

# Condições de contorno de Neumann Homogêneas como restauradoras da simetria

**Flávio Pereira**

Programa de Pós-Graduação em Física  
Universidade Federal do Espírito Santo

2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Agradecimentos

O autor agradece:

- a Deus.
- a todos os seus familiares, em destaque a sua mãe Rita Maria Pereira por todo o apoio oferecido.
- a todos os seus amigos, que direta ou indiretamente o ajudaram nessa conquista, em especial a José André Lourenço pela ajuda e pelas várias discussões ao longo desses dois anos e meio de mestrado.
- ao professor e orientador José Alexandre Nogueira, pois sem a sua ajuda este trabalho não seria possível.
- à CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

# Sumário

Resumo . . . . .	vi
Abstract . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	2
<b>2 Efeito Casimir</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	8
2.2 Energia de ponto zero e energia do vácuo . . . . .	8
2.3 Energia de Casimir . . . . .	15
2.3.1 Energia de Casimir para um campo escalar livre não massivo com condições de contorno de Dirichlet homogêneas . . . . .	15
2.3.2 Energia de Casimir para um campo escalar livre não massivo com condições de contorno de Neumann homogêneas . . . . .	21
2.3.3 Energia de Casimir para um campo escalar livre, não massivo com condições de contorno periódicas . . . . .	22
2.3.4 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno de Dirichlet homogêneas . . . . .	24
2.3.5 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno de Neumann homogêneas . . . . .	28
2.3.6 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno periódicas . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Potencial Efetivo</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Expansão em loop para o potencial efetivo . . . . .	32
3.3	A interpretação do potencial efetivo . . . . .	38
3.4	Convexidade do potencial efetivo . . . . .	40
<b>4</b>	<b>O potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria</b>	<b>45</b>
4.1	Introdução. . . . .	46
4.2	O potencial efetivo. . . . .	47
4.3	O potencial efetivo verdadeiro. . . . .	50
<b>5</b>	<b>Condições de contorno de Neumann homogêneas como restauradoras da simetria</b>	<b>59</b>
5.1	Introdução . . . . .	60
5.2	Potencial efetivo com condições de contorno de Neumann . . . . .	60
5.3	Análise das ordens . . . . .	66
5.4	Restauração da simetria . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>69</b>
6.1	Conclusões . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Apêndices</b>	<b>72</b>
7.1	Apêndice A . . . . .	73
7.2	Apêndice B . . . . .	75
7.3	Apêndice C . . . . .	76
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Resumo

Classicamente a noção de vácuo tem um sentido de vazio absoluto, ou seja, o vácuo seria uma região do espaço onde nenhuma partícula seria encontrada. A teoria quântica de campos que reúne a mecânica quântica e a teoria da relatividade especial em uma só estrutura conceitual, nos mostra que o vácuo não é um completo vazio, mas que na verdade o vácuo apresenta flutuações de campo e essas flutuações de campo no estado de menor energia caracterizam o chamado *vácuo quântico*.

O confinamento de um dado campo numa certa região limitada do espaço (condições de contorno) podem alterar o vácuo quântico, ocasionando efeitos mensuráveis, como por exemplo, a atração entre duas placas condutoras eletricamente neutras (efeito Casimir). Neste trabalho mostramos que para uma teoria de um campo escalar, real com auto-interação do tipo  $\phi^4$ , apresentando quebra espontânea de simetria a “tree level”, a imposição das condições de contorno de Neumann homogêneas sobre dois planos infinitos, paralelos restaura a simetria quando a distância entre os planos é menor que um comprimento crítico.

Para isso usamos o método do potencial efetivo que é uma generalização do potencial clássico e é dado pela soma do potencial clássico mais as correções quânticas da teoria, isto é, uma expansão em potências de  $\hbar$ . As correções de  $\mathcal{O}(\hbar)$  representam a interação do campo com o vácuo quântico e que por causa das condições de contorno, esses termos ficam dependentes do parâmetro de compactificação  $a$ . Observamos que quando  $a^2$  é da ordem da constante de acoplamento da teoria, o primeiro termo advindo da correção quântica torna-se de ordem clássica ( $\hbar^0$ ), ocasionando uma modificação no mínimo do potencial em ordem clássica. Quando o parâmetro de compactificação  $a$  assume um valor igual ou menor a um determinado valor crítico  $a_c$  a simetria da teoria é restaurada.

# Abstract

The commonsense notion of vacuum is an absolute empty, that is, a region without matter. The quantum field theory, which brings the quantum mechanics and the special relativistic theory together in a only one conceptual structure, shows us that the vacuum is not completely empty, but actually in the vacuum take place field fluctuations and those field fluctuations in their lowest energy state describe the so-called *quantum vacuum*.

Boundary conditions disturb that vacuum, raising measures effects like, for instance, attractive force between a pair of neutral, parallel conducting plates.

In this work we show that for a theory of a real, scalar field with quartic self-interaction, which point out spontaneous symmetry breaking in the tree level, the constraint of homogeneous Neumann boundary conditions on a pair of parallel surfaces restores the symmetry when the distance between the surfaces is smaller than a critical compactification length. In order to do that we use the effective potential method which is a generalization of the classical potential and it is the sum of the classical potential plus quantum corrections, that is, an expansion in order of  $\hbar$ . The  $\hbar$  corrections represent the interaction of the field with the quantum vacuum and because of the boundary conditions those terms become dependent on the compactification parameter  $a$ . We stress that, when the order of  $a^2$  is of the order of the coupling constant, the first term from the radiative corrections becomes of classical order, modifying the minimum of the potential in the classical level. When the compactification parameter  $a$  is equal or smaller than a critical value  $a_c$  the symmetry is restored.

# Capítulo 1

## Introdução

## 1.1 Introdução

A teoria quântica de campos é uma consequência direta da mecânica quântica relativística. Nela as excitações dos campos (perturbações) são interpretadas como as partículas associadas a esses campos. Assim, a teoria quântica de campos é fundamentalmente uma teoria de muitas partículas. Na quantização de uma teoria de campos, os campos são transformados em operadores que agem em um espaço de Fock (ocupação). O estado fundamental (de mínima energia) onde agem os operadores de campo é chamado de estado de *vácuo* (um preciso e bem definido estado quântico), pois o valor médio do número de partículas neste estado é nulo. Entretanto, como uma consequência do princípio de incerteza, os operadores de campo não comutam com os operadores número de partículas e dessa forma, embora os valores médios (clássicos) dos operadores de campo e dos de número de partículas sejam nulos, o mesmo não é verdade para os valores médios dos quadrados desses operadores, o que acarreta o aparecimento de flutuações. Portanto, o vácuo quântico não é um espaço vazio, caracterizado pela ausência de qualquer entidade física, mas sim é um espaço onde pequenas oscilações dos campos ocorrem em toda parte, as chamadas flutuações de *ponto zero*. O vácuo quântico pode, então, ser interpretado como sendo ocupado por partículas virtuais, que são aquelas associadas com as flutuações de ponto zero. Essas partículas são o resultado de um constante processo de criação e aniquilação, de maneira que elas possuem uma existência tão efêmera que não são detectadas diretamente.

Um campo é um sistema com infinitos graus de liberdade que pode ser tratado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos fictícios desacoplados, cada um tendo uma frequência própria de oscilação, a chamada *frequência normal*. Dessa forma uma teoria quântica de campos é um sistema de infinitos osciladores harmônicos quânticos desacoplados. Como sabemos a energia do estado fundamental de um oscilador quântico não é nula. Essa *energia de ponto zero* é proporcional à frequência de oscilação. Como existem infinitos desses osciladores, cada um deles contribuindo com uma energia diferente de zero para o estado fundamental, a energia total do vácuo é infinita. Isso está associado a que o valor médio do quadrado dos operadores de campo

diverge. Essa energia do vácuo é constante e uma vez que no espaço de Minkowski a energia é uma grandeza relativa e não absoluta, ela pode, em muitos aspectos, ser ignorada. No entanto, o vácuo quântico pode interagir com os campos, e essa interação pode produzir alterações em grandezas mensuráveis, como por exemplo a massa, a carga e a constante de acoplamento dos campos. Essas correções são, em geral, também infinitas, o que constitui um dos principais problemas da teoria quântica de campos. Para tentarmos sanar esses problemas recorreremos ao processo chamado de *Renormalização*. Esse processo consiste em isolarmos as divergências, usando algum método de regularização, e absorvê-las sistematicamente na redefinição dos parâmetros mensuráveis da teoria. Os parâmetros originais, não renormalizados, são infinitos, sendo definidos de modo a cancelar os efeitos das divergências. Os parâmetros renormalizados são aqueles que coincidem com os valores observados para as grandezas físicas. Devemos mencionar que nem sempre é possível aplicar a técnica de renormalização, uma vez que há teorias em que as divergências não podem ser todas incorporadas nos parâmetros originais, nesse caso dizemos que a teoria é não renormalizável.

A utilização de teorias efetivas provenientes da renormalização de seus parâmetros não é algo encontrado apenas na teoria quântica de campos, mas pode ser encontrada em diversos outros lugares da física. Um exemplo simples é a massa efetiva associada a um elétron que se desloca numa rede periódica. Nesse caso o efeito das forças internas exercidas pelos íons da rede é incorporado na massa renormalizada e então analisa-se a dinâmica apenas a partir das forças externas. O que há de diferente na renormalização que envolve o vácuo quântico é o fato de as correções serem infinitas. As operações algébricas necessárias no processo não são, portanto, bem definidas, e são efetuadas após algum método de regularização.

O efeito Casimir está relacionado com as diferenças na densidade de energia do vácuo provocadas pelas alterações nas condições de contorno impostas aos campos no vácuo. O efeito Casimir original [11] tem como resultado uma força de atração entre duas placas planas, paralelas, perfeitamente condutoras, neutras inversamente proporcional a quarta potência da distância entre elas no vácuo do campo eletromagnético.

Essa força foi comprovada experimentalmente por Sparnaay [50]. Mais recentemente, experimentos realizados separadamente por Lamoureaux [26] e Mohideen e Roy [31] confirmaram o efeito Casimir com alto grau de precisão. Pelo fato da densidade de energia do vácuo eletromagnético ser negativa no caso de placas planas condutoras, Casimir, em 1953, propôs que um elétron poderia ser imaginado como uma casca esférica condutora com uma carga elétrica  $e$  e que a força atrativa associada com o efeito Casimir compensaria a repulsão eletrostática. Contudo, infelizmente foi demonstrado por Boyer [7] que no caso de uma casca esférica a energia de Casimir é positiva e conseqüentemente a força é repulsiva. Porém, é interessante notar que no caso de férmions a densidade de energia do vácuo é negativa o que inverteria o sinal da força de Casimir. Embora, essas idéias não sejam aplicadas como propostas originalmente por Casimir, elas têm sido aplicadas no “bag model” de hádrons em cromodinâmica quântica (QCD) [30, 45]. No primeiro modelo teórico que incorporou a energia de Casimir na estrutura dos hádrons, chamado de “bag” MIT [12], os hádrons são vistos como sacolas confinantes cujo conteúdo são quarks e glúons. Para um hádron de raio de 1 fermi ( $10^{-15}$  m) a energia de Casimir é de aproximadamente 85 MeV. É importante notar que a energia de Casimir depende fundamentalmente da geometria e do tipo de campo, sendo esse um mistério da energia de Casimir.

O fenômeno da quebra espontânea de simetria tem sido amplamente estudado nos últimos anos, uma vez que ele possui aplicações em diversas áreas da física, como das partículas elementares, da matéria condensada, e diversas outras. Esse fenômeno é de fundamental importância no contexto da física teórica atual, onde as teorias mais fundamentais são associadas com princípios de simetria. Esses princípios determinam um panorama de alta simplicidade e regularidade para as leis básicas da natureza. É claro que este ambiente repleto de simetria não é próprio para explicar a vasta complexidade e diversidade existentes no universo atual. É nesse ponto que a quebra de simetria desempenha seu papel principal. Uma determinada simetria pode ser quebrada pela ação de algum agente externo que atua diretamente sobre o sistema, ou, de outro modo, pode ser quebrada sem nenhuma intervenção externa, caso em que a simetria é

dita ser espontaneamente quebrada. No primeiro caso, o fator que quebra a simetria é representado por um termo que aparece explicitamente na equação que descreve o sistema. No segundo caso, ao contrário, não existe nenhum termo que viole a simetria na equação, porém o que acontece é que a simetria não é obedecida pelas soluções individuais desta equação, sendo quebrada quando da escolha de uma delas.

Do exposto acima vimos que condições de contorno podem modificar o vácuo de uma teoria. A pergunta que temos é: as condições de contorno podem restaurar a simetria de uma teoria com quebra espontânea de simetria a “tree level”? A questão é pertinente visto que a introdução de um novo parâmetro, o comprimento de compactificação, pode tornar termos tendo origem nas correções radiativas de ordem clássica, dependendo da ordem do comprimento de compactificação [37, 43]. Esse é, portanto, o objetivo deste trabalho: o de verificar se a imposição de condições de contorno sobre os campos pode restaurar a simetria de uma teoria com quebra espontânea de simetria a “tree level”. Por simplicidade escolhemos um campo escalar real com um potencial tipo de Higgs. As condições de contorno escolhidas são as de Neumann homogêneas sobre duas superfícies planas infinitas, paralelas separadas por uma pequena distância  $a$ . Escolhemos as condições de Neumann porque sob essas condições as soluções de campo constantes são permitidas o que nos possibilita o uso do bem conhecido método de cálculo do potencial efetivo como uma expansão em “loop” para determinarmos o mínimo da teoria.

O trabalho está organizado da seguinte forma: O capítulo 1 está dedicado a uma introdução aos assuntos que fazem parte necessária do trabalho. No capítulo 2 discutimos a energia do vácuo e calculamos a energia de Casimir para alguns casos. No capítulo 3 mostramos como determinar o potencial efetivo como uma expansão em “loop”. No capítulo 4 mostramos como determinar o potencial efetivo para uma teoria com quebra espontânea de simetria. Finalmente, no capítulo 5 é onde propriamente realizamos os cálculos da nossa proposta de trabalho, assim ele é dedicado à determinação do vácuo de uma teoria de um campo escalar real, com quebra espontânea de simetria a “tree level”, sujeito às condições de Neumann homogêneas sobre duas

superfícies planas, infinitas e paralelas separadas por uma pequena distância  $a$ .

## Capítulo 2

### Efeito Casimir

## 2.1 Introdução

O efeito Casimir<sup>1</sup> está relacionado com as diferenças na densidade de energia do vácuo provocadas pelas alterações nas condições de contorno impostas aos campos no vácuo. O efeito Casimir original [11] tem como resultado uma força de atração entre duas placas planas, paralelas, perfeitamente condutoras, neutras inversamente proporcional a quarta potência da distância entre elas no vácuo do campo eletromagnético. Essa força foi comprovada experimentalmente por Sparnaay [50]. Mais recentemente, experimentos realizados separadamente por Lamoureaux [26] e Mohideen e Roy [31] confirmaram o efeito Casimir com alto grau de precisão.

## 2.2 Energia de ponto zero e energia do vácuo

Ao estudar um fenômeno natural, o pesquisador procura explicar esse fenômeno através de um modelo simples e idealizado, mas que retenha suas características mais importantes. Na física, principalmente em teoria quântica de campos, o modelo mais usado é o do oscilador harmônico simples. Classicamente a energia do oscilador harmônico simples é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \quad (2.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $A$  a amplitude de oscilação. Para um sistema massa-mola idealizado a energia pode assumir valores que variam continuamente de zero a infinito. Nesse caso o estado de mínima energia é zero (quando  $A = 0$ ), ou seja, a partícula está em repouso na posição de equilíbrio.

Para sistemas microscópicos, como por exemplo átomos e moléculas, o modelo do oscilador harmônico simples pode ser usado, já que, essas partículas vibram à todo momento. Associado a cada um desses sistemas existe um estado de equilíbrio e uma frequência  $\omega$ . Esses sistemas microscópicos não são explicados corretamente pelas

---

<sup>1</sup>Aqueles interessados em efeito Casimir sugerimos os artigos de revisão [41], [6] e [29].

leis da física clássica mas sim pelas leis da física quântica. Quanticamente a energia associada ao sistema é dada por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.2)$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$

Para o estado de mais baixa energia (estado fundamental),  $n = 0$ , a energia designada por  $E_0$ , tem valor  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  que é diferente de zero. Portanto, quanticamente o oscilador nunca pode ser encontrado em um estado de energia nula, assim diferindo do O.H.S clássico. Essa energia é chamada de energia de ponto zero. Além disso, vemos que o espectro de energia é discreto, ou seja, a energia do O.H.S quântico só pode assumir valores iguais ao mínimo mais um múltiplo inteiro de  $\hbar\omega$  que corresponde ao “gap” de energia entre os estados  $n$  e  $n + 1$ , portanto, a energia é quantizada e o quantum de energia é  $\hbar\omega$ . O valor não nulo de  $E_0$  é uma consequência do princípio de incerteza de Heisenberg.

Para um sistema com muitos graus de liberdade, no qual as partículas interagem entre si, temos um sistema de osciladores harmônicos acoplados. Realizando uma transformação canônica para um sistema de coordenadas normais, o sistema se comporta como um conjunto de O.H.S. independentes (desacoplados) fictícios, cada um vibrando numa determinada frequência normal  $\omega_k$ . Cada um desses osciladores fictícios contribuem com  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  para a energia de ponto zero. Dessa forma a energia do estado fundamental do sistema fica dada pela soma das energias de ponto zero (ZPE),

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k. \quad (2.3)$$

Assim, para um sistema com infinitos graus de liberdade existirão infinitos desses osciladores desacoplados e o resultado determinado pela equação (2.3) é divergente.

Uma teoria de campo é uma teoria de um sistema de infinitos graus de liberdade, podendo ser associado a um sistema de infinitos osciladores harmônicos acoplados. Dessa forma, uma teoria quântica de campo está associada a um sistema de infinitos osciladores harmônicos acoplados. As partículas são as excitações dos campos e a

uma partícula associamos o “gap” de energia  $\hbar\omega_k$ . Assim, em uma teoria quântica de campos a energia do estado fundamental, isto é, o vácuo, é dada pela soma das energias de ponto zero, como na equação (2.3). Portanto, a princípio a energia do vácuo em teoria quântica de campos é infinita. Contudo, quando limitamos a atuação dos campos, ou seja, confinamos o campo numa certa região do espaço as oscilações do campo, inclusive as do ponto zero devem satisfazer certas condições de contorno. Portanto essas condições de contorno restringem as possíveis frequências de oscilação do campo, podendo assumirem apenas certos valores específicos, que de forma geral formam um conjunto discreto. Calculando-se essa energia do vácuo confinado, também encontramos um valor infinito. A energia do vácuo é formalmente calculada como a diferença entre essas energias infinitas nas duas situações. Para dar sentido a essa definição formal, pois a manipulação de expressões divergentes é ambígua, recorreremos a métodos de regularização adequados que garantem um resultado finito. Essa diferença de energia, chamada de *Energia de Casimir*, é que tem significado físico e é interpretada como o trabalho necessário para introduzir os contornos. Essa energia de Casimir no caso do campo eletromagnético confinado entre duas placas planas condutoras ideais separadas por uma distância  $a$ , manifesta-se provocando uma força atrativa entre as duas placas, dada por

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4}, \quad (2.4)$$

onde  $A$  é a área das placas e o sinal de menos uma indicação de que a força é atrativa. As divergências no cálculo da energia de ponto zero surgem de forma clara quando usamos os métodos usuais de quantização de campos, o chamado esquema de quantização canônica de campos.

Se  $\varphi^{(i)}(x)$  representa um campo dinâmico, então a lagrangiana clássica é dada por

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^{(i)}, \partial_\mu \varphi^{(i)}) \quad (2.5)$$

e o momento conjugado canônico por

$$\Pi^{(i)} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^{(i)}}. \quad (2.6)$$

Pelo procedimento da quantização exigimos para campos bosônicos a troca dos campos, “c-number”, por operadores, “q-number”, de campo que satisfazem as regras de comutação a tempos iguais

$$[\hat{\varphi}^{(i)}(x), \hat{\varphi}^{(k)}(x')] = [\hat{\Pi}^{(i)}(x), \hat{\Pi}^{(k)}(x')] = 0 \quad (2.7)$$

e

$$[\hat{\varphi}^{(i)}(x), \hat{\Pi}^{(k)}(x')] = i\delta_{ik}\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.8)$$

Para campos fermiônicos são exigidas as regras de anticomutação a tempos iguais,

$$\{\hat{\varphi}^{(i)}(x), \hat{\varphi}^{(k)}(x')\} = \{\hat{\Pi}^{(i)}(x), \hat{\Pi}^{(k)}(x')\} = 0 \quad (2.9)$$

e

$$\{\hat{\varphi}^{(i)}(x), \hat{\Pi}^{(k)}(x')\} = i\delta_{ik}\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.10)$$

O hamiltoniano de campo  $\hat{H}$  é escrito em termos de  $\hat{\varphi}$  e  $\hat{\Pi}$  semelhantemente ao hamiltoniano clássico e é dado por

$$\hat{H} = \int d^3x \left( \sum_i \hat{\Pi}^{(i)} \dot{\hat{\varphi}}^{(i)} - \mathcal{L}(\hat{\varphi}^{(i)}, \partial_\mu \hat{\varphi}^{(i)}) \right). \quad (2.11)$$

O hamiltoniano de campo é um observável físico, pois está relacionado com a energia do sistema e dessa forma é hermitiano e isto nos diz que os operadores  $\hat{\varphi}$  e  $\hat{\Pi}$  também o sejam. A expressão (2.11) não define o hamiltoniano de campo de uma maneira satisfatória, isso porque o esquema da quantização canônica não fixa o ordenamento do produto dos operadores de campo não comutantes. Assim, para a teoria tornar-se bem definida usamos uma prescrição de ordenação, ou seja, exigimos um certo ordenamento no produto dos operadores, o chamado ordenamento normal de Wick.

Dificuldades maiores surgem com o aparecimento de singularidades quando calculamos os operadores no mesmo ponto do espaço-tempo, o que causa divergências para a energia do vácuo, isso porque esses operadores de campo são vistos como distribuições e o produto de duas distribuições no mesmo ponto não é definido. Para eliminarmos esses problemas exigimos a renormalizabilidade como uma propriedade física da teoria quântica de campos.

Em meio à discussão feita acima vamos ver como a divergência na soma das energias de ponto zero realmente aparece na teoria. Para isso vamos tomar como exemplo um campo escalar real, massivo e sem interação caracterizado pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.12)$$

a qual conduz a equação de movimento para o campo  $\phi$  dada por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0. \quad (2.13)$$

Exige-se para os operadores  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$  as seguintes regras de comutação a tempos iguais

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = [\hat{\Pi}(x), \hat{\Pi}(x')] = 0 \quad (2.14)$$

e

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(x')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.15)$$

Para discutirmos a energia do vácuo vamos adotar a representação no espaço dos momento dentro de uma caixa cúbica de volume  $\Omega$ , num dado tempo. Vamos escrever o operador  $\hat{\phi}(x)$ , solução da equação (2.13) como uma expansão em série de Fourier,

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \hat{q}_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (2.16)$$

O operador densidade de momento canônico, determinado por

$$\hat{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}, \quad (2.17)$$

fica dado por

$$\hat{\Pi}(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \hat{p}_{-k}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (2.18)$$

Os campos  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$  são hermitianos, ou seja,  $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$  e  $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger$  e conseqüentemente temos que

$$\hat{q}_k^\dagger(t) = \hat{q}_{-k}(t), \quad \hat{p}_k^\dagger(t) = \hat{p}_{-k}(t). \quad (2.19)$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.18) nas equações (2.14) e (2.15) encontramos as regras de comutação

$$[\hat{q}_k(t), \hat{q}_{k'}(t)] = [\hat{p}_k(t), \hat{p}_{k'}(t)] = 0 \quad (2.20)$$

e

$$[\hat{q}_k(t), \hat{p}_{k'}(t)] = i\delta_{kk'}, \quad (2.21)$$

para os operadores  $\hat{q}_k$  e  $\hat{p}_k$ .

Considerando o hamiltoniano de campo, temos que, usando a equação (2.12) e  $\Pi = \dot{\phi}$  na equação (2.11),

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3x \left[ \hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (2.22)$$

Após fazermos uma integração por partes apenas no termo do gradiente, obtemos  $\hat{H}$  como uma forma quadrática em relação aos operadores de campos  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$ , dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \hat{\Pi}^2 + \hat{\phi}(-\nabla^2 + m^2)\hat{\phi} \right]. \quad (2.23)$$

Sabendo que no espaço dos momentos ( $k$ ):  $\vec{p}^2 = -\nabla^2 = \vec{k}^2$  e substituindo as expressões (2.16) e (2.18) para os campos  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\Pi}$ , respectivamente, na equação (2.23) temos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k \left[ \hat{p}_k^\dagger \hat{p}_k + \omega_k^2 \hat{q}_k^\dagger \hat{q}_k \right] \quad (2.24)$$

onde  $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

Este é o hamiltoniano de um sistema de osciladores harmônicos desacoplados, o que não é surpresa pois decomparamos o campo  $\hat{\phi}$  em modos normais  $\hat{q}_k$ . Os operadores  $\hat{q}_k$  e  $\hat{p}_k$  correspondem as variáveis canônicas do problema do oscilador clássico. Vamos agora escrever o operador hamiltoniano de campo, como é usual, em relação as novas bases  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$  do espaço de Fock, para isso definimos

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_k} \left( \hat{q}_k + \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_k^\dagger \right) \quad (2.25)$$

e

$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}\omega_k} \left( \hat{q}_k^\dagger - \frac{i}{\omega_k} \hat{p}_k \right). \quad (2.26)$$

Estes são os chamados operadores de aniquilação ( $\hat{a}_k$ ) e criação ( $\hat{a}_k^\dagger$ ) e satisfazem as regras de comutação

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (2.27)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (2.28)$$

Expressando o hamiltoniano de campo em termos de  $\hat{a}_k$  e  $\hat{a}_k^\dagger$  temos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \right), \\ \hat{H} &= \sum_k \omega_k \left( \hat{N}_k + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde  $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  é o operador número, e tem como autovalores  $n_k = 0, 1, 2, \dots$ . O estado  $|n_k\rangle$  é autoestado de  $\hat{N}_k$  e também de  $\hat{H}$  como podemos constatar facilmente da equação (2.29). O vácuo  $|0\rangle$  é o estado onde nenhuma partícula é encontrada e é definido pela equação

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0. \quad (2.30)$$

O valor esperado da energia do vácuo<sup>2</sup>

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_k \frac{\hbar}{2} \omega_k, \quad (2.31)$$

é divergente, pois cada oscilador, ou modo normal contribui com  $\frac{\hbar}{2} \omega_k$ , e nesse caso temos uma energia infinita, pois temos infinitos modos normais.

## 2.3 Energia de Casimir

### 2.3.1 Energia de Casimir para um campo escalar livre não massivo com condições de contorno de Dirichlet homogêneas

Para um campo escalar real não massivo a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (2.32)$$

De acordo com a equação de movimento de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (2.33)$$

o campo não massivo da lagrangiana (2.32) deve satisfazer a equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0, \quad (2.34)$$

ou reescrevendo de outra maneira

$$-\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.35)$$

Agora vamos determinar a solução da equação (2.35) impondo que o campo  $\phi$  se anule sobre duas superfícies planas infinitas e paralelas separadas por uma pequena distância  $a$ . Considerando as superfícies perpendiculares ao eixo  $Z$ , o campo  $\phi$  deve satisfazer as condições de contorno

---

<sup>2</sup>Embora nós usemos  $\hbar = c = 1$ , nós mantemos  $\hbar$  para marcar as correções quânticas.

$$\phi(z = 0) = \phi(z = a) = 0. \quad (2.36)$$

Para resolvermos a equação (2.35) usamos o método de separação de variáveis, onde supomos que a solução possa ser escrita como

$$\phi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r})\psi(t). \quad (2.37)$$

Dessa forma a equação (2.35) fica

$$-\nabla^2 [\chi(\vec{r})\psi(t)] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\chi(\vec{r})\psi(t)] = 0. \quad (2.38)$$

De onde temos

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\chi} \nabla^2 \chi. \quad (2.39)$$

O lado esquerdo da equação (2.39) é uma função dependente apenas do tempo e o lado direito é uma função dependente somente do espaço. Uma vez que a equação (2.39) deve ser satisfeita para todo  $\vec{r}$  e  $t$ , ambos os lados devem ser iguais a uma mesma constante. Assim, seja  $-p^2$  essa constante, então

$$\frac{\nabla^2 \chi}{\chi} = -p^2, \quad (2.40)$$

e

$$\frac{d^2\psi}{\psi dt^2} = -p^2. \quad (2.41)$$

A solução da equação (2.41) é facilmente determinada e é dada por

$$\psi(t) = A_t \exp(ipt) + B_t \exp(-ipt). \quad (2.42)$$

Para garantirmos solução oscilatória  $p$  deve ser real. Do resultado (2.42) vemos que os valores das energia de ponto zero são

$$\omega = p. \quad (2.43)$$

Como as condições de contorno são de Dirichlet **homogêneas**

$$\psi(t)\chi(\vec{r})|_{z=0} = \psi(t)\chi(\vec{r})|_{z=a} = 0, \quad (2.44)$$

podemos nos preocupar apenas com a parte espacial.

A equação (2.40) pode ser escrita como

$$\nabla^2\chi + p^2\chi = 0, \quad (2.45)$$

que é a conhecida equação de Helmholtz.

Mais uma vez supondo solução do tipo

$$\chi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (2.46)$$

para a equação de Helmholtz acima, temos que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -p^2. \quad (2.47)$$

E dessa maneira temos que

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -p_x^2 X, \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -p_y^2 Y, \quad (2.49)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -p_z^2 Z, \quad (2.50)$$

onde  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . Assim, as condições de contorno (2.44) ficam

$$X(x)Y(y)Z(z)|_{z=0,a} = 0. \quad (2.51)$$

Portanto,

$$Z(z)|_{z=0,a} = 0. \quad (2.52)$$

A solução da equação (2.50), com  $p_z$  real, para que possamos satisfazer as condições de contorno, é dada por

$$Z(z) = A \exp(ip_z z) + B \exp(-ip_z z). \quad (2.53)$$

Impondo a primeira condição de contorno,  $Z(z) |_{z=0} = 0$ , temos que  $A = -B$ , o que nos fornece

$$Z(z) = 2iA \sin(p_z z). \quad (2.54)$$

Agora, usando a segunda condição de contorno,  $Z(z) |_{z=a} = 0$ , obtemos

$$p_z = \frac{N\pi}{a}, \quad (2.55)$$

onde  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Como podemos observar as condições de contorno tornam a componente  $p_z$  do momento discreta,  $p_z \rightarrow p_N$ .

Dos resultados acima a soma das energias de ponto zero, para o campo  $\phi$  sujeito às condições de contorno impostas, é dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left( p^2 + \frac{N^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}-s} L^2, \quad (2.56)$$

onde  $L^2$  é a área das superfícies ( $L \rightarrow \infty$ ).

A quantidade acima, como já vimos, é divergente. A fim de manipularmos essa expressão, vamos empregar o método da função zeta.

A função zeta generalizada associada ao operador  $\hat{H}_0$  é definida como

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_i \left( \frac{\omega_i}{\mu} \right)^{-s}, \quad s \in C, \quad (2.57)$$

onde os  $\omega_i$  são os auto-valores do operador  $\hat{H}_0$  e o parâmetro de escala  $\mu$  foi introduzido para mantermos a função zeta adimensional para todo  $s$ . A função zeta generalizada (2.57) converge para  $\Re(s) > \frac{3}{2}$  e pode ser continuada analiticamente para uma função

meromorfa com pólos somente em  $s = \frac{3}{2}$  e  $s = \frac{1}{2}$ <sup>3</sup>. Usando os auto-valores anteriormente determinados a função zeta definida pela equação (2.57) fica

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[ \frac{p^2 + \left( \frac{N\pi}{a} \right)^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2. \quad (2.58)$$

Assim, a soma das ZPE é dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar\mu}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.59)$$

A integral da equação (2.58) é realizada com o uso da relação (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + A^2)^{-s} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad \text{para } A^2 > 0, \quad (2.60)$$

obtendo-se

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{3-2s}. \quad (2.61)$$

Da definição da função Zeta de Riemann

$$\zeta_R(s) = \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{-s}, \quad \text{para } \Re e(s) > 1, \quad (2.62)$$

temos

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \zeta_R(2s - 3). \quad (2.63)$$

Usando agora a propriedade de reflexão da função zeta de Riemann

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma \left( \frac{z}{2} \right) \zeta_R(z) = \pi^{\frac{z-1}{2}} \Gamma \left( \frac{1-z}{2} \right) \zeta_R(1-z), \quad (2.64)$$

temos

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^{2s-1} a^{2s-3}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \zeta_R(4-2s). \quad (2.65)$$

---

<sup>3</sup>De fato, pode-se mostrar que a função zeta generalizada associada a um operador real, elíptico e auto-adjunto,  $\hat{A}$ , converge para  $\Re e(s) > \frac{d}{p}$ , onde  $d$  é a dimensão da variedade espaço-tempo e  $p$  é a ordem do operador  $\hat{A}$ .

A fórmula da reflexão nos deu a continuação analítica necessária para calcularmos  $\zeta_{H_0}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,

$$\zeta_{H_0}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}a^3\mu} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \zeta_R(4). \quad (2.66)$$

Lembrando que

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(2) = 1$$

e

$$\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

obtemos

$$\zeta_{H_0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{L^2\pi^2}{720a^3\mu}. \quad (2.67)$$

Finalmente, usando o resultado da equação (2.67) na equação (2.59) temos

$$E_0^{cc} = -\frac{\hbar\pi^2 L^2}{1440a^3}. \quad (2.68)$$

A continuação analítica da função zeta nos fornece a prescrição necessária para calcularmos a energia de Casimir sem a necessidade de subtração de pólos. Dessa forma, a energia de Casimir por unidade de área das superfícies é dada por

$$E_{Casimir} = \frac{-\hbar\pi^2}{1440a^3}. \quad (2.69)$$

A força entre as superfícies por unidade de área (pressão de Casimir) pode ser calculada de

$$F_{Casimir} = -\frac{\partial E_{Casimir}}{\partial a}, \quad (2.70)$$

assim,

$$F_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{480a^4}, \quad (2.71)$$

onde o sinal menos indica que a força entre as placas é atrativa.

A força de Casimir original, calculada para o campo eletromagnético difere do valor encontrado acima, calculado para um campo escalar, de um fator 2 devido às duas polarizações do setor transversal do campo  $A_\mu$ . Então, para encontrarmos a força de Casimir para o campo eletromagnético, basta multiplicarmos o resultado encontrado acima por 2. Assim, para duas placas planas, paralelas e perfeitamente condutoras colocadas no vácuo do campo eletromagnético a força de Casimir é dada por

$$F_{Casimir} = \frac{-\hbar\pi^2}{240a^4}. \quad (2.72)$$

### 2.3.2 Energia de Casimir para um campo escalar livre não massivo com condições de contorno de Neumann homogêneas

Essa seção difere da anterior apenas pelas condições de contorno que aplicamos sobre as superfícies. Nesse caso exigimos que a derivada do campo se anule sobre as superfícies, ou seja,

$$\left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} = \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=a} = 0. \quad (2.73)$$

Essas são as condições de contorno de Neumann homogêneas.

A equação de movimento a ser satisfeita pelo campo é a mesma da seção anterior, portanto, a solução

$$Z(z) = A \exp(ip_z z) + B \exp(-ip_z z), \quad (2.74)$$

deve satisfazer as novas condições de contorno.

Para a condição de contorno  $\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=0}$ , temos que  $A = B$  o que nos fornece

$$Z(z) = 2A \cos(p_z z). \quad (2.75)$$

Agora, usando a condição de contorno  $\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=a}$ , obtemos

$$p_z = \frac{N\pi}{a}, \quad (2.76)$$

para  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Para as condições de contorno de Neumann homogêneas, diferentemente das condições de contorno de Dirichlet homogêneas,  $N = 0$  deve ser incluído, pois as soluções para a componente  $z$  do campo são funções cosseno.

Assim, para esse caso a soma das ZPE é

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left( p^2 + \frac{N^2\pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}-s} L^2. \quad (2.77)$$

Após o uso da relação (2.60) e algumas manipulações, a função zeta para esse caso é

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2\mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=0}^{\infty} (N)^{3-2s}. \quad (2.78)$$

Para  $N = 0$  o resultado da expressão acima é nulo, portanto,

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2\mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{3-2s}, \quad (2.79)$$

que é idêntica à equação (2.58) para condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Logo a energia de Casimir de um campo escalar livre não massivo tem a mesma expressão, tanto para condições de contorno de Dirichlet homogêneas quanto para as de Neumann homogêneas, e é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{1440a^3}. \quad (2.80)$$

### 2.3.3 Energia de Casimir para um campo escalar livre, não massivo com condições de contorno periódicas

Nessa seção vamos impor sobre o campo  $\phi$  condições de contorno periódicas. Dessa forma, consideremos que o campo  $\phi$  deve satisfazer a condição

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z + a, t). \quad (2.81)$$

Como resultado nós temos o campo escalar sobre um “flat manifold” com topologia  $M^3 \times S^1$ , onde  $M^3$  é o espaço-tempo de Minkowski tridimensional e  $S^1$  é um espaço compactificado em uma circunferência de comprimento  $a$ .

A equação de movimento a ser satisfeita pelo campo ainda é a mesma, portanto, a solução (2.53) deve satisfazer a condição (2.81). Assim,

$$A \exp(ip_z z) + B \exp(-ip_z z) = A \exp[ip_z(z + a)] + B \exp[-ip_z(z + a)], \quad (2.82)$$

o que nos fornece

$$p_z = \frac{2\pi N}{a},$$

onde  $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Dessa forma a soma das ZPE fica dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[ p^2 + \left( \frac{2N\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2, \quad (2.84)$$

onde nesse caso  $L^2$  representa o volume do espaço não compactificado.

A função zeta, após a realização da integral, é dada por

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{2\pi N}{a\mu} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}. \quad (2.85)$$

Uma vez que  $N$  aparece elevado ao quadro na somatória, podemos escrever

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} 2 \sum_{N=1}^{\infty} N^{3-2s}. \quad (2.86)$$

Usando a propriedade da reflexão da função zeta de Riemann, obtemos

$$\zeta_{H_0} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{L^2 \pi^2}{45 a^3 \mu}. \quad (2.87)$$

Da equação (2.87) a energia de Casimir fica

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2 L^2}{90a^3}, \quad (2.88)$$

a densidade de energia de Casimir fica dada por

$$\varepsilon_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{90a^4}. \quad (2.89)$$

É claro que nesse caso não faz sentido de falarmos de força de Casimir, uma vez que não existe uma fronteira material. Assim, vemos que uma densidade de energia do vácuo não nula aparece como consequência da topologia não trivial do espaço.

### 2.3.4 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno de Dirichlet homogêneas

Seja a lagrangiana de um campo escalar real, massivo,  $\phi(\vec{x}, t)$ , dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (2.90)$$

Da equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana acima temos

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.91)$$

que também pode ser escrita como

$$-\nabla^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + m^2\phi = 0. \quad (2.92)$$

Aplicando a mesma técnica de separação de variáveis que usamos para encontrar a solução para o caso não massivo, supomos que a solução possa ser escrita como

$$\phi(\vec{x}, t) = \chi(\vec{x})\psi(t), \quad (2.93)$$

e dessa forma a equação de movimento fica

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} + m^2 = \frac{1}{\chi} \nabla^2\chi. \quad (2.94)$$

Pelo mesmo argumento que usamos na seção-2.1, ambos os lados da equação (2.94) devem ser iguais a uma mesma constante  $-p^2$  (com  $p$  real), portanto,

$$\frac{1}{\chi} \nabla^2 \chi = -p^2 \quad (2.95)$$

e

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -(p^2 + m^2) = -\omega^2, \quad (2.96)$$

com as constantes  $p$  e  $\omega$  tendo que satisfazerem a condição

$$\omega^2 = p^2 + m^2. \quad (2.97)$$

Da condição (2.97) temos que

$$K_\mu K^\mu = m^2 = \omega^2 - p^2, \quad (2.98)$$

onde  $K^\mu$  é o quadri-momento no espaço-tempo de Minkowski. Assim, vemos que a constante  $\omega$  pode ser associada a energia e  $p$  ao módulo do momento linear das partículas que serão as excitações do campo  $\phi$ , quando da quantização do campo. Com isso as equações (2.97) e (2.98) ficam

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (2.99)$$

e

$$K^2 = E^2 - p^2. \quad (2.100)$$

Resolvendo a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \chi + p^2 \chi = 0, \quad (2.101)$$

e em seguida aplicando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, da mesma forma que fizemos para o caso não massivo, encontramos que

$$p_z = \frac{N\pi}{a}, \quad (2.102)$$

onde  $N = 1, 2, 3, \dots$

Portanto, os auto-valores do operador  $\hat{H}_0$  são dados por

$$\omega = \sqrt{p^2 + \left(\frac{N\pi}{a}\right)^2 + m^2}, \quad (2.103)$$

com  $N = 1, 2, 3, \dots$ . A função zeta associada ao operador  $\hat{H}_0$  é definida como

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[ \frac{p^2 + \left(\frac{N\pi}{a}\right)^2 + m^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2. \quad (2.104)$$

Onde, mais uma vez,  $L^2$  é a área das superfícies ( $L \rightarrow \infty$ ) e  $\mu$  é um parâmetro de escala introduzido para tornar a função zeta adimensional para qualquer  $s$ .

Realizando a integral acima com a ajuda da equação (2.60), temos

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ N^2 + \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}. \quad (2.105)$$

A somatória do lado direito é a função zeta de Epstein-Hurwitz:

$$\zeta(s, A) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + A^2)^{-s}, \quad \text{para } \Re(s) > \frac{1}{2}. \quad (2.106)$$

Na verdadeira função de Epstein não existe termo independente de  $n$ , enquanto na genuína função de Hurwitz nós temos  $n$  e não  $n^2$ . A função de Epstein-Hurwitz admite uma continuação analítica para  $\Re(s) < \frac{1}{2}$  dada por (veja Apêndice B).

$$\zeta(s, A) = -\frac{1}{2}A^{-2s} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2A^{2s-1}\Gamma(s)} \left[ \Gamma \left( s - \frac{1}{2} \right) + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi NA)}{(N\pi A)^{\frac{1}{2}-s}} \right], \quad (2.107)$$

onde  $K_\mu$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem  $\mu$ .

Usando a equação (2.107) na equação (2.105) temos

$$\begin{aligned} \zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) &= -\frac{L^2 m^{3-2s}}{8\pi \mu^{1-2s}} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + \frac{L^2 a m^{4-2s}}{8\pi^{\frac{3}{2}} \mu^{1-2s} (s-1)(s-2)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + \\ &+ \frac{L^2 a m^{4-2s}}{2\pi^{\frac{3}{2}} \mu^{1-2s} \Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{2-s}(2Nam)}{(Nam)^{2-s}}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde temos usado a propriedade das funções de Bessel modificada:  $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$ .

A equação (2.108) tem um pólo simples em  $s = 0$  no segundo termo, que pode ser facilmente reconhecido quando usamos, para  $s$  pequeno,

$$\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \approx -\frac{1}{s}. \quad (2.109)$$

A fim de extrairmos a parte finita do resultado (2.108) multiplicamos o termo divergente por  $s$  e derivamos o resultado em  $s = 0$  [49]. Nós, então, obtemos

$$\zeta_{H_0}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{L^2 m^3}{12\pi\mu} + \frac{L^2 a m^4}{32\pi^2\mu} \left[ \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{L^2 a m^4}{4\pi^2\mu} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nam)}{(Nam)^2}. \quad (2.110)$$

Finalmente encontramos para a densidade de energia do vácuo do campo  $\phi$  sujeito às condições de contorno, o resultado

$$\varepsilon_0^{cc} = \frac{\hbar m^3}{24\pi a} + \frac{\hbar m^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar m^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nam)}{(Nam)^2}. \quad (2.111)$$

Na expressão acima observamos que o primeiro termo ( $\propto \frac{1}{a}$ ) é independente de  $a$  na energia total, portanto não tem significado físico, isto é, uma constante na energia. Esse termo pode diferir de um esquema de regularização para outro. O segundo termo é independente de  $a$  na densidade de energia. Portanto, ele não é independente de  $a$  na energia total, isto é, não é uma constante. Contudo, uma vez que na densidade de energia ele independe de  $a$ , então ele é a densidade de energia do vácuo que ocorre independente das placas, isto é, na ausência de condições de contorno. Dessa forma, a densidade de energia de Casimir é

$$\varepsilon_{Casimir} = -\frac{\hbar m^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nam)}{N^2}. \quad (2.112)$$

É interessante analisarmos os casos para grandes e pequenas massas.

No caso de pequenas massas, podemos considerar que  $am \ll 1$  e dessa forma usarmos a expansão

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 K_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad \text{para } x \ll 1, \quad (2.113)$$

para encontrarmos<sup>4</sup>

$$\varepsilon_{Casimir} \approx -\frac{\hbar\pi^2}{1440a^4} + \frac{\hbar m^2}{96a^2}. \quad (2.114)$$

O primeiro termo representa a densidade de energia de Casimir para o campo não massivo, já calculado anteriormente.

No caso de grandes massas, podemos considerar  $am \gg 1$ . Uma vez que as funções de Bessel modificada caem muito rapidamente para zero, apenas o primeiro termo da somatória da equação (2.112) é significativo. Agora, fazendo uso da expansão assintótica

$$K_2(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad \text{para } z \rightarrow \infty, \quad (2.115)$$

temos

$$\varepsilon_{Casimir} \approx -\frac{\hbar m^2}{16\pi^2 a^2} \sqrt{\frac{\pi}{am}} e^{-2am}. \quad (2.116)$$

Assim para grandes massas a densidade de energia de Casimir é exponencialmente decrescente, logo no limite clássico de partículas com grandes massas a energia de Casimir vai a zero.

### 2.3.5 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno de Neumann homogêneas

Do exposto anteriormente não é difícil mostrar que os auto-valores associados ao operador  $\hat{H}_0$  com o campo escalar da lagrangiana (2.90) satisfazendo condições de contorno de Neumann homogêneas são dados por

$$\omega = \sqrt{p^2 + \left(\frac{N\pi}{a}\right)^2 + m^2}, \quad (2.117)$$

com  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A função zeta associada ao operador  $\hat{H}_0$  é definida como

---

<sup>4</sup>Rigorosamente devemos dividir a somatória em duas:  $\sum_{N=1}^M + \sum_{N=M+1}^{\infty}$ , tal que,  $M < am < M + 1$ .

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[ \frac{p^2 + \left( \frac{N\pi}{a} \right)^2 + m^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2. \quad (2.118)$$

onde, mais uma vez,  $L^2$  é a área das superfícies ( $L \rightarrow \infty$ ) e  $\mu$  é um parâmetro de escala introduzido para tornar a função zeta adimensional para qualquer  $s$ .

Realizando a integral acima com a ajuda da equação (2.60), temos

$$\zeta_{H_0} \left( s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 m^{3-2s}}{4\pi \mu^{1-2s}} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} + \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left( \frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ N^2 + \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}. \quad (2.119)$$

O primeiro termo da lado direito da equação é devido à eliminação do termo para  $N = 0$  na somatória. Notando que esse termo é o dobro positivo do primeiro termo da equação (2.108) a única modificação para o caso da seção anterior será a inversão de sinal deste termo. Contudo, como já vimos este termo não contribui para a densidade de energia de Casimir, portanto, os resultados obtidos serão os mesmos que os da seção anterior,

$$\varepsilon_{Casimir} = -\frac{\hbar m^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nam)}{N^2}. \quad (2.120)$$

É claro que a análise dos casos de grandes e pequenas massas são também idênticas.

### 2.3.6 Energia de Casimir para um campo escalar livre, massivo com condições de contorno periódicas

Usando um raciocínio semelhante ao da seção anterior e lembrando que para o campo escalar não massivo satisfazendo condições de contorno periódicas a energia de Casimir é dezesseis vezes maior, concluímos que a a densidade de energia de Casimir para o campo escalar massivo satisfazendo condições de contorno periódicas é dada por

$$\varepsilon_{Casimir} = -\frac{\hbar 2m^2}{\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nam)}{N^2}. \quad (2.121)$$

Note que no limite de massa nula reobtemos o resultado para o caso não massivo, como esperávamos.

## Capítulo 3

### Potencial Efetivo

### 3.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior um possível método de se calcular a energia do vácuo é como a soma das energias de ponto zero. Um outro método é como o mínimo do potencial efetivo. Pode-se mostrar que estes métodos são equivalentes [35, 36] e que, portanto, a energia de Casimir obtida por ambos os métodos é idêntica. Assim, neste capítulo apresentamos como determinar o potencial efetivo.

O potencial efetivo é uma importante ferramenta para o estudo da quebra espontânea de simetria, determinação da energia de Casimir [13, 40], na renormalização da massa e da constante de acoplamento, etc. Ele é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo daquele potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop (que coincide com uma expansão em potências de  $\hbar$ ), de modo que ele é dado por uma soma do termo clássico com correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico. Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real e convexa.

Uma teoria quântica de campos pode ser definida a partir do chamado *funcional gerador das funções de Green*,  $Z[J]$ , também conhecido como *amplitude de persistência do vácuo* sob a influência de fontes de campos externos  $J(x)$ . Esta abordagem usa o conceito de integrais de trajetória, originalmente introduzido por Feynman, que mostrou que o formalismo de integrais de trajetórias podia ser visto como uma alternativa aos formalismos tradicionais de Heisenberg e Schrödinger da mecânica quântica [17, 38]. O funcional gerador das funções de Green é a solução da equação de Dyson-Schwinger e pode ser escrito como uma expansão funcional das funções de Green de  $n$ -pontos. Através de uma transformação funcional de Legendre encontramos o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula (1-PI) <sup>1</sup>,  $\Gamma[\phi_c]$ , que é, então, expandido em potências de  $\hbar$ . Tal funcional é chamado de *ação efetiva*, pois ele contém, além da ação clássica, todas as correções quânticas. Uma expansão alternativa do funcional gerador 1-PI em potências das derivadas do campo clássico,  $\phi_c(x)$ , nos fornece o potencial efe-

---

<sup>1</sup>Diagramas de Feynman que não podem ser divididos em dois cortando-se apenas linhas internas.

tivo com o qual podemos obter o vácuo da teoria. Tal como a ação efetiva, o potencial efetivo contém, além do potencial clássico todas as correções quânticas.

## 3.2 Expansão em loop para o potencial efetivo

O potencial efetivo pode ser obtido por métodos funcionais, usando-se o formalismo de integrais de trajetórias<sup>2</sup>.

O funcional gerador das funções de Green conexas  $W[J]$  é dado por

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} = \frac{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle}, \quad (3.1)$$

onde  $\langle 0^+ | 0^- \rangle_J$  é a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa  $J(x)$  e  $Z[J]$  é o funcional gerador das funções de Green (conexas e desconexas). No formalismo de integrais de trajetória, a expressão acima é representada por

$$\exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[ S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x) \right] \right\}, \quad (3.2)$$

onde

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + V_{cl}(\phi(x)) \right\}, \quad (3.3)$$

é a ação clássica,  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização, e  $\mathcal{D}\phi$  formalmente indica integração sobre um espaço de funções dos campos  $\phi(x)$  de dimensão infinita, isto é, a medida de volume funcional.

O campo clássico  $\phi_c(x)$  é definido como o valor esperado do vácuo na presença de uma fonte externa  $J(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \hat{\phi} | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}. \quad (3.4)$$

Nós podemos obter o vácuo quântico tomando o limite  $J \rightarrow 0$  na equação (3.4), sendo que este pode ser diferente do vácuo clássico.

---

<sup>2</sup>Dentre as muitas referências sobre o assunto citamos apenas algumas: [23, 44, 46, 22, 47, 33, 24, 4, 5, 19, 8, 27, 42].

O funcional gerador das funções de Green 1-PI (irredutíveis de uma partícula) é um funcional de  $\phi_c(x)$ , e não de  $J(x)$ , e pode ser obtido a partir de uma transformada funcional de Legendre como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x), \quad (3.5)$$

de forma que

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(x). \quad (3.6)$$

Quando  $J(x) \rightarrow 0$ ,  $\phi_c(x)$  torna-se uma constante, devido à invariância translacional do vácuo, dada por  $\langle\phi\rangle$ , de modo que  $\langle\phi\rangle$  é a solução da equação

$$\left. \frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c} \right|_{\langle\phi\rangle} = 0. \quad (3.7)$$

Nós notamos que o vácuo quântico  $\langle\phi\rangle$  é ponto estacionário de  $\Gamma$ , o que sugere o nome ação efetiva para este funcional. Ainda podemos mostrar que, no limite  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $\Gamma[\phi_c]$  torna-se a ação clássica. A ação efetiva  $\Gamma$  gera as funções de Green 1-PI, também conhecidas como funções vértice de n-pontos,  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ , e pode ser escrita em termos da seguinte expansão funcional

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n). \quad (3.8)$$

A expressão (3.8) é não local. Para darmos uma aparência “quase-local” a  $\Gamma[\phi_c]$  expandimos cada campo  $\phi_c(x_i)$ ,  $i \neq 1$ , em torno do ponto  $x_1$  comum a cada integrando, obtendo

$$\phi_c(x_i) = \phi_c(x_1) + (x_i - x_1)^\mu \partial_\mu \phi_c(x_1) + \frac{1}{2} (x_i - x_1)^\mu (x_i - x_1)^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi_c(x_1) + \dots \quad (3.9)$$

Integrando sobre  $x_{i \neq 1}$  e colocando os termos de derivadas de  $\phi_c$  em potências crescentes, podemos escrever a ação efetiva na forma

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x \left[ -U + \frac{1}{2} A \partial_\mu \phi_c(x) \partial^\mu \phi_c(x) + \dots \right], \quad (3.10)$$

onde os coeficientes  $U$  e  $A$  são funções de  $\phi_c(x)$ .

No caso em que o campo clássico é uniforme, isto é,  $\phi_c(x) = \phi_c$  (uma constante), todos os termos na expansão (3.10) se anulam, exceto o primeiro, de maneira que

$$\Gamma[\phi_c] = -\Omega U(\phi_c) = -\Omega V_{ef}(\phi_c), \quad (3.11)$$

onde  $\Omega$  é o volume do espaço-tempo euclidiano<sup>3</sup>. Desta forma a função<sup>4</sup>  $U(\phi_c)$  é a generalização quântica do potencial clássico e é denominada potencial efetivo  $V_{ef}$ .

Podemos obter a expansão em “loop” até primeira ordem em  $\hbar$  para  $W[J]$  da equação (3.2), através do método do ponto de sela. Definindo

$$S[\phi, J] = S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x), \quad (3.12)$$

o ponto de sela  $\phi_0$  é aquele em que  $S[\phi, J]$  é estacionária, isto é,

$$\left. \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_0} = 0. \quad (3.13)$$

Isto significa que  $\phi_0(x)$  é uma função de  $x$  e também um funcional de  $J(x)$ .

Expandindo  $S[\phi, J]$  em torno de  $\phi_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= S[\phi_0, J] + \int d^4x [\phi(x) - \phi_0(x)] \left. \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_0} + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) - \phi_0(x)] \left. \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Usando a equação (3.13), a equação (3.14) se torna

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) - \phi_0(x)] \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + \dots \quad (3.15)$$

A derivação funcional da ação  $S$  determina o operador

---

<sup>3</sup>Note que, quando  $\phi_c(x)$  é uniforme,  $J(x)$  também é uniforme e que para cada valor de  $J$  constante existe um correspondente valor constante de  $\phi_c$

<sup>4</sup>Note que agora  $U(\phi_c)$  é uma função ordinária da variável  $\phi_c$ .

$$m(x, y) = \left. \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} = [-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\delta(x-y). \quad (3.16)$$

Substituindo  $\eta(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$ , a equação (3.15) se torna

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \int d^4x \eta(x) [-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\eta(x) + \dots \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.17) na equação (3.2), e desprezando os termos de maior ordem, obtemos

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[\phi_0, J]\right\} \int (D\eta) \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar} \int d^4x \eta [-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\eta\right\}. \quad (3.18)$$

Podemos realizar facilmente a integral gaussiana resultante com o uso da fórmula

$$\int (D\eta) \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar} \int d^4x \eta(x) A \eta(x)\right\} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

Assim, a equação (3.18) se torna

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[\phi_0, J]\right\} \left[\det[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)]\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Desta forma o funcional gerador das funções de Green conexas fica dado por

$$W[J] = -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2} \ln[\det(A)] + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.21)$$

Não é difícil mostrarmos que os termos desprezados na equação (3.17) são de  $\mathcal{O}(\hbar^2)$ , basta reescalarmos o campo  $\phi = \hbar^{\frac{1}{2}}\phi$ .

Para encontrarmos a expansão em “loop” de  $\Gamma[\phi_c]$ , substituímos o resultado da equação (3.21) na equação (3.5), de modo que

$$\Gamma[\phi_c] = -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2} \ln \det[-\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + V''(\phi_0)] - \int d^4x J(x)\phi_c(x). \quad (3.22)$$

Substituindo o resultado da equação (3.21) na equação (3.4), temos

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \mathcal{O}(\hbar). \quad (3.23)$$

O resultado acima mostra que  $\phi_c(x)$  é igual a  $\phi_0(x)$  em  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ . Portanto, podemos escrever  $\phi_c(x)$  da seguinte forma

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \hbar\phi_1(x) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.24)$$

Com a expansão (3.24) para  $\phi_c(x)$  podemos relacionar  $S[\phi_c]$  com  $S[\phi_0]$  através de

$$S[\phi_c] = S[\phi_0 + \hbar\phi_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)],$$

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar \int \phi_1(x) \left. \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \right|_{\phi_0} d^4x + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.25)$$

Usando as equações (3.12) e (3.13), obtemos

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar \int \phi_1(x) J(x) d^4x + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.26)$$

Substituindo o resultado da equação (3.26) na equação (3.22), temos

$$\Gamma[\phi_c] = -S[\phi_c] - \frac{\hbar}{2} \ln \det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_c)]. \quad (3.27)$$

Tomando o limite  $J \rightarrow 0$ ,  $\phi_c(x)$  torna-se uma constante  $\phi_c$ , e usando a equação (3.10), obtemos

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_c)]. \quad (3.28)$$

Agora, usando a relação

$$\ln \det[m(x, y)] = \text{tr} \ln[m(x, y)], \quad (3.29)$$

no resultado (3.28), temos

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left[ k^2 + V''(\phi_c) \right], \quad (3.30)$$

onde  $k$  é o quadri-momento.

Como podemos ver a integral da equação acima é claramente divergente e, portanto, é necessário um procedimento de regularização para isolar as divergências. Um procedimento de regularização comumente usado é o de *Cut-off*. Tal procedimento conduz ao aparecimento de pólos que devem ser eliminados pela prescrição de renormalização (absorvidos nos parâmetros livres da teoria). Entretanto, a determinação do potencial efetivo usando o método da função zeta é mais vantajoso, pois conduz a um resultado finito, sem a aparente necessidade de subtração de qualquer pólo ou a adição de contra-termos. A própria continuação analítica realizada para restabelecimento da teoria original é a prescrição de renormalização que elimina os pólos [34].

Como vimos no capítulo anterior a função zeta generalizada associada ao operador real, elíptico e auto-adjunto  $M = \frac{m}{\mu^2}$ , é definida a partir dos autovalores  $\{\lambda_i\}$  de  $m$  através da relação

$$\zeta_M(s) = \sum_i \left( \frac{\lambda_i}{\mu^2} \right)^{-s}, \quad s \in C. \quad (3.31)$$

Em quatro dimensões a função zeta generalizada associada ao operador  $M$  de segunda ordem converge para  $\Re(s) > 2$  e pode ser continuada analiticamente para uma função meromorfa com pólos somente em  $s = 2$  e  $s = 1$ , assim ela é regular em  $s = 0$ , bem como sua derivada [20, 16, 28]. Com o uso da relação

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M}{ds}(0) = -\zeta_m(0) \ln \mu^2 - \frac{d\zeta_m}{ds}(0), \quad (3.32)$$

podemos expressar o potencial efetivo, em  $\mathcal{O}(\hbar)$ , como

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left( \frac{d\zeta_m}{ds}(0) + \zeta_m(0) \ln \mu^2 \right). \quad (3.33)$$

O interessante no uso da função zeta é que a expressão (3.33) é finita, e não ocorre a necessidade de subtração de pólos nem a adição de contratermos infinitos, como já havíamos dito. Contudo, uma renormalização finita é necessária para que ocorra o ajuste dos parâmetros livres da teoria aos valores observados. Isto é feito através das condições de renormalização

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = m_R^2 \quad (3.34)$$

e

$$\left. \frac{d^4 V_{ef}}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = \lambda_R. \quad (3.35)$$

### 3.3 A interpretação do potencial efetivo

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados  $\{\phi\}$ , minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano  $\hat{H}$ . Assim,

$$V_{EF}(\phi_c) = \text{MIN}_{\{\phi\}} \langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle, \quad (3.36)$$

tal que  $\phi_c$  seja o valor esperado do operador de campo  $\hat{\phi}$  calculado neste estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle\phi|\hat{\phi}|\phi\rangle. \quad (3.37)$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [14, 10].

Agora, vamos mostrar que  $V_{ef}(\phi_c)$  obtido da equação (3.11) é o potencial efetivo como definido rigorosamente acima [46].

De início, seja  $\hat{H}$  o operador hamiltoniano de um sistema quântico. Podemos obter o estado  $|\phi_a\rangle$  que minimiza  $\langle\phi_a|\hat{H}|\phi_a\rangle$  e sujeito ao vínculo  $\langle\phi_a|\hat{A}|\phi_a\rangle = \bar{a}$ , para algum operador  $\hat{A}$  hermitiano, introduzindo os multiplicadores de Lagrange  $E$  e  $J$ , de

$$\delta\langle\phi_a|\hat{H} - J\hat{A} - E|\phi_a\rangle = 0. \quad (3.38)$$

Isto implica que

$$(\hat{H} - J\hat{A} - E)|\phi_a\rangle = 0. \quad (3.39)$$

Assim,

$$\hat{H}_J|\phi_a(J)\rangle = (\hat{H} - J\hat{A})|\phi_a\rangle = E(J)|\phi_a(J)\rangle, \quad (3.40)$$

e  $\hat{H}_J$  é a hamiltoniana perturbada pela fonte  $J$  e  $|\phi_a(J)\rangle$  é auto-estado de  $\hat{H}_J$  com autovalor  $E(J)$ . Note que  $|\phi_a(J)\rangle$  significa que o estado  $|\phi_a\rangle$  é função de  $J$ . Uma vez que  $\hat{H}$  não é função de  $J$ , temos que

$$\bar{a} = -\frac{\partial E(J)}{\partial J}, \quad (3.41)$$

e dessa forma,

$$\langle\phi_a(J)|\hat{H}|\phi_a(J)\rangle = E(J) - J\frac{\partial E(J)}{\partial J}. \quad (3.42)$$

Vamos considerar, agora, que o estado de vácuo de um sistema quântico de campos, no interior de um volume  $V_{ol}$ , seja adiabaticamente perturbado pela presença de uma fonte uniforme (isto é, não dependente de  $x$ ), que permanece por um intervalo de tempo  $\tau$ . O estado de vácuo, então, evolui adquirindo um fator de fase que permanece mesmo após a fonte ser removida. Portanto,

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E(J)\tau\right\}. \quad (3.43)$$

Note que se não existisse a presença da fonte, os estados  $|0^-\rangle$  e  $|0^+\rangle$  seriam fisicamente indistinguíveis e, portanto,

$$\langle 0^+|0^-\rangle = 1, \quad (3.44)$$

para estados normalizados.

O resultado da equação (3.43) foi obtido no espaço-tempo de Minkowski. Assim, realizando-se uma rotação de Wick [44, 47, 19], temos

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon(J)\Omega\right\}. \quad (3.45)$$

Comparando o resultado acima com a equação (3.1), obtemos

$$W[J] = -\varepsilon(J)\Omega. \quad (3.46)$$

Portanto,  $W[J]$  é identificado com a energia na presença da fonte  $J$ .

O resultado da equação (3.46) mostra que a transformada funcional de Legendre, equação (3.5), é a generalização quântica de campos da equação (3.42) e que  $V_{ef}(\phi_c)$  assim obtido é o potencial efetivo  $V_{EF}(\phi_c)$ .

Quando a fonte é uniforme,  $\phi_c(x)$  também é uniforme,  $\phi_c$ , e a equação (3.5) fica dada por

$$V_{ef}(\phi_c) = \varepsilon(J) + J\phi_c. \quad (3.47)$$

Dessa forma,  $V_{ef}(\phi_c)$  é a densidade de energia do sistema independente da fonte.

### 3.4 Convexidade do potencial efetivo

O funcional gerador das funções de Green conexas no espaço-tempo euclidiano está relacionado à energia do sistema perturbado pela fonte, como já vimos, através de

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[J]} = e^{-\frac{1}{\hbar}E(J)\tau}, \quad (3.48)$$

onde  $E(J)\tau = \Omega\varepsilon(J)$ , sendo  $\varepsilon(J)$  a densidade de energia. Assim, das equações (3.2) e (3.48), temos que

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon\Omega\right\} = \int (\mathcal{D}\phi) \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - \int J(x)\phi(x)d^4x\right]\right\}. \quad (3.49)$$

Considerando uma fonte uniforme  $J$  na equação (3.49), temos

$$\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon\Omega\right\} = \int (\mathcal{D}\phi) \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left[S[\phi] - J \int \phi(x)d^4x\right]\right\}. \quad (3.50)$$

Da equação (3.47), obtemos

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial J} = -\phi_c \quad (3.51)$$

e

$$\frac{\partial V_{ef}}{\partial \phi_c} = J. \quad (3.52)$$

A diferenciação da equação (3.50) com relação a  $J$  resulta em

$$-\frac{\Omega}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon}{\partial J} e^{\frac{w[J]}{\hbar}} = \int (\mathcal{D}\phi) \left[ \frac{1}{\hbar} \int d^4x \phi(x) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[ S[\phi] - J \int d^4x \phi(x) \right] \right\}, \quad (3.53)$$

e a derivada segunda é dada por

$$-\frac{\Omega}{\hbar} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2} e^{\frac{w[J]}{\hbar}} + \frac{\Omega^2}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial J} \right)^2 e^{\frac{w[J]}{\hbar}} = \int (\mathcal{D}\phi) \left[ \frac{1}{\hbar} \int d^4x \phi(x) \right]^2 \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[ S[\phi] - J \int d^4x \phi(x) \right] \right\}. \quad (3.54)$$

Substituindo a equação (3.53) na equação (3.54), esta última se torna

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega}{\hbar} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2} &= \frac{1}{e^{\frac{w[J]}{\hbar}}} \int \mathcal{D}\phi \left[ \frac{1}{\hbar} \int d^4x \phi(x) \right]^2 e^{-\frac{S[\phi, J]}{\hbar}} + \\ &\quad - \left[ \frac{1}{e^{\frac{w[J]}{\hbar}}} \int \mathcal{D}\phi \left[ \frac{1}{\hbar} \int d^4x \phi(x) \right] e^{-\frac{S[\phi, J]}{\hbar}} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Sendo o valor médio esperado dado por

$$\langle F[\phi] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-\frac{S[\phi, J]}{\hbar}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{S[\phi, J]}{\hbar}}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-\frac{S[\phi, J]}{\hbar}}}{e^{\frac{w[J]}{\hbar}}}, \quad (3.56)$$

a equação (3.55) pode ser expressa como

$$-\hbar \Omega \frac{\partial^2 \varepsilon(J)}{\partial J^2} = \left\langle \left[ \int d^4x \phi(x) \right]^2 \right\rangle - \left\langle \left[ \int d^4x \phi(x) \right] \right\rangle^2. \quad (3.57)$$

Uma vez que

$$\langle F^2 \rangle \geq \langle F \rangle^2 \quad (3.58)$$

e

$$\langle F^2 \rangle \geq 0, \quad (3.59)$$

para qualquer  $F$  real, a equação (3.57) implica em

$$-\hbar\Omega \frac{\partial^2 \varepsilon(J)}{\partial J^2} \geq 0 \quad (3.60)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(J)}{\partial J^2} \leq 0. \quad (3.61)$$

O resultado da equação (3.61) mostra que  $\varepsilon$  é uma função côncava de  $J$ . Da equação (3.46) resulta que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \geq 0, \quad (3.62)$$

ou seja,  $W[J]$  é convexo.

Agora, usando equações (3.51) e (3.52), obtemos

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial j}$$

e

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2} = \frac{\partial J}{\partial \phi_c}. \quad (3.64)$$

Destas últimas duas equações segue que

$$\left( \frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial J^2} \right) = -1. \quad (3.65)$$

Da equação (3.61) concluímos que

$$\frac{\partial^2 V_{ef}}{\partial \phi_c^2}(\phi_c) \geq 0, \quad (3.66)$$

e, portanto, o potencial efetivo é uma função convexa.

A demonstração acima é fortemente baseada na referência [46]. Uma demonstração menos rigorosa da convexidade do potencial efetivo pode ser feita [10, 18].

O propagador, ou a função de Green conexa de dois pontos, é obtido de

$$G(x, y) = \Delta(x, y) = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0}. \quad (3.67)$$

Usando a equação (3.4) na equação (3.67), temos

$$\Delta(x, y) = \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta J(y)}. \quad (3.68)$$

A função vértice de dois pontos é obtida de

$$\Gamma(x, y) = \Pi(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)}. \quad (3.69)$$

Usando a equação (3.6) na equação (3.69), temos

$$\Pi(x, y) = -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi_c(y)}. \quad (3.70)$$

Usando as equações (3.68) e (3.70), obtemos

$$\int G(x, z) \Gamma(z, y) dz = -\int \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta \phi_c(y)} dz = -\delta(x - y). \quad (3.71)$$

O resultado acima mostra que  $\Delta$  e  $\Pi$  são um o inverso do outro.

No caso em que  $J$  e  $\phi_c$  são uniformes, podemos escrever

$$\Delta = \frac{d^2 W(J)}{dJ^2} = \frac{d\phi_c(J)}{dJ}, \quad (3.72)$$

e

$$\Pi = \frac{d^2 \Gamma(\phi_c)}{d\phi_c^2} = \frac{dJ(\phi_c)}{d\phi_c}. \quad (3.73)$$

Dessa forma,

$$\Pi = -\Delta^{-1}. \quad (3.74)$$

Se não existem táchions na teoria,

$$\Delta^{-1} = M_R^2 \geq 0, \quad (3.75)$$

onde  $M_R$  é a massa renormalizada. Assim,

$$\frac{d^2W}{dJ^2} \geq 0. \quad (3.76)$$

Portanto,  $W[J]$  é convexa.

Da equação (3.74), temos que

$$\frac{d^2\Gamma}{d\phi_c^2} = -\Omega \frac{d^2V_{ef}}{d\phi_c^2} = -\Delta^{-1}, \quad (3.77)$$

$$\frac{d^2V_{ef}}{d\phi_c^2} = \Delta^{-1} \geq 0. \quad (3.78)$$

Portanto,  $V_{ef}(\phi_c)$  é uma função convexa de  $\phi_c$ .

## Capítulo 4

O potencial efetivo para uma teoria  
com quebra espontânea de simetria

## 4.1 Introdução.

Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real e convexa. Entretanto, quando a teoria apresenta, a “tree level”, quebra espontânea de simetria, uma ingênua aplicação da expansão em “loop” para a determinação do potencial efetivo, até a primeira ordem em  $\hbar$ , conduz a um resultado equivocado, isto é, uma função que **não** é o potencial efetivo. A fim de determinarmos o (verdadeiro ou correto) potencial efetivo, um emprego cuidadoso do procedimento usado para sua obtenção deve ser realizado. Nosso objetivo, neste capítulo, é mostrar como o (verdadeiro) potencial efetivo é obtido para uma teoria com quebra espontânea de simetria.

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados  $\{\phi\}$ , minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano  $\hat{H}$ . Assim,

$$V_{ef}(\phi_c) = MIN_{\{\phi\}} \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle,$$

tal que,  $\phi_c$  seja o valor esperado do operador de campo  $\hat{\phi}$  calculado nesse estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle \phi | \hat{\phi} | \phi \rangle.$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [10, 14].

Em uma teoria quântica de campos o potencial efetivo é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo daquele potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop (que coincide com uma expansão em potências de  $\hbar$ ), de modo que ele é dado por uma soma do termo clássico com correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico.

Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente

ser uma função real e convexa. Entretanto, quando a teoria apresenta quebra espontânea de simetria a “tree level”, a expansão em “loop” para a determinação do potencial efetivo até a primeira ordem em  $\hbar$ , conduz a uma função que não é real para todo  $\phi$ . Isto indica que esse resultado não deve ser o verdadeiro potencial efetivo. Isto ocorre porque esta função é obtida de uma continuação analítica termo a termo da expansão em  $\mathcal{O}(\hbar)$  para o potencial efetivo, e não existe garantia alguma que essa deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. Uma vez que somente a parte real de um potencial pode ser interpretado como energia, ingenuamente poderíamos pensar em contornar esse problema tomando somente a parte real da continuação analítica da função obtida da expansão em “loop”. Porém, o problema ainda não está resolvido, pois o resultado assim obtido conduz a uma função que não é convexa e que, portanto, não pode ser o verdadeiro potencial efetivo. A falha agora está no emprego incorreto da transformada de Legendre para a obtenção do potencial efetivo.

A fim de determinarmos o (verdadeiro ou correto) potencial efetivo, um emprego cuidadoso do procedimento usado para sua obtenção deve ser realizado.

## 4.2 O potencial efetivo.

Seja a teoria determinada pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4, \quad (4.1)$$

com a constante de acoplamento  $\lambda = 2\beta^2 > 0$ , de modo a garantir a estabilidade da teoria. Vamos considerar somente valores de  $M^2 > 0$ , para os quais a simetria de reflexão de  $\phi$  na origem é espontaneamente quebrada. O potencial clássico é identificado com

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4, \quad (4.2)$$

e o mínimo é degenerado em

$$\phi_{\pm} = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}. \quad (4.3)$$

Podemos determinar o potencial efetivo a partir da equação

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left( \frac{d\zeta_m}{ds}(0) + \zeta_m(0) \ln \mu^2 \right), \quad (4.4)$$

com a função zeta  $\zeta_m(s)$  dada por

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k [k^2 + v^2]^{-s}, \quad (4.5)$$

onde  $v^2 = V_{cl}''(\phi_c) = \beta^2 \phi_c^2 - M^2$ . Para  $v^2 > 0$ , podemos realizar a integral usando (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [k^2 + A^2]^{-s} d^m k = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(s - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (4.6)$$

obtendo

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2 \Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} (v^2)^{2-s}. \quad (4.7)$$

Usando a propriedade  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ , temos

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{(v^2)^{2-s}}{(s-1)(s-2)}. \quad (4.8)$$

Assim,

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \quad (4.9)$$

e

$$\frac{d\zeta_m}{ds}(0) = \frac{v^4}{32\pi^2} \left[ \frac{3}{2} - \ln(v^2) \right]. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.4), o potencial efetivo é, então, dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar v^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right], \quad (4.11)$$

expressão válida para  $v^2 \geq 0$ , isto é,  $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$ .

Ingenuamente, poderíamos pensar em usar o resultado (4.11) para determinar o estado de vácuo da teoria. Porém, tal procedimento não é correto, pois a equação (4.11) somente é válida para  $\phi_c^2 \geq \frac{M^2}{\beta^2}$ , deixando de fora uma importante região, onde se encontra  $\phi = 0$ . Uma forma imediata de se contornar o problema seria estender (4.11) para  $v$  imaginário. Entretanto, como sabemos o potencial efetivo é interpretado como densidade de energia  $e$ , sendo assim, é uma função real. Assim, quando fazemos a extensão analítica de (4.11) para a região em que  $v^2 < 0$ , obtemos uma função não real. Isto indica que esse resultado não deve ser o potencial efetivo verdadeiro. Para entendermos o que está acontecendo, devemos notar que este último resultado é obtido através de uma continuação analítica termo a termo da expansão em “loop” para o potencial efetivo, e nada garante que esta deva ser igual à expansão da continuação analítica do potencial efetivo. O que queremos enfatizar é que não existe problema algum com o potencial efetivo, mas sim na maneira com que o cálculo foi feito, usando uma expansão assintótica em  $\mathcal{O}(\hbar)$ . O método usado para obtermos a expansão assintótica somente faz sentido se o potencial clássico for convexo, e portanto a parte imaginária é o preço que pagamos por usá-la inapropriadamente. Para salvarmos o cálculo, notamos que somente a parte real de um potencial pode ser interpretado como energia <sup>1</sup>. Assim, uma maneira direta de contornarmos o problema é tomarmos a parte real da continuação analítica, isto é,

$$V_{ef}(\phi_c) = \Re \left\{ V_{cl}(\phi_c) + \hbar V_{ef}^{(1)}(\phi_c) \right\}. \quad (4.12)$$

No entanto, novamente o problema não está resolvido, pois, como sabemos, o potencial efetivo é convexo, o que não ocorre com o potencial da equação (4.12). A falha agora é decorrente do uso inadequado da transformada de Legendre na obtenção do potencial efetivo. Usando uma definição precisa desta transformada (veja Apêndice C) obtemos, como é esperado, um resultado convexo [8].

---

<sup>1</sup>Podemos interpretar a parte imaginária do potencial efetivo como a razão de decaimento por unidade de volume de um estado bem definido [53].

### 4.3 O potencial efetivo verdadeiro.

Vamos considerar o caso simples onde o funcional gerador das funções de Green conexas<sup>2</sup>

$$W[J] = - \int V_{cl}(\phi_0) d^4x + \int J\phi_0 d^4x, \quad (4.13)$$

é substituído por uma aproximação de ordem zero, com fontes e campos uniformes. Então, este funcional gerador fica dado, para  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ , pelo produto do volume espaço-temporal  $V_{cl}\tau$  com uma função ordinária  $w(J)$ , dada por

$$w(J) = J\phi_0 - v(\phi_0). \quad (4.14)$$

A fim de obtermos uma compreensão mais simples do procedimento, tratamos primeiramente do caso sem quebra espontânea de simetria, ou seja, quando  $M^2 = -m^2$ , com  $m$  real. Assim,

$$v(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi_0^4. \quad (4.15)$$

O campo  $\phi_0$  é uma função da fonte  $J$  determinado pela equação clássica

$$\frac{dv(\phi_0)}{d\phi_0} = m^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3 = J. \quad (4.16)$$

Podemos determinar a solução  $\phi_0(J)$  graficamente encontrando o valor de  $\phi_0$  para o qual a curva que representa a função  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$  intercepta  $\frac{dv}{d\phi_0} = J$ . Nesse caso cada valor de  $J$  determina um valor único para  $\phi_0$ , como podemos ver na figura-4.1.

Como a ação é estacionária sob variações de  $\phi_0$  com  $J$  fixo,

$$\frac{dw}{dJ}(J) = \phi_0(J). \quad (4.17)$$

A derivada segunda é dada por

---

<sup>2</sup>Note que  $\phi_c = \phi_0$  em  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ .

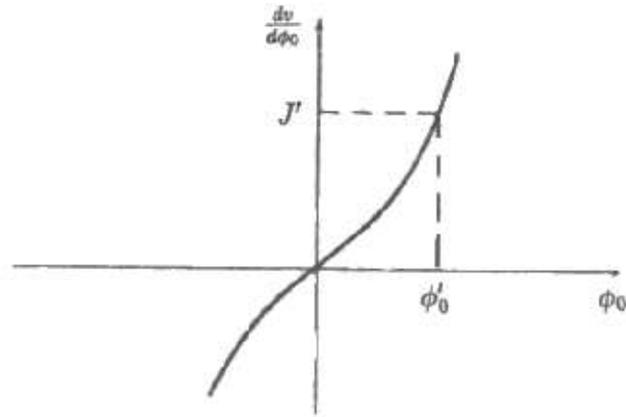


Figura 4.1: Determinação gráfica de  $\phi_0(J)$ .

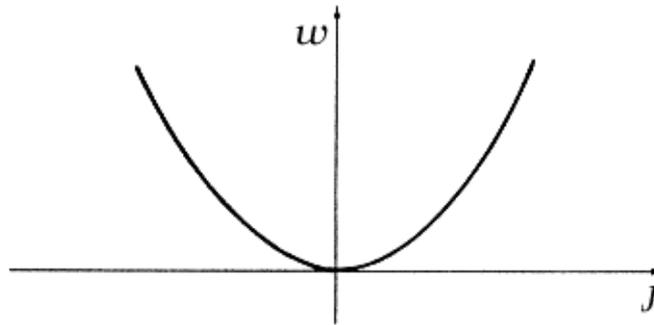


Figura 4.2: A função  $w(J)$  para o caso sem quebra espontânea de simetria.

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi_0}{dJ}(J). \quad (4.18)$$

De acordo com a figura-4.1,  $\phi_0(J)$  é uma função crescente, e portanto

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) > 0, \quad (4.19)$$

ou seja, a função  $w(J)$  é convexa, conforme esperado [42]. O gráfico dessa função é esboçado na figura-4.2.

O potencial efetivo, nesse caso, é dado pela transformada de Legendre

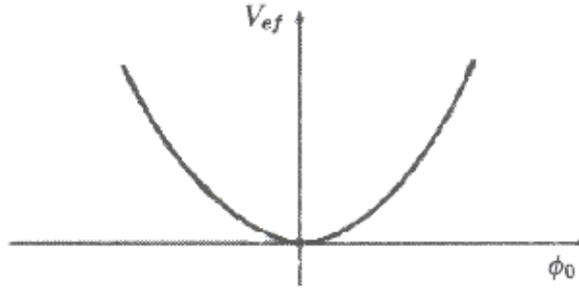


Figura 4.3: Potencial Efetivo para o caso sem quebra espontânea de simetria

$$V_{ef}(\phi_0) = J\phi_0 - w(J). \quad (4.20)$$

Para determinarmos  $V_{ef}(\phi_0)$  é necessário encontrarmos  $V_{ef}(\phi'_0)$  para cada  $\phi'_0$  dado. Mas, dado  $\phi'_0$  que  $J'$  está associado a ele. Como podemos ver do Apêndice C,  $V_{ef}(\phi'_0)$  é dado pela máxima distância entre a reta  $\phi'_0 J$  e a curva  $w(J)$  que é determinada por

$$\left. \frac{dw}{dJ} \right|_{J'} = \phi'_0. \quad (4.21)$$

Uma vez que, como podemos observar na figura-4.1, para cada valor de  $J'$  existe um único possível valor de  $\phi'_0$ . Isto implica que a derivada de  $w(J)$  com relação a  $J$  é contínua. Dessa forma podemos obter facilmente  $V_{ef}(\phi_0)$ , veja figura-4.3.

Para o caso  $M^2 = m^2$ ,  $m$  real (com quebra espontânea de simetria), o potencial clássico é dado por

$$v(\phi_0) = -\frac{m^2}{2}\phi_0^2 + \frac{\beta^2}{12}\phi_0^4. \quad (4.22)$$

O gráfico dessa função encontra-se na figura-4.4. Os pontos de mínimo degenerados são dados por

$$\phi_{\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{m}{\beta}. \quad (4.23)$$

Como no caso anterior, o campo  $\phi_0(J)$  é determinado através da equação  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = J$ , sendo que agora

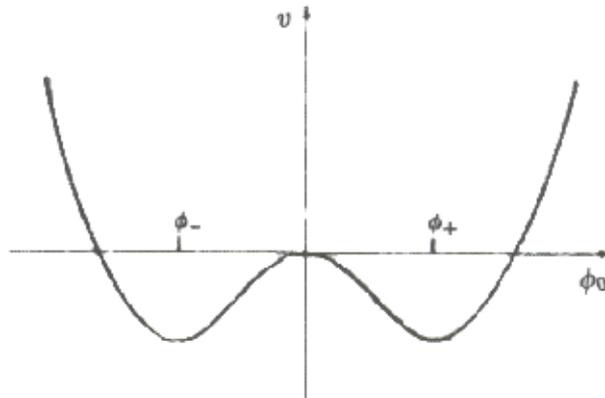


Figura 4.4: Potencial com quebra espontânea de simetria

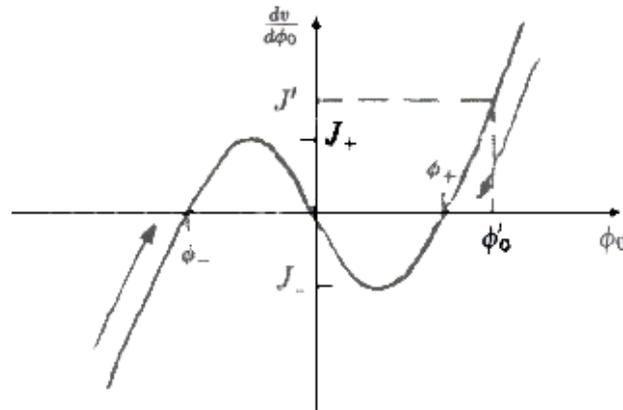


Figura 4.5: Determinação gráfica de  $\phi_0(J)$  para o caso com quebra espontânea de simetria.

$$\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0) = -M^2\phi_0 + \frac{\beta^2}{3}\phi_0^3. \quad (4.24)$$

O gráfico de  $\frac{dv}{d\phi_0}(\phi_0)$  é ilustrado na figura-4.5. Os pontos estacionários de  $\frac{dv}{d\phi_0}$  são dados por

$$\pm\phi_s = \pm\frac{M}{\beta}, \quad (4.25)$$

e definem

$$J_{\pm} = v'(\mp\phi_s) = \pm\frac{2}{3}\frac{M^3}{\beta}. \quad (4.26)$$

Para  $J > J_+$  ou  $J < J_-$ , a solução  $\phi_0(J)$  é única. Entretanto, quando  $J_- < J < J_+$  existem três valores possíveis para  $\phi_0(J)$ . Esta ambigüidade é removida lembrando que (para cada  $J'$ ) o valor de  $\phi'_0$  é definido como sendo aquele que implica na menor energia para o sistema.

A densidade de energia do estado de vácuo perturbado adiabaticamente por uma fonte  $J$  é dada por

$$\varepsilon(J) = -w(J) = v(\phi_0(J)) - J\phi_0(J). \quad (4.27)$$

Substituindo na equação (4.27)  $J$  por  $\frac{dv}{d\phi_0}$ , obtemos uma função, denotada por  $\varepsilon'$ , que determina o valor da densidade de energia para todos os valores possíveis de  $\phi_0$  (assumidos ou não pelo sistema físico). Temos, portanto,

$$\varepsilon'(\phi_0) = \frac{m^2}{2}\phi_0^2 - \frac{\beta^2}{4}\phi_0^4. \quad (4.28)$$

Veja o gráfico da figura-4.6.

Para cada valor de  $J$ , o campo  $\phi_0$  assume o valor que minimiza a função  $\varepsilon'$ . Em princípio, quando  $0 < J < J_+$ , o campo  $\phi_0$  poderia assumir três valores, sendo um deles maior do que  $\phi_+$ , e os outros dois na região  $\phi_- < \phi_0 < \phi_+$  (veja a figura-4.4). Pela figura-4.5 é fácil verificarmos que, dentre esses valores para o campo, o que leva a um menor valor de  $\varepsilon'$  é aquele em que  $\phi_0 > \phi_+$ . Portanto, para  $J > 0$ , o campo  $\phi_0$  assume somente os valores  $\phi_0 > \phi_+$ . Por um raciocínio idêntico, temos que, para  $J < 0$ , o campo  $\phi_0$  assume somente os valores  $\phi_0 < \phi_-$ .

Podemos obter agora, a partir da equação (4.28) e dos valores assumidos por  $\phi_0$ , a função  $w$ . Ela é representada pelo gráfico da figura-4.7.

A função  $w$  é contínua em  $J = 0$ , onde

$$w(0) = -v(\phi_{\pm}) = \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}. \quad (4.29)$$

Entretanto, existe uma descontinuidade na derivada primeira de  $w$  em  $J = 0$ , ou seja,

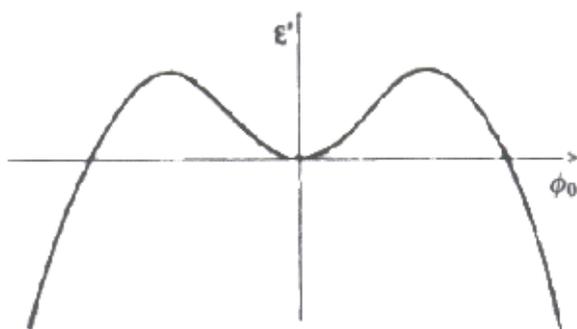


Figura 4.6: A função  $\varepsilon'$ .

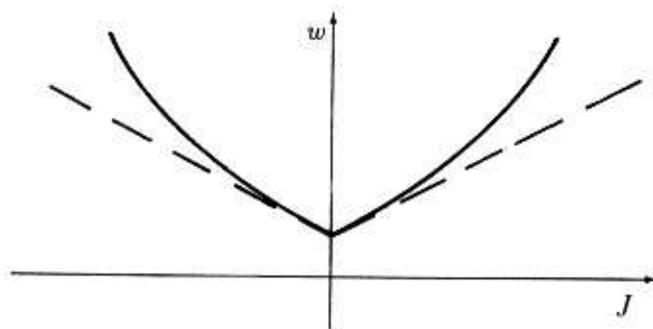


Figura 4.7: A função  $w(J)$  para o caso com quebra espontânea de simetria. Note que esta função tem um “bico”.

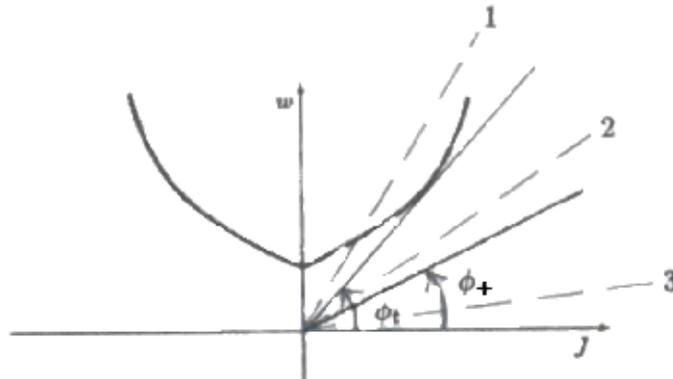


Figura 4.8: Construção da transformada de Legendre para o caso com quebra espontânea de simetria, onde a função  $w(J)$  tem um “bico”. Linhas contínuas: retas para  $\phi'_0 = \phi_+$  e  $\phi'_0 = \phi_t$ . Linhas tracejadas: reta-1 para  $\phi'_0 > \phi_t$ ; reta-2 para  $\phi_+ < \phi'_0 < \phi_t$  e reta-3 para  $\phi'_0 < \phi_+$ .

$$\lim_{J \rightarrow 0^\pm} \left[ \frac{dw}{dJ}(J) \right] = \phi_\pm. \quad (4.30)$$

Essa função tem um “bico” em  $J = 0$ . Essa é uma característica de sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria. Um fato a ser destacado em toda essa discussão é que a função

$$\frac{d^2w}{dJ^2}(J) = \frac{d\phi}{dJ}(J) > 0, \quad (4.31)$$

como podemos ver pela figura-4.7. Portanto, mesmo nesse caso, a função  $w$  é convexa.

O potencial efetivo é agora obtido pela aplicação da transformada de Legendre, equação (7.20), à função  $w$ , obtendo-se<sup>3</sup>

$$V_{ef}(\phi'_0) = \text{MAX}_J \{ J\phi'_0 - w(J) \}. \quad (4.32)$$

Reportando-se ao gráfico da figura-4.7 e adicionando a ele a reta com coeficiente angular igual a  $\phi'_0$ , obtemos a figura-4.8. A transformada de Legendre se dá com a máxima separação vertical entre a reta e a curva para  $w(J)$ . Se a reta estiver

<sup>3</sup>Note que  $V_{ef}(\phi'_0)$  significa  $V_{ef}(\phi_0)$  calculado no ponto  $\phi_0 = \phi'_0$ .

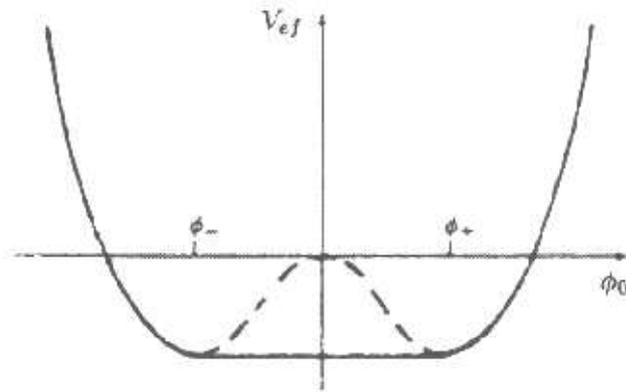


Figura 4.9: Potencial efetivo para quando o potencial clássico tem a forma de duplo poço.

abaixo da curva, a separação é negativa. O máximo nesse caso corresponde à mínima distância geométrica (medida verticalmente na figura). Esta situação acontece quando  $-\phi_t < \phi'_0 < \phi_t$ , onde  $\phi_t$  é definido por  $v(\phi_t) = 0$ , ou seja,  $\phi_t = \sqrt{2} \frac{M}{\beta}$ . Portanto, para  $\phi'_0$  nesta região, o potencial efetivo é negativo. A derivada  $\frac{dw}{dJ}$  tem uma descontinuidade na origem (veja equação (4.30)), e ambas as derivadas à direita ( $\phi_+$ ) e à esquerda ( $\phi_-$ ) são não nulas. Daí decorre um fato importante. Quando  $\phi'_0 = \phi_+$ , a inclinação da reta é igual à derivada à direita na origem, e a distância mínima entre as curvas é  $w(0) = \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}$ . Quando a inclinação diminui, a distância mínima continua a ser  $w(0)$ , isso ocorrendo até que a inclinação se torne  $\phi'_0 = \phi_- = -\phi_+$ . Portanto, nessa região, a transformada de Legendre é constante e temos

$$V_{ef}(\phi'_0) = v(\phi_+) = v(\phi_-); \quad \phi_- < \phi'_0 < \phi_+. \quad (4.33)$$

Fora dessa região ( $\phi'_0 > \phi_+$  ou  $\phi'_0 < \phi_-$ ), o potencial efetivo assume os mesmos valores que o potencial em ordem zero, ou seja,

$$V_{ef}(\phi'_0) = v(\phi'_0). \quad (4.34)$$

O gráfico do potencial efetivo é mostrado na figura-4.9. A linha pontilhada nesta figura representa a parte real da continuação analítica de  $v$  na região  $\phi_- < \phi_0 < \phi_+$ .

O verdadeiro potencial efetivo calculado até ordem zero corresponde ao potencial clássico com a parte não convexa substituída por uma linha reta horizontal. Ele satisfaz, portanto, o critério de convexidade. Embora tenhamos realizado a construção acima para o potencial em ordem zero, o raciocínio não é alterado quando incluímos termos de  $\mathcal{O}(\hbar)$ . Portanto, podemos construir o potencial efetivo a partir da parte real da expansão em loop, substituindo a parte não convexa desse por uma linha reta. Essa construção, chamada construção de Maxwell, é denotada pelo sub-índice  $M$ , de modo que o potencial efetivo é expresso como

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re \left\{ V_{cl}(\phi_c) + \hbar V^{(1)}(\phi_c) \right\} \right]_M. \quad (4.35)$$

## Capítulo 5

Condições de contorno de Neumann  
homogêneas como restauradoras da  
simetria

## 5.1 Introdução

Vamos considerar uma teoria de um campo escalar real  $\phi(x)$  com auto-interação quártica e quebra espontânea de simetria em nível clássico, satisfazendo as condições de contorno homogêneas de Neumann sobre duas superfícies infinitas, planas e paralelas separadas por uma pequena distância  $a$ .

Como veremos a introdução de um novo parâmetro, o comprimento de compactificação  $a$ , pode modificar o estado de vácuo da teoria, de forma a restabelecer a simetria [37, 48, 39, 15, 52]. Termos tendo origem nas correções quânticas de ordem  $\mathcal{O}(\hbar)$  do potencial efetivo tornam-se de ordem clássica quando o comprimento de compactificação atinge um valor crítico. A diminuição do comprimento de compactificação aproxima os dois estado de vácuo permitidos até que, ao atingir o valor crítico, o estado de vácuo se torna único, restabelecendo a simetria da teoria.

## 5.2 Potencial efetivo com condições de contorno de Neumann

Seja a densidade lagrangiana de um campo escalar real dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4, \quad (5.1)$$

com a constante de acoplamento  $\lambda = 2\beta^2 > 0$ , para garantir a estabilidade da teoria e  $M^2 > 0$  (fizemos  $m^2 = -M^2$ ).

A lagrangiana dada acima é par em  $\phi$ , portanto, invariante em relação a simetria G-paridade dada pela transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ . Porém, para valores de  $M^2 > 0$ , a simetria de reflexão de  $\phi$  na origem é espontaneamente quebrada [47, 22].

O potencial clássico da lagrangiana (5.1) é dado por

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \frac{2\beta^2}{4!} \phi^4. \quad (5.2)$$

O mínimo clássico (vácuo clássico) ocorre em

$$\phi_{\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}, \quad (5.3)$$

sendo, portanto, degenerado (veja figura 4.4).

Dessa forma vemos que a teoria apresenta a “tree level” quebra espontânea de simetria. Assim, para determinarmos o potencial efetivo devemos usar a construção de Maxwell (veja capítulo 4).

Vamos considerar a teoria em que o campo escalar  $\phi(x)$  deve satisfazer condições de contorno de Neumann homogêneas sobre duas superfícies planas, paralelas e infinitas separadas de uma distância  $a$ .

Como já vimos, as condições de contorno modificam o momento linear na direção normal às superfícies fazendo com que ele somente possa assumir valores múltiplos inteiros de  $\frac{\pi}{a}$ , portanto, tornando-o discreto (veja seções 2.3.2 e 2.3.5).

Realizando a continuação analítica usual para o espaço-tempo euclidiano da ação  $S$ , podemos definir a função zeta generalizada associada ao operador da segunda variação da ação,  $\zeta_m(s)$ , e desta forma determinar o potencial efetivo como

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re e \left\{ V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left[ \frac{d\zeta_m(0)}{ds} + \zeta_m(0) \ln(\mu^2) \right] \right\} \right]_M, \quad (5.4)$$

onde a função zeta é dada por

$$\zeta_m(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} d^3 k \left[ k^2 + \left( \frac{N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-s}, \quad (5.5)$$

com  $v^2 = V_{cl}''(\phi_c) = \beta^2 \phi_c^2 - M^2$ .

Observe que as três dimensões estendidas oferecem um espectro contínuo enquanto a dimensão compactificada oferece um espectro discreto.

Para  $v^2 > 0$ , a integral acima pode ser resolvida facilmente com uso da relação (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [K^2 + A^2]^{-s} d^m k = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(s - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (5.6)$$

onde  $A^2 = const. > 0$ , obtendo-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega \pi^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3 a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{N=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}. \quad (5.7)$$

Agora destacando o termo para  $N = 0$  temos,

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}. \quad (5.8)$$

Reescrevendo a equação acima como

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left( \frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \sum_{N=1}^{\infty} \left( N^2 + \frac{a^2 v^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}-s}, \quad (5.9)$$

e usando a continuação analítica (veja Apêndice B)

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} = -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[ \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right], \quad (5.10)$$

para a função de Epstein-Hurwitz, a equação (5.9) torna-se

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}} a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{(s-1)(s-2)} + \frac{\Omega}{4\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2Nav)}{(Nav)^{2-s}}, \quad (5.11)$$

onde foi usado a propriedade da função Gamma  $\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\Gamma(s-2)$ .

Da equação (5.11) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_m}{ds} &= \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}} a} \left\{ -2 \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} \ln(v) + v^{3-2s} \left[ \frac{\Gamma'(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \psi(s) \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Omega}{16\pi^2} \left\{ \frac{-2}{(s-1)(s-2)} v^{4-2s} \ln(v) + v^{4-2s} \left[ \frac{-1}{(s-1)(s-2)^2} - \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Omega}{4\pi^2} \left\{ \left[ -2 \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \ln(v) - v^{4-2s} \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right] \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2Nav)}{(Nav)^{2-s}} + \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \frac{d}{ds} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2Nav)}{(Nav)^{2-s}} \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ .

Sabendo que  $\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right) = -1$  e lembrando que  $\Gamma(s) \rightarrow \infty$  quando  $s \rightarrow 0$  e que  $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$  temos

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega}{32\pi^2} v^4 \quad (5.13)$$

e

$$\frac{d\zeta_m(0)}{ds} = \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) v^3 - \frac{\Omega}{16\pi^2} v^4 \left[ \ln(v) - \frac{3}{4} \right] + \frac{\Omega}{4\pi^2} v^4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2}. \quad (5.14)$$

Agora substituindo(5.13) e (5.14) em (5.4) obtemos

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re e \left\{ V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{32\pi^{\frac{3}{2}}a} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) v^3 + \frac{\hbar v^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\hbar}{8\pi^2} v^4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} \right\} \right]_M. \quad (5.15)$$

Estamos interessados em saber se as condições de contorno podem modificar o vácuo clássico. Uma rápida olhada no potencial efetivo da equação (5.15) mostra que mesmo termos tendo origem na correção radiativa do potencial podem se tornar de origem clássica dependendo da ordem do comprimento de compactificação  $a$ .

Na equação (5.15) vemos que o terceiro termo é de ordem  $\hbar$ , ou seja, é um termo vindo de correções radiativas que não pode se tornar de ordem clássica, então desprezaremos esse termo. O segundo e o quarto termos têm a presença do parâmetro  $a$ , incluído na teoria devido às condições de contorno e dependendo da ordem de grandeza desse parâmetro esses termos podem vir a tornarem-se de ordem clássica.

No quarto termo da equação (5.15) vamos tomar um número inteiro  $m \geq 0$  de modo que  $2mav < 1$  e  $2(m+1)av \geq 1$ . Dessa forma a somatória na equação (5.15) pode ser escrita como

$$\frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} = \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^m \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} + \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=m+1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2}. \quad (5.16)$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie é decrescente em relação ao seu argumento [3, 9], então, quando o seu argumento é grande o bastante,  $K_2$  é muito pequeno, logo no segundo termo da equação (5.16), podemos considerar apenas o primeiro termo da série, dessa forma

$$\frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=m+1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} \approx \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \frac{K_2[(2m+1)av]}{[(m+1)av]^2}. \quad (5.17)$$

Como  $2(m+1)av \geq 1$ , temos

$$\frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \frac{K_2[(2m+1)av]}{[(m+1)av]^2} \approx \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \frac{K_2[1]}{[\frac{1}{2}]^2} \approx \frac{\hbar v^4}{2\pi^2} K_2(1), \quad (5.18)$$

que é de ordem  $\hbar$ , logo desprezamos esse termo, pois estamos considerando apenas os termos que podem tornar-se de ordem clássica.

Podemos reescrever a equação (5.16) como

$$\frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} \approx \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^m \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2}. \quad (5.19)$$

Na equação acima o argumento da função de Bessel modificada de ordem dois ( $K_2$ ) é menor que um, então podemos usar a seguinte expansão [3, 9]

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} K_{\nu}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\nu-1} (-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \frac{\Gamma(\nu-l)}{\Gamma(l+1)} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(\nu+l+1)} \left[ \psi(l+1) + \psi(\nu+l+1) - 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

válida para  $\nu > 0$ , para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{\hbar v^4}{8\pi^2} \sum_{N=1}^m \frac{K_2(2Nav)}{(Nav)^2} &= \frac{\hbar}{16\pi^2 a^4} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^4} - \frac{\hbar v^2}{16\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} + \\ &+ \frac{\hbar v^4}{16\pi^2} \sum_{N=1}^m \left[ \psi(1) + \psi(3) - 2 \ln\left(\frac{Nav}{2}\right) \right] + \mathcal{O}(\hbar a^2 v^6). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Desprezando o terceiro termo do lado direito da equação acima, que é necessariamente de  $\mathcal{O}(\hbar)$ , o potencial efetivo fica dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re e \left\{ V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar v^3}{24\pi a} - \frac{\hbar}{16\pi^2 a^4} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^4} + \frac{\hbar v^2}{16\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} + \mathcal{O}(\hbar a^2 v^6) \right\} \right]_M. \quad (5.22)$$

Se  $av$  for pequeno o bastante (então,  $m$  é grande) para que as somatórias possam ser trocadas por funções zeta de Riemann com boa aproximação, então,

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re e \left\{ V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar \pi^2 v^4}{1440} (av)^{-4} + \frac{\hbar v^4}{96} (av)^{-2} - \frac{\hbar v^4}{24\pi} (av)^{-1} + \hbar v^4 \mathcal{O}(av)^2 \right\} \right]_M. \quad (5.23)$$

Uma vez que  $av \ll 1$  os dois últimos termos são desprezíveis em relação aos demais, portanto,

$$V_{ef}(\phi_c) = \left[ \Re e \left\{ V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar \pi^2}{1440 a^4} + \frac{\hbar v^2}{96 a^2} \right\} \right]_M. \quad (5.24)$$

Para realizarmos a construção de Maxwell devemos determinar os mínimos da parte real e uni-los através de uma reta. Assim, derivando a função

$$V_{ef}(\phi_c) = -\frac{1}{2} M^2 \phi_c^2 + \frac{2\beta^2 \phi_c^4}{4!} - \frac{\hbar \pi^2}{1440 a^4} + \frac{\hbar}{96 a^2} (\beta^2 \phi_c^2 - M^2), \quad (5.25)$$

e igualando a zero obtemos a equação

$$\phi_c \left( -M^2 + \frac{\beta^2 \phi_c^2}{3} + \frac{\hbar \beta^2}{48 a^2} \right) = 0, \quad (5.26)$$

a qual admite as soluções

$$\phi_c = 0$$

(solução trivial) e

$$\phi_c = \pm \sqrt{\frac{3M^2}{\beta^2} - \frac{\hbar}{16a^2}} = \pm \phi_0. \quad (5.27)$$

Para a derivada segunda de  $V_{ef}(\phi_c)$  temos que

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=0} = -M^2 + \frac{\hbar \beta^2}{48 a^2} \quad (5.28)$$

e

$$\left. \frac{d^2 V_{ef}}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c = \pm \phi_0} = 2 \left( M^2 - \frac{\hbar \beta^2}{48a^2} \right). \quad (5.29)$$

As equações (5.28) e (5.29) mostram que, a princípio, os pontos  $\pm \phi_0$  são mínimos de  $V_{ef}(\phi_c)$  e que o potencial efetivo fica dado por (veja figura-4.9)

$$V_{ef}(\phi_c) = \begin{cases} -\frac{1}{2}M^2\phi_c^2 + \frac{2\beta^2\phi_c^4}{4!} + \frac{\hbar(\beta^2\phi_c^2 - M^2)}{96a^2} - \frac{\hbar\pi^2}{1440a^4}, & |\phi_c| \geq \phi_0 \\ -\frac{3M^4}{4\beta^2} + \hbar \left( \frac{M^2}{32a^2} - \frac{\pi^2}{1440a^4} \right), & |\phi_c| \leq \phi_0. \end{cases} \quad (5.30)$$

O resultado acima mostra que o vácuo é degenerado e que, portanto, a princípio a quebra espontânea de simetria se mantém.

### 5.3 Análise das ordens

Lembrando que

$$V_{cl}(\phi_c) = -\frac{1}{2}M^2\phi_c^2 + \frac{2\beta^2\phi_c^4}{4!},$$

vamos tomar  $\phi_c$  como sendo de ordem  $\frac{M}{\beta}$  ( $\phi_c \sim \frac{M}{\beta}$ ) e dessa forma

$$V_{cl}(\phi_c) \sim \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\beta^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\beta^2}\right). \quad (5.31)$$

Para o potencial efetivo sem condições de contorno dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = -\frac{1}{2}M^2\phi_c^2 + \frac{2\beta^2\phi_c^4}{4!} + \frac{\hbar v^4}{64\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} \right] \quad (5.32)$$

temos que

$$V_{ef}(\phi_c) \sim \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\beta^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\beta^2}\right) + \mathcal{O}(\hbar M^4). \quad (5.33)$$

Vemos da equação acima que os dois primeiros termos são de ordem clássica  $\mathcal{O}(\hbar^0)$  (termos do potencial clássico), enquanto o último termo é de ordem  $\hbar$ . Assim, con-

cluimos que sem condições de contorno, não há como modificarmos os termos vindo de correções radiativas de modo que possam se tornar de ordem clássica <sup>1</sup>.

Para o potencial efetivo com condições de contorno dado pela equação (5.30) fazemos a mesma análise e obtemos

$$V_{ef}(\phi_c) \sim \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{\beta^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar M^2}{a^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\hbar}{a^4}\right). \quad (5.34)$$

Nesse caso temos que os últimos dois termos, vindo das correções quânticas, têm a presença do parâmetro  $a$ , devido às condições de contorno. Então, notamos que dependendo da ordem de grandeza desse parâmetro, esses termos podem vir a se tornarem de ordem clássica,  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ .

## 5.4 Restauração da simetria

Do exposto na seção anterior, vamos considerar que a distância entre as superfícies planas seja reduzida até que  $a^2$  se torne de  $\mathcal{O}(\frac{\hbar\beta^2}{M^2})$ . Desta forma, o segundo termo na raiz quadrada da equação (5.27), que antes era desprezível com relação ao primeiro termo, torna-se significativo, assim, a redução do comprimento de compactificação  $a$  aproxima os dois mínimos  $\pm\phi_0$ , encurtando o segmento de reta que une os dois mínimos do potencial efetivo. Quando o comprimento de compactificação atinge o valor crítico, dado por

$$a_c = \sqrt{\frac{\hbar\beta^2}{48M^2}}, \quad (5.35)$$

os dois mínimos se encontram em  $\phi_0 = 0$ . Portanto, quando o comprimento de compactificação atinge o valor crítico  $a_c$  existirá um único mínimo que ocorre em  $\phi_0 = 0$  e não ocorrerá mais quebra espontânea de simetria. Se o comprimento de compactificação continuar a ser reduzido,  $\phi_0$  se tornará imaginário e a equação (5.26) não admitirá outra solução que a trivial e o vácuo é não degenerado.

---

<sup>1</sup>considerando  $M$  de  $\mathcal{O}(\hbar^0)$

É fácil notar que quando o comprimento de compactificação  $a$ , atinge um valor igual ou menor que o valor crítico  $a_c$ , o coeficiente do termo  $\phi_c^2$  no potencial efetivo da equação (5.30) torna-se nulo ou maior que zero e, portanto, a massa das partículas associadas a excitações do campo  $\phi$  torna-se nula para  $a = a_c$  ou

$$M_R = \sqrt{\frac{\hbar\beta^2}{48a^2} - M^2}, \quad (5.36)$$

para  $a < a_c$ .

Assim, podemos concluir que quando o comprimento de compactificação é reduzido até atingir o valor crítico dado pela equação (5.35), isto é, quando as superfícies são aproximadas até a distância entre elas atingir o valor crítico, a simetria da teoria é restaurada.

# Capítulo 6

## Conclusões

## 6.1 Conclusões

A idéia fundamental discutida nesse trabalho é que condições de contorno podem restaurar a simetria de uma teoria com quebra espontânea de simetria. Por simplicidade analisamos a teoria de um campo escalar real satisfazendo condições de contorno de Neumann homogêneas sobre dois planos infinitos e paralelos separados por uma pequena distância  $a$  e cujo potencial clássico original apresenta quebra espontânea de simetria de reflexão na origem. As correções radiativas foram obtidas através do cálculo do potencial efetivo. Primeiramente, esse potencial foi expresso como uma expansão em ordem  $\hbar$ . Por causa da não convexidade do potencial clássico, essa expansão não corresponde necessariamente ao verdadeiro potencial efetivo, mas esse pode ser obtido da expansão, substituindo a parte não convexa desta por uma função constante, a chamada construção de Maxwell.

Numa aproximação onde o parâmetro de compactificação  $a$  é pequeno, as correções radiativas modificam o termo de massa. Se  $a^2$  for da ordem da constante de acoplamento (em unidades tais que  $\hbar = 1$ ), ocorre alteração significativa no termo clássico. Em especial, verifica-se a existência de um valor crítico  $a_c^2 = \frac{\hbar\beta^2}{48M^2}$ , tal que:

i) quando  $a > a_c$ , os mínimos degenerados se aproximam um do outro. Nesse caso ainda se mantém a quebra espontânea de simetria;

ii) quando  $a \leq a_c$ , os mínimos se tornam coincidentes, e o vácuo deixa de ser degenerado. A simetria é portanto restaurada.

Nossos resultados mostram que as condições de contornos desempenham um papel significativo na determinação da quebra espontânea de simetria da teoria. Uma questão interessante e que sugere possíveis trabalhos futuros é como ficam os resultados com o uso de outras condições de contorno, como também a utilização de outros tipos de campo. Um outro aspecto interessante a se estudar é quando as condições de contorno não permitem soluções de campos constante, assim podendo ocorrer mínimos dependentes das coordenadas espaciais, o que conduziria a uma quebra espontânea de simetria de Lorentz [48, 52]. Nesse caso o método do potencial efetivo para a determinação do mínimo não é apropriado, tendo-se, portanto, que buscar outros métodos

alternativos.

# Capítulo 7

## Apêndices

## 7.1 Apêndice A

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}.$$

A função  $\Gamma(s)$  é definida por [3, 28]

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \Re(s) > 0. \quad (7.1)$$

De início, convém obter (fazendo  $y = (K^2 + A^2)x$ )

$$(K^2 + A^2)^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} y^{s-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (7.2)$$

Dividindo ambos os membros por  $\Gamma(s)$ , (7.2) se torna

$$(K^2 + A^2)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (7.3)$$

Agora, com a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p^2) d^m p = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^{\infty} p^{N-1} f(p^2) dp, \quad (7.4)$$

obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} K^{m-1} (K^2 + A^2)^{-s} dK. \quad (7.5)$$

Com o uso de (7.3) no segundo membro de (7.5) obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xA^2} dx \int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK. \quad (7.6)$$

A integral em  $K$  pode ser reescrita usando a mudança de variável  $z = xK^2$ , obtendo-se

$$\int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{m-2}{2}} e^{-z} dz, \quad (7.7)$$

ou seja,

$$\int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dk = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \quad (7.8)$$

Resolvida a integral em  $K$ , (7.6) torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-\frac{m}{2}-1} e^{-xA^2} dx. \quad (7.9)$$

Usando  $s' = s - \frac{m}{2}$  e  $K = 0$  na integral em (7.3), a expressão para (7.9) é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (7.10)$$

e está demonstrado o resultado.

## 7.2 Apêndice B

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} = -\frac{1}{2}B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[ \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right].$$

Reportando-se ao resultado (7.3), o somatório acima é dado por

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t(N^2+A^2)} dt. \quad (7.11)$$

Permutando a integral com o somatório, obtém-se

$$\sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-tA^2} \left( \sum_{N=1}^{\infty} e^{-tN^2} \right). \quad (7.12)$$

O somatório no segundo membro acima é dado, de acordo com a fórmula de Poisson, por

$$\sum_{N=1}^{\infty} e^{-tN^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}. \quad (7.13)$$

Substituindo (7.13) em (7.12) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} &= -\frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-tA^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Frente à definição da função gama (7.1), a equação (7.14) se torna

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} [N^2 + B^2]^{-p} &= -\frac{(A^2)^{-p}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(p)} (A^2)^{\frac{1}{2}-p} + \\ &\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

onde no último termo novamente foram permutados o somatório e a integral. Fazendo uso da expressão [1, 3]

$$\int_0^\infty dt t^{\nu-1} e^{-\left(\frac{a}{t}+bt\right)} = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(2\sqrt{ab}), \quad a, b > 0, \quad (7.16)$$

onde  $K_\nu$  é a função de Bessel modificada de ordem  $\nu$ , a equação (7.15) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^\infty [N^2 + B^2]^{-p} &= -\frac{(A^2)^{-p}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(p)} (A^2)^{\frac{1}{2}-p} + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \sum_{N=1}^\infty 2 \left(\frac{\pi N}{A}\right)^{p-\frac{1}{2}} K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi a N), \end{aligned} \quad (7.17)$$

ou, reescrevendo,

$$\sum_{N=1}^\infty [N^2 + B^2]^{-p} = -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[ \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{N=1}^\infty \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right]. \quad (7.18)$$

### 7.3 Apêndice C

A *transformada de Legendre* é uma regra em que dada uma função  $f(x)$  produz uma outra  $g(p)$ . Assim, dada a função  $f(x)$ , deseja-se determinar uma nova função  $g(p)$ . Para se determinar  $g(p)$ , deve-se encontrar os valores de  $g(p')$  para todo  $p'$ . Então, a pergunta é: dado  $p'$  como determinar  $g(p')$ ?

Define-se a função  $G$  de  $x$  e  $p$ , tal que,

$$G(x, p) = xp - f(x). \quad (7.19)$$

Note que para um determinado  $p'$  existem infinitos  $x$  que fornecerão diferentes  $G(x, p')$ .

Para associar a cada  $p'$  um único  $G(x', p') = g(p')$  define-se  $x'$ , tal que,

$$g(p') = G(x', p') = \text{MAX}_x [G(x, p')] = \text{max}_x [xp' - f(x)]. \quad (7.20)$$

Geometricamente  $g(p')$  é dada pela máxima distância entre a reta  $xp'$  (com coeficiente angular  $p'$  e a curva  $f(x)$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Note que a reta  $xp'$  é paralela à reta tangente à curva  $f(x)$  no ponto  $x'$ .

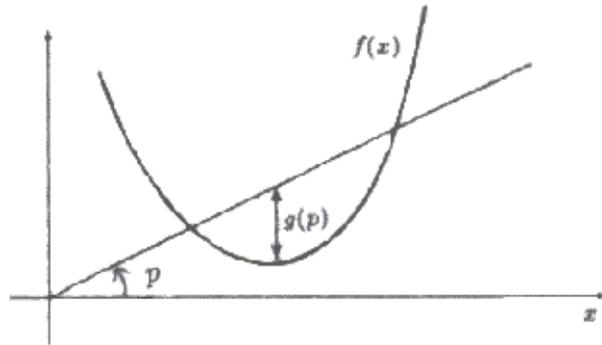


Figura 7.1: A transformada de Legendre é a máxima separação entre a reta com inclinação  $p$  e a função  $f(x)$ .

Se  $f(x)$  for uma função convexa e diferenciável, existe um máximo simples, e  $x'$  é tal que

$$\left. \frac{\partial G(x, p')}{\partial x} \right|_{x'} = 0, \quad (7.21)$$

então,

$$p' = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x'}. \quad (7.22)$$

A equação (7.22) associa a cada  $p$  um  $x$ , o que define  $x = x(p)$ . Nesse caso

$$g(p) = px(p) - f(x(p)), \quad (7.23)$$

e a transformada de Legendre é uma função contínua e diferenciável.

## Referências bibliográficas

# Referências Bibliográficas

- [1] Actor, A.; Fortschr. Phys. **35**(12), 793 (1987).
- [2] Aitchison, I. J. R.; Contemp. Phys. 26(4), 333-391 (1985).
- [3] Arfken, G. B and Weber, H. J.; *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 1995), 4th Ed..
- [4] Ashok Das; *FIELD THEORY a path integral approach* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993).
- [5] Belvedere, L. V.; *Teoria Quântica de Campos I*, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, Notas de aula (1997).
- [6] Bordarg, M., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M.; Phys. Rept. 353:1-205 (2001), quant-ph/0106045.
- [7] Boyer, T. H.; Phys. Rev. **174**, 1764 (1968).
- [8] Brown, L. S.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [9] Butkov, E.; *Física Matemática* (Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1978).
- [10] Cahill, K.; Phys. Rev. **D52**(8), 4704 (1995).
- [11] Casimir, H. G. B.; Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948).

- [12] Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. and Weisskopf, V. F.; Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [13] Cougo-Pinto, M. V., Farina, C. e Tort, A. C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **22**(1), 122 (2000).
- [14] Curtright, T. L and Thorn, C. B.; J. Math. Phys. **25**(3), 541 (1984).
- [15] Denardo, G. and Spallucci, E.; Nucl. Phys. **B 169**, 514 (1980).
- [16] Elizalde, E., Odentsov, S. D., Romeo, A., Bytsenko, A. A., Zerbini, S.; *Zeta regularization techniques with applications*. Serapone, World Scientific (1994).
- [17] Feynman, R. P. and Hibbs, A. R.; *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [18] Frampton, P. H.; *Gauge Field Theories* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, Menlo Park, California, 1987).
- [19] Greiner, W. and Reinhardt, J.; *Field Quantization* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [20] Hawking, S. W.; Commun. math. Phys., **55**, 133 (1977).
- [21] Haymaker, R. W. and Perez-Mercader, J.; Rev. **D27**(8), 4704 (1983).
- [22] Huang, K.; *Quarks Leptons & Gauge Fields* (Word Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).
- [23] Iliopoulos, J., Itzykson, C. and Martin, A.; Rev. Mod. Phys., **47**, 165 (1975).
- [24] Jackiw, R.; Phys. Rev., **D 9**(6), 1686 (1974).
- [25] Kaku, M.; *QUANTUM FIELD THEORY A Modern introduction* (Oxford University Press, New York, 1993).
- [26] Lamoureux, S. K.; Phys. Rev. Lett. **28**, 5 (1997).

- [27] Lee, S. Y and Sciacaluga, A. M.; Nucl. Phys. **B96**, 435 (1975).
- [28] Magnus, W., Oberhettinger, F. and Triconi, F. G.; edited by A. Erleyi, *Higher Transcendental Functions, (H. Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology)* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953) Vol. II, p. 9 and 23.
- [29] Milton, K. A.; J. Phys. **A37**, R209 (2004), hep-th/0406024.
- [30] Milton, K. A.; Phys. Rev. **D22**, 1441 (1980); Phys. Rev. **D27**, 439 (1983); Ann. Phys. **150**, 432 (1983).
- [31] Mohideen, U. and Roy, A.; Phys. Rev. Lett. **81**, 21 (1998).
- [32] Mostepanenko, V. M. and Trunov, N. N.; *The Casimir effect and its applications. Oxford, UK. Claredon, 1997.*
- [33] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T.; *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).
- [34] Nogueira, J. A. e Maia Jr., A.; Rev. Bras. Ens. Fís. **24**(3), 306 (2002).
- [35] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B 358**, 56 (1995).
- [36] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B 394**, 371 (1997).
- [37] Nogueira, J. A. and Barbieri, P. L.; Braz. J. Phys. **32**(3), 798 (2002).
- [38] Nussenzveig, M.; *Integrais de Trajetória*, curso ministrado na I Escola de Verão de Partículas e Campos.
- [39] Ohnishi, K. and Sakamoto, M.; Phys. Lett. **B 486**, 179 (2000).
- [40] Passos Sobrinho, J. J. e Tort, A. C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **23**(4), 401 (2001).
- [41] Plunien, G., Müller, B. and Greiner, W.; Phys. Rept. 134: 89-193 (1986).
- [42] Possa, D., Pereira, F. e Nogueira, J. A.; aceito para publicação na Res. Bras. Ens. Fís. (2005).

- [43] Possa, D.; *Condições de Contorno Periódicas Como Restauradoras da Simetria, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2004).*
- [44] Ramond, P.; *FIELD THEORY A Modern Primer (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).*
- [45] Rebbi, C.; *Scient. Am., Feb (1983).*
- [46] Rivers, R. J.; *Path Integral Methods in Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).*
- [47] Ryder, L. H.; *Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).*
- [48] Sakamoto, M., Tachibana, M. and Takenaga, K.; *Phys. Lett. B* **457**, 33 (1999).
- [49] Salam, A and J.Strathdee; *Nucl. Phys.* **B90**, 203 (1975).
- [50] Sparnaay, M. J.; *Physica* 24, 751 (1958).
- [51] Thomaz, M. T.; *Integrais de Trajetória, Centro Brasileiro de Pesquisas físicas (CBPF), Notas de aula, Rio de Janeiro, julho de 1997.*
- [52] Toms, D. J.; *J. Phys.* **A**(36), 5121 (2003).
- [53] Weinberg, E. J. and Wu, A.; *Phys. Rev.* **D36**(8), 2474 (1987).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)