**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**Rogério Ferreira da Fonseca**

# A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**São Paulo**

**2010**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**Rogério Ferreira da Fonseca**

# A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de* ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori****.*

**São Paulo**

**2010**

*Banca Examinadora*

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** ____________________________________________ **Data:** ___________________

*Dedico este trabalho com grande carinho e respeito aos meus irmãos Robson, Rita e Rodrigo, às minhas queridas sobrinhas Yasmim, Tainá e Anna Claudia, aos meus amigos Euvaldo e Lídia, à minha amada esposa Andréa e, em especial, aos meus pais Alcides e Madalena. Junto a essa dedicatória seguem também minhas desculpas pelas ausências, pela minha falta de tempo e de humor em vários momentos deste percurso. Acrescento que sem a compreensão e o apoio incondicional de todos vocês seria impossível realizar este sonho e vencer mais uma etapa de minha vida. Certo de que todos vocês merecem muito mais que uma dedicatória, peço a Deus que permita que compartilhem de todas as minhas conquistas até o fim de minha humilde vida...*

# AGRADECIMENTOS


*À Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori, pela orientação, por sua amizade, paciência e dedicação, mas principalmente por mostrar o caminho na incansável busca pelo conhecimento, meu especial agradecimento.*

*Ao Professor Doutor Benedito Antonio Silva, pelas valiosas contribuições, tanto nas suas aulas quanto nas suas sugestões no exame de qualificação, e pela disponibilidade em participar da banca examinadora.*

*Ao Professor Doutor Marcos Vieira Teixeira, pelas valiosas contribuições no exame de qualificação e por sua gentileza e disponibilidade em participar da banca examinadora.*

*Ao Professor Doutor Antonio Carlos Brolezzi, pelas valiosas contribuições, no exame de qualificação e por sua gentileza e disponibilidade em participar da banca examinadora.*

*Em especial, ao Professor Doutor Michael Otte, pela importante participação no exame de qualificação, por suas brilhantes ideias, por suas sugestões, por seus esclarecimentos e principalmente pelo prazer de sua companhia em diversos almoços, mostrando-se sempre muito amigo e interessado em discutir a pesquisa, meu especial agradecimento.*

*Aos Professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, pela competência, dedicação e amizade inquestionáveis demonstradas durante as aulas, nos seminários, nas palestras e nos grupos de pesquisa.*

*Aos Professores do Departamento de Matemática da PUC/SP, pela valiosa amizade, compreensão e apoio profissional que foram demonstrados desde o início de minha carreira nesta instituição.*

*Aos Professores da área de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia campus São Paulo, pela amizade, pela acolhida e pelo apoio profissional que recebi desde o início de minha carreira no IFSP.*

*Aos amigos Armando Traldi Júnior, Alessandro Jacques Ribeiro, Carlos Ricardo Bifi, Jayme do Carmo Macedo Leme, Dermeval Santos Cerqueira e Rogério Marques Ribeiro, pela valiosa amizade, respeito, compreensão e apoio incondicional.*

*À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio e concessão da bolsa de estudos fundamental para a realização desta pesquisa de doutorado.*

*O Autor*

# RESUMO

Esta pesquisa é de cunho teórico e tem por alvo o estudo do conceito de número real. Nela são discutidas questões de ordem epistemológicas que cercam o conceito de número, em geral, e em particular o conceito de número real. As discussões estão fundamentadas no conceito de *complementaridade* no que concerne à análise de aspectos cognitivos e epistemológicos de conceitos matemáticos. O foco da pesquisa é investigar uma nova proposta de conceituação de número apresentada pelo matemático inglês John Horton Conway, da Universidade de Princeton, a qual possibilita responder, de forma única, à questão: o que é número?, indagação que mobilizou filósofos e epistemólogos da Matemática por muito tempo. Além disso, para esta teoria uma classe de jogos se apresenta como um modelo de interpretação ou aplicação da teoria, conceituando então número como um jogo. Aliás, o jogo tem sido um auxiliar na aprendizagem da Matemática. Podemos inferir com esta pesquisa que a teoria de Conway de forma complementar pode acrescentar novos elementos às abordagens clássicas da conceituação de número, apontar algumas de suas fragilidades e destacar a importância dos questionamentos epistemológicos para a evolução do conhecimento matemático. Outro resultado desta pesquisa é indicar a fertilidade do conceito de número que ainda abre novas fronteiras para a Matemática. É nosso julgamento que a Educação Matemática precisa e deve estar próxima dos avanços da Matemática.

**Palavras-chave:** Número real; Jogos; Conway, Complementaridade.

# ABSTRACT

This research is theoretical and has the goal of studying the concept of the real number. Epistemological issues are discussed surrounding the concept of number in general, and in particular the concept of real numbers. The discussions are based on the concept of *complementarity* as regards the analysis of cognitive and epistemological aspects of mathematical concepts. The focus of the research is to investigate a new proposal for the concept of numbers presented by the British mathematician John Horton Conway of Princeton University, which allows one to uniquely answer the question, “What is a number?”, which has long mobilized Mathematics philosophers and epistemologists. In addition, for this theory, a class of games is presented as a model for interpretation or application of the theory, thereby conceptualizing number as a game. Moreover, the game has assisted in learning Mathematics. We can conclude with this research that Conway’s theory, in a complementary manner, can add new elements to the classical approaches to the concept of number, can indicate some of its weaknesses, and can highlight the importance of epistemological questioning in the evolution of mathematical knowledge. Another result of this research is to indicate the fertility of the concept of number that opens new frontiers for Mathematics. It is our opinion that Mathematics Education needs to be and should be close to advances in Mathematics.

**Keywords:** Real number; Games; Conway, Complementarity.

# SUMÁRIO

# APRESENTAÇÃO

Esta tese foi desenvolvida no âmbito do grupo de pesquisa "O Elementar e o Superior em Matemática" (GPES), na linha de pesquisa "História, Epistemologia e Didática da Matemática", do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. O foco das pesquisas desse grupo é a inter-relação entre a Epistemologia, História e Didática da Matemática. É nesse contexto que este trabalho foi desenvolvido, em especial a Didática do Cálculo Diferencial e Integral, tendo como tema de estudo um dos conceitos basilares dessa área da Matemática, o conceito de número real.

O objetivo principal desta tese é o de estudar uma nova conceituação de número real, apresentada pelo matemático inglês Jonh Horton Conway[1] da Universidade de Princeton, com intuito de destacar potencialidades dessa conceituação perante questões levantadas sobre a conceituação de número real nas abordagens clássicas. Nelas o conjunto dos reais pode ser concebido como conjunto de classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais (completamento do $\mathbb{Q}$); como conjunto de cortes no conjunto dos racionais (Dedekind); ou a conceituação do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo (conceituação axiomática).

Vários matemáticos e filósofos incomodaram-se com as condições apresentadas por essas abordagens clássicas para responderem de forma única a questão: o que é número? e para satisfazerem de forma complementar a *intensionalidade* e a *extensionalidade* do conceito de número.

[1] John Horton Conway nasceu em Liverpool no dia 26 de dezembro de 1937. Desenvolveu seus estudos superiores em Cambridge, realizando seu doutorado em 1964. Fez importantes contribuições em Teoria dos Números, Teoria dos Grupos e Teoria dos Jogos Combinatórios. Em 1981 foi eleito membro da Royal Society. Atualmente é professor na Universidade de Princeton.

O estudo dessas temáticas foi iniciado em nossa dissertação de mestrado, intitulada *Número*: o conceito a partir de jogos (FONSECA, 2005). Nesta tese procuramos avançar e aprofundar o estudo anterior.

As análises aqui realizadas são orientadas pelo princípio da *complementaridade*, levando-se em conta que os objetos matemáticos têm natureza dual, isto é, por um lado podem ser caracterizados axiomaticamente e por outro, devem ser complementados por possíveis aplicações, ou seja, modelos que traduzam seus processos lógicos (propriedades) e possibilitem que suas relações sejam mais significativas. Assim, analisar um objeto matemático na perspectiva da *complementaridade* significa buscar identificar sua capacidade de não dissociar os aspectos que compõem essa dualidade.

Esta tese é então de cunho teórico, as análises efetuadas são de natureza epistemológica, e tem por foco o estudo da conceituação de número real. Não faz parte de seu escopo a realização de análises didáticas. Mas buscamos evidenciar algumas das possibilidades dessa teoria do ponto de vista cognitivo.

O relatório desta pesquisa é composto da introdução, cinco capítulos e as conclusões.

No Capítulo 1 são introduzidas de modo informal as ideias de Conway; são apresentados alguns números tanto por meio de um jogo da classe de jogos de Conway, o jogo Hackenbush, quanto por meio de conjuntos. O objetivo desse capítulo é motivar o estudo da teoria formal de Conway e evidenciar as bases utilizadas por Conway para definir número. A formalização da teoria é apresentada no Capítulo 2.

O Capítulo 3 é dedicado à apresentação dos elementos relativos ao princípio de *complementaridade.* Ainda nesse capítulo buscamos ressaltar de que forma as características *intensionais* e *extensionais* de objetos matemáticos se expressam para o conceito de número.

No Capítulo 4 discorremos sobre posições de correntes filosóficas e reflexões de matemáticos, como Frege e Russell acerca da pergunta “O que é numero?”, e discutimos essa questão tendo por base a Teoria de Conway.

No Capítulo 5 tecemos algumas considerações em relação às três abordagens clássicas dos números reais diante do pressuposto teórico de *complementaridade*. Buscamos apontar também as potencialidades da teoria de Conway perante as abordagens clássicas dos números reais.

Nas conclusões estão as análises epistemológicas da teoria de Conway relativamente aos inconvenientes das conceituações clássicas de número real e indicações de alguns desdobramentos para pesquisas futuras.

# INTRODUÇÃO

A Filosofia e a História da Matemática evidenciam as complexidades inerentes ao desenvolvimento do conceito de número. Desde quando os primeiros pensadores gregos e o místico Pitágoras (aproximadamente séc. V a.C.) inseriram os números como elementos de conhecimento do mundo, as entidades e os métodos fundamentais da Matemática ocuparam um papel destacado na Filosofia. Assim, as abordagens históricas ou epistemológicas dos números são essenciais para a compreensão e propostas de evolução da Matemática.

Os matemáticos que atuam em vários domínios têm, de uma forma ou outra, utilizado os números dos naturais aos transfinitos. É no desenvolvimento histórico dos diversos tipos de números que está a evolução das ideias matemáticas desde a Antiguidade.

Essa força da evolução histórica não implica tranquilidade, mas sim conflitos e complexidade. As transformações matemáticas, filosóficas e epistemológicas que envolvem a conceituação de número demonstram esse fato.

Muitas críticas foram feitas às concepções de número que tinham como fundamento a experiência e a intuição, por exemplo, as críticas apresentadas por Frege (1992) colocando em xeque as visões empiristas em relação ao conceito de número. Ele propôs uma teoria que buscava agregar elementos lógicos a certo tipo de conceitualismo, no qual os números eram vistos como entidades lógico-ideais, objetos do pensamento. Buscava eliminar o recurso à intuição e à linguagem comum, considerando de certa maneira que a Aritmética deveria ser um ramo da Lógica, dessa forma libertando-a de fundamentos baseados na experiência e intuição.

Ressalta-se uma questão que permanece implícita ou explicitamente ligada aos debates acerca da natureza dos números, a saber: “uma definição para o objeto matemático ‘número’ deve partir do pressuposto de que esse é puramente um objeto do pensamento ou deve basear-se nas coisas externas que fazem parte da nossa realidade sensível?” Essa é uma questão filosófica que permeia todo o desenvolvimento do conceito de número, e será abordada no quarto capítulo desta tese. Veremos que, de certa forma, as respostas apresentadas por matemáticos e filósofos acerca da existência dos números dão indícios de um debate em torno da primazia entre a Matemática Pura e a Aplicada.

Os números naturais, os racionais e alguns irracionais (como o pi) já eram conhecidos desde a Antiguidade. No entanto, os sistemas de números não foram tomados como extensão do campo dos naturais, e durante séculos os números não obtiveram um estatuto de objeto matemático.

Os números negativos, e os números complexos, os quais foram descobertos na Índia no século VI, e no século XVI (1545) por Cardano, respectivamente, durante muito tempo foram considerados duvidosos. Somente no século XIX é que eles vão adquirir o estatuto de número. A partir desse mesmo século os números reais foram logicamente bem fundamentados por alguns matemáticos como Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor.

É admitido desde o século XIX que o sistema de números reais é construído partindo-se dos números naturais, e, por construções sucessivas, obtêm-se os inteiros, os racionais e finalmente os números reais.

As conceituações clássicas dos números reais (cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e a abordagem axiomática) apresentam inconvenientes epistemológicos e filosóficos, que mereceram discussões.

Para Frege (1992, p. 30), a Matemática deveria sofrer uma revisão crítica a respeito de seus fundamentos; ele afirmava que os números negativos e os números irracionais deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, e isso requeria discutir a natureza e a definição de tais números.

A partir das críticas de Frege mostrou-se claramente que o caminho construtivo tradicional não era suficiente para incluir todos os números. A continuidade dos números reais, por exemplo, teve que ser introduzida por meio de um axioma. Constatada essa problemática na segunda metade do século XIX, começou-se a pensar em fundamentos axiomáticos para os números.

Entre as mudanças necessárias para a axiomatização dos números, destaca-se a compreensão dos axiomas, que deviam transformar-se de verdades objetivas e intuitivamente claras para premissas hipotéticas do pensamento; não havia mais a necessidade de atribuir conteúdo intuitivo aos conceitos utilizados, pois tais conceitos teriam o seu papel determinado pelos axiomas da teoria e deveriam expressar-se em termos de relações e equações.

Acrescenta-se às mudanças exigidas sobre o caráter dos axiomas a do raciocínio lógico. Na Ciência Aristotélica a lógica estava sempre ligada ou relacionada à Geometria. Até o início do século XIX acreditava-se que a Aritmética não podia ter axiomas, pois eles não tinham lugar nas ciências formais.

Nas obras dos lógicos revolucionários do século XIX, como Bolzano, Grassmann, De Morgan, Russell, Peirce ou Frege, a lógica é interpretada em termos da atividade semiótica e da linguagem em especial.

Como consequência, a noção de objeto matemático também necessitava de uma mudança, e a axiomatização formal no sentido de Hilbert e Peano teve que ser completada por um pensamento pautado em modelos.

Objetos matemáticos podem ser vistos como elementos de um modelo, ou seja, de um mundo “artificial”. As dificuldades para conceituar número (como os números negativos ou irracionais) podem estar relacionadas ao concretismo ou empirismo no pensamento cotidiano. É preciso criar “mundos artificiais”, modelos para fornecer um conteúdo adequado.

A ausência de uma conceituação para número real que o apresente de forma única e que garanta a *complementaridade* dos aspectos *extensional* e *intensional* desse conceito torna as críticas dos filósofos às conceituações clássicas atuais e pertinentes.

Um desafio que se põe à Matemática é justamente o desenvolvimento de teorias que possam ser concebidas axiomaticamente e complementadas por modelos, aplicações ou interpretações.

A Matemática não é um formalismo vazio, e também não trata de objetos empíricos e concretos, mas precisa de um conteúdo criado por meio de modelos de vários tipos. O plano de Gauss dos números imaginários foi um primeiro exemplo histórico representativo dessa necessidade. É também o caso dos números surreais[2] de Conway, números esses que encontram em uma classe de jogos um novo modelo para os números reais.

A teoria de Conway (2001) possibilita a construção dos números de forma única, dos naturais aos transfinitos e pode ser realizada por meio de conjuntos e de algumas classes de jogos. Assim, a teoria é constituída por um par, de um lado temos uma caracterização axiomática e de outro temos os modelos (os jogos) que fornecem uma aplicabilidade da teoria e explicitam propriedades que constituem a conceituação dos números.

As conceituações clássicas dos números reais apresentam inconvenientes epistemológicos e filosóficos, por exemplo, a impossibilidade de responder a questão “O que é número?” e a construção dos números de forma única, que até então permaneciam sem encaminhamento.

Por volta, de 1960, surgem novas ideias. A proposta de Robinson, por exemplo, a qual apresenta um corpo ordenado de números ditos “não *standard*” que estende o corpo ordenado dos números reais com a inclusão dos números infinitamente pequenos e infinitamente grandes. E finalmente a teoria de Conway, que apresenta número dos naturais aos transfinitos, de uma forma única e sua conceituação, é apresentada tanto a partir de uma classe de jogos (garantindo o caráter *extensional*) quanto por meio da teoria dos conjuntos (garantindo seu caráter *intensional*). É ao estudo dessa teoria e certas características epistemológicas desta que nos dedicamos nesta tese.

[2] Número surreal é todo número que pode ser criado a partir da teoria de Conway, com a qual também é possível criar números reais e transfinitos. Esses números podem ser representados por conjuntos ou por configurações de uma classe de jogos. Por volta de 1974, o matemático Donald E. Knuth chamou os números de Conway de números surreais; posteriormente o próprio Conway começou a utilizar essa designação.

Diante deste contexto buscamos explorar uma nova teoria para abordar os números reais, propondo a reflexão e discussão a respeito de suas potencialidades perante as abordagens clássicas, tendo como pressuposto teórico a noção de *complementaridade*.

## Algumas considerações a respeito dos procedimentos metodológicos

Os procedimentos metodológicos para realização desta pesquisa baseiam-se principalmente no estudo de referências bibliográficas pertinentes à teoria de John H. Conway, à Filosofia da Matemática, a livros de Análise Matemática e a artigos científicos de Filosofia ou Educação Matemática, que abordam o conceito de número.

Trata-se de uma pesquisa de cunho teórico, pois nosso estudo não utiliza experiências, dados ou fatos empíricos. Buscamos desenvolver a construção de uma rede de conceitos e argumentos organizados de forma coerente.

Entre os propósitos deste estudo busca-se explorar uma nova teoria, ou seja, uma nova conceituação de número real, sendo para isso de fundamental importância estabelecer relação desta teoria com as abordagens clássicas dos números reais, o que nos levou a explorar os cortes de Dedekind, as classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais e a abordagem axiomática. Tais abordagens encontram-se nos anexos desta tese.

Aprofundamos nossos estudos a respeito da noção de *complementaridade* para posteriormente tecer considerações a respeito das abordagens clássicas dos números reais e suas potencialidades diante do referencial teórico e da teoria de Conway.

A pesquisa está fundamentada no conceito de *complementaridade* no que concerne à análise de aspectos cognitivos e epistemológicos de conceitos matemáticos. A noção de *complementaridade* é relevante, em particular, para qualquer estudo das fundamentações epistemológicas da Educação Matemática (OTTE, 2003b, p. 205).

Com o intuito de apresentar uma possibilidade de resposta à questão, O que é número?, discorremos sobre correntes filosóficas e suas posições em relação à natureza dos números. Para aceitar uma resposta a essa questão, é fundamental considerar as respostas apresentadas por filósofos e matemáticos acerca da natureza do número. O estudo sobre os debates em torno desta questão podem indicar a insuficiência de tais respostas e uma certa dicotomia em torno da natureza do número.

Realizamos inicialmente o estudo e a exploração da teoria de Conway. Escolhemos para esta pesquisa o jogo Hackenbush que pertence à classe de jogos de Conway. Nossa opção por esse jogo se deu pelo fato de que toda configuração desse jogo corresponde a um número, e isso não ocorre com todos os jogos de Conway, em outras palavras, há outros tipos de jogos nos quais alguma configuração pode não corresponder a um número. Veremos um exemplo disso no Capítulo 2.

Organizamos inicialmente uma apresentação informal dos jogos e mostramos alguns exemplos de associação número/jogo com o intuito de familiarizar o leitor com a teoria de Conway.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO ÀS IDEIAS DE CONWAY

Neste capítulo apresentamos de modo informal as ideias de Conway, introduzindo sua conceituação de número, e a associação que ele faz desse conceito com um jogo. O objetivo é familiarizar o leitor com essas noções. A teoria formal é tema do capítulo 2.

No primeiro item estão algumas informações sobre a noção de corte definida por Conway como generalização da noção de corte estabelecida por Dedekind. Ambos se utilizam dessa noção para conceituar número. No item 2 é indicado, também de modo informal, como Conway associa jogo/número e são apresentados alguns exemplos dessa associação.

### 1.1 A noção de número de Conway como generalização dos cortes de Dedekind

A conceituação de número proposta por J. H. Conway merece o qualificativo de nova não apenas em função do tempo em que foi apresentada, mas pelos avanços epistemológicos que ela possibilita.

Ela é mais recente que a de Robinson, década de 1970, e, como veremos nesta tese, oferece respostas às questões colocadas pelos filósofos a respeito da constituição do conceito de número, por exemplo, “o que é número?”, abrange os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número e evita os inconvenientes da construção dos números reais passo a passo, como nas abordagens clássicas.

Conway conceitua número utilizando a noção de corte, generalizando a definição de Dedekind, e também emprega como recurso uma classe especial de jogos e a teoria dos conjuntos.

A noção de corte de Conway é generalização da noção de Dedekind na medida em que prescinde do conjunto dos racionais como ponto de partida, abrangendo todos os números “grandes” e “pequenos”: os números reais como 0, 1,..., n, -1, 1/2, $\sqrt{2}$, $\pi$,...; os números transfinitos como ω (o primeiro ordinal infinito); e também os números infinitesimais como $1/\omega$. A definição de ordem, no conjunto dos cortes, é conseguida tomando como modelos dos “cortes generalizados” uma classe especial de jogos.

O sistema de números definido por Conway recebe a denominação de “Números surreais” (denominação dada pela primeira vez por Donald Knuth), e segundo ele próprio nesse sistema todo número tem nome próprio e é único. Nosso interesse está, particularmente, no conjunto dos números reais.

Conway chama a atenção para o fato de o método de Dedekind construir os números reais a partir dos racionais, lembrando que antes deles também Eudoxo assim se conduz no quinto livro de Euclides. E que essa construção é obtida dividindo o conjunto dos racionais em dois conjuntos *E* (esquerdo) e *D* (direito) não vazios e de tal modo que nenhum número do conjunto *E* seja maior que algum número do conjunto *D*. Um número real então será o corte nos racionais obtidos com esses dois conjuntos. O corte é indicado por {*E*, *D*}. Um novo número irá aparecer quando *E* e *D* não possuírem elemento extremo.

Conway critica essa forma de construir os reais, que necessita construir antes os racionais. Seu argumento é que os racionais são reconstruídos como certos cortes de Dedekind, e que a distinção entre o “antigo” e o “novo” racional parece artificial, mas é essencial (CONWAY, 2001, p. 4).

O método de Conway, generalização de Dedekind, constrói **No** uma classe mais ampla de números, os Números Surreais. **No** é mais ampla na medida em que inclui os números reais, os transfinitos e os infinitesimais, e até mesmo os complexos, isto é, **No** é a classe de todos os números.

Vejamos como Conway generaliza o método de Dedekind. Em primeiro lugar considera duas classes de números *E* (classe da esquerda) e *D* (classe da direita). Impõe a essas classes a condição de que nenhum elemento da classe *E* seja maior ou igual que algum elemento da classe *D*. Então define número como o conjunto cujos elementos são as duas classes *E* e *D*, ou seja, o conjunto $\{E \mid D\}$.

A definição de Conway para um número x = $\{E \mid D\}$ supõe que as classes *E* e *D* sejam classes de números definidos anteriormente a x. Ou seja, a construção dos números se dá por recorrência. Vejamos como isso ocorre.

O conjunto vazio é utilizado para construir o primeiro número $\{\varnothing \mid \varnothing\}$. É evidente que tal conjunto de classes define um número. Esse número é o zero, isto é, $\{\varnothing \mid \varnothing\} = 0$. A partir dele obtêm-se outros números encontrando-se suas duas classes: a da esquerda e a da direita. O número 1, por exemplo, será o número $\{\{0\} \mid \varnothing\}$, o número 2, o número $\{\{0,1\} \mid \varnothing\}$, o número 3, o número $\{\{0,1,2\} \mid \varnothing\}$, e, assim por diante, obtêm-se todos os números inteiros. Os demais números racionais e irracionais também têm sua representação, porém não faremos referência aqui, neste momento. A seguir, mostraremos como os números são associados a jogos.

## 1.2 Um número é um jogo

Neste item introduzimos, informalmente, a relação número/jogo elaborada por Conway. Ele considera determinadas classes de jogos, aquelas que satisfazem certas condições. A classe de jogos Hackenbush é uma que se encaixa nas classes de jogos de Conway. Essa classe é derivada do conhecido jogo NIM regido pela teoria matemática elaborada por Bouton (1901). Para esta tese escolhemos uma versão da classe de jogos Hackenbush. Na sequência, apresentamos o jogo que utilizaremos aqui por meio de algumas jogadas. Expomos também alguns números associados a jogos.

O jogo Hackenbush aqui exposto satisfaz as seguintes condições: a) há apenas dois jogadores; b) um deles é ganhador; c) o jogo é jogado finitamente. Além disso, o jogo é jogado considerando-se "jogadas ótimas" (jogadas que maximizem as chances do jogador).

Essa versão do jogo Hackenbush é composta por peças coloridas, azuis e brancas, e suas regras são as seguintes: O jogador *A* deve retirar peças de cor azul, enquanto o jogador *B* retira peças de cor branca. A configuração de um jogo deve ser tal que as peças estejam sobrepostas e uma delas conectada a uma linha horizontal.

Os jogadores jogam alternadamente. Cada jogador deve retirar somente uma peça da cor que lhe é atribuída. Se uma peça for retirada, serão apagadas automaticamente as peças que estiverem sobrepostas a ela. Perderá o jogo aquele jogador que primeiro ficar sem peças de sua cor para retirar. Na Figura 1 estão indicados quatro exemplos de jogos Hackenbush.

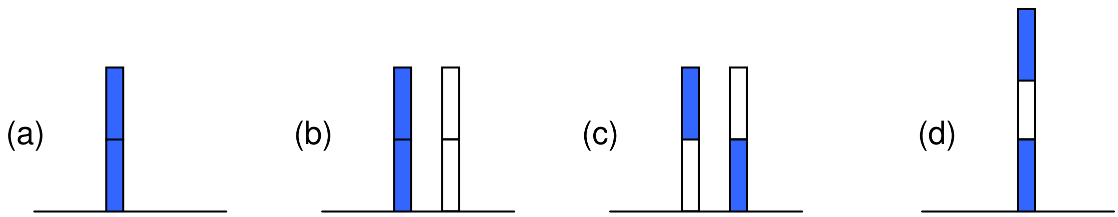



**Figura 1.** Exemplos de jogos Hackenbush.

Por exemplo, no jogo (a) da Figura 1 somente o jogador *A* tem possibilidades de jogada; sendo assim, ele ganha independentemente de quem inicie o jogo.

No jogo (b) como podemos ver, a situação é diferente da anterior, pois os dois jogadores têm possibilidades de jogadas, como segue: se o jogador *A* iniciar a partida retirando a peça azul mais distante da linha, *B* poderá retirar uma peça branca também mais distante da linha. Então *A* terá uma única peça para retirar e *B* ganhará o jogo. Se o jogador *B* iniciar a partida, poderá utilizar uma estratégia análoga à anterior, e nessas condições o jogador *A* vencerá independentemente das jogadas de *B*. Nesse caso, quem começa perde.

No jogo (c) ocorrerá a mesma situação descrita logo acima, ou seja, quem começa perde. No exemplo (d) acontece o seguinte: se o jogador *A* iniciar a partida, ele retira a peça azul que está conectada à linha apagando automaticamente as peças que estão sobrepostas a ela. Nesse caso, o jogador *A* ganhará imediatamente o jogo, visto que *B* não terá possibilidade de retirar nenhuma peça. Se o jogador *B* iniciar o jogo, ele irá retirar a única peça branca e consequentemente apagará a peça azul sobreposta a ela. E o jogador *A* também vencerá, pois ainda terá uma possibilidade de jogada. Ou seja, o jogador *A* sempre ganha. A seguir, indicaremos alguns jogos específicos e os números a eles associados.

### 1.2.1 Jogo zero/número zero

Um jogo zero é aquele em que o jogador que inicia a partida perde, ou seja, o jogo em que quem começa perde. A seguir estão indicados alguns jogos zero.

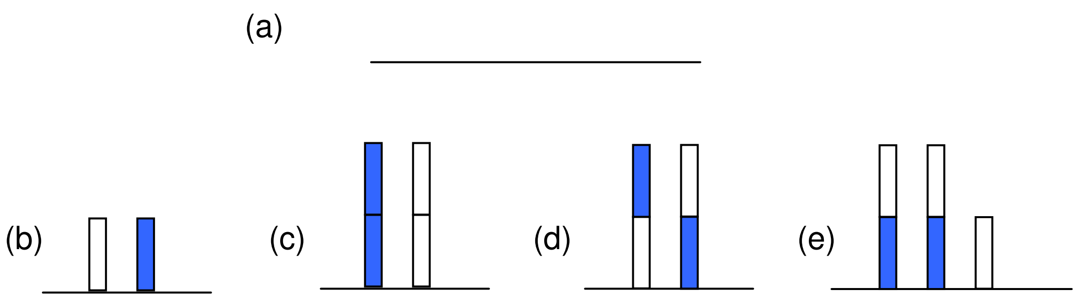



**Figura 2.** Jogos Hackenbush de valor zero.

Conway associa o jogo zero ao número zero. O jogo zero de acordo com a configuração (a) indicada na Figura 2 é associado ao número zero representado por $\{\varnothing|\varnothing\}$. Esse é o primeiro número construído por Conway e uma das representações do número zero. O conjunto vazio do lado esquerdo da barra indica a ausência de jogadas para o jogador *A*, enquanto o vazio do lado direito representa a ausência de jogadas para o jogador *B*.

Para construir novos números é necessário definir a seguinte relação de ordem no conjunto dos jogos: um jogo é positivo (ou maior que zero) se o jogador *A* ganha independentemente de quem comece a partida. De modo análogo, quando a vantagem for do jogador *B*, isto é, quando *B* ganha independentemente de quem inicia a partida, o jogo é negativo (ou menor que zero).

Assim, a associação entre jogo zero e número zero está efetivada. Passemos a outros números.

### 1.2.2 Jogos inteiros/números inteiros

Inicialmente vamos indicar como um determinado jogo J é associado a um número inteiro x, apontando como se obtêm os elementos das classes *E* e *D* que definem o número x a ele associado. Isso é feito por recorrência, assim: cada vez que um jogador retira uma das peças, o jogo J se reduz a outro jogo J' cujo número associado é x'. Esse número x' será um elemento da classe *E* ou *D* de x, dependendo se o jogador que retirou a peça for o jogador *A* ou o *B*, respectivamente.

Na Figura 3 abaixo estão alguns exemplos de jogos e os respectivos números inteiros associados a cada um deles. Os jogos são indicados pela configuração das peças e o número a ele associado está indicado abaixo da linha horizontal. Os números 0, 1 e -1 dispostos ao lado de cada peça (na vertical) são os números associados aos jogos a que se reduzem quando a respectiva peça é retirada. Os números 0, 1 e -1 são, como dito anteriormente, em cada caso, elementos das classes *E* e *D* do número 1, 2, -1 e -2.

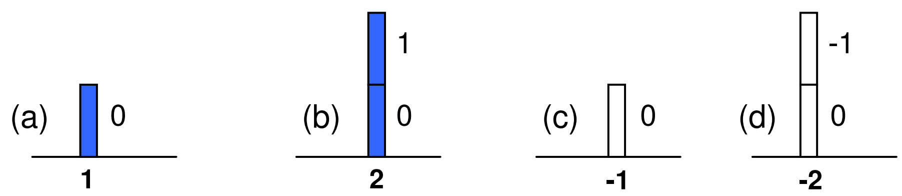



**Figura 3.** Jogos/números 1, 2, -1 e -2.

Passamos a detalhar cada caso:

Jogo (a): o jogo é constituído de apenas uma peça azul. Nesse jogo apenas o jogador *A* tem peça para retirar. Quando essa peça é retirada, o jogo se reduz ao jogo zero. O jogador que retirou a peça foi o jogador *A*, então o número zero será elemento da classe esquerda *E* de definição do número x associado ao jogo (a). O jogador *B* não tem peças para retirar e então a classe direita *D* de definição de x é a classe vazia. Portanto, o número x associado ao jogo (a) é o número $\{\{0\}|\varnothing\} = 1$. Ou seja, o jogo com apenas uma peça azul (a) é o jogo 1 e o número associado a ele é o número 1.

O jogo (b) é o jogo 2, e o número associado a ele é o número $\{\{0,1\}|\varnothing\} = 2$.

O jogo (c) é constituído apenas de uma peça branca. Não há, portanto nenhuma peça para o jogador *A* retirar, o que implica *E* ser vazia. E a classe *D* será composta pelo zero, pois, quando o jogador *B* retira a peça branca, o jogo (c) é reduzido ao jogo nulo. O número x associado ao jogo (c) é $\{\varnothing|\{0\}\}$. Mostremos que $\{\varnothing|\{0\}$ é o número -1. De fato: ele é negativo, pois é associado a um jogo negativo. (O jogador *B* sempre ganha). E, definindo-se a soma de dois jogos J e J' como um jogo J" (J+J'=J"), tal que as peças de J sejam colocadas ao lado das peças de J' e apoiadas na linha horizontal, temos que 1+ (c) = 0, como no jogo (a) na Figura 4 logo abaixo. E assim $\{\varnothing|\{0\}\} = -1$. Analogamente obtém-se o número $-2 = \{\varnothing|\{-1, 0\}\}$.


**Figura 4.** Números 1, -1, 2 e -2.

Dois números x e –x cuja soma é zero são ditos números opostos. A Figura 5 reúne as configurações dos jogos 1, 2, 3, 4 e seus opostos.

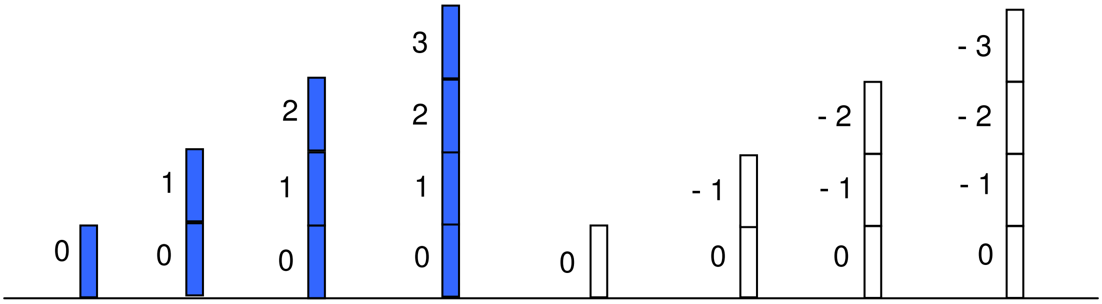



**Figura 5.** Exemplos de números inteiros

De uma maneira geral, o número inteiro positivo n é definido como n={{n-1}|∅}. Todos os números inteiros são construídos de forma semelhante.

### 1.2.3 Jogos racionais/números racionais

Vamos agora analisar um novo jogo indicado na Figura 6.

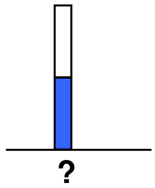


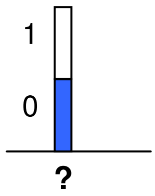

**Figura 6.** Um novo número.

Verifiquemos que número está associado a ele. De fato ocorre que:

(1) Existem jogadas possíveis para os dois jogadores;

(2) É um jogo positivo, pois o jogador *A* tem vantagem, e em consequência o número associado a ele é um número positivo.

(3) Nesse jogo, apesar de a vantagem ser do jogador *A*, o jogador *B* tem uma possibilidade de jogada. Sua representação por meio de conjuntos é {{0}|{1}}, visto que:




(4) Utilizando soma de jogos, obtemos o jogo (b) na Figura 7. Entretanto verifica-se que não se trata de um jogo zero, pois nesse caso a vantagem é do jogador *B*. Tentamos uma nova possibilidade jogando com (c). Concluimos que o jogo (c) na Figura 7 é um jogo zero.

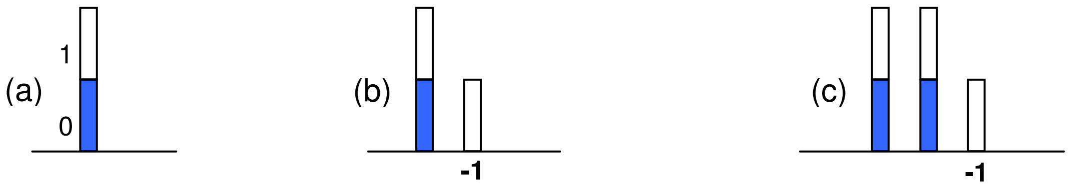



**Figura 7.** Construção do número 1/2.

A configuração do jogo (c) pode ser representada pela equação $2x + (-1) = 0$, cuja solução é 1/2.

Ou seja, o jogo (a) na Figura 7 corresponde ao número $\{\{0\}|\{1\}\}$, que é o número 1/2. O seu oposto é obtido por um jogo resultante da inversão das jogadas de *A* por *B*. O resultado é o número $-1/2 = \{\{-1\}|\{0\}\}$.

Outros números racionais podem ser construídos a partir desses e de outros números construídos anteriormente.

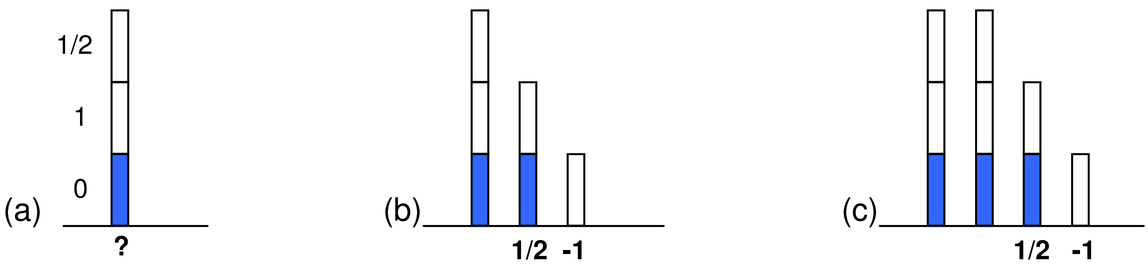



**Figura 8.** Construção do número 1/4.

No jogo (a) da Figura 8, a vantagem é do jogador *A*, portanto tal jogo está associado a um número positivo. O jogador *B* tem duas possibilidades de jogadas, e pode ser representado por {{0}|{1/2, 1}} ou {{0}|{1/2}}.

Uma tentativa nos leva a construir a soma de jogos, como em (b), obtendo-se um jogo em que a vantagem é do jogador *B*, logo não nulo. Uma nova tentativa pode ser feita com o jogo (c), cuja soma resulta em um jogo no qual quem começa perde, ou seja, um jogo zero. Assim o novo número associado ao jogo (a) na Figura 8 é solução da equação: $2x + 1/2 + (-1) = 0$, ou seja, $x = 1/4$. Então 1/4 = {{0}|{1/2, 1}} ou simplesmente 1/4 = {{0}|{1/2}}. E, –1/4 = {{–1/2}|{0}}.

Vamos construir mais um número jogando o jogo (a) da Figura 9. Com raciocínio análogo e seguindo as mesmas estratégias de comparação utilizadas nas situações anteriores, podemos compor o jogo (b) na Fig. 9.

Jogando o jogo (b), conclui-se que se trata de um jogo zero. Portanto, pode-se utilizar a seguinte equação: $2x + 1/4 + 1/2 + (-1) = 0$ e obter sua solução $x = 1/8$.

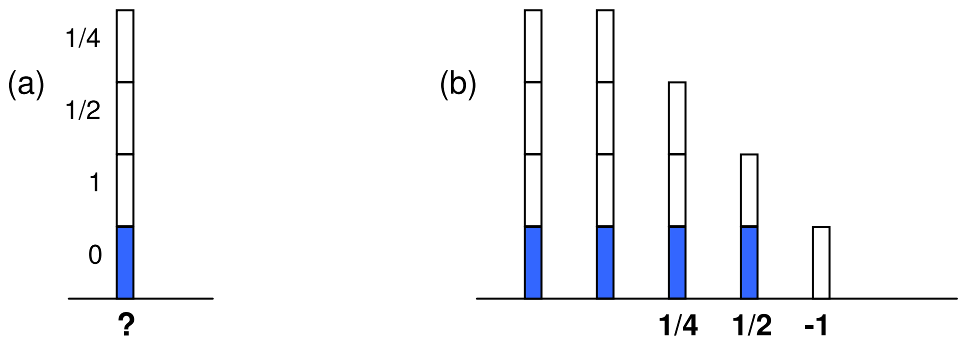
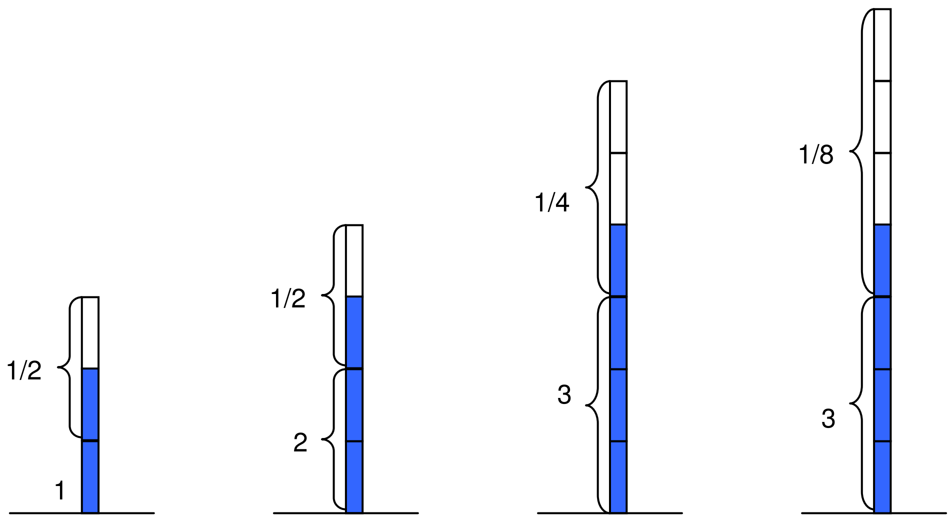



**Figura 9.** Construção do número 1/8.

Conclui-se que ao jogo (a) da Figura 9 está associado o número 1/8. Utilizando a notação de Conway, temos 1/8 = {{0}|{1/4, 1/2, 1}} ou simplesmente 1/8 = {{0}|{1/4}}. Novamente invertendo as jogadas de *A* por *B*, temos o número – 1/8 = {{–1/4}|{0}}.

Se continuarmos acrescentando peças brancas sobre a peça azul no jogo (a) da Figura 9, o jogador *B* terá mais possibilidades de jogadas; no entanto, a vantagem continuará sendo do jogador *A*. Com tal processo poderemos construir números racionais diádicos na forma $\frac{1}{2^n}$; se invertermos as chances do jogador *A* por *B*, construiremos os seus opostos $-\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Se a vantagem for de *A*, então n é a quantidade de peças brancas; porém, se a vantagem for de *B*, então n será a quantidade de peças azuis.

Além disso, podemos construir números racionais diádicos na forma $\frac{m}{2^n}$ e respectivamente $-\left(\frac{m}{2^n}\right)$. Para isso basta construir novos números por meio de jogos já conhecidos (números construídos anteriormente), acrescentando peças azuis (possibilidades de jogadas para A) à base dos jogos correspondentes aos números na forma $\frac{1}{2^n}$. Vejamos alguns exemplos:




$1\ 1/2 = \frac{3}{2}$ $\quad 2\ 1/2 = \frac{5}{2}$ $\quad 3\ 1/4 = \frac{13}{4}$ $\quad 3\ 1/8 = \frac{25}{8}$

3/2 = {{0, 1}|{2}} ou 3/2 = {{1}|{2}};

5/2 = {{0, 1, 2}|{3}} ou 5/2 = {{2}|{3}};

13/4 = {{0,1, 2, 3}|{7/2, 4}} ou 13/4 = {{3}|{7/2}};

25/8 = {{0, 1, 2, 3}|{13/4, 7/2, 4}} ou 25/8 = {{3}|{13/4}}

Construiremos agora outros números. Anteriormente acrescentamos peças brancas ao jogo associado ao número 1/2. Agora acrescentaremos peças azuis, aumentando, dessa forma, as possibilidades de jogadas de *A*. Observemos o jogo (a) na Figura 10:

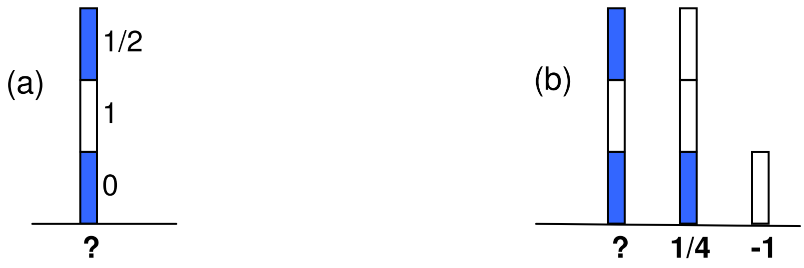



**Figura 10.** Construção do número 3/4.

Inicialmente, verificamos que no jogo (a) da Figura 10, o jogador *A* tem vantagem sobre *B*; isso nos leva a concluir que se trata de um número positivo. Comparando tal jogo com o jogo (a) da Figura 7, notamos que o jogador *A* tem mais uma possibilidade de jogada. Esse número pode ser representado da seguinte forma: {{0, 1/2}|{1}} ou {{1/2}|{1}}.

Agora devemos jogar, fazer comparações e verificar se o jogo (b) da Figura 10 é ou não um jogo zero. Analisando a jogada ótima de cada jogador, concluímos que se trata de um jogo zero; por conseguinte, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + 1/4 + (-1) = 0 \rightarrow x = 3/4.$$

Logo, o jogo (a) da Figura 10 corresponde ao número 3/4. Assim, 3/4={{1/2}|{1}}. Se invertermos as possibilidades de jogadas de *A* por *B*, teremos o número – 3/4. E ainda – 3/4 = {{– 1}|{– 1/2}}.

Vamos acrescentar ao jogo (a) da Figura 10 mais uma possibilidade ao jogador *A*. Observe o jogo (a) na Figura 11. Que número será esse?

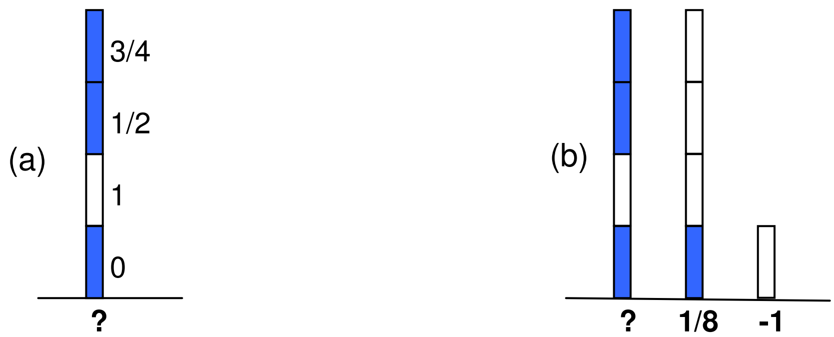



**Figura 11.** Construção do número 7/8.

É certo que sua representação é: {{0, 1/2, 3/4}|{1}} ou {{3/4}|{1}}.

Novamente faremos comparações com os jogos (ou números) que já conhecemos. Jogando, podemos concluir que o jogo (b) na Figura 11 é um jogo zero, ou seja, quem começa perde. Escrevemos então a seguinte equação:

$$x + 1/8 + (-1) = 0 \rightarrow x = 7/8.$$

Logo, o jogo (a) na Figura 11 corresponde ao número 7/8 e 7/8 = {{3/4}|{1}}.

Vamos novamente acrescentar mais uma possibilidade ao jogador *A*, conforme o jogo (a) na Figura 12 e construir um novo número.

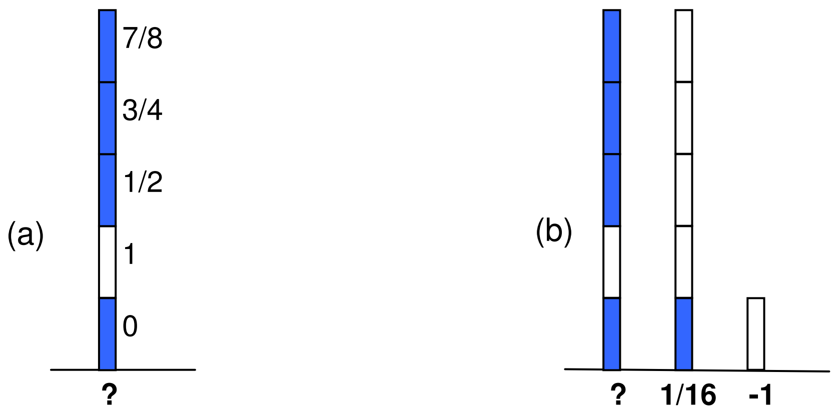



**Figura 12.** Construção do número 15/16.

O jogo (a) na Figura 12 pode ser representado assim: {{0, 1/2, 3/4, 7/8}|{1}} ou {{7/8}|{1}}.

Comparando tal jogo com outros já conhecidos chegamos ao jogo (b) na Figura 12; devemos agora verificar se esse último é ou não um jogo zero. Novamente, por meio do jogo, podemos concluir que o jogo (b) é um jogo zero; portanto, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + 1/16 + (-1) = 0 \rightarrow x = 15/16.$$

E concluir que o jogo (a) na Figura 12 corresponde ao número 15/16 e também que $15/16 = \{\{7/8\}|\{1\}\}$.

Se a essa configuração continuarmos acrescentando peças azuis, isto é, se aumentarmos cada vez mais as possibilidades de jogadas de A, os números associados são escritos na forma $(1 - 1/2^{n+1})$, com n = 1, 2, 3,..., sendo n a quantidade de peças azuis (possibilidades do jogador *A*), sobrepostas à peça branca. Além disso, invertendo as peças (trocando as possibilidades de jogadas) de modo que na configuração resultante a vantagem seja do jogador B, os números associados serão os opostos dos primeiros.

Voltemos ao jogo (a) na Figura 10, ou seja, ao jogo associado ao número 3/4. Que número será associado a um jogo em que, em vez de acrescentarmos peças azuis, acrescentarmos peças brancas. Em outras palavras, vamos aumentar as possibilidades do jogador B, conforme o jogo (a) da Figura 13.

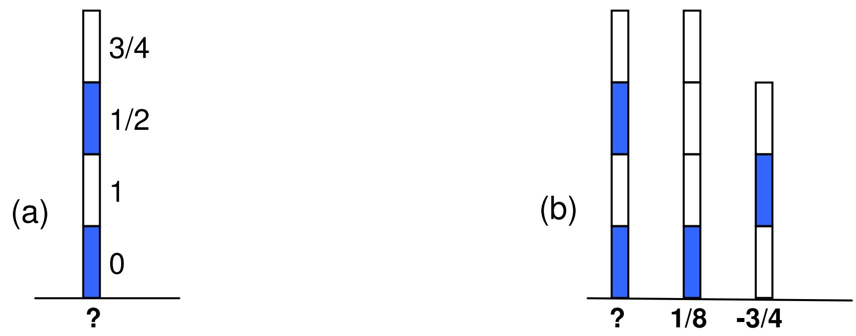



**Figura 13.** Construção do número 5/8.

Para dar continuidade à obtenção de novos números racionais, vamos sistematizar a relação "maior que" entre dois jogos. Essa relação será definida assim: Sejam J e J' dois jogos, jogando-se o jogo composto por J com –J' (jogo oposto de J'), temos que: Se ganhar o jogador A, independentemente de quem comece, teremos, então, J > J' visto que J+(¬J') é positivo. Se ganhar o jogador B independentemente de quem comece, teremos, então, J < J' visto que J+(¬J') é negativo. Se, independentemente de quem comece, o *segundo* jogador sempre ganhar, teremos J = J' visto que J+(¬J') será um jogo zero.

Em particular, considerando um jogo positivo J composto por peças azuis e brancas, se ao jogo J acrescentarmos peças brancas sobrepondo-as nas peças que compõem J (aumentando possibilidades de jogadas para *B*), teremos um novo jogo J' de tal forma que J' < J. Agora, se, em vez de acrescentarmos peças brancas, acrescentarmos peças azuis ao jogo J, sobrepondo-as nas peças que compõem J, teremos um novo jogo J'' de tal forma que J'' > J, pois *A* terá mais possibilidades de jogadas. Comparando-se jogos, pode-se descobrir que número está associado a um jogo dado e, além disso, podemos ordenar todos os números.

Vamos utilizar a comparação entre jogos para descobrir que número corresponde ao jogo (a) na Figura 13. Vamos analisar a situação e refletir sobre as possibilidades que temos: deve ser um número menor que 3/4, pois aumentamos uma possibilidade ao jogador *B* em relação ao jogo (a) na Figura 10; sabemos também que deve ser um número maior que 1/2, pois, se compararmos ao jogo (a) na Figura 7, verificaremos que o jogador *A* tem uma possibilidade a mais. Esse número pode ser representado por: {{0, 1/2}|{3/4, 1}} ou {{1/2}|{3/4}}.

Logo, o número procurado é maior que 1/2 e menor que 3/4. Isso quer dizer que poderemos utilizar o número – 3/4 para tentar obter um jogo zero. Isso nos leva ao jogo (b) na Figura 13 para decidirmos "jogando e comparando" se ele representa ou não um jogo zero.

Examinando o jogo (b) na Figura 13, uma questão emerge com naturalidade: como concluir que devemos utilizar o número 1/8? A essa pergunta podemos responder jogando e comparando os jogos e os números. Dissemos anteriormente que devemos construir novos números a partir daqueles que já conhecemos; simbolicamente temos 1/2 < x < 3/4. Se utilizássemos 1/2, teríamos 1/2 + 1/2 = 1; 1 é maior que 3/4. Se utilizássemos o número 1/4, teríamos 1/4 +

1/2 = 3/4; resta-nos então tentar o número 1/8 e verificar se o jogo (b) é ou não um jogo zero.

Analisando o jogo (b), concluímos que se trata de um jogo zero; logo, podemos escrever a seguinte equação: $x + 1/8 + (-3/4) = 0 \rightarrow x = 5/8$. Portanto, o jogo (a) na Figura 13 corresponde ao número 5/8. Assim, $5/8 = \{\{1/2\} | \{3/4\}\}$.

Até o momento não associamos nenhum jogo a números racionais como 1/3 ou aos números irracionais. Um dos motivos para isso é que para associarmos jogos a tais números admitiremos jogos Hackenbush que tenham configuração infinita de peças. É importante ressaltar que tais jogos também satisfazem as regras iniciais. Mesmo considerando infinitas peças para os jogadores, trata-se de um jogo que pode ser jogado finitamente, visto que, a partir do primeiro deslocamento feito por um dos jogadores, serão apagadas todas as peças sobrepostas à peça retirada, tornando o jogo finito.

Salientamos também que na teoria de Conway tais números são construídos a partir dos números diádicos, e contam com um processo infinito.

De acordo com Conway (1999, p. 299), o conjunto "{*a, b, c,...* | *d, e, f,...*} define o número *mais simples* estritamente superior a todos os números *a, b, c,...* e estritamente inferior a todos os números *d, e, f,...*", tal definição, associada à regra elaborada por Elwin Berlekamp,[3] permite estabelecer a correspondência entre números reais e o jogo Hackenbush. No próximo capítulo veremos o significado de número "mais simples", segundo Conway.

A regra elaborada por Berlekamp é a seguinte: o primeiro par de peças de cores distintas que aparecerem contando de baixo para cima representará a "vírgula binária", as peças azuis e brancas que seguem este par são os dígitos 1 e 0, respectivamente, que aparecem à direita da vírgula, sendo ainda adicionado um último 1 no caso em que a configuração de peças que compõem o jogo for finita. A parte inteira é igual ao *número de peças* que aparecem antes do par que representa a vírgula.

[3] Elwyn Berlekamp nasceu em Dover, Ohio, nos Estados Unidos, em 6 de setembro de 1940. É professor emérito de Matemática de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação na Universidade da Califórnia, Berkeley, desde 1971. É conhecido por seus trabalhos na Teoria de Informação e na Teoria dos Jogos Combinatórios. Com John Horton Conway e Richard K. Guy, escreveu a coletânea de livros *Winning Ways for Your Mathematical Plays*.

Vejamos alguns exemplos. O jogo associado ao número racional 1/3 tem uma configuração infinita e periódica, conforme indicado na Figura 14. Em notação binária, o numero 1/3 é representado por 0,010101..., e por meio de conjuntos da seguinte forma:

1/3 = {0,01; 0,0101; 0,010101; ... | ...; 0,0101011; 0,0111; 0,011; 0,1}

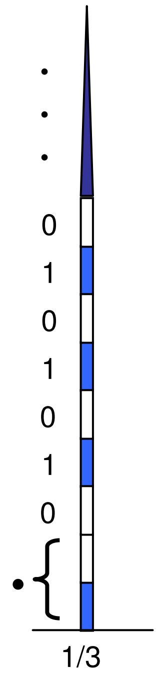



**Figura 14.** Jogo Hackenbush correspondente ao número 1/3.

Apenas como ilustração apresentamos um número diádico associado a um jogo de acordo com a regra de Berlekamp. Tomemos como exemplo o número 15/8 cuja representação binária é 1,111. Tal número corresponde ao jogo indicado na Figura 15. E pode ser representado por meio de conjuntos da seguinte forma:

15/8 = {1,110 | 1,11101}

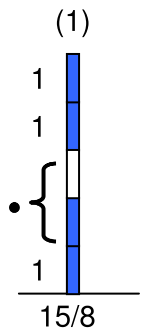



**Figura 15.** Jogo Hackenbush correspondente ao número 15/8.

### 1.2.4 Alguns exemplos de números irracionais

Como sabemos, os números irracionais têm representação binária infinita e não periódica, e podemos utilizar a regra de Berlekamp para associar jogos aos números irracionais. Vejamos alguns exemplos.

A representação do número irracional $\pi$ em notação binária é 11,001001000011111101101...; como sabemos, tal representação é infinita e não periódica. Esse número corresponde ao jogo indicado na Figura 16. Temos ainda $\pi = \{11{,}001;\ 11{,}001001;\ 11{,}00100100001;\ \ldots \mid \ldots;\ 11{,}0011;\ 11{,}01;\ 11{,}1\}$

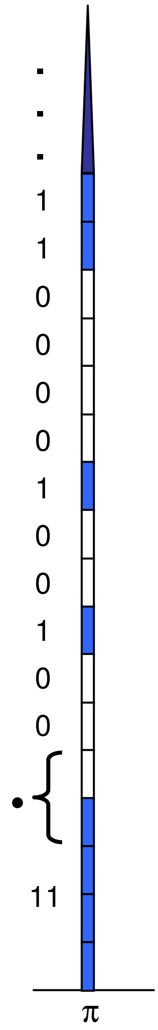



**Figura 16.** Jogo associado ao número π.

O mesmo acontece com o número irracional *e*, cuja representação em notação binária é 10,101101..., e por meio de conjuntos como segue:

$$e = \{10,101;\ 10,1011;\ 10,101101;\ \ldots \mid \ldots;\ 10,11001;\ 10,1101;\ 10,11\}$$

Tal número corresponde ao jogo indicado na Figura 17.

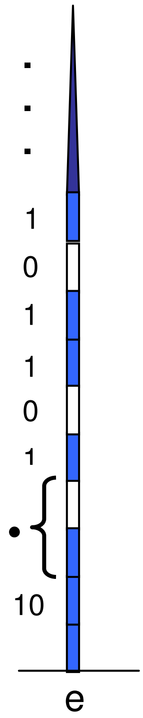



**Figura 17.** Jogo associado ao número irracional ***e***.

Finalizando este capítulo, apresentamos mais um exemplo de número irracional conhecido desde a antiguidade assim como o número π. Falamos do número √2 cuja representação binária é 1,01010001.... E que pode ser representado por meio de conjunto de seguinte forma:

$$\sqrt{2} = \{1{,}01;\ 1{,}0101;\ 1{,}01010001;\ \ldots \mid \ldots;\ 1{,}01011;\ 1{,}1011;\ 1{,}1\}$$

Este número irracional está associado ao jogo indicado na Figura 18.

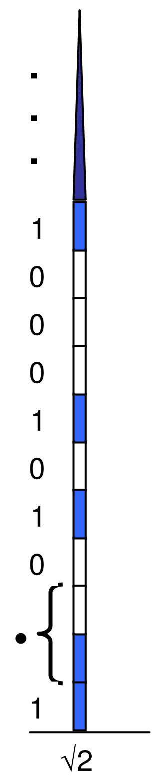



**Figura 18.** Jogo associado ao número irracional √2.

Até aqui apresentamos informalmente as ideias que envolvem a teoria de Conway, mostramos a interpretação de alguns números por meio de uma classe específica de jogos e suas representações por meio de conjuntos.

Ressaltamos que a abordagem de Conway é uma generalização dos cortes de Dedekind. Com o intuito de mostrar de que forma foi realizada a generalização dos cortes, no início do próximo capítulo faremos algumas considerações comparando as premissas utilizadas por Conway e por Dedekind, e apresentaremos a teoria de Conway.

# CAPÍTULO 2

## A TEORIA DE CONWAY SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO E JOGO

Neste capítulo apresentamos a teoria de Conway. Orientamo-nos pela exposição realizada por Hermes (1998), e, por se tratar de constituição de uma teoria matemática, foi necessário seguir passo a passo o que está apresentado no referido livro.

De forma introdutória estão algumas considerações sobre a ideia geradora do trabalho de Conway, qual seja a de generalização dos cortes de Dedekind. No desenvolvimento do capítulo são formalizadas as noções de jogo e depois de número, e a relação entre elas. Observamos que no livro de Conway (2001) é tratado primeiramente o conceito de número, e depois de jogo.

### 2.1 A ideia geradora do trabalho de Conway, a generalização dos cortes de Dedekind

Dedekind constrói os números reais a partir de cortes no conjunto dos números racionais.

Conway se inspira nessa ideia de Dedekind, generalizando-a de tal modo a não ter que pressupor a existência dos racionais. E também toma os jogos como modelo.

Retomando a noção de corte de Dedekind: Um corte de Dedekind é um conjunto formado por um par de conjuntos (A, B), com A e B conjuntos de números racionais. Esse par satisfaz quatro condições, que são:

D1) Todo número racional pertence a um e a somente um dos conjuntos A ou B.

D2) Os conjuntos A e B não vazios.

D3) Qualquer elemento do conjunto A é estritamente inferior a qualquer elemento do conjunto B.

D4) O conjunto A não possui maior elemento.

O axioma D4) está na teoria de Dedekind para impedir que um número real seja representado por dois cortes distintos, como é o caso dos dois pares abaixo:

(A sendo o conjunto dos números racionais menores ou iguais a um número racional *r*, e B sendo o conjunto dos números racionais maiores que *r*);
(A sendo o conjunto dos números racionais menores que *r* e B sendo o conjunto dos números racionais maiores ou iguais a *r*);

Agora, se essa exigência de representação única para um número for abandonada, então o axioma D4) passaria a ser supérfluo.

Na teoria de Dedekind, em virtude do axioma D2) o par de conjuntos: ($\mathbb{Q}$, $\emptyset$) não é um corte. Mas para Conway esse par poderia ser pensado intuitivamente como um número positivo infinito, que nesse caso seria único. E pensou ainda que os conflitos pudessem ser evitados se na definição de corte (generalizada) fosse admitida uma infinidade de números positivos infinitamente grandes.

O axioma D1) garante a definição do conjunto A, de maneira única, pelo conjunto B. Conway pensou, em um primeiro momento, que pareceria assim mais simples operar apenas com o conjunto da esquerda, o conjunto A, e abandonar a ideia de definir número real como um par de conjuntos. No entanto, mesmo pensando dessa forma, ele mantém a ideia de par, e generaliza aquela de Dedekind.

Ele considera que é o par de conjuntos que engendra o número, e não o contrário, como propôs Dedekind.

Com esse pensamento, Conway rejeita o axioma D1) abrindo a possibilidade de definir um número em uma infinidade de maneiras.

A ordem total satisfeita pelo corpo dos reais é garantida pelo axioma D3). Conway precisa dessa propriedade, e para tanto ele transforma o axioma D3) no axioma D3$^*$) enunciando-o assim:

D3*) Nenhum elemento do conjunto B é menor ou igual a algum elemento do conjunto A.

Em resumo, Conway, assim como Dedekind, define os números como um par de conjuntos {A, B}. O par de Dedekind é um par de números racionais admitidos, já construídos anteriormente. O par de Conway é um par de conjuntos de números que contêm todos os números já construídos por seu método.

Em ambos os casos, a formação do par é limitada pela restrição indicada em D3*). Para Dedekind os axiomas D3) ou D3*) fazem sentido, pois $\mathbb{Q}$ é um conjunto ordenado. Na generalização de Conway é preciso supor que uma relação de ordem, entre os elementos de A e B, esteja definida. É aí que Conway vai introduzir a noção de jogo para obter essa relação de ordem desejada. Veremos a seguir como isso pode ser feito.

## 2.2 Os jogos de Conway

Conway introduz a noção de jogo de Conway pelo axioma:

(JC) Se x e y são dois jogos de Conway, então o par (x, y) é um jogo de Conway.

O axioma (JC) permite definir um jogo de Conway por recorrência.

Levando-se em conta que para construir um jogo de Conway (x, y) os elementos x e y precisam ter sido construídos anteriormente como jogos de Conway (utilizaremos a notação $\{x|y\}$ para indicar o par (x, y)), poder-se-ia pensar que fosse impossível construir jogos de Conway com (JC). Mas não é verdade, porque o para de conjuntos vazios constituem um jogo de Conway, pois satisfaz a condição de x e de y serem jogos de Conway. E então pelo axioma (JC) o par $\{\varnothing | \varnothing\}$ é um jogo de Conway. Mais adiante veremos que esse jogo será identificado ao número 0. Ou seja, $0 = \{\varnothing | \varnothing\}$

Pelo (JC) podem-se obter agora três novos jogos de Conway $\{\{0\}\emptyset,\emptyset | \varnothing\}$, $\{\varnothing | \{0\}\}$, $\{\{0\} | \{0\}\}$.

E, ainda, são jogos de Conway:

$1 = \{\{0\} | \varnothing\}$; $2 = \{\{0, 1\} | \varnothing\}$; $3 = \{\{0,1, 2\} | \varnothing\}$;

$n+1 = \{\{0, 1, 2,..., n\} | \varnothing\}$; $\omega = \{\{0, 1, 2, 3,... \} | \varnothing\}$.

A seguir, apresentamos a teoria dos jogos conveniente para os jogos de Conway.

## 2.3 Os jogos

Neste estudo, um jogo é aquele jogado por duas pessoas que indicaremos por E e D, respectivamente o jogador *da esquerda* e o jogador *da direita*. É um jogo em que se decide, antes do início do jogo, qual dos dois jogadores vai começar a jogar. E na sequência os jogadores jogam alternadamente. A cada jogada é realizado um deslocamento, isto é, uma ação que leva algo de uma posição à outra.

Em um jogo é definido conjunto S de posições, e entre elas é distinguida uma posição inicial, $s_0$.

Em S definem-se duas relações binárias: $\rightarrow_E$ e $\rightarrow_D$ assim:

$s \rightarrow_E s'$, quando **E** efetua um deslocamento de s para s'. Obs. Se não existe s' tal que $s \rightarrow_E s'$, significa que E não pode jogar, e então **E** perde a partida. Analogamente define-se $\rightarrow_D$. A partir delas define-se sobre S uma relação $\rightarrow$ da seguinte forma:

(i) $s \to s'$ se e somente $s \to_E s'$ ou $s \to_D s'$

Um jogo deve satisfazer uma condição dita de finitude, isto é, a condição de não existir nenhuma sequência infinita de posições $(s_n)_{n \in N}$, tal que $s_n \to s_{n+1}$, qualquer que seja $n \in N$. E assim não pode haver jogo empatado, nem haver uma partida em que se retorne à posição inicial. Assim, um jogo é definido por uma quádrupla $(S, s_0, \to_E, \to_D)$.

Exemplos:

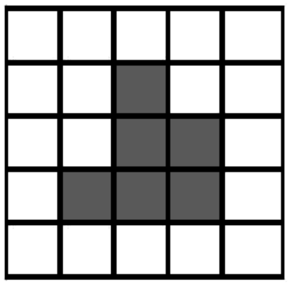
(a) Uma versão do jogo NIM: Uma posição inicial desse jogo é uma m-upla qualquer de números naturais $(N_1, N_2, \ldots, N_m)$; as posições são m-uplas de naturais $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ com $n_i < N_i$, (i = 1, 2,..., m); as relações $\to_E$, $\to_D$ são tais que: duas posições quaisquer $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ e $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ estão na relação $\to_E$ ou $\to_D$ se e somente se $n_i = p_i$ para todos os índices com exceção de um, por exemplo, o j, para o qual $p_j < n_j$. Assim, o jogador que tiver na vez é obrigado retirar qualquer coisa de uma das m-uplas restantes.

Um caso particular desse jogo NIM: Seja S = (10, 5, 20, 30) o conjunto de posições do jogo, supondo que o jogador E inicie o jogo (nesse caso a posição inicial $s_0$ refere-se ao jogador E), e realiza um deslocamento para a posição s' = (0, 5, 20, 30). Na sequência, é a vez do jogador D jogar, ele realiza um deslocamento para a posição s'' = (0, 0, 20, 30). Novamente E joga e temos a posição s''' = (0, 0, 20, 1), em seguida D joga deixando a posição s'''' (0, 0, 1, 1), o jogador E realiza sua jogada deixando a posição s''''' = (0, 0, 1, 0) para o jogador D, que por sua vez faz a jogada para s'''''' = (0, 0, 0, 0) e ganha a partida, dado que o jogador E não tem mais nenhuma possibilidade de jogada.

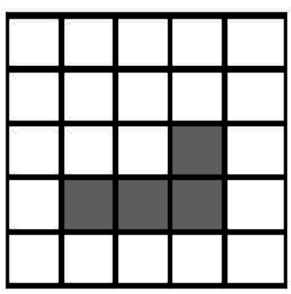
(b) Todo jogo de Conway x pode ser considerado como um jogo. A posição inicial $s_0$ é identificada como x. Partindo da posição inicial, as posições são os elementos à esquerda e à direita de x, depois seus vizinhos à esquerda e à direita, e assim por diante. Todas as posições são elas próprias jogos de Conway. A relação $s \to_E s'$ (resp. $s \to_D s'$) é verificada se e somente s' é um vizinho esquerdo de s (resp. direito). A condição de finitude é verificada porque, se existisse uma sequência infinita de posições $(s_n)_{n \in N}$, tal que $s_n \to s_{n+1}$, qualquer que seja $n \in N$ existiria também uma sequência de conjuntos $(s_n)_{n \in N}$, de tal modo que todo conjunto seja um elemento esquerdo ou direito do conjunto precedente, o que contraria o axioma de fundamento da teoria dos conjuntos.

(c) Uma versão do Jogo Dominó: A posição inicial $s_0$ é um conjunto finito de quadrados de um tabuleiro. As posições são subconjuntos de $s_0$. A relação $\rightarrow_E$ (respectivamente $\rightarrow_D{}^{'}$) é verificada se e somente se $s \rightarrow_E s'$ ($s \rightarrow_D s'$) retirando-se dois quadrados verticalmente (respectivamente, horizontalmente). Na prática esse jogo pode ser jogado cobrindo-se os quadrados com dominós. Vejamos um exemplo de partida desse jogo:

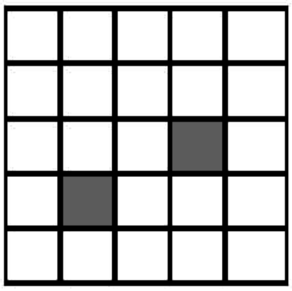
Consideremos o jogo dominó conforme o seguinte tabuleiro, em que os quadrados cinza indicam a posição inicial do jogo:



Digamos que o jogador E inicie a partida. Como definido acima, ele pode retirar apenas dois quadrados verticalmente. Após a jogada de E (retirada de dois quadrados verticalmente), temos a seguinte configuração:



Agora é a vez do jogador D retirar um par de quadrados, e ele pode retirar apenas dois quadrados horizontalmente. Após a retirada de tais quadrados, temos a seguinte configuração:



Naturalmente, é a vez do jogador E, e nesse caso não há um par de peças verticais para serem retiradas, logo o jogador E perde a partida, pois ele foi o primeiro a ficar sem jogadas possíveis.

**Princípio de recorrência para jogos**.

Um jogo x' = (S', $s_0$', $\rightarrow'_E$, $\rightarrow'_D$,) é um predecessor de x = (S, $s_0$, $\rightarrow_E$, $\rightarrow_D$,), se para cada posição $s_0$' pertencente a S tal que $s_0 \rightarrow s_0$', pode-se associar um jogo tal que: no conjunto S' estão as posições s, incluindo $s_0$' para as quais existe uma cadeia $s_0$' → ... → s, com s $\rightarrow'_E$ s' se e somente se s $\rightarrow_E$ s'; analogamente para $\rightarrow'_D$. O jogo x' é predecessor esquerdo ou direito de x se $s_0$' resulta da relação $\rightarrow_E$ ou $\rightarrow_D$.

Uma propriedade P para jogos é indicada $P_X$ se o jogo x a satisfaz.
Princípio de recorrência para os jogos:

> "Se para todo jogo x, o fato de P ser verdadeira para todo predecessor x' de x implicar $P_X$, então todo jogo x possui a propriedade P".

Demonstração:

Suponhamos válida a hipótese de recorrência, ou seja, a propriedade P válida para todo predecessor x' de x implica $P_X$. E, por absurdo, suponhamos que exista um jogo $x_0$, tal que $P_{X0}$ não seja satisfeita. Pela hipótese de recorrência deve existir $x_0$' predecessor de $x_0$, que não satisfaz P, e ele por sua vez tem um predecessor $x_0$'' que não satisfaz P, e assim sucessivamente e então existirá uma sequência infinita $s_0 \rightarrow s_0' \rightarrow s_0''$... que não satisfaz P, contrariando uma das condições para os jogos.

## 2.4 Sobre a teoria dos jogos

O conceito de estratégia é uma das ideias fundamentais da teoria dos jogos. Uma estratégia $\sigma$ para o jogador E ou D no jogo x é uma regra indicando o deslocamento a efetuar. O deslocamento prescrito por uma estratégia pode depender do curso da partida até aquele ponto.

Em cada jogo existe, apenas para um dos jogadores, uma estratégia que o possibilita ganhar o jogo, que vamos denominar de estratégia *vitoriosa*. No caso dos jogos de Conway essa noção de estratégia *vitoriosa* tem um papel decisivo, pois é a partir dela que se cria sua teoria definindo as noções de "jogos positivos" e "jogos negativos".

A definição de estratégia *vitoriosa* vai depender também do jogador que começa a partida. E assim pode-se dizer que $\sigma$ é uma estratégia *vitoriosa* para o jogador E, no jogo x, quando o jogador D começa a partida, se e somente se quaisquer que sejam os deslocamentos de D, o jogador E vence. E denota-se ExD para expressar que E tem uma estratégia *vitoriosa* para o jogo x quando D joga primeiro. De maneira análoga são expressas ExE, DxE e DxD.

Para essas estratégias são válidos os lemas:

Seja x´ um jogo predecessor direito de x. Então Dx´E implica DxD

Se Ex´E para todo x´ jogo predecessor direito de x então ExD.

E valem também os lemas duais (substituindo-se direito por esquerdo).

(ExD ou DxD) e (ExE ou DxE)

Com essas definições e lemas podemos definir "jogo positivo" e "jogo negativo", como segue:

Se no início de alguma partida de um jogo x o jogador D não pode efetuar nenhum deslocamento, então GxD é trivialmente verificado. É fácil ver que esse fato é aplicável aos jogos de Conway.

Definição:

Um jogo x é positivo e se indica $0 \leq x$, se e somente se ExD.

Definição:

Por dualidade, x é negativo, $x \leq 0$ se e somente se DxE.

Na continuidade da exposição vamos introduzir, como Conway, as notações $x^D$ e $x^E$ para indicar, respectivamente, predecessor direito e esquerdo de x.

E então valem os lemas:

Se existe um predecessor direito de x, $x^D \leq 0$ então $0 \leq x$ é falso.

Se para todo predecessor direito de x, $x^D \leq 0$ é falso, então $0 \leq x$.

E assim:

Um jogo x é positivo, $0 \leq x$, se e somente se $x^D \leq 0$ é falso, para todo $x^{D,}$ predecessor direito de x.

Um jogo x é negativo, $x \leq 0$, se e somente se $0 \leq x^E$ é falso para todo $x^E$ predecessor esquerdo de x.

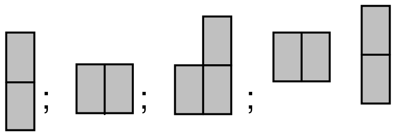
**Classes de jogos**

Podem-se classificar os jogos como segue:

- Um jogo x pertence à classe E se se verifica (ExD e ExE).
- Um jogo x pertence à classe D se se verifica (DxD e DxE).
- Um jogo x pertence à classe P (primeiro) se se verifica (DxD e ExE).
- Um jogo x pertence à classe S (segundo) se se verifica (ExD e DxE).
- Um jogo pertence a uma e somente uma dessas classes.
- Os jogos de uma mesma classe, considerados de *valores iguais* (no sentido de valor lógico), são jogos equivalentes.

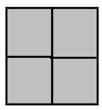
Exemplos:

(a) Os jogos de dominós cujas posições iniciais são:

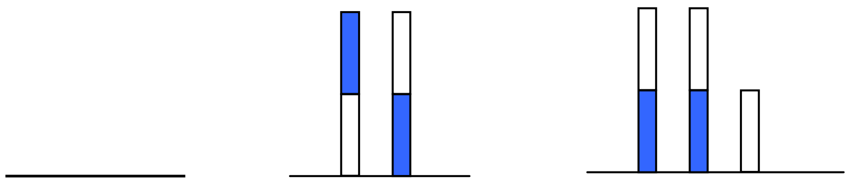


Esses jogos pertencem respectivamente às classes E, D, P e S, como pode ser facilmente verificado.

(b) O jogo de Dominó em que a posição inicial é a indicada abaixo pertence à classe P:



(c) Os jogos Hackenbush indicados abaixo pertencem à classe S, no primeiro caso o jogador que inicia o jogo não tem nenhum deslocamento para fazer logo perde.



Utilizando-se as relações "$\leq 0$" ou "$\geq 0$" definidas anteriormente tem-se:

$x \in S$ se e somente se $x \leq 0$ e $0 \leq x$.

$x \in E$ se e somente se $0 \leq x$ e $x \not\leq 0$.

$x \in D$ se e somente se $x \leq 0$ e $0 \not\leq x$

$x \in P$ se e somente se $x \not\leq 0$ e $0 \not\leq x$

Em particular $0 \in S$ e assim, no sentido das definições $0 \leq x$ e $x \leq 0$, tem-se que $0 \leq 0$.

Se se define $0 < x$ como $0 \leq x$ e $x \not\leq 0$, então vemos que E é constituído de jogos estritamente positivos, e que D é constituído de jogos estritamente negativos.

Na sequência, vamos mostrar que o conjunto dos jogos equivalentes munidos de uma operação – e de uma relação binária $\leq$ constitui um grupo parcialmente ordenado.

## 2.5 Uma relação de ordem parcial

Acabamos de introduzir os conceitos de "jogos positivos" e "jogos negativos", indicados pelas propriedades "$0 \leq$" ou "$\leq 0$". As notações $0 \leq x$ ou $x \geq 0$ sugerem que x possa ser comparado com zero, apesar de a propriedade não ser explicitamente mencionada nas definições.

Dando prosseguimento, vamos introduzir uma relação binária $\leq$ entre os jogos, de tal modo que as relações "$0 \leq$" ou "$\leq 0$" indiquem $x \leq 0$.

Definimos também duas operações: oposto de x que é $(-x)$ e adição $(x+y)$ e interpretamos $x \leq y$ como $0 \leq y - x$ sendo $y - x = y + (-x)$.

**As operações:**

O oposto de um jogo $x = (S, s_0, \to_E, \to_D)$ é o jogo $-x = (S, s_0, \to_D, \to_E)$. O oposto de x é o jogo que se obtém invertendo as posições da esquerda e da direita.

É claro que $-(-x) = x$, e $-0 = 0$

O jogo de Conway 0 deve ser interpretado aqui como o jogo que não tem nenhuma posição $\{\varnothing \mid \varnothing\}$. Nesse jogo nenhum dos jogadores tem deslocamento possível.

Soma de dois jogos:

Se, por exemplo, $x_1$ é o jogo de NIM e $x_2$ é o jogo de Dominó. $x_1 + x_2$ é o jogo em que $x_1$ e $x_2$ são jogados simultaneamente, e cada jogador em sua vez de jogar pode escolher se efetua um deslocamento em $x_1$ ou $x_2$, mas não nos dois. Mais geralmente:

Dados $x_1 = (S_1, s_{01}, \rightarrow_{E1}, \rightarrow_{D1})$ e $x_2 = (S_2, s_{02}, \rightarrow_{E2}, \rightarrow_{D2})$ $x_1 + x_2 = (S, s_0, \rightarrow_E, \rightarrow_D)$ sendo $S = S_1 \times S_2$, $s_0 = (s_{01}, s_{02})$ e ainda $(s_1, s_2) \rightarrow_E (s_1', s_2')$ se e somente se $(s_1 \rightarrow_{E1} s_1'$ e $s_2 = s_2')$ ou $(s_1 = s_1'$ e $s_2 \rightarrow_{E2} s_2')$, e analogamente define-se $\rightarrow_D$.

É fácil ver que

i) $-(x+y) = -x-y$ $(= -x + (-y))$.

ii) $0 \leq x - x$ e $x - x \leq 0$

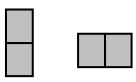
iii) Se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, então $0 \leq x+y$

iv) Se $0 \leq x+y$ e $y \leq 0$ então $0 \leq x$

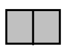
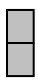
**Jogos isomorfos**

O isomorfismo para os jogos define-se do modo habitual. Vê-se que $x+y$ é isomorfo ao jogo $y+x$ e que $(x+y)+z$ é isomorfo ao jogo $x+(y+z)$. E ainda se y é isomorfo a x e ExD então EyD. Vejamos um exemplo:

O jogo de dominó de posição inicial:



É isomorfo à soma de dois jogos de dominós cujas posições iniciais são:

 e 

Ordem parcial

Definição: $x \leq y$ se e somente se $0 \leq y - x$ .

$x \leq y$ é relação de ordem:

$x \leq y$ é reflexiva, pois E(x–x)D, uma vez que, se D começa o jogo E, ganha efetuando o mesmo deslocamento de D com a outra componente.

$x \leq y$ é antissimétrica decorre diretamente da igualdade entre os jogos indicada mais à frente.

$x \leq y$ é transitiva, pois se $x \leq y$ e $y \leq z$. então $0 \leq y - x$ e $0 \leq z - y$; e então $0 \leq (z - y) + (y - x)$ conforme isomorfismo $0 \leq (z - x) + (y - y)$ e segue $0 \leq (z - x)$, e $x \leq z$.

Seguem abaixo mais alguns resultados importantes:

(d) $x \leq y \rightarrow - y \leq - x$

(e) $x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$.

De fato:

Se $x \leq y$, segue que $0 \leq y - x$, o que implica $0 \leq - x - (- y)$, e então $- y \leq - x$.

Se $x \leq y$, segue que $0 \leq y - x$ e $0 \leq (y - x) + (z - z)$, e enfim

$$0 \leq (z + y) - (x + z).$$

- Não ocorrem jamais $x^D \leq x$ nem $x \leq x^E$

Demonstração:

Mostremos que $x^D \leq x$ é falso. De fato: O jogo $x^D - x^D$ é um predecessor direito do jogo $x - x^D$. É verdade que D($x^D$–$x^D$)E. Do fato que “*Se x´ um jogo predecessor direito de x, então Dx´E implica DxD*” resulta em D(x–$x^D$)D e portanto E(x–$x^D$)D e $x^D \leq x$ são ambos falsos. Idem para $x \leq x^E$.

Segue a caracterização indutiva da relação binária $\leq$.

Teorema: Sejam x e y jogos, $x \leq y$ se e somente se:

$\neg(y^D \leq x)$

$\neg(y \leq x^E)$

Demonstração:

Suponhamos $x \leq y$ e verifiquemos que: se valem $x \leq y$ e $y^D \leq x$ então por transitividade vale $y^D \leq y$ o que é absurdo. Idem para $\neg(y \leq x^E)$

Reciprocamente suponhamos que não seja verdade que $y^D \leq x$ nem que $y \leq x^E$ mas que $x \leq y$ fosse falso. Então teríamos D(y–x)D, de modo que D teria uma estratégia vitoriosa para o jogo y – x quando D joga em primeiro lugar. Há duas possibilidades de deslocamento para D:

(i) O jogador D faz um deslocamento na componente y. Esse deslocamento conduz a um jogo $y^D$, tal que $D(y^D–x)E$, tanto quanto $E(x–y^D)D$, isto é $y^D \leq x$, o que contradiz a hipótese.

(ii) O jogador D faz um deslocamento na componente –x. Esse deslocamento conduz a um predecessor direito de –x, portanto a um predecessor esquerdo de x. Isso implica $D(y–x^E)E$, e assim $E(x^E–y)D$, ou seja $y \leq x^E$ contra a hipótese.

**Igualdade de jogos**

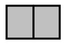
Definição: x = y significa ($x \leq y$ e $y \leq x$).

**Teorema:** O conjunto das classes de jogos iguais munido de + e $\leq$ constitui um grupo abeliano parcialmente ordenado no qual o elemento neutro é **S**.

Jogos iguais têm valores iguais (pertencentes à mesma classe).

Cada uma das classes S, E, D, P se subdividem em classes de jogos iguais. Todos os jogos da classe S são iguais entre si, mas dois jogos pertencentes a outra classe não são necessariamente iguais.

Exemplo: x é um jogo de dominó como segue:



E y é o jogo:

Então x é isomorfo a algum $y^D$. E é verdade que $y^D \leq x$ o que implica que $x \leq y$ é falso. Logo $x \neq y$.

## 2.6 Jogos e jogos de Conway

Como vimos um jogo de Conway é um jogo no sentido que acabamos de definir nos itens anteriores deste capítulo. Vimos como, a partir de um jogo de Conway c, pudemos definir um jogo correspondente $c_J$. O que faremos agora é o inverso, ou seja, a partir de um jogo x podemos associar um jogo de Conway $x_C$ e que o jogo $x_{CJ}$ correspondente a esse jogo $x_C$ é um jogo igual ao jogo x inicial.

Neste caso dizemos que $x_C$ é a forma normal de x. Conway fundamenta sua teoria nas formas normais.

As duas aplicações $c \rightarrow c_j$ e $x \rightarrow x_c$ permitem transportar para os jogos de Conway as relações $\leq$ e $=$ e as operações $+$ e $-$, definidas inicialmente para os jogos.

**As aplicações fundamentais**

(1) $c_J \equiv (S_c, c, \underset{c}{\rightarrow}_E, \underset{c}{\rightarrow}_D)$

Consideremos $c_J \equiv (S_c, c, \underset{c}{\rightarrow}_E, \underset{c}{\rightarrow}_D)$, em que as posições $c_j$ são, à parte a posição inicial c, os elementos esquerdos e direitos de c, seus elementos esquerdos e direitos, e assim sucessivamente. O deslocamento $s \underset{c}{\rightarrow}_E s'$ é válido se e somente se s e s' são posições e se s' é um elemento esquerdo de s; de forma análoga definimos $\underset{c}{\rightarrow}_D$.

Indicamos $x^E$ e $x^D$ como variáveis descrevendo respectivamente os predecessores esquerdos e direitos de um jogo x. Empregaremos a mesma notação $c^E$ e $c^D$ como variáveis descrevendo os elementos esquerdos e direitos de um jogo de Conway. Verifica-se que:

(2) Os $c_J{}^E$ coincidem com os $c^E{}_J$ e os $c_J{}^D$ com os $c^D{}_J$.

Atribuímos a cada jogo x um jogo de Conway $x_C$, definindo essa correspondência por recorrência supondo a cada etapa que $z_C$ tenha sido já definido por todos os predecessores z do jogo x. O princípio de recorrência enunciado anteriormente para os jogos justifica esse procedimento. Assim definimos:

(3) $x_C \equiv \{x^E{}_C \mid x^D{}_C\}$

(4) {conjunto dos $x^E{}_C$ | conjunto do $x^D{}_C$}

Por recorrência sobre os jogos vê-se que $x_C$ é um jogo de Conway; e deduz-se de (3) que:

(5) Os $x_C{}^E$ coincidem com os $x^E{}_C$ e os $x_C{}^D$ coincidem com os $x^D{}_C$.

(6) Para todo jogo de Conway $c_{JC} \equiv c$

Para provar essas afirmações necessitamos de um princípio de recorrência para os jogos de Conway análogo ao princípio de recorrência para os jogos e que pode ser estabelecido da mesma maneira.

**Princípio de recorrência para os jogos de Conway**

Seja *P* uma propriedade tal que, para todo jogo de Conway x, a veracidade de *P*x', para todo elemento esquerdo ou direito x' de x implique Px. Então todo jogo de Conway possui a propriedade *P*.

Deduz-se que:

$c_{JC} \equiv \{c_J{}^E{}_C \mid c_J{}^D{}_C\}$ (conforme (3))

$c_{JC} \equiv \{c^E{}_{JC} \mid c^D{}_{JC}\}$ (de acordo com (2))

$c_{JC} \equiv \{c^E \mid c^D\}$ (hipótese de recorrência)

$c_{JC} \equiv c$

(7) Para todo jogo x, $x = x_{CJ}$

Demonstração:

Provemos que $x \le x_{CJ}$ (a prova de que $x_{CJ} \le x$ é similar). Utilizamos para isso a caracterização indutiva de ordem parcial ≤ enunciada anteriormente para os jogos, assim como a propriedade que determina o inverso de um jogo, as propriedades relativas à soma de dois jogos mais o fato de não valer nunca $x^D \le x$ nem $x \le x^E$, assim como a hipótese de recorrência. Então temos que: $x \le x_{CJ}$ se e somente se não existe $x_{CJ}{}^D$, $x_{CJ}{}^D \le x$ e não existe $x^E$; $x_{CJ} \le x^E$ se e somente se não existe $x^D{}_{CJ}$, $x^D{}_{CJ} \le x$ e não existe $x^E{}_{CJ}$; $x_{CJ} \le x^E{}_{CJ}$ se e somente se não existe $x^D$, $x^D \le x$ e não existe $x_{CJ}{}^E$ tal que $x_{CJ} \le x_{CJ}{}^E$.

Prolongamento aos jogos de Conway das definições de relação ≤ e operações definidas para os jogos.

(8) Se c e c' são dois jogos de Conway, $c \le c'$ significa $c_J \le c'_J$

E $c = c'$ desde que $c \le c'$ e $c' \le c$.

As duas definições seguintes mostram como transportar as operações – e +, dos jogos aos jogos de Conway.

(9) $-c = (-c_J)_C$,

(10) $c_1 + c_2 = (c_{1J} + c_{2J})_C$

Vejamos uma caracterização indutiva da relação ≤ e das operações – e +.

(11) $c \leq c'$ se e somente se:

a) Não se tem jamais $c'^{D} \leq c$;

b) Não se tem jamais $c' \leq c^{E}$.

(12) $-c \equiv$ {conjunto dos $-(c^{D})$ | conjunto dos $-(c^{E})$},

(13) $c_1 + c_2 \equiv$ {conjunto dos $\{c_1^{E} + c_2\}$ U conjunto dos $\{c_1 + c_2^{E}\}$ | conjunto dos $\{c_1^{D} + c_2\}$ U conjunto dos $\{c_1 + c_2^{D}\}$}

Das afirmações (2) garantindo que $c_J^{E}$ coincide com $c^{E}{}_J$ e $c_J^{D}$ com $c^{D}{}_J$, e (11), decorre imediatamente a caracterização indutiva da relação $\leq$ entre os jogos.

Prova de (11):

As afirmações (8) e (3) implicam $-c \equiv$ {conjunto dos $(-c_J)^{E}{}_C$ | conjunto dos $(-c_J)^{D}{}_C$}. Utilizando (6) deduz-se de (8) que $(-c)_J = -c_J$ e portanto que $-c \equiv$ {conjunto dos $(-c)_J{}^{E}{}_C$ | conjunto dos $(-c)_J{}^{D}{}_C$}.

De (2) e (8) deduz-se que $-c \equiv$ {conjunto dos $(-c)^{E}$ | conjunto dos $(-c)^{D}$}. O conjunto dos $(-c)^{E}$ e o conjunto dos $(-c)^{D}$ têm os mesmos elementos; assim como o conjunto dos $-(c^{E})$ e o conjunto dos $-(c^{D})$ também têm os mesmos elementos, o que prova (11).

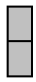
Conforme o exposto até aqui, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema:

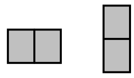
As classes de jogos de Conway iguais munidas da operação + formam um grupo abeliano parcialmente ordenado por $\leq$.

Para ilustrar o que expomos sobre a determinação de jogos de Conway a partir de jogos, apresentamos alguns exemplos. Vamos determinar os jogos de Conway correspondentes a dois dos jogos de dominó $D_0$ e $D_1$. Visto que esses jogos não têm nenhum predecessor $D_{0C} \equiv D_{1C} \equiv \{\varnothing \mid \varnothing\} \equiv 0$.

O jogo de dominó em que a posição inicial é:

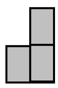


Admite $D_0$ como predecessor esquerdo, mas não tem nenhum predecessor direito. O jogo de Conway correspondente a esse jogo de dominós é, portanto, $\{\{0\} \mid \varnothing\} \equiv 1$. Do mesmo modo vê-se que os jogos de dominós em que as posições iniciais são:

 e 

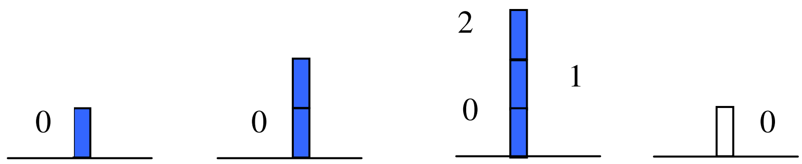
Correspondem respectivamente aos jogos de Conway $\{\varnothing \mid \{0\}\} \equiv -1$ e $\{\{-1\} \mid \{1\}\}$.

O jogo de dominó de posição inicial:



Tem $D_1$ como seu predecessor esquerdo e direito; ele corresponde ao jogo de Conway $\{\{0\} \mid \{0\}\}$.

Observemos ainda mais alguns exemplos de jogos Hackenbush e os correspondentes jogos de Conway:




1={{0} | ∅}  2={{0, 1} | ∅ }  3= {{0,1,2}| ∅}  -1={∅|

1

## 2.7 Os números de Conway

Apresentaremos agora a construção dos números de Conway e algumas relações entre os jogos e os números. Posteriormente, faremos uma análise da construção de Conway, ressaltando a inspiração de sua teoria e a generalização dos cortes de Dedekind.

No início deste capítulo discutimos os postulados de Dedekind D1) a D4). Na generalização almejada, à parte o conceito fundamental de número construído como um par de conjuntos em que os elementos são números já construídos, somente o postulado D3) ou a versão D3') permaneceu. Vimos que isso conduz ao problema da definição da relação $\leq$. Este problema foi agora resolvido. Da maneira em que são construídos, os números de Conway são jogos de Conway e introduzimos uma ordem parcial para os jogos de Conway. Ela foi motivada pela teoria do jogo.

Estamos agora em condições de formular os dois postulados de Conway (CI) e (C2). (CI) generaliza o postulado D3') de Dedekind e (C2) contém a caracterização indutiva de $\leq$.

**Os postulados de Conway (C1) e (C2)**

Os números de Conway, que a partir daqui chamaremos apenas números, serão introduzidos por dois postulados. Continuamos a indicar por $z^E$ e $z^D$ as variáveis representando os elementos esquerdos e direitos de um par de conjuntos.

(CI) Se $z = \{x \mid y\}$, em que x e y são dois conjuntos de números, e se $z^D \leq z^E$ não é jamais verdadeira, então z é um número.

(C2) Para todo par (x,y) de números, as duas asserções seguintes são equivalentes:

$x \leq y$;

$y^D \leq x$ não é jamais verdadeira e $y \leq x^E$ não é jamais verdadeira.

O desenvolvimento da teoria de Conway é feito tomando por base esses dois axiomas (salvo a definição das operações aritméticas). Todas as propriedades da relação $\leq$ também derivam de tais axiomas.

A situação aqui é análoga àquela em que são definidos os jogos de Conway a partir do postulado (JC).

Resulta do axioma (CI) que:

(1) Todo número é um par de conjuntos. Os elementos da esquerda e da direita de um número são eles próprios números. Todo número é um jogo de Conway.

Se x é um conjunto de números, então $\{x|\emptyset\}$ e $\{\emptyset|x\}$ são dois números porque a condição restritiva de (C1) é trivialmente verificada. Em particular, por conseguinte resulta que:

(2) Os números ordinais são números.

Como apresentamos várias provas indutivas, vamos formular um princípio de recorrência para os números que corresponde àquele princípio formulado para os jogos de Conway e para os jogos; a demonstração é idêntica. Além de um princípio de recorrência para as propriedades, eis um para as relações.

**Princípio de recorrência para os números (para uma propriedade P)**

Se, para todo número x, a hipótese de recorrência segundo a qual Px´ é verificada para todos os elementos direito ou esquerdo x´ de x, implica a conclusão da recorrência segundo a qual Px, então todo número possui a propriedade P.

**Princípio de recorrência para os números (para uma relação R)**

Conclusão da recorrência: $Rx_1,..., x_n$;

Hipótese de recorrência: $Rx'_1,..., x'_n$ para cada n-upla $x'_1,..., x'_n$, onde, para cada i, $x'_i$ seja igual a $x_i$ seja igual a um elemento esquerdo ou direito de $x_i$ , e onde, pelo menos um i, $x'_i$ é um elemento esquerdo ou direito de $x_i$.

Se, para todo $x_1,..., x_n$, a conclusão de recorrência resulta da hipótese de recorrência, então $Rx_1,..., x_n$ é verdadeira para todas as n-uplas de números.

**Propriedades elementares da relação de ordem**

Inicialmente mostraremos que, graças ao princípio de recorrência, a relação $\leq$ é reflexiva. Ao mesmo tempo vamos provar duas propriedades suplementares.

Para todo número x, tem-se:

$$(3) \begin{cases} \text{(a)} \ \ x^D \not\leq x \text{ para todo } x^D \\ \text{(b)} \ \ x \not\leq x^E \text{ para todo } x^E \\ \text{(c)} \ \ x \leq x \end{cases}$$

Demonstração:

Raciocinando por recorrência, supomos que as três propriedades (a), (b) e (c) sejam verificadas para todo elemento esquerdo e todo elemento direito de x. Mostremos somente (a); a prova de (b) é análoga. Se existisse um $x^D \leq x$, então conforme (C2) teríamos $z < x^D$ falso quando z é um elemento direito de x. Mas como $x^D$ é um elemento direito de x, devemos ter $x^D \not\leq x^D$, entretanto isso é uma contradição com a parte (c) da hipótese de recorrência.

Provemos (c). Se houvesse $x \not\leq x$, então, de acordo com a asserção (10) do item 2.6, existiria um $x^D \leq x$ ou um $x^E$ tal que $x \leq x^E$, o que estaria em contradição com (a) e (b) da hipótese de recorrência.

Vamos agora, assim como procedemos com os jogos de Conway, introduzir uma relação de equivalência (=) para os números.

Sejam x e y jogos, definimos que $x = y$ significa $x \leq y$ e $y \leq x$.

Deduzimos de (3) que

(4) Para todo x tem-se $x = x$.

Mostraremos agora que a relação $\leq$ é transitiva.

(5) Para toda terna (x, y, z) de números, as relações $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Demonstração:

Mostramos que essa asserção é válida para a relação $\leq$ definida na teoria dos jogos. Nosso interesse aqui é deduzir tal propriedade dos axiomas de Conway. Vamos empregar o princípio de recorrência para a relação ternária R, definida por:

Rxyz é verificada se e somente se ([$x \leq y$ e $y \leq z$] implica [$x \leq z$]) e ([$y \leq z$ e $z \leq x$] implica [$y \leq x$]) e ([$z \leq x$ e $x \leq y$] implica [$z \leq y$]).

Trata-se de mostrar que a conclusão de recorrência Rxyz é uma consequência da hipótese de recorrência. Por razões de simetria, é suficiente mostrar que [$x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$] se deduz da hipótese de recorrência. Supondo que $x \leq y$ e $y \leq z$. Se $x \not\leq z$ fosse verdadeiro, existiria, de acordo com (C2), um $z^D$ tal que $z^D \leq x$ ou um $x^E$ tal que $z \leq x^E$. Restringir-nos-emos ao primeiro caso (o segundo caso pode ser tratado da mesma forma). Dado que $z^D \leq x$ e $x \leq y$ decorre da hipótese de recorrência (mais precisamente do terceiro termo da conjunção definida em Rxyz) que $z^D \leq y$. Com a relação $z^D \leq y$ e $y \leq z$ a hipótese de recorrência (o primeiro termo da conjunção definindo Rxyz) implica que $z^D \leq z$. Isso contradiz (3).

Nas demonstrações da reflexividade e da transitividade, não usamos o fato de que há uma restrição em (C1) sobre a formação dos pares de conjuntos. Essa restrição estará essencial no que segue.

Define-se $x < y$ de maneira habitual por $x \leq y$ e $y \not\leq x$ (ou de forma equivalente por $x \leq y$ e $x \neq y$). Podemos então enunciar que:

(6) Para todo número x, $x^E < x$ e $x < x^D$.

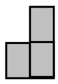
Demonstração:

Utilizamos o princípio de recorrência, para demonstrar que $x^E < x$. Já mostramos em (3) que $x \not\leq x^E$. Resta somente provar que $x^E \leq x$.

Se $x^E \not\leq x$ de acordo com (C2), existiria um $x^D$ tal que $x^D \leq x^E$ ou um $x^{EE}$ tal que $x \leq x^{EE}$. Mas $x^D \leq x^E$ contradiz (C1). Se $x \leq x^{EE}$ fosse verdadeiro, teríamos de acordo com a hipótese de recorrência $x^{EE} < x^E$ e de acordo com a transitividade da relação $\leq$ dever-se-ia ter também $x \leq x^E$ em contradição com (3).

Em relação ao que acabamos de provar, deve-se ressaltar que a asserção correspondente para os jogos de Conway é falsa porque teríamos sempre $x^E < x^D$ enquanto há certamente jogos de Conway x e z tais que z seja ao mesmo tempo um elemento esquerdo e um elemento direito de x.

Por exemplo, o seguinte jogo de dominó visto anteriormente:



Tal jogo corresponde ao jogo de Conway $\{\{0\} \mid \{0\}\}$.

Vamos agora mostrar que os números são totalmente ordenados pela relação $\leq$. Isto não é verdadeiro para os jogos em geral conforme o exemplo apresentado no parágrafo anterior, que mostra um jogo x que pertencente à classe P e que verifica $x \not\leq 0$ e $0 \not\leq x$.

(7) Para todo par $(x \mid y)$ de números, ou se tem $x \leq y$ ou se tem $y \leq x$.

Demonstração:

Supomos que $y \not\leq x$; devemos mostrar que $x \leq y$. Dado $y \not\leq x$, resulta de (C2) que existe um $x^D \leq y$ ou um $y^E$ tal que $x \leq y^E$. De acordo com (6) existe $x \leq x^D$, de maneira que se $x^D \leq y$, a transitividade da relação $\leq$ implica $x \leq y$. De acordo com (6), existe $y^E \leq y$, de modo que se $x \leq y^E$, a transitividade de $\leq$ implica $x \leq y$.

Vimos como consequência do axioma (C1) que os números ordinais são números (no sentido de Conway). Se os ordinais são construídos na ordem (conforme construção dos primeiros ordinais), pode-se ver que todo ordinal é diferente (no sentido da igualdade $\equiv$) de todos os seus predecessores. Contudo, um ordinal não é jamais menor que um de seus predecessores. Contentamos em provar isso para os números naturais. Para isso é suficiente estabelecer que para todo inteiro natural n, tem-se $n < n+1$.

(a) $n \leq n+1$. Emprega-se (C2):

(a1) $(n+1)^D \leq n$ não pode jamais ser verdadeiro, porque n+1 não tem nenhum elemento direito.

(a2) Se existisse um $n^E$ tal que $n+1 \leq n^E$, então pela definição de n+1 um tal $n^E$ seria também um $(n+1)^E$ e teríamos $(n+1) \leq (n+1)^E$ em contradição com (3).

(b) $n+1 \not\leq n$. Levando em conta (C2), é suficiente estabelecer que existe um $(n+1)^E$, tal que $n \leq (n+1)^E$; mas n é um $(n+1)^E$ e de acordo com (3), $n \leq n$ .

**Os corpos de números de Conway**

Acabamos de introduzir os números de Conway, a relação $\leq$, e a relação de equivalência =.

Vamos agora definir as operações aritméticas, ver alguns exemplos e esboçar as propriedades do corpo de números de Conway.

Operações aritméticas com os números

As operações aritméticas são definidas por recorrência. Retomamos as definições indutivas feitas em (11) e (12) do parágrafo 2.6 para os jogos de Conway e as reelaboramos em dois axiomas (C–) e (C+) para os números.

(C–) Para todo número x, tem-se:

$-x \equiv$ {conjunto de todos os $-x^E$ | conjunto de todos os $-x^D$}

(C+) Para todo par x, y, de números tem-se:

$x + y \equiv$ {conjunto de todos os $(x^E + y)$ U conjunto de todos os $(x+y^E)$ | conjunto de todos os $(x^D + y)$ U conjunto de todos os $(x+y^D)$}.

Pode-se mostrar que os resultados das operações – e + são números e que a relação de igualdade é uma relação de congruência para essas operações.

Relativamente à multiplicação, não se vê nada que pudesse servir de modelo no domínio dos jogos e dos jogos de Conway. Após algumas dificuldades Conway consegue encontrar para a multiplicação a definição indutiva C* inspirada em (C–) e (C+), como segue.

(C*) Para todo par x, y de números, definimos:

$x*y \equiv$ {{conjunto de todos os ($x^E y + xy^E - x^E y^E$) U conjunto de todos os ($x^D y + xy^D - x^D y^D$)} | {conjunto de todos os ($x^E y + xy^D - x^E y^D$) U conjunto de todos os ($x^D y + xy^E - x^D y^E$)}}.

Assim definido, o produto de dois números é um número (a multiplicação é uma lei interna aos números) e a igualdade é uma relação de congruência para essa operação.

Conway mostrou que as classes de números, módulo a igualdade, constituem um corpo ordenado relativamente à relação $\leq$ e às operações –, + e $*$.

Vejamos alguns exemplos para ilustrar as operações que foram definidas até aqui. Vamos mostrar por recorrência que: $x+0 \equiv x$; $x+y \equiv y+x$; $x+(-x)=0$ (= e não $\equiv$); $1+1=2$ e $1/2 + 1/2 = 1$, com $1/2 \equiv \{\{0\} \mid \{1\}\}$.

(a) $x+0 \equiv x$ (e da mesma forma $0 + x \equiv x$)

Demonstração:

$x+0 \equiv \{ (x^E + y) \cup (x + y^E) \mid (x^D + y) \cup (x + y^D)\}$ (aplicando (C+))

$\equiv \{(x^E + 0) \mid (x^D + 0)\}$

$\equiv \{x^E \mid x^D\}$ (hipótese de recorrência)

$\equiv x$.

(b) $x+y \equiv y+x$

Demonstração: por recorrência sobre y

$x+y \equiv \{(x^E + y) \cup (x + y^E) \mid (x^D + y) \cup (x + y^D)\}$

$\equiv \{(x + y^E) \cup (x^E + y) \mid (x + y^D) \cup (x^D + y)\}$ (aplicando (C+))

$\equiv \{\{y^E + x\} \cup \{y + x^E\} \mid \{y^D + x\} \cup \{y + x^D\}\}$ (hipótese de recorrência)

$\equiv y+x$ (C+)

(c) $x+(-x)=0$

Aqui o sinal = não pode ser substituído por ≡, como se pode ver considerando, por exemplo, $x \equiv 1$.

Demonstração:

Utilizamos a definição de = e nos limitamos a mostrar que $x+(-x) \leq 0$. Não existe algum $0^D$ tal que $0^D \leq x+(-x)$, porque não há nada em $0^D$. Se existisse um z $\equiv (x+(-x))^E$ com $0 \leq z$, após (+) , teríamos $z \equiv x^E + -x$ , ou $z \equiv x + (-x)^E$. No primeiro caso teria $0 \leq x^E + -x$, e após (C2), $(x^E + -x)^D$ não será jamais $\leq 0$; mas, após (C+) e (C–), $x^E + -x^E$ é tal que $(x^E + -x)^D$ e em virtude da hipótese de recorrência $x^E + -x^E \leq 0$. No segundo caso existiria em $x^D$ tal que $z \equiv x + -x^D$, e teríamos $0 \leq x + -x^D$. Em consequência, após (C2), não haveria nenhum $(x + -x^D)^D \leq 0$, e isso contrariaria a hipótese de recorrência segundo a qual existe um $x^D + -x^D \leq 0$.

(d) $1+ 1 = 2$

Demonstração:

Já tínhamos definido $1 \equiv \{\{0\} \mid \varnothing\}$, $2 \equiv \{\{0, 1\} \mid \varnothing\}$. Isso implica:

$1 + 1 \equiv \{(1^E + 1) \cup (1 + 1^E) \mid (1^D + 1) \cup (1 + 1^D)\}$ (aplicando (C+))

$\equiv \{\{0 + 1\} \cup \{1 + 0\} \mid \varnothing\}$

$\equiv \{(1\} \mid \varnothing\}$ (a).

($d_1$) $\{\{1\} \mid \varnothing\} \leq \{\{0, 1\} \mid \varnothing\}$. Como não pode haver $\varnothing^D$, é suficiente mostrar que não existe nenhum $\{\{1\} \mid \varnothing\}^E$ tal que $2 \leq \{\{1\} \mid \varnothing\}^E$ ou em outros termos que $2 \not\leq 1$. Isso resulta de $1 < 2$.

($d_2$) $\{\{1\} \mid \varnothing\} \leq \{\{1\} \mid \varnothing\}$. É suficiente mostrar que para algum $\{\{0, 1\} \mid \varnothing\}$ tem-se $\{\{1\} \mid \varnothing\} \not\leq \{\{0,1) \mid \varnothing\}$, ou seja, que $\{\{1\} \mid \varnothing\} \not\leq 0$ e que $\{\{1\} \mid \varnothing\} \not\leq 1$. Se $\{\{1\} \mid \varnothing\} \leq 0$, então será verdade que 0 não é $\leq$ a algum $\{\{1\} \mid \varnothing\}^E$ o que contradiz $0 \leq 1$.

(e) Definimos $1/2 \equiv \{\{0\} \mid \{1\}\}$.

Dado que $1 \not\leq 0$ decorre de (C1) que 1/2 é um número. Vamos justificar essa notação provando que $1/2 + 1/2 = 1$.

(f) $0 \leq 1/2$.

É suficiente mostrar que não existe $\{1/2\}^D$ tal que $\{1/2\}^D \leq 0$. Isso é verdadeiro pois $1 \not\leq 0$.

(g) $1 \not\leq 1/2$.

Isto decorre de que 1 é um elemento direito de 1/2 e da relação $1 \leq 1$.

(h) $1+1/2 \equiv \{\{1/2, 1\} \mid \{1+1\}\}$.

Isto resulta de (C+) com (a) e (b).

$1/2 + 1/2 = 1$

$1/2 + 1/2 \equiv \{\{0+1/2\} \cup \{1/2 + 0\} \mid \{1+1/2\} \cup \{1/2+1\}\}$ (C+)

$1/2 + 1/2 \equiv \{\{1/2\} \mid \{1+1/2\}\}$ (a) e (b)

Resta somente provar as asserções ($i_1$) e ($i_2$) que seguem.

($i_1$) $1 \leq \{\{1/2\} \mid \{1+1/2\}\}$.

Notamos primeiro que $1+1/2 \not\leq 1$ porque $1 \leq 1$ de acordo com (h).

E como vimos em (f) que $0 \leq 1/2$, tem-se $\{\{1/2\} \mid \{1+1/2\}\} \not\leq 0$.

($i_2$) $\{\{1/2\} \mid \{1+1/2\}\} \leq 1$.

Isto resulta de (g) onde se mostrou que $1 \not\leq 1/2$, ou seja, que 1 não é $\leq$ algum $\{\{1/2\} \mid \{1+1/2\}\}^E$.

**Propriedades do corpo dos números**

A totalidade de todos os números forma uma classe própria, a qual não é um conjunto (no sentido da teoria dos conjuntos). De fato, todo ordinal é um número de Conway e os ordinais não formam um conjunto (no mesmo sentido da teoria dos conjuntos).

Mencionamos neste estudo que a classe de todos os números constitui um corpo ordenado $K_0$ relativamente às operações + e *. Esse corpo $K_0$ é real, fechado, e é caracterizado, a menos de isomorfismo, pela propriedade de imersão universal dos corpos ordenados, que se pode exprimir assim:

Para todos os subcorpos ordenados $K_1$ de $K_0$ tal que $K_1$ seja um conjunto, e para toda extensão $K_2$ de $K_1$ que é um corpo ordenado e um conjunto, existe um subcorpo $K_2$' de $K_0$ que é isomorfo (como corpo) a $K_2$, isomorfismo esse que restrito a $K_1$ é a identidade.

Disso decorre em particular que todo corpo ordenado é imerso em $K_{0.}$

Se os números são construídos ao menos de (C1), mas autorizando-se somente os conjuntos finitos, obtêm-se somente os números diádicos, isto é, os números na forma $\pm\frac{m}{2^n}$, sendo m e n números naturais. Se x é um número real e $x_1$ e $x_2$ o conjunto dos números diádicos respectivamente <x e >x. Então x = ($x_1$, $x_2$). Um número x é um número real se e somente se existe um interior natural n tal que –n< x < n  e x = {conjunto de todos os números x–$\frac{1}{2^k}$ |conjunto de todos os números x+$\frac{1}{2^k}$}.

Para números ordinais as operações definidas por (C+) e (C*) conduzem às operações chamadas respectivamente soma natural e o produto natural.

Há números infinitos, por exemplo, o número $\omega$ e há também os números infinitamente pequenos, por exemplo, 1/ω.

Este tópico das propriedades do corpo dos números finaliza a síntese sobre a teoria de Conway apresentada por Hermes (1998) utilizada neste estudo. O que segue baseia-se no livro de Conway (2001).

**Números Reais**

"O próximo teorema nos fornece um modo bem fácil de avaliar números particulares. Nós o denominamos teorema da simplicidade" (CONWAY, 2001, p. 23).

Teorema 11:

Suponha para $x = \{x^E \mid x^D\}$ que algum número z satisfaça $x^E \ngeq z \ngeq x^D$ para todo $x^E$, $x^D$, sendo $z = \{z^E \mid z^D\}$, mas que nenhuma opção de z satisfaça a mesma condição. Então x = z. (Nota: isto é válido mesmo quando x é dado por um jogo.)

Demonstração:

Temos $x \geq z$ ao menos que algum $x^D \leq z$ (não é possível pois vai contra a hipótese) ou então $x \leq z^E$, para algum $z^E$. Mas, se $x \leq z^E$, podemos deduzir que $x^E \ngeq x$ e $x^E \leq z^E < z \ngeq x^D$ para todo $x^E$, $x^D$, daí temos $x^E \ngeq z^E \ngeq x^D$, contradizendo a suposição sobre z. Então $x \geq z$, de modo similar $z \geq x$, logo x = z.

A principal asserção do teorema é que, quando x é dado como um número, ele é sempre o número "mais simples" que se encontra entre $x^E$ e $x^D$, em que o mais simples significa o mais recentemente criado. Se z é esse número mais simples, os números simplificadores $z^E$, $z^D$ não podem satisfazer a mesma condição. Entretanto, a exata versão apresentada acima tem várias vantagens, desde que se verifique quando x é dado como um jogo, não necessariamente reconhecido como igual a número, e é talvez não muito óbvio exatamente o que é entendido por "o mais simples número tal que...". Na aplicação abaixo, não há nunca nenhum problema.

Teorema 12:

Se x é um número racional cujo denominador divide $2^n$, então

$$x = \{x - (1/2^n) \mid x + (1/2^n)\}, \text{ com } n \in N.$$

Demonstração:

Se n = 0 o teorema é válido, desde que isto afirma que x é o número mais simples entre x – 1 e x + 1, enquanto sabemos que de fato é, se positivo, o número mais simples maior que x – 1, se negativo o número mais simples menor que x+1, e se zero o número mais simples de todos. (Esses fatos seguem da definição usual dos números inteiros como soma de 1 ou –1.)

Se n > 0, dobremos $z = \{x - (1/2^n) \mid x + (1/2^n)\}$, e vejamos que 2z é o número mais simples entre $z + x - (1/2^n)$ e $z + x + (1/2^n)$. Desde que z certamente se encontre entre $x - (1/2^n)$ e $x + (1/2^n)$ esses limites estão entre $2x - (1/2^{n-1})$ e $2x + (1/2^{n-1})$, e pela indução 2x é o número mais simples entre esses limites, de modo que 2z = 2x assim z = x.

Esse último teorema justifica todas as afirmações sobre os números construídos por processos finitos. Cada tal número é um número racional diádico, isto é, um número racional na forma $\frac{m}{2^n}$. Naturalmente, podemos falar de "o" número racional $\frac{p}{q}$ sem ambiguidade, desde que mostremos que a classe $K_0$ de todos os números de Conway é um corpo totalmente ordenado, e por conseguinte contenha uma imagem unicamente definida de cada número racional, suposto definido em um dos meios usuais.

**Contendo os Números Reais**

Na teoria de Conway um número real vai ser definido da seguinte maneira:

Definição:

x é um número real se e somente se – n < x < n para algum inteiro n, e $x = \{x - 1, x - 1/2, x - 1/3, \ldots \mid x + 1, x + 1/2, x + 1/3, \ldots\}$, ou em uma forma reduzida, $x = \{x - (1/n) \mid x + (1/n)\}$, com $n > 0$. (É para ser entendido que n varia no conjunto dos inteiros positivos.)

Teorema 13.

(i) Números racionais diádicos são números reais.

(ii) Se x e y são números reais, então $-x$, $x + y$ e $xy$ são números reais.

(iii) Cada número real tem uma única expressão na forma $\{E \mid D\}$, em que E e D são conjuntos não vazios de racionais, E não tem maior elemento, D não tem menor elemento, e há no máximo um número racional que não está em E nem em D. E, ainda, $y' < y \in E$ implica $y' \in E$, $z' > z \in D$ implica $z' \in D$.

(iv) Cada corte $\{E \mid D\}$ como descrito em (iii) é igual a um único número real.

Demonstração:

A asserção (i) decorre imediatamente dos teoremas 11 e 12. A asserção (ii) segue imediatamente da forma como foram definidas as operações para os números de Conway. Em relação a (iii), para todo número real x, seja E igual ao conjunto dos números racionais menores que x, D igual ao conjunto dos números racionais maiores que x. Então E e D são não vazios pela condição $-n < x < n$ para algum n. Também cada elemento de E é menor que $x - (1/n)$ para algum n, e então podemos adicionar 1/2n e ainda ser menor que x. Isso mostra que E não tem máximo, e similarmente o conjunto D não tem mínimo. Um racional que não está nem em E nem em D precisa ser igual a x, então ao menos um não está em nenhum. Desde que a expressão é obviamente única, isso prova (iii). Em relação a (iv), note que {E/D} é certamente algum número, x, digamos, e que facilmente $-n < x < n$ para algum inteiro n. Então precisamos somente mostrar que $x = \{x - \frac{1}{n} \mid x + \frac{1}{n}\}$ com $n > 0$. Mas, desde que E não tem máximo, para algum $y \in E$ temos $y + \frac{1}{n} \in E$ para todo n suficientemente grande. Isto mostra que para n suficientemente grande existe um elemento de E maior que x – $\frac{1}{n}$ e similarmente um elemento de D menor que x + $\frac{1}{n}$, o que é suficiente para provar (iv).

Podemos obviamente substituir racionais por racionais diádicos como em (iii) e (iv). Fazendo assim, deduzimos que todo número real que não é um racional diádico surge após serem construídos infinitos números.

**Algumas reflexões acerca do método de Conway**

Os números reais como definidos por Conway comportam-se exatamente como os números reais definidos de formas clássicas (cortes de Dedekind, axiomática, classes de equivalências de sequências de Cauchy). Por isso também usaremos R para indicar o conjunto dos números reais definidos por Conway.

Até aqui consideramos os números reais e sua teoria como conhecemos, de modo que identificamos "os números de Conway" com os números reais já conhecidos. Poderíamos naturalmente usar as ideias de Conway para apresentar uma nova fundamentação lógica para os números reais. No Capítulo 5 faremos algumas considerações a respeito dos tratamentos clássicos usuais e as potencialidades de uma possível nova abordagem.

Finalizando este capítulo, apresentamos algumas reflexões em relação aos princípios utilizados por Conway no desenvolvimento de sua teoria.

O princípio de indução adotado por Conway pode ser fundamentado na teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), mais especificamente no axioma da separação, que pode ser formulado como segue:

> "Se P é alguma propriedade de um conjunto x sempre que é propriedade de todos os elementos de x, P é válida para todo conjunto".

A menção ao sistema ZF alerta para a discussão a respeito da fundamentação da teoria de Conway. Podem-se detectar dificuldades associadas ao fato de que uma classe de números é naturalmente uma classe própria, e não um conjunto. A esse respeito, Conway defende que um conhecimento maior de

ZF mostra que isso não é obstáculo, e que sua teoria pode ser adequadamente fundamentada.

Ele afirma que isso pode ser feito no próprio sistema ZF (acrescentando o axioma da infinitude e outros, se necessário) ou em outras teorias possíveis que foram propostas como fundamentações apropriadas para a Matemática, como certas teorias das categorias, por exemplo, o sistema NGB (von Neumann – Bernays – Godel). No entanto, ele ressalta que não buscou restringir sua abordagem a nenhuma teoria particular. A esse respeito, ele defende uma espécie de "Movimento de Libertação dos Matemáticos!" (CONWAY, 2001, p. 66). Acrescenta que, entre os tipos permissíveis para a fundamentação e construção de sua teoria, se devem ter as seguintes condições:

I) Os objetos podem ser criados de objetos criados anteriormente de forma razoavelmente construtiva.

II) A igualdade entre os objetos criados pode ser obtida por toda relação de equivalência desejada.

Além de tais comentários sobre a fundamentação da teoria, vimos que Conway conceitua número a partir de cortes, tendo por referência os cortes de Dedekind, porém de modo a generalizá-los, não pressupondo o conjunto dos números racionais e ainda interpretando seus números como jogos.

Enfim, duas ideias foram fundamentais para que Conway conseguisse construir todos os números de forma única. Construir uma generalização conveniente de corte e demonstrar que essa noção generalizada pode ser interpretada como um jogo entre dois jogadores. Esse fato não é irrelevante, pois evidencia as potencialidades dessa abordagem perante a *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* na conceituação de número. Dedicaremos o próximo capítulo à apresentação da noção de *complementaridade* com o intuito de evidenciar sua relevância na conceituação de número.

# CAPÍTULO 3

## 3.1 A noção de complementaridade

O princípio de *complementaridade* foi formulado inicialmente pelo físico Niels Bohr, por volta de 1930. Bohr desenvolveu esse princípio para explicar fenômenos atômicos motivado pela independência entre a observação dos fenômenos e a realidade sensível. Acrescenta-se a isto a impossibilidade de conhecer simultaneamente, com uma precisão arbitrária, os valores de quaisquer duas variáveis conjugadas, como a posição e o momento de um elétron em sistemas mecânicos e também o fato de que a interação entre os objetos e os aparelhos de medição forma uma parte essencial do fenômeno físico. Bohr utilizou o *princípio de complementaridade* para descrever aspectos gerais de significados epistemológicos e metafísicos de fenômenos atômicos e consequentemente da física quântica.

A partir de Bohr, pesquisadores de outras áreas do conhecimento, incluindo a Educação Matemática, têm se utilizado da noção de *complementaridade* em seus estudos, em geral, para capturar aspectos cognitivos e epistemológicos relacionados ao desenvolvimento das ciências e de conceitos matemáticos (SKEMP, 1976; KUYK, 1977; SFARD, 1991; DOUADY, 1991; OTTE, 2003b).

No artigo intitulado Complementary, Sets and Numbers, do filósofo e matemático Michael Otte (2003b), a noção de *complementaridade* é utilizada para analisar e explicar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos, em especial as noções de conjuntos e números. Para ele, a *complementaridade* relacionada à noção de número é concebida segundo os aspectos *intensional* e *extensional*, que não devem ser vistos apenas como uma dualidade, mas, sim, *complementares* no desenvolvimento do conceito de número. Entendemos por "*complementares* dois conceitos opostos que porém se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno" (ABBAGNANO, 1982, p. 144).

No mesmo artigo, Otte evidencia o papel da *complementaridade* no desenvolvimento histórico de alguns conceitos matemáticos, e principalmente como a *complementaridade* interfere nas tentativas de explicação da noção de número.

As ideias expostas por Otte (2001a, 2003b, 2007) nos ajudam a entender e a responder algumas questões que envolvem a problemática desta tese. Utilizaremos suas ideias para fundamentar nossa pesquisa no que diz respeito à epistemologia e à cognição, que, para nós, devem ser consideradas como duas faces da mesma moeda nos estudos que envolvem fundamentos da Educação Matemática.

O debate em torno das concepções *intensional* e *extensional* da Matemática atinge particularmente e de forma intensa o conceito de número. A visão *intensional*, de número, a ordinalidade e a axiomatização sofrem críticas dos que privilegiam as aplicações matemáticas.

A distinção entre os termos *intensional* e *extensional* foi debatida na filosofia e na lógica contemporânea:

> Este par de termos foi introduzido por Leibniz para expressar a distinção que a Lógica de Port-Royal expressara com o par *compreensão-extensão* e a lógica de Stuart Mill expressara com o par *conotação-denotação* [...]. O emprego destes dois termos foi adotado por Hamilton: "A interna quantidade de uma noção, a sua *intensionalidade* ou *compreensão* é constituída por diferentes atributos cujo conceito é a soma, isto é, dos vários caracteres conexos do próprio conceito num uno todo pensado. A quantidade externa de uma noção ou a sua *extensão* é constituída pelo número de objetos que são pensados mediatamente através do conceito" (Lectures on Logic, 2.ed., 1866, I, pág. 142). [...] A *intensão* de um termo é definida por Lewis como "a conjunção de todos os outros termos cada um dos quais deve ser aplicável àquilo a que o termo é corretamente aplicável". Neste sentido a *intensão* (ou conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a *intenção* de quem o emprega, por isso o significado primeiro de "significado". A extensão, entretanto, ou denotação de um termo é a classe das coisas

reais às quais o termo se aplica (LEWIS, Analysis of Knowledge and Valuation, 1950, pág. 39-41). As mesmas determinações são dadas por Quine: a *intensão* é o significado, a extensão é a classe das entidades às quais o termo pode ser atribuído com verdade. Analogamente são usados os adjetivos *intensional* e *extensional* [...] (ABBAGNANO, 1982, p. 549).

A noção de *intensão* de termos matemáticos explicita as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não esgota a conceituação do objeto matemático em si, por exemplo, sistemas axiomáticos no sentido de Peano e Hilbert ou uma abordagem axiomática dos números reais (corpo ordenado completo). A compreensão comum de uma abordagem axiomática expressa que a aritmética não trata de coisas que existem concretamente, mas sim de relações gerais ou objetos ideais.

Bertrand Russell[4] julgava o método axiomático incompleto, considerando os axiomas como termos não específicos. Para ele, esses termos não interpretados precisam ser especificados de uma maneira que permitam estabelecer uma conexão com a aplicação desejada.

A noção de *extensão* de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria. Uma abordagem *complementarista* torna-se relevante em razão da impossibilidade de definir a realidade matemática independentemente de suas possíveis representações e da própria atividade cognitiva, de forma semelhante à caracterização dos fenômenos de Bohr.

Com a aritmetização da Matemática ocorrida no final do século XIX e com as axiomatizações como as de Hilbert e Peano, conceitos primitivos e axiomas, que antes, na Geometria Euclidiana, eram, de certa forma, dados pela intuição, passaram a ser premissas de raciocínios hipotético-dedutivos, libertando-se da intuição.

Russell, analisando a axiomática de Peano, faz o seguinte comentário: "suponhamos que '0' significa o número *um* e que 'número' significa o conjunto

[4] Bertrand Russel (1872-1970) foi um dos mais influentes filósofos e matemáticos do século XX. A primeira edição do livro *Introdução à filosofia matemática* foi publicada em 1919. Citamos aqui a edição brasileira publicada em 2007.

1, 1/2, 1/4, 1/8,... e suponhamos que 'sucessor' significa 'metade'. Nesse caso, todos os cinco axiomas de Peano se aplicarão a esse conjunto" (RUSSELL, 2007, p. 24).

Essa afirmação pode ter duas implicações: Russell estava usando-a para evidenciar a necessidade de uma definição para número e para mostrar a insuficiência do método axiomático; os postulados não deveriam mais ser dados pela intuição, mas sim especificados por meio de definições lógicas. Por outro lado, podemos entendê-la também como reforçando o fato de que a natureza matemática (a existência dos conceitos matemáticos e como ele é concebido pelo homem, suas aplicações e a descrição do objeto matemático) não é considerada no método axiomático. Tal método apenas descreve como os termos se relacionam, transformando tudo em um tipo de pensamento relacional. Essa última consideração aplica-se muito bem à conceituação axiomática de número real.

A observação de Hilbert, de que em sua axiomática pode-se trocar ponto e reta por cadeira e copo de cerveja, pode ser interpretada como certo tipo de ontologismo, em relação à moderna axiomatização matemática, como se o homem possuísse uma visão ou intuição imediata ou direta do ente matemático.

A tendência em transformar a Matemática em Lógica pura é equivocada, visto que a Matemática possui objetos (dependem das hipóteses e substâncias da atividade matemática), enquanto a Lógica não se ocupa com a natureza das coisas, não afirma nada acerca do mundo, grosseiramente podemos dizer que se ocupa de formas e não de objetos. Essa é uma diferença fundamental entre as duas (OTTE, 2003b).

Uma teoria axiomática moderna transformou-se em um par, no seguinte sentido: de um lado ela é uma teoria *intensional*, descrevendo a relação entre seus termos teóricos por meio de axiomas. E, de outro lado, ela constitui referências ou *extensões* de tais termos, evidenciando as aplicações, interpretações ou modelos da teoria (OTTE, 2003b).

A importância dos modelos no desenvolvimento de teorias nas diversas áreas do conhecimento, como na Sociologia, Psicologia, Física e outras, é evidenciada por diversos autores. Nos escritos de Bunge (2007), ressalta-se a necessidade de fundamentos axiomáticos para as teorias, em concordância com o exposto no parágrafo anterior. O trabalho desse físico teórico expande-se pela filosofia; a forma com que trata as ligações do conhecimento científico com o mundo real, por meio da produção de leis, teorias e modelos, explicita a relevância da dualidade entre axiomas e modelos no desenvolvimento de uma teoria.

Não se trata apenas de uma simples dualidade, e sim de aspectos *complementares*, que aparentemente podem se opor, mas que se complementam no arcabouço teórico. O filósofo Krause (2002) também chama atenção para essa característica (um conjunto de axiomas e modelos) na formação de teorias no sentido da ciência moderna.

Objetos matemáticos possuem uma natureza dual, eles podem ser dados *intensionalmente* por um sistema axiomático, mas devem ser complementados com "referências"[5] e "atributos". Além das características relacionais dadas pela axiomática, teremos também possíveis interpretações de seus termos.

Segundo Otte (2003b, p. 205), as relações *intensional* e *extensional* são complicadas, pois não são duas características totalmente independentes, não podemos observá-las como relações inversas no sentido clássico, dado uma, por meio de uma simples operação obtém-se a outra.

As características *intensional* e *extensional* são relativamente independentes, e conectam-se de modo circular ou *complementar*. Isto fica visível quando se observa a gênese do conhecimento matemático, e a relação entre o sujeito e objeto matemático (atividade matemática). Assim, o par *intensão* e *extensão* de termos matemáticos podem ser distinguidos da mera dualidade, concentrando-se no caráter evolutivo do conhecimento matemático.

Nessa perspectiva o foco está na relação entre o sujeito e o objeto matemático, e não somente no objeto em si. Esses fatores evidenciam a

[5] Utilizaremos aqui a palavra referência como "o ato que estabelece uma relação entre o símbolo e o seu objeto, isto é, o ato da interpretação" (ABBAGNANO, 1982, p. 805). Entendemos por atributo o exposto por Espinosa: "Por atributo entendo o que o intelecto percebe da substância como constituindo a essência dela", ou mais objetivamente como foi exposto por Descartes que "entende por atributo as qualidades 'inerentes a substancia'" (ABBAGNANO, 1982, p. 90).

relevância da noção de *complementaridade* no que concerne a estudos epistemológicos da aprendizagem matemática (OTTE, 2003b, p. 205).

A compreensão matemática em uma perspectiva que envolve a gênese do conhecimento nos obriga a abandonar noções que envolvem objetos ideais, independentes do sujeito, ou verdades separadas das possibilidades de interpretações ou verificações. "O objeto da Matemática ou o conteúdo da atividade matemática de forma alguma pode ser definido absolutamente e independente dos meios da atividade matemática" (OTTE, 1993, p. 226).

O epistemólogo Bachelard (2004) enfatiza esse aspecto quando diz que

> [...] um saber puramente dedutivo não passa, a nosso ver, de mera organização de esquemas, pelo menos enquanto não se estabelecer no real a raiz das noções abstratas. Aliás, o próprio avanço da dedução, ao criar novas abstrações, exige uma referência contínua ao dado que ultrapassa, por essência, o lógico (BACHELARD, 2004, p. 14).

É relevante destacar também o papel das representações, ou seja, para que algo realmente exista para nós, deve ser representado. Isto traz outro fator a ser considerado, aquele que diz respeito à *complementaridade* entre as diferentes representações de um objeto matemático, pois estas podem ser vistas como referenciais ou como atributos. Dessa forma, o conhecimento é reputado como uma atividade humana que está sempre em construção de acordo com o exposto por Bachelard (2004).

Um conceito matemático não existe independentemente de suas representações, mas não deve ser confundido com nenhuma delas. Além disso, o fato de não ser possível determinar todas as possíveis representações de um objeto matemático sugere a busca de novas formas de representá-los, novos referenciais e modelos, mundo artificiais para interpretá-los.

Uma abordagem *complementar* entre o caráter *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da própria atividade cognitiva (OTTE, 2003b).

Há uma interação entre sujeito e objeto por algum tipo de mediação, que pode ser entendida como qualquer coisa que produz uma intermediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. “E um objeto para o qual não podemos produzir uma relação com algum meio qualquer não existe para nós como objeto do conhecimento. Por isto é que também o objeto do conhecimento não é definível sem os meios” (OTTE, 1993, p. 224).

Otte (1993) chama a atenção para o fato de que a equação A=B pode ser interpretada de modo que A e B tenham diferentes aspectos *intensionais* de uma mesma *extensão* ou diferentes designações de um mesmo objeto matemático. Os termos A e B têm a mesma referência, na qual os significados ou o modo de apresentação são diferentes.

A esse respeito, a dinâmica do conhecimento consiste evidentemente no fato de que novos objetos são trazidos para o pensamento e novos conhecimentos são produzidos; no caso da Matemática, tais objetos não são simplesmente encontrados em algum lugar, nem podem ser tocados com o dedo, eles são transmitidos pela práxis social-histórica do homem.

O objeto teórico surge, ao final, como invariante de todas as possíveis e diferentes descrições e acessos metódicos. Assim os termos A e B podem ter diferentes aspectos *intensionais* e recair sobre a mesma *extensão*. Cada objeto pode ser considerado e definido sob vários pontos de vista.

Nesse caso,

> [...] a variedade também aparece como multiplicidade dos interesses subjetivos e das funções e aplicações subentendidas do saber. Dessa forma, é forçada uma relativa independência do saber, como revela-se em seu caráter teórico. O saber nem pode ser identificado com experiências e intuições individuais, nem pode ser completamente reduzido a significados conteudísticos isolados, isto é, ser concebido como reflexo direto de um objeto. A teorização do saber é assim caracterizada por um duplo distanciamento – tanto do sujeito como do objeto –, e dessa forma surge no primeiro plano a complementaridade entre objetos e meios como o processo real da dinâmica do saber (OTTE, 1993, p. 225).

O uso predicativo ou por meio de um atributo é transformado em um uso referencial a fim de sintetizar novas estruturas relacionais. Isto implica que na Matemática a relação entre o particular e o geral é de suma importância, e talvez mais importante do que a busca por fundamentações absolutas e objetivas (OTTE, 1993).

Considerando que na Matemática não há nenhum nível absolutamente ontológico, e que ela não é uma ciência totalmente analítica nem puramente descritiva; considerando ainda a impossibilidade de definir a realidade matemática independente da própria atividade cognitiva, parece-nos plausível concluir que a Matemática não é puramente *intensional* tampouco exclusivamente *extensional.*

Otte (2003b, p. 208) nos alerta que os alunos, em geral, têm dificuldades com as equações em virtude da interpretação do sinal de igualdade. Eles o veem apenas com uma característica funcional de entrada e saída. Isso representa uma compreensão direta da equação; para esses alunos, o conceito de equação não foi transformado em um objeto de reflexão matemática; essa compreensão funcional ou puramente instrumental (conforme exposto por Skemp em 1976) é insuficiente, e mesmo as tarefas elementares requerem uma interpretação diferente da equação, uma interpretação que a trate como um conceito independente.

Por exemplo, os alunos compreendem bem que a mesma operação pode ser realizada dos dois lados de uma equação, mas, em geral, não compreendem que adicionar ou subtrair uma equação A=B a outra equação, utilizando A de um lado da igualdade e B do outro, é tão legítimo como A=A, ou seja, acrescentar ou subtrair A dos dois lados da igualdade (OTTE, 2003b, p. 208).

Segundo Otte, tais alunos pensam apenas em termos instrumentais, mas têm dificuldades com a predicação direta, ou seja, com os significados ou referências dos termos. A cognição matemática, entretanto, é caracterizada pela *complementaridade* predicativa ou *extensional* e as interpretações instrumentais ou *intensionais* (OTTE, 2003b, p. 208).

A *extensão* de uma ideia diz respeito aos assuntos a que essa ideia é devida. Número, nesse sentido, é simplesmente tudo o que satisfaz os axiomas de Peano, ou que são apreendidos pelos axiomas, isto é, a *extensão* de um conceito é composta por todas as aplicações possíveis da teoria axiomática a que se refere o conceito (OTTE, 2003b, p. 210).

Mas é fato que nós não podemos apresentar a totalidade de aplicações de um determinado conceito; a Matemática não pode ser interpretada como uma ciência puramente *extensional*.

Na Matemática, desenvolver uma teoria é poder compreender completamente uma ideia, que pode ser aprimorada com fundamentos lógicos e complementada por possíveis aplicações. Em geral, o desenvolvimento das teorias tem ao mesmo tempo as ideias como início e base, e isto significa que elas são dadas intuitivamente com certa imprecisão e devem motivar a atividade e orientar as possíveis formas de representações (OTTE, 2003b, p. 210).

Os conceitos fundamentais ou as ideias básicas são referências, e são elas próprias que auxiliam os processos de distribuição e articulação. Se fosse impossível que o conceito teórico fornecesse a base de seu próprio desenvolvimento, a única maneira seria tentar ver as novas ideias e os novos conceitos como similares aos velhos. Isso implicaria, em princípio, que nada novo poderia surgir, porque deveria ser reduzido ou remanejado ao previamente dado (OTTE, 2003b).

Explicar algo novo significaria tentar reduzi-lo ao que já é conhecido. Se, inversamente, o novo se transformasse exclusivamente na base do mundo e na forma de pensar sobre o mundo, num sentido absoluto, haveria total desinteresse à mudança de perspectiva em razão da inteligibilidade da realidade perante o totalmente novo. Isso transformaria o desenvolvimento do conhecimento em um processo aleatório.

Se desejamos evitar isso, os aspectos *intensionais* e *extensionais* de nossos conceitos devem ser vistos como *complementares*, devem desenvolver-se com uma independência relativa e, por outro lado, permanecer conectados de forma circular (OTTE, 2003b, p. 211).

A interdependência dos atributos diante dos usos referenciais dos termos é muito mais proeminente a respeito de conceitos matemáticos do que nos empíricos, porque os objetos matemáticos não existem independentemente de suas representações, e também porque seu caráter instrumental é muito mais utilizado, como evidenciado por Skemp (1976).

A Matemática, considerada como atividade semiótica, deve ser caracterizada pela *complementaridade*. Em outras palavras, há a necessidade de estabelecer tal *complementaridade* dentro do processo e da evolução da atividade cognitiva (OTTE, 2003b, p. 214).

## 3.2 A complementaridade na história da Matemática

A *complementaridade* inerente aos conceitos matemáticos é um fenômeno histórico (KUYK, 1977; OTTE, 2003b). Consequentemente, para melhor compreensão de sua origem, nós devemos consultar a História e a Filosofia da Matemática.

No início do século XIX, a Matemática Pura surge baseada na análise das demonstrações e na criação de alguns conceitos mais abstratos, com isso ocorre a quebra da harmonia entre meios e objetos da atividade matemática.

A atividade matemática e suas fontes caracterizam momentaneamente um grande número de conexões entre os resultados de problemas que aparentemente eram distintos. Nesse contexto, a Geometria Analítica de Descartes inicia um processo que se torna dominante no século XIX.

Um aspecto *complementar* desse processo era igualmente indispensável, embora ocorresse muito mais tarde, e pode ser chamado de geometrização do pensamento relacional, tornando-se dominante no início do século XIX, quando a álgebra foi transformada em linguagem de uma ciência estrutural.

O próprio Boutroux (1920, apud OTTE, 2003b, p. 215) caracteriza a ruptura na história da Matemática ocorrida no começo do século XIX em dois eventos marcantes. Em primeiro lugar, desaparece a harmonia entre meios e objetos da atividade matemática. Quando se propõe um problema, é quase impossível prever quais são os métodos “geralmente indiretos” que permitem resolvê-lo. Contrariamente, há uma quebra no mecanismo da arte matemática, nem sempre se vê claramente quais são os problemas em que devemos aplicar essa arte. Em outros termos, o dualismo manifesta-se no seio da Matemática Pura (BOUTROUX, 1920, apud OTTE, 2003b, p. 215).

Boutroux (1920, apud OTTE, 2003b, p. 216) acredita que a Matemática se transformou a partir de então em uma ciência analítica fundamentada unicamente no pensamento conceitual.

O fato matemático é independente da roupagem lógica ou algébrica sob a qual procuramos representá-lo. Com efeito, a ideia que temos é bem mais rica e mais completa que todas as definições que podemos dar, que todas as formas ou combinações de sinais ou de quaisquer propostas possíveis utilizadas para exprimi-las (BOUTROUX, 1920, apud OTTE, 2003b, p. 216).

Outro ponto de vista surgiu quando Cantor definiu os números reais como classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. A ideia não é mais fazer aproximações de uma quantidade dada anteriormente, mas estabelecer um novo tipo de número por meio de um conjunto de números mais elementares.

Construtivistas, como Kronecker, tentaram fundamentar o contínuo dos números reais a partir dos números inteiros utilizando métodos ou leis que determinam cada termo de uma sequência infinita.

No entanto, Cantor discordou do fato de que os métodos de Kronecker e os símbolos numéricos poderiam descrever completamente o contínuo (CANTOR, 1980, p. 384, apud OTTE, 2003b). A descontinuidade essencial ou a revolução veio, de acordo com Boutroux, com a introdução do infinito atual no pensamento matemático. De fato, o método de Kronecker leva aos números computáveis, isto é, seriam os números cujo desenvolvimento decimal é dado por algum tipo de algoritmo. Os números que conhecemos são números computáveis.

Por exemplo, o número **e** que não é racional nem algébrico é um número computável. Nós não sabemos como falar de um número específico que não seja definitivamente descritível, entretanto nenhum conceito geral de número emerge desse modo.

A discussão de que tudo pode ser explicitamente descrito é parte dos resultados de conjuntos enumeráveis. Entretanto, os números não computáveis, não podem ser eficazmente enumerados, porque aplicar o método da diagonal de Cantor conduziria a um paradoxo (MINSKY, 1967, p. 161, apud OTTE, 2003b).

O ponto essencial sobre a noção de conjuntos infinitos de Cantor está exatamente na transformação de um conceito em um objeto que se opera com as *extensões* dos conceitos. Esse movimento é realçado e torna-se visível nas próprias considerações filosóficas de Cantor, por exemplo, na sua afirmação de que "a essência da Matemática reside em sua liberdade", que é citada frequentemente por diversos autores.

Cantor distinguia a Matemática Pura da Matemática Aplicada, considerando que esta última não tinha tanta liberdade quanto a primeira. Ele acreditava em uma harmonia preestabelecida. A esse respeito, ele escreve:

> [...] há dois sentidos, que podem ser observados ao falar sobre a realidade ou a existência da totalidade dos números, sejam eles finitos ou infinitos. De um lado nós podemos considerar números reais, como nós os estabelecemos por meio das definições em nossa mente [...]. Por outro lado nós podemos atribuir a realidade aos números, considerados imagens ou expressões dos eventos e as relações de um mundo exterior que confronte o intelecto [...]. Eu não tenho nenhuma dúvida que esses dois tipos de realidade virão sempre juntos no sentido que um conceito, que seja real de acordo com o primeiro significado do termo, também será sempre real em maneiras inumeráveis de acordo com o segundo significado, embora seja uma das tarefas mais difíceis da metafísica verificar essa tese[6] (CANTOR, 1980, p. 181ff; apud OTTE, 2003b, tradução nossa).

A noção de conjuntos tem uma natureza dual. Representa um conceito – coleções com um elemento – ou um conjunto de objetos – coleções com muitos. A crise fundamental resultou da tentativa de eliminar a *complementaridade* e introduzir uma diferença absoluta entre coisas de um lado e conceitos do outro.

Os conjuntos infinitos não podem, entretanto, ser dados por *extensão*. Podem somente ser apresentados *intensionalmente* por uma descrição conceitual. Um conjunto infinito é consequentemente uma abstração. Uma ideia ou uma abstração no sentido atribuído por Peirce é algo cuja modalidade de existência depende da existência de outras coisas fundamentais. Nesse sentido,

[6] […] two senses in our talking about the reality or existence of the whole numbers be they finite or infinite. On the one hand we may consider numbers to be real insofar as we have established them by means of definitions in our mind […]. On the other hand we may attribute reality to numbers, as they must be considered the images or expressions of events and relations of an outer world that confronts the intellect […]. I have no doubt that these two kinds of reality will always come together in the sense that a concept, which is real according to the first meaning of the term, shall also always be real in innumerable ways according to the second meaning, although it is one of the most difficult tasks of metaphysics to verify this thesis.

um conjunto é uma abstração *hypostatic* ou uma ideia, baseada na existência de seus próprios elementos (OTTE, 2003b, p. 218).

Dessa maneira, os meios e as condições do pensamento transformam-se em objeto em si próprios. O uso predicativo ou atributivo de algum conceito é transformado em um uso referencial a fim de incorporar as entidades assim sintetizadas em novas estruturas relacionais.

Supomos consequentemente que o significado matemático deve concentrar-se nos termos da *complementaridade* da *extensão* e da *intensão*. O significado tem dois componentes objetivos: um que consulta os objetos ou os indica; o outro que se relaciona às expressões linguísticas ou às representações diagramáticas, que mostram as características do objeto da atividade. A *complementaridade* é estabelecida por processos de generalização e de verificação (OTTE, 2003b, p. 219).

Em outras palavras, há dois componentes objetivos do sentido: um que consulta os objetos, e que é apropriado nomear de *extensional*, ou o componente da correspondência do sentido; o outro que se relaciona aos conceitos ou expressões linguísticas, e que é apropriado chamar de *intensional* (OTTE, 2003b, p. 219).

## 3.3 Complementaridade e o conceito de número

O debate sobre a relação entre o aspecto *intensional* e as visões *extensionais* da Matemática foi particularmente intenso a respeito do conceito de número.

Examinaremos com maior ênfase a obra *Introdução à filosofia matemática* de Russell, publicada pela primeira vez em 1919; citaremos aqui a edição brasileira publicada em 2007. O objeto principal do livro de Russell é o conceito de número e tudo o que se refere a esse conceito.

No início de seu livro ele aborda os números naturais com base nos axiomas de Peano, com grande ênfase no conceito de número ordinal, e posteriormente faz menção à cardinalidade, ressaltando que:

> Seria possível sugerir que, em vez de fixar "0", "número" e "sucessor" como termos cujo significado conhecemos, embora não sejamos capazes de defini-los, poderíamos deixá-los representar quaisquer 3 termos que verifiquem os cinco axiomas de Peano. Nesse caso eles deixarão de ser termos que têm um significado definido, embora este não seja definido: serão termos "variáveis" com relação aos quais fazemos certas hipóteses, a saber, aquelas expressas nos cinco axiomas, mas que são sob outros aspectos indeterminados. Se adotarmos esse plano, nossos teoremas não serão provados com relação a um conjunto determinado de termos chamado "os números naturais", mas com relação a todos os conjuntos de termos que possuam certas propriedades (RUSSELL, 2007, p. 27).

Essa é, certamente, a compreensão comum de uma abordagem axiomática. Isto também pode ser expresso dizendo-se que a aritmética não trata de coisas que existam concretamente, mas sim de relações gerais ou objetos ideais.

Mas Russell não se satisfaz com este ponto de vista, ressaltando que a abordagem de Peano não fornece uma base adequada para a aritmética. Para ele,

> Em primeiro lugar, não nos capacita a saber se há algum conjunto de termos que verifique os axiomas de Peano; não dá se quer a mais leve sugestão de alguma maneira de se descobrir se conjuntos desse tipo existem. Em segundo lugar, como já foi observado, queremos que nossos números sejam tais que possam ser usados para contar objetos comuns, e isso requer que nossos números possuam um significado definido, não que meramente possuam certas propriedades formais. Esse significado definido é definido pela teoria lógica da aritmética (RUSSELL, 2007, p. 27).

De acordo com Russell, nem Peano nem Hilbert, com suas axiomáticas, seriam capazes de definir o que é número. Frege também tinha uma ideia semelhante, para ele uma aritmética feita apenas com símbolos, sem nenhum significado, não teria qualquer tipo de aplicação.

Conforme afirma Russell, para que o conceito de número tenha alguma *extensão* real, nós temos que compreendê-lo como o representante de uma quantidade e fornecer uma aplicação para o conceito definido. Isto somente pode ser feito axiomaticamente; entretanto, a noção de axiomas não deve ser compreendida no sentido de Peano, o termo deve preferivelmente ser concebido de acordo com a tradição euclidiana, isto é, como uma verdade intuitivamente evidente e como uma pré-condição da Matemática (OTTE, 2003b, p. 222).

Segundo Otte (2003b), pode-se contrapor à opinião de Russell sobre a axiomática moderna, reivindicando que o interesse está precisamente na aplicabilidade e nas múltiplas interpretações dos sistemas axiomáticos reforçando o significado do método axiomático, contemplando a *complementaridade* entre os aspectos *intensionais* e *extensionais*. Detalhadamente, é difícil compreender por que o significado de todos os conceitos deve ser totalmente fixado antes de possíveis aplicações (OTTE, 2003b, p. 223).

A axiomática matemática, ao contrário, é frequentemente caracterizada pela afirmação de Hilbert, em relação aos axiomas da geometria plana, os termos “ponto” e “reta” poderiam ser substituídos por “copo de cerveja” e “mesa”, e isso implica dizer que cada teoria pode ter múltiplas aplicações.

De acordo com Otte (2003b, p. 223), todo o conhecimento objetivo é, de fato, conhecimento relacional. Após solidificar algumas suposições ou formas, procura-se esboçar suas consequências.

Conforme afirmamos, Russell julgou o método axiomático incompleto quando termos não especificados ocorrem dentro dos axiomas. Os termos não interpretados devem ser especificados de maneira que permita estabelecer uma conexão com a aplicação pretendida. Entretanto, uma interpretação final e absoluta de conceitos matemáticos não é geralmente possível nem desejável (OTTE, 2003b, p. 224).

A determinação axiomática de conceitos matemáticos estará sempre incompleta, e deve-se fazer uma análise consciente a respeito da possibilidade de que um conceito tenha uma extensão vazia (os axiomas podem ser inconsistentes). Se pretendermos introduzir todos os conceitos por meio de definições completas, tais definições devem necessariamente fazer suposições metafísicas e psicológicas sobre o mundo, caso contrário, faremos um empreendimento fútil (OTTE, 2003b, p. 224).

Finalmente, não há, de fato, nenhuma possibilidade de determinar o significado de número desconectado de uma estrutura conjunto teórica.

Em um artigo intitulado What numbers could not be, Benacerraf (1965) mostra que o conceito de número pode ser reduzido ao conceito de conjuntos de várias maneiras distintas, sem possibilidade de escolher dentre as interpretações conjunto teóricas aquela que realmente caracteriza a verdadeira identidade dos números naturais em termos de conjuntos.

Benacerraf (1965) conclui que os números não podem ser reduzidos exclusivamente a conjuntos, ou conjunto de conjuntos, pois existem muitos significados distintos para dar conta e pelas referências de palavras que os números ou termos determinam na teoria. Mesmo que fosse possível reduzir univocamente o conceito de número à noção de conjuntos, não haveria um ganho representativo, pois o próprio Russell descobriu os paradoxos teóricos dos conjuntos.

## 3.4 Complementaridade na filosofia matemática

As discussões filosóficas em relação à história dos fundamentos da Matemática não estão finalizadas; um dos motivos para acreditarmos nesta afirmação pode ser ancorado nas diferenças essenciais entre as correntes filosóficas.

Se consultarmos algumas referências recentes sobre a filosofia da Matemática (por exemplo, BUNGE, 2005), podemos prontamente distinguir o intuicionismo construtivista, do formalístico e de pontos de vista abstracionistas.

É certo que a situação após a segunda metade do século XX difere das discussões ocorridas no final do século XIX. Após os resultados de Gödel, podemos dizer que há mais unanimidade hoje do que havia anteriormente.

Conforme Kuyk (1977), há pelo menos três razões que podem ser dadas para este desenvolvimento.

Em primeiro lugar, os resultados de Gödel mostraram que a forma tradicional de estabelecer teorias, utilizando exclusivamente sistemas axiomáticos, está longe de ser completa. Em outras palavras, os resultados que podem ser provados em uma abordagem axiomática estão além do que pode ser formulado em linguagem natural, isto é, versões não axiomáticas de tais teorias. Assim, o ponto de vista intuicionista a respeito do papel limitado da linguagem é enfatizado pelas descobertas da escola formalística (KUYK, 1977, p. 129).

Para o matemático intuicionista Brouwer a natural atividade matemática não pode ser completamente formalizada e axiomatizada. Aparentemente, Brouwer ficou consternado quando seu discípulo, Heyting, formulou um grupo de axiomas para a lógica intuicionista (BUNGE, 2005, p. 63).

Há, em segundo lugar, um conhecimento crescente em relação aos dilemas tradicionais e antigos, tais como o *apriorismo* e *empirismo*, *realismo* e o *idealismo* etc., no entanto ainda não existe clareza em relação a muitos dilemas. Assim, pode-se sugerir que, de certa forma, ocorre um retorno ao realismo moderado (KUYK, 1977, p. 129).

Em terceiro lugar, numerosas considerações intermediadas entre as três tendências gerais do *logicismo*, *intuicionismo* e o *formalismo* foram expressas, evidenciando um conhecimento crescente (KUYK, 1977; BUNGE, 2005).

Para Kuyk (1977, p. 130) o ponto de vista pluralista da ciência foi desenvolvido após a Segunda Guerra Mundial. Na verdade, a atitude pluralista enfatiza a formação de muitas ciências interdisciplinares, entre as quais as teorias da informação, a cibernética e as ciências da computação são alguns dos exemplos.

Essa atitude foge do tipo de dogmatismo que possa excluir o desenvolvimento de qualquer ramo da ciência. Esse pluralismo, contudo, não releva o fato de que problemas filosóficos permaneçam inerentes na Matemática, embora seja pouco provável que matemáticos contemporâneos acreditem na existência de um único tipo de Matemática.

De certa forma, a história dos fundamentos da Matemática pode ser observada como um conjunto de tentativas para unir uma variedade de aspectos da atividade matemática. Alguns destes aspectos são ressaltados por Kuyk (1977):

> (1) o papel da lógica, ou "lógica ingênua", como espontânea, habilidade inata do homem para formar conceitos das coisas e uma infinita variedade de conceitos das coisas, conceitos dos conceitos das coisas, etc.;
>
> (2) o papel da linguagem, como uma ferramenta comunicativa, que retém informação;
>
> (3) o papel da lógica (formal), como um conjunto historicamente revelador de regras do pensamento (mais ou menos formalizados), criados com a proposta específica de ordenar e organizar, coerentemente e de forma dedutível, os conceitos pertencentes aos domínios específicos do pensamento (tais como matemáticos, físicos, etc.);
>
> (4) o papel do pensamento construtivo, no sentido de construir novas entidades das entidades dadas de tal maneira que as propriedades das novas propriedades possam ser derivadas de propriedades de entidades anteriores, sem o uso de terminologia que pré suponha a existência de um mundo platônico de todas as propriedades de alguma forma;
>
> (5) o papel da intuição, como uma ganância imediata de evidência relacionada às coisas, por exemplo, uma forma de chegar ao conhecimento, independentemente da dedução;
>
> (6) a avaliação da questão, se em Matemática há um "primeiro conhecimento" como oposto ao "extremo conhecimento derivado", ou "conhecimento secundário" (por exemplo, o conceito de número é primário ou o conceito de um "conjunto" é básico a tudo da Matemática, como os Cantoristas assumem?);
>
> (7) uma descrição do fato de que ao longo dos caminhos dedutivos a aplicação dos métodos matemáticos puros, sempre levam ao verdadeiro conhecimento (aproximado) sobre o mundo, por exemplo, que as propriedades básicas da Matemática do número e o conhecimento da topologia e análise possam encontrar aplicações nos domínios não matemáticos (por exemplo, o conceito de grupo que é aplicável em física é acidental ou as estruturas matemáticas devem ser consideradas como parte de um modelo de pensamento mais amplo, incluindo o pensamento nas ciências (naturais)?) (KUYK, 1977, p. 130, tradução nossa).

Esse filósofo e matemático sustenta que todos esses aspectos têm que ser levados em conta numa filosofia de valores matemáticos. Há, contudo, dois caminhos diferentes pelos quais se pode lidar com estas questões, a saber, uma questão implícita e outra explícita.

Explicar o papel dos fatores mencionados é filosofar ou teorizar sobre Matemática. No passado, a maioria das teorias avaliou dessa forma os papéis dos diferentes aspectos, do ponto de vista de um único, ou considerando poucos deles, desse modo omitindo, negando ou negligenciando o papel dos outros (KUYK, 1977).

Além disso, a maioria das teorias relacionadas aos fundamentos considera tudo o que se pode chamar de Matemática, ou seja, todas as áreas da Matemática, mesmo aquelas que amplamente divergem de uma teoria central e unificada. Quando esta área (teoricamente central) ou algumas de suas características salientes é considerada como típica para toda a organização matemática, então o reducionismo filosófico acontece (KUYK, 1977).

O próprio Kuyk (1977, p. 132) menciona que qualquer soma, exercício ou cálculo pode ser considerado como um “experimento” em análise abstrata ou álgebra, mesmo se o significado da palavra “experimento” tenha que ser redefinido de alguma forma para distingui-la dos experimentos físicos.

Geralmente, num certo sentido, toda teoria tem uma tendência a simplificar. Assim certas características são acentuadas e outras apagadas. É compreensível que as principais tendências do formalismo e logicismo selecionem os aspectos lógicos formais da Matemática como seus pontos de vantagem em vez de aspectos construtivo-intuitivos ou experimentais. Contudo, ao tentar explicar esta tendência, encontramos novamente o problema básico relacionado à distinção entre os métodos sintéticos e analíticos, entre construção e dedução.

A forma implícita de lidar com os aspectos básicos da Matemática começa com o trabalho do matemático. Para Kuyk (1977, p. 133), um matemático trabalhando em domínios, tais como teoria dos números, topologia, geometria algébrica, etc., nunca poderá evitar qualquer um dos sete aspectos mencionados. Todos eles estão engendrados naquilo que ele faz, especialmente quando o trabalho trata de uma extensão direta de teorias clássicas da Matemática. Por exemplo, é improvável que alguém que trabalhe com problemas na teoria dos números não use sua "intuição" com menor ou maior magnitude.

Assim, as ideias matemáticas que ele aplica estão mais próximas do que Kuyk (1977, p. 130) chamou de "lógica" no sentido do aspecto (1) do que lógica formal no sentido de (3). Naturalmente, como o desenvolvimento histórico da Matemática moderna mostra, as formas diferentes da lógica aplicada não devem ser separadas completamente.

Embora matemáticos que trabalhem nas áreas clássicas tenham que escolher de tempos em tempos, de maneira mais ou menos explícita, que grupo de teorias utilizar, ainda há uma natureza particular para a atividade deles. Tal natureza pode ser observada quando alguém simplifica o número de áreas inflexíveis da Matemática para a filosofia formalista ou intuicionista, entre outras correntes. O pensamento matemático criativo, inocente e espontâneo deve ser cuidadosamente distinguido da lógica formal (Kuyk, 1977, p. 133).

## 3.5 Alguns aspectos complementares entre o discreto e o contínuo na matemática

Podemos ver em algumas obras (KUYK, 1977; BUNGE, 2005) o debate em torno de dois tipos de existência na Matemática, um refere-se a uma forma "geométrica" (contínuo geométrico) outro a uma forma "discreta".

Em Kuyk (1977) há fortes argumentos de que não existe apenas um só tipo de existência em Matemática, e que considerar toda a Matemática no âmbito de um único conceito de existência altera a natureza de várias áreas da Matemática.

Por exemplo, é conhecido o fato de que Brouwer rejeitou qualquer referência a um contínuo "completo" como um conceito útil, chamando-o de "teológico" ou "metafísico". Considerando as críticas de Brouwer, é plausível admitir que há na Matemática dois tipos diferentes de existência, que ocorrem interligados, ou seja, uma forma "geométrica" e uma "discreta".

Para Brouwer, falar de um conceito puro de contínuo é considerar na Matemática o infinito potencial. Para ele o contínuo é algo potencialmente construtível a partir das noções discretas, discordando de Cantor, pois este último aceitava a hipótese de que a mente humana é capaz de construir além do infinito potencial, o infinito atual (KUYK, 1977, p. 136).

Na tentativa de relacionar as aplicações da Matemática e aspectos geométricos clássicos à Matemática Pura, Kuyk (1977, p. 137) presumiu que alguém possa conceber o conceito de contínuo geométrico sem postular que a mente humana seja capaz de construir o infinito atual. Segundo ele, para realizar isto, temos que admitir que os conceitos de ponto, reta, plano, etc., possam ser diretamente concebidos como "entidades geométricas", e que a existência deles é independente de qualquer habilidade construtiva.

Kuyk (1977, p. 137) defende a hipótese de que há pelo menos duas maneiras distintas de fundamentar os conceitos de discreto e contínuo, sustentando-as nas investigações genético-epistemológicas de Piaget. Essas investigações confirmam que as chamadas intuições de espaço desenvolvem-se, durante o processo de maturação, de uma maneira relativamente independente do conceito de número natural.

Como aqui não abordamos a "genética epistemológica" de Piaget, limitamo-nos a expressar que suas descobertas legitimam a hipótese de que a Matemática está baseada em pelo menos duas intuições básicas, as intuições de discreto e contínuo, e que cada uma corresponde a um tipo particular de existência, ou seja, existência no sentido de número natural e discreto e existência no sentido de contínuo e espacialização (geométrico).

Ressalta-se aqui a necessidade da *complementaridade* em relação à existência do discreto e do contínuo nas "entidades" básicas. Para Kuyk (1977, p. 137), elas são qualidades do mundo em que vivemos. Ele ressalta que não se trata de dizer que elas são qualidades sensoriais de um tipo ou de outro, tampouco existem num mundo platônico de entidades perfeitas.

Aqueles que trabalham com Matemática Aplicada têm uma tendência a seguir os passos e os significados físicos dos parâmetros em suas fórmulas, lidando assim com números e entidades geométricas como qualidades.

A história da Matemática, como uma história de emancipação da Matemática Pura a partir das ciências aplicadas, é marcada pelo esforço dos geômetras em justificar as "geometrias". Eles definiram tanto em termos de aplicação física como de modelos recentemente construídos a base de entidades geométricas, como algum tipo de material de criação (KUYK, 1977, p. 138).

Para Kuyk (1977, p. 138), parece totalmente errado restringir o conceito de "entidade geométrica" àquelas tridimensionais, porque a própria física nos fornece muitos exemplos de magnitudes que são dependentes de mais de três variáveis. Assim, é possível aceitar a ideia de qualidades com maiores dimensões. Isso não muda o fato de que em dimensões menores (duas ou três dimensões) a mente humana experimenta o uso de representações por meio de seus sentidos de visão, ao passo que em dimensões maiores ela poderá produzir menos utilizando tal recurso.

Do ponto de vista da história do empirismo, parece necessário enfatizar o fato de que a mente humana tem uma habilidade inata para manipular mentalmente e operar livremente com as entidades geométricas básicas.

Ela geralmente não as manipula como se elas fossem fontes autônomas de conhecimento, mas ela parece preferir construir "modelos" geométricos destas entidades, nas quais os axiomas das geometrias específicas são satisfatórios; ela, (a mente) então, passa para novos tipos de experiência e experimentos em um mundo que ela própria ajudou a criar, relativamente independente do mundo físico (KUYK, 1977, p. 139).

Encontramos aqui uma situação que é comum a todas as áreas da Matemática: um sistema de axiomas que define uma "estrutura matemática" específica (geometrias não euclidiana, grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, etc.), que admite em geral mais do que um "modelo" construtivo, mesmo que geneticamente os axiomas fossem formulados com visão para um ou somente poucos exemplos importantes de modelos que pudessem ou não ter uma ligação com a física.

Novamente ressaltamos a necessária *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* na Matemática, ou seja, um par composto por uma estrutura axiomática e por modelos de tal estrutura (OTTE, 2003b).

Formular um sistema de axiomas para uma determinada teoria significa criar uma linguagem que seja relativamente independente do domínio das entidades ("modelos") para que essa língua possa ser aplicada. Isso não deve significar que consideramos tais modelos como pré-lingual no sentido de que a forma matemática dos mesmos e a linguagem da teoria axiomática seguem a construção dos modelos como se fosse "a unção natural do pensamento". Ao contrário, a verdadeira interação entre a linguagem axiomática e os modelos é tal que às vezes cada uma delas precede a outra (KUYK, 1977).

Um exemplo de raciocínio formal que precede a construção dos modelos é, naturalmente, fornecido pela história da geometria não euclidiana.

Para Kuyk (1977, p. 142), uma função antecipatória de linguagem também é evidente quando a manipulação de uma fórmula (ou um conjunto de fórmulas) leva a um resultado que não poderia ser pensado verdadeiro antes da manipulação. Para ele isto poderá ocorrer em cada nível de pensamento matemático.

Outro aspecto relevante considerado por KuyK (1977) evidencia que é típico do pensamento *complementarista* considerar o discreto e o contínuo como aspectos *complementares* do mundo, de forma análoga ao princípio da *complementaridade* na Física.

Para Kuyk (1977, p. 146) poderíamos dividir subáreas da Matemática em duas categorias, ou seja, a categoria daqueles que têm suas origens (epistemológica) e propósito final no domínio do discreto e na teoria dos números naturais, e aqueles que têm o domínio no contínuo e na geometria. Ele afirma ainda que a natureza da Matemática não decorre simplesmente do método abstrato, formal ou axiomático, mas que mesmo as abstrações se tornam possíveis, em razão da existência do relativamente simples e claro, intuições básicas de continuidade e descontinuidade.

Não há como dar suporte original às crenças logicistas e formalística nos métodos axiomático e formal, mesmo que esses métodos sejam muito apropriados para a formulação das teorias puramente matemáticas.

Uma abordagem *complementar* para a Matemática é concebida conforme o desejo de respeitar o conjunto de teorias que estão no bojo da Matemática Clássica e seu desenvolvimento epistemológico, considerando a unidade original de uma ciência aplicada (KUYK, 1977, p. 148).

Historicamente, somente quando a Matemática tornou-se mais abstrata surge a tendência crescente em gerar conjuntos de conjuntos de conjuntos etc., e parece coerente considerar que aqueles que optaram por um ponto de vista matemático a *priori* foram compelidos a fazer uma escolha entre uma atitude (filosófica) que tendesse tanto para uma direção abstracionista quanto para uma direção idealista-construtivista.

Segundo Kuyk (1977), o matemático preocupado com a *complementaridade*, que considera a Matemática *a posteriori*, para construir uma teoria a partir de "uma base inicial" mantendo a visão geral da teoria dos conjuntos, não se posiciona em uma ou outra corrente, enquanto formula uma norma de linguagem. Porque o termo "construir a partir de uma base inicial" não significa nem existência num sentido platônico, nem "construções de forma geral" que aumente os predicados ou as propriedades epistemológicas de maneira totalmente abstracionista.

Possivelmente, os construtivistas tenderiam a concordar com a última conclusão, mas tentariam buscar outro ponto de vista da Matemática, sustentando que as entidades matemáticas são construções da mente humana, não existe epistemologia nas bases da Matemática e então deveríamos parar de acreditar numa conexão intrínseca entre os aspectos puros e aplicados da Matemática.

A *complementaridade* anda numa corda bamba entre o abstracionismo-realismo e um estreito construtivismo, que não permite ir contra todo o sistema axiomático.

Portanto, acredita-se que não haja somente um nível de exatidão, mas muitas formas e muitos níveis, com ramificações na Matemática. Eles podem ser praticados, em virtude de entidades matemáticas básicas e suas regras de composição, disponíveis a quase todas as pessoas e, por isso, não têm necessidade de ser esclarecidas ou justificadas por qualquer teoria, porquanto não existe problema em relação a elas (KUYK, 1977, p. 155).

Na *complementaridade* uma parte constituinte da atividade matemática é o procedimento construtivo a partir de qualidades básicas como “material de construção”; e que a segunda parte constituinte da atividade matemática é o conhecimento sobre as construções matemáticas (incluindo as qualidades básicas), assim como conhecimentos sobre o mundo. A formulação desse conhecimento acontece então em modelos dedutíveis (KUYK, 1977, p. 156).

Para Kuyk (1977, p. 157), a história da Matemática dos últimos cem anos, de alguma forma, é um processo que historicamente pode ser dito como processos dedutíveis, no qual as duas partes constituintes da atividade matemática desempenham um papel *complementar*.

A Filosofia da Matemática necessariamente emprega uma linguagem que, em geral, é uma mistura entre linguagem natural e linguagem formal ou uma linguagem lógica, e, por essa natureza, é aberta à inexatidão e contradições. Poderá, apesar disso, servir para unir as experiências parciais dos matemáticos, físicos e demais cientistas em uma unidade incerta (KUYK, 1977, p. 161).

# CAPÍTULO 4

## A NATUREZA DO NÚMERO: CORRENTES FILOSÓFICAS

Diversos filósofos e matemáticos buscaram responder a pergunta “O que é número?”. Como veremos, as respostas apresentadas por diversas correntes filosóficas são insuficientes do ponto de vista da *complementaridade*. Na verdade o que ocorre é uma forma de “reducionismo” conforme descrito por KuyK (1977), ou seja, nas tentativas de respostas são considerados apenas os aspectos *intensionais* ou apenas *os extensionais* do conceito de número, e não a *complementaridade* entre eles.

A teoria de Conway pode fornecer uma resposta à questão. Podemos afirmar que número é um “jogo”, assim como fez Conway (1999, p. 300). Certamente devemos considerar que Conway não estava buscando responder a pergunta “O que é número?” do ponto de vista filosófico quando sustentou que “números são jogos”, mas sua teoria pode ser usada para apresentar uma resposta a essa questão, visto que garante a *complementaridade* na conceituação de número.

Acreditamos que para aceitar essa possibilidade de resposta devem-se levar em consideração, além dos pressupostos teóricos (no nosso caso a *complementaridade*), as tentativas de respostas de outras correntes filosóficas.

No presente capítulo discorremos sobre as respostas de algumas correntes filosóficas para as questões que envolvem a natureza do número. Faremos uma apresentação sucinta de ideias centrais acerca do conceito de número e de concepções de alguns matemáticos que se dedicaram aos fundamentos da Matemática e ao conceito de número.

## 4.1 Correntes filosóficas

As teorias matemáticas no final do século XIX confrontavam-se com questões filosóficas sobre a existência e a natureza dos conceitos matemáticos, como podemos observar nas obras de Frege e Russell. Dentre as questões fundamentais inclui-se saber se o conhecimento matemático é *empírico* ou *a priori*.

O termo "empírico" significa "baseado na experiência" e a expressão "a priori", possível de obter antes da experiência. Segundo Hessen (1999, p. 53), conhecimentos *a priori* "existem apenas na medida em que nosso espírito nasce com a faculdade de construir determinados conceitos independentemente da experiência". Em outras palavras, podemos entender o conhecimento *a priori* como conhecimento que não necessita da justificação pela experiência.

O conhecimento empírico é caracterizado pelas ideias abstraídas pela mente a partir do que é dado na experiência sensorial, ou seja, podemos dizer que o conhecimento empírico é o conhecimento que requer justificação de experiência.

Nos debates filosóficos em torno da natureza do conceito de número, emergem questões relacionadas ao conhecimento *a priori* ou ao conhecimento empírico, assim como questões que envolvem atributos ou referências para o conceito de número (aspectos *intensional* ou *extensional* do conceito de número).

Tradicionalmente, pensadores racionalistas são aqueles que sustentam a primazia do conhecimento *a priori*; empiristas, os que atribuem maior importância ao conhecimento *empírico*.

Conforme exposto por Barker (1969), nominalistas são aqueles que sustentam que os números não são entidades abstratas; para eles jamais existiria possibilidade de interpretar a teoria dos números de modo a fazê-la resultar verdadeira, sem considerar como referência os objetos concretos.

Para esse mesmo filósofo, conceitualistas são aqueles que defendem que os números existem e são entidades abstratas, produzidas pela mente. Finalmente, podemos chamar realistas (ou platônicos) os que sustentam, sem reserva, que os números existem em sentido literal como modelos ideais, independentemente do nosso pensamento ou experiências.

## 4.2 Nominalismo e a natureza dos números

O nominalismo rejeita as concepções abstratas ideais (existência de objetos matemáticos no sentido platônico) e admite apenas as realidades empíricas. No campo matemático, podemos citar John Stuart Mill,[7] que foi um grande defensor dessa corrente, segundo a qual os números são fruto da abstração realizada a partir da realidade empírica. O número, enquanto tal, existe em sua representação ou em ato mental de natureza psicológica, nasce e morre com o ato do pensamento.

No nominalismo matemático, existe um pressuposto de natureza “metafísica”, um ingênuo realismo, pelo qual se considera real e válido apenas o que é de natureza sensível.

Conforme ressalta Barker (1969, p. 95), a teoria nominalista é afetada por graves lacunas, que, além de não tornarem compreensível a natureza da Matemática, tornariam impossível o desenvolvimento dos seus ramos mais complexos e abstratos.

Uma das lacunas apontadas por Barker refere-se aos números naturais, como, 0 ou 1. Tais números são únicos conceitualmente. Quando dizemos “zero” ou “um”, entendemos e queremos indicar o mesmo objeto mental. Se, ao contrário, o número fosse simples representação de realidades empíricas, como defendido pelos nominalistas, não nos compreenderíamos, pois cada pessoa poderia atribuir realidades diferentes ao número.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, ele afirma que, se admitíssemos que o número consiste em um ato psicológico individual, e nesse caso privado de uma noção comum inteligível, e como os atos mentais de cada pessoa são

[7] John Stuart Mill nasceu em Londres em 1806 e morreu na mesma cidade em 1873. Suas contribuições abrangem diversas áreas do conhecimento como a Lógica, a Psicologia, o Direito, a Economia e a Política. Publicou diversas obras, entre elas *A System of Logic*, composta por dois volumes, publicada em 1843. Suas principais contribuições encontram-se no campo da Economia.

distintos e individualizados, continuaríamos incompreendidos. Parece, portanto, indispensável prescindir do conteúdo inteligível dos números, a sua forma *intensional* ou transcendental.

Há números que abarcam entidades às quais não se pode fazer corresponder uma realidade fora do pensamento; é o caso do número zero, dos números transfinitos ou ainda de números não computáveis. Se aos números devessem corresponder necessariamente entidades concretas, se tivéssemos que indicar realidade concreta correspondente a cada número, grande parte da Matemática se tornaria impossível.

A partir dos raciocínios indutivos, baseados na evidência retirada das observações, dificilmente poderíamos estabelecer como provável qualquer conclusão a propósito da existência de um número infinito de coisas observáveis (de qualquer espécie).

Sendo assim, podemos chegar à conclusão de que a concepção segundo a qual os números são exclusivamente meras representações mentais de entidades concretas não fornece uma interpretação adequada da Matemática, nem torna possível a formulação de grande parte dos seus axiomas e teoremas.

O nominalismo, entendido como teoria que nega o valor ideal e autônomo da Matemática, reduzindo-a à interpretação ou tradução mental de realidades e relações concretamente existentes, é insuficiente para justificar a natureza e a existência de conceitos matemáticos. A teoria dos números não pode ser interpretada exclusivamente por uma visão nominalista.

## 4.3 Conceitualismo e intuicionismo

O conceitualismo é a doutrina segundo a qual os conceitos só existem como ideias em nosso espírito, não possuindo nada que lhes corresponda na realidade. Em outras palavras, doutrina segundo a qual as ideias gerais que servem para organizar nosso conhecimento são instrumentos intelectuais criados por nosso espírito, mas sem nenhuma existência fora dele.

A ideia de que objetos matemáticos, como número, são entidades abstratas nascidas do pensar parece bastante atraente a muitas pessoas. Entretanto, conforme alerta Barker (1969, p. 98), uma forma estremada de conceitualismo sustentaria que o espírito está dotado de poderes para criar os números e as entidades matemáticas que desejasse.

Afirma ainda que dessa forma os postulados matemáticos poderiam ser comparados aos feitos da divindade. Quando o matemático pensasse "postulemos que existam números de tal espécie", ele traria à luz tal espécie de números, sendo seu poder soberano de criação como o da divindade onipotente que retira do nada qualquer coisa que desejar.

Seria, no entanto, um exagero supor que o matemático estaria completamente livre de restrições em sua atividade. Não se pode comparar o matemático a uma divindade criadora.

O matemático está sujeito ao requisito da consciência, não podendo criar contradições. Além disso, a Matemática não é um formalismo vazio, mas também não trata dos objetos empíricos e concretos, e por isso precisa de um conteúdo criado por meio de modelos de vários tipos, que possam fornecer interpretações da teoria.

"Acresce que os principais defensores das concepções conceitualistas admitiriam que os poderes criadores do espírito são muito limitados, estando sujeitos a mais imposições do que a simples consistência lógica" (BARKER, 1969, p. 99).

Segundo Barker (1969), o filósofo Kant é um dos mais ilustres representantes do conceitualismo matemático, sustentando que as leis dos números, como as da Geometria Euclidiana, eram ao mesmo tempo *a priori* e sintéticas. Sustenta ainda que,

> Embora Kant não tenha deixado tão explícitas as suas ideias sobre a filosofia dos números quanto deixou explícitas as suas impressões a propósito da filosofia do espaço, disse o bastante para fixar, em seus leitores, a noção de que, para ele, nosso conhecimento dos números se assenta numa consciência do tempo, entendida como "forma de intuição pura", e numa consciência que o espírito possui de sua própria capacidade de repetir, seguidamente, o ato de contar (BARKER, 1969, p. 99).

A concepção baseada na intuição da contagem sugere que os números somente poderiam existir se pudessem ser obtidos por meio de contagem, no entanto é sempre possível seguir a contagem para além de qualquer número a que se tenha contado. Tal concepção certamente conflitaria com a teoria dos números transfinitos de Cantor, bem como com as noções de infinito atual e potencial. Assim, o conceitualismo também não conseguiu fornecer definitivamente uma resposta às questões relacionadas à natureza dos números.

Um grupo de matemáticos acreditava que a pura intuição da contagem seria o ponto de partida para a justificativa do conceito de número, a Filosofia desse grupo recebeu o nome de intuicionismo, e entre eles estavam matemáticos como Brouwer[8] e Kronecker.[9]

O intuicionismo é uma doutrina que tem a intuição por base, ou que atribui à intuição um lugar privilegiado no conhecimento, é uma forma de construtivismo, que considera os objetos matemáticos, tais como número, como construções mentais.

A lógica intuicionista nega o princípio do terceiro excluído, admitindo a existência de sentenças que não seriam nem verdadeiras nem falsas, mas de impossível decisão, uma vez que nessa concepção uma sentença só pode ser considerada verdadeira caso possa ser provada.

O conceito intuicionista de prova é, por sua vez, bastante restrito, uma vez que todas as provas devem ser construtivas, isto é, devem ser efetivamente construídas, o que exclui, por exemplo, demonstrações envolvendo algum processo infinito.

Para alguns matemáticos como Kronecker, o intuicionismo não era apenas uma teoria filosófica; era uma concepção que influenciava o próprio trabalho matemático. Essa influência era tão eminente que os próprios juízos sobre a validade de seus argumentos diferiam dos juízos formulados por matemáticos

[8] Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) nasceu em Overschie (Holanda) e realizou doutoramento na Universidade de Amsterdam. Relizou célebres trabalhos em topologia algébrica. Toda a sua carreira foi consagrada ao desenvolvimento das matemáticas intuicionistas.

[9] Leopold Kronecker (1823-1891) nasceu em Liegnitz (Alemanha) e estudou em Berlim, Bona e Breslau. Realizou o doutoramento em 1845 na Universidade de Berlim. Conforme afirma Jean Dieudonné, seus textos de álgebra, de teoria dos números e de análise são de uma profundidade notável.

alheios ao intuicionismo, em outras palavras, seus critérios de verdade diferiam dos demais.

Por exemplo, a demonstração realizada por Cantor para provar a não enumerabilidade dos números reais não foi aceita pelos intuicionistas, embora fosse considerada legítima por muitos matemáticos.

Os intuicionistas não aceitavam o argumento destinado a revelar que os números reais não são enumeráveis, e rejeitam assim toda teoria sobre os números transfinitos (BARKER, 1969, p. 100). A demonstração de Cantor é não construtiva; requer, em outras palavras, um número infinito de fases.

Do ponto de vista dos intuicionistas, deve-se dispor de uma demonstração construtiva, de qualquer enunciado matemático a propósito dos números, antes de admitir a verdade sobre o enunciado considerado. Se o enunciado afirma a existência de pelo menos um número de tal espécie, devemos saber como construir ou computar esse número, usando apenas um número finito de fases.

Segundo Barker (1969, p. 102), "o intuicionista acredita que os números sejam criações do espírito [...] e que não pode haver verdade ou falsidade incognoscível (isto é, não demonstrável construtivamente) acerca dos números".

Seguir os padrões intuicionistas implicaria desconsiderar a teoria de Cantor e abrir mão de outras partes importantes da Matemática, como o axioma da escolha. Tal axioma foi formulado pelo matemático alemão Zermelo e é fundamental em várias asserções que dizem respeito aos conjuntos infinitos. Segundo o axioma da escolha, dado um conjunto cujos elementos são conjuntos não vazios e mutuamente excludentes, existe pelo menos um conjunto que tenha exatamente um elemento em comum com cada um dos conjuntos pertencentes ao conjunto original (BARKER, 1969, p. 103).

A objeção levantada pelos intuicionistas é que esse conjunto, cuja existência é afirmada, não pode ser "construído". Para os intuicionistas, construir esse conjunto equivaleria a formular uma regra que permitisse determinar se o objeto pertence ou não ao conjunto. Não há regra alguma correspondente à espécie de conjunto que o axioma da escolha afirma existir.

“O intuicionismo, uma das mais influentes formas de filosofia conceitualista, mutila, assim, de modo considerável, a Matemática clássica, rejeitando alguns de seus métodos e abandonando alguns de seus axiomas” (Barker, 1969, p. 104).

Pelo exposto nos parágrafos anteriores, conclui-se que a doutrina segundo a qual os números nascem da pura intuição do processo de contagem é muito vaga e discutível, especialmente se interpretada literalmente.

## 4.4 Realismo e a tese logicista

Diferentemente do conceitualismo, o realismo não aceita que as entidades abstratas estejam limitadas pela capacidade de criação da mente humana. Para eles objetos matemáticos existem em si e por si, não dependendo de construções da mente. O realista acredita que existem (sem a necessidade de aplicações ou modelos) quaisquer entidades citadas nos axiomas e teoremas da teoria dos números.

Essa atitude em relação à interpretação da teoria dos números é a mais direta possível. Todos os termos da teoria dos números que podem surgir nos axiomas e teoremas são interpretados pelos realistas como verdadeiros, sem quaisquer questionamentos, “do ponto de vista dos realistas, a tarefa dos matemáticos é comparável a uma viagem de descobrimentos. O matemático não pode criar ou inventar os objetos acerca dos quais fala, esses objetos estão aí para serem descobertos e descritos” (BARKER, 1969, p. 105).

Segundo essa corrente filosófica, não há justificativa para rejeitar demonstrações não construtivas na Matemática. Se os números e os demais conceitos matemáticos têm realidade independente de nós, os critérios da filosofia dos conceitualistas não fazem qualquer sentido.

Para os realistas não há objeções a fazer quanto aos raciocínios não construtivistas. Por exemplo, a demonstração da não enumerabilidade do conjunto dos números reais, apresentada por Cantor, cita um número real cuja representação decimal, infinitamente longa, não podemos percorrer. Conforme essa corrente filosófica, isso não tem a menor importância, pois a realidade do número não depende da nossa capacidade de percorrer os algarismos de sua representação decimal. Conforme os realistas, Cantor determinou um número genuíno, mesmo que não existam condições para determinar, especificamente, de que número se trata.

O mesmo acontece com as definições não predicativas como a de Zermelo. Se admitirmos que os conjuntos existem por sua própria conta, independentemente do nosso pensamento, temos liberdade, ao definir uma entidade qualquer, de fazer referência a uma classe que contenha a entidade.

O matemático alemão Gottlob Frege (1848-1925) foi um grande defensor da tese realista; ele sustentava que nosso conhecimento do número é, em essência, uma questão de visão racional *a priori*.

Para Frege[10] (1992), o conhecimento que se obtém com o auxílio da razão, contemplando as estruturas atemporais da realidade numérica, é um conhecimento *a priori*; o conhecimento dos números não é uma questão de compreensão de significados de vocábulos.

Quando ele fala de uma razão que conhece objetos matemáticos, associa-se a essa espécie de conhecimento matemático muito mais do que a compreensão da linguagem. Frege e, logo depois, Russell introduziram uma importante novidade nas reflexões acerca do conceito de número; admitiram que as leis dos números são todas analíticas.

Frege sustentou que as leis dos números podem ser reduzidas às leis da lógica. Dizer que as leis dos números são analíticas nesse sentido é como afirmar que o conhecimento que temos dessas leis depende, basicamente, de uma visão racional. Para ele, trata-se do mesmo tipo de visão racional que nos dá conhecimento das leis da Lógica; esse é o mais direto e o mais claro tipo de visão racional.

A doutrina que sustenta serem as leis da Matemática deduzidas da Lógica e inteiramente redutíveis à Lógica veio a ser conhecida como *tese logicista*,

[10] *Os fundamentos da aritmética* de Frege foram publicados pela primeira vez em 1884 com o título *Die Grundlagen der Arithmetik*. Citaremos aqui a edição portuguesa publicada em 1992.

enunciada primeiramente por Frege e depois reformulada por Russell em seu *Principia Mathematica*.

Frege e igualmente Russell contribuíram muito para a elaboração das leis de uma moderna e poderosa Lógica. É importante ressaltar que, para os seus objetivos, os termos “conjunto” e “par ordenado”, assim como as leis relativas aos conjuntos, eram considerados partes da Lógica, e não partes da Matemática.

As definições que se faziam indispensáveis eram definições de todos os termos e símbolos básicos, não lógicos, da teoria dos números, incluindo-se o *zero*, *sucessor*, *número natural*, bem como os símbolos **+** e ***x***. Os números naturais eram definidos por Russell como conjunto de conjuntos. Assim, com o auxílio de uma Lógica ampliada, na qual figurem leis relativas aos conjuntos e aos pares ordenados ou a seus equivalentes, podem-se deduzir as demais leis da teoria dos números.

Frege (1992) sustentava apenas que as leis dos números podiam ser, dessa forma, reduzidas à Lógica. A tese de Russell era mais ambiciosa, sustentando que toda a Matemática poderia ser reduzida à Lógica.

Barker (1969) afirma que não foi por acaso o fato de a tese logicista ter sido desenvolvida pelos adeptos do realismo, pois tais concepções caminham juntas.

A tese logicista foi derrubada pelo trabalho de Kurt Gödel (1906-1978) em 1931. Empregando uma engenhosa cadeia de raciocínios metamatemáticos, Gödel demonstrou que a consistência é incompatível com a completude. Tais sistemas, se consistentes, devem, necessariamente, ser incompletos.

Algumas axiomatizações podem abranger mais verdades do que outras e, qualquer que seja a verdade, existe alguma axiomatização que a contém como teorema; não há, porém, uma só axiomatização consistente capaz de incluir todas as verdades acerca dos números. Esse resultado obtido por Gödel derruba por completo a ideia de que a verdade matemática poderia ser identificada unicamente nos processos de dedução a partir de axiomas.

Em razão da valiosa contribuição de Frege para o desenvolvimento do conceito de número e dos esclarecimentos de questões complexas envolvidas nos debates filosóficos em torno da natureza dos números, discorreremos um pouco mais a respeito de sua obra por acreditarmos que abrange muito do que foi desenvolvido em relação a tal conceito.

## 4.5 O conceito de número na obra de Frege

Os textos de Frege[11] foram pouco difundidos na Alemanha. O reconhecimento de sua obra deu-se no exterior, principalmente em Cambridge, em virtude de comentários e elogios de Bertrand Russell. Publicou estudos relacionados à Filosofia da Matemática, Lógica e Fundamentos da Matemática.

Os pensamentos de Frege expostos em sua obra *Die Grundlagen der Arithmetik*, publicada pela primeira vez em 1884, apresentam uma ampla discussão filosófica acerca da natureza dos números. Citaremos aqui a edição portuguesa intitulada *Os fundamentos da aritmética*, publicada em 1992. Todos os comentários que teceremos sobre Frege baseiam-se nessa edição, por isso omitiremos algumas citações. Abordaremos com maior ênfase suas reflexões e respostas às concepções de matemáticos e filósofos em relação ao conceito de número.

Frege fez severas críticas às concepções empiristas, psicologistas e abstracionistas e também criticou algumas ideias de Kant. Propôs uma teoria que buscava agregar elementos lógicos a um certo tipo de conceitualismo.

Os números são vistos por ele como entidades lógico-ideais, objetos do pensamento. Ele buscava eliminar o caráter subjetivo e arbitrário que pode ser atribuído aos números segundo uma visão empirista. Procurava ainda eliminar o recurso à intuição e a linguagem comum, considerando de certa maneira que a Aritmética deveria ser um ramo da Lógica, libertando-a de fundamentos baseados na experiência e intuição.

[11] Friedrich Ludwig Gottlob Frege nasceu em 8 de novembro de 1848 na Pomerânia, região nordeste da Alemanha. Realizou seus estudos superiores em Jena de 1869 a 1871, e em seguida em Göttingen, onde realizou doutorado em 1873. Faleceu em julho de 1925.

Em sua obra, apresenta uma análise de conceitos matemáticos, como número, exigindo para esses o rigor formal das definições e das demonstrações. Expõe também uma análise crítica de algumas concepções de matemáticos acerca da natureza dos números.

Para ele, a Matemática deveria sofrer uma revisão crítica a respeito de seus fundamentos. Afirmava que os conceitos de função, de contínuo, de limites, de número, entre outros, necessitavam de definição precisa. Os números negativos e irracionais deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, e isso requeria discutir a natureza e a definição de tais números (FREGE, 1992, p. 30).

Distinguia as leis gerais dos números das proposições singulares que os determinavam como característica das coisas (cardinalidade).

Frege fez várias críticas ao empirismo matemático e à concepção de número do inglês John Stuart Mill. Segundo Frege (1992, p. 43), Mill buscava fundamentar a Matemática sobre definições, entretanto as entendia como propriedades das coisas (visão concretista), e não como definições lógicas baseadas nos significados dos termos.

Frege sustenta que os fatos não têm significado único, sendo de certa forma subjetivos, e que com tal visão não se pode elaborar uma teoria geral dos números. Mill interpretava os números como partes de um agregado, defendendo que a formação dos números deveria ser uma recorrência da realidade concreta. Frege argumenta que isso seria impossível tanto para números "grandes" como para números infinitesimais, para os quais não temos uma relação imediata e direta com a realidade.

Diz ainda que o recurso de Mill à experiência como fundamento de qualquer operação ou lei Matemática enfrenta outra dificuldade, qual seja o símbolo "0" não tem fundamento na experiência e permaneceria totalmente privado de significado, sendo evidente que este símbolo, entre outros, tem significado na Matemática independentemente de sua relação com a realidade (FREGE, 1992, p. 44).

Alguns matemáticos e filósofos sugeriram que a Matemática poderia ser uma ciência empírica, defendendo que os números seriam obtidos por abstração a partir de objetos concretos. Esse tipo de visão geralmente associa os números a objetos, ou seja, propriedades das coisas externas, como se o primeiro fosse uma característica ou um adjetivo qualificativo do segundo, assim como “quente”, “frio”, “leve” ou “pesado”.

Para Ernst Schroder,[12] os números derivavam da realidade efetiva. Ele defendia, por exemplo, que o número 1 deveria ser abstraído dos objetos singulares e que posteriormente poderia ser ponto de partida para as construções matemáticas (FREGE, 1992, p. 77).

Frege contrapõe à opinião de que os números são conceitos abstraídos da realidade exterior; ele expõe que as coisas externas não apresentam nenhuma unidade precisa. Sendo assim, é possível considerá-las como multiplicidades.

Argumenta que, se os números fossem abstraídos da realidade exterior, mudando-se de ponto de vista, seria possível observar uma mesma entidade como unidade ou multiplicidade, por exemplo, uma árvore pode ser considerada como unidade, mas pode ser também multiplicidade, isso se considerarmos, por exemplo, as nuances das cores de suas folhas ou a quantidade delas.

Outro exemplo é o peso de uma massa que pode ser representado em gramas, quilogramas ou toneladas, variando o respectivo número. Ao contrário dos exemplos que acabamos de citar, cada número é determinado e não pode ser confundido com nenhum outro.

Percebe-se por esses argumentos que há uma grande diferença entre o número e as qualidades sensíveis das coisas; estas pertencem aos objetos em quantidade variável e de modo mais ou menos subjetivo, como as cores verde ou amarela, entre outras; o mesmo não ocorre com os números, pois estes não são uma qualidade concreta de um objeto.

[12] Ernst Schröder (1841-1902) é um matemático alemão muito conhecido por suas contribuições à Lógica Algébrica. Seu trabalho mais expressivo é o *Vorlesungen über die Algebra der Logik* publicado em três volumes, que serviu de base para o desmembramento da Lógica Matemática no século XX.

O mesmo número pode ser aplicado a uma multiplicidade infinita de objetos, enquanto os objetos singulares, com suas qualidades concretas, são individuais. Segundo Frege (1992, p. 46), o erro de Mill que reduz os números à realidade concreta consiste em torná-los subjetivos, uma vez que a unidade ou multiplicidade que pertence a uma mesma entidade não é a mesma da outra.

Enquanto as realidades e as qualidades concretas podem ser pesadas ou medidas, os números não possuem estas características. Frege aponta que Leibniz já observara que, à medida que existem realidades que não podem ser medidas ou pesadas, pois não têm peso ou partes, não existe realidade que não possa ser numerada. Em virtude desse fato, ele afirma que o número pertence à metafísica.

A natureza própria do número e sua aplicabilidade a todas as realidades lhe conferem uma certa subsistência. É de certa maneira sensível e inteligível, concreto e abstrato. Esta discussão faz emergir a natureza complementar do número e a necessidade da *complementaridade* entre o caráter *intensional* e *extensional*.

Assim como outros conceitos matemáticos, os números têm um caráter universal, são formados pela mente e contemplam uma infinidade de realidades (aplicações). Em sua universalidade não podem subsistir apenas na realidade empírica.

Expressões numéricas podem ser deduzidas das definições de números "simples" a partir de poucas leis gerais, mas tais definições não confirmam fatos observados tampouco pressupõem sua legitimação. Mill, em seu livro *System of Logic*, sugere que a proposição "5+2=7" fundamenta-se no princípio de que "tudo que se obtém com as partes, obtém-se com as partes das partes", e que tal princípio é de ordem indutiva, afirmando ainda que as leis da Matemática são leis da natureza (Frege, 1992, p. 46).

A este respeito Mill confunde as leis matemáticas com a sua aplicação, e deve-se ressaltar que às vezes a aplicação é útil para a compreensão dos símbolos, entretanto a Matemática, ainda que englobe grandezas físicas e geométricas, não é composta por elas. Os números prescindem das relações espaço temporal e também de todas as realidades que ocorrem no tempo e no espaço (FREGE, 1992, p. 46).

Frege indica que na realidade sensível o aumento é aceito com base em experiências e observações, já no que concerne aos números devemos dizer que são formulados, desenvolvidos, relacionados reciprocamente pelo nosso pensamento, independentemente das leis da realidade sensível, e esse fato compõe mais uma diferença fundamental entre os números e a realidade sensível.

Além disso, as relações e as leis dos números podem ser encontradas *a priori*, independentemente da realidade empírica, visto que estas somente podem ser descobertas *a posteriori*. Portanto, os números são uma construção do pensamento, e suas leis derivam do próprio processo de sua formação, e não podem ser dados exclusivamente pelas experiências.

Para Frege, as verdades como as da Matemática devem fundamentar-se em seus princípios, e as provas não devem depender de fatos particulares ou experiências, entretanto considera que tais princípios de um ponto de vista psicológico não podem ser aprendidos sem a experiência interna ou externa (novamente se faz necessária uma abordagem *complementar*).

Há pelo menos quatro hipóteses referentes à natureza da Matemática, quais sejam: analítica, sintética, analítica *a posteriori* e sintética *a priori*. Para Frege (1992, p. 38), as hipóteses analíticas *a posteriori* e sintéticas *a priori* são contraditórias pela própria terminologia. Ele se propõe a analisar as outras duas.

Ele observa que a teoria kantiana fundamenta-se na intuição pura do espaço e do tempo. Após analisar algumas obras de Kant, ele afirma que várias formulações da doutrina kantiana mostram sentidos diversos para tal noção, podendo deduzir-se que a noção de intuição pura de espaço e tempo está sempre relacionada à percepção sensível ou à imagem. Isso retorna à ambiguidade discutida anteriormente, pois a Matemática não pode ser fundamentada nas percepções empíricas.

Segundo Frege (1992), os axiomas da Geometria são independentes entre si e também das leis da Lógica e, por conseguinte, são sintéticos. O mesmo não ocorre com as leis fundamentais da Aritmética; as bases desta são mais profundas do que as de qualquer ciência empírica e as da própria Geometria. Para ele, a verdade da Aritmética governa tudo aquilo que é numerável. E isto é o que há de mais amplo, pois abarca não só a realidade de fato, não só tudo aquilo que é objeto da intuição, mas também todo o campo do pensável.

Frege utiliza as ideias de Leibniz para afirmar que as leis dos números são analíticas, de modo que a *analiticidade* coincide com a *aprioridade*; ambos os aspetos são concomitantes, e ele defende que a Álgebra fundamenta-se na Lógica.

Para Frege (1992, p. 44), as verdades da Matemática estão relacionadas com a Lógica, assim como os teoremas da Geometria estão relacionados com seus axiomas. Ele assevera que número não é um objeto da psicologia tampouco um processo psíquico. Há que precisar o tipo de objetividade da Matemática que, por sua vez, é distinta da realidade espacial e sensível.

Diferentemente das Ciências Experimentais que se baseiam em fatos observados na realidade sensível e iniciam um processo de indução tendo como pano de fundo as observações e experimentos, a Matemática precisa ter como fundamento uma cadeia ininterrupta e segura de deduções em uma verdade primeira, como base para suas demonstrações. É neste tipo de verdade que se apoia a verdade Matemática.

Para Frege, “objetivo” no seu verdadeiro sentido é aquilo que é independente das nossas sensações, intuições e imaginações, mas não é independente da razão, ou seja, é fundamentado por um juízo lógico. Dessa forma, os números constituem um pensamento objetivo, leis que são válidas para todos os seres pensantes. Por exemplo, há determinadas imagens ou símbolos para o número “dois”, mas todos convergem para o mesmo conceito. Visto de outro modo, não haveria entendimento, uma vez que cada um poderia falar do número “dois” com um significado individual, possivelmente diferente do pensamento de outros.

Pelo que foi exposto até aqui, podemos afirmar que para Frege os números não são representações subjetivas, nem se obtêm por meio de sínteses empíricas, como proposto por Mill e Schröder, mas possuem sua objetividade de pensamento e raciocínio.

Como vimos, havia duas grandes tendências em relação à formação dos números: uma que buscava derivá-los de séries concretas de objetos; a outra, que tem a paternidade de Euclides, os considera uma série de unidades.

A solução de Frege é orientada unicamente na perspectiva de que os juízos referentes aos números são "asserções acerca dos conceitos", que os números são conceitos puros e não entidades ou qualidades abstratas do mundo sensível. Para ele, o número zero não pode ser abstraído de qualquer realidade, visto que indica privação e, portanto, trata-se de um conceito obtido por via lógica.

Ele sustenta que os números não derivam das realidades concretas, e que são conceitos; uma das razões baseia-se no fato de que eles se aplicam às realidades físicas e mentais, às espaço-temporais e às transcendentais. Assim, para ele os números são noções ou conceitos lógicos.

Vejamos como ele define os números 0 e 1:

> O número 0 pertence a um conceito se nenhum objeto cai no seu âmbito [...]. O número 0 pertence a um conceito se a proposição "a não pode ser abrangido por um tal conceito" é verdadeira universalmente qualquer que seja *a* [...]. O número 1 pertence ao conceito F se a proposição "a não está compreendido em F" não é verdadeira universalmente, qualquer que seja *a*, e se as proposições "a está compreendido em F" e "b está compreendido em F" se segue universalmente que *a* e *b* são idênticos (FREGE, 1992, p. 92).

Como podemos observar, as definições de 0 e 1 são dadas por Frege em termos conceituais ou lógicos, excluindo elementos simbólicos, intuitivos ou quantitativos; 0 é a exclusão de qualquer conteúdo, enquanto 1 é o primeiro elemento multiplicável, compreendido no mesmo conceito.

Para Frege (1992, p. 90), a identidade numérica é definida da seguinte forma: "dois números dizem-se iguais quando o número que corresponde ao conceito F é igual ao número que corresponde ao conceito G", afirmando que entre os dois números há uma perfeita identidade. Nota-se que a igualdade entre dois números baseia-se em conceitos que recaem sobre estes.

A Matemática é para ele uma forma de Lógica especializada, seus fundamentos devem ser baseados em demonstrações que utilizam princípios rigorosamente definidos, sem qualquer tipo de contradição, e para isso é necessário que haja uma delimitação precisa dos conceitos. Logo, a formação dos números deve ser caracterizada por regras precisas.

Sintetizando algumas conclusões de Frege acerca da natureza da Matemática, temos que as leis da Matemática são constituídas por juízos analíticos e *a priori*; para ele a Aritmética é um ramo da Lógica. Por meio das aplicações da Matemática à Lógica demonstra-se a sua permeabilidade ao real sensível.

As leis da Lógica e consequentemente da Matemática não são constituídas por leis da natureza, não constituem relação entre fenômenos, mas sim entre juízos. Por juízos analíticos não se devem entender puras tautologias, nem mesmo algo tão estranho à experiência, tampouco algo inato e totalmente abstrato, e sim juízos necessários, regulados pelo princípio da não contradição e logicamente desenvolvidos com base em algumas definições fundamentais. Estas, por sua vez, pressupõem processos psicológicos, com os quais as adquirimos, como a observação experimental, que pode constituir o ponto de partida prático e de referência dos juízos lógicos.

Defendendo a natureza lógica da Matemática, Frege declara que ela, em sua época, não tinha se desenvolvido suficientemente nesse aspecto. Para ele isto implicaria que, partindo-se de um número restrito de princípios, se deduzissem todas as proposições de determinada teoria, e que isto não vinha ocorrendo, tendo em vista as complexidades envolvidas nas demonstrações. Em geral, havia muitos saltos, e isto reforçava a impressão de que a Matemática era *sintética*. Somente se tais lacunas fossem preenchidas nas demonstrações seria possível evidenciar o caráter analítico da Matemática.

Em relação aos números complexos, afirma que é necessário definir univocamente o significado de um símbolo e manter-se coerente com tal significado ao longo do processo. Os números complexos, irracionais, negativos e infinitos tinham necessidades de definições precisas para fixar seus significados.

Por fim, Frege ressalta sua oposição ao formalismo, pois acredita que o ideal de tal corrente é inadequado para explicar os números negativos, irracionais e complexos. O erro estaria na afirmação de conceitos sem o objeto correspondente, na ideia de que a simples definição é suficiente para garantir a existência de um conceito. Isso sugere uma crítica a uma visão puramente *intensional*.

Uma teoria não pode basear-se em simples postulados. Para que um conceito tenha valor, exige-se, além da não contradição, um conteúdo real de ordem lógica. Para Frege, a postura assumida pelos formalistas assemelha-se a de um deus que pode criar só com palavras e símbolos, correndo o risco de gerar uma teoria vazia.

Encerrando este capítulo, destacamos que a natureza própria do número e sua aplicabilidade a todas as realidades lhe conferem uma certa subsistência. É de certa maneira sensível e inteligível, concreto e abstrato, e esses fatores fazem emergir a natureza complementar do número e a necessidade da *complementaridade* entre o caráter *intensional* e *extensional* em sua conceituação.

# CAPÍTULO 5

## NÚMEROS REAIS E A NOÇÃO DE COMPLEMENTARIDADE

Neste capítulo faremos algumas considerações acerca das abordagens clássicas dos números reais (axiomática, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e corte de Dedekind) tendo como pressuposto teórico a noção de *complementaridade*. Ressaltaremos ainda algumas potencialidades teóricas em relação à proposta de conceituação de número elaborada por Conway.

### 5.1 A abordagem axiomática

Uma abordagem axiomática dos números reais se baseia na apresentação de uma lista contendo fatos elementares admitidos como axiomas (ver anexo 1), explicitando como estes objetos matemáticos se relacionam, de modo que a partir deles todos os teoremas da teoria possam ser demonstrados.

Esses axiomas tornam o conjunto dos números reais em um corpo ordenado completo. No bojo de uma abordagem axiomática não há qualquer tipo de descrição, interpretação ou aplicação para o objeto matemático. Apenas as relações entre os objetos são enfatizadas, caracterizando de forma unilateral o aspecto *intensional* dos números.

A noção de *intensão* estabelece apenas as relações entre classes de objetos matemáticos (relações estruturais). Uma abordagem axiomática dos números reais não descreve o objeto matemático em si, evidenciando apenas como se devem realizar operações com esses números, tratando-os como objetos ideais. Visto dessa forma, o método axiomático torna-se incompleto, pois não garante o aspecto *extensional* do conceito de número.

Russel (2007) fez críticas ao método axiomático alegando que os axiomas deveriam ser interpretados de modo que permitissem algumas aplicações. Tais aplicações, associadas a uma estrutura axiomática, possibilitam conceituar número por meio da *complementaridade* entre seus aspectos *intensional* e *extensional*, como fora ressaltado por Otte (2003b).

Deve-se considerar que em uma abordagem *complementarista* o foco está voltado para a relação entre o sujeito e o objeto matemático, e não somente no objeto em si, como pode sugerir uma abordagem exclusivamente axiomática.

Na perspectiva da *complementaridade* abandonamos noções que envolvem objetos ideais, independentes do sujeito, ou verdades separadas das possibilidades de interpretações. A pedra fundamental encontra-se na relação entre o sujeito e objeto matemático (atividade matemática) e na gênese do conhecimento matemático.

Em um sentido filosófico, a abordagem axiomática dos números reais não considera a natureza do conceito de número, assim como não considera possíveis aplicações à nossa realidade sensível, pois uma axiomática geralmente não fornece, em seu bojo, possíveis interpretações; nem mesmo há sugestão de alguma maneira de descobrir como podem ser aplicados. Pressupondo uma abordagem *complementar*, espera-se que tais números possuam alguma interpretação, além de possuir certas propriedades formais.

Em geral, em uma perspectiva *complementar*, além dos axiomas, busca-se estabelecer algumas referências para as noções abstratas; caso contrário a axiomática não passará de mera organização de esquemas. O próprio avanço da dedução, ao criar novas abstrações, exige uma referência contínua aos dados que ultrapassa por essência o lógico, conforme apontou Bachelard (2004).

Objetos matemáticos possuem uma natureza dual, são dados *intensionalmente* por um sistema axiomático, mas devem ser complementados por modelos. Assim, além das relações estruturais dadas pela axiomática, teremos também possíveis aplicações.

Em razão da impossibilidade de definir a realidade matemática independentemente da atividade cognitiva, torna-se relevante e desejável uma abordagem *complementarista*.

A Matemática, considerada como atividade semiótica, deve ser caracterizada pela *complementaridade* no processo de evolução da atividade cognitiva, que poderá basear-se na *complementaridade* da *extensão* e da *intensão*. O primeiro componente possibilitará a consulta aos objetos por meio de alguma interpretação, enquanto o segundo estará relacionado às expressões linguísticas.

Uma abordagem para conceituar número real pode ser desenvolvida axiomaticamente, mas deve ser complementada por possíveis aplicações ou modelos. Inicialmente, o desenvolvimento das principais ideias e propriedades pode ser proposto intuitivamente com certa imprecisão, motivando a atividade matemática e posteriormente orientando a formalização da teoria.

Uma abordagem axiomática dos números reais estará sempre incompleta, pois apenas evidenciará o aspecto *intensional* dos números.

## 5.2 Números reais: cortes de Dedekind e classes de equivalências de sequências de Cauchy

A construção dos números reais, proposta por Richard Dedekind[13] em 1872, pressupõe os números racionais e suas propriedades (apresentamos no anexo 2 uma versão dos cortes de Dedekind, e, como sabemos, há outras).

Dedekind (1901) desenvolve o conceito de número apenas como um objeto do nosso pensamento, ou seja, de forma puramente abstrata, cuja essência encontra-se na ordinalidade.

[13] Richard Dedekind (1831-1916) estudou em Gottingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet, foi um dos importantes pioneiros na análise lógica e filosófica dos fundamentos da Matemática.

Tradicionalmente, para se obterem os números, dos naturais aos reais, pode-se utilizar o seguinte caminho: os números naturais podem ser caracterizados pelos axiomas de Peano; em seguida, constrói-se o conjunto dos números inteiros por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais; o próximo passo é construir os números racionais por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, e por fim os números reais por meio dos cortes Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais).

Uma construção para os números, a partir dos naturais, culminando nos reais por meio de cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy, pressupõe que a cada extensão de um conjunto (digamos de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e daí para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$) devem-se demonstrar novamente todas as propriedades, por exemplo, a propriedade comutativa da multiplicação deverá ser demonstrada em $\mathbb{N}$, depois em $\mathbb{Z}$, em $\mathbb{Q}$ e por fim em $\mathbb{R}$, o mesmo deverá ser feito com a propriedade associativa, com a distributiva da multiplicação em relação a adição, e com todas as outras.

Esse tipo de abordagem poderá tornar-se tediosa, de modo que apenas uma cadeia de deduções deverá ser aplicada; nessa construção não haverá nenhuma interpretação para os números, nenhum modelo ou aplicação.

Além disso, há um certo tipo de ruptura na passagem dos números racionais para os reais. Essa ruptura caracteriza-se pela mudança de método, abandonam-se as operações com pares ordenados (de números naturais ou inteiros) para utilizar “novos” objetos, os cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy.

Em relação aos cortes, Dedekind postulou que todo corte tem um elemento de separação (supremo da classe A ou ínfimo da classe B). O efeito de tal postulado é a criação dos números irracionais, o que acarreta a completude do conjunto dos números reais.

“Filosoficamente, a definição de Dedekind de números irracionais envolve um grau bastante elevado de abstração, uma vez que ela não coloca quaisquer restrições quanto à natureza da lei matemática que define as duas classes A e B" (COURANT e ROBBINS, 2000, p. 86).

O postulado de Dedekind é apenas o começo da construção dos números reais. Para completar a teoria é necessário definir adição e multiplicação de cortes e demonstrar as propriedades associativa, distributiva e comutativa para essas operações, com base nas propriedades estabelecidas para os números racionais; é preciso definir ordem e a igualdade de dois cortes (ver anexo 2).

Normalmente, neste tipo de abordagem não são explorados possíveis modelos, aplicações ou interpretações dos números; os aspectos *extensionais* não são contemplados e a desejada *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número não ocorre.

Os números construídos pelo processo descrito acima são dados apenas por relações lógicas, sem qualquer referência, tendo como único recurso em sua construção a roupagem lógica ou simbólica da teoria.

Como foi apontado por Boutrox (1920, apud OTTE, 2003b, p. 216), o fato matemático é independente da roupagem lógica ou algébrica sob o qual procuramos representá-lo. Com efeito, a ideia que temos é bem mais rica e mais completa que todas as definições que podemos dar, que todas as formas ou combinações de sinais ou de quaisquer propostas possíveis utilizadas para exprimi-las.

Na *complementaridade* uma parte constituinte da atividade matemática é o procedimento construtivo a partir de fatos elementares (que podem ser dados axiomaticamente). Outra parte é o conhecimento sobre as construções matemáticas (incluindo os fatos elementares) e os conhecimentos sobre o mundo, o que está articulado às aplicações dos conceitos envolvidos na atividade matemática (KUYK, 1977, p. 156).

Novamente ressaltamos a afirmação de Otte (1993, p. 226), indicando que o objeto da matemática ou o conteúdo da atividade matemática de forma alguma pode ser definido absolutamente e independente dos meios da atividade matemática.

A abordagem dos números reais, com base nos cortes de Dedekind, poderá reduzir a atividade matemática à exclusivamente uma cadeia de deduções lógicas.

Deve-se considerar que, "de uma forma ou de outra, explícita ou implicitamente, mesmo sob o mais intransigente aspecto formalista, lógico ou axiomático, a intuição construtiva permanecerá sempre como o elemento vital na Matemática" (COURANT e ROBBINS, 2000, p. 106).

Uma abordagem *complementar* entre o caráter *intensional* e *extensional* de conceitos matemáticos faz-se necessária em virtude de considerar a realidade matemática intrinsecamente ligada à própria atividade cognitiva.

É relevante considerar novas formas para abordar os números, novas referências e modelos, mundos artificiais para interpretá-los.

O matemático George Cantor[14] também apresentou uma proposta de abordagem para os números reais. Assim como na proposta de Dedekind, a construção parte do pressuposto de que estamos de posse dos números racionais e suas propriedades.

Cantor utiliza sequências convergentes de números racionais para construir os números reais (ver anexo 3). Nessa construção, um número real é uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais.

Muito do que dissemos a respeito da construção dos números passo a passo, dos naturais até os números reais por cortes de Dedekind, também vale para a construção dos reais por meio das classes de equivalência de sequências de Cauchy, visto que tal construção também pressupõe os números racionais.

Neste caso há uma diferença essencial, um número real não será um conjunto de números racionais (ver anexo 2) ou par de classes de números racionais, mas sim uma classe de equivalência de sequências convergentes de números racionais. Portanto, um número poderá ser caracterizado por várias sequências de números racionais, desde que elas sejam equivalentes.

[14] Georg Cantor (1845-1918) nasceu em São Petersburgo, doutorou-se pela universidade de Berlim, onde foi aluno de Weierstrass.

Se construirmos os números reais por meio de cortes de Dedekind, obteremos um corpo ordenado completo, cujos elementos são conjuntos de números racionais. Se usarmos o processo de Cantor, o corpo ordenado completo que obtemos é formado por classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. São dois corpos ordenados completos que diferem pela natureza de seus elementos, mas não pela maneira como seus elementos se comportam. Em outras palavras, são isomorfos.

Todas as operações e propriedades demonstradas para os números naturais, inteiros e racionais deverão ser definidas e provadas para as classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais (ver anexo 3). Além disso, uma construção dos números naturais aos reais deverá ser feita passo a passo, gerando novamente uma ruptura na passagem dos números racionais para os reais.

Na construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy, apenas os aspectos lógicos dedutivos são explorados. Em geral, não há uma interpretação ou modelo intrínseco a essas teorias. Nesse caso, se evidencia apenas o aspecto *intensional* dos números.

Para propor uma abordagem de acordo com a *complementaridade* seriam necessários modelos que propiciassem a interpretação dos números reais (cortes ou classes de equivalência de sequências), de suas operações e propriedades, o que permitiria explorar os aspectos *extensionais* do conceito de número.

## 5.3 A conceituação de número proposta por J. H. Conway e complementaridade

Faremos agora algumas considerações a respeito da teoria de Conway diante da noção de *complementaridade*.

Vamos retomar algumas ideias em relação à noção de *complementaridade* e tecer algumas considerações sobre como os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número podem ser explorados na abordagem proposta por J. H. Conway.

Como vimos, a *complementaridade* na Matemática é concebida como um par. De um lado, temos os aspectos *intensionais* que nos fornecem as relações estruturais dos objetos matemáticos, característico de uma teoria axiomática; do outro, temos os aspectos *extensionais*, que fornecem possíveis interpretações, aplicações ou modelos da teoria (Otte, 2003b).

Os aspectos *intensional* e *extensional* são relativamente independentes, mas não devem ser entendidos como uma simples dualidade, e sim de forma circular e complementar no desenvolvimento do conhecimento matemático, colocando em primeiro plano a relação entre o sujeito e objeto matemático.

Objetos matemáticos possuem uma natureza dual, eles podem ser dados *intensionalmente*, de forma axiomática, mas devem ser complementados por modelos que permitam interpretações da teoria.

A abordagem proposta por Conway fornece em seu bojo alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, o que permite explorar o aspecto *intensional* do conceito de número. Além disso, temos também a interpretação de tais números por uma classe específica de jogos, ou seja, temos um modelo que permite a interpretação dos números, favorecendo o aspecto *extensional* do conceito de número.

Os jogos nessa teoria não têm um simples papel de aplicação para a axiomática; ele fornece uma interpretação e um modelo intrínseco à própria teoria, visto que a ordenação para os números encontra-se inspirada nos jogos.

Quando afirmamos que se trata de uma *complementaridade* que ocorre de forma natural, queremos dizer que não há uma hierarquia entre os aspectos *intensional* e *extensional*, de acordo com o exposto por Kuik (1977).

Assim, uma abordagem para os números, dos naturais aos reais, por meio da teoria de Conway pode ser realizada de várias maneiras.

Por exemplo, os números podem ser construídos concomitantemente por meio de conjuntos e por meio dos jogos, nesse caso, os jogos poderiam ser vistos como um modelo empírico que certamente favoreceria a criatividade, as conjecturas e suas respectivas verificações, a motivação e a experimentação. Esses aspectos estão intimamente ligados à atividade matemática envolvendo um processo de investigação matemática. Esse processo servirá de base para a compreensão do aparato lógico e das deduções que envolvem as definições, os teoremas e suas respectivas demonstrações.

Outra possibilidade de abordagem poderia basear-se na construção informal dos números por meio de jogos, e em um segundo momento o desenvolvimento da parte formal da teoria por meio de conjuntos. Novamente os jogos forneceriam um modelo empírico que serviria de suporte para a abordagem formal, motivando as principais ideias desenvolvidas na teoria e propiciando as experiências e verificações.

Podemos considerar ainda a possibilidade de inicialmente construir os números por meio de conjuntos (a partir dos axiomas de Conway), explorando o aspecto *intensional* do conceito de número, e posteriormente abordar os jogos; esses seriam vistos como uma interpretação, aplicação e modelo da teoria. Ressaltamos aqui o livro *Números surreais*[15] do matemático Donald. E. Knuth. Neste livro ele mostra como Conway construiu os números a partir de dois axiomas.

Além das possibilidades citadas, pode-se propor uma abordagem com base inicialmente no desenvolvimento formal dos jogos, e em seguida mostrar que essa teoria dos jogos encontra uma aplicação ou interpretação na Aritmética. Nesse caso, a Aritmética servirá de modelo para a teoria dos jogos.

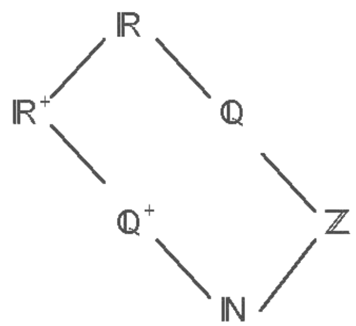
As possibilidades aqui descritas buscam apenas mostrar como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. Evidentemente, existirá a necessidade de uma organização didática da teoria de Conway antes de qualquer tipo de abordagem, o que possivelmente exigirá algum tipo de transposição didática e com certeza o desenvolvimento de outras pesquisas.

[15] Knuth (2002) desenvolveu uma novela, na qual duas pessoas estão isoladas em uma praia e começam a desenrolar a teoria a partir de duas premissas criadas por Conway e encontradas pelos personagens em uma pedra, mostrando, assim, como seus personagens constroem os números de Conway dia após dia.

Nosso objetivo não é propor utilização do método de Conway no ensino, como substituição das conceituações clássicas, mas sim de modo complementar, quando se busca explorar as diversas vantagens desse método.

Poderíamos naturalmente usar as ideias de Conway para apresentar uma nova fundamentação para os números reais.

O diagrama abaixo mostra a ordem das inclusões entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectivamente, naturais, inteiros, racionais e reais, e os correspondentes conjuntos $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{R}^+$, de elementos não negativos.




Podemos observar diversos trajetos possíveis por meio das ligações de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, ou seja, diversos caminhos para a construção dos números, dos naturais aos reais. Entretanto, com as construções dos naturais aos reais, passo a passo, as operações e propriedades aritméticas deverão ser definidas e provadas diversas vezes para cada nova extensão de um determinado conjunto.

Esse tipo de construção pode se tornar complicada, visto que apenas as deduções lógicas serão enfatizadas, e não há qualquer tipo de modelo ou aplicação para servir de apoio. Acrescentam-se a isso as diversas repetições de demonstrações com pequenas nuances na extensão de um conjunto para outro, considerando ainda uma ruptura no método de construção com a introdução dos números reais por meio dos cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais).

Para Conway (2001, p. 26), as classes de equivalências de sequências de Cauchy têm um instrumental lógico demasiadamente complicado para a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$.

A abordagem de Conway pode possibilitar um trajeto original que permite construir por meio de um único processo todos esses números, dos naturais aos reais e dos infinitésimos e os transfinitos.

Uma das principais vantagens da abordagem proposta por Conway é que há apenas um tipo de número, assim pode-se não gastar muito tempo provando, por exemplo, a propriedade associativa em diversos casos. Do ponto de vista lógico, a abordagem proposta por Conway poderá ser mais simples.

Não obstante, há algumas desvantagens no método de Conway. Uma que pode ser tratada rapidamente refere-se ao fato de que pode ser complicado restringir o processo para construir apenas os números reais. Podemos resolver isto particularizando o estudo adicionando à construção a condição de que, se o conjunto esquerdo $E$ for não vazio, e sem elemento máximo, então o conjunto direito $D$ é não vazio sem elemento mínimo, e vice-versa. Isto nos restringe exatamente aos números reais.

As desvantagens restantes referem-se ao fato de que os números racionais diádicos recebem um tratamento curiosamente especial, e que as definições indutivas são de caráter incomum. De um ponto de vista puramente lógico, estes são detalhes sem importância.

Enfim, não é de esperar que um conceito tão complexo como dos números reais pudesse ser definido de modo simples. Assim sendo, o método de Conway não é trivial, mas possibilita construir os números de forma única, dos naturais aos reais; além disso, pode ser fundamentada axiomaticamente e interpretada por uma classe de jogos que constitui as aplicações ou modelos da teoria. Ou seja, possibilita a *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número.

Conway afirma que ensina sua teoria, com as restrições citadas acima, nos cursos de graduação, como a teoria dos números reais (CONWAY, 2001, p. 27).

# Considerações Finais

Conforme o relatório da pesquisa aqui apresentado, podemos dizer que o pensamento moderno em relação aos números pode ser descrito por três tendências, conforme descrevemos sucintamente abaixo.

A primeira tendência que foi proposta por Frege e apoiada por Russel (que pode ser chamada de logicismo) defende que a essência do conceito de número baseia-se apenas na consideração de algumas leis do próprio pensamento. Número de acordo com essa tendência é apenas uma consequência *conceitual* totalmente deduzida de alguns princípios originais.

Por outro lado, temos a tendência das abordagens axiomáticas, como a axiomática de Peano ou a axiomática dos números reais, que pode ser chamada de formalismo, que constrói o campo numérico em um campo de operações, com base em alguns axiomas singulares.

Por fim, as tendências que se baseiam na noção conjunto-teórica, como as de Dedekind e Cantor, que determinam os números em um caso particular de hierarquia de conjuntos. Nesse caso, o conceito de número faz um retorno ontológico, de modo que as grandes ideias são os axiomas clássicos da teoria dos conjuntos. Nesse contexto, "número" é um caso particular de predicado com certas propriedades distintivas.

A essência do conceito de número é a multiplicidade dotada de certas propriedades correspondentes à ordem interna, ou seja, sua aplicabilidade a todas as coisas e suas características estruturais. A conceituação de número deve ser concebida por meio da *complementaridade* entre seus aspectos *intensional* e *extensional*.

Acreditamos, à luz da complementaridade, que a perspectiva logicista deve ser abandonada por razões de consistência conforme demonstrou Gödel; não pode satisfazer as exigências do pensamento, especialmente do pensamento filosófico.

As perspectivas axiomáticas têm a tendência de socializar a tese de que os números circunscrevem apenas um projeto técnico, fornecendo para esse conceito apenas uma característica operacional ou estrutural, de modo que são exploradas exclusivamente as relações entre os objetos matemáticos, com ênfase no aspecto *intensional* do conceito de número.

A tese conjunto-teórica (cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências de Cauchy) não favorecem a exploração do aspecto *extensional* do conceito de número, pois não fornecem um modelo ou uma interpretação intrínseca à suas teorias.

Nenhuma dessas perspectivas oferece uma unificação do conceito de número. Para nós, uma abordagem que forneça um conceito unificado para tais objetos matemáticos deve ser considerada dentro de uma conjuntura que envolva a Filosofia e a Matemática.

Costumeiramente, falamos de número a respeito dos naturais, inteiros, racionais e reais. Também falamos dos números mais diretamente no sentido conjunto-teórico ao designar tipos de boa ordenação e quantidades, incluindo quantidades infinitas (cardinais). Parece plausível esperar que algum conceito de número fosse construto de todos esses casos, ou pelo menos dos “mais clássicos”, ou seja, dos números naturais (discreto) aos números reais (contínuo). Mas não é isso o que ocorre com as abordagens clássicas.

Como sabemos, “número” emerge com muitos sentidos. Mas qual desses sentidos pode constituir um conceito, permitindo que algo singular seja proposto ao pensamento sob este nome? Ou, dito de outra forma, o que é número?

A resposta a essa questão foi buscada por diversas maneiras. Dedekind, por exemplo, pode ser legitimamente nomeado como o primeiro a ter construído os números reais a partir dos racionais. Entretanto, quando confrontado com a pergunta, O que é número?, respondeu com uma teoria geral dos ordinais que fornece *status* aos números inteiros, mas que não pode ser aplicada diretamente aos números reais, conforme podemos ver no seu texto The Nature and Meaning of Numbers (DEDEKIND, 1901, p. 21). Como podemos dizer que número real é um "número"?

Frege (1992) propôs uma conceituação para os números que envolviam a noção de cardinal com um significado conjunto-teórico, mas ao mesmo tempo excluía os negativos e os irracionais. Ele afirmava que tais números deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, isso requeria discutir a natureza e a definição de tais números.

Por outro lado, os axiomas de Peano definem apenas os números naturais e suas operações. Os números reais podem ser abordados diretamente com outra axiomática (corpo ordenado completo). Mas, se a essência do número residisse na especificidade de constituir as indicações da axiomática, então, dado que as indicações da axiomática de Peano são inteiramente diferentes da axiomática dos números reais, poderíamos sugerir que, em relação ao conceito, os números naturais e os números reais não têm nada em comum. Como podem ser ambos "números"?

A impressão de uma certa anarquia engendrada na conceituação de número, ou mesmo de possíveis dificuldades no processo de ensino dos números, pode ser efeito de as propostas de abordagem para cada "tipo" de número (naturais, inteiros, racionais e reais) serem tão distantes e díspares.

Os números naturais são geralmente determinados pela axiomática de Peano; os números negativos são abordados por meio de manipulações algébricas, com uma introdução que não abrange a essência do conceito de número, mas apenas seu arranjo operacional, em estruturas (simétrico aditivo). As manipulações algébricas se repetem da mesma forma para a obtenção dos números racionais (simétrico multiplicativo). E por fim há uma ruptura que marca a passagem aos números reais, que usualmente pode ser feita de forma axiomática, ou por meio de classes de equivalências de sequências de Cauchy de números racionais, ou por cortes de Dedekind.

Como se pode obter uma ideia única de número por meio de tal processo se todas essas abordagens envolvendo as extensões dos conjuntos privilegiam apenas os aspectos operacionais do conceito de número, em outras palavras, podemos dizer que apenas o aspecto *intensional* do conceito de número é explorado e o aspecto *extensional* não é contemplado.

Diante desse contexto, apontamos para a possibilidade de uma "nova" abordagem: a proposta de J. H. Conway. Tal proposta possibilita a construção dos números naturais aos reais por um processo único, sem rupturas, permite uma abordagem *complementar* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número e ainda fornece uma possibilidade de resposta à questão "O que é número?". Nesse caso, a resposta "número é um jogo".

As potencialidades em relação à teoria de Conway descritas nesta tese mostram como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. De um lado, temos alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, caracterizando o aspecto *intensional* do conceito de número. Por outro lado, temos uma classe de jogos, que fornecem um modelo para interpretação de tais números, caracterizando o aspecto *extensional*.

Nosso objetivo com este estudo não é propor a utilização do método de Conway como substituição das conceituações clássicas no processo de ensino e aprendizagem dos números reais, mas sim acrescentar argumentos que possam subsidiar as reflexões em relação às problemáticas que envolvem o conceito de número real, como a constituição epistemológica de tal conceito.

Acreditamos que este estudo poderá ser relevante à Educação Matemática sob dois prismas: o primeiro de cunho teórico e o segundo de um ponto de vista mais prático. O primeiro refere-se ao contexto epistemológico, buscando explicitar a natureza e os critérios de verdade utilizados por matemáticos no desenvolvimento de suas teorias, explicitando a diversidade de formas conceituais que traduz as noções matemáticas, mais especificamente o conceito de número real. O segundo, de caráter mais prático, na medida em que pode subsidiar algumas reflexões acerca da conceituação de número real, em especial novas abordagens para introduzir o conceito de número no Ensino Superior.

O fato de poder conceituar número a partir de uma classe de jogos pode ser considerado particularmente interessante, pois como sabemos o ato de jogar é uma atividade que desde muito cedo acompanhou nossa civilização. A história da Matemática mostra que grandes matemáticos ao longo do tempo se ocuparam de alguns tipos de jogos, e assim nasceram alguns ramos da Matemática.

Para a Educação Matemática o estabelecimento desse elo também pode ser vantajoso na medida em que associa um conceito matemático que é abstrato a uma atividade humana bastante concreta e cultivada desde sempre. Além disso, de algumas pesquisas desenvolvidas nessa área têm surgido bons resultados, com a utilização de jogos para contextualizar as operações com números naturais, inteiros e racionais (GRANDO, 2000; COSTA, 2003; KIMIRA, 2005; GIMENEZ e BAIRRAL, 2005).

A noção de número associada a jogos pode ser relevante, principalmente nos dias de hoje, em que é crescente a utilização de diversos recursos tecnológicos, como jogos eletrônicos, calculadoras e computadores, por pessoas de todas as idades e condições sociais, que fazem uso de tais recursos em variadas atividades cotidianas, que vão desde o entretenimento às atividades profissionais.

A essas ideias acrescenta-se o fato de que os jogos possibilitam a ação dos sujeitos e a interação deles na atividade matemática, e que nesse caso o jogo, sendo um modelo concreto, poderá favorecer o levantamento de conjecturas a respeito da construção dos números.

No processo de construção dos números serão fundamentais as comparações e análises das configurações dos jogos. Assim, nosso interesse não se fundamenta no jogo em si próprio, pelo simples prazer de jogar, mas sim nas descobertas das relações envolvidas na construção dos números por meio dos jogos.

Finalmente, apontamos alguns desdobramentos da nossa pesquisa. Uma possibilidade de desdobramento deste estudo baseia-se na organização de uma sequência didática fundamentada na teoria de Conway para abordar os números de forma única (dos naturais aos reais), no Ensino Superior, possivelmente nos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática. Tal pesquisa certamente necessitará de uma análise *a priori* em relação aos conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dos números. A partir de tal estudo pode-se organizar uma sequência de atividades para abordá-los.

Outro projeto que nos interessa versa sobre a possibilidade de desenvolver um programa computacional para o jogo Hackenbush, com o objetivo de subsidiar a construção dos números por meio dos jogos. Esta pesquisa poderá envolver alunos do curso de Licenciatura Matemática e alunos do curso de Ciências da Computação, ou ainda alunos do curso de Jogos e Mídias Digitais.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. Tradução de Alfredo Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ARTIGUE, M. *Analysis*. *Epistémologie et didactique*. Cahier de Didirem, 3, IREM. Paris: Université Paris VII, 1989.

———. *Advanced Mathematical Thinking*. Edited by David Tall. USA: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 168-198.

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BACHELARD, G. *La formation de l´esprit scientifique*. Paris: Librairie J.Vrin, 1938.

———. *Ensaio sobre o conhecimento aproximado*. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 2004.

BADIOU, A. *Number and Numbers*. Tradução de Robin Mackay. Malden, MA, USA: Polity Press, 2008.

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BENACERRAF, P. What Numbers Could not Be. *The Philosophical Review*, Duke University Press on behalf of Philosophical Review, v. 74, n. 1, p. 47-73, Jan. 1965. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2183530>. Acesso em: 9 nov. 2009.

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. *Winning ways for your mathematical plays*. 2. ed. Massachusetts: A. K. Peters, 2001.

BLOCH, I. *Approche didatique de l´enseignemet des premiers concepts de l´analyse.* Memoire présenté a l´Université de Bordeaux I, 1995.

———. *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*: Savoirs, connaissance et condition relatives à la validation. Thése présenté a l´université Bourdeaux I, 2000.

BOUTON, C. L. Nim, a game with a complete mathematical theory. Annals of Mathematics, ser II, v. 3, n. 1, p. 35, 1901.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. Revisão de Uta C. Merzbach. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino da matemática*. 1996. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

BRONNER, A. *Etude didactique des nombres reels*. Thése, laboratoire Leibnitz IMAG. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1997.

BUNGE, M. *Intuición y Razon*. 1. ed. Ensayo.Ciencia. Buenos Aires: Debolsillo, 2005.

———. *Física e filosofia*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2007.

———. *Teoria e realidade*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2008.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Revisão de Paulo Almeida. Lisboa: Gradiva, 2005.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números* reais: matemática, descobertas e justificativas de professores. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de São Paulo – Unesp, Rio Claro – SP.

CONWAY, J. H. *On Numbers and Games*. 2. ed. Massachusetts: A K Peters, 2001.

———; GUY, R. K. *O livro dos números*. Tradução de José Sousa Pinto: Lisboa: Gradiva, 1999.

COSTA, L. de Q. *Um jogo em grupos co-operativos*. Alternativa para a construção do conceito de números inteiros e para abordagem dos conteúdos: procedimentos, condutas e normas. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, São Paulo.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?.* Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COUSQUER, E. *Histoire du concept de nombre*. Institut de Recherche sur l'Enseignement dês Mathématiques. IREM de Lille, 1994.

DEDEKIND, R. Essays on the Theory of Numbers. Tradução de Woostre Woodruff Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company, 1901. Disponível em: <http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2010.

DELEDICQ, A. Est-il possible d´ensigner l´analyse aujourd´hui? *Repères IREM*, n. 24, Topiques éditions, Metz, 1996.

DIAS, M. S. *Formação da imagem conceitual da reta real*: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

DOUADY, R. Tool, Object, Setting, Window: Elements for analysing and Constructing didactical situations in mathematics. In: BISHOP et al. *Mathematical Knowledge*: It's Growth Through Teaching. Klüwer, 1991.

FONSECA, R. F. da. *Número*: o conceito a partir de jogos. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP. São Paulo.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética*. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional; Casa da Moeda, 1992.

GARDNER, M. *Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas*. Tradução de Luis Bou Garcia. Barcelona: Labour, 1985.

GIMÉNEZ, J.; BAIRRAL, M. *Frações no currículo do Ensino Fundamental*: conceituação, jogos e atividades lúdicas. Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – Gepem. Rio de Janeiro: Edur, 2005. v. 2.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, São Paulo.

HAMILTON, A. G. *Numbers, sets and axioms*: the apparatus of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

HERMES, H. Nombres et jeux. *Les Nombres*: Leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles. Traduction française et adaptation de François Guénard. Paris: Librairie Vuibert, 1998. p. 351-375.

HESSEN, J. *Teoria do conhecimento*. Tradução de João Vergílio Gallerani Cuter. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

IGLIORI, S. B. C.; FONSECA, R. F. da. O conceito matemático número real como objeto de ensino. In: ANAIS DO IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – IV SIPEM. Taguatinga, DF, 2009.

———; SILVA, B. A. Concepções dos alunos sobre os números reais. In: LAUDARES, João Bosco (Org.). *Educação Matemática*: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e concreto no ensino da Matemática: algumas reflexões. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro: Unesp; Bolema, ano 11, n. 12, p. 45-57, 1996.

KIMIRA, C. F. K. *O jogo como ferramenta no trabalho com números negativos*: um estudo sob a perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP. São Paulo.

KNUTH, D. E. *Números surreais*. Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva, 2002.

KRAUSE, D. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo: EPU, 2002.

KUYK, W. *Complementarity in Mathematics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 1977.

LAVILLE, C; DIONNE, J. *A construção do saber*: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Adaptação da obra de Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. Projeto Euclides. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. v. 1.

MANNO, A. G. *A filosofia da matemática*. Tradução de Armindo Rodrigues. Lisboa: Edições 70, [ca. 1982]. (Coleção O saber da filosofia.)

MARGOLINAS, C. Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, IREM de Grenoble, n.16, p. 51-68, 1988.

OTTE, M. *O formal, o social e o subjetivo*: uma introdução à filosofia e à didática da matemática. Tradução de Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

———. B. Russell's "introduction to mathematical philosophy". *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo: Educ, v. 3, n. 1, p. 11-55, 2001a.

———. Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo: Educ, v. 3, n. 2, p. 11-58, 2001b.

———. Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo: Educ, v. 5, n. 1, p. 13-55, 2003a.

———. Complementarity, Sets and Numbers. *Educational Studies in Mathematics*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003b. v. 53, p. 203-228.

———. Mathematical History, Philosophy and Education in Studies in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2007.

PASQUINI, R. C. G. *Um tratamento para os números reais via medição de segmentos*: uma proposta, uma investigação. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp, Rio Claro.

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Tradução de Maria H. Franco Martins. Revisão técnica Ildeu de Castro Moreira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

RADU, M. A. *A debate about the axiomatization of arithmetic*: Otto Hölder against Robert Gra$\beta$mann. Germany: Elsiever, 2003. p. 340-377.

RUDIN, W. *Princípios de análise matemática*. Tradução de Eliana Rocha Henriques de Brito. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991. v. 22, p. 1-36.

SKEMP, R. R. Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, v. 77, p. 20-26, 1976.

TALL D.; SCHWARZENBERGER, R. L. E. Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, n. 82, p. 44-49, 1978.

———; PINTO, M. Stundent teacher's conceptions of the rational numbers. *Published in Proceedings of PME 20*, Valencia, v. 4, p. 139-146, 1996.

# ANEXO 1

Nos anexos 1, 2 e 3, apresentamos três abordagens clássicas dos números reais: axiomática, cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais), respectivamente. A escolha deve-se ao fato de serem frequentes nos livros didáticos brasileiros de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática.

Não temos aqui a pretensão de fazer uma abordagem aprofundada e detalhada de cada uma delas, ou a construção minuciosa das mesmas, com as demonstrações de todos os teoremas. Um estudo mais detalhado de cada teoria pode ser encontrado nos livros que constam nas referências bibliográficas.

Nosso principal objetivo com estes anexos é apresentar estas abordagens, demonstrar alguns teoremas, assim como explicitar algumas ideias relativas aos aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número.

## NÚMEROS REAIS: ABORDAGEM AXIOMÁTICA

A referência utilizada na apresentação da abordagem axiomática encontra-se em Lima (2004). A abordagem axiomática dos números reais baseia-se na apresentação de uma lista contendo fatos elementares, admitidos como axiomas. Essa lista identifica um conjunto com duas operações (adição e multiplicação). Todas as propriedades relativas a esse conjunto decorrem logicamente desses axiomas. O que se tem ao final é que essa lista de axiomas vai conceituar estruturalmente o conjunto R (conjunto dos números reais) como um corpo ordenado completo. E poderemos ver (demonstrar) que esse conjunto (que é corpo, que tem ordem, e é completo), a menos de um isomorfismo é único.

Os axiomas serão apresentados por etapas: os axiomas de corpo; os de ordem, e por último lugar o axioma do supremo, esse último é precisamente o axioma não-algébrico, aquele que desempenha o papel fundamental na caracterização do conjunto dos números reais.

## 1. Axiomas de Corpo

O conjunto R, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, satisfaz os *axiomas de corpo*, quais sejam:

A1. *Associatividade da adição* – quaisquer que sejam $x, y, z \in$ R, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$.

A2. *Comutatividade da adição* - quaisquer que sejam $x, y \in$ R, tem-se $x+y = y+x$.

A3. Existência do e*lemento neutro* para a adição – existe $0 \in$ R tal que $x+0 = x$, seja qual for $x \in$ R. O elemento $0$ chama-se *zero*.

A4. Existência do *oposto* aditivo (ou simétrico) – todo elemento $x \in$ R possui um simétrico $-x \in$ R tal que $x+(-x) = 0$.

M1. *Associatividade* para a multiplicação – dados quaisquer $x, y, z \in$ R, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$.

M2. *Comutatividade* para a multiplicação - quaisquer que sejam $x, y \in$ R, vale $x.y = y.x$.

M3. Existência do *elemento neutro* – existe $1 \in$ R tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, qualquer que seja $x \in$ R. O elemento $1$ chama-se *um*.

M4. Existência do *inverso multiplicativo* – todo $x \neq 0$ em R possui um inverso $x^{-1}$, tal que $x.x^{-1} = 1$.

D1. *Distributividade* da multiplicação em relação à adição - dados quaisquer $x, y, z \in$ R, tem-se $x.(y+z) = x.y + x.z$.

## 2. Axiomas de ordem

Um *corpo ordenado* é um corpo R, no qual se destacou um subconjunto $P \subset$R, chamado o conjunto dos elementos *positivos* de R, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P$.

P2. Dado $x \in$ R ocorre exatamente uma das três condições:

$x = 0$, ou $x \in P$, ou $-x \in P$.

Indicando com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, tais que $x \in P$, temos R$= P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos $P$, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se *negativos*.

No corpo ordenado R, escrevemos $x < y$, para indicar que $x$ é *menor do que* $y$, para significar que $y - x \in P$, ou seja, que $y = x + z$, onde $z \in P$. Analogamente, $y > x$ indica que $y$ é *maior do que* $x$.

Em particular $x > 0$ indica que $x \in P$ e $x < 0$ indica que $x$ é negativo e nesse caso $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$ tem-se $x > y$.

A relação de ordem $x < y$ em um corpo ordenado R goza das seguintes propriedades:

O1. *Transitividade* – se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

O2. *Tricotomia* – dados $x, y \in$ R, ocorre apenas uma das seguintes condições: $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$.

O3. *Monotonicidade da adição* – se $x < y$ então, para todo $z \in$ R, tem-se $x + z < y + z$.

O4. *Monotonicidade da multiplicação* – se $x < y$ então, para todo $z > 0$, tem-se $x.z < y.z$. Se, porém, for $z < 0$, então $x < y$ implica $x.z > y.z$.

Um subconjunto $X$ de um corpo ordenado R chama-se *limitado superiormente* quando existe $b \in$ R tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Cada elemento de R com essa propriedade chama-se uma *cota superior* de $X$.

Analogamente, $X \subset$ R diz-se *limitado inferiormente* quando existe $a \in$ R tal que $x \in X \Rightarrow a \leq x$. Um elemento de R com essa propriedade chama-se *cota inferior* de $X$.

Um subconjunto $X$ de um corpo ordenado R chama-se *limitado* quando é limitado superiormente e inferiormente.

## 3. Números reais

Sejam R um corpo ordenado e $X \subset$ R um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in$ R chama-se *supremo* do subconjunto $X$ quando $b$ é a menor das cotas superiores de $X$ em R.

Assim, para que $b \in$ R seja supremo de um conjunto $X \subset$ R, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

S2. Se $c \in$ R é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição S1 afirma que $b$ é cota superior de $X$, enquanto S2 afirma que qualquer outra cota superior de $X$ deve ser maior do que ou igual a $b$. O supremo de um conjunto, quando existe, é único e escrevemos $\sup X$ para indicá-lo.

Analogamente, um elemento $a \in$ R chama-se *ínfimo* de um conjunto $Y \subset$ R, limitado inferiormente, quando $a$ é a maior das cotas inferiores de R.

Para que $a \in$ R seja o ínfimo de $Y \subset$ R, é necessário e suficiente que as condições abaixo sejam satisfeitas:

I1. Para todo $y \in Y$, tem-se $a \leq y$.

I2. Se $c \in$ R é tal que $c \leq y$ para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.

O ínfimo de $Y$, quando existe, é único e escreve-se $a = \inf Y$.

Um corpo ordenado R chama-se *completo* quando todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset$ R, possui supremo em R.

Resulta da definição que, num corpo ordenado completo, todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente, $Y \subset$ R, possui um ínfimo. Com efeito, dado $Y$, seja $X = -Y$, isto é, $X = \{-y; y \in Y\}$. Então $X$ não é vazio e limitado superiormente; logo existe $a = \sup X$. Como se vê, tem-se $-a = \inf Y$. Demonstra-se ainda que *todo corpo ordenado completo é arquimediano*.

**Axioma**. *Existe um corpo ordenado completo, R, chamado o corpo dos números reais*.

Dados R e $L$, corpos ordenados completos, existe uma única bijeção $f$ : R $\to L$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e que $f(x.y) = f(x).f(y)$. A função $f$ chama-se um *isomorfismo* entre R e $L$. Os corpos R e $L$ são *isomorfos*, ou seja, indistinguíveis no que diz respeito às propriedades de corpos ordenados completos. Demonstra-se que, a menos de um isomorfismo, existe apenas um corpo ordenado completo. Isso garante a unicidade dos números reais.

# ANEXO 2

## NÚMEROS REAIS: CORTES DE DEDEKIND

A forma de apresentação dessa abordagem nesta tese segue os escritos de Rudin (1971). No início do livro, o autor ressalta que "uma discussão satisfatória dos principais conceitos da análise (por exemplo, convergência, continuidade, diferenciação e integração) tem que se basear em uma definição rigorosa de número" (RUDIN, 1971, p. 01). Os cortes de Dedekind pressupõem o conjunto Q dos números racionais.

Definição de corte de Dedekind:

2.1. Diz-se que um conjunto $\alpha$ de números racionais é um corte se:

(I) $\alpha$ contém pelo menos um racional, mas não todos os racionais;

(II) de $p \in \alpha$ e $q < p$ (q racional), resulta $q \in \alpha$;

(III) em $\alpha$ não existe racional máximo.

2.2. Teorema. Seja $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $q \leq p$. Nessas condições por (II) e pelo fato de que $q \notin \alpha$ implica a tese.

Em virtude deste teorema, os elementos de $\alpha$ são às vezes chamados números inferiores de $\alpha$, enquanto os racionais que não estão em $\alpha$ são chamados números superiores de $\alpha$.

2.3. Teorema. Seja $r$ um número racional e $\alpha$ o conjunto constituído de todos os racionais $p$ tais que $p < r$. Então $\alpha$ é um corte e $r$ é o número superior mínimo de $\alpha$.

Demonstração: Inicialmente devemos observar que $\alpha$ satisfaz as condições (I) e (II) da definição 2.1. Em relação à condição (III) observamos que qualquer que seja $p \in \alpha$: $p < \frac{p+r}{2} < r$ e, portanto, $\frac{p+r}{2} \in \alpha$. Agora $r \notin \alpha$, pois $r < r$ é um absurdo, logo $r$ é um número superior de $\alpha$. É mínimo por (2.1).

2.4. O corte definido no teorema 2.3 é chamado corte racional. Quando queremos indicar que um corte $\alpha$ é o corte racional relacionado a $r$ pelo modo acima, escrevemos $\alpha = r^*$.

2.5. Sejam $\alpha$ e $\beta$ cortes. Escrevemos $\alpha < \beta$ (ou $\beta > \alpha$) se existe um racional $p$ tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$; $\alpha \leq \beta$ significa $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$; $\alpha \geq \beta$ significa $\beta \leq \alpha$.

Se $\alpha > 0^*$, dizemos que $\alpha$ é positivo; se $\alpha \geq 0^*$, dizemos que $\alpha$ não é negativo. Analogamente, se $\alpha < 0^*$ dizemos que $\alpha$ é negativo; se $\alpha \leq 0^*$, dizemos que $\alpha$ não é positivo.

Continuaremos usando o símbolo $<$ entre racionais, desta forma, este símbolo terá provisoriamente duplo sentido, seu significado será atribuído conforme o contexto.

2.6. Teorema. Sejam $\alpha$, $\beta$ cortes. Então $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Demonstração. Se $\alpha = \beta$, nenhuma das outras relações é válida pela igualdade de conjuntos. Para mostrar que $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ se excluem mutuamente, vamos supor por absurdo que ambas sejam válidas. Como $\alpha < \beta$ existe um racional $p$ tal que $p \in \beta$, $p \notin \alpha$. Como $\beta < \alpha$, existe um racional $q$ tal que $q \in \alpha$, $q \notin \beta$. Pelo teorema 2.2 se $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ resulta $p < q$, enquanto $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$ implica que $q < p$. Isto é uma contradição, pois $p < q$ e $q < p$ é impossível para números racionais.

Até aqui, provamos que, no máximo, uma das três relações é válida. Vamos supor agora que $\alpha \neq \beta$. Então os dois conjuntos não são idênticos, ou seja, ou existe um racional $p$ em $\alpha$ mas não em $\beta$ e, neste caso, $\beta < \alpha$ ou existe um racional $q$ em $\beta$, mas não em $\alpha$, e, neste caso, $\alpha < \beta$.

2.7. Teorema. Sejam $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.

Demonstração: Como $\alpha < \beta$, existe um racional $p$ tal que $p \in \beta$, $p \notin \alpha$. Como $\beta < \gamma$, existe um racional $q$ tal que $q \in \gamma$, $q \notin \beta$. Se $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ então $p < q$, disto concluímos que $p \notin \alpha$ e $q \notin \alpha$. Temos então que $q \in \gamma$, $q \notin \alpha$, o que significa que $\alpha < \gamma$.

Os dois teoremas acima mostram que a relação < introduzida em 2.5 satisfaz as propriedades gerais associadas ao conceito de desigualdade.

2.8. Teorema. Sejam $\alpha$ e $\beta$ cortes. Seja $\gamma$ o conjunto de todos os racionais $r$ tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então $\gamma$ é um corte.

Demonstração: Vamos mostrar que $\gamma$ satisfaz as três condições da definição de corte.

(I) Notamos diretamente que $\gamma$ não é vazio. Consideremos $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, sendo $s$ e $t$ racionais. Portanto $s + t > p + q$, para todo $p \in \alpha$ e todo $q \in \beta$, de modo que $s + t \notin \gamma$. Consequentemente $\gamma$ não contém todos os racionais.

(II) Supomos que $r \in \gamma$, $s < r$, sendo $s$ racional. Logo $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Seja $t$, racional, tal que $s = t + q$. Conclui-se que $t < p$, então $t \in \alpha$, consequentemente $s \in \gamma$.

(III) Supomos que $r \in \gamma$. Logo $r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Existe um racional $s > p$ tal que $s \in \alpha$. Portanto $s + q \in \gamma$ e $s + q > r$, de modo que $r$ não é o maior racional em $\gamma$.

2.9. O corte $\gamma$ definido por $\alpha+\beta$ chama-se soma de $\alpha$ e $\beta$ conforme teorema 2.8.

2.10. Teorema. Sejam $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ cortes. Então,

(a) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(b) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(c) $\alpha+0^*=\alpha$.

Demonstração. Na definição de $\alpha+\beta$, consideramos o conjunto de todos os racionais da forma $p+q\ (p\in\alpha, q\in\beta)$. Na definição de $\beta+\alpha$, consideramos $q+p$, em vez de $p+q$. Pela lei comutativa da adição de racionais, $\alpha+\beta$ e $\beta+\alpha$ são cortes idênticos, o que prova (a). Analogamente, como a adição de números racionais satisfaz a propriedade resulta (b). Para demonstrar (c), seja $r\in(\alpha+0^*)$. Logo $r=p+q$ com $p\in\alpha$ e $q\in 0^*$ (isto é $q<0$). Portanto $p+q<p$, assim $p+q\in\alpha$ e $r\in\alpha$. Suponhamos $r\in\alpha$. Consideremos $s>r$, $s$ racional tal que $s\in\alpha$. Seja $q=r-s$. Logo $q<0$, $q\in 0^*$ e $r=s+q$, de modo que $r\in(\alpha+0^*)$. Assim, os cortes $\alpha+0^*$ e $\alpha$ são idênticos.

2.11. Teorema. Seja $\alpha$ um corte e $r>0$ um racional dado. Existem racionais $p$, $q$ tais que $p\in\alpha$, $q\notin\alpha$, $q$ não é o número superior mínimo de $\alpha$ e $q-p=r$.

Demonstração: Consideremos um racional $s\in\alpha$. Para $n\in\{0,1,2,...\}$ seja $s_n=s+nr$. Então existe um único inteiro $m$ tal que $s_m\in\alpha$ e $s_{m+1}\notin\alpha$. Se $s_{m+1}$ não for o número superior mínimo de $\alpha$, consideramos $p=s_m$, $q=s_{m+1}$. Se $s_{m+1}$ for o número superior mínimo de $\alpha$, consideramos $p=s_m+\dfrac{r}{2}$ e $q=s_{m+1}+\dfrac{r}{2}$.

2.12. Teorema. Seja $\alpha$ um corte. Existe um único corte $\beta$ tal que $\alpha+\beta=0^*$.

Demonstração: Mostraremos primeiro, a unicidade. Se $\alpha+\beta_1=\alpha+\beta_2=0^*$, conclui-se do teorema 2.10 que

$$\beta_2=0^*+\beta_2=(\alpha+\beta_1)+\beta_2=(\alpha+\beta_2)+\beta_1=0^*+\beta_1=\beta_1.$$

Para demonstrar a existência do corte, seja $\beta$ o conjunto de todos os racionais $p$ tais que $-p$ é um número superior de $\alpha$, mas não o número superior mínimo. Temos que verificar se este conjunto $\beta$ satisfaz as três condições da definição de corte (2.1).

(I) A verificação é direta.

(II) Se $p\in\beta$ e $q<p$ ($q$ racional), então $-p\notin\alpha$ e $-q>-p$, de modo que $-q$ é um número superior de $\alpha$, mas não o mínimo. Portanto $q\in\beta$.

(III) Se $p\in\beta$, $-p$ é um número superior de $\alpha$, mas não o mínimo, de modo que existe um racional $q$ tal que $-q<-p$ e $-q\notin\alpha$. Seja $r=\dfrac{p+q}{2}$. Logo $-q<-r<-p$, de modo que $-r$ é um número superior de $\alpha$, mas não o mínimo. Portanto, encontramos um racional $r>p$ tal que $r\in\beta$. Tendo provado que $\beta$ é um corte, temos agora que verificar se $\alpha+\beta=0^*$.

Suponhamos $p\in\alpha+\beta$. Logo $p=q+r$, com $q\in\alpha$ e $r\in\beta$. Portanto, $-r\notin\alpha, -r>q, q+r<0$ e $p\in 0^*$.

Suponhamos $p\in 0^*$. Portanto, $p<0$. Pelo teorema 2.11, podemos determinar racionais $q\in\alpha$, $r\notin\alpha$ (e tal que $r$ não seja o número superior mínimo de $\alpha$), de modo que $r-q=-p$. Como $-r\in\beta$, temos $p=q-r=q+(-r)\in\alpha+\beta$, o que completa a demonstração.

2.13. Designamos por $-\alpha$ o corte $\beta$ do teorema 2.12.

2.14. Teorema. Quaisquer que sejam os cortes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ com $\beta<\gamma$ temos $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$. Em particular, (para $\beta=0^*$) temos $\alpha+\gamma>0^*$, se $\alpha>0^*$ e $\gamma>0^*$.

Demonstração: Conforme 2.5 e 2.9 $\alpha+\beta\leq\alpha+\gamma$. Se $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, então, $\beta=0^*+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(\alpha+\gamma)=0^*+\gamma=\gamma$, pelo teorema 2.10.

2.15. Teorema. Sejam $\alpha$, $\beta$ cortes. Existe um único corte $\gamma$ tal que $\alpha+\gamma=\beta$.

Demonstração: O fato de existir no máximo $\gamma$ nas condições enunciadas decorre de $\gamma_1\neq\gamma_2$ que implica em $\alpha+\gamma_1\neq\alpha+\gamma_2$ (teorema 2.14). Seja $\gamma=\beta+(-\alpha)$. Pelo teorema 2.10, temos:

$$\alpha+\gamma=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0^*+\beta=\beta.$$

2.16. Designamos por $\beta-\alpha$ o corte $\gamma$ do teorema 2.15. Isto é, escrevemos $\beta-\alpha$, em vez de $\beta+(-\alpha)$.

Como podemos observar, os teoremas 2.8, 2.10 e 2.12 mostram que o conjunto dos cortes é um grupo comutativo em relação à adição. Agora vamos definir a multiplicação no conjunto dos cortes e mostrar que se obtém um corpo.

Apresentamos com certa profundidade a adição de cortes, vamos tratar mais rapidamente, e sem demonstrações a multiplicação. Cabe ressaltar que as demonstrações dos teoremas que serão enunciados são análogas àquelas que dizem respeito à adição, exceto o fato de que em alguns casos, é necessário considerar várias possibilidades correspondentes aos sinais dos fatores em questão.

2.17. Teorema. Sejam $\alpha$, $\beta$ cortes tais que $\alpha\geq 0^*$, $\beta\geq 0^*$. Seja $\gamma$ o conjunto de todos os racionais negativos e de todos os racionais $r$ tais que $r=pq$, em que $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p\geq 0$, $q\geq 0$. Então $\gamma$ é um corte.

2.18. Designamos por $\alpha\beta$ e chamamos produto de $\alpha$ e $\beta$ o corte $\gamma$ do teorema 2.17.

2.19. A cada corte $\alpha$ associamos um corte $|\alpha|$, que chamamos valor absoluto de $\alpha$, definido por:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \geq 0^* \\ -\alpha & \text{se } \alpha < 0^* \end{cases}$$

Decorre dessa definição que $|\alpha| \geq 0^*$ para todo $\alpha$ e $|\alpha| = 0^*$ somente se $\alpha = 0^*$. Completemos agora a definição de multiplicação.

2.20. Sejam $\alpha$, $\beta$ cortes. Definimos:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|) & se \quad \alpha < 0^*, \beta \geq 0^*, \\ -(|\alpha||\beta|) & se \quad \alpha \geq 0^*, \beta < 0^*, \\ |\alpha||\beta| & se \quad \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

2.21. Teorema. Quaisquer que sejam os cortes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, temos:

(a) $\alpha\beta = \beta\alpha$;

(b) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

(c) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

(d) $\alpha 0^* = 0^*$;

(e) $\alpha\beta = 0^*$ se, e somente se $\alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$;

(f) $\alpha 1^* = \alpha$;

(g) Se $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

2.22. Teorema. Se $\alpha \neq 0^*$, para cada corte $\beta$ existe um único corte $\gamma$ (que designamos por $\beta / \alpha$) tal que $\alpha\gamma = \beta$.

Antes de iniciarmos as considerações em relação aos números reais apresentaremos mais três teoremas sobre os cortes racionais.

2.23. Teorema. Quaisquer que sejam os racionais $p$ e $q$, temos:

(a) $p^* + q^* = (p+q)^*$;

(b) $p^* q^* = (pq)^*$;

(c) $p^* < q^*$ se, e somente se, $p < q$.

Demonstração: Se $r \in p^* + q^*$, temos $r = s + t$, com $s < p$, $t < q$, de modo que $r < p + q$. Portanto $r \in (p+q)^*$. Se $r \in (p+q)^*$, então $r < p + q$. Sejam

$$h = p + q - r, \qquad s = p - \frac{h}{2}, \qquad t = q - \frac{h}{2}.$$

Logo $s \in p^*$, $t \in q^*$ e $r = s + t$, de modo que $r \in p^* + q^*$, o que prova (a). A demonstração de (b) é análoga.

Se $p < q$, então $p \in q^*$, mas $p \notin p^*$, de modo que $p^* < q^*$. Se $p^* < q^*$, existe um racional $r$ tal que $r \in q^*$, $r \notin p^*$. Portanto $p \leq r < q$, de modo que $p < q$.

2.24. Teorema. Se $\alpha$, $\beta$ são cortes e $\alpha < \beta$, existe um corte racional $r^*$ tal que $\alpha < r^* < \beta$.

Demonstração: Se $\alpha < \beta$, existe um racional $p$ tal que $p \in \beta$, $p \notin \alpha$. Escolhemos $r > p$ de modo que $r \in \beta$. Como $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, temos $r^* < \beta$. Como $p \in r^*$ e $p \notin \alpha$, temos $\alpha < r^*$.

2.25. Teorema. Qualquer que seja o corte $\alpha$, $p \in \alpha$ se, e somente se, $p^* < \alpha$.

Demonstração: Qualquer que seja o racional $p$, $p \notin p^*$. Portanto $p^* < \alpha$, se $p \in \alpha$. Reciprocamente, se $p^* < \alpha$, existe um racional $q$ tal que $q \in \alpha$ e $q \notin p^*$. Assim, $q \geq p$, disto concluímos, por ser $q \in \alpha$, que $p \in \alpha$.

Até aqui, foram considerados conjuntos de números racionais, aos quais chamamos cortes. Uma relação de ordem e duas operações, chamadas adição e multiplicação foram definidas e demonstramos que a aritmética dos cortes assim obtida obedece às mesmas leis que a aritmética dos racionais. Dessa forma, o conjunto de todos os cortes, munido da relação de ordem e das duas operações definidas, forma uma estrutura de corpo ordenado.

O que temos até este momento é uma classe especial de cortes, os chamados *cortes racionais*. A substituição dos números racionais $r$ pelos cortes $r^*$ correspondentes preserva soma, produto e ordem (teorema 2.23). Podemos exprimir esse fato dizendo que o corpo ordenado de números racionais é *isomorfo* ao corpo ordenado de cortes racionais, o que nos permite identificar o corte racional $r^*$ com o número racional $r$. Ressaltamos que $r^*$ não igual a $r$, ambos tem natureza distintas, mas as propriedades (operações e ordem) são as mesmas nos dois corpos.

**Números Reais**

2.26. Cortes serão chamados, daqui por diante, números reais. Cortes racionais serão identificados com números racionais (e chamados números racionais). Todos os demais cortes serão chamados números irracionais.

Assim, o conjunto de números racionais é um subconjunto dos números reais. O teorema 2.24 mostra que entre dois reais quaisquer existe um racional e o teorema 2.25 mostra que cada número real $\alpha$ é o conjunto de todos os racionais $p$ tais que $p < \alpha$. O próximo teorema estabelece uma propriedade fundamental do conjunto dos números reais.

2.27. Teorema. *Sejam* A *e* B *conjuntos de números reais tais que:*

*(a) todo número real está em* A *ou em* B *;*

*(b) nenhum número real está simultaneamente em* A *e em* B *;*

*(c) nem* A *e nem* B *é vazio;*

*(d) se* $\alpha \in A$ *e* $\beta \in B$*, então* $\alpha < \beta$ *.*

*Então, existe um, e somente um número real $\gamma$, tal que $\alpha \le \gamma$ para todo $\alpha \in A$, e $\gamma \le \beta$, para todo $\beta \in B$.*

Antes de demonstrar este teorema vamos enunciar um corolário.

Corolário. Nas condições do teorema 2.27, ou existe, em A, um número máximo, ou, em B, um número mínimo.

Com efeito, se $\gamma \in A$, $\gamma$ é o maior número de A; se $\gamma \in B$, $\gamma$ é o menor número de B; pelo item (a) do teorema 2.27, um desses dois casos deve ocorrer, enquanto, pelo item (b), eles não podem ocorrer simultaneamente.

A existência de $\gamma$ é a parte importante do teorema e ela mostra que as lacunas que podem ser encontradas no conjunto dos números racionais (por exemplo, $x^2 = 2$) podem agora ser preenchidas. Por este motivo, o teorema 2.27 é chamado teorema do completamento dos números reais.

Demonstração do teorema 2.27:

Suponhamos que existam dois números $\gamma_1$ e $\gamma_2$, para os quais a conclusão é válida e que $\gamma_1 < \gamma_2$. Consideremos $\gamma_3$ tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$ (isto é possível devido ao teorema 2.24). De $\gamma_3 < \gamma_2$ resulta $\gamma_3 \in A$, enquanto que $\gamma_1 < \gamma_3$ resulta $\gamma_3 \in B$, o que contradiz (b). Não pode existir mais de um número $\gamma$ com as propriedades desejadas.

Seja $\gamma$ o conjunto de todos os racionais $p$ tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Temos que verificar se $\gamma$ satisfaz as condições da definição 2.1.

(I) Como *A* não é vazio, $\gamma$ também não é vazio. Se $\beta \in B$ e $q \notin B$ então $q \notin \alpha$ qualquer que seja $\alpha \in A$ (pois $\alpha < \beta$); portanto $q \notin \gamma$.

(II) Se $p \in \gamma$ e $q < p$, então $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$ e, por conseguinte, $q \in \alpha$; logo $q \in \gamma$.

(III) Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$; logo, existe $q > p$ tal que $q \in \alpha$ e, portanto $q \in \gamma$. Assim, $\gamma$ é um número real.

Temos que $\alpha \leq \gamma$ qualquer que seja $\alpha \in A$. Se existisse algum $\beta \in B$ tal que $\beta < \gamma$, haveria um racional $p$ que satisfaria as condições $p \in \gamma$ e $p \notin \beta$; mas, se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, do que resulta ser $\beta < \alpha$, em contradição com (d). Assim, $\gamma \leq \beta$ qualquer que seja $\beta \in B$, e a demonstração está feita.

Daqui em diante abandonaremos algumas convenções de notação utilizadas até aqui, como o uso das letras $p, q, r,...$ não serão mais reservadas para racionais e $\alpha, \beta, \gamma,...$ serão utilizadas sem restrições.

2.28. Seja E um conjunto de números reais. Se existe um número *y* tal que $x \leq y$ para todo $x \in E$, dizemos que E é limitado superiormente e chamamos *y* de cota superior de *E*.

Cotas inferiores são definidas de modo análogo. Se E é limitado superiormente e inferiormente, dizemos que E é limitado.

2.29. Seja E limitado superiormente. Suponhamos que *y* tenha as seguintes propriedades:

(a) *y* é uma cota superior de E;

(b) se $x < y$, então *x* não é uma cota superior de E.

Nestas condições, *y* é chamado supremo de E. Utiliza-se "sup." como abreviação para supremo. O ínfimo (ínf.) de qualquer conjunto E limitado inferiormente é definido de modo análogo.

2.30. Teorema. Seja E um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente. Existe, então, o sup. de E.

Demonstração: Seja A o seguinte conjunto de números reais: $\alpha \in A$ se, e somente se, existe $x \in E$ tal que $\alpha < x$. Seja B o conjunto de todos os números reais que não estão em A.

Nenhum elemento de $A$ é cota superior de $E$, e todo elemento de $B$ é cota superior de $E$. Para provar a existência do sup., basta, portanto, provar que $B$ possuí mínimo. Verifiquemos se $A$ e $B$ satisfazem as hipóteses do teorema 2.27.

Verifica-se diretamente que (a) e (b) são válidas. Como $E$ não é vazio, existe $x \in E$ e todo $\alpha < x$ está em $A$. Sendo $E$ limitado superiormente, existe $y$ tal que $x \leq y$ qualquer que seja $x \in E$; portanto $y \in B$ e a condição (c) é válida. Se $\alpha \in A$, existe $x \in E$ tal que $\alpha < x$. Se $\beta \in B$, $x \leq \beta$. Assim, $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in A, \beta \in B$ e a condição (d) é válida.

Portanto, pelo corolário do teorema 2.27, ou $A$ possuí máximo, ou $B$ possuí mínimo. Vamos provar que a primeira alternativa não pode ocorrer.

Se $\alpha \in A$, existe $x \in E$ tal que $\alpha < x$. Consideremos $\alpha'$ tal que $\alpha < \alpha' < x$. Sendo $\alpha' < x, \alpha' \in A$, de modo que $\alpha$ não é o maior número em $A$. O teorema está demonstrado.

Finalizando a construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind podemos concluir que os números reais, assim definidos, é um corpo ordenado completo, conforme nossos propósitos neste estudo.

Apresentaremos agora a construção dos números reais por meio das classes de equivalências de sequências de Cauchy (de números racionais).

# ANEXO 3

## NÚMEROS REAIS: CLASSES DE EQUIVALÊNCIAS DE SEQUÊNCIAS CONVERGENTES DE CAUCHY

Além de Richard Dedekind, outros matemáticos do século XIX também apresentaram construções dos números reais, entre eles Georg Cantor.

Assim como Dedekind, a construção de Cantor parte dos números racionais e de suas propriedades. A construção que segue baseia-se na obra de Hamilton (1982). Iniciamos tal construção com a seguinte definição:

3.1. Diz-se que uma sequência ($a_n$) de números racionais é uma sequência de Cauchy se, qualquer que seja o número racional $\varepsilon > 0$, existe $N$ tal que $n, m > N \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Podemos observar que existem tantas sequências de Cauchy quantos são os números racionais, visto que para qualquer número racional $r$, a sequência constante $(r_n) = (r,\ r, r, ...)$ é de Cauchy. Considerando as sequências de Cauchy, muitas são convergentes, como as sequências constantes e uma infinidade de outras. Entretanto há uma infinidade de sequências de Cauchy que não convergem, por exemplo, a sequência das aproximações decimais por falta de $\sqrt{2}$, como: $(r_n) = (1,\quad 1{,}4,\quad 1{,}41,\quad 1{,}414,\quad 1{,}4142,\quad ...)$. Dizemos que tais sequências não convergem por (teoricamente) não existir ainda este tipo de número, chamado irracional. Este problema pode ser superado se postularmos que *toda sequência de Cauchy (de números racionais) converge.*

Agora devemos mostrar que esses novos números, juntamente com os racionais formam um corpo ordenado completo.

Há ainda uma questão que deve ser analisada, como lidar com diferentes sequências que convergem para um mesmo número, por exemplo, a sequência $(x_n) = (2,\ \ 1{,}5,\ \ 1{,}42,\ \ 1{,}415,\ \ 1{,}4143,\ \ ...)$ das aproximações por excesso de $\sqrt{2}$, ou seja, estas sequências devem definir o mesmo número.

Sendo assim, devemos reunir em uma mesma classe todas as sequências que terão um mesmo limite, para depois definir as operações como adição e multiplicação e formar uma possível estrutura. Para isso, devemos definir no conjunto de sequências de Cauchy, uma relação de equivalência.

3.2. Duas sequências de Cauchy $(a_n)$ e $(b_n)$ são equivalentes, e denotaremos $a_n \approx b_n$, se $(a_n - b_n)$ é uma sequência nula, isto é, $a_n - b_n \to 0$. Essa relação distribui as sequências de Cauchy em classes de sequências equivalentes, de tal forma que duas sequências pertencem a uma mesma classe se, e somente se, elas são equivalentes.

3.3. Teorema. A relação $\approx$ é uma relação de equivalência no conjunto de todas sequências de Cauchy (de números racionais).

Demonstração: A relação $\approx$ é trivialmente reflexiva e simétrica. Vamos mostrar que a propriedade transitiva é satisfeita. Suponhamos que $(a_n)$, $(b_n)$ e $(c_n)$ são sequências de Cauchy e que $a_n \approx b_n$ e $b_n \approx c_n$. Então temos $x_n = a_n - b_n$ e $y_n = b_n - c_n$, sabemos que igualmente $(x_n)$ e $(y_n)$ convergem para zero. Consequentemente, a sequência na qual o n-ésimo termo é $x_n + y_n$ converge para zero. Mas $x_n + y_n = a_n - b_n + b_n - c_n = a_n - c_n$. Portanto fica provado que $a_n \approx c_n$.

Ainda devemos provar que este conjunto satisfaz todas as propriedades dos números reais. As principais propriedades concernem ás operações de adição e multiplicação, a ordem dos números reais, e a maneira em que o conjunto dos números racionais é encaixado nos reais.

3.4. O conjunto R de números reais é o conjunto de todas as classes de equivalências de sequências de Cauchy (de números racionais) sob a relação $\approx$. Denotaremos por $[a_n]$ as classes de equivalência que contém a sequência $(a_n)$ de Cauchy.

3.5. A adição e a multiplicação de números reais são definidas por $[x_n]+[y_n]=[x_n+y_n]$, e $[x_n]\times[y_n]=[x_n y_n]$, aqui $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências racionais de Cauchy, e $(x_n+y_n)$ e $(x_n y_n)$ denotam as sequências cujo n-ésimo termo são respectivamente $x_n+y_n$ e $x_n y_n$.

Antes de aceitarmos estas definições, há muitos resultados a serem verificados. Nós listamos alguns resultados necessários em forma de teoremas.

3.6. Teorema.

(i) Se $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências racionais de Cauchy. Então $(x_n+y_n)$ e $(x_n y_n)$ também são sequências racionais de Cauchy.

(ii) Se $(x_n)$, $(y_n)$, $(x'_n)$ e $(y'_n)$ são sequências racionais de Cauchy, onde $(x_n)\approx(x'_n)$ e $(y_n)\approx(y'_n)$. Então $(x_n+y_n)\approx(x'_n+y'_n)$ e $(x_n y_n)\approx(x'_n y'_n)$.

Demonstração: Apresentaremos aqui apenas a demonstração de (i), visto que a prova de (ii) segue raciocínio análogo.

(i) Se $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências racionais de Cauchy. Escolhendo um número racional positivo $\varepsilon$. Existe $N_1$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|x_m-x_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$ para todo *m, n >* $N_1$. Também existe $N_2$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|y_m-y_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$ para todo *m, n >* $N_2$. Daí, para todo *m, n > max (*$N_1, N_2$*)*, temos

$$|(x_m+y_m)-(x_n+y_n)|=|(x_m-x_n)+(y_m-y_n)|\leq|x_m-x_n|+|y_m-y_n|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

Assim, $(x_n+y_n)$ é uma sequência de Cauchy.

Para provar que $(x_n y_n)$ é uma sequência de Cauchy usa-se o resultado do lema cuja prova segue abaixo. Pelo lema existe um número racional $d$ e $e$ tais que $|x_n| \le d$ e $|y_n| \le e$, para todo $n$ pertencente ao conjunto dos números naturais. Escolhendo um número racional positivo $\varepsilon$. Existe $N_1$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2e}$, para todo *m, n* > $N_1$.

Também existe $N_2$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2d}$, para todo *m, n* > $N_2$.

Consequentemente, para todo *m, n > max (*$N_1, N_2$*)*, temos:

$$|x_m y_m - x_n y_n| = |x_m y_m - x_n y_m + x_n y_m - x_n y_n| = |(x_m - x_n) y_m + x_n (y_m - y_n)|$$

$$|(x_m - x_n) y_m + x_n (y_m - y_n)| \le |(x_m - x_n) y_m| + |x_n (y_m - y_n)| = |x_m - x_n||y_m| + |x_n||y_m - y_n|$$

$|x_m - x_n||y_m| + |x_n||y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2e}.e + d.\frac{\varepsilon}{2d} = \varepsilon$. Assim, $(x_n y_n)$ é uma sequência de Cauchy.

Supondo que $(x_n)$, $(y_n)$, $(x'_n)$ e $(y'_n)$ são sequências racionais de Cauchy e que $(x_n) \approx (x'_n)$ e $(y_n) \approx (y'_n)$. Utilizamos um argumento similar ao utilizado anteriormente. Escolhendo um número racional positivo $\varepsilon$. As sequências $(x_n)$ e $(y'_n)$ são limitadas, ou seja, $|x_n| \le k$ e $|y'_n| \le l$, para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais. Existe $N_1$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2l}$, para todo *n* > $N_1$, desde que $(x_n) \approx (x'_n)$. Similarmente existe $N_2$ pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{2k}$, para todo *n* > $N_2$. Consequentemente, para todo *n > max (*$N_1, N_2$*)*, temos:

$$|x_n y_n - x'_n y'_n| = |x_n y_n - x_n y'_n + x_n y'_n - x'_n y'_n| = |x_n (y_n - y'_n) + (x_n - x'_n) y'_n|$$

$$|x_n (y_n - y'_n) + (x_n + x'_n) y'_n| \le |x_n (y_n - y'_n)| + |(x_n - x'_n) y'_n| = |x_n||y_n - y'_n| + |x_n - x'_n||y'_n|$$

$|x_n||y_n - y'_n| + |x_n - x'_n||y'_n| < k.\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2l}.l = \varepsilon$. Logo, $(x_n y_n) \approx (x'_n y'_n)$.

3.7. Lema. Toda sequência de Cauchy (de números racionais) é limitada, isto é, dada uma sequência de Cauchy $(a_n)$ existe um número racional $d$ tal que $|a_n| \leq d$ para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.

Demonstração:

Considerando que $(a_n)$ é uma sequência de Cauchy, e escolhendo algum número racional positivo $\varepsilon$. Então, existe *N* pertencente ao conjunto dos números naturais tal que $|a_m - a_n| < \varepsilon$ para todo *m, n > N*. Segue que $|a_n| < |a_{N+1}| + \varepsilon$ para todo *n > N*. Assim, há um limite para os termos da sequência após o N-enésimo termo. Pode ocorrer que um dos termos mais adiantados seja maior do que este limite, assim deixamos $d = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_{N+1}| + \varepsilon)$. Logo $|a_n| \leq d$ para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.

As definições de adição e multiplicação no conjunto dos números reais foram apresentadas para mostrar o sentido de tais operações por meio das sequências de Cauchy. Apresentamos agora algumas propriedades elementares.

3.8. Teorema.

(i) As operações de adição e multiplicação em R (conjunto dos números reais) são comutativas e associativas e satisfazem a propriedade distributiva.

(ii) A classe de sequências equivalentes de Cauchy que contém a sequência constante (0, 0, 0,...), comporta-se como o número zero em relação às operações de adição e multiplicação. E é denotada por $[\,0\,]$.

(iii) A classe de sequências equivalentes de Cauchy que contém a sequência constante (1, 1, 1,...), comporta-se como o número 1. E é denotada por $[\,1\,]$.

(iv) Se $[a_n] \in$ R, então $[a_n] + [-a_n] = [\,0\,]$.

(v) Se $[a_n] \in$ R e $[a_n] \neq [\,0\,]$, então existe $[b_n]$ tal que $[a_n]$x$[b_n] = 1$.

Observemos que não podemos utilizar exatamente o conjunto $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, uma vez que poderíamos ter $a_n = 0$ para alguns valores de n.

Demonstração:

(i) Sejam $[a_n]$, $[b_n]$, $[c_n] \in$ R.

$[a_n]$x$([b_n] + [c_n]) = [a_n]$x$[b_n + c_n] = [a_n(b_n + c_n)] = [a_n b_n + a_n c_n] =$

$= [a_n]$x$[b_n] + [a_n]$x$[c_n]$.

(ii) Seja $[a_n] \in$ R.

$[a_n] + [\,0\,] = [a_n + 0\,] = [a_n]$ e $[a_n]$x$[\,0\,] = [a_n .\, 0\,] = [\,0\,]$.

(iii) Seja $[a_n] \in$ R.

$[a_n]$x$[\,1\,] = [a_n .\, 1\,] = [a_n]$.

(iv) A demonstração é trivial. Observemos que essa propriedade nos permite definir a subtração em R.

$[a_n] - [b_n]$ significa $[a_n]$ + $[-b_n]$.

(v) A demonstração dessa propriedade é mais trabalhosa que as anteriores. Seja $[a_n] \in$ R com $[a_n] \neq [\,0\,]$. Então $(a_n)$ não pode ter como limite o número zero, assim pelo lema o qual segue esta prova, existe $e \in$ Q$^+$ e $K \in$ N tal que $|a_n| \geq e$ para todo n > *K*. Definimos a sequência $(b_n)$ por:

$$b_n = \begin{cases} 0 & se \quad n \leq K \\ \dfrac{1}{a_n} & se \quad n > K \end{cases}$$

Agora devemos mostrar que $(b_n)$ é uma sequência de Cauchy. Seja $\varepsilon \in$ Q⁺. Uma vez que $(a_n)$ é uma sequência de Cauchy, existe $N \in$ N tal que $|a_m - a_n| < e^2\varepsilon$ para todo *m, n > N*. Segue que, para todo, *m, n > max(K, N)*, temos:
$|b_m - b_n| = \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_m a_n|} = \frac{|a_n - a_m|}{|a_m||a_n|} \leq \frac{|a_n - a_m|}{e^2} < \frac{e^2\varepsilon}{e^2} = \varepsilon$, já que $|a_n| \geq e$, $|a_m| \geq e$

por último devemos mostrar que $[a_n] \text{x} [b_n] = 1$.

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & se \quad n \leq K \\ 1 & se \quad n > K \end{cases}$$

Verifica-se então que $(a_n b_n) \approx (1)$ (aqui $(1)$ representa a sequência na qual todos os termos são iguais a 1), e, consequentemente, $[a_n b_n] = [1]$.

3.9. Lema. Seja $(a_n)$ uma sequência de Cauchy (de números racionais) que não tem como limite 0. Então existe um número racional positivo $e$ e um número inteiro positivo *K* tal que $|a_n| \geq e$ para todo *n > K*. (A sequência é eventualmente limitada fora do 'numero zero).

Demonstração:

A negação da indicação "$(a_n)$ tem limite zero" é: existe $\varepsilon \in$ Q⁺ tal que, para todo $N \in$ N, $|a_n - 0| \geq \varepsilon$ para algum *n > N*. Visto que $(a_n)$ é uma sequência de Cauchy existe $N_1 \in$ N tal que $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$, para todo *m, n >* $N_1$.

Agora, pelo que foi dado acima, existe $K > N_1$ tal que $|a_K| \geq \varepsilon$. Também temos, para todo *n > K*, $|a_n - a_K| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Realizando procedimentos utilizando as operações com os módulos indicados podemos obter a conclusão de que $|a_n| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$, para todo *n > K*. Consequentemente fazendo a análise de $e$ para o número $\frac{1}{2}\varepsilon$, e o lema é demonstrado.

Em seguida vamos nos voltar para a ordem dos números reais. De certa forma, nós podemos ter alguma intuição em relação a "ordenação" do conjunto dos números reais e do modelo geométrico de tal conjunto, ou seja, a reta real. O propósito é conectar a nova definição de números reais (classes de equivalências de sequências de Cauchy de números racionais) com nossas intuições da reta real. Primeiramente vamos descrever o conjunto dos números positivos.

3.10. Definição.

(i) Uma sequência de Cauchy $(a_n)$ (de números racionais) é dita *estritamente positiva* se existir um número racional positivo $e$ e um inteiro positivo *K* tal que $a_n \geq e$ para todo *n* > *K*.

(ii) Um número real $[a_n]$ é *positivo* se a sequência de Cauchy $(a_n)$ é estritamente positiva.

Para que essa definição tenha sentido é necessário demonstrar o seguinte teorema.

3.11. Teorema. Sejam $(a_n)$ e $(b_n)$ sequências de Cauchy (de números racionais). Se $(a_n)$ é estritamente positiva e $(a_n) \approx (b_n)$ então $(b_n)$ é estritamente positiva.

Esse teorema assegura que se uma sequência de Cauchy é estritamente positiva então toda sequência correspondente à classe de equivalência é estritamente positiva. Denotaremos por $R^+$ o conjunto de números reais positivos.

3.12. Sejam $x$, $y \in$ R, dizemos que $x < y$ se $y - x \in R^+$. Habitualmente de forma pratica, $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$.

3.13. Propriedades

(a) Para $x$, $y$, $z \in$ R, temos $x < y$ se, e somente se $x + z < y + z$.

(b) Para $x$, $y \in$ R e $z \in R^+$, temos $x < y$ se, e somente se $xz < yz$.

(c) Para $x \in$ R e $y \in R^+$, temos $x < x + y$.

(d) Se $x \in$ R$^+$ e $y \in$ R$^+$, então $x + y \in$ R$^+$.

(e) Se $x \in$ R$^+$ e $y \in$ R$^+$, então $xy \in$ R$^+$.

(f) Se $x \in$ R$^+$, então $-x < x$.

(g) $x \in$ R$^+$ se, e somente se $[\,0\,] < x$.

(h) Para qualquer $x \in$ R, $[\,0\,] \leq x^2$.

Demonstrações:

Em (a) observamos que $(y+z)-(x+z) = y-x$. E que $(y+z)-(x+z)\ x \in$ R$^+$ se, e somente se $y-x \in$ R$^+$, disto segue o resultado.

Para (e), sejam $x = [a_n] \in$ R$^+$, $y = [b_n] \in$ R$^+$. Então existem $e_x$, $e_y \in$ Q$^+$ e $K_x$, $K_y \in$ N tal que $a_n \geq e_x$ para todo $n > K_x$, e $b_n \geq e_y$ para todo $n > K_y$. Segue que $a_n b_n \geq e_x e_y$ para todo $n > \max(K_x, K_y)$ e, consequentemente, $(a_n b_n)$ é estritamente positivo. Aqui utilizamos a propriedade correspondente em Q: de $e_x \in$ Q$^+$ e $e_y \in$ Q$^+$ deduzimos que $e_x\, e_y \in$ Q$^+$.

Para (g) devemos somente observar que para qualquer $x \in$ R, $x - [\,0\,] = x$. Assim $[\,0\,] < x$ se, e somente se $x - [\,0\,] \in$ R$^+$, isto é, $x \in$ R$^+$.

Pelo que vimos até aqui, podemos afirmar que R tem as propriedades algébricas e de ordem que são em vários aspectos idênticas as de Q. Naturalmente veremos que o conjunto dos números reais tem uma propriedade crucial que o conjunto dos números racionais não possui, a saber, a propriedade do menor limite superior.

Agora, entretanto, consideraremos o conjunto Q encaixado em R. Nós já consideramos ocasionalmente que as sequências constantes 0, 0, 0,... e 1, 1, 1,... originam os números reais $[\,0\,]$(zero) e $[\,1\,]$(um) respectivamente.

Em geral, para qualquer número racional $a$, a sequência constante $a$, $a$, $a$,... é uma sequência de Cauchy, e denotamos a classe de equivalência determinada por $[\,a\,]$. Desta forma, cada $a \in$ Q tem um correspondente $[\,a\,] \in$ R.

Verifica-se que não podemos ter $[a]=[b]$ a menos que tenhamos $a=b$ (em Q), e deste modo uma correspondência um a um. Para verificar que o conjunto $\{[a] \in$ R: $a \in$ Q $\}$ é uma “cópia” de Q em R, devemos checar as operações $[a]+[b]=[a+b]$, e $[a] \text{x} [b]=[ab]$. Ambas consideradas pelas definições de + e x em R. Além disso, demonstra-se que a ordem é preservada: $a<b$ em Q é assegurada se, e somente se $[a]<[b]$ em R.

Consequentemente, internamente a R há uma “cópia” isomorfa de Q e, apenas como fizemos nas construções precedentes, podemos considerar o conjunto $\{[a] \in$ R: $a \in$ Q $\}$ como uma representação do sistema de números racionais. Na pratica, podemos esquecer a distinção entre os elementos $a$ de Q e os elementos $[a]$ de R, e consequentemente, considerar que o conjunto Q é um subconjunto de R.

3.14. Teorema.

(i) Dado $x \in$ R, é válida uma das seguintes asserções: $x \in$ R$^+$, $x=0$, $-x \in$ R$^+$.

(ii) Se $x$, $y \in$ R$^+$, então $x+y \in$ R$^+$ e $x \text{x} y \in$ R$^+$.

Demonstração:

(i) Seja $x=[a_n] \in$ R. Se $x \neq 0$ então a sequência $(a_n)$ não tem como limite o número zero. Conforme o lema 3.9. existe $e \in$ Q$^+$ e $K \in$ N tal que $|a_n| \geq e$ para todo $n > K$. Como $(a_n)$ é uma sequência de Cauchy, existe $N \in$ N tal que $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}e$ para todo $m$, $n > N$. Agora, fixando $p > \max(K, N)$, de modo que $|a_p| \geq e$ e para todo $n \geq p$ temos $-\frac{1}{2}e < a_n - a_p < \frac{1}{2}e$. Devemos considerar dois casos: $a_p \geq e$ e $a_p \leq -e$.

Se $a_p \geq e$ então para todo $n \geq p$ temos $a_n > a_p - \frac{1}{2}e$, superiormente, $\geq e - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}e$ e neste caso $(a_n)$ é estritamente positivo deste modo $x \in$ R$^+$.

Se $a_p \leq -e$, então para todo $n \geq p$ temos $a_n < \frac{1}{2}e + a_p \leq \frac{1}{2}e - e = -\frac{1}{2}e$ de modo que $-a_n \geq \frac{1}{2}e$ e neste caso a sequência $(-a_n)$ é estritamente positiva, deste modo $-x \in$ R$^+$.

(ii) A demonstração é imediata conforme as propriedades 3.13. (d) e (e).

Teorema. 3.15. A ordem natural de R é densa, isto é, dado $x, y \in$ R, com $x < y$ existe $z \in$ R tal que $x < z$ e $z < y$ .

Demonstração:

Basta tomar $z = \frac{(x+y)}{2}$. Devemos observar que 2 é o número real $[2]$, e a divisão por 2 é a multiplicação pelo inverso de $[2]$, neste caso $\left[\frac{1}{2}\right]$.

Teorema 3.16. A ordem natural de R é Arquimediana, isto é, dado $x, y \in$ R$^+$, existe um número inteiro positivo $r$ tal que $y < rx$ .

Demonstração:

Seja $x = [a_n]$ e $y = [b_n]$ elementos do conjunto R$^+$, de modo que as sequências $(a_n)$e $(b_n)$ são estritamente positivas. Queremos encontrar um número inteiro positivo $r$ tal que $(ra_n - b_n)$ seja estritamente positivo. Existe $e \in$ Q$^+$ e $K \in$ N tal que $a_n \geq e$ para todo $n > K$. Temos ainda que $(b_n)$ é uma sequência de Cauchy, limitada, isto é, existe $d > 0$ em Q tal que $|b_n| \leq d$ para todo $n \in$ N. Como o conjunto Q é Arquimediano e $e \in$ Q$^+$ e $d + 1 \in$ Q$^+$, existe um número inteiro positivo $r$ tal que $d+1<re$. Consequentemente, para todo $n > K$ temos $d+1<re \leq ra_n$.

Além disso, $b_n \leq |b_n| \leq d$ para todo $n$, assim temos $b_n + 1 < ra_n$ para todo $n > K$ e assim $ra_n - b_n > 1$ para todo $n > K$. Desta forma, a sequência $(ra_n - b_n)$ é estritamente positiva e a demonstração está completa. Identificamos implicitamente o número inteiro positivo $r$ com o número racional $r$ e com o número real $r$, de acordo com nossas convenções.

Teorema 3.16. Dado qualquer subconjunto não vazio *A* de R que seja limitado superiormente, existe um menor limite superior em R para o conjunto *A*. (Geralmente expressamos isto dizendo que R tem a propriedade do limite mínimo superior).

Demonstração:

Seja *A* $\subseteq$ R e $x \leq x_0$ para todo $x \in$ *A*, onde $x_0 \in$ R. Construímos sequências equivalentes de Cauchy $(x_n)$ e $(y_n)$ em Q, decrescente e crescente, respectivamente, nesta ordem para manter o limite mínimo superior de *A* elas. Inicialmente encontramos $a, b \in$ Q, tal que o menor limite superior (se existir) encontra-se entre eles, $x_0$ é um limite superior e seria apropriado que fosse $b$ já que este é um elemento de Q, mas não pode ser assim, visto que o número racional $b$ escolhido pode ser maior que $x_0$ (pelo teorema 3.16 tal número existe). Similarmente, escolhendo um número racional $a$ menor que algum elemento do conjunto *A*. Fixando $n \in$ N $(n \geq 1)$ momentaneamente. Temos $b-a \in$ Q, e existe um número inteiro positivo $r$ tal que $b-a < r\frac{1}{n}$, isto é, $a+\frac{r}{n} > b$. Para tal $r$ o número $a+\frac{r}{n}$ é um limite superior para o conjunto *A*. Disto resulta que o conjunto $\{$ $r \in$ N: $a+\frac{r}{n}$ é um limite superior para o conjunto *A* $\}$ não é vazio e tem um elemento mínimo. Denotaremos tal elemento mínimo por $r_n$.

Seja $x_n = a + \frac{r_n}{n}$ e $y_n = a + \frac{r_n - 1}{n}$, para $n \in$ N, $n \geq 1$. Observe que $x_n - y_n = \frac{1}{n}$ com $y_n < x_n$, para todo $n$. Podemos ir mais adiante. Cada $x_n$ é um limite superior de *A* quando $y_n$ não for. Consequentemente, $y_m < x_n$ para todo $m, n$.

Em seguida mostraremos que $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências de Cauchy, e que $(x_n) \approx (y_n)$. $x_m - x_n < x_m - y_m = \frac{1}{m}$, uma vez que $y_m < x_n$. Além disso, $x_n - x_m < x_n - y_n = \frac{1}{n}$, uma vez que $y_n < x_m$. Portanto, para $m, n > k$ temos $|x_m - x_n| < \frac{1}{k}$ e, consequentemente, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. A prova de que $(y_n)$ é uma sequência de Cauchy é análoga. Além disso, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, assim para $n > k$ temos $|x_n - y_n| < \frac{1}{k}$ e assim $(x_n) \approx (y_n)$.

Falta mostrar que $[x_n]$ (que é igual a $[y_n]$) é o menor limite superior de *A* em R. Inicialmente, vamos supor $[x_n]$ não é um limite superior, isto é, supomos que existe $[z_n] \in$ *A* com $[x_n] < [z_n]$. Então $(z_n - x_n)$ é estritamente positivo, logo existe $e \in$ Q$^+$ e $K_1 \in$ N tal que $z_n - x_n \geq e$ para todo $n > K_1$. Além disso, existe $K_2 \in$ N tal que $|x_m - x_n| < \frac{1}{2}e$ para todo $m$, $n > K_2$. Seja $K = \max(K_1, K_2)$. Então, para algum $n > K$, temos $|x_n - x_K| < \frac{1}{2}e$, de modo que $x_n > x_K - \frac{1}{2}e$ e $z_n - x_n \geq e$ de modo que $z_n \geq x_n + e$. Consequentemente, $z_n \geq x_K + \frac{1}{2}e$ e assim $z_n - x_K \geq \frac{1}{2}e$ para todo $n > K$.

Deste modo, comparando a sequência $(z_n)$ com a sequência constante $(x_K)$, podemos ver que $[x_K] < [z_n]$. Mas $x_K$ é um limite superior para *A* (todos termos da sequência $(x_n)$ são) e assim $[z_n]$ obrigatoriamente é um limite superior para *A*. Isto contradiz nossa asserção sobre $[z_n]$, isto implica que $[a_n]$ é um limite superior para *A*.

Finalmente, supondo $[u_n]<[y_n]$ tal que $[u_n]$ é um limite superior para *A*. Nós deduzimos uma contradição novamente. $(y_n - u_n)$ é estritamente positivo, daí existe $e \in$ $Q^+$ e $L_1 \in$ N tal que $y_n - u_n \geq e$ para todo $n$ > $L_1$. Além disso, existe $L_2$ $\in$ N tal que $|y_m - y_n| < \frac{1}{2}e$ para todo $m$, $n$ > $L_2$. Seja $L = \max(L_1, L_2)$. Então, para algum $n$ > $L$, temos $|y_n - y_L| < \frac{1}{2}e$, de modo que $y_L > y_n - \frac{1}{2}e$ e $y_n - u_n \geq e$ de modo que $y_n \geq u_n + e$. Consequentemente, $y_L > u_n + \frac{1}{2}e$ e assim $y_L - u_n > \frac{1}{2}e$ para todo $n$ > $L$. Deste modo, comparando a sequência $(u_n)$ com a sequência constante $(y_L)$, podemos ver que $[y_L]>[u_n]$. Mas $[u_n]$ é um limite superior para *A*, assim como $[y_L]$ também é. Isto contradiz a construção da sequência $(y_n)$, visto que nenhum dos termos $y_n$ é limite superior de *A*. Isto completa a demonstração.

O conjunto dos números reais é um corpo. Além disso, ele é um corpo ordenado (as propriedades relevantes são aquelas demonstradas no teorema 3.14.). Assim ele é um corpo ordenado com a propriedade do menor limite superior (corpo ordenado completo). Podemos demonstrar que quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. Consequentemente temos uma forma algébrica para caracterizar o conjunto R como um corpo ordenado completo. Para matemáticos que trabalham com Análise, ou com os números reais em outras áreas, a noção de R como um corpo ordenado com a propriedade do limite mínimo superior serve efetivamente como ponto inicial.

Referimos-nos anteriormente às insuficiências do conjunto dos números racionais, por exemplo, a falta do limite mínimo superior foi retificada em R, mas por outro lado, há outra insuficiência que permanece em R. Nem todas as equações polinomiais com coeficientes inteiros têm solução em R. Certamente a equação $x^2 - 2=0$ pode ser resolvida em R (ainda que não tenha solução em Q), mas a equação $x^2 + 2 = 0$ não pode ser resolvida em R.