

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

**Estudo das soluções de vácuo para campos
escalares submetidos a condições de contorno**

VITÓRIA
2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

ESTUDO DAS SOLUÇÕES DE VÁCUO PARA CAMPOS
ESCALARES SUBMETIDOS A CONDIÇÕES DE CONTORNO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira.

VITÓRIA
2007

FERNANDO JOSÉ LIRA LEAL

**ESTUDO DAS SOLUÇÕES DE VÁCUO PARA CAMPOS
ESCALARES SUBMETIDOS A CONDIÇÕES DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 29 de Março de 2007

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. José Abdalla Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior
Universidade Federal do Espírito Santo

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus por ter me permitido chegar até aqui, por ser o meu refúgio e fortaleza e pelo socorro bem presente nas horas difíceis. À minha querida esposa, Érika A. S. Leal, pelo amor, dedicação, apoio, paciência e confiança. Aos meus pais, José Leal Sobrinho e Maria Lira Leal (*in memoria*), por tudo, principalmente pela formação do meu caráter, algo que certamente me faz ser quem sou e que, inclusive, me ajudou a trilhar este caminho. Ao meu orientador, José Alexandre Nogueira, pelo apoio, paciência e por ter contribuído na minha formação desde os tempos de graduação. Aos meus familiares e colegas por terem acompanhado a minha trajetória. Aos membros da banca, que gentilmente aceitaram ler o meu trabalho e sabiamente sugeriram formas de torná-lo ainda mais claro. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

Resumo

Condições de contorno introduzem parâmetros à teoria e dependendo da ordem de grandeza destes, correções radiativas podem se tornar de ordem clássica e modificar a teoria original. Neste trabalho, estudamos as soluções de vácuo para campos escalares submetidos a condições de contorno. A teoria escolhida para os cálculos está sujeita a uma auto-interação do tipo ϕ^4 e apresenta a *tree level* quebra espontânea de simetria. Numa abordagem puramente clássica, a solução $\phi_0 = 0$ é instável para as condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas. A fim de obter a estabilidade desta solução, fizemos correções radiativas a estas teorias e constatamos que é possível obter a estabilidade da solução de campo nulo quando as correções radiativas tornam-se de ordem clássica. Estas correções foram feitas por meio de métodos funcionais da teoria de campos, onde partimos do funcional gerador das funções de Green e obtemos a energia do sistema. A partir, então, desta energia iniciamos o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$.

Abstract

Boundary conditions introduce parameters to the theory and depending on the order on these, radioactive corrections may become of classic order and to modify the original theory. In this work, we study the vacuum solutions for scalar fields constraints to boundary conditions. The theory chosen for the calculations is subject the a self-interaction of the type ϕ^4 and it presents the tree level spontaneous break of symmetry. In an approach purely classic the stability of the solution $\phi_0 = 0$ it is not guaranteed for the periodic and homogeneous Neumann boundary conditions. With the purpose of to obtain the stability of that solution we calculate radioactive corrections of the theories and we note that the stability of the null field solution is, in fact, guaranteed under certain condition that does with that the radioactive corrections if they become of classic order. These corrections were made through functional methods of the fields theory, where we left of the functional generator of the Green functions and we obtain the energy of the system. After, then, of this energy we began the study of the stability of the solution $\phi_0 = 0$.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Introdução	9
2	Efeito Casimir	13
2.1	Introdução	14
2.2	Energia de Casimir	14
2.2.1	Energia de Casimir e a soma das energias de ponto zero (ZPE)	15
2.2.2	Energia de Casimir como soma das ZPE para o campo escalar real livre em 3+1 dimensões	17
2.2.3	Cálculo da energia de Casimir para o campo escalar real livre não massivo em 3+1 dimensões via soma das ZPE	21
2.2.4	Cálculo da energia de Casimir para o campo escalar real livre não massivo em 3+1 dimensões via potencial efetivo	28
2.3	Efeito Casimir: Considerações finais	32
3	Estudo a nível clássico da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$	34
3.1	Introdução	35
3.2	Mecanismo para estudar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$	36
3.2.1	Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas	39
3.2.2	Soluções ϕ_0 não uniformes para o campo satisfazendo às condições de contorno de Dirichlet homogêneas	41
3.2.3	Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno antiperiódicas	47

3.2.4	Soluções ϕ_0 não uniformes para o campo satisfazendo às condições de contorno antiperiódicas	48
3.2.5	Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas	52
3.2.6	Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas	53
3.3	Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$: Considerações finais	54
4	Correções radiativas para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas	56
4.1	Introdução	57
4.2	Mecanismo para estudar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$	57
4.2.1	Correção radiativa para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas	61
4.2.2	Correção radiativa para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas	66
4.3	Correções radiativas: Considerações finais	69
5	Conclusões	70
5.1	Conclusões	71
6	Apêndices	72
6.1	Apêndice A	73
6.2	Apêndice B	75
6.3	Apêndice C	77
	Referências bibliográficas	79

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

A teoria quântica de campos nasceu da tentativa de descrever o eletromagnetismo sob o ponto de vista da mecânica quântica e da relatividade restrita. Esta teoria recebeu o nome de eletrodinâmica quântica e devido ao seu notável sucesso, a mesma motivou a extensão de formulações de teorias de campos para outros tipos de interações existentes na natureza, com exceção, por enquanto, da gravitação. Enquanto a física dos sistemas clássicos repousa sobre dois pilares de propriedades distintas (partículas e ondas), a quantização desses sistemas nos conduz a uma junção destas propriedades e, a partir daí, o caráter ondulatório ou corpuscular passam a ser faces da mesma moeda. Quando lidamos com sistemas clássicos com um número infinito de graus de liberdade, ou seja, com uma teoria clássica de campos, a quantização da mesma faz surgir as partículas da teoria. Este processo chamado de segunda quantização nos mostra que podemos obter as partículas da teoria através da quantização dos campos, daí o nome teoria quântica de campos. Desta forma, podemos supor que as entidades fundamentais da natureza são os campos e não as partículas. Ao exigirmos que as interações da teoria ocorram num ponto, ou seja, que a teoria seja local, a mesma será imediatamente compatível com a relatividade restrita. As teorias quânticas de campos das interações fundamentais são teorias locais. Estas teorias são formuladas em termos de produtos de operadores de campos, e quando estes são calculados no mesmo ponto do espaço-tempo, nos dão resultados divergentes, portanto, sem sentido físico. Embora estas divergências possam ser quase sempre contornadas de maneira matematicamente satisfatória pela teoria da renormalização, acreditamos que essa má definição dos resultados previstos se deva ao nosso desconhecimento atual do comportamento da física a pequenas distâncias. Contudo, mesmo sem este conhecimento preferimos utilizar teorias locais pelo fato destas serem substancialmente mais simples que as teorias de campos não-locais e, acima de tudo, por nos fornecer resultados que concordam consideravelmente com os dados experimentais. As teorias de campos não-locais também têm seu valor. Por exemplo, a grande candidata a unificar as quatro interações fundamentais é uma teoria de campo não-local chamada de teoria de cordas. Não existe uma única teoria de cordas e como se não bastasse estas teorias são definidas num espaço de mais de dez dimensões. Com o uso da supersimetria, essas teorias podem ser formuladas consistentemente num espaço de dez dimensões, sendo que as dimensões extras devem ser compactificadas no processo de redução para quatro dimensões. Esta idéia de compactificação foi recuperada das antigas idéias propostas por Oscar Klein na década de 20 do século passado, baseado nos trabalhos de Theodor Kaluza, quando o mesmo tentava unificar a gravitação ao eletromagnetismo. Toda complexidade da

teoria de cordas deve-se a maneira com que esta teoria se propôs a enxergar o Universo. As entidades fundamentais da natureza, partículas constituintes da matéria e das interações, não são tratadas como objetos pontuais e sim como pequenas cordas vibrando no espaço-tempo. Existe uma teoria que busca unificar as teorias de cordas, a chamada teoria M. Entretanto, esta, como também cada teoria de cordas individualmente, ainda apresenta graves problemas e a tão sonhada unificação das leis da física talvez esteja longe de ser alcançada.

Historicamente foi na eletrodinâmica quântica que o problema das divergências apareceu pela primeira vez e, também, foi no contexto da mesma que surgiu a renormalização [7]. Esta teoria ocupa um papel de extrema importância na teoria quântica de campos como também no estudo do Efeito Casimir [14, 32]. O primeiro tipo de divergência detectada e estudada foi a chamada “catástrofe ultravioleta”. Esta surge ao se calcular os efeitos da auto-energia do elétron e da polarização do vácuo. No que se refere à auto-energia do elétron, esta resulta do fato de que existe uma contínua emissão e reabsorção de fótons virtuais por qualquer carga elétrica. Assim, o elétron tem que interagir com uma “nuvem” de fótons virtuais produzidos por ele mesmo, ou, em outras palavras, interage com o seu próprio campo. Agora no que diz respeito à polarização do vácuo, isto pode ser entendido como consequência da criação de pares de elétron-pósitron virtuais, que por sua vez são criados pelo campo eletrostático dos elétrons. Os pósitrons são atraídos pela carga negativa original, enquanto os elétrons virtuais são repelidos pela mesma. Devido a isto, os elétron-pósitron virtuais blindam parte da carga negativa original fazendo com que o vácuo se comporte como um meio dielétrico. Estes efeitos nos levam a resultados que divergem quando consideramos as contribuições advindas de partículas com momentos arbitrariamente altos. Daí o nome “catástrofe ultravioleta”. A maneira encontrada para tentar superar esta dificuldade foi chamada de renormalização. Por exemplo, se quisermos calcular a carga do elétron encontraremos um resultado divergente dado pela teoria. Entretanto isto não deve constituir um problema, pois a carga elétrica não pode ser detectada diretamente, uma vez que a mesma é blindada por pares de elétron-pósitron virtuais. Quanto mais de perto observamos o elétron notamos um aumento cada vez maior da sua carga elétrica, ou, equivalentemente, um acoplamento mais intenso, pois estaremos mais próximos da carga “nua”. Por isto devemos observar a carga elétrica de uma certa distância para podermos medir sua carga efetiva, o que em outras palavras significa medir a constante de acoplamento efetiva, $\alpha = e^2/4\pi \cong 1/137$. O conceito moderno de renormalização, quando empregado neste exemplo, baseia-se na idéia de que a carga efetiva do elétron deve ser entendida como formada por dois componentes, a saber, uma carga “nua” (sem

a presença de fótons virtuais), que por hipótese é concebida como infinita, e uma “auto-carga” (resultante dos fótons virtuais), que pode ser calculada na teoria, nos fornecendo um valor infinito. O que espera-se é que uma quantidade infinita “cancele” a outra, num certo sentido preciso, resultando num valor finito que coincida com o valor observado experimentalmente. Desta forma, a renormalização é vista como um processo de eliminar os infinitos¹ absorvendo-os dentro de uma redefinição dos parâmetros físicos. Neste trabalho empregaremos a técnica de renormalização utilizando a função zeta generalizada para regularizar grandezas divergentes.

Os resultados surpreendentes previstos acima se devem ao fato de que o vácuo quântico é completamente diferente do previsto pela física clássica, onde é caracterizado pela ausência total de qualquer entidade física. Ao contrário da física clássica, na teoria quântica de campos o vácuo não é a “ausência” de matéria nem de campos, mas sim algo repleto. O estado fundamental da teoria de campos é chamado de vácuo e as partículas são os estados excitados desses campos. Além disso, o vácuo quântico é caracterizado por pequenas e constantes oscilações que ocorrem em toda parte, estas oscilações são chamadas de flutuações de ponto zero. Estas ocorrem porque na quantização de uma teoria de campos, os campos são transformados em operadores que agem em um espaço de Hilbert de ocupação, ou, espaço de \mathcal{F} ock. E, ainda, o estado fundamental de energia, o vácuo, é um estado quântico bem definido, pois o valor médio do número de partículas neste estado é nulo. Também como consequência do princípio de incerteza, os operadores de campo não comutam com os operadores de números de partículas e, dessa forma, embora os valores médios dos operadores de campo e dos de números de partículas sejam nulos, o mesmo não acontece para os valores médios dos quadrados desses operadores, fazendo aparecer assim essas flutuações. Portanto, o vácuo quântico pode ser interpretado como sendo ocupado por partículas virtuais. Algo também digno de nota deve-se ao fato de que quando calculamos a energia do vácuo encontramos um resultado divergente. Entretanto isto não é um problema, pois somente diferenças de energias podem ser mensuradas. Desta forma, podemos redefinir a energia do vácuo como sendo nula. Contudo, se exigirmos que o campo satisfaça condições de contorno, esta situação muda drasticamente e o resultado nulo para a energia não poderá mais ser atingido. Uma forma de constatar esta propriedade intrigante recebe o nome de Efeito Casimir, que a propósito será discutido neste trabalho.

O objetivo deste trabalho é determinar soluções de vácuo para campos escalares submetidos a condições de contorno. Estudaremos sob quais circunstâncias as soluções

¹A renormalização não é necessariamente um processo voltado para a eliminação de infinitos.

de campo nulo podem se tornar estáveis. Uma vez que iremos utilizar uma teoria que apresenta a *tree level* quebra espontânea de simetria, a estabilidade da solução de campo nulo pode ser pensada como na restauração da simetria da teoria. As soluções de vácuo, para teorias que apresentam a *tree level* quebra espontânea de simetria, vem sendo determinadas por David J. Toms para campos escalares em cavidades [40], e por Makoto Sakamoto, Motoi Tachibana e Kazunori Takenaga para campos escalares sujeitos a condições de contorno antiperiódicas [37]. Ao estudarmos a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ para o campo submetido às condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas, veremos que esta solução é instável. Nossa principal contribuição consiste justamente em estudar uma possível estabilidade da solução de campo nulo quando correções radiativas são introduzidas. Mostraremos que para essas condições de contorno existem comprimentos de compactificação críticos, distintos, onde a solução de campo nulo se torna estável para comprimentos de compactificação menor que o crítico.

No segundo capítulo faremos uma discussão acerca do Efeito Casimir, onde calcularemos a energia de Casimir, ora usando a soma das energias de ponto zero (ZPE) e ora usando o método do potencial efetivo. No capítulo 3, determinaremos as soluções de vácuo em uma abordagem clássica para campos submetidos às condições de contorno de Dirichlet homogêneas, antiperiódicas, periódicas e de Neumann homogêneas. Mostraremos que na abordagem clássica não existe um comprimento de compactificação crítico que torne a solução de campo nulo estável para condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas. No capítulo 4 mostraremos que as correções radiativas induzem a existência de um parâmetro de compactificação crítico onde abaixo do qual a solução de campo nulo se torna estável. Por fim, terminaremos nosso estudo discutindo e comentando com mais detalhes os principais resultados obtidos.

Capítulo 2

Efeito Casimir

2.1 Introdução

A teoria quântica de campos, em particular a eletrodinâmica quântica, permite a existência de um fenômeno notável, o Efeito Casimir. Previsto teoricamente pelo físico holandês Hendrik B. G. Casimir (1909-2000) em 1948 [12] e verificado experimentalmente pela primeira vez em 1958 pelo também holandês Sparnaay [39], este efeito se refere à força de atração entre duas placas metálicas, perfeitamente condutoras, descarregadas e paralelas entre si. Uma vez que as placas estão eletricamente neutras e a contribuição gravitacional, por questões experimentais é desprezível, poder-se-ia esperar que nada fosse acontecer. Entretanto, não é isso o que ocorre. Neste capítulo, procuramos apenas introduzir alguns aspectos fundamentais deste fenômeno sem a intenção de fazer uma análise cuidadosa. Por isto, sempre que for possível indicaremos referências para uma análise mais profunda do mesmo. Iniciaremos a exposição do Efeito Casimir nos reportando para a teoria quântica de campos, onde explicitaremos as contribuições desta para a compreensão do fenômeno, bem como suas dificuldades envolvidas no que se refere ao cálculo da energia de Casimir. Nas seções seguintes veremos por que e como é possível calcular a energia de Casimir usando a soma das energias de ponto zero e o potencial efetivo. Iremos impor sobre os campos condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, ambas homogêneas. Imediatamente após fizermos o que foi proposto, encerraremos o capítulo citando alguns aspectos intrigantes do fenômeno, bem como possíveis aplicações do mesmo, tanto na física como também em outras áreas.

2.2 Energia de Casimir

Para compreendermos este fenômeno é necessário abandonar a visão clássica e atentarmos para a teoria quântica de campos, que prevê a ocorrência de flutuações do vácuo eletromagnético. Tais flutuações, por sua vez, conferem ao espaço todo uma densidade de energia não nula, que é constante, e não produz efeito mensurável. Entretanto, a presença de placas condutoras modifica esta situação. A introdução de placas faz com que o campo, na região entre elas, satisfaça condições de contorno tais que restringem as frequências do campo flutuante, alterando assim a densidade de energia entre as placas. Calculando a energia do vácuo encontramos porém um resultado divergente que não tem significado físico, pois o que é observado são as diferenças de energias. Por isto, a energia do vácuo deve ser formalmente definida como a diferença entre as energias com as condições de contorno e sem as condições de contorno, mediante um processo de renormalização. Esta diferença de energia é um observável físico e a

chamamos de *Energia de Casimir*, que é entendida como o trabalho necessário para se introduzir as placas no vácuo. No final da década de 1990 experimentos realizados independentemente por Lamoureux [21], Mohideen e Roy [24] confirmaram o Efeito Casimir com alto grau de precisão.

A energia de Casimir, ao que sugere acima, não ocorre somente para o campo eletromagnético, pois outros campos também podem flutuar. Poderíamos também impor outras condições de contorno para os campos. Ou até mesmo esquecer as condições de contorno e falar em topologias. No entanto, quando trabalhamos com topologias não faz sentido falar em força de Casimir, pois, neste caso, não existe uma fronteira material.

A energia de Casimir no caso do campo eletromagnético confinado entre duas placas perfeitamente condutoras, descarregadas, e paralelas entre si, onde a distância de separação entre as mesmas é a , é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{1440a^3}, \quad (2.1)$$

e a sua correspondente força de Casimir é

$$F_{Casimir} = -\frac{\pi^2\hbar}{240a^4}, \quad (2.2)$$

onde o sinal de menos indica que a força é atrativa.

2.2.1 Energia de Casimir e a soma das energias de ponto zero (ZPE)

Com o objetivo de uma primeira abordagem de estudo para compreendermos o fenômeno, é inicialmente interessante um modelo que comporte toda ou grande parte da física do sistema e que não seja demasiadamente complicado ao ponto de não ser possível resolvê-lo. Uma vez que o modelo do oscilador harmônico simples (O.H.S.) nos dá bons resultados quando usado para modelar inúmeros problemas físicos, veremos que em teoria quântica de campos isto não é diferente.

Quanticamente a energia do oscilador harmônico simples é dada por

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad (2.3)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Para o estado de mais baixa energia (o estado fundamental), $n = 0$, a energia é designada por E_0 , e tem valor $\frac{1}{2}\hbar\omega$ que é diferente de zero. Esta energia é chamada de energia de ponto zero e é consequência do princípio de incerteza de Heisenberg. Para um sistema com muitos graus de liberdade, no qual as partículas interagem entre si, teremos um conjunto de osciladores acoplados. Realizando uma transformação canônica para um sistema de coordenadas normais, o sistema se comportará como um conjunto de O.H.S. independentes (desacoplados) fictícios, cada um vibrando numa dada frequência normal ω_k . Cada um desses osciladores fictícios contribuem com $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ para a energia de ponto zero. Dessa forma, a energia do estado fundamental do sistema será dada pela soma das energias de ponto zero (ZPE),

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k. \quad (2.4)$$

Assim, para um sistema com infinitos graus de liberdade existirão infinitos desses osciladores desacoplados e o resultado determinado pela equação anterior é divergente. Sendo uma teoria de campo um sistema com infinitos graus de liberdade, podemos associar à mesma um sistema com um número infinito de osciladores harmônicos acoplados. Dessa forma, usando novamente a transformação canônica, uma teoria quântica de campos pode ser vista como um sistema de infinitos osciladores harmônicos desacoplados. Contudo, cada oscilador desacoplado, que anteriormente era fictício, passa agora a ter uma realidade física. As partículas são interpretadas como excitações dos campos, e a cada *gap* de energia, $\hbar\omega_k$, associamos uma partícula. Assim, em uma teoria quântica de campos a energia do estado fundamental, isto é, o vácuo, é dado pela soma das energias de ponto zero, da mesma maneira como na equação (2.4). Então, a princípio, a energia do vácuo em teoria quântica de campos é infinita. Quando limitamos a atuação dos campos, ou seja, confinamos o campo numa certa região do espaço, as oscilações do campo, inclusive as de ponto zero, devem satisfazer certas condições de contorno. Portanto, essas condições de contorno restringem, como já havíamos dito, as possíveis frequências de oscilação do campo, obrigando as mesmas a assumirem apenas certos valores específicos, sendo que, sua soma, também nos dá um resultado divergente. Como a manipulação de grandezas divergentes não é bem definida, devemos utilizar um processo de regularização para podermos efetuar a diferença entre as energias sem as condições de contorno e com as condições de contorno, obtendo assim a energia de Casimir. Utilizaremos a função zeta generalizada para regularizar grandezas divergentes. Enfim, pelo menos intuitivamente, parece ser possível usar a ZPE para o cálculo da energia de Casimir. Veremos logo mais à frente, de maneira quantitativa, que este raciocínio intuitivo de fato está correto.

2.2.2 Energia de Casimir como soma das ZPE para o campo escalar real livre em 3+1 dimensões

Para termos uma melhor compreensão de como as divergências de ponto zero surgem em teoria de campos, usaremos o campo escalar real livre em 3+1 dimensões para ilustrar este fato. Consideremos inicialmente a equação de Klein-Gordon (K-G) como sendo uma equação clássica relativística¹,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.5)$$

O campo real $\phi(x)$ é um invariante sob transformações de Lorentz não homogêneas, i.e., do grupo de Poincaré,

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu; \\ \phi(x) \rightarrow \phi(x') = \phi(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

Sendo um invariante de Lorentz, é, portanto, um campo escalar². Entretanto, o campo $\phi(x)$ pode transformar-se diferentemente sob uma inversão espacial,

$$\begin{cases} x^0 \rightarrow x'^0 = x^0; \\ \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Uma vez que o campo $\phi(x)$ pode se transformar como $\phi(-\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t)$ ou como $\phi(-\vec{x}, t) = -\phi(\vec{x}, t)$, sua quantização descreverá partículas escalares ou pseudo-escalares, respectivamente. Notamos ainda que a equação de K-G exibe simetria Z_2 , i.e.,

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x') = -\phi(x). \quad (2.8)$$

Então devemos exigir da densidade de lagrangeana, que nos conduz à equação de K-G, tal simetria. Pode-se mostrar que a densidade de lagrangeana procurada é

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.9)$$

A densidade de hamiltoniana é obtida através de uma transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}. \quad (2.10)$$

¹De agora em diante usaremos unidades de medidas naturais, ou seja, $\hbar = c = 1$.

²As partículas que um campo escalar descreve são chamadas de bósons.

Assim,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2(x) + |\nabla\phi(x)|^2 + m^2\phi^2(x) \right]. \quad (2.11)$$

Substituindo $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ ao realizarmos uma integração por partes apenas no termo do gradiente, obtemos \mathcal{H} como uma forma quadrática em relação aos campos $\pi(x)$ e $\phi(x)$ dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\pi^2(x) + \phi(x) (-\nabla^2 + m^2) \phi(x) \right]. \quad (2.12)$$

Podemos obter uma solução arbitrária da equação de K-G através de uma expansão em série de Fourier de soluções de ondas planas elementares,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} N_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.13)$$

onde $N_{\vec{k}}$ é o fator de normalização e $A_{\vec{k}}(t)$ são os coeficientes da expansão. Substituindo a equação anterior na equação (2.5), teremos

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} N_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0. \quad (2.14)$$

Segue-se imediatamente que

$$\ddot{A}_{\vec{k}}(t) + \omega_{\vec{k}}^2 A_{\vec{k}}(t) = 0, \quad (2.15)$$

cujas soluções são

$$A_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + A_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}} t}, \quad (2.16)$$

onde $\omega_{\vec{k}}^2 = \vec{k}^2 + m^2$ é a relação de dispersão. Agora impondo a condição de realidade para o campo e escolhendo o fator de normalização de tal forma que o elemento de volume seja um invariante de Lorentz, teremos

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} \left[a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} + a^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}} t)} \right], \quad (2.17)$$

onde

$$a(\vec{k}) = \frac{A_{\vec{k}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}. \quad (2.18)$$

Usando o esquema da quantização canônica, faremos:

$$\begin{cases} a(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_{\vec{k}}; \\ a^*(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger. \end{cases} \quad (2.19)$$

A fim de quantizarmos a teoria, iremos impor relações de comutação³ a tempos iguais (ETCR)

$$\begin{cases} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'); \\ [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = 0; \\ [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Como consequência das substituições (2.19), teremos

$$\phi(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} \left[\hat{a}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega_{\vec{k}}t)} \right]. \quad (2.21)$$

Agora que o campo foi quantizado, podemos utilizar a equação (2.12) para escrever o operador hamiltoniano na forma

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\hat{\pi}^2(\vec{x}, t) + \hat{\phi}(\vec{x}, t) (-\nabla^2 + m^2) \hat{\phi}(\vec{x}, t) \right]. \quad (2.22)$$

Uma vez que a dinâmica dos operadores de campo é determinada pela equação de movimento de Heisenberg,

$$\begin{cases} [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{H}] = i\dot{\hat{\phi}}(\vec{x}, t); \\ [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{H}] = i\dot{\hat{\pi}}(\vec{x}, t); \end{cases} \quad (2.23)$$

e de posse das relações de comutação (2.20), teremos

$$\hat{H} = \int d^3\vec{k} \omega_{\vec{k}} (\hat{N}_{\vec{k}} + 1/2), \quad (2.24)$$

³Os campos bosônicos admitem somente quantização via relações de comutação e não de anti-comutação, como é o caso dos campos fermiônicos.

onde $\hat{N}_{\vec{k}}$ é o operador número de partículas definido como $\hat{N}_{\vec{k}} := \hat{a}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}$. Agora se os \vec{k} forem discretos, a equação (2.24) será dada por

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (\hat{N}_{\vec{k}} + 1/2), \quad (2.25)$$

Supondo que os \vec{k} sejam discretos, uma atuação do operador \hat{H} num estado arbitrário do espaço de \mathcal{F} ock nos fornece

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (N_{\vec{k}} + 1/2). \quad (2.26)$$

O resultado (2.26) mostra que o estado de nenhuma partícula, o vácuo, é divergente e que o sistema se comporta como um conjunto de O.H.S. independentes. Esta divergência ocorre por que o esquema da quantização canônica não fixa o ordenamento dos operadores de criação e aniquilação. Assim, para a teoria tornar-se bem definida usaremos uma prescrição de ordenação, ou seja, exigiremos um certo ordenamento no produto dos operadores, o qual é um processo de renormalização denominado ordenamento normal de Wick. Este ordenamento busca manter os operadores de aniquilação sempre à direita do operador de criação. Com isto, a hamiltoniana fica dada por

$$: \hat{H} : = \int d^3 \vec{k} \omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}} \quad (2.27)$$

ou

$$: \hat{H} : = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \hat{N}_{\vec{k}}, \quad (2.28)$$

se os k forem discretos.

Aplicando o operador renormalizado \hat{H} num estado arbitrário de \mathcal{F} ock e novamente supondo que os \vec{k} sejam discretos, teremos

$$E = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}, \quad (2.29)$$

onde identificamos H como a energia total do sistema, que é a soma das energias de todas as partículas individuais. Logo, a energia do vácuo será $E = 0$. Entretanto, como já dissemos, quando impomos condições de contorno sobre os campos, não podemos mais calcular a energia do vácuo simplesmente usando o ordenamento normal. Isto ocorre

porque existe um conjunto infinito de diferentes estados de vácuo e correspondentes operadores de criação e aniquilação para diferentes configurações (comprimentos do parâmetro de compactificação) das condições de contorno. Estes estados transformam-se uns nos outros sob mudanças adiabáticas dos parâmetros de compactificação. Por isto, é incorreto designar valores nulos de energia para vários estados entre os quais transições são possíveis. Neste caso, a energia será formalmente calculada da seguinte maneira

$$E = \lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0} \left\{ \left[\sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} \right]_{\text{com c. de c.}}^{\Lambda} - \left[\sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} \right]_{\text{sem c. de c.}}^{\Lambda} \right\}, \quad (2.30)$$

onde Λ é chamado de parâmetro regularizador e mantém ambos termos da subtração bem definidos quando $\Lambda \neq \Lambda_0$. Ou seja, podemos calcular a energia de Casimir através da soma (ZPE) mediante um processo de renormalização.

2.2.3 Cálculo da energia de Casimir para o campo escalar real livre não massivo em 3+1 dimensões via soma das ZPE

Com o intuito de apresentarmos um cálculo bem conhecido e ao mesmo tempo não demasiadamente complicado, calcularemos a energia de Casimir para o campo escalar real não massivo em 3+1 dimensões, ora submetido a condições de contorno de Dirichlet homogêneas, ora submetido a condições de contorno de Neumann homogêneas por meio da soma ZPE. Ou seja, exigiremos que ora o campo se anule, ora a sua derivada se anule, sobre a superfície de duas placas condutoras, neutras e paralelas, colocadas à distância a uma da outra.

Notando que a equação (2.5) pode ser escrita na forma

$$-\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + m^2 \phi = 0, \quad (2.31)$$

que quando $m = 0$, fica

$$-\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.32)$$

e supondo uma solução do tipo

$$\phi(\vec{x}, t) = \chi(\vec{x})\psi(t), \quad (2.33)$$

ficamos com

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\chi} \nabla^2 \chi. \quad (2.34)$$

Uma vez que esta equação deve ser satisfeita para todo \vec{r} e t , ambos os lados da equação (2.34) devem ser iguais a uma mesma constante, pois cada lado da mesma tem dependências diferentes. Então seja $-p^2$ essa constante, logo

$$\frac{\nabla^2 \chi}{\chi} = -p^2, \quad (2.35)$$

e

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} = -p^2, \quad (2.36)$$

A equação (2.36) tem como solução

$$\psi(t) = A_t \exp(ipt) + B_t \exp(-ipt). \quad (2.37)$$

Para garantirmos uma solução oscilatória, p deve ser real. Concluimos, então, que os valores de energia de ponto zero são

$$\omega = p. \quad (2.38)$$

Agora impondo as condições de contorno de Dirichlet homogêneas sob o campo da equação (2.33), teremos

$$\psi(t)\chi(\vec{r})|_{z=0} = \psi(t)\chi(\vec{r})|_{z=a} = 0. \quad (2.39)$$

Isto mostra que devemos nos preocupar apenas com a parte espacial. A equação (2.35) pode ser escrita como

$$\nabla^2 \chi + p^2 \chi = 0, \quad (2.40)$$

que é a conhecida equação de Helmholtz. Mais uma vez supondo uma solução do tipo

$$\chi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (2.41)$$

para a equação de Helmholtz , ficamos com

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -p^2. \quad (2.42)$$

E dessa maneira temos que

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -p_x^2 X, \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -p_y^2 Y, \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -p_z^2 Z, \quad (2.45)$$

onde $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Assim, as condições de contorno nos dão

$$X(x)Y(y)Z(z) |_{z=0,a} = 0. \quad (2.46)$$

Portanto,

$$Z(z) |_{z=0,a} = 0. \quad (2.47)$$

A solução da equação (2.45), com p_z real, é dada por

$$Z(z) = A \exp(ip_z z) + B \exp(-ip_z z). \quad (2.48)$$

Impondo a primeira condição de contorno, $Z(z) |_{z=0} = 0$, temos que $A = -B$, o que nos fornece

$$Z(z) = 2iA \operatorname{sen}(p_z z). \quad (2.49)$$

Agora, usando a segunda condição de contorno, $Z(z) |_{z=a} = 0$, obtemos

$$p_z = \frac{N\pi}{a}, \quad (2.50)$$

onde $N = 1, 2, 3, \dots$. Como podemos observar, as condições de contorno tornam a componente p_z do momento discreta, ou seja, $p_z \rightarrow p_N$. Uma vez que devemos tomar a soma, $E_0 = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k$, sobre todos os modos normais e como nas direções perpendiculares ao eixo que une as placas os \vec{p} são contínuos, a somatória, nesta região, deve ser substituída por uma integral. Levando em conta todas as considerações anteriores, a soma das energias de ponto zero para o campo ϕ , sujeito às condições de contorno de Dirichlet homogêneas, será dada por⁴

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(p^2 + \frac{N^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} L^2, \quad (2.51)$$

onde L^2 é a área das superfícies das placas (o qual tomaremos o limite $L \rightarrow \infty$). A quantidade acima, como pode ser notado, é divergente. A fim de manipularmos essa expressão, vamos empregar um método de regularização chamado de função zeta generalizada. A função zeta generalizada associada ao operador real, elíptico e auto-adjunto $M = \frac{H_0}{\mu^2}$, é definida a partir dos autovalores $\{\omega_i\}$ de H_0 através da relação

$$\zeta_{H_0} = \sum_i \left(\frac{\omega_i}{\mu^2} \right)^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.52)$$

onde o parâmetro de escala μ foi introduzido para mantermos a função zeta adimensional para todo s . A função zeta generalizada converge para $\Re(s) > \frac{3}{2}$ e pode ser continuada analiticamente para uma função meromorfa com pólos somente em $s = \frac{3}{2}$ e $s = \frac{1}{2}$ ⁵. Usando os auto-valores anteriormente determinados a função zeta definida pela equação (2.52), assumirá a forma

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{p^2 + \left(\frac{N\pi}{a} \right)^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2. \quad (2.53)$$

Assim, a soma das ZPE é dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar \mu}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.54)$$

A integral da equação (2.53) é realizada com o uso da relação (veja Apêndice A)

⁴Embora estejamos usando $\hbar = c = 1$, explicitaremos, convenientemente, \hbar para marcar correções quânticas.

⁵De fato, pode-se mostrar que a função zeta generalizada associada a um operador real, elíptico e auto-adjunto, A , converge para $\Re(s) > \frac{d}{p}$, onde d é a dimensão da variedade espaço-tempo e p é a ordem do operador A .

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + A^2)^{-s} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}, \quad \text{para } A^2 > 0, \quad (2.55)$$

obtendo-se

$$\zeta_{\text{H}_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{3-2s}. \quad (2.56)$$

Da definição da função Zeta de Riemann

$$\zeta_R(s) = \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{-s}, \quad \text{para } \Re(s) > 1, \quad (2.57)$$

temos

$$\zeta_{\text{H}_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \zeta_R(2s - 3). \quad (2.58)$$

Usando agora a propriedade de reflexão da função zeta de Riemann

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta_R(z) = \pi^{\frac{z-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta_R(1-z), \quad (2.59)$$

temos

$$\zeta_{\text{H}_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^{2s-1} a^{2s-3}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \zeta_R(4-2s). \quad (2.60)$$

A fórmula da reflexão nos deu a continuação analítica necessária para calcularmos $\zeta_{\text{H}_0} \left(-\frac{1}{2} \right)$,

$$\zeta_{\text{H}_0} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}} a^3 \mu} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \zeta_R(4). \quad (2.61)$$

Lembrando que

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(2) = 1$$

e

$$\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

obtemos

$$\zeta_{H_0} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{L^2 \pi^2}{720 a^3 \mu}. \quad (2.62)$$

Finalmente, usando o resultado da equação (2.62) na equação (2.54), temos

$$E_0^{cc} = -\frac{\hbar \pi^2 L^2}{1440 a^3}. \quad (2.63)$$

O que mostra que a continuação analítica da função zeta nos fornece a prescrição necessária para calcularmos a energia de Casimir sem a necessidade de subtração de pólos. Dessa forma, a energia de Casimir por unidade de área das superfícies é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar \pi^2}{1440 a^3}. \quad (2.64)$$

A força entre as superfícies por unidade de área (pressão de Casimir) pode ser calculada da seguinte forma

$$F_{Casimir} = -\frac{\partial E_{Casimir}}{\partial a}. \quad (2.65)$$

Então

$$F_{Casimir} = -\frac{\hbar \pi^2}{480 a^4}, \quad (2.66)$$

onde o sinal menos indica que a força entre as placas é atrativa. A força de Casimir original, calculada para o campo eletromagnético difere do valor encontrado acima, calculado para um campo escalar, de um fator 2 devido às duas polarizações do setor transversal do campo A_μ . Então, para encontrarmos a força de Casimir para o campo eletromagnético, basta multiplicarmos o resultado encontrado acima por 2. Assim, para duas placas planas, paralelas e perfeitamente condutoras colocadas no vácuo do campo eletromagnético, a força de Casimir é dada por

$$F_{Casimir} = -\frac{\hbar \pi^2}{240 a^4}. \quad (2.67)$$

Agora passemos a impor as condições de contorno de Neumann homogêneas. Estas condições de contorno exigem que a derivada do campo se anule sobre as superfícies das placas. Uma vez que a equação de movimento ainda é a mesma, devemos exigir que a solução

$$Z(z) = A \exp(ip_z z) + B \exp(-ip_z z), \quad (2.68)$$

satisfaça as novas condições de contorno. Para a condição de contorno $\frac{dZ}{dz}|_{z=0} = 0$, temos que $A = B$ o que nos fornece

$$Z(z) = 2A \cos(p_z z). \quad (2.69)$$

Agora, usando a segunda condição de contorno $\frac{dZ}{dz}|_{z=a} = 0$, obtemos

$$p_z = \frac{N\pi}{a}, \quad (2.70)$$

com $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Para as condições de contorno de Neumann homogêneas, diferentemente das condições de contorno de Dirichlet homogêneas, $N = 0$ deve ser incluído, pois as soluções para a componente z do campo são funções cosseno⁶. Assim, para esse caso a soma das ZPE é

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(p^2 + \frac{N^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} L^2. \quad (2.71)$$

Após o uso da relação (2.55) e algumas manipulações, a função zeta para esse caso se torna

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=0}^{\infty} (N)^{3-2s}. \quad (2.72)$$

Para $N = 0$ o resultado da expressão acima é nulo, portanto,

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{3-2s}, \quad (2.73)$$

que é idêntica à equação para condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Logo, a energia de Casimir de um campo escalar real livre não massivo tem a mesma expressão,

⁶As condições de contorno de Neumann homogêneas ainda permitem que a constante p_z seja nula, o que nos fornece a solução $Z(z) = A'z + B'$, sendo que A' deve ser nulo para que a condição $dz(0)/dz = 0$ seja satisfeita. Portanto, temos também a solução $Z(z) = B'$. Entretanto, esta solução é L.D. da solução (2.70) com $N = 0$.

tanto para condições de contorno de Dirichlet homogêneas quanto para as de Neumann homogêneas, e é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{1440a^3}. \quad (2.74)$$

2.2.4 Cálculo da energia de Casimir para o campo escalar real livre não massivo em 3+1 dimensões via potencial efetivo

Na teoria quântica de campos o potencial efetivo é visto como uma ferramenta de grande utilidade, pois através do mesmo podemos estudar uma grande parte de sistemas físicos, como por exemplo os que apresentam quebra espontânea de simetria. Podemos também utilizar o potencial efetivo para determinar inúmeras grandezas de interesse físico, tais como, a energia de Casimir [28, 29], massa renormalizada, constante de acoplamento, etc. Tal potencial é nada menos que uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido tomando o mínimo daquele potencial. Isto pode ser visto quando expressamos o potencial efetivo através de uma expansão em *loop*, que coincide com uma expansão em potências de \hbar , de modo que o mesmo fica dado por uma soma do termo clássico mais correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico. O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre um conjunto de estados ϕ , minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano \hat{H} . Ou seja,

$$V_{ef}(\phi_c) = \min_{\{\phi\}} \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle, \quad (2.75)$$

tal que ϕ_c seja o valor esperado do operador de campo $\hat{\phi}$ calculado no estado, $\langle \phi | \hat{\phi} | \phi \rangle$, que minimiza a energia. Logo, da forma em que o potencial efetivo foi definido devemos necessariamente interpretá-lo como uma densidade de energia. Portanto, podemos usá-lo para calcular a energia de Casimir⁷. Desta forma, a densidade de energia do vácuo será dada como um mínimo do potencial efetivo mediante um processo de renormalização, que formalmente é escrita como

$$\epsilon_{Casimir} = V_{ef}^R = \lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0} \left\{ [V_{ef}]_{\text{com c. de c.}}^\Lambda - [V_{ef}]_{\text{sem c. de c.}}^\Lambda \right\}. \quad (2.76)$$

Uma vez que o potencial efetivo em um *loop* é dado por [30]

⁷Para o leitor interessado no estudo do potencial efetivo indicamos as referências [10, 13, 15, 18–20, 26, 30, 33–35].

$$V_{ef}(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \left\{ \det \left(\frac{\delta^2 S(\phi_c)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right) \right\}, \quad (2.77)$$

e a ação⁸ do campo escalar real não-massivo é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.78)$$

a equação (2.77) assumirá a forma

$$V_{ef}(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \{ \det (-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \} \quad (2.79)$$

ou

$$V_{ef}(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \{ \det(-\square) \}, \quad (2.80)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo. Da mesma forma que no caso da soma ZPE, a equação acima é divergente e, portanto, é necessário um procedimento de regularização para isolar as divergências. Um procedimento de regularização geralmente usado é o de *Cut-off*. Tal procedimento conduz ao aparecimento de pólos que devem ser eliminados pela prescrição de renormalização, os quais serão absorvidos nos parâmetros livres da teoria (massa, constante de acoplamento, etc.). Entretanto, a determinação do potencial efetivo usando o método da função zeta é mais vantajoso, pois nos conduz a um resultado finito, sem a aparente necessidade de subtração de qualquer pólo ou a adição de contra-termos. A própria continuação analítica realizada para o restabelecimento da teoria original é a prescrição de renormalização que elimina os pólos [27]. Assim, escolhendo trabalhar com a função zeta, anteriormente definida pela equação (2.52), a expressão do potencial efetivo será dada por

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left(\frac{d\zeta_A}{ds}(0) + \zeta_A(0) \ln \mu^2 \right), \quad \text{com } A \equiv -\square, \quad (2.81)$$

onde usamos a propriedade (veja Apêndice C)

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M}{ds}(0) = -\zeta_A(0) \ln \mu^2 - \frac{d\zeta_A}{ds}(0), \quad \text{com } M = \frac{A}{\mu^2}. \quad (2.82)$$

⁸Estamos, neste caso, trabalhando no espaço euclidiano e, ao contrário do que geralmente é feito, não usaremos sub-índices para indicar este fato.

Utilizando as mesmas condições de contorno que foram impostas para o cálculo da energia de Casimir via ZPE e resolvendo primeiramente para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, a função zeta será

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \sum_{N=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 k \left(k^2 + \frac{N^2 \pi^2}{a^2} \right)^{-s}, \quad (2.83)$$

onde substituímos a soma do espectro contínuo por uma integral, ou seja, $\sum f(k) \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \int d^3 k f(k)$.

Novamente usando a equação (2.55)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + A^2)^{-s} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}, \quad \text{para } A^2 > 0,$$

a equação (2.83) pode ser escrita na forma

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s - 2/3)}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{N^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2} - s}, \quad (2.84)$$

ou ainda,

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{8a^4} \pi^{3/2} \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right)^{-s} \frac{\Gamma(s - 2/3)}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} N^{-(2s-3)}. \quad (2.85)$$

De acordo com a definição da zeta de Riemann, equação (2.57), teremos

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{8a^4} \pi^{3/2} \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right)^{-s} \frac{\Gamma(s - 2/3)}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s - 3). \quad (2.86)$$

Usando agora a propriedade de reflexão da função zeta de Riemann, equação (2.59)

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta_R(z) = \pi^{\frac{z-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta_R(1-z),$$

a equação (2.86) pode ser reescrita como

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{8a^4} \pi^{-2} \pi^{2s} \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right)^{-s} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(s)} \zeta_R(4-2s). \quad (2.87)$$

Escrevendo a equação (2.87) na forma

$$\zeta_A(s) = \frac{G(s)}{\Gamma(s)}, \quad (2.88)$$

onde

$$G(s) = \frac{\Omega}{8a^4} \pi^{-2} \pi^{2s} \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right)^{-s} \Gamma(2-s) \zeta_R(4-2s), \quad (2.89)$$

notamos que $\zeta_A(s \rightarrow 0) = 0$, pois $\Gamma(s \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ e $G(s)$ é analítica em $s = 0$. Portanto, só nos resta calcular a derivada da zeta generalizada em $s = 0$. Segue-se que

$$\zeta'_A(s) = \frac{G'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma'(s)}{(\Gamma(s))^2} G(s). \quad (2.90)$$

Uma vez que

$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \quad (2.91)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right) = -1, \quad (2.92)$$

ficaremos com

$$\zeta'_A(s) = G(0). \quad (2.93)$$

Ou seja, o cálculo da derivada da zeta agora é reduzido ao simples cálculo de $G(0)$.

Lembrando que

$$\Gamma(2) = 1 \text{ e } \zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

obtemos

$$\zeta'_A(s) = \frac{\Omega \pi^2}{720 a^4}. \quad (2.94)$$

Portanto, substituindo a equação (2.94) na equação (2.81), a energia de Casimir por unidade de área das placas é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar \pi^2}{1440 a^3}. \quad (2.95)$$

Agora para o cálculo com condições de contorno de Neumann homogêneas basta observar a equação (2.85)

$$\zeta_A(s) = \frac{\Omega}{8a^4} \pi^{3/2} \left(\frac{\pi^2}{a^2}\right)^{-s} \frac{\Gamma(s-2/3)}{\Gamma(s)} \sum_{N=1}^{\infty} N^{-(2s-3)}.$$

Quando impomos condições de contorno de Neumann homogêneas, a única diferença matemática estaria no limite inferior da somatória que começaria com $N = 0$ e não com $N = 1$, como é o caso para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Entretanto, isto pouco importa; pois para $N = 0$ a contribuição é nula. Portanto, da mesma forma que na soma das ZPE, o cálculo da energia de Casimir via potencial efetivo tem a mesma expressão para o campo escalar real livre não massivo, ora para condições de contorno de Dirichlet homogêneas ou ora para condições de contorno de Neumann homogêneas.

2.3 Efeito Casimir: Considerações finais

O cálculo da energia de Casimir via (ZPE) bem como por meio do potencial efetivo não são técnicas aplicadas somente ao campo escalar real, pelo contrário, é algo que se estende a todos os campos quânticos de uma maneira geral, pois em qualquer campo quântico ocorrem flutuações de vácuo. Então, se o Efeito Casimir não é uma particularidade de certos campos, por que não usá-lo para tentar explicar, por exemplo, o fenômeno de confinamento dos quarks e glúons no interior dos hádrons? Este confinamento é um dos aspectos mais intrigantes da física de partículas elementares. Em todos os experimentos, por mais altas que sejam as energias, os quarks nunca são observados isoladamente; o que observamos são apenas hádrons, cujas propriedades nos indicam a existência de quarks. Tal confinamento nos sugere crer que o Efeito Casimir deva ser manifestado nas propriedades dos hádrons. Para calcular a energia de Casimir no interior de um hádron o modelo de placas paralelas é naturalmente inadequado e é substituído pelo de uma esfera que confina as flutuações dos vácuos quarkuônico e gluônico. Neste modelo os hádrons são vistos como sacolas confinantes cujo conteúdo são os quarks e glúons, por isso este modelo recebe o nome de *bag model*. É interessante observar que no caso esférico a força de Casimir na esfera confinante é repulsiva. Até o momento não sabemos explicar porque a força de Casimir de um dado campo sob dadas condições de contorno é atrativa ou repulsiva. Alguns teóricos chamam esse fato de “o mistério do Efeito Casimir”.

Existem outras técnicas que poderíamos usar para obter a energia de Casimir, ou até mesmo outras condições de contorno poderiam ser impostas sobre o campo. Podemos também nos perguntar, por exemplo, sobre o que aconteceria se a distância entre as placas não fosse constante. Ou ainda, se a temperatura é relevante neste cálculo. No que se refere à primeira pergunta, este assunto conduz a uma linha de estudo bastante vasta e o fenômeno estudado neste caso recebe o nome de Efeito Casimir Dinâmico. Este fenômeno é caracterizado pelo surgimento de forças de reação induzidas pelo movimento das placas e a criação de partículas reais, o qual não tratamos aqui. Agora a respeito da temperatura, modelos cosmológicos nos mostram que nos estágios iniciais do universo existia uma grande quantidade de matéria e radiação a altas temperaturas. Podemos, então, esperar que as simetrias exigidas pelos sistemas neste estágio do universo não fossem as mesmas simetrias que hoje observamos. Portanto, é importante desenvolver métodos que permitam estudar os efeitos quânticos dependentes da temperatura nas teorias de campos. Desta forma, podemos obter o relato do passado quente através do fenômeno que hoje observamos. A hipótese básica deste formalismo é que existe o equilíbrio térmico, e o nome dado a esta nova maneira de fazer teoria de campo é chamada de Teoria de Campos a Temperatura Finita, a qual, também, não abordamos. Também poderíamos ter trabalhado com outros campos que não fosse o campo escalar real. Por exemplo, o campo gravitacional, o campo eletromagnético, etc.. Entretanto, preferimos ilustrar este capítulo com o campo escalar real submetido às condições de contorno explicitadas anteriormente, porque este foi o propósito no qual nos dispomos a fazer, e além de tudo é o caso mais simples de se resolver.

O Efeito Casimir por ser um efeito comprovado experimentalmente parece ser de grande utilidade para fins científicos e tecnológicos. Uma aplicação tecnológica do Efeito Casimir poderia ser empregada na eletrônica, pois na medida que a mesma busca construir componentes cada vez menores, efeitos de flutuações do vácuo podem se tornar relevantes. Em suma, o Efeito Casimir é um assunto bastante extenso no qual nos restringimos em apenas um pequeno aspecto do mesmo⁹.

⁹Para um estudo mais detalhado deste assunto indicamos as referências [2, 9, 23, 25, 31].

Capítulo 3

Estudo a nível clássico da estabilidade
da solução $\phi_0 = 0$

3.1 Introdução

No capítulo 2 vimos que para um campo ser classificado como um campo escalar real, o mesmo deve ser real, é claro, e se transformar como um escalar frente às transformações de Lorentz. Em geral, um campo pode se transformar de outras formas frente às transformações de Lorentz, e de posse destas transformações podemos classificar os campos como escalar, spinorial, vetorial, etc. Naquele contexto escolhemos trabalhar com o campo escalar real devido ao seu tratamento matemático ser, sem dúvida alguma, mais simples do que os demais campos. Neste capítulo e nos subseqüentes continuaremos a manter esta postura, ou seja, mais uma vez o campo escalar real será o campo escolhido para expor nossas idéias. Este campo, denotado por ϕ , está associado a partículas de spin zero e sem nenhum tipo de carga. O fato do mesmo estar associado a partículas de spin zero deve-se ao seu caráter escalar, enquanto no que diz respeito à carga, deve-se ao seu caráter real. Caso o campo esteja sujeito a uma auto-interação num espaço-tempo quadridimensional, critérios de renormalizabilidade nos dizem que este acoplamento deve ser no máximo do tipo ϕ^4 . Esta será a teoria abordada de agora em diante.

Se a densidade de lagrangeana for invariante por uma reflexão de ϕ , ou seja, se ela possui a simetria interna discreta,

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(-\phi), \quad (3.1)$$

então a sua expressão formal será dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4. \quad (3.2)$$

A constante de acoplamento $\lambda = 2\beta^2$ deve ser positiva para assegurar a estabilidade da teoria e o potencial clássico pode ser identificado com

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4, \quad (3.3)$$

sendo que o estado de vácuo clássico pode ser obtido como o mínimo deste potencial. O sinal de m^2 em (3.3) caracteriza dois comportamentos distintos:

i) Se $m^2 \geq 0$, o vácuo é bem determinado em $\phi_0 = 0$ e não há degenerescência. Caso estivéssemos trabalhando com uma teoria quântica de campos, as partículas seriam as excitações do campo a partir deste vácuo e teriam massa m .

ii) Se $m^2 < 0$, o mínimo é degenerado em $\phi_0 = \pm\sqrt{3}\frac{m}{\beta}$. O campo ϕ , neste caso, não possui massa real, uma vez que o termo de massa aparece na densidade de lagrangeana com o sinal “trocado”. A unicidade do vácuo exige a escolha de um mínimo específico, e para qualquer um deles a simetria de reflexão ($\phi \longrightarrow \phi' = -\phi$) não será observada. Este é o fenômeno conhecido como quebra espontânea de simetria discreta. Neste caso, $\phi_0 = 0$ não é uma solução de campo estável.

Neste capítulo, onde toda análise será restrita a uma abordagem puramente clássica, nosso objetivo será estudar a estabilidade das soluções de campo nulo, quando o campo é submetido a condições de contorno. Iniciaremos este capítulo desenvolvendo um mecanismo para analisar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$. Na primeira e segunda subseção iremos impor sobre o campo condições de contorno de Dirichlet homogêneas e antiperiódicas, respectivamente. Estas condições de contorno não permitem soluções de campo constante diferentes de zero. Sendo assim, se a solução $\phi_0 = 0$ for instável, partiremos em busca da solução de campo estável que minimize a energia, isto é, partiremos em busca do *ground state* da teoria, que, neste caso, deve ser necessariamente dependente espacialmente¹. Esta dependência espacial caracteriza a quebra da invariância translacional do vácuo da teoria, ou seja, o vácuo agora deixa de ser homogêneo e isotrópico. Na terceira e quarta subseção iremos impor sobre o campo condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas, respectivamente. Estas condições de contorno permitem soluções de campo constante diferentes de zero, o que torna a busca pelo *ground state* da teoria substancialmente mais simples. E, finalmente, terminaremos o capítulo discutindo brevemente alguns resultados encontrados nessas subseções.

3.2 Mecanismo para estudar a estabilidade da solução

$$\phi_0 = 0$$

Considerando uma teoria que apresenta a *tree level* quebra espontânea de simetria, devemos fazer $m = iM$, com $M > 0$, na equação (3.2). Isto nos conduzirá a

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{12}\beta^2\phi^4, \quad (3.4)$$

com um potencial do tipo de Higgs dado por

¹Uma vez que estamos considerando condições de contorno que não variam com o tempo não há porquê esperarmos que o campo venha adquirir uma dependência temporal.

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4. \quad (3.5)$$

O mínimo clássico (vácuo clássico) ocorre em

$$\phi_{0\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}, \quad (3.6)$$

sendo portanto degenerado. Dessa forma, como dissemos, a teoria apresenta a *tree level* quebra espontânea de simetria e a solução de campo nulo é instável. Nos perguntamos então se existe a possibilidade das condições de contorno fazerem com que a solução de campo nulo se torne estável. Com o propósito de verificar isto, iremos analisar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ fazendo uma pequena variação na energia do sistema.

Podemos obter a energia da seguinte forma²,

$$E[\phi] = \int d^3x \left\{ \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\phi(-\nabla^2)\phi + V(\phi) \right\}. \quad (3.7)$$

Considerando uma solução perturbativa, $\phi_0 + \psi$, onde ψ além de ter a mesma natureza que ϕ_0 ainda é tratado como pequeno, podemos usar a expansão funcional para escrever

$$\begin{aligned} \delta E &= E[\phi_0 + \psi] - E[\phi_0] = E[\phi_0] + \int d^3x \frac{\delta E}{\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} \psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int \psi(y) \frac{\delta^2 E}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} \psi(x) d^3x d^3y + \dots - E[\phi_0]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se ϕ_0 for uma solução de campo estável, deveremos ter

$$\frac{\delta E}{\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} = 0 \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\delta^2 E}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} > 0. \quad (3.10)$$

A equação (3.9) nos conduz imediatamente à equação de movimento

²Consideramos na equação (3.7) apenas as soluções estáticas, pois utilizaremos apenas condições de contorno que não variam com o tempo.

$$-\nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.11)$$

Agora levando em consideração as equações (3.9) e (3.10), a equação (3.8) reduz-se a

$$\delta E = \frac{1}{2} \int \psi(y) \frac{\delta^2 E}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} \psi(x) d^3x d^3y + \dots \quad (3.12)$$

Sendo

$$\frac{\delta^2 E}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} \Big|_{\phi_0} = \left(-\nabla^2 + V''(\phi_0) \right) \delta(x-y) \quad (3.13)$$

e considerando termos até o de segunda ordem, teremos

$$\delta E = \frac{1}{2} \int d^3x \psi(x) \left(-\nabla^2 + V''(\phi_0) \right) \psi(x). \quad (3.14)$$

Uma vez que ψ deve ser auto-vetor do operador $\left(-\nabla^2 + V''(\phi_0) \right)$, teremos

$$\left(-\nabla^2 + V''(\phi_0) \right) \psi_N = \lambda_N \psi_N. \quad (3.15)$$

Para a solução $\phi_0 = 0$ a equação (3.15) assume a forma,

$$\left(-\nabla^2 - M^2 \right) \psi_N = \lambda_N \psi_N. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser escrita como

$$-\nabla^2 \psi_N = (\lambda_N + M^2) \psi_N = l_N^2 \psi_N, \quad (3.17)$$

segue-se que

$$\lambda_N = l_N^2 - M^2. \quad (3.18)$$

O menor valor que λ_N pode assumir é chamado de auto-valor inferior e é dado por

$$\lambda_0 = l_0^2 - M^2, \quad (3.19)$$

onde o sinal de λ_0 é determinado pelo menor auto-valor do laplaciano

$$\nabla^2 \psi_0 = -l_0^2 \psi_0. \quad (3.20)$$

Observando as equações (3.14) e (3.19) concluímos que se $\lambda_0 < 0$, então $\delta E < 0$ e a solução de campo nulo é instável. Por outro lado se $\lambda_0 > 0$, então $\delta E > 0$ e a solução de campo nulo será estável.

Uma vez que os valores assumidos por l_0^2 dependem fortemente das condições de contorno impostas ao campo, adiantamos que devido às mesmas devemos ter $l_0^2 \geq 0$. Se as condições de contorno para ϕ são tais que $l_0^2 = 0$, segue-se imediatamente da equação (3.19) que $\lambda_0 < 0$ e, conseqüentemente, $\phi_0 = 0$ é uma solução de campo instável. Este é o caso onde as condições de contorno permitem soluções de campo constante diferentes de zero. Entretanto, se as condições de contorno proibirem valores de campo constante diferentes de zero, deveremos ter $l_0^2 > 0$, e a estabilidade ou instabilidade da solução $\phi_0 = 0$ será determinada pela magnitude de l_0^2 na relação $\lambda_0 = l_0^2 - M^2$. Esperamos que l_0^2 venha depender de uma escala de comprimento descrita pelas condições de contorno. Sendo assim, haverá um determinado comprimento em que a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ não será garantida, e como as condições de contorno proibem valores de campo constante diferentes de zero, deveremos ter, necessariamente, um *ground state* não constante.

3.2.1 Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas

Vamos analisar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo ϕ é submetido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Antes de impor nossa condição de contorno, vamos primeiro considerar uma situação tal que na direção z o campo ϕ fique confinado na região $-a/2 \leq z \leq a/2$ satisfazendo as exigências, $\phi = 0$ em $z = \pm a/2$. Nas direções x e y podemos também exigir que o campo ϕ tenha o mesmo comportamento em $x = \pm a_x/2$ e $y = \pm a_y/2$. Entretanto, se tomarmos os limites $a_x, a_y \rightarrow \infty$, esperamos que as condições de contorno nas direções x e y não venham

a ter importância³ [40]. Adotando estas escolhas, agora teremos que⁴ $\phi = \phi(z)$ e as equações (3.11) e (3.17) assumirão a forma

$$-\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.21)$$

e

$$\frac{d^2\psi_N}{dz^2} = -l_N^2\psi_N. \quad (3.22)$$

Para determinarmos o menor auto-valor, l_0^2 , devemos encontrar os auto-valores do operador da equação (3.22) com ψ satisfazendo às condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Uma solução da equação (3.22), satisfazendo às condições de contorno de Dirichlet homogêneas, pode ser dada por

$$\psi_N(z) = A_N \cos(l_N z) + B_N \text{sen}(l_N z), \quad (3.23)$$

onde $l_N^2 > 0$.

Ao exigirmos que $\psi_N(z = \pm a/2) = 0$, acharemos que

$$l_N = \frac{(N+1)\pi}{a}, \quad \text{com } N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

Assim, o menor valor que l_N^2 pode assumir será dado por

$$l_0^2 = \frac{\pi^2}{a^2}. \quad (3.25)$$

Substituindo a equação (3.25) na equação (3.19), teremos

$$\lambda_0 = \frac{\pi^2}{a^2} - M^2. \quad (3.26)$$

Para obtermos o comprimento crítico devemos fazer $\lambda_0 = 0$. Então, o comprimento crítico para o qual a solução $\phi_0 = 0$ é estável será

$$a_c = \frac{\pi}{M}. \quad (3.27)$$

³Um exemplo físico desta situação, quando estamos trabalhando com uma teoria quântica de campos, ocorre no cálculo da energia de Casimir para um campo confinado entre duas placas planas paralelas, algo que a propósito foi discutido no capítulo 2.

⁴Também devemos fazer $\psi = \psi(z)$, pois ψ tem a mesma natureza que ϕ .

Assim, se $a < a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é estável e, portanto, é vácuo, ou, equivalentemente, estado fundamental da teoria. Entretanto, se $a > a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é instável e, portanto, não é vácuo da teoria.

3.2.2 Soluções ϕ_0 não uniformes para o campo satisfazendo às condições de contorno de Dirichlet homogêneas

Se $a > a_c$, devemos partir em busca de uma solução do tipo $\phi_0 = \phi_0(z)$, pois as condições de contorno de Dirichlet homogêneas proíbem soluções de campo constante diferentes de zero. Para este fim, usaremos a equação (3.21)

$$-\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0.$$

Explicitando o potencial, teremos

$$-\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4 \right) = 0. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) pode ser escrita como

$$-\frac{d\phi}{dz} \frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4 \right) = 0, \quad (3.29)$$

ou ainda

$$\frac{d}{dz} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4 \right\} = 0. \quad (3.30)$$

Segue-se então que

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4 = C'. \quad (3.31)$$

Por uma questão de conveniência escolheremos a constante, C' , de forma a obtermos uma expressão fatorizável para a equação (3.31). Assim, devemos fazer $C' = C - \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}$. Fazendo esta escolha, a equação (3.31) pode ser reescrita como

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2} = C \quad (3.32)$$

ou

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{12}} \phi^2 - \frac{\sqrt{3} M^2}{2 \beta} \right)^2 = C. \quad (3.33)$$

Para que $\phi(z)$ seja contínuo no intervalo $[-a/2, a/2]$ com $\phi(\pm a/2) = 0$, deveremos ter pelo menos um ponto crítico neste intervalo, ou seja, $\frac{d\phi(z_0)}{dz} = 0$. Levando em conta estas considerações, concluímos que além de C não ser negativo o maior valor que o mesmo pode assumir é $C = \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}$. Então,

$$0 \leq C \leq \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}. \quad (3.34)$$

A inequação (3.34) pode ser escrita na forma

$$C = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{M^4}{\beta^2}, \quad \text{com } 0 \leq \alpha^2 \leq 1. \quad (3.35)$$

Entretanto, quando substituimos $\phi = 0$ e $\phi = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}$ na equação (3.33), obtemos $C = \frac{3}{4} \frac{M^4}{\beta^2}$ e $C = 0$, respectivamente. Isso implica na eliminação desses dois possíveis valores para a constante C , pois $\phi = 0$ foi excluído por não ser uma solução estável, enquanto, $\phi = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}$, por não serem permitidos pelas condições de contorno. Dessa maneira, a equação (3.35) deve ser reescrita na forma

$$C = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{M^4}{\beta^2}, \quad \text{com } 0 < \alpha^2 < 1. \quad (3.36)$$

Para acharmos $\phi(z)$ será conveniente escrevermos a equação (3.33) na forma integral. Fazendo isto, teremos

$$z + a/2 = \pm \int_0^{\phi(z)} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{6} \beta^2 \phi^4 - M^2 \phi^2 + \frac{3}{2} \frac{M^4}{\beta^2} - 2C}}, \quad (3.37)$$

onde os limites de integração são definidos de forma que $z \leftrightarrow \phi(z)$ e $-a/2 \leftrightarrow \phi(-a/2) = 0$. Explicitando C em (3.37), obteremos

$$z + a/2 = \pm \int_0^{\phi(z)} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{6} \beta^2 \phi^4 - M^2 \phi^2 + \frac{3}{2} \frac{M^4}{\beta^2} (1 - \alpha^2)}}. \quad (3.38)$$

A equação (3.38) pode ser escrita na forma

$$z + a/2 = \pm \int_0^{\phi(z)} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{6}\beta^2 (\phi_-^2 - \phi^2) (\phi_+^2 - \phi^2)}}, \quad (3.39)$$

com

$$\phi_{\pm}^2 = 3 \frac{M^2}{\beta^2} (1 \pm \alpha). \quad (3.40)$$

Ao fazermos $\phi = \phi_- \text{sen}\theta$, teremos que $\phi(z) = \phi_- \text{sen}\theta_M \rightarrow \theta_M = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\phi(z)}{\phi_-} \right)$ e a equação (3.39) assumirá a forma

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \text{sen}\theta}} = \pm \frac{\beta\phi_+}{\sqrt{6}} (z + a/2), \quad \text{com } \kappa = \frac{\phi_-}{\phi_+}. \quad (3.41)$$

Sendo $\phi_{\pm}^2 = 3 \frac{M^2}{\beta^2} (1 \pm \alpha)$ e $0 < \alpha^2 < 1$, teremos que

$$\kappa = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}, \quad \text{com } 0 < \kappa < 1. \quad (3.42)$$

Desta forma, a integral da equação (3.41) trata-se de uma integral elíptica. Agora seja,

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \text{sen}\theta}} = \pm u, \quad \text{com } u = \frac{\beta\phi_+}{\sqrt{6}} (z + a/2). \quad (3.43)$$

Para sermos mais precisos a integral definida pela equação (3.43) é chamada de integral elíptica de primeira espécie [36]. Por outro lado, as funções elípticas de Jacobi são definidas como as inversas da integral elíptica de primeira espécie. Desta forma, se

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \text{sen}\theta}} = w, \quad (3.44)$$

onde θ_M é chamado de amplitude correspondente ao argumento w e é escrito como

$$\theta_M = \text{am}(w, \kappa) = \text{am}(w) \quad (3.45)$$

e κ é chamado de módulo, podemos definir as funções elípticas de Jacobi da seguinte forma⁵

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(w, \kappa) = \operatorname{sen}[am(w)] = \operatorname{sen}\theta_M, \\ \operatorname{cn}(w, \kappa) = \operatorname{cos}[am(w)] = \operatorname{cos}\theta_M. \end{cases} \quad (3.46)$$

Será útil mencionar algumas propriedades destas funções, a saber,

$$\begin{cases} \operatorname{sn}^2(w, \kappa) + \operatorname{cn}^2(w, \kappa) = 1, \\ \operatorname{sn}(0, \kappa) = 0, \\ \operatorname{cn}(0, \kappa) = 1, \\ \operatorname{sn}(-w, \kappa) = -\operatorname{sn}(w, \kappa), \\ \operatorname{cn}(-w, \kappa) = \operatorname{cn}(w, \kappa). \end{cases} \quad (3.47)$$

Observando as equações (3.47) notamos uma semelhança com as funções circulares $\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{cos}\theta$. Na verdade, as funções elípticas de Jacobi são uma generalização das funções circulares. Embora w não seja um ângulo, w torna-se um ângulo quando $\kappa \rightarrow 0$, e as funções elípticas de Jacobi degeneram-se nas funções circulares, ou seja, $\operatorname{sn}(w, 0) = \operatorname{sen}w$ e $\operatorname{cn}(w, 0) = \operatorname{cos}w$. Com algumas modificações apropriadas também é possível mostrar que no limite $\kappa \rightarrow 1$ estas funções elípticas degeneram-se nas funções hiperbólicas $\operatorname{sn}(w, 1) = \operatorname{tanh}w$ e $\operatorname{cn}(w, 1) = \operatorname{sech}w$ [36]. De posse destas definições, podemos escrever

$$\phi_0(z) = \phi_- \operatorname{sn}(w, \kappa). \quad (3.48)$$

Uma vez que $w = \pm u$ e $\operatorname{sn}(\pm u, \kappa) = \pm \operatorname{sn}(u, \kappa)$, teremos

$$\phi_0(z) = \pm \phi_- \operatorname{sn}(u, \kappa) = \pm \phi_- \operatorname{sn}\left(\frac{\beta\phi_+}{\sqrt{6}}(z + a/2), \kappa\right) \quad (3.49)$$

ou

$$\phi_0(z) = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta} \sqrt{1 - \alpha} \operatorname{sn}\left(\frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \alpha}(z + a/2), \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}}\right). \quad (3.50)$$

Na equação (3.50) existe uma constante de integração⁶, α , a ser determinada pela

⁵Existem outras funções, mas as mesmas aqui não serão úteis. Para o leitor interessado no estudo das funções elípticas de Jacobi indicamos as seguintes referências [6], [17], [36] e [41].

⁶A primeira constante de integração, $a/2$, foi determinada diretamente ao realizarmos a integral definida (3.37).

condição de contorno, $\phi_0(a/2) = 0$. Passaremos agora a determinar esta constante utilizando tal condição. Então,

$$\begin{aligned}\phi_0(a/2) &= \pm \phi_- \operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} (a/2 + a/2), \kappa \right) \\ &= \pm \phi_- \operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} a, \kappa \right) = 0,\end{aligned}\tag{3.51}$$

o que nos conduz a

$$\operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} a, \kappa \right) = 0.\tag{3.52}$$

Uma vez que os zeros de $\operatorname{sn}(u, \kappa)$ estão em $u = 2NK(\kappa)$ [41], com $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ onde $K(\kappa)$ é a integral elíptica completa de primeira espécie, que é dada por

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \theta}},\tag{3.53}$$

ao explicitarmos o valor de ϕ_+ em (3.52), obteremos

$$\frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \alpha} a = 2NK \left(\sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \right) \quad \text{com } N = 1, 2, 3, \dots\tag{3.54}$$

onde o valor $N = 0$ foi excluído por termos uma solução identicamente nula, ou seja, $\phi_0 = 0$, que é uma solução de campo instável. Já os valores negativos de N não foram considerados por que $\operatorname{sn}(u, \kappa)$ é uma função ímpar de u e uma mudança de sinal afetaria apenas o sinal global de ϕ_0 . Escrevendo a equação (3.54) na forma

$$\gamma_N = \frac{K \left(\sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \right)}{\sqrt{1 + \alpha}}\tag{3.55}$$

com

$$\gamma_N = \frac{aM}{2N\sqrt{2}}\tag{3.56}$$

e sabendo que a integral elíptica completa de primeira espécie é uma função monotonicamente decrescente de α no intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$, tendendo a infinito quando $\alpha \rightarrow 0$ e

ao valor $\pi/2$ quando $\alpha \rightarrow 1$, isto implica que a solução (3.55) só existe se [40]

$$\gamma_N > \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (3.57)$$

Então,

$$\frac{aM}{2N\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

ou

$$a > Na_c, \quad \text{com } a_c = \frac{\pi}{M}. \quad (3.59)$$

Pode-se mostrar que todas as soluções para $N \geq 2$ são instáveis [5]. Desde que a energia das soluções com $N \geq 2$ sejam todas maiores que a energia para a solução com $N = 1$, este resultado poderia ser esperado desde o início. Portanto, nos concentraremos no caso em que $N = 1$. Substituindo este valor de N na equação (3.55), teremos

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{a}{a_c} \sqrt{1+\alpha} = K \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right). \quad (3.60)$$

Para grandes valores de a/a_c podemos usar a expressão assintótica de $K(\kappa)$ [17], [36]

$$K(\kappa) \cong \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{1-\kappa} \right), \quad \text{para } \kappa \rightarrow 1. \quad (3.61)$$

Agora expandindo o lado esquerdo da equação (3.60) e $\kappa = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$, em potências de α e desconsiderando termos de maior ordem, encontraremos, com boa aproximação para a/a_c grandes

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{a}{a_c} \cong \frac{1}{2} \ln \left(\frac{16}{\alpha} \right). \quad (3.62)$$

Então⁷,

$$\alpha \cong 16 \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{a}{a_c} \right). \quad (3.63)$$

⁷Apesar dos resultados apresentados aqui concordarem com o resultados propostos na referência [40], o valor de α nesta referência difere por um fator de 2 do nosso resultado.

Demonstrando assim que a solução para α depende somente da dimensão da relação a/a_c . Este último resultado conclui nossa busca por uma solução de campo não constante quando o mesmo é submetido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Portanto, $\phi_0(z)$ fica completamente determinado e é dado por

$$\phi_0(z) = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta} \sqrt{1-\alpha} \operatorname{sn} \left(\frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\alpha} (z + a/2), \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right),$$

com $a > \pi/M$ e α satisfazendo a equação (3.63).

3.2.3 Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno antiperiódicas

Para impor nossa condição de contorno escolheremos trabalhar numa região tal que o campo ϕ seja função das coordenadas em um espaço topológico $M^3 \times S^1$, onde M^3 é o espaço de Minkowski tridimensional e S^1 é um espaço compactificado em uma circunferência de comprimento a . Exigiremos que a coordenada no espaço S^1 satisfaça condições de contorno antiperiódicas, ou seja,

$$\phi(\alpha, z) = -\phi(\alpha, z + a), \quad (3.64)$$

onde z é a coordenada no espaço S^1 e α representa as coordenadas no espaço M^3 . Uma vez que estamos interessados na configuração do *ground state* na qual a simetria da invariância translacional para o espaço-tempo de Minkowski, M^3 , é assumida que seja não violada, devemos nos preocupar somente com a invariância translacional para a direção do espaço compactificado S^1 [37]. Ou seja,

$$\phi(z) = -\phi(z + a). \quad (3.65)$$

Assim, da mesma forma que para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, teremos

$$-\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.66)$$

e

$$\frac{d^2\psi_N}{dz^2} = -l_N^2\psi_N. \quad (3.67)$$

Para $l_N^2 > 0$ as soluções da equação (3.67) são dadas por

$$\psi_N(z) = A_N \cos(l_N z) + B_N \text{sen}(l_N z), \quad (3.68)$$

Ao exigirmos que $\psi_N(z) = -\psi_N(z + a)$, obteremos

$$l_N = \frac{(2N + 1)\pi}{a}, \quad \text{com } N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.69)$$

Assim, o menor valor que l_N^2 pode assumir será dado por

$$l_0^2 = \frac{\pi^2}{a^2}. \quad (3.70)$$

De maneira análoga ao que foi feito para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, teremos

$$a_c = \frac{\pi}{M}. \quad (3.71)$$

Portanto, se $a < a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é estável e, portanto, é vácuo da teoria. Contudo, se $a > a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é instável e, portanto, não é vácuo da teoria.

3.2.4 Soluções ϕ_0 não uniformes para o campo satisfazendo às condições de contorno antiperiódicas

Se $a > a_c$, devemos partir em busca de uma solução do tipo $\phi_0 = \phi_0(z)$, pois as condições de contorno antiperiódicas proíbem soluções de campo constante diferentes de zero. Novamente seremos conduzidas à equação

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{12}} \phi^2 - \frac{\sqrt{3} M^2}{2 \beta} \right)^2 = C. \quad (3.72)$$

Quando $\phi = 0 \rightarrow C = \frac{3 M^4}{4 \beta^2}$ e quando $\phi = \sqrt{3} \frac{M}{\beta} \rightarrow C = 0$. Portanto, levando em consideração os argumentos da subseção anterior, podemos escrever

$$C = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{M^4}{\beta^2}, \quad \text{com } 0 < \alpha^2 < 1. \quad (3.73)$$

Novamente procedendo de maneira análoga ao que foi feito para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, acharemos que

$$\phi_0(z) = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta} \sqrt{1-\alpha} \operatorname{sn} \left(\frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\alpha} (z - z_0), \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right). \quad (3.74)$$

A constante de integração z_0 aparece, como no caso das condições de contorno de Dirichlet homogêneas, na integração da equação (3.37). Na subseção anterior o valor desta constante era $z_0 = -a/2$, entretanto, não temos aqui uma condição de contorno tal que fixe o valor desta constante. Contudo, z_0 reflete na verdade a invariância translacional da equação de movimento, de tal forma que aqui não há problemas em fixarmos seu valor como sendo nulo [37]. Desta forma, a equação (3.74) será reescrita na forma

$$\phi_0(z) = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta} \sqrt{1-\alpha} \operatorname{sn} \left(\frac{M}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\alpha} z, \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \right). \quad (3.75)$$

Agora passemos a impor as condições de contorno antiperiódicas sobre ϕ_0 a fim de determinarmos α . Assim,

$$\phi_0(z) = -\phi_0(z + a), \quad (3.76)$$

ou seja,

$$\pm \phi_- \operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} z, \kappa \right) = \mp \phi_- \operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} (z + a), \kappa \right). \quad (3.77)$$

Portanto,

$$\operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} z, \kappa \right) = -\operatorname{sn} \left(\frac{\beta \phi_+}{\sqrt{6}} (z + a), \kappa \right). \quad (3.78)$$

Antes de prosseguirmos, consideremos primeiramente a integral

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}. \quad (3.79)$$

Logo,

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \int_{\pi}^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (3.80)$$

ou

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}} + \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}}. \quad (3.81)$$

Uma vez que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}} = K \quad (3.82)$$

e

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}} = u, \quad (3.83)$$

teremos que

$$\int_0^{\phi+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\text{sen}^2\theta}} = u + 2K. \quad (3.84)$$

Agora usando a primeira propriedade de (3.46), $\text{sn}(u) = \text{sen}[am(u)]$, podemos escrever

$$\text{sn}(u + 2K) = \text{sen}[am(u + 2K)] = \text{sen}(\phi + \pi) = -\text{sen}\phi. \quad (3.85)$$

Mas $\phi = am(u)$. Portanto,

$$\text{sn}(u + 2K) = -\text{sn}u. \quad (3.86)$$

Notando que $-\text{sn}u = \text{sn}(u + 2K) = \text{sn}(u + 6K) = \text{sn}(u + 10K) \dots$ e que $-\text{sn}u = \text{sn}(u - 2K) = \text{sn}(u - 6K) = \text{sn}(u - 10K) \dots$, podemos escrever

$$\text{sn}(u + 2NK) = -\text{sn}u, \quad \text{com } N = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (3.87)$$

Da mesma forma que foi feito para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, trabalharemos somente com os valores positivos de N . Sendo assim, a equação (3.87) deve ser reescrita como

$$\operatorname{sn}(u + 2NK) = -\operatorname{sn}u, \quad \text{com } N = 1, 3, 5, \dots \quad (3.88)$$

Desta forma, podemos usar a propriedade (3.88) na equação (3.78) para obtermos

$$\frac{\beta\phi_+}{\sqrt{6}}a = 2NK \quad (3.89)$$

ou

$$\frac{M}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\alpha}a = 2NK(\kappa). \quad (3.90)$$

Os argumentos da subseção anterior nos permitem escrever

$$a > Na_c, \quad \text{com } a_c = \frac{\pi}{M}. \quad (3.91)$$

Como já dissemos, pode-se mostrar que todas as soluções para $N \geq 2$ são instáveis [5]. Portanto, nos concentraremos no caso em que $N = 1$. Substituindo este valor de N na equação (3.90), teremos

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{a}{a_c}\sqrt{1+\alpha} = 2K(\kappa). \quad (3.92)$$

Considerando valores grandes de a/a_c , como foi feito no caso das condições de contorno de Dirichlet homogêneas, podemos escrever a solução com boa aproximação

$$\alpha \cong 16 \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{a}{a_c}\right). \quad (3.93)$$

Que é exatamente o mesmo resultado encontrado para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, ou seja, só depende da relação a/a_c . Este último resultado conclui nossa busca por uma solução de campo não constante quando o mesmo é submetido às condições de contorno antiperiódicas. Portanto, $\phi_0(z)$ fica completamente determinado e é dado por

$$\phi_0(z) = \pm \sqrt{3}\frac{M}{\beta}\sqrt{1-\alpha} \operatorname{sn}\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\alpha}z, \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right),$$

com $a > \pi/M$ e α satisfazendo a equação (3.93).

3.2.5 Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas

Para impor nossa condição de contorno escolheremos mais uma vez trabalhar numa região tal que o campo ϕ seja função das coordenadas em um espaço topológico $M^3 \times S^1$, onde M^3 é o espaço de Minkowski tridimensional e S^1 é um espaço compactificado em uma circunferência de comprimento a . Exigiremos que a coordenada no espaço S^1 satisfaça condições de contorno periódicas, ou seja,

$$\phi(\alpha, z) = \phi(\alpha, z + a), \quad (3.94)$$

onde z é a coordenada no espaço S^1 e α representa as coordenadas no espaço M^3 . Da mesma forma ao que foi feito para o caso das condições de contorno antiperiódicas, assumiremos que a simetria de invariância translacional para um espaço-tempo de Minkowski não seja violada. Isto significa que deveremos nos preocupar somente com a direção do espaço compactificado S^1 [37]. Este raciocínio nos conduzirá a equação

$$\frac{d^2\psi_N}{dz^2} = -l_N^2\psi_N. \quad (3.95)$$

Uma solução da equação (3.95), satisfazendo às condições de contorno periódicas, pode ser dada por

$$\psi_N(z) = A \cos(l_N z) + B \sin(l_N z). \quad (3.96)$$

Ao exigirmos que $\psi_N(z) = \psi_N(z + a)$, obteremos

$$l_N = \frac{2N\pi}{a}, \quad \text{com } N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.97)$$

Assim, o menor valor para l_N^2 será dado por

$$l_0^2 = 0. \quad (3.98)$$

Substituindo a equação (3.98) na equação (3.19), teremos

$$\lambda_0 = -M^2 < 0. \quad (3.99)$$

E, conseqüentemente, $\delta E < 0$. O que mostra que não existe um comprimento crítico para o qual a solução $\phi_0 = 0$ seja estável quando o campo é submetido às condições

de contorno periódicas. Entretanto, esta condição de contorno permite soluções de campo constante diferentes de zero e esta solução pode ser facilmente encontrada, pois uma vez que o campo é constante podemos esquecer a parte cinética da energia e nos preocupar somente com a parte potencial. Isto posto, devemos exigir

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_0} = 0 \quad (3.100)$$

e

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} > 0. \quad (3.101)$$

O que nos conduz imediatamente a bem conhecida solução

$$\phi_{0\pm} = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}. \quad (3.102)$$

3.2.6 Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas

Para estudarmos a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$, quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas, iremos exigir que a derivada, $\frac{d\phi}{dz}$, se anule em $z = \pm a/2$. Nas direções x e y tomaremos os limites $a_x, a_y \rightarrow \infty$. Desta forma, as condições de contorno nas direções x e y não terão importância. Isto posto, teremos

$$\frac{d^2\psi_N}{dz^2} = -l_N^2\psi_N. \quad (3.103)$$

Uma solução da equação (3.103), satisfazendo às condições de contorno periódicas, pode ser dada por

$$\psi_N(z) = A \cos(l_N z) + B \sin(l_N z). \quad (3.104)$$

Ao exigirmos que $\frac{d\psi_N(-a/2)}{dz} = \frac{d\psi_N(a/2)}{dz} = 0$, obteremos

$$l_N = \frac{N\pi}{a}, \quad \text{com } N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.105)$$

Assim, o menor valor que l_N^2 pode assumir será dado por

$$l_0^2 = 0. \quad (3.106)$$

Substituindo a equação (3.106) na equação (3.19), teremos

$$\lambda_0 = -M^2 < 0. \quad (3.107)$$

E, conseqüentemente, $\delta E < 0$. Este último resultado nos mostra que não existe um comprimento crítico para o qual a solução $\phi_0 = 0$ seja estável quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas. Entretanto, da mesma forma que para as condições de contorno periódicas, as condições de contorno de Neumann homogêneas permitem soluções de campo constante diferentes de zero e estas soluções também podem ser obtidas facilmente. Das considerações da subseção anterior, segue-se que

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_0} = 0, \quad (3.108)$$

$$\left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi_0} > 0 \quad (3.109)$$

e somos novamente conduzidos à bem conhecida solução

$$\phi_{0\pm} = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}. \quad (3.110)$$

3.3 Estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$: Considerações finais

Nossos resultados obtidos para as condições de contorno de Dirichlet homogêneas e antiperiódicas nos conduziram a um comprimento crítico para o qual a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ é garantida (Tabela 3.1). Entretanto, a existência da possibilidade da escala de comprimento da teoria ser maior que a crítica nos levou a um *ground state* dependente da localização no espaço. Outro fato importante é que, o tipo de dependência deste campo com respeito ao espaço é feita através de uma função elíptica de Jacobi. As funções elípticas aparecem freqüentemente no estudo das teorias de equações diferenciais não lineares e são uma generalização das funções circulares.

Tabela 3.1: Soluções de vácuo para o campo ϕ quando o mesmo é submetido a condições de contorno

Dirichlet homogêneas: $\phi_0 = 0$ estável se $a < a_c = \pi/M$ ou $\phi_0 = \phi_0(z)$ se $a > a_c$
Antiperiódicas: $\phi_0 = 0$ estável se $a < a_c = \pi/M$ ou $\phi_0 = \phi_0(z)$ se $a > a_c$
Periódicas: $\phi_0 = 0$ instável. As soluções de vácuo são $\phi_{0\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}$
Neumann homogêneas: $\phi_0 = 0$ instável. As soluções de vácuo são $\phi_{0\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}$

Contudo, diferentemente das funções circulares, dependem não só de um argumento, mas também de outro parâmetro chamado de módulo. Ao tentarmos fazer uma analogia entre estes dois tipos de funções seremos levados a crer que o argumento da função elíptica é análogo ao ângulo de uma função circular, enquanto o módulo, em uma interpretação geométrica, seria o análogo a excentricidade de uma elipse na qual as funções elípticas estariam definidas. No entanto, o argumento de uma função elíptica só será de fato um ângulo quando o módulo desta função for nulo e por isto devemos ser cautelosos quando lidamos com funções deste tipo. Cabe lembrar que soluções em termos de funções elípticas são também encontradas no estudo de sistemas solitônicos que abrange quase todos os ramos da física, indo desde a hidrodinâmica, passando pela física de partículas até a teoria de campo não linear [36]. Já no que se refere aos resultados obtidos para as condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas concluímos que, a nível clássico, estas condições de contorno não podem tornar a solução de campo $\phi_0 = 0$ estável, o que nos obrigou a partir em busca de outras soluções. No entanto, podemos nos perguntar se seria possível correções radiativas tornarem-se de ordem clássica, fazendo com que a solução de campo, $\phi_0 = 0$, seja estável. Este será o estudo que faremos no próximo capítulo, que a propósito é a parte principal de todo nosso trabalho.

Capítulo 4

Correções radiativas para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas

4.1 Introdução

Condições de contorno podem, eventualmente, modificar o vácuo da teoria. No entanto, vimos, no capítulo 3, que as condições de contorno Periódicas e de Neumann homogêneas não foram capazes de causar esta modificação. Naquele capítulo fizemos uma análise puramente clássica do sistema. Neste capítulo iremos realizar correções radiativas para estas teorias e esperamos que estas correções venham se tornar de ordem clássica modificando assim essa situação¹. Iniciaremos nossa abordagem desenvolvendo um mecanismo para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$. Nas duas subseções seguintes iremos impor sobre o campo condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas, respectivamente. Nosso objetivo inicial será determinar um comprimento crítico para o qual a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ seja garantida. Uma vez que estamos lidando com condições de contorno que permitem soluções de campo constante diferentes de zero, se a escala de comprimento da teoria for maior que a crítica, uma solução de campo constante poderá ser imediatamente obtida por meio do mínimo do potencial clássico da teoria. O fato de trabalharmos com uma teoria quântica de campos nos conduzirá a grandezas divergentes e por isto precisaremos de uma técnica de regularização para contornar esta dificuldade. Escolheremos usar como método de regularização a função zeta generalizada. Enfim, faremos o que foi proposto e terminaremos o capítulo comentando sobre algumas considerações feitas e sobre os resultados obtidos.

4.2 Mecanismo para estudar a estabilidade da solução

$$\phi_0 = 0$$

Seja a teoria para o campo escalar real dada pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4. \quad (4.1)$$

Partindo da situação em que $\phi_0 = 0$ é inicialmente uma solução de campo instável, devemos fazer $m = iM$ com M real e maior do que zero. Desta forma, a densidade de lagrangeana (4.1) será escrita como

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4. \quad (4.2)$$

¹Uma correção radiativa para estas teorias usando o potencial efetivo pode ser encontrada nas referências [13] e [15].

O potencial clássico é do tipo de Higgs e é identificado como sendo

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi^4, \quad (4.3)$$

com mínimo degenerado dado por

$$\phi_{\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}. \quad (4.4)$$

Visto que uma teoria de campos pode ser definida a partir do *funcional gerador das funções de Green*, $Z[J]$, também conhecido como *amplitude de persistência do vácuo* sob a influência de fontes de campos externos, $J(x)$, usaremos esta abordagem para calcular a energia e a partir desta última faremos nossa análise. O funcional gerador das funções de Green está relacionado com o funcional gerador das funções de Green conexas, $W[J]$, por [16, 30]

$$Z[J] = \exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \frac{\langle 0^+|0^- \rangle_J}{\langle 0^+|0^- \rangle}, \quad (4.5)$$

onde $\langle 0^+|0^- \rangle_J$ é a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa $J(x)$. E, ainda, como já foi dito, $Z[J]$ é o funcional gerador das funções de Green (conexas e desconexas). O funcional gerador das funções de Green conexas no espaço-tempo euclidiano está relacionado à energia do sistema perturbado pela fonte, através de

$$\exp\left\{\frac{1}{\hbar}W[J]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}E(J)\tau\right\}. \quad (4.6)$$

Mas,

$$W[J] = -S[\phi, J] - \frac{\hbar}{2} \ln(\det A) + O(\hbar^2) \quad (4.7)$$

onde $S[\phi, J]$ é a ação clássica do sistema e A são os auto-valores do operador $[-\square + V''(\phi)]$.

Então, considerando termos até a primeira ordem em \hbar , a energia no espaço-tempo euclidiano será dada por

$$E[\phi] = \int d^4x \{ \phi(-\square)\phi + V(\phi) \} + \frac{\hbar}{2} \ln \{ \det(A) \}. \quad (4.8)$$

Para obter os auto-valores de A , expandiremos uma função $\psi(x)$ em uma base de ondas planas elementares, $\exp(ikx)$. Assim, a auto-função $\psi_k(x)$ deverá satisfazer a equação

$$[-\square + V''(\phi)] \psi_k(x) = \alpha_k \psi_k(x), \quad (4.9)$$

com

$$\psi_k(x) \propto \exp(ikx). \quad (4.10)$$

Então

$$[-\square + V''(\phi)] \psi_k(x) = (k^2 + V''(\phi)) \psi_k(x). \quad (4.11)$$

Portanto,

$$\alpha_k = (k^2 + V''(\phi)). \quad (4.12)$$

Agora notando que para um operador \hat{A} , diagonal, temos,

$$\det A = \det \left(\langle k | \hat{A} | k \rangle \right) = \prod_k \langle k | \hat{A} | k \rangle = \prod_k \alpha_k. \quad (4.13)$$

Tomando o logaritmo natural desta equação ficaremos com

$$\ln(\det A) = \ln \left(\prod_k \alpha_k \right) = \text{Tr} \ln(\alpha_k) = \sum_k \ln(\alpha_k). \quad (4.14)$$

Se os k forem contínuos, teremos

$$\ln(\det A) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \int d^4k \ln [k^2 + V''(\phi)]. \quad (4.15)$$

Portanto, usando a equação (4.12), podemos escrever a energia como

$$E[\phi] = \int d^4x \{ \phi(-\square)\phi + V(\phi) \} + \frac{\hbar}{2} \ln \{ \det [k^2 + V''(\phi)] \}. \quad (4.16)$$

Uma vez que iremos analisar soluções do tipo $\phi = \phi_0$, ou seja, soluções de campo uniforme; a derivada funcional passará agora a ser uma derivada ordinária com respeito

a ϕ_0 . Desta forma, o que nos irá interessar é saber qual ϕ_0 uniforme², entre um conjunto $\{\phi_0\}$, que minimiza $E(\phi_0)$. Para ϕ_0 uniforme a equação (4.16) reduz-se a

$$E(\phi_0) = \int d^4x V(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \ln \{ \det [k^2 + V''(\phi_0)] \}. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) pode ainda ser escrita como,

$$E(\phi_0) = \Omega V(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \ln \{ \det [k^2 + V''(\phi_0)] \}, \quad (4.18)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo. Usando a propriedade (4.14), a equação (4.18) assume a forma

$$E(\phi_0) = \Omega V(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln [k^2 + V''(\phi_0)]. \quad (4.19)$$

Se $\phi_0 = 0$ for uma solução de campo estável, deveremos ter necessariamente

$$\left. \frac{dE(\phi_0)}{d\phi_0} \right|_{\phi_0=0} = 0 \quad (4.20)$$

e

$$\left. \frac{d^2E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} > 0. \quad (4.21)$$

Derivando a equação (4.19), obteremos

$$\frac{dE(\phi_0)}{d\phi_0} = \Omega V'(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \left[\frac{V'''(\phi_0)}{k^2 + V''(\phi_0)} \right] \quad (4.22)$$

e

$$\frac{d^2E(\phi_0)}{d\phi_0^2} = \Omega V''(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \left[\frac{V^{iv}(\phi_0)}{k^2 + V''(\phi_0)} - \frac{(V'''(\phi_0))^2}{(k^2 + V''(\phi_0))^2} \right]. \quad (4.23)$$

Sendo $V(\phi_0) = -\frac{1}{2}M^2\phi_0^2 + \frac{1}{12}\beta^2\phi_0^4$, quando calculamos $\frac{dE(\phi_0)}{d\phi_0}$ em $\phi_0 = 0$ obtemos imediatamente um valor nulo, enquanto que para $\frac{d^2E(\phi_0)}{d\phi_0^2}$, em $\phi_0 = 0$, obtemos

$$\left. \frac{d^2E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = -\Omega M^2 + \hbar\beta^2 \text{Tr} \left[(k^2 - M^2)^{-1} \right]. \quad (4.24)$$

²É claro que só podemos considerar esta situação se nossas condições de contorno permitirem soluções uniformes, que é exatamente o nosso caso.

Escolhendo por conveniência fazer $v = iM \rightarrow v^2 = -M^2$, teremos

$$\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \Omega v^2 + \hbar \beta^2 \text{Tr} \left[(k^2 + v^2)^{-1} \right]. \quad (4.25)$$

A substituição, $v = iM$, implica na extensão de $\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0}$ para v imaginário. Por isto, deveremos tomar a parte real desta derivada no final dos cálculos. Aqui, até o presente momento, não encontramos problemas em se fazer tal extensão, pois não estamos deixando de fora a região de interesse, $\phi_0 = 0$, a propósito, esta região já foi previamente explicitada nos cálculos. No entanto podemos futuramente enfrentar alguns problemas, pois poderemos nos deparar com funções matemáticas que não sejam bem definidas nessa situação. Este será um assunto que deixaremos para discutir com mais detalhes nas considerações finais deste capítulo.

4.2.1 Correção radiativa para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas

Escolheremos trabalhar numa região tal que o campo ϕ seja função das coordenadas em um espaço topológico $M^3 \times S^1$, onde M^3 é o espaço tridimensional de Minkowski e S^1 é um espaço compactificado em uma circunferência de comprimento a . Exigiremos que a coordenada no espaço S^1 satisfaça condições de contorno periódicas, ou seja,

$$\phi(\alpha, x^s) = \phi(\alpha, x^s + a), \quad (4.26)$$

onde x^s é a coordenada no espaço S^1 e α representa as coordenadas no espaço M^3 .

Agora impondo as condições de contorno periódicas e de posse das relações (4.14) e (4.15), a equação (4.25) assume a forma³

$$\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \Omega v^2 + \hbar \frac{\Omega \beta^2}{(2\pi)^3 a} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int d^3 k \left[k^2 + \left(\frac{2N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-1}. \quad (4.27)$$

A equação acima é divergente, por isto precisamos de um método de regularização para contornar esta dificuldade. Para tal fim, utilizaremos o método da função zeta

³Onde usamos o fato da soma do espectro contínuo ser substituída por uma integral, ou seja, $\sum f(k) \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \int d^3 k f(k)$.

generalizada. Portanto, definindo

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} \int d^3k \left[k^2 + \left(\frac{2N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-(s+1)} = \zeta(s+1). \quad (4.28)$$

e usando a relação (veja Apêndice A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + A^2)^{-s} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad \text{para } A^2 > 0, \quad (4.29)$$

teremos

$$\zeta(s+1) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{4N^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right)^{s-1/2}, \quad (4.30)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \zeta(s+1) &= \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} v^{1-2s} + \\ &+ 2\pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{1-2s} \sum_{N=1}^{\infty} \left(N^2 + \frac{a^2 v^2}{4\pi^2} \right)^{1/2-s}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A somatória da equação (4.31) tem a forma $\sum_N (N^2 + B^2)^{-p}$, ou seja, a forma da função zeta de Epstein-Hurwitz, cuja continuação analítica é dada por (veja Apêndice B)

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\left. + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando a continuação analítica da função de Epstein-Hurwitz, ficaremos com⁴

$$\zeta(s+1) = \frac{\pi a}{2} \frac{v^{2-2s}}{s(s-1)} + \frac{2\pi a}{\Gamma(s+1)} v^{2-2s} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-1}(Nav)}{(Nav/2)^{1-s}}. \quad (4.33)$$

⁴No primeiro termo do lado direito da equação (4.33) usamos a propriedade $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1)$.

O primeiro termo da equação (4.33) tem um pólo simples em $s = 0$. Para eliminar esta divergência usaremos a prescrição de Salam e Strathdee [38], que consiste em multiplicar o primeiro termo por s e derivar o resultado em $s = 0$, ou seja,

$$\frac{d}{ds} (sf(s)) \Big|_{s=0} = (f(s) + sf'(s)) \Big|_{s=0} = f(0), \quad (4.34)$$

com $f(s) = \frac{\pi a}{2} \frac{v^{2-2s}}{s(s-1)}$. Assim, teremos então

$$\zeta(s+1) \Big|_{s=0} = \frac{\pi av^2}{2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] + 2\pi av^2 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{-1}(Nav)}{(Nav/2)}, \quad (4.35)$$

onde μ é um parâmetro de escala introduzido⁵ a fim de mantermos a função zeta adimensional para todo s .

Sendo

$$K_{-1}(x) = K_1(x) \quad (4.36)$$

e levando em conta as considerações anteriores, a equação (4.27) se torna

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} &= \Omega \left\{ v^2 + \frac{\hbar\beta^2 v^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hbar\beta^2 v^2}{4\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

O segundo termo da equação (4.37) é proporcional a \hbar , o que o torna desprezível quando comparado ao termo clássico. Para o terceiro termo, no entanto, a presença do parâmetro a , incluído na teoria pelas condições de contorno, permite que, para alguma ordem de grandeza deste parâmetro, esta correção se torne de ordem clássica. Para a análise da influência deste último termo vamos introduzir um número inteiro $m \geq 0$ tal que $mav < 1$ e $(m+1)av \geq 1$, de modo que podemos dispor a soma em duas partes como

⁵Este parâmetro de escala pode aparecer naturalmente se usarmos a definição da zeta na forma $\zeta_M(s) = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu^2} \right)^{-s}$.

$$\frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)} = \frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \sum_{N=1}^m \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)} + \frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \sum_{N=m+1}^{\infty} \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)}. \quad (4.38)$$

Sendo K_1 uma função decrescente de seu argumento, o segundo termo do lado direito da equação (4.38) é dominado pelo primeiro termo desta série, sendo portanto de ordem \hbar . Ou seja,

$$\frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \sum_{N=m+1}^{\infty} \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)} \approx \frac{\hbar\beta^2v^2}{2\pi^2} \frac{K_1((m+1)av)}{((m+1)av)}. \quad (4.39)$$

Uma vez que $(m+1)av \geq 1$, teremos

$$\frac{\hbar\beta^2v^2}{2\pi^2} \frac{K_1((m+1)av)}{((m+1)av)} \approx \frac{\hbar\beta^2v^2}{2\pi^2} K_1(1), \quad (4.40)$$

o que mostra que este termo é de ordem \hbar e por isto iremos desprezá-lo. Já para o primeiro termo do lado direito da equação (4.38) o argumento de K_1 é menor do que um, o que nos permite usar a expansão [3, 11]

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^m K_m(x) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \frac{\Gamma(m-l)}{\Gamma(l+1)} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+l)}}{\Gamma(l+1)\Gamma(m+l+1)} \left[\Psi(l+1) + \right. \\ &\left. + \Psi(m+l+1) - 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

válida para m inteiro e maior do que zero. Desta maneira, a somatória (4.38) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_1(Nav)}{(Nav/2)} &= \frac{\hbar\beta^2}{2\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} - \frac{\hbar\beta^2v^2}{4\pi^2} \left[\psi(1) + \psi(2) + \right. \\ &\left. - 2 \ln\left(\frac{Nav}{2}\right) + O(a^2v^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Desprezando os termos de ordem \hbar , teremos

$$\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \Omega \left\{ v^2 + \frac{\hbar\beta^2}{2\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} \right\}. \quad (4.43)$$

Se m for suficientemente grande, podemos fazer

$$\sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} \approx \zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (4.44)$$

onde ζ_R é a função zeta de Riemann. Agora sabendo que $v^2 = -M^2$ não será necessário tomarmos a parte real da equação (4.43), pois a mesma é um número real puro. Portanto, teremos

$$\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \Omega \left\{ -M^2 + \frac{\hbar\beta^2}{12a^2} \right\}. \quad (4.45)$$

O comprimento crítico será obtido quando $\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = 0$. Segue-se então que

$$a_c^2 = \frac{\hbar\beta^2}{12M^2}. \quad (4.46)$$

Portanto, se $a < a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é estável e, portanto, é vácuo da teoria. O que mostra que a contribuição advinda das correções radiativas foi capaz de garantir a estabilidade desta solução. Entretanto se $a > a_c$ esta solução não é mais estável, o que nos obriga a partir em busca de uma nova solução. Esta nova solução, no entanto, pode ser facilmente obtida, pois as condições de contorno periódicas admitem soluções de campo constante diferentes de zero. A solução procurada é obtida tomando-se o mínimo do potencial clássico, equação (4.3). Portanto, a solução será o mínimo degenerado dado por

$$\phi_{0\pm} = \pm\sqrt{3}\frac{M}{\beta}. \quad (4.47)$$

4.2.2 Correção radiativa para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas

Para estudarmos a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$, quando o campo é submetido às condições de contorno de Neumann homogêneas, iremos exigir que a derivada, $\frac{d\phi}{dz}$, se anule em $z = \pm a/2$. Nas direções x e y tomaremos os limites $a_x, a_y \rightarrow \infty$. Neste caso, a imposição das condições de contorno nos fornece

$$\frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = \Omega v^2 + \hbar \frac{\Omega \beta^2}{(2\pi)^3 a} \sum_{N=0}^{\infty} \int d^3 k \left[k^2 + \left(\frac{N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-1}. \quad (4.48)$$

Da mesma forma, definindo

$$\sum_{N=0}^{\infty} \int d^3 k \left[k^2 + \left(\frac{N\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-(s+1)} = \zeta(s+1). \quad (4.49)$$

Usando a relação (4.29), teremos

$$\zeta(s+1) = \sum_{N=0}^{\infty} \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{N^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right)^{s-1/2}. \quad (4.50)$$

Destacando o termo $N = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \zeta(s+1) &= \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} v^{1-2s} + \\ &+ \pi^{3/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1-2s} \sum_{N=1}^{\infty} \left(N^2 + \frac{a^2 v^2}{\pi^2} \right)^{1/2-s}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

A somatória da equação (4.51) tem a forma $\sum_N (N^2 + B^2)^{-p}$, ou seja, a forma da função zeta de Epstein-Hurwitz, cuja continuação analítica é dada por (veja Apêndice B)

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{1/2}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\left. + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando a continuação analítica da função de Epstein-Hurwitz, ficaremos com

$$\begin{aligned}\zeta(s+1) &= \frac{\pi^{3/2}}{2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s+1)} v^{1-2s} + \frac{\pi a}{2} \frac{v^{2-2s}}{s(s-1)} + \\ &+ 2\pi a \frac{v^{2-2s}}{\Gamma(s+1)} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{s-1}(2Nav)}{(Nav)^{1-s}}.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Agora usando as considerações da subseção anterior, podemos fazer

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_1(2Nav)}{(Nav)} = \sum_{N=1}^m \frac{K_1(2Nav)}{(Nav)} + \sum_{N=m+1}^{\infty} \frac{K_1(2Nav)}{(Nav)}.\quad (4.54)$$

Analogamente ao que foi feito e de posse das relações (4.34) e (4.41), teremos

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} &= \Omega \left\{ v^2 - \frac{\hbar\pi^{3/2}\beta^2}{(2\pi)^3 a} + \frac{\hbar\beta^2 v^2}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{v^2}{\mu^2}\right) - 1 \right] + \right. \\ &+ \sum_{N=1}^m \left[\frac{\hbar\beta^2}{8\pi^2 a^2} \frac{1}{N^2} + \frac{\hbar\beta^2 v^2}{4\pi^2} (\psi(1) + \psi(2) - 2\ln(Nav)) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\hbar\beta^2 v^2}{4\pi^2} O(Nav)^2 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.55)$$

O terceiro e o quinto termo em diante da equação (4.55) são proporcionais a \hbar , o que os tornam desprezíveis quando comparados ao termo clássico. Para o segundo e o quarto termo, no entanto, a presença do parâmetro a , incluído na teoria pelas condições de contorno, permite que, para alguma ordem de grandeza deste parâmetro, estas correções se tornem de ordem clássica. Levando em conta estas considerações a equação (4.55) reduz-se a

$$\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = \Omega \left\{ v^2 - \frac{\hbar\pi^{3/2}\beta^2}{(2\pi)^3 a} + \frac{\hbar\beta^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} \right\}.\quad (4.56)$$

Entretanto o segundo termo da equação (4.56) é proporcional a^{-1} , enquanto o terceiro é proporcional a a^{-2} . Assim, para pequenos valores de a , que é a região em que estes

termos podem se tornar de ordem clássica, o segundo termo será desprezível em relação ao terceiro. Então, a equação (4.56) assumirá a forma

$$\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = \Omega \left\{ v^2 + \frac{\hbar\beta^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} \right\}. \quad (4.57)$$

Se m for suficientemente grande, podemos fazer

$$\sum_{N=1}^m \frac{1}{N^2} \approx \zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4.58)$$

Da mesma forma que ocorreu no caso das condições de contorno periódicas, não há necessidade de tomarmos a parte real da equação (4.57), pois uma vez que $v^2 = -M^2$ a mesma será um número real puro. Portanto, teremos

$$\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = \Omega \left\{ -M^2 + \frac{\hbar\beta^2}{48a^2} \right\}. \quad (4.59)$$

Uma vez que o comprimento crítico será obtido quando $\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = 0$, segue-se que

$$a_c^2 = \frac{\hbar\beta^2}{48M^2}, \quad (4.60)$$

Portanto, se $a < a_c$ a solução $\phi_0 = 0$ é estável e, portanto, é vácuo da teoria. O que mostra que a contribuição advinda das correções radiativas foi capaz de garantir a estabilidade desta solução. Entretanto se $a > a_c$ esta solução não é mais estável, o que nos obriga a procurarmos uma nova solução. Esta nova solução, no entanto, pode ser facilmente obtida, pois as condições de contorno de Neumann homogêneas também admitem soluções de campo constante diferentes de zero. A solução procurada é obtida, da mesma forma que no caso das condições de contorno periódicas, tomando-se o mínimo do potencial clássico, equação (4.3). Portanto, a solução será o mínimo degenerado dado por

$$\phi_{0\pm} = \pm \sqrt{3} \frac{M}{\beta}. \quad (4.61)$$

4.3 Correções radiativas: Considerações finais

Ao realizarmos os cálculos para obtermos a função zeta generalizada, utilizamos a continuação analítica da função de Epstein-Hurwitz. Esta função se apresenta sobre a seguinte forma $\sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p}$. Uma vez que a função zeta generalizada é definida para operadores elípticos, deveremos ter necessariamente que $B^2 > 0$. Entretanto, $B^2 \propto v^2 < 0$. Portanto, deveríamos ter sido mais rigorosos neste cálculo utilizando funções matemáticas definidas para operadores hiperbólicos e não elípticos. Contudo, não encontramos tais funções na literatura. Por isto utilizamos funções definidas para operadores elípticos, e, como forma de constatar a validade de nossos cálculos, comparamos os mesmos com os obtidos nas referências [13] e [15]. Nestas referências os cálculos foram feitos utilizando a técnica do potencial efetivo por meio de uma construção de Maxwell. Frente a essa dificuldade, estendemos $\left. \frac{d^2 E(\phi_0)}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0}$ para v imaginário sem nos preocuparmos em obter uma expressão bem definida para a função de Epstein-Hurwitz, mas, em vez disto, nos preocupamos em tomar a parte real da derivada no final dos cálculos. No entanto, isto não foi preciso ser feito, porque os termos da série de potências para a função de Bessel modificada de segunda espécie, equação (4.37), que poderiam nos dar um resultado imaginário, foram desprezados por darem uma contribuição de ordem quântica à derivada segunda da energia. E, o que é mais importante, é que nossos cálculos estão de acordo com os obtidos nas referências [13] e [15], dando assim credibilidade a nosso trabalho.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Conclusões

Ao longo do nosso trabalho, em particular do capítulo 3, estudamos um mecanismo para analisar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ utilizando derivadas funcionais. Entretanto, poderíamos ter utilizado derivadas ordinárias ao trabalharmos com as condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas, por estas permitirem soluções de campo constante diferentes de zero. Porém, preferimos empregar derivadas funcionais pela sua aplicabilidade geral. Esta aplicabilidade geral nos possibilitou obter o *ground state* da teoria dependente espacialmente (quando o campo é submetido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas e antiperiódicas), o que viola a simetria da invariância translacional do vácuo. Já no estudo das condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas concluímos que não há possibilidade da solução de campo $\phi_0 = 0$ tornar-se estável quando a análise é feita a partir de uma abordagem puramente clássica. Então, nos perguntamos se seria possível garantir a estabilidade da solução de campo nulo partindo de uma teoria com correções radiativas. Fizemos esta análise no capítulo 4 onde nossos cálculos apesar de não serem rigorosos, devido a má definição da função de Epstein-Hurwitz, os mesmos estão de pleno acordo com os das referências [13] e [15], o que confere credibilidade aos nossos cálculos. A principal conclusão que nossos resultados nos permitiu chegar é que as correções radiativas contribuem para a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$, quando o campo é submetido às condições de contorno periódicas e de Neumann homogêneas. Para isto foi preciso considerar a relação $a < a_c$. Esta consideração tem o papel de fazer com que as contribuições advindas das correções radiativas tornem-se de ordem clássica, permitindo que a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ seja estabelecida. Poderíamos ter encarado este resultado como a restauração da simetria do sistema. Esta análise é feita em detalhes nas referências [13] e [15]. Contudo, preferimos abordar a estabilidade da solução $\phi_0 = 0$. Nossas correções radiativas são oriundas do método funcional da teoria de campos (as integrais de trajetórias) e nosso mecanismo para o estudo da estabilidade da solução $\phi_0 = 0$ só permite analisar a estabilidade de soluções uniformes. Caso quiséssemos realizar correções radiativas da solução $\phi_0(z)$, solução obtida no capítulo 3, as derivadas ordinárias empregadas no cálculo do mecanismo de estudo da estabilidade no capítulo 4 deveriam ser, necessariamente, substituídas por derivadas funcionais. Por outro lado, esta tarefa não é algo simples de ser realizada devido à complexidade das funções matemáticas envolvidas no cálculo. Questões como estas nos permitem sugerir como possíveis trabalhos futuros o estudo de uma maneira de se obter correções radiativas para a solução $\phi_0(z)$, como também empregar este mecanismo de estudo da estabilidade para outros campos em geral.

Capítulo 6

Apêndices

6.1 Apêndice A

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2} - s}.$$

A função $\Gamma(s)$ é definida por [1]

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (6.1)$$

De início convém optarmos pela substituição $y = K^2 + A^2$ na equação anterior. Segue-se então que

$$(K^2 + A^2)^{-s} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} y^{s-1} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (6.2)$$

Dividindo ambos os membros por $\Gamma(s)$, (6.2) se torna

$$(K^2 + A^2)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x(K^2 + A^2)} dx. \quad (6.3)$$

Agora, com a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p^2) d^n p = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^{\infty} p^{N-1} f(p^2) dp, \quad (6.4)$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{\infty} K^{m-1} (K^2 + A^2)^{-s} dK. \quad (6.5)$$

Com o uso de (6.3) no segundo membro de (6.5) teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-xA^2} dx \int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK. \quad (6.6)$$

A integral em K pode ser reescrita usando a mudança de variável $z = xK^2$, obtendo-se

$$\int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \int_0^{\infty} z^{\frac{m-2}{2}} e^{-z} dz, \quad (6.7)$$

ou seja,

$$\int_0^{\infty} K^{m-1} e^{-xK^2} dK = \frac{x^{-\frac{m}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right). \quad (6.8)$$

Resolvida a integral em K , (6.6) torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-\frac{m}{2}-1} e^{-xA^2} dx. \quad (6.9)$$

Usando $s' = s - \frac{m}{2}$ e $K = 0$ na integral em (6.3), a expressão para (6.9) será dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K^2 + A^2)^{-s} d^m K = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{m}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s}, \quad (6.10)$$

e está demonstrado o resultado.

6.2 Apêndice B

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{1}{2}B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Reportando-se ao resultado (6.3), o somatório acima será dado por

$$\sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t(N^2+A^2)} dt. \quad (6.12)$$

Permutando a integral com o somatório, obtêm-se

$$\sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-1} e^{-tA^2} \left(\sum_{N=1}^{\infty} e^{-tN^2} \right). \quad (6.13)$$

O somatório no segundo membro acima é dado, de acordo com a fórmula de Poisson [18], por

$$\sum_{N=1}^{\infty} e^{-tN^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}. \quad (6.14)$$

Substituindo (6.14) em (6.13) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{1}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-1} e^{-tA^2} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} \sum_{N=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Frente à definição da função gama (6.1), a equação (6.15) se torna

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{(A^2)^{-p}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(p)} (A^2)^{\frac{1}{2}-p} + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt t^{p-\frac{3}{2}} e^{-tA^2} e^{-\frac{\pi^2 N^2}{t}}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde no último termo novamente foram permutados o somatório e a integral. Fazendo uso da expressão [1, 3]

$$\int_0^{\infty} dt t^{\nu-1} e^{-\left(\frac{a}{t}+bt\right)} = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(2\sqrt{ab}), \quad a, b > 0, \quad (6.17)$$

onde K_{ν} é a função de Bessel modificada de ordem ν , a equação (6.16) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{(A^2)^{-p}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(p)} (A^2)^{\frac{1}{2}-p} + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p)} \sum_{N=1}^{\infty} 2 \left(\frac{\pi N}{A}\right)^{p-\frac{1}{2}} K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi a N), \end{aligned} \quad (6.18)$$

ou, reescrevendo,

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} (N^2 + B^2)^{-p} &= -\frac{1}{2} B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ &\left. + 4 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi NB)}{(N\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Como queríamos demonstrar.

6.3 Apêndice C

Neste apêndice é demonstrada a relação

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M}{ds}(0) = -\zeta_A(0) \ln \mu^2 - \frac{d\zeta_A}{ds}(0), \quad (6.20)$$

onde $M = \frac{A}{\mu^2}$, A é um operador com auto-valores $\{\lambda_i\}$ e μ é um parâmetro de escala.

Definindo a função zeta generalizada associada ao operador A como

$$\zeta_A(s) = \sum_i \lambda_i^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (6.21)$$

e notando que a equação (6.21) pode ser escrita na forma

$$\zeta_A(s) = \sum_i \exp[\ln \lambda_i^{-s}] = \sum_i \exp[-s \ln \lambda_i], \quad (6.22)$$

a derivada da função zeta será

$$\zeta'_A(s) = -\sum_i \ln(\lambda_i) \exp[-s \ln \lambda_i]. \quad (6.23)$$

Que quando calculada em $s = 0$ fica,

$$\zeta'_A(0) = -\sum_i \ln \lambda_i = -\ln \left(\prod_i \lambda_i \right). \quad (6.24)$$

Desta forma,

$$\ln \det A = -\zeta'_A(0). \quad (6.25)$$

Agora fazendo uma transformação de escala do tipo $A \longrightarrow A/\mu^2$, a fim de mantermos a definição da zeta adimensional para todo s , teremos

$$\zeta_M(s) = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu^2} \right)^{-s}, \quad (6.26)$$

ou

$$\zeta_M(s) = \mu^{2s} \sum_i \lambda_i^{-s} = \mu^{2s} \zeta_A(s). \quad (6.27)$$

Derivando, obteremos

$$\zeta'_M(s) = \mu^{2s} \zeta_A(s) \ln \mu^2 + \mu^{2s} \zeta'_A(s). \quad (6.28)$$

Então, em $s = 0$, teremos

$$\zeta'_M(0) = \zeta_A(0) \ln \mu^2 + \mu^{2s} \zeta'_A(0) = -\ln \det M. \quad (6.29)$$

Portanto,

$$\ln \det M = -\frac{d\zeta_M}{ds}(0) = -\zeta_A(0) \ln \mu^2 - \frac{d\zeta_A}{ds}(0), \quad (6.30)$$

e a demonstração está concluída.

Referências bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] Actor, A.; Fortschr. Phys. **35**(12), 793 (1987).
- [2] Aitchison, I. J. R.; Contemp. Phys. 26(4), 333-391 (1985).
- [3] Arfken, G. B and Weber, H. J.; *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 1995), 4th Ed..
- [4] Ashok Das; *FIELD THEORY a path integral approach* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1993).
- [5] Avis, S. J. and Isham, C. J.; Proc. Roy. Soc. (London) A **363**, 581 (1978).
- [6] Baker, A. L.; *Elliptic Functions*, (An Elementary Text-Book for Students of Mathematics) (Wiley, New York, 1980), 1st Ed..
- [7] Bezerra, V. A.; *Racionalidade, Consistência, Reticulação e Coerência: o caso da Renormalização na Teoria do Campo*. Scientiae Studia 1(2), p. 151-181 (2003).
- [8] Bordarg, M., Mohideen, U., Mostepanenko, V. M.; Phys. Rept. 353:1-205 (2001), quant-ph/0106045.
- [9] Boyer, T. H.; Phys. Rev. **174**, 1764 (1968).
- [10] Brown, L. S.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [11] Butkov, E.; *Física Matemática* (Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1978).
- [12] Casimir, H. G. B.; Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948).
- [13] Possa, D.; *Condições de Contorno Periódicas Como Restauradoras da Simetria*, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2004).

- [14] Cougo-Pinto, M. V., Farina, C. e Tort, A. C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **22**(1), 122 (2000).
- [15] Pereira, F.; *Condições de contorno de Neumann Homogêneas como restauradoras da simetria*, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2005).
- [16] Huang, K.; *Quarks Leptons & Gauge Fields* (World Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).
- [17] Abramowitz, M; Stegun; Stegun; *Handbook of Mathematical Functions* (National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1965).
- [18] Iliopoulos, J., Itzykson, C. and Martin, A.; Rev. Mod. Phys., **47**, 165 (1975).
- [19] Jackiw, R.; Phys. Rev., **D9**(6), 1686 (1974).
- [20] Kaku, M.; *QUANTUM FIELD THEORY A Modern introduction (Oxford University Press, New York, 1993)*.
- [21] Lamoureux, S. K.; Phys. Rev. Lett. **28**, 5 (1997).
- [22] Lee, S. Y and Sciacaluga, A. M.; Nucl. Phys. **B96**, 435 (1975).
- [23] Milton, K. A.; J. Phys. **A37**, R209 (2004), hep-th/0406024.
- [24] Mohideen, U. and Roy, A.; Phys. Rev. Lett. **81**, 21 (1998).
- [25] Mostepanenko, V. M. and Trunov, N. N.; *The Casimir effect and its applications. Oxford, UK. Claredon, 1997*.
- [26] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T.; *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).
- [27] Nogueira, J. A. e Maia Jr., A.; Rev. Bras. Ens. Fís. **24**(3), 306 (2002).
- [28] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B358**, 56 (1995).
- [29] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B394**, 371 (1997).
- [30] Possa, D., Pereira, F. e Nogueira, J. A.; Rev. Bras. Ens. Fis. **27**(3), 413 (2005).
- [31] Plunien, G., Müller, B. and Greiner, W.; Phys. Rept. 134: 89-193 (1986).
- [32] Passos Sobrinho, J. J. e Tort, A. C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **23**(4), 401 (2001).

- [33] Ramond, P.; *FIELD THEORY A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).
- [34] Rivers, R. J.; *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [35] Ryder, L. H.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [36] Ribeiro Filho, A.; Vasconcelos, D. S.; *Introdução ao Cálculo das Funções Elípticas Jacobianas* (Centro Editorial e Didático da UFBA, 1994).
- [37] Sakamoto, M., Tachibana, M. and Takenaga, K.; Phys. Lett. **B 457**, 33 (1999).
- [38] Salam, A and J.Strathdee; Nucl. Phys. **B90**, 203 (1975).
- [39] Sparnaay, M. J.; Physica 24, 751 (1958).
- [40] Toms, D. J.; J. Phys. **A(36)**, 5121 (2003).
- [41] E. T. Whittaker and G. N. Watson; *Modern Analysis* (Cambridge University Press, London, 1928).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)