'(r)}{r^3Z^2(\theta)}$
$R_{\varphi\varphi} = -f(r) + rf'(r)$	$R^{\varphi\varphi} = -\frac{f(r)}{r^4} + \frac{f'(r)}{r^4}$

A.2.3 Escalar de Ricci

O escalar de Ricci ou escalar de curvatura é obtido pela contração do tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.12})$$

Para a métrica (A.1) é

$$R = -\frac{2f(r)}{r^2} - \frac{4f'(r)}{r} - f''(r). \quad (\text{A.13})$$

A.3 O Traço Anômalo do TEM

O traço Anômalo do tensor de energia-momento em termos dos invariantes geométricos do espaço-tempo foi obtida por Deser, Duff e Ishan [23], sendo dada por

$$\langle T_{\alpha}^{\alpha} \rangle = \beta F + \beta' \left(E - \frac{2}{3} \square R \right), \quad (\text{A.14})$$

onde β e β' são constantes que dependem do número e do tipo de campos considerados:

$$\beta = \frac{1}{120(4\pi)^4} (N_s + 6N_F + 12N_V) \quad (\text{A.15})$$

e

$$\beta' = -\frac{1}{360(4\pi)^4} (N_s + 11N_F + 62N_V), \quad (\text{A.16})$$

sendo N_s o número de campos escalares, N_F o número de férmions de Dirac e N_V o número de campos vetoriais. Os símbolos E e F representam quantidades que dependem dos tensores de curvatura, sendo dados por

$$E = R_{\lambda\mu\nu\sigma} R^{\lambda\mu\nu\sigma} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2, \quad (\text{A.17})$$

$$F = C_{\lambda\mu\nu\sigma} C^{\lambda\mu\nu\sigma} = R_{\lambda\mu\nu\sigma} R^{\lambda\mu\nu\sigma} - 2R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2, \quad (\text{A.18})$$

onde $C_{\lambda\mu\nu\sigma}$ é o tensor covariante de Weyl.

Para a métrica (A.1), os termos dos tensores de curvatura envolvidos no traço anômalo são

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} R^{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{4f(r)^2}{r^4} + \frac{4f'(r)^2}{r^2} + f''(r)^2, \quad (\text{A.19})$$

$$R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2f(r)^2}{r^4} + \frac{4f(r)f'(r)}{r^3} + \frac{4f'(r)^2}{r^2} + \frac{2f'(r)f''(r)}{r} + \frac{f''(r)^2}{2}, \quad (\text{A.20})$$

e

$$R^2 = \frac{4f(r)^2}{r^4} + \frac{16f(r)f'(r)}{r^3} + \frac{4f(r)f''(r)^2}{r^2} + \frac{16f'(r)^2}{r^2} + \frac{8f'(r)f''(r)}{r} + f''(r)^2. \quad (\text{A.21})$$

Portanto,

$$E = \frac{4f(r)f''(r)}{r^2} = \frac{4f'(r)^2}{r^2}, \quad (\text{A.22})$$

e

$$F = \frac{4f(r)^2}{3r^4} - \frac{8f(r)f'(r)}{r^3} + \frac{4f(r)f''(r)}{r^2} + \frac{4f'(r)^2}{r^2} - \frac{4f'(r)f''(r)}{r} + f''(r)^2. \quad (\text{A.23})$$

O d'Alembertiano do escalar de curvatura é dado por

$$\begin{aligned} \square R = & -\frac{4f(r)}{r^4} + \frac{8f(r)f'(r)}{r^3} - \frac{2f(r)f''(r)}{r^2} + \frac{2f'(r)^2}{r^2} + \\ & -\frac{6f(r)f'''(r)}{r} + \frac{4f'(r)f''(r)}{r} - f(r)f''''(r) - f'(r)f'''(r). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Assim, o traço anômalo do tensor de energia-momento é da forma

$$\langle T_{\alpha}^{\alpha} \rangle = -\frac{1}{360(4\pi)^2} \left[-\frac{4f(r)}{3r^4} + \frac{f(r)f'(r)}{3r^3} - \frac{4f'(r)^2}{3r^2} + \frac{4f(r)f''(r)}{3r^2} + \frac{4f(r)f'''(r)}{r} + \frac{20f'(r)f''(r)}{3r} + \frac{2f(r)f''''(r)}{3} + \frac{2f'(r)f'''(r)}{3} - f'(r)^2 \right]. \quad (\text{A.25})$$

Apêndice B

Equação de Onda Para o Campo Escalar em Espaços-Tempos Curvos

A evolução de um campo escalar de massa m_Φ minimamente acoplado ao campo gravitacional no espaço-tempo dado pela métrica (A.1) é descrita pela equação de Klein-Gordon,

$$\square\Phi = m_\Phi^2\Phi, \quad (\text{B.1})$$

com o d'Alembertiano dado por

$$\square \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right),$$

onde g é o determinante do tensor métrico.

No espaço-tempo dado pela métrica (A.1), a equação de Klein-Gordon para um campo $\Phi(x)$ resulta na forma

$$\left[-\frac{1}{f} \partial_t^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f \partial_r) + \frac{1}{r^2 Z(\theta)} \partial_\theta (Z(\theta) \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 Z(\theta)^2} \partial_\varphi^2 \right] \Phi(x) = m_\Phi^2 \Phi(x). \quad (\text{B.2})$$

A parte angular pode ser fatorada escrevendo o campo $\Phi(x)$ como o produto de duas funções

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{R(t, r)}{r} Y(\theta, \varphi).$$

Com essa fatoração e usando separação de variáveis obtemos duas equações diferenciais.

A parte angular é solução da equação

$$-\left[\frac{1}{Z(\theta)} \partial_\theta (Z(\theta) \partial_\theta) + \frac{1}{Z(\theta)^2} \partial_\varphi^2 \right] Y(\theta, \varphi) = \lambda Y(\theta, \varphi), \quad (\text{B.3})$$

λ é uma constante de separação. A função $R(t, r)$ satisfaz à equação

$$\partial_t^2 R(t, r) - f \left[(\partial_r f) \partial_r - \frac{\partial_r f}{r} + f \partial_r^2 - m_\Phi^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right] R(t, r) = 0, \quad (\text{B.4})$$

Fatorando a função $R(t, r)$, e resolvendo a parte temporal na forma $R(t, r) = e^{i\omega t} R(r)$, temos que a equação para a parte radial $R(r)$ fica

$$\left[(\partial_r f) \partial_r - \frac{\partial_r f}{r} + f \partial_r^2 - m_\Phi^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right] R(r) + \frac{\omega^2}{f} R(r) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Podemos ainda escrever essa equação em termos da coordenada tartaruga, $\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{f(r)}$,

$$\left[\frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - V_\lambda(r(r^*)) \right] R(r(r^*)) = 0, \quad (\text{B.6})$$

onde o potencial radial efetivo $V_\lambda(r(r^*))$ ao qual o campo está sujeito é

$$V_\lambda(r(r^*)) = f(r(r^*)) \left[\frac{\partial_r f}{r} + m_\Phi^2 + \frac{\lambda}{r^2} \right]. \quad (\text{B.7})$$

As soluções destas equações, Eqs. (B.3) e (B.5) dependem da forma das funções $Z(\theta)$ e $f(r)$, respectivamente. Alguns casos particulares são considerados a seguir.

B.1 Buracos Negros Esféricos

Fazem parte desta classe de buracos negros os que são descritos por métricas da forma geral (A.1) com $a = 1$, o que determina a geometria como sendo esférica, $Z(\theta) = \sin \theta$. Os parâmetros de massa e carga elétrica deste buraco negro são $b = 2M$ e $c = Q^2$. Portanto, a métrica é dada por

$$ds^2 = - \left(1 + \alpha^2 r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 + \alpha^2 r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\theta^2 + d\varphi^2). \quad (\text{B.8})$$

Para esta geometria tem-se $\lambda = l(l+1)$, sendo l um número inteiro não negativo. Neste caso, m é também um número inteiro limitado no intervalo $-l \leq m \leq l$. Daí temos que a função $Y(\theta, \varphi)$ corresponde a uma das funções harmônicas esféricas, e o campo escalar pode ser expandido na forma

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \int d\omega e^{-i\omega t} R_{lm}(r) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.9})$$

O potencial efetivo é dado por

$$V(r) = \left(1 + \alpha^2 r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left[m_{\Phi}^2 + 2\alpha^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} \right], \quad (\text{B.10})$$

o qual tem uma barreira infinita para $r \rightarrow \infty$. De fato, para valores grandes de r , o potencial é dado por

$$V(r \rightarrow \infty) \sim [2\alpha^2 + \alpha^2 l(l+1) + m_{\Phi}^2 + (2\alpha^4 + \alpha^2 m_{\Phi}^2) r^2], \quad (\text{B.11})$$

que diverge no limite $r \rightarrow \infty$. Pode-se dizer que o potencial apresenta uma barreira infinita nesse limite.

B.2 Brana Negra/Black String

Esta classe de buracos negro é caracterizada pela métrica (A.1) com $a = 0$, o que determina a geometria como sendo planar, $Z(\theta) = 1$ e portanto métrica é dada por

$$ds^2 = - \left(\alpha^2 r^2 - \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(\alpha^2 r^2 - \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2). \quad (\text{B.12})$$

A geometria da seção espacial para t e r fixos é plana e a topologia da mesma pode ser plana (brana negra, $-\infty < \theta, \varphi < \infty$), cilíndrica (corda negra/black string, $-\infty < \theta \leq \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), ou toroidal (toro plano negro, $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$). A relação exata entre os parâmetros de massa e de carga elétrica deste buraco negro dependem da topologia. No caso da corda negra, tem-se $b = 4M$ e $c = 4Q^2$. Com isso a equação angular (B.3) assume a forma

$$- \left(\partial_{\theta}^2 + \partial_{\varphi}^2 \right) Y(\theta, \varphi) = \lambda Y(\theta, \varphi). \quad (\text{B.13})$$

Fatorando esta equação na forma $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\phi(\varphi)$, encontra-se que as soluções para $\Theta(\theta)$ e $\phi(\varphi)$ são exponenciais complexas, $\Theta(\theta) \sim e^{ik\theta}$ e $\phi(\varphi) \sim e^{ip\varphi}$, onde k e p são tais que $k^2 + p^2 = \lambda$. Portanto, a função de onda $\phi(t, r, \theta, \varphi)$ pode ser expandida na forma

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} \int d\omega e^{-i\omega t} R_{kp}(r) e^{i(k\theta+p\varphi)}. \quad (\text{B.14})$$

Para topologia planar, k e p assumem valores na reta real e as somatórias indicam na verdade integrações nesses parâmetros. No caso da topologia cilíndrica, um dos parâmetro é um número inteiro, enquanto que o outro é um número real, com a somatória indicando uma integração. Finalmente, no caso da topologia toroidal, ambos os parâmetros k e p são discretos.

No presente caso, o potencial efetivo é dado por

$$V(r) = \left(\alpha^2 r^2 - \frac{4M}{r} + \frac{4Q^2}{r^2} \right) \left[m_{\Phi}^2 + 2\alpha^2 + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^2} + \frac{4M}{r^3} - \frac{8Q^2}{r^4} \right], \quad (\text{B.15})$$

o qual para grandes valores de r é aproximado por

$$V(r \rightarrow \infty) \sim [l(l+1)\alpha^2 + (2\alpha^4 + \alpha^2 m_{\Phi}^2) r^2]. \quad (\text{B.16})$$

Ou seja, o potencial tem uma barreira infinita no limite $r \rightarrow \infty$.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)