Dissertação de

Mestrado

Anomalia axial na amplitude AVV em dimensão D=1+1

Daniel Santos Souza

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, 31 de Agosto de 2010

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Agradeço aos Profs. Orimar Antônio Battistel e José A. Helayël-Neto por toda a sua dedicação, companheirismo, estímulo, paciência e pelos ensinamentos.

Agradeço a todos os familiares que torceram por mim ao longo desta caminhada.

Agradeço à Capes pelo financiamento do meu mestrado, sem o qual dificilmente o teria completado, e ao CBPF pela oportunidade oferecida e por todo o apoio.

Resumo

O estudo de teorias quânticas de campos em baixa dimensionalidade tornou-se objeto de interesse, ao longo do tempo, devido a sua relativa simplicidade, no que diz respeito às manipulações e cálculos, sendo assim possível contemplar de maneira mais clara os aspectos matemáticos e formais envolvidos. Um desses aspectos, o qual é explorado neste trabalho, é a ocorrência de anomalias, associadas às relações de simetria a qual envolvem amplitudes perturbativas em duas dimensões (D=1+1), e tudo o que está associado a isso. Para tanto é necessário ter em mãos uma prescrição, ou filosofias equivalentes, capazes de ser consistente e ao mesmo tempo geral, no que diz respeito às manipulações e cálculos. Tendo isso em mente, consideremos neste trabalho uma nova estratégia para manipulação de amplitudes em soluções perturbativas de Teoria Quânticas de Campos formuladas em (D=1+1), ao nível de um e dois e três "loops", tendo em vista a não existência de restrição de aplicabilidade e sucesso obtido com este método em outros estudos.

Abstract

The study of theories of quantum fields in low dimensionality has become the object of interest, over time, due to its relative simplicity, as regards manipulations and calculations, thus possible to contemplate a more clear and formal mathematical aspects involved.

One of these aspects, which is explored in this paper, is the occurrence of anomalies, associated with the relations of symmetry which involve perturbativas amplitudes in two-dimensional (2D), and all that is associated with it.

For that you need to get a prescription, or equivalent philosophies, able to be consistent, while general, with regard to mathematical manipulation.

With that in mind, consider this work a new strategy for handling of amplitudes in solutions perturbativas of Quânticas Field Theory formulated in 2D, to the level of one, two and three "loops"in view of the lack of restriction on applicability and success with this method in other studies.

Conteúdo

Agradecimentos i

Resumo ii

Abstract iii

Índice iv

1 Introdução Geral **1**

2 Modelo, Amplitudes e Relações entre Funções de Green **7**

2.1 Introdução 7

2.2 Amplitudes triangulares 11

2.3 Relações entre Funções de Green 15

3 A Estratégia para o Cálculo das Integrais de Feynman **18**

3.1 Integrais de Feynman 20

3.1.1 Cálculo das integrais de Feynman 21

4 Amplitudes Físicas **30**

4.1 Cálculo das Funções de Green de Um Ponto 30

4.2 Cálculo das Funções de Green de dois Pontos 31

4.3 Cálculo das Funções de Green de Três Pontos 34

5 Consistência no cálculo perturbativo bidimensional e anomalia AV **37**

5.1 Introdução 37

5.2 A amplitude VV e a consistência no cálculo perturbativo 38

5.3 A amplitude anômala AV 41

6 Verificação das relações entre funções de Green para a amplitude AVV 46

7 Comentários finais e conclusões 55

A Álgebra das matrizes de Dirac 59

B Parametrização de Feynman 63

C Integração Dimensional 66

Capítulo 1

Introdução Geral

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é, sem dúvida, uma ferramenta muito importante para a compreensão e entendimento dos fenômenos envolvendo partículas. Ao longo do tempo, esse aparato teórico tem obtido muito sucesso na descrição dos fenômenos envolvendo a dinâmica de partículas interagentes, bem como servido de base para a criação e elaboração de novas teorias. A importância da TQC não se restrige à física de altas energias. Atualmente importantes aspectos de outras áreas da física como, por exemplo, a física da matéria condensada (fenômenos críticos, física do grafeno), valem-se dos métodos da TQC o que torna ainda mais evidente a relevância dela para o entendimento dos fenômenos ao nível quântico.

Existem, entretanto, questões em aberto no que se refere aos fenômenos das partículas interagentes, tanto teóricas quanto experimentais. Como tal, questões relativas ao setor de Higgs no modelo Weinberg-Salam-Glashow, o confinamento de quarks e glúons, descrito pela Cromodinâmica Quântica e as inevitáveis violações em relações de simetria em amplitudes físicas (anomalias). Tais problemas não invalidam a TQC como formalismo, uma vez que é neste cenário que as melhores concordâncias entre resultados experimentais e predições teóricas são obtidas. Mais precisamente nos referimos ao contexto da teoria quântica do campo eletromagnético (ou eletrodinâmica quântica). Portanto, esse aparato é uma ferramenta essencial para a compreensão de tais fenômenos, mesmo que

ainda existam aspectos merecendo esclarecimentos adicionais.

Entre os aspectos acima referidos, um aspecto que se destaca é a questão das inevitáveis violações de relações de simetria. Isto porque as simetrias desempenham um papel crucial no contexto de TQC. As propriedades importantes de sistemas físicos são implementadas através de invariâncias frente a transformações de gauge locais e globais, particularmente na dinâmica das partículas elementares. Deste modo, o surgimento de violações de simetrias, as anomalias, podem levar a inconsistências na interpretação das próprias teorias quânticas de campos de gauge [22].

As relações de simetria às quais nos referimos, ou Identidades de Ward (IW), podem ser vistas como consequências da versão quântica do teorema de Noether que implementam informações a respeito de quantidades conservadas. Logo, seria em princípio esperado que simetrias implementadas na construção da teoria estivessem necessariamente presentes nas respectivas soluções através das quais as consequências de tais simetrias podem ser apreciadas. A manutenção de tais simetrias nas soluções perturbativas está diretamente ligado à renormalizabilidade de uma teoria. A existência de inevitáveis violações em IW obriga à construção de procedimentos adicionais a fim de que tais teorias possam ser renormalizáveis, podendo assim, descrever de maneira consistente, a dinâmica de partículas interagentes. Tal procedimento é conhecido na literatura como cancelamento de anomalias e desempenha um papel crucial na formulação do Modelo Padrão .

A literatura a respeito de anomalias é bastante vasta [27] e surgiu [24] logo após a formulação moderna de TQC em 1949[23] ganhando um foco especial a partir dos trabalhos de Adler [26] e Jackiw [25], sendo ainda hoje motivo de discussões. Diferentes formulações de anomalias são atualmente disponíveis na literatura [28]. Apesar disto existem aspectos relacionados às anomalias que permanecem sem um adequado esclarecimento. Entre estes a existência ou não de anomalias em amplitudes perturbativas finitas.

É bem conhecido que existem amplitudes anômalas em cada dimensão par do espaço-tempo. Estas amplitudes perturbativas são tensores antisimétricos construídos com o menor número possível de propagadores fermiônicos internos. Invariavelmente são quan-

tidades cuja contagem de potências revela caráter superficialmente divergente. Em dimensão $D = 1 + 1$ a amplitude anômala é a axial-vetor vetor (AV) com grau superficial de divergência logarítimico. Em dimensão $D = 3 + 1$ são as amplitudes trianguares AVV e AAA, com grau superficial de divergência linear. Em dimensão $D = 5 + 1$ são os boxes $AVVV$ e $AAAV$ com grau superficial de divergência quadrático e assim por diante.

Para estes tensores é possível estabelecer de modo claro $D + 1$ propriedades de simetria sendo D identidades de Ward e um limite de baixa energia. Assumindo a forma mais geral possível para tais tensores, é possível verificar que tais propriedades de simetria não poderão estar simultaneamente presentes nas respectivas amplitudes independentemente da teoria específica e do tipo de solução obtida (exata ou perturbativa). Ou seja não é possível evitar que pelo menos uma das esperadas propriedades de simetria seja violada. Pode ser mostrado [ ], para as amplitudes anômalas citadas acima, de que a identidade de ward violada é aquela correspondente à corrente axial associada ao vértice no qual é exigido a satisfação do limite de baixa energia. Uma vez que isto é inevitável, poderíamos, em princípio, escolher qual propriedade de simetria violar e assim escolher manter as identidades de Ward satisfeitas. Entretanto o limite de baixa energia da amplitude AVV em dimensão $D = 3 + 1$ está relacionada a um importante experimento; o decaimento eletromagnético do píon neutro (PVV). Assim uma teoria violando o teorema de baixa energia falharia ao descrever a fenomenologia e não seria aceitável. É necessário, portanto, que a teoria tenha violação em alguma identidade de Ward. Com isso perde-se a renormalizabilidade em uma teoria contendo uma única espécie férmiônica. A recuperação da renormalizabilidade ocorre com o cancelamento das violações vindas de diferentes setores fermiônicos, o cancelamento de anomalias.

O aspecto de interesse no presente trabalho está relacionado à descrição perturbativa das anomalias ou mais especificamente a associação das violações de simetria com o caráter ambíguo das amplitudes correspondentes. Devido ao caráter divergente, a amplitude em princípio depende da escolha para os rótulos dos momentos das linhas internas da amplitude. Assim diferentes escolhas levam a amplitudes diferindo por um termo

arbitrário. Uma vez que se deseja satisfazer o limite de baixa energia basta então escolher adequadamnte o termo ambíguo para se obter aforma desejada da amplitude AVV; satisfazendo o limite de baixa energia e à manutenção das identidades vetoriais. Este procedimento pode ser encontrado na maioria dos livros texto de TQC. Embora isto permita a obtenção da forma desejada para a amplitude AVV, a aceitação do caráter ambíguo das amplitudes perturbativas em TQC tem implicações indesejáveis. Primeiro porque estaremos aceitando que a teoria não possui poder de predição já que, com isso, cada vez que calcularmos uma amplitude com grau de divergência superior ao logarítimico, teríamos que escolher um ou mais termos indeterminados e isso teria que ser guiado pela fenomenologia, que é precisamente aquilo que queremos descrever através da teoria formulada. Um segundo aspecto, não menos importante e crucial, é o fato de aceitarmos uma interpretação para as amplitudes perturbativas que viola o mais elementar princípio da física; a homogeneidade do espaço tempo. Um terceiro aspecto é a falta de consistência na construção de nossas teorias fundamentais pois em amplitudes que são tensores pares eliminamos automaticamente as referidas ambiguidades utilizando métodos de regularização que permitem shifts no momento de integração como a regularização dimensional (DR) e em amplitudes que são tensores ímpares, onde não podemos utilizar tal método, para o cálculo das amplitudes, que são combinações das mesmas integrais de Feynman, aceitamos escolher arbitrariamente o valor de termos de superfície que resultam precisamente da quebra da invariância translacional do espaço tempo.

Recentemente uma estratégia alternativa aos métodos tradicionais de regularização [ ] tem permitido mudar significativamente o cenário acima descrito. Isto porque no contexto da referida estratégia as ambiguidades são eliminadas automaticamente em todas as amplitudes de quaisquer teorias ou modelos, formuladas em quaisquer dimensão do espaço tempo, inclusive não renormalizáveis. As amplitudes anômalas divergentes são obtidas com o limite de baixa energia satisfeito automaticamente (livres de ambiguidades). Tendo em mãos este procedimento torna-se possível conduzir investigações em situações onde a utilização de métodos tradicionais de regularização não permitem a obtenção de resultados

conclusivos. Uma destas situações com importância destacada é a questão da existência ou não de violações inevitáveis de relações de simetria (anomalias) em amplitudes finitas. Sendo mais claros. Em cada dimensão par do espaço tempo temos amplitudes anômalas (divergentes). Se aumentarmos o número de propagadores fermiônicos internos teremos amplitudes finitas. Assim quando estas amplitudes são tensores ímpares, tal qual as amplitudes anômalas, estas amplitudes terão todas as propriedades de simetria satisfeitas ou serão igualmente anômalas? Esta questão foi amplamete discutida nos anos setenta do século passado mas não foi completamente esclarecida devido ao fato de as contrações destas amplitudes finitas estarem relacionadas às amplitudes anômalas divergentes. Assim como as amplitudes divergentes eram admitidas ambíguas havia uma dificuldade inerente à investigação. Com a utilização do método citado acima, as amplitudes anômalas divergentes são determinadas livres de ambiguidades o que torna possível uma investigação conclusiva da existência ou não de anomalias em amplitudes finitas.

Não há nenhum argumento para excluir à priori tais anomalias. Ao contrário, o fenômeno pode ser estabelecido com base na forma geral dos tensores envolvidos e a conclusão permaneceria válida ainda para soluções exatas (livres de ambiguidades). É esperado deste modo que o mesmo fenômeno ocorra para as amplitudes finitas.

No presente trabalho nos ocuparemos precisamente em investigar uma destas amplitudes finitas candidatas à anômalas: a amplitude AVV em dimensão espaço temporal $D = 1 + 1$. Trata-se da situação algebricamente mais simples de todas as possibilidades o que facilita a tarefa. As conclusões retiradas da presente investigação poderão nos estimular a investigar os casos correspondentes à dimensão física $D = 3 + 1$ do espaço tempo onde as implicações poderiam ser de importância crucial.

A fim de efetuarmos a pretendida investigação, principiaremos por considerar a forma explícita da amplitude AVV e suas relações com outras amplitudes. Algumas destas relações, às quais denominamos relações entre funções de Green, relacionam as contrações da amplitude AVV com seus respectivos momentos externos com a amplitudes PVV e AV. Assim no capítulo 3 promovemos uma investigação geral das amplitudes de um e

dois pontos, potencialmente divergentes, para estabelecer um ponto de vista claro sobre a amplitude anômala AV. Nesta oportunidade discutitemos os aspectos essenciais da estratégia adotada para a interpretação de amplitudes divergentes do cálculo perturbativo. Depois disto, no capítulo 5, voltamos à expressão estabelecida para a amplitude AVV e estabelecemos uma forma explícita para esta amplitude em termos do conjunto de funções definidas e estudadas no capítulo 4. No capítulo 6 verificaremos explicitamente se a expressão obtida para a amplitude AVV satisfaz às relações entre funções de green estabelecidas no capítulo 2. Para tal utilizaremos propriedades das funções utilizadas na sistematização das funções de três pontos introduzidas no capítulo 4. Finalmente no capítulo 7 apresentaremos nossa considerações finais e conclusões.

Capítulo 2

Modelo, Amplitudes e Relações entre Funções de Green

2.1 Introdução

A fim de estabelecer o contexto da presente investigação, consideremos um modelo em dimensão espaço temporal $D = 2$ onde um férmion de spin $\frac{1}{2}$ está acoplado com bósons de spin 0 (scalar e pseudoescalar) e com bósons de spin 1 (vetor and axial-vetor). A forma genérica da lagrangiana de interação pode ser representada como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = iG_s(\bar{\Psi}\Psi)\phi + iG_P(\bar{\Psi}\gamma_3\Psi)\pi - e_V\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right)A_\mu - e_A\left(\bar{\Psi}\gamma_3\gamma^\mu\Psi\right)W_\mu^A. \tag{2.1}$$

onde γ^μ e γ_3 são matrizes que satisfazem à álgebra de Dirac, Ψ é um campo de spin $\frac{1}{2}$ massivo, W_μ^A é um campo axial-vetor, ϕ é um campo escalar e π é um campo pseudoescalar . As constantes G_s, G_P, e_V, e e_A são constantes de acoplamento e seus valores devem ser estabelecidos experimentalmente (são inputs do modelo). Estas constantes podem ser independentes ou relacionadas dependendo do conteùdo de simetria do modelo. Para nossos presentes propósitos tais valores são irrelevantes e nós assumiremos todas como tendo valor unitário. Um aspecto importante do modelo são as propriedades das correntes

vetorial e axial-vetor as quais obedecem

$$\begin{cases} \partial_\mu V^\mu = \partial_\mu \left(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\right) = 0, \\ \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \left(\bar{\Psi}\gamma_3\gamma^\mu\Psi\right) = 2mi(\bar{\Psi}\gamma_3\Psi) = 2miP. \end{cases} \tag{2.2}$$

propriedades das correntes implicarão em relações de simetria ou identidades de Ward a serem satisfeitas pelas funções de Green do modelo. A renormalizabilidade do modelo estará condicionada ao modo pelo qual os campos vetorial e axial adiquirem massa (quebra espontânea de simetria) e à ausência de anomalias. Se alguma identidade de Ward for inevitavemente violada, um mecanismo de cancelamento das violações terá que ser construído com a presença de outras espécies de férmions. É bem conhecido que este é o caso para qualquer dimensão espaço temporal par. As violações inevitáveis de relações de simetria ocorrem em funções de green puramente fermiônicas, isto é, em amplitudes contendo apenas propagadores fermiônicos em linhas internas de diagramas contendo um loop. É pelo menos aceito amplamente que uma topologia destas amplitudes será anômala em cada dimensão e esta é invariavelmente superficialmente divergente.

O contexto da presente investigação é a dimensão $D = 1 + 1$. Neste caso sabemos que a amplitude anômala é a amplitude AV e a questão que queremos responder é se a amplitude triangular (finita) AVV é anômala também, isto é, se esta amplitude não pode satisfazer simultaneamente a todas as suas propriedades de simetria de modo inevitável. Questões semelhantes podem ser formuladas em dimensões superiores e o resultado obtido na presente investigação servirá de estímulo para investigações semelhantes em dimensões superiores onde o esforço algébrico é consideravelmente maior, em particular na dimensão física $D = 3 + 1$.

A fim de efetivarmos a pretendida investigação nós necessitamos primeiramente introduzir as definições das amplitudes perturbativas envolvidas.

Nós definimos as referidas amplitudes em dois passos sucessivos. Primeiro definimos as amplitudes para um valor do momento do loop k, como é usual,

$$t^{ij...k} = Tr\left\{\Gamma_i S_F\left(k + k_a; m_a\right)\Gamma_j S_F\left(k + k_b; m_b\right)...\Gamma_k S_F\left(k + k_c; m_c\right)\right\}.$$

Os operadores Γ_i, devido à estrutura da lagrangiana de interação, poderão assumir os valores

$$\Gamma_i = \{\Gamma_S, \Gamma_P, \Gamma_V, \Gamma_A\} = \{1, \gamma_3, \gamma_\alpha, \gamma_\alpha\gamma_3\},$$

Os propagadores fermiônicos S_F carregam momentum $k+k_a$ e massa m_a e nós o escrevemos como

$$S_F\left(k+k_a; m_a\right) = \frac{(\not{k}+\not{k}_a)+m_a}{D_a},$$

onde

$$D_a = \left[(k+k_a)^2 - m_a^2\right].$$

As correspondentes amplitudes perturbativas são obtidas pela soma sobre todos os valores do momento não restrito pelas relações de conservação de energia e momentum nos vértices envolvidos ou seja pela integração no momentum do loop k

$$T^{ij\ldots k} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ij\ldots k}.$$

Assim para estabelecermos as função de Green fermiônicas escolhemos os operadores dos vértices Γ_i , escrevemos a expressão correspondente à amplitude para um valor do momentum do loop e, em um passo posterior, integramos sobre todos os valores possíveis do momentum do loop. As funções de um ponto ficam

$$t^i = Tr\left\{\Gamma_i S_F\left(k+k_a; m_a\right)\right\}. \tag{2.3}$$

que pode ser escrita como

$$t^i = \frac{(k+k_1)^\xi}{D_1} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\xi\right\} + \frac{m}{D_1} Tr\left\{\Gamma_i\right\}$$

e assim

$$T^i = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^i.$$

De modo semelhante, as funções de dois pontos ficam

$$t^{ij} = Tr\left\{\Gamma_i S_F\left(k+k_a; m_a\right)\Gamma_j S_F\left(k+k_b; m_b\right)\right\}.$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
t^{ij} = & \frac{(k+k_1)^{\xi}(k+k_2)^{\chi}}{D_{12}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\xi\Gamma_j\gamma_\chi\right\} \\
& + m\frac{(k+k_2)^{\chi}}{D_{12}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\chi\right\} \\
& + m\frac{(k+k_1)^{\xi}}{D_{12}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\xi\Gamma_j\right\} \\
& + \frac{m^2}{D_{12}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\right\},
\end{aligned}
$$

onde $D_{ij...k} = D_i D_j ... D_k$, e portanto

$$
T^{ij} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ij}.
$$

Para as funções de três pontos teremos primeiramente

$$
t^{ijl} = Tr\left\{\Gamma_i S_F\left(k+k_a;m_a\right)\Gamma_j S_F\left(k+k_b;m_b\right)\Gamma_l S_F\left(k+k_c;m_c\right)\right\}.
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
t^{ijl} = & \frac{(k+k_1)^{\alpha}(k+k_2)^{\beta}(k+k_3)^{\xi}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\gamma_\xi\right\} \\
& + m\frac{(k+k_2)^{\beta}(k+k_3)^{\xi}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\gamma_\xi\right\} \\
& + m\frac{(k+k_1)^{\alpha}(k+k_3)^{\xi}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\Gamma_l\gamma_\xi\right\} \\
& + m\frac{(k+k_1)^{\alpha}(k+k_2)^{\beta}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\right\} \\
& + m^2\frac{(k+k_3)^{\xi}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\gamma_\xi\right\} \\
& + m^2\frac{(k+k_2)^{\beta}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\right\} \\
& + m^2\frac{(k+k_1)^{\alpha}}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\Gamma_l\right\} \\
& + m^3\frac{1}{D_{123}} Tr\left\{\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\right\}.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

e

$$
T^{ijl} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} t^{ijl}.
$$

Nas expressões acima para as amplitudes adotamos a rotulação mais geral possível para os momentos das linhas internas. As quantidades k_i são arbitrárias e combinações destes momentos estarão relacionados aos momentos externos através das diferenças destes. As quantidades obtidas pela soma dos mesmos serão arbitrárias e representarão quantidades ambíguas. A contagem de potências revela grau superficial de divergência linear para as primeiras definidas acima, logarítimica para as segundas e caráter finito para as últimas.

2.2 Amplitudes triangulares

Tendo em vistas as definições introduzidas na seção anterior, nós estamos em condições de tornar explícita a expressão para a amplitude AVV que será o nosso objeto de estudo. Basta especificar na expressão geral para as funções de três pontos os operadores adequados nos respectivos vértices. Assim assumimos na expressão (2.4) as escolhas $\Gamma_i = \gamma_\mu$, $\Gamma_j = \gamma_\nu$, e $\Gamma_l = \gamma_\lambda\gamma_3$ para termos a amplitude AVV. Seguindo a prescrição que adotamos, nós primeiro escrevemos a expressão para um valor do momento do loop. Neste caso após desenvolvermos os traços de Dirac ficaremos coma expressão

$$t^{AVV}_{\lambda\mu\nu} = t^{odd}_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left[t^{APP}_{\lambda}\right] - g_{\lambda\nu}\left[t^{SVP}_{\mu}\right] - g_{\lambda\mu}\left[t^{SPV}_{\nu}\right] - \varepsilon_{\lambda\mu}\left[t^{PPV}_{\nu}\right] - \varepsilon_{\lambda\nu}\left[t^{PVP}_{\mu}\right] - g_{\mu\nu}\left[t^{VPP}_{\lambda}\right]. \tag{2.5}$$

Aqui identificamos as subestruturas surgidas no desenvolvimento do traço com outras amplitudes triangulares conforme indicado pela rotulação. Na expressão acima também introduzimos a conveniente definição

$$t^{odd}_{\lambda\mu\nu} = -2\varepsilon_{\lambda\xi}\left[t^{(+)123}_{\xi\mu\nu} + t^{(-)213}_{\xi\mu\nu} + t^{(+)312}_{\xi\mu\nu}\right], \tag{2.6}$$

onde

$$t^{(\pm)ijl}_{\lambda\mu\nu} = (k+k_i)_\lambda\left[(k+k_j)_\mu(k+k_l)_\nu \pm (k+k_j)_\nu(k+k_l)_\mu\right]\frac{1}{D_{ijk}}, \tag{2.7}$$

As expressões para as funções de três pontos identificadas acima são:

$$
\begin{aligned}
t_{\nu}^{PPV} &= 2\left\{(k+k_1)_{\nu}\left[(k+k_2)\cdot(k+k_3)-m^2\right]\right. \\
&-(k+k_2)_{\nu}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_3)-m^2\right] \\
&\left.-(k+k_3)_{\nu}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_2)-m^2\right]\right\}\frac{1}{D_{123}}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

,

$$
\begin{aligned}
t_{\mu}^{PVP} &= 2\left\{-(k+k_1)_{\mu}\left[(k+k_2)\cdot(k+k_3)-m^2\right]\right. \\
&-(k+k_2)_{\mu}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_3)-m^2\right] \\
&\left.+(k+k_3)_{\mu}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_2)-m^2\right]\right\}\frac{1}{D_{123}}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

,

$$
\begin{aligned}
t_{\rho}^{VPP} &= 2\left\{-(k+k_1)_{\rho}\left[(k+k_2)\cdot(k+k_3)-m^2\right]\right. \\
&+(k+k_2)_{\rho}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_3)-m^2\right] \\
&\left.-(k+k_3)_{\rho}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_2)-m^2\right]\right\}\frac{1}{D_{123}}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

,

$$
\begin{aligned}
t_{\alpha}^{SPV}\left(k_3,k_1,k_2,m\right) = \left(K_{312}\right)^{-1} & \\
& \{ \\
& + 2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left[\left(k+k_1\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& - 2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_1\right)^{\beta}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& + 2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_2\right)^{\beta}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_1\right)\right] \\
& - 2m^2\left(k+k_3\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \\
& + 2m^2\left(k+k_1\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \\
& - 2m^2\left(k+k_2\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \\
& + 2\epsilon_{\beta\eta}\left(k+k_3\right)_{\alpha}\left(k+k_1\right)^{\beta}\left(k+k_2\right)^{\eta} \\
& - 2\epsilon_{\beta\eta}\left(k+k_1\right)_{\alpha}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_2\right)^{\eta} \\
& - 2\epsilon_{\beta\eta}\left(k+k_2\right)_{\alpha}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_1\right)^{\eta} \\
& \}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

,

$$
\begin{aligned}
t_{\nu}^{SVP}\left(k_3,k_1,k_2,m\right) = & \\
& \left(K_{312}\right)^{-1} \\
& \{ \\
& +2\epsilon_{\nu\beta}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left[\left(k+k_1\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& -2\epsilon_{\nu\beta}\left(k+k_1\right)^{\beta}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& +2\epsilon_{\nu\beta}\left(k+k_2\right)^{\beta}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_1\right)\right] \\
& +2m^2\left(k+k_3\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\nu}-2m^2\left(k+k_1\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\nu}+2m^2\left(k+k_2\right)^{\beta}\epsilon_{\beta\nu} \\
& +2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_1\right)^{\alpha}\left(k+k_2\right)_{\nu} \\
& -2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_2\right)^{\alpha}\left(k+k_1\right)_{\nu} \\
& +2\epsilon_{\beta\alpha}\left(k+k_1\right)^{\alpha}\left(k+k_2\right)^{\beta}\left(k+k_3\right)_{\nu} \\
& \}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
& t_{\lambda}^{APP} = -\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{2}{K_{312}} \\
& \Big\{-\epsilon_{\mu\beta}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left[\left(k+k_1\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& +\epsilon_{\mu\xi}\left(k+k_1\right)^{\xi}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_2\right)\right] \\
& -\epsilon_{\mu\eta}\left(k+k_2\right)^{\eta}\left[\left(k+k_3\right)\cdot\left(k+k_1\right)\right] \\
& -\left(k+k_2\right)_{\mu}\left[\epsilon_{\beta\xi}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_1\right)^{\xi}\right] \\
& +\left(k+k_1\right)_{\mu}\left[\epsilon_{\beta\eta}\left(k+k_3\right)^{\beta}\left(k+k_2\right)^{\eta}\right] \\
& -\left(k+k_3\right)_{\mu}\left[\epsilon_{\xi\eta}\left(k+k_1\right)^{\xi}\left(k+k_2\right)^{\eta}\right] \\
& +m^2\left[\epsilon_{\mu\beta}\left(k+k_3\right)^{\beta}-\epsilon_{\mu\xi}\left(k+k_1\right)^{\xi}+\epsilon_{\mu\eta}\left(k+k_2\right)^{\eta}\right]\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Este tipo de sistematização onde os termos da amplitude são identificados com outras amplitudes além de ser muito útil para o desenvolvimento das operações necessárias é especialmente conveniente quando as amplitudes envolvidas são divergentes. Neste caso

as restrições de consistência podem ser impostas para cada amplitude envolvida tornando universal o tratamento das estruturas, frequentemente contaminadas por arbitrariedades.

2.3 Relações entre Funções de Green

Na seção anterior, ao expressarmos o traço de Dirac envolvido na expressão para a amplitude AVV, identificamos subestruturas com outras amplitudes com a mesma topologia e argumentamos que isto poderia ser útil na busca de consistência geral do cálculo perturbativo. Outras relações entre amplitudes do cálculo pertubativo podem ser identificadas e desempenham um papel crucial para a presente investigação, as quais denominamos relações entre funções de Green. Elas podem ser produzidas toda vez que existe um índice de Lorentz envolvido (vetor ou axial), pela contração deste com o respectivo momento externo do vértice. Estas relações, assim como as identificadas acima, podem ser estabelecidas para as expressões das amplitudes escritas para um valor do momento do loop. É razoável esperar que estas relações permaneçam válidas após a integração sobre todos os valores do momento do loop ter sido efetuada, mesmo na presença de eventuais divergências. Tendo em vistas que tais contrações estão diretamente relacionadas às propriedades de simetria da lagrangiana da teoria, satisfazer tais relações entre funções de Green significa, em última instância, preservar as simetrias da teoria no cálculo perturbativo. É possível afirmar que se algulma relação entre funções de Green é violada alguma relação de simetria será violada também. O contrário também é verdade, se as relações de simetria forem preservadas pelos cálculos das amplitudes então não haverá violação em relações de simetria. Este aspecto desempenhará um papel crucial para a presente investigação.

Quando a contração do índice de Lorentz com o momento externo envolve um vértice vetorial a relação entre funções de Green estabelecerá uma relação entre uma função de N pontos com duas outras de $N-1$ pontos. Portanto a contagem de potências será mais severa para as amplitudes surgidas pela contração. Deste modo, quando for o caso, o

grau de divergência envolvido será maior do que aquele das amplitudes contraídas. Em particular, o que será o caso para a presente investigação, uma amplitude finita pode ser relacionada a uma logaritimicamente divergente.

Como exemplo deste tipo de relações entre funções de Green consideremos a função de dois pontos vetorial relacionada ao tensor de polarização do vácuo na QED. É fácil estabelecer a identidade

$$\begin{aligned}(k_2-k_1)^\mu &\left\{\gamma_\nu \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m}\gamma_\mu \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2)-m}\right\} \\ &= \left\{\gamma_\nu \frac{1}{[\not{k}+\not{k}_1-m]}\right\} - \left\{\gamma_\nu \frac{1}{[\not{k}+\not{k}_2-m]}\right\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

como consequência apenas da álgebra de Dirac para as matrizas envolvidas. Esta relação, tendo em vistas as definições dadas para as amplitudes, significa

$$(k_2-k_1)^\mu t^{VV}_{\mu\nu}(k_1,k_2) = t^V_\nu(k_1) - t^V_\nu(k_2). \tag{2.15}$$

Também teremos, para as contrações envolvendo índices vetoriais, as seguintes relações

$$(k_2-k_1)^\nu t^{VV}_{\mu\nu}(k_1,k_2) = t^V_\mu(k_1) - t^V_\mu(k_2), \tag{2.16}$$

$$(k_2-k_1)^\mu t^{VA}_{\mu\nu}(k_1,k_2) = t^A_\nu(k_1) - t^A_\nu(k_2), \tag{2.17}$$

$$(k_2-k_1)_\lambda t^{VPP}_{\lambda}(k_1,k_2,k_3) = t^{PP}(k_1;k_2) - t^{PP}(k_2,k_3), \tag{2.18}$$

$$(k_2-k_1)_\mu t^{PVP}_{\mu}(k_1,k_2,k_3) = t^{PP}(k_1;k_2) - t^{PP}(k_2,k_3), \tag{2.19}$$

$$(k_2-k_1)_\nu t^{PPV}_{\nu}(k_1,k_2,k_3) = t^{PP}(k_1;k_2) - t^{PP}(k_2,k_3), \tag{2.20}$$

$$(k_3-k_1)_\mu t^{AVV}_{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2,k_3) = t^{VA}_{\lambda\nu}(k_1,k_2) - t^{VA}_{\lambda\nu}(k_1,k_2) \tag{2.21}$$

$$(k_2-k_1)_\nu t^{AVV}_{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2,k_3) = t^{VA}_{\lambda\mu}(k_1,k_2) - t^{VA}_{\lambda\mu}(k_1,k_2) \tag{2.22}$$

De modo análogo, quando o índice de Lorentz estiver associado a um vértice axial vetor, é possível estabelecer, através da contração com o respectivo momento externo, relações

entre a amplitude contraída e outras três amplitudes sendo uma delas de mesma topologia e outras duas de um número de pontos menor em uma unidade. Como exemplo consideremos a identidade abaixo

$$
\begin{aligned}
&(k_2-k_1)_\mu \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m} \gamma_\mu \gamma_3 \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2)-m} \right\} = \\
&- \left\{ \gamma_\nu \gamma_3 \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m} \right\} + \left\{ \gamma_\nu \gamma_3 \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m} \right\} && (2.23)\\
&- 2m \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2)-m} \gamma_3 \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m} \right\}. && (2.24)
\end{aligned}
$$

Tomando o traço em ambos os lados, podemos identificar a relação entre amplitudes

$$(k_2-k_1)_\nu t^{VA}_{\mu\nu} = -2m \left[t^{VP}_\mu \right] + t^A_\mu(k_1) - t^A_\mu(k_2). \tag{2.25}$$

Outras relações semelhantes podem ser identificadas envolvendo contrações com índices axiais

$$(k_3-k_2)_\lambda t^{AVV}_{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2,k_3) = -2m \left[t^{PVV}_{\mu\nu} \right] + t^{AV}_{\mu\nu}(k_1;k_2) - t^{AV}_{\mu\nu}(k_2,k_3).$$

Temos ainda a possibilidade de identificar relações envolvendo amplitudes com um número ímpar de matrizar γ_3 e outras com um número par destas. Este tipo de rellação é universal em dimensão $D = 1+1$. Como exemplo consideremos a relação

$$t^A_\mu = \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu} (k_1)_\alpha t^V_\nu. \tag{2.26}$$

É esperado que todas as relações acima permaneçam válidas após a integração em ambos os lados. Em particular, ressaltamos a relação entre funções de Green envolvendo o triângulo AVV que o relaciona à amplitude anômala AV. Assim esperamos que ao calcularmos a amplitude AVV explicitamente e em seguida contrairmos a expressão obtida com os momentos externo, possam ser identificadas. Sendo assim nossa primeira tarefa é fornecer um ponto de vista claro a respeito da amplitude anômala AV. Esta amplitude é divergente e será necessário a adoção de uma estratégia consistente para o tratamento da referida amplitude. É o que faremos no capítulo seguinte.

Capítulo 3

A Estratégia para o Cálculo das Integrais de Feynman

No capítulo anterior estabelecemos o problema com o qual nos ocuparemos na presente investigação; existem ou não violações inevitáveis em relações de simetria na amplitude finita AVV em dimensão temporal $D = 1 + 1$. Estabelecemos para esta amplitude algumas propriedades e relações com outras amplitudes. Percebemos então que as contrações com os momentos externos estabelecem relações entre a amplitude AVV e a amplitude anômala AV. Assim para respondermos a questão que colocamos devemos primeiramente estabelecer um ponto de vista claro a respeito da amplitude anômala AV. Esta por ser divergente exige a adoção de uma estratégia para o tratamento das indefinições associadas. Deste modo, neste capítulo, trataremos deste aspecto específico; obteremos resultados para as integrais de Feynman envolvidas no cálculo das amplitudes que compõem nossa investigação.

O método que utilizamos nas investigações tem sido aplicado com sucesso em diferentes problemas [ ], onde o papel das divergências típicas dos cálculos perturbativos desempenha papel importante. No contexto do referido método, uma vez constatada por uma simples contagem de potências a existência de divergências em uma amplitude, ao invés de especificar alguma regularização, com o intuito de torná-la finita, adotamos uma

estratégia alternativa [?] para realizar todos os cálculos. Para justificar as manipulações intermediárias, assumiremos a presença de uma distribuição regularizadora genérica, apenas de modo implícito. Isto pode ser esquematicamente representado por,

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) &\to \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \to \infty} G_{\Lambda_i}\left(k, \Lambda_i^2\right) \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Aqui os $\Lambda_i's$ são parâmetros da distribuição genérica $G(k, \Lambda_i^2)$. A presença desta distribuição no integrando, além de garantir o caráter finito da integral modificada, deve possuir duas propriedades bastante gerais. Ela deve ser par no momento de integração k para que a invariância de Lorentz seja preservada, além de possuir um "limite de conexão" bem definido, i.e.,

$$\lim_{\Lambda_i^2 \to \infty} G_{\Lambda_i}\left(k^2, \Lambda_i^2\right) = 1. \tag{3.2}$$

A primeira das propriedades exigidas, implica na anulação de integrais ímpares no momento de integração, enquanto que a segunda garante, em particular, que os valores das integrais finitas de uma amplitude não serão modificados. Note que estas exigências são completamente gerais e estão de acordo com qualquer regularização razoável. Depois destas suposições, podemos manipular o integrando das integrais divergentes usando identidades para gerar uma expressão matemática, na qual todas as divergências estarão contidas em estruturas independentes dos momentos (arbitrários) internos.

Nossa prescrição consiste em, inicialmente, utilizar a seguinte representação para o propagador do campo fermiônico

$$\begin{aligned}&S\left(\not{k} + \not{k}_i\right) \\ &= \left[\left(\not{k} + \not{k}_i\right) + m\right] \left\{ \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j \left(k_i^2 + 2k.k_i\right)^j}{\left(k^2 - m^2\right)^{j+1}} \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^{N+1} \left(k_i^2 + 2k.k_i\right)^{N+1}}{\left(k^2 - m^2\right)^{N+1} \left[\left(k + k_i\right)^2 - m^2\right]} \right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde N é escolhido conforme o maior grau de divergência existente no modelo. Como no presente caso esse grau é linear, adotaremos a seguinte representação:

$$S\left(\not{k}+\not{k}_i\right)=\left[\left(\not{k}+\not{k}_i\right)+m\right]\left\{\frac{1}{\left(k^2-m^2\right)}-\frac{\left(k_i^2+2k.k_i\right)}{\left(k^2-m^2\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(k_i^2+2k.k_i\right)^2}{\left(k^2-m^2\right)^2\left[\left(k+k_i\right)^2-m^2\right]}\right\} \tag{3.4}$$

A representação (3.4) para o propagador fermiônico é dita conveniente, uma vez que é capaz de fazer com que as estruturas (**??**) - (**??**) apresentem, ao serem integradas, a parte divergente separada da parte finita. Isto possibilita, por sua vez, que procedamos a integração sobre o momento não restrito nas integrais finitas e coloquemos as integrais divergentes em termos dos denominados *objetos divergentes básicos*. Estes objetos nada mais são que integrais divergentes, ou combinações de integrais com mesmo grau de divergência e são definidas particularmente para cada dimensão considerada. Para estudos em duas dimensões, os objetos divergentes básicos são dados por

$$I_{\log}\left(m^2\right)=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\left(k^2-m^2\right)} \tag{3.5}$$

$$\nabla_{\alpha\beta}\left(m^2\right)=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{2k_\alpha k_\beta}{\left(k^2-m^2\right)^2}-\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{g_{\alpha\beta}}{\left(k^2-m^2\right)} \tag{3.6}$$

Uma vez que escrevamos a parte divergente de uma amplitude em termos das estruturas acima, sem de fato realizarmos o cálculo de alguma integral divergente, poderemos mapear nossos resultados naqueles obtidos por qualquer outra prescrição de tratamento de amplitudes divergentes, bastando para isto, avaliar os objetos divergentes acima identificados, segundo a prescrição de interesse.

Vamos então a seguir proceder as manipulações e cálculos necessários das integrais de Feynman envolvidas na presente investigação.

3.1 Integrais de Feynman

Estamos agora nos referindo às integrais de Feynman em termos das quais as amplitudes são meras combinações. No presente caso, como vimos no capítulo anterior, todas as

estruturas que necessitamos calcular podem ser escritas como combinações de apenas nove integrais de Feynman, as quais definimos como:

- Com um propagador:

$$[I_1; I_1^\mu] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k^\mu]}{D_1}, \tag{3.7}$$

- Com dois propagadores:

$$[I_2; I_2^\mu; I_2^{\mu\nu}] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k^\mu; k^\mu k^\nu]}{D_{12}}. \tag{3.8}$$

- Com três propagadores:

$$\left[I_3; I_3^\mu; I_3^{\mu\nu}; I_{3,}^{\mu\nu\alpha}\right] = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{[1; k^\mu; k^\mu k^\nu; k^\mu k^\nu k^\alpha]}{D_{123}}, \tag{3.9}$$

Nossa tarefa então é obter uma expressão para cada um destas integrais.

3.1.1 Cálculo das integrais de Feynman

Nesta seção, efetuaremos as manipulações e os cálculos necessários nas integrais de Feynman, para colocá-las na forma adequada ao método que adotamos. Separaremos primeiro as partes finitas e divergentes, procederemos à integração daquelas finitas e reorganizaremos as partes divergentes em termos dos dois objetos que definimos.

Cálculo de I_1

O primeiro passo a ser considerado para o cálculo de uma das integrais citadas anteriormente, no contexto da extratégia de cálculo descrita no capítulo 3, é efetuar a contagem de potência dos $k\prime s$, no numerador e no denominador do integrando, para, com isso, verificar se a integral é divergente ou finita. No caso particular da I_1 , observamos que esta é uma integral divergente com grau logarítimico. Portanto, fazemos uso da identidade (**??**) e obtemos o seguinte resultado,

$$I_1 = \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2)}{(k^2 - m^2)\, D_1}. \tag{3.10}$$

O primeiro termo do lado direito do sinal de igualdade é uma integral divergente e a identificamos como o objeto básico divergente dado pela expressão (**??**). O segundo termo do lado direito do sinal de igualdade é uma integral finita. Após aplicarmos a parametrização (**??**) e efetuarmos a integração, obtemos um valor identicamente nulo para o termo finito, isto é,

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2)}{(k^2 - m^2)\, D_1} = 0. \tag{3.11}$$

Portanto temos,

$$I_1 = i_{\log}\left(m^2\right). \tag{3.12}$$

Cálculo de $(I_1)_\mu$

Da mesma forma como foi feito na integral anterior, observamos que a $(I_1)_\mu$ é também uma integral divergente, porém, dessa vez, o grau de divergância é linear. Com a ajuda de (**??**), podemos reescrever,

$$\begin{aligned}
(I_1)_\mu = & \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)} \\
& - k_1^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& - 2k_1^\nu \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(2k \cdot k_1 + k_1^2)^2\, k_\mu}{(k^2 - m^2)^2 D_1}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nessa expressão, todos os termos ímpares no momento de integração k, o primeiro e o segundo termos, são identicamente nulos devido à imposição da preservação da invariância de Lorentz no processo de regularização. O terceiro termo é uma integral divergente, que pode ser escrita em termos dos objetos básicos divergentes, definidos em(**??**) e (**??**). O

quarto termo é uma integral finita e com o uso da parametrização (**??**) , obtemos um valor identicamente nulo para ela, isto é:

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(2k \cdot k_1 + k_1^2\right)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^2 D_1} = 0.$$

Com isso teremos

$$\left(I_1\right)_\mu = -k_1^\nu \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \tag{3.14}$$

resultado este, que pode ser colocado em termos dos objetos básicos, defnidos no capítulo 3, como,

$$\left(I_1\right)_\mu = -k_1^\nu \nabla_{\mu\nu} - k_1^\nu g_{\mu\nu} i_{\log}\left(m^2\right). \tag{3.15}$$

Cálculo de I_2

A integral I_2 é uma integral finita, observamos isso pela contagem de potência dos k's. Podemos então calculá-la diretamente, com a utilização dos procedimentos apresentados nos apêndices B e C. Feito isto teremos,

$$I_2 = \left(\frac{i}{4\pi}\right) \zeta_0^{-1}(p^2; m^2). \tag{3.16}$$

Onde introduzimos, em notação simplificada, as funções de estrutura para as partes finitas de funções de dois pontos em 2D, definidas como

$$\zeta_k^{-1}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \int_0^1 dz \frac{z^k}{p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}. \tag{3.17}$$

A integração da expressão acima, sobre o parâmetro de Feymann z, pode ser facilmente efetuada, mas, para o presente propósito, isto não é relevante, portanto, mantemos sempre a representação integral. Além disso, os termos λ_1 e λ_2 se referem aos termos de massa, no entanto, estamos tratando neste trabalho apenas férmions de massas iguais, ou seja,

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2. \tag{3.18}$$

Cálculo de $(I_2)_\mu$

A contagem de potência dos k's nos revela que esta integral também é finita. Para calculá-la, utilizamos os métodos descritos nos apêndices B e C. Temos assim,

$$(I_2)_\mu = -\left(\frac{i}{4\pi}\right)\left[p_\mu \zeta_1^{-1}(p^2;m^2) + k_{1\mu}\zeta_0^{-1}(p^2;m^2)\right], \tag{3.19}$$

ou, de forma alternativa e conveniente,

$$(I_2)_\mu = -\left(\frac{i}{4\pi}\right)\frac{Q_\mu}{2}\zeta_0^{-1}(p^2;m^2) \tag{3.20}$$

com a definição

$$Q = k_1 + k_2. \tag{3.21}$$

Cálculo de $(I_2)_{\mu\nu}$

Consideramos agora o cálculo da integral $(I_2)_{\mu\nu}$, que, pela contagem de potência dos $k\prime s$, notamos o caráter logaritimicamente divergente. Com a utilização da identidade (**??**) obtemos a expressão,

$$\begin{aligned}(I_2)_{\mu\nu} = &\int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\mu k_\nu}{\left(k^2-m^2\right)^2} \\ &- \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\left(2k\cdot k_2 + k_2^2\right)k_\mu k_\nu}{\left(k^2-m^2\right)^2 D_2} \\ &- \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\left(2k\cdot k_1 + k_1^2\right)k_\mu k_\nu}{\left(k^2-m^2\right) D_{12}}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

O primeiro dos termos do lado direito da igualdade é uma integral divergente e não sofrerá manipulação adicional. Para as restante providenciamos a integração com métodos usuais, pois são finitas. Dessa forma, após a integração no momento k, obtemos,

$$
\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} &= \int_\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^2} \\
&+ \frac{i}{(4\pi)}\left[p_\mu p_\nu - p^2 g_{\nu\mu}\right]\left[\zeta_2^{-1}(p^2;m^2) - \frac{\zeta_1^{-1}(p^2;m^2)}{2}\right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)}\left[Q_\mu Q_\nu \frac{\zeta_0^{-1}(p^2;m^2)}{4}\right],
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
I_2^{\mu\nu} &= \frac{\nabla_{\mu\nu}}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} i_{\log}\left(m^2\right) \\
&+ \frac{i}{(4\pi)}\left[p_\mu p_\nu - p^2 g_{\nu\mu}\right]\left[\zeta_2^{-1}(p^2;m^2) - \frac{\zeta_1^{-1}(p^2;m^2)}{2}\right] \\
&+ \frac{i}{(4\pi)}\left[Q_\mu Q_\nu \frac{\zeta_0^{-1}(p^2;m^2)}{4}\right],
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Cálculo de I_3

Passamos então para a solução das integrais associadas as funções de três pontos. Começando com integral de Feynman $I_3(m^2, k_1, k_2, k_3)$, pela definição teremos:

$$
I_3(m^2, k_1, k_2, k_3) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_{123}}, \tag{3.24}
$$

esta integral é finita, não necessitando, portanto, nenhuma prescrição de regularização.

Pode-se mostrar facilmente que,

$$
I_3(m^2, k_1, k_2, k_3) = \left[\frac{i}{4\pi}\right]\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{\left[Q(z,y)\right]^2},
$$

onde $Q(z,y)$ é uma função dos momentos, massa e dos parâmetros de Feynman (z,y) (Ver apêndices B e C) dada por

$$
Q\left(p,x;q,y\right) = p^2 x\left(1-x\right) - 2\left(p\cdot q\right)xy + q^2 y\left(1-y\right) - m^2.
$$

Agora, introduzindo a definição de uma nova classe de funções:

$$
\zeta_{nm}^{-h} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{\left[Q(z,y)\right]^h}, \tag{3.25}
$$

o resultado final de nossa integral será,

$$I_3(m^2, k_1, k_2, k_3) = \left[\frac{i}{4\pi}\right] \zeta_{00}^{-2}. \tag{3.26}$$

Cálculo de $(I_3)_\mu$

Passamos então para a determinação da integral $I_3^\mu(m^2, k_1, k_2, k_3)$, de acordo com a definição teremos,

$$I_3^\mu(m^2, k_1, k_2, k_3) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{D_{123}}. \tag{3.27}$$

Com uma parametrização adequada e com auxílio das funções definidas anteriormente (3.25), chega-se ao seguinte resultado,

$$I_3^\mu(m^2, k_1, k_2, k_3) = \left[\frac{i}{4\pi}\right] \left\{(k_1 - k_2)_\mu \zeta_{01}^{-2} - (k_3 - k_1)_\mu \zeta_{10}^{-2} - k_{1\mu} \zeta_{00}^{-2}\right\} \tag{3.28}$$

Cálculo de $(I_3)_{\mu\nu}$

A próxima integral a ser calculada é $I_3^{\mu\nu}(m^2, k_1, k_2, k_3)$, que pela definição é,

$$I_3^{\mu\nu}(m^2, k_1, k_2, k_3) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{D_{123}} \tag{3.29}$$

e que após manipulações adequadas, pode ser escrita da seguinte forma,

$$
\begin{aligned}
I_3^{\mu\nu}(m^2,k_1,k_2,k_3) = \left[\frac{i}{(4\pi)}\right] \Big\{ & \frac{g_{\mu\nu}}{2}\zeta_{00}^{-1} \\
& + (k_2-k_1)_\mu (k_2-k_1)_\nu \zeta_{02}^{-2} \\
& + (k_2-k_1)_\mu (k_3-k_1)_\nu \zeta_{11}^{-2} \\
& + (k_3-k_1)_\mu (k_2-k_1)_\nu \zeta_{11}^{-2} \\
& + (k_3-k_1)_\mu (k_3-k_1)_\nu \zeta_{20}^{-2} \\
& + k_{1\nu}\left[(k_2-k_1)_\mu \zeta_{01}^{-2} + (k_3-k_1)_\mu \zeta_{10}^{-2}\right] \\
& + k_{1\mu}\left[(k_2-k_1)_\nu \zeta_{01}^{-2} + (k_3-k_1)_\nu \zeta_{10}^{-2}\right] \\
& + k_{1\mu}k_{1\nu}\zeta_{00}^{-2}\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Cálculo de $(I_3)_{\mu\nu\lambda}$

E finalmente consideremos a solução da integral $I_3^{\mu\nu\lambda}(m^2,k_1,k_2,k_3)$ que pela definição temos como sendo,

$$
(I_3)_{\mu\nu\lambda}(m^2,k_1,k_2,k_3) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{D_{123}}. \tag{3.31}
$$

Esta integral, apesar do aumento da contribução na contagem das potências de k no numerador, continua finita. Para seu cálculo, basta escolher uma parametrização de Feynman conveniente.

Sendo assim, podemos mostrar após algumas manipulações que:

$$
\begin{aligned}
(I_3)_{\mu\nu\lambda}(m^2,k_1,k_2,k_3) = \left[\frac{i}{(4\pi)}\right]\{ & \\
& -\frac{g_{\nu\lambda}}{2}\left[(k_2-k_1)_\mu\zeta_{01}^{-1}+(k_3-k_1)_\mu\zeta_{10}^{-1}\right] \\
& -\frac{g_{\mu\lambda}}{2}\left[(k_2-k_1)_\nu\zeta_{01}^{-1}+(k_3-k_1)_\nu\zeta_{10}^{-1}\right] \\
& -\frac{g_{\mu\nu}}{2}\left[(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{01}^{-1}+(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{10}^{-1}\right] \\
& +\left[\frac{i}{(4\pi)}\right]\{-(k_2-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{03}^{-2} \\
& -(k_2-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{12}^{-2} \\
& -(k_2-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{12}^{-2} \\
& -(k_2-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{21}^{-2} \\
& -(k_3-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{12}^{-2} \\
& -(k_3-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{21}^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(k_3-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{30}^{-2} \\
& -(k_3-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{21}^{-2} \\
& -k_{1\mu}\Big[\frac{g_{\nu\lambda}}{2}\zeta_{00}^{-1}+(k_2-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{02}^{-2}+(k_2-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{11}^{-2} \\
& \qquad +(k_3-k_1)_\nu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{11}^{-2}+(k_3-k_1)_\nu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{20}^{-2}\Big] \\
& -k_{1\nu}\Big[\frac{g_{\mu\lambda}}{2}\zeta_{00}^{-1}+(k_2-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{02}^{-2}+(k_2-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{11}^{-2} \\
& \qquad +(k_3-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\lambda\zeta_{20}^{-2}+(k_3-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\lambda\zeta_{11}^{-2}\Big] \\
& -k_{1\lambda}\Big[\frac{g_{\mu\nu}}{2}\zeta_{00}^{-1}+(k_3-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu\zeta_{11}^{-2}+(k_3-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu\zeta_{20}^{-2} \\
& \qquad +(k_2-k_1)_\mu(k_2-k_1)_\nu\zeta_{02}^{-2}+(k_2-k_1)_\mu(k_3-k_1)_\nu\zeta_{11}^{-2}\Big] \\
& +k_{1\mu}k_{1\nu}\left[(k_1-k_2)_\lambda\zeta_{01}^{-2}+(k_1-k_3)_\lambda\zeta_{10}^{-2}\right] \\
& +k_{1\mu}k_{1\lambda}\left[(k_1-k_2)_\nu\zeta_{01}^{-2}+(k_1-k_3)_\nu\zeta_{10}^{-2}\right] \\
& +k_{1\nu}k_{1\lambda}\left[(k_1-k_2)_\mu\zeta_{01}^{-2}+(k_1-k_3)_\mu\zeta_{10}^{-2}\right] \\
& -k_{1\mu}k_{1\nu}k_{1\lambda}\zeta_{00}^{-2}\}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Com isso, concluímos o cálculo das integrais de Feynman necessárias para obtermos a forma explícita de todas as amplitudes envolvidas na investigação estabelecida. Em posse destes resultados para as integrais, podemos seguir ao cálculo propriamente dito das amplitudes.

Capítulo 4

Amplitudes Físicas

De posse dos resultados das integrais de Feynman desenvolvidas no capítulo anterior, podemos agora proceder o cálculo das amplitudes. Sendo assim primeiramente resolveremos os traços de Dirac envolvidos, escrevendo cada amplitude como uma combinação de integrais de Feynman, para então construir a forma explícita das amplitudes. Neste momento não assumiremos nenhuma hipótese a respeito dos valores das integrais divergentes presentes nas expressões. Isto será feito apenas num passo posterior.

4.1 Cálculo das Funções de Green de Um Ponto

Primeiramente consideremos a função de um ponto vetorial. Escolhendo o operador $\Gamma_1 = \gamma_\mu$ na definição (2.3) e solucionando os traços envolvidos (Apêndice A) teremos

$$t_\mu^V = 2\frac{(k+k_1)_\mu}{D_1}.$$

Integrando

$$T_\mu^V = 2\left\{\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k_\mu}{D_1} + k_{1\mu}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_1}\right\}. \tag{4.1}$$

Substituindo os resultados para as integrais ficaremos com

$$T_\mu^V = -2k_1^\zeta\left[\Delta_{\xi\mu}\left(m^2\right)\right].$$

Notemos o caráter arbitrário do resultado. Os mesmos passos podem ser seguidos para obter a expressão para a função de um ponto axial. Teremos inicialmente

$$T_{\mu}^{A} = -2\varepsilon_{\mu\nu}\left[\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{k^{\nu}}{D_1} + k_1^{\nu}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_1}\right], \tag{4.2}$$

e então, após a substituição dos resultados, teremos

$$T_{\mu}^{A} = 2\varepsilon_{\mu\chi}k_{1\xi}[\Delta^{\xi\chi}\left(m^2\right)]. \tag{4.3}$$

4.2 Cálculo das Funções de Green de dois Pontos

Consideremos agora as funções de dois pontos. Comecemos por aquelas sem índices de Lorentz. Como tal, tomando $\Gamma_i = \Gamma_j = \gamma_3$ teremos a função PP. Teremos inicialmente

$$t^{PP} = -\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} + p^2\frac{1}{D_{12}},$$

with $p = k_2 - k_1$. (**??**) A substituição dos resultados das integrais nos leva a

$$T^{PP} = -\left[I_{log}\left(m^2\right)\right] + \frac{i}{4\pi}p^2\left[\zeta_0^{-1}\left(p^2, m^2\right)\right] \tag{4.4}$$

onde introduzimos a definição

$$\zeta_k^{-1}\left(p^2, m^2\right) = \int_0^1 dx \frac{x^k}{Q\left(p^2, m^2, x\right)},$$

com o polinômio Q dado por

$$Q\left(p^2, m^2, x\right) = p^2x(1-x) - m^2.$$

Prosseguindo teremos

$$t^{SP} = -2\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{(k+k_1)^{\alpha}(k+k_2)^{\beta}}{D_{12}}, \tag{4.5}$$

que fica

$$T^{SP} = 0. \tag{4.6}$$

Agora, com um índice de Lorentz, primeiro consideramos

$$t_{\mu}^{PV} = 2m\varepsilon_{\mu\alpha}\left(k_2 - k_1\right)^{\alpha}\frac{1}{D_{12}} \tag{4.7}$$

que, substituindo o resultado da integral fica

$$T_{\mu}^{PV} = 2m\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}\zeta_0^{-1}(p^2;m^2). \tag{4.8}$$

Agora, consideramos o cálculo da função de Green de dois pontos VV, para isso fazemos $\Gamma_i = \gamma_\mu$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ na expressão (**??**), obtendo assim,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} &= Tr\left\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right\}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_1)^{\alpha}(k+k_2)^{\beta}}{D_{12}} \\ &+ mTr\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\beta\right\}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_2)^{\beta}}{D_{12}} \\ &+ mTr\left\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\right\}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_1)^{\alpha}}{D_{12}} \\ &+ m^2Tr\left\{\gamma_\mu\gamma_\nu\right\}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_{12}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Após efetuarmos as operações relacionadas aos traços de Dirac, identificamos a relação

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(T^{PP}\right). \tag{4.10}$$

Com os resultados (**??**) e (**??**) a expressão correspondente à amplitude $T_{\mu\nu}^{VV}$, fica,

$$T_{\mu\nu}^{VV} = -\left(\frac{i}{\pi}\right)\frac{(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2)}{p^2}\left[1 + m^2\zeta_0^{-1}(p^2;m^2)\right] + 2\nabla_{\mu\nu}. \tag{4.11}$$

Finalmente consideramos a função de dois pontos axial-vetor a qual desempenhará um papel crucial na presente investigação. Tomando $\Gamma_i = \gamma_\mu\gamma_3$ e $\Gamma_j = \gamma_\nu$ na expressão (**??**), obtemos inicialmente

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AV} &= Tr\left(\gamma_\mu\gamma_3\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\right)\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta}{D_{12}} \\
&+ mTr\left(\gamma_\mu\gamma_3\gamma_\alpha\gamma_\nu\right)\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{12}} \\
&+ mTr\left(\gamma_\mu\gamma_3\gamma_\nu\gamma_\beta\right)\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{(k+k_2)^\beta}{D_{12}} \\
&+ m^2Tr\left(\gamma_\mu\gamma_3\gamma_\nu\right)\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_{12}}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Após a tomada dos traços de Dirac envolvidos ficamos com,

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AV} = 2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{D_{12}}\{&\varepsilon_{\mu\alpha}\left[(k+k_2)_\nu(k+k_1)_\alpha+(k+k_1)_\nu(k+k_2)_\alpha\right] \\
&+\varepsilon_{\nu\alpha}\left[(k+k_1)_\mu(k+k_2)_\alpha-(k+k_2)_\mu(k+k_1)_\alpha\right] \\
&-g_{\mu\nu}\left[\varepsilon_{\alpha\beta}(k+k_1)_\alpha(k+k_2)_\beta\right] \\
&-\varepsilon_{\mu\nu}\left[(k+k_1)\cdot(k+k_2)-m^2\right]\},
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

reorganizando os termos, podemos escrever ,

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AV} &= -\varepsilon_{\mu\nu}T^{PP}-g_{\mu\nu}T^{SP} \\
&+\{\varepsilon_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}+\varepsilon_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}+\varepsilon_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} \qquad (4.14) \\
&+\varepsilon_{\nu\beta}g_{\mu\alpha}\}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{2(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta}{D_{12}}, \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

e então, desenvolvendo os termos obtidos, e utilizando os resultados para as integrais de Feynman envolvidas, após algumas manipulações convenientes, podemos colocar a amplitude AV na forma,

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AV}\left(k_1,k_2;m^2\right) &= -2\varepsilon_{\mu\alpha}\Delta_\nu^\alpha\left(m^2\right) \\
&+4\left[\frac{i}{(4\pi)}\right]\left[\varepsilon_{\mu\nu}q^2-\varepsilon_{\mu\alpha}q^\alpha q_\nu\right]\left[\zeta_2^{-1}\left(q;m^2\right)-\frac{\zeta_0^{-1}\left(q;m^2\right)}{2}\right].
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

4.3 Cálculo das Funções de Green de Três Pontos

Para as funções de Green de três pontos de nosso interesse, utilizaremos o mesmo procedimento realizado nas amplitudes de um e dois pontos. Tomaremos o traço reduzindo a amplitude a uma combinação de integrais de Feynman, neste caso todas finitas. Substituiremos então as integrais pelos resultados obtidos no capítulo anterior. A análise dos resultados ficará para o capítulo seguinte.

$$\begin{aligned}(-4\pi i)\, T_{\lambda}^{VPP} &= p_{\lambda}\left\{\left[\zeta_0^{-1}\left((p-q)^2, m^2\right) + \zeta_0^{-1}\left(p^2, m^2\right)\right]\right. \\ &\left. -2\left(p^2 - p\cdot q\right)\xi_{10}^{-2} - q^2\zeta_{00}^{-2}\right\} \\ &+ q_{\lambda}\left\{-\left[\zeta_0^{-1}\left((p-q)^2, m^2\right)\right]\right. \\ &\left. -2\left(p^2 - p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2} + p^2\zeta_{00}^{-2}\right\}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}(-4\pi i)\, T_{\nu}^{PPV} &= p_{\nu}\left\{-\left[\zeta_0^{-1}\left(p^2, m^2\right)\right] - 2\left(p\cdot q\right)\zeta_{10}^{-2} + q^2\zeta_{00}^{-2}\right\} \\ &+ q_{\nu}\left\{-\left[\zeta_0^{-1}\left(q^2, m^2\right)\right] - 2\left(p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2} + p^2\zeta_{00}^{-2}\right\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}(-4\pi i)\, T_{\mu}^{PVP} &= p_{\mu}\left\{-\left[\zeta_0^{-1}\left((p-q)^2, m^2\right)\right]\right. \\ &\left. -2\left(q^2 - p\cdot q\right)\zeta_{10}^{-2} + q^2\zeta_{00}^{-2}\right\} \\ &+ q_{\mu}\left\{\left[\zeta_0^{-1}\left((p-q)^2, m^2\right) + \zeta_0^{-1}\left(q^2, m^2\right)\right]\right. \\ &\left. -2\left(q^2 - p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2} - p^2\zeta_{00}^{-2}\right\}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}(-4\pi i) T_{\lambda}^{SPV} &= \varepsilon_{\lambda\alpha}\left\{q^{\alpha}\zeta_0^{-1}\left(q; m\right) - p^{\alpha}\zeta_0^{-1}\left(p; m\right)\right. \\ &-2\left(p\cdot q\right)\left(q^{\alpha}\zeta_{01}^{-2} - p + q^{\alpha}\zeta_{10}^{-2}\right) \\ &\left. +2p^{\alpha}\zeta_{00}^{-1} + \left(q^2p^{\alpha} - p^2q^{\alpha}\right)\zeta_{00}^{-2}\right\} \\ &+ 4\varepsilon_{\alpha\beta}p^{\beta}\left[\left(q^{\alpha}q_{\lambda}\left(\zeta_{02}^{-2} - \zeta_{01}^{-2}\right) - q^{\alpha}p_{\lambda}\zeta_{11}^{-2}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
(-4\pi i)\, T_{\nu}^{SVP} &= \varepsilon_{\nu\alpha} p^{\alpha} \zeta_0^{-1}\left(p; m^2\right) - \varepsilon_{\nu\alpha} q^{\alpha} \zeta_0^{-1}\left(q; m^2\right) \\
&+ 2\varepsilon_{\nu\alpha}\,(p.q)\left[q^{\alpha}\zeta_{01}^{-2} - p^{\alpha}\zeta_{10}^{-2}\right] - 4\varepsilon_{\alpha\beta} p^{\alpha} q^{\beta} p_{\nu} \zeta_{10}^{-2} \\
&+ 4\varepsilon_{\alpha\beta} q^{\beta}\left[\frac{g_{\nu}^{\alpha}}{2}\zeta_{00}^{-1} - p^{\alpha} q_{\nu}\zeta_{11}^{-2} + p^{\alpha} p_{\nu}\zeta_{20}^{-2}\right] - \varepsilon_{\nu\alpha}\left[q^2 p^{\alpha} - p^2 q^{\alpha}\right]\zeta_{00}^{-2}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Nas expressões acima omitimos o argumento das funções por simplicidade. A amplitude triangular que aparece na relação entre função de Green para a amplitude AVV por sua vez pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{PVV} &= 2m\varepsilon_{\mu\rho}\left\{p^{\rho} q_{\nu}\zeta_{00}^{-2} + q^{\rho} p_{\nu}\left[-2\zeta_{10}^{-2} + \zeta_{00}^{-2}\right] + q^{\rho} q_{\nu}\left[-2\zeta_{01}^{-2}\right]\right\} \\
&- 2m\varepsilon_{\mu\nu}\left\{\left[\zeta_0^{-1}\left(p^2, m^2\right)\right] - \left(q^2 - p\cdot q\right)\zeta_{00}^{-2}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Resta apenas explicitar a função AVV . Para tal primeiramente determinamos a expressão para o tensor definido em (2.6)).Teremos

$$
\begin{aligned}
[-i\,(4\pi)]\, T_{\lambda\mu\nu}^{odd} &= -\varepsilon_{\lambda\rho}\left\{-4\left(g_{\rho\mu} p_{\nu} + g_{\rho\nu} p_{\mu} + g_{\mu\nu} p_{\rho}\right)\zeta_{10}^{-1}\right. \\
&- 4\left(g_{\rho\mu} q_{\nu} + g_{\rho\nu} q_{\mu} + g_{\mu\nu} q_{\rho}\right)\zeta_{01}^{-1} \\
&+ 2\left[g_{\rho\mu}\left(p_{\nu} + q_{\nu}\right) + g_{\mu\nu} q_{\rho} + g_{\rho\nu} p_{\mu}\right]\zeta_{00}^{-1} \\
&+ 8 p_{\rho} p_{\mu} p_{\nu}\left[-\zeta_{30}^{-2} + \zeta_{20}^{-2}\right] + 8 q_{\rho} q_{\mu} q_{\nu}\left[-\zeta_{03}^{-2} + \zeta_{02}^{-2}\right] \\
&+ 4 p_{\rho} q_{\mu} p_{\nu}\left[-2\zeta_{21}^{-2} + \zeta_{11}^{-2}\right] + 4 p_{\rho} q_{\mu} q_{\nu}\left[-2\zeta_{12}^{-2} + \zeta_{11}^{-2}\right] \\
&+ 4 p_{\rho} p_{\mu} q_{\nu}\left[-2\zeta_{21}^{-2} + \zeta_{20}^{-2} + \zeta_{11}^{-2} - \zeta_{10}^{-2}\right] \\
&+ 4 q_{\rho} q_{\mu} p_{\nu}\left[-2\zeta_{12}^{-2} + \zeta_{02}^{-2} + \zeta_{11}^{-2} - \zeta_{01}^{-2}\right] \\
&+ 4 q_{\rho} p_{\mu} p_{\nu}\left[-2\zeta_{21}^{-2} + 2\zeta_{11}^{-2} + \zeta_{20}^{-2} - \zeta_{10}^{-2}\right] \\
&\left.+ 4 q_{\rho} p_{\mu} q_{\nu}\left[-2\zeta_{12}^{-2} + 2\zeta_{11}^{-2} + \zeta_{02}^{-2} - \zeta_{01}^{-2}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Deste modo a forma explícita da amplitude AVV fica

$$
\begin{aligned}
\left[-i\left(4\pi\right)\right]T^{AVV}_{\lambda\mu\nu} &= \varepsilon_{\lambda\mu}\left\{p_\nu\left[\zeta_0^{-1}\left(p^2,m^2\right)\right]+q_\nu\left[\zeta_0^{-1}\left(q^2,m^2\right)\right]\right.\\
&+2\left[2p_\nu\zeta_{10}^{-1}+2q_\nu\zeta_{01}^{-1}-\left(p_\nu+q_\nu\right)\zeta_{00}^{-1}\right]\\
&-p_\nu\left[q^2\zeta_{00}^{-2}-2\left(p\cdot q\right)\zeta_{10}^{-2}\right]\\
&\left.-q_\nu\left[p^2\zeta_{00}^{-2}-2\left(p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2}\right]\right\}\\
&+\varepsilon_{\lambda\nu}\left\{p_\mu\left[\zeta_0^{-1}\left(\left(p-q\right)^2,m^2\right)\right]\right.\\
&-q_\mu\left[\zeta_0^{-1}\left(\left(p-q\right)^2,m^2\right)+\zeta_0^{-1}\left(q^2,m^2\right)\right]\\
&+2\left[2p_\mu\zeta_{10}^{-1}+2q_\mu\zeta_{01}^{-1}-p_\mu\zeta_{00}^{-1}\right]\\
&-p_\mu\left[-2q^2\zeta_{10}^{-2}+2\left(p\cdot q\right)\zeta_{10}^{-2}+q^2\zeta_{00}^{-2}\right]\\
&\left.-q_\mu\left[-2q^2\zeta_{01}^{-2}+2\left(p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2}-p^2\zeta_{00}^{-2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\varepsilon_{\lambda\rho}\left\{-g_{\mu\nu}q^\rho\left[\zeta_0^{-1}\left(\left(p-q\right)^2,m^2\right)\right]\right.\\
&+g_{\mu\nu}p^\rho\left[\zeta_0^{-1}\left(\left(p-q\right)^2,m^2\right)+\zeta_0^{-1}\left(p^2,m^2\right)\right]\\
&-g_{\mu\nu}p^\rho\left[2p^2\zeta_{10}^{-2}-2\left(p\cdot q\right)\zeta_{10}^{(-2)}+q^2\zeta_{00}^{-2}\right]\\
&-g_{\mu\nu}q^\rho\left[2p^2\zeta_{01}^{-2}-2\left(p\cdot q\right)\zeta_{01}^{-2}-p^2\zeta_{00}^{-2}\right]\\
&+2g_{\mu\nu}\left[-2p^\rho\zeta_{10}^{-1}-2q^\rho\zeta_{01}^{-1}+q^\rho\zeta_{00}^{-1}\right]\\
&+8p^\rho p_\mu p_\nu\left[-\zeta_{30}^{-2}+\zeta_{20}^{-2}\right]+4p^\rho q_\mu p_\nu\left[-2\zeta_{21}^{-2}+\zeta_{11}^{-2}\right]\\
&+8q^\rho q_\mu q_\nu\left[-\zeta_{03}^{-2}+\zeta_{02}^{-2}\right]+4p^\rho q_\mu q_\nu\left[-2\zeta_{12}^{-2}+\zeta_{11}^{-2}\right]\\
&+4p^\rho p_\mu q_\nu\left[-2\zeta_{21}^{-2}+\zeta_{20}^{-2}+\zeta_{11}^{-2}-\zeta_{10}^{-2}\right]\\
&+4q^\rho q_\mu p_\nu\left[-2\zeta_{12}^{-2}+\zeta_{02}^{-2}+\zeta_{11}^{-2}-\zeta_{01}^{-2}\right]\\
&+4q^\rho p_\mu p_\nu\left[-2\zeta_{21}^{-2}+2\zeta_{11}^{-2}+\zeta_{20}^{-2}-\zeta_{10}^{-2}\right]\\
&\left.+4q^\rho p_\mu q_\nu\left[-2\zeta_{12}^{-2}+2\zeta_{11}^{-2}+\zeta_{02}^{-2}-\zeta_{01}^{-2}\right]\right\}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Antes de verificar se as relações entre funções de Green da amplitude AVV são satisfeitas e responder as questões que motivaram a presente investigação devemos especificar a amplitude anômala AV, uma vez que ela contém um termo ainda não especificado.

Capítulo 5

Consistência no cálculo perturbativo bidimensional e anomalia AV

5.1 Introdução

No capítulo anterior explicitamos as amplitudes que fazem parte da presente investigação na linguagem que adotamos. A amplitude AVV é finita e não depende de nenhum aspecto particular dos cálculos mas ela está diretamente relacionada, através de relações entre funções de Green, á amplitude anômala AV, esta sim com contagem de potências apontando caráter divergente. A amplitude AV, por outro lado, ainda não está completamente especificada pois o método utilizado separou as partes divergentes das finitas mas não especificou ainda as quantidades divergentes. Em particular a quantidade ∇, que é uma diferença entre duas integrais logaritimicamente divergentes, aparece na expressão para a amplitude AV. Assim antes de verificar se a amplitude AVV satisfaz sua propriedades devemos completar a tarefa de especificar completamente a amplitude anômala AV. Isto é essencialmente o que faremos a seguir neste capítulo. Para tal começaremos considerando a amplitude VV, relacionada ao tensor de polarização do vácuo da QED_2 para reunirmos os elementos necessários a fim de, com base na consistência do cálculo perturbativo bidimensional, especificarmos a amplitude AV.

5.2 A amplitude VV e a consistência no cálculo perturbativo

Antes de considerar a expressão obtida para a amplitude VV, consideremos aspectos gerais a respeito desta amplitude. Primeiramente esta amplitude é um tensor de dois índices simétrico, formado a partir do momento externo p e do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Isto quer dizer que a forma geral deve ser

$$T_{\mu\nu}^{VV} = g_{\mu\nu}\left[F_1\left(p^2\right)\right] + p_\mu p_\nu\left[F_2\left(p^2\right)\right].$$

Os dois índices estão associados a correntes conservadas. Ou seja a expressão para a amplitude VV deve satisfazer

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = p^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = 0, \tag{5.1}$$

com isso estabelecemos a relação entre as funções genéricas

$$F_1\left(p^2\right) = -p^2 F_2\left(p^2\right),$$

e portanto podemos escrever

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right) F_2\left(p^2\right).$$

Dado isto é esperado que qualquer cálculo consistente desta amplitude apresente esta forma geral. Além disto é possível extrair um limite de baixa energia associado à amplitude VV. Tendo em vistas que $F_1\left(p^2\right) = -p^2 F_2\left(p^2\right)$ é esperado que o termo proporcional ao tensor métrico se anule em $p^2 = 0$, ou seja:

$$\left[F_1\left(p^2\right)\right]_{p^2=0} = 0,$$

uma vez que $F_2\left(p^2\right)$ não deve ter um pólo em $p^2 = 0$. Isto é necessário para manter o fóton sem massa após a correção perturbativa.

Por outro lado estabelecemos que a amplitude VV deve satisfazer à relação

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V\left(k_1\right) - T_\nu^V\left(k_2\right).$$

Aparentemente esta propriedade é incompatível com as propriedades acima. Vamos verificar melhor isto.

Consideremos a forma obtida para a amplitude VV no cálculo realizado no capítulo anterior. Obtivemos

$$\begin{aligned} T^{VV}_{\mu\nu} &= 2\left[\Delta^{(2)}_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right] \\ &- \left(\frac{i}{\pi}\right)\left(\frac{p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2}{p^2}\right)\left[1 + m^2\chi^{(-1)}_0\left(p^2, m^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Dado este resultado e a forma explícita obtida para a amplitude V Eq.(**??**) é fácil perceber que

$$p^\mu T^{VV}_{\mu\nu} = 2p^\mu\left[\Delta^{(2)}_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right] = T^V_\nu(k_1) - T^V_\nu(k_2),$$

o que implica que nosso cálculo satisfaz à relação entre funções de Green esperada para a amplitude VV. Mas quanto às propriedades de simetria? E a forma geral obtida acima para VV que não é consistente com a forma obtida? Esta discordância é apenas aparente pois ainda não especificamos a quantidade ∇. Se tivéssemos utilizado alguma regularização esta quantidade já teria sido especificada. No contexto do método que adotamos o valor desta quantidade é especificado pela consistência do cálculo perturbativo. Ou seja este valor será definido pela imposição da manutenção de propriedades fundamentais nas amplitudes perturbativas. Isto é equivalente a buscar condições s serem satisfeitas por uma regularização a fim de que esta produza resultados consistentes. Em dimensão D=1+1 esta tarefa é bastante simples. Podemos invocar a invariância transalcional na amplitude V, que implica em impor independência desta amplitude com a escolha do momento arbitrário k_1. Isto forçaria a quantidade ∇ ser nula. Poderíamos invocar o teorema de Furry que estabelece baseado em ingredientes muito gerais que toda função de Green contendo um número ímpar de propagadores fermiônicos idênticos e somente vértices vetoriais deve ser identicamente nula. Novamente o valor exigido para ∇ seria nulo. Poderíamos argumentar que a escolha do momento k_1, ($k_1 = 0$), seria igualmente eficiente. Entretanto isti significaria assumir que os cálculos perturbativos resultam em amplitudes ambíguas e somente as adequadas escolhas das ambiguidades produzem re-

sultados consistentes. Além disto ainda que isto pudesse ser possível para a amplitude V individualmente isto não seria para a amplitude VV pois a contração com os momento externo resulta em uma diferença de funções de um ponto que é não ambígua. Cada uma das funções depende de um momento arbitrário e a escolha simultânea $k_1 = k_2 = 0$ não está disponível. Assim, devemos concluir que o cálculo produzido pela estratégia que utilizamos é correto pois satisfaz as relações entre funções de Green esperadas, como deve ser exigido. A especificação do valor $\nabla = 0$ é imposta pela consistência no cálculo perturbativo. Sem isso não preservaríamos nem mesmo invariância translacional. O valor nulo vem do fator relativo 2 convenientemente assumido na definição. Esta condição é denominada de Relação de Consistência no contexto do método que adotamos. Ela pode ser vista como uma propriedade necessária para uma regularização produzir resultados consistentes no cálculo perturbativo bidimensional. Ela é satisfeita na reguarização dimensional assim como pode ser satisfeita na regularização de Pauli-Villars [ ]. Por fim percebamos que isto é uma exigência e não uma escolha.

Após a breve discussão acima voltamos para a amplitude VV assumindo a validade da Relação de Consistência $\nabla = 0$. Como consequência o teorema de Furry é satisfeito ($T^V_\nu = 0$) e a amplitude VV possui a forma esperada (invariante de gauge). Notemos ainda que o limite de baixa energia estabelecido também será automaticamente satisfeito, ou seja:

$$\left[F_1\left(p^2\right)\right]_{p^2=0} = \left[1 + m^2\chi_0^{(-1)}(p^2, m^2)\right]_{p^2=0} = 0.$$

A expressão obtida, além disto, possui o valor correto da massa induzida para o fóton no limite de massa nula para o elétron [ ] ($\frac{e}{\sqrt{\pi}}$).

Com as conclusões extraídas nesta seção podemos agora estabelecer um ponto de vista claro para a amplitude anômala AV. O argumento que utilizaremos é o da universalidade; todas as amplitudes, que são combinações das mesmas integrais de Feynman, devem ser tratadas de modo idêntico. Ou ainda, nenhuma interpretação para as amplitudes perturbativas que destroi a QED pode ser considerado aceitável.

5.3 A amplitude anômala AV

Vamos então considerar a amplitude anômala AV e suas propriedades de simetria amplitude tratando-a de modo idêntico à amplitude VV. Assim é instrutivo primeiramente considerar as propriedades gerais para esta amplitude para sabermos o que deve ser esperado para o a expressão calculada.

A amplitude AV é um tensor de ordem dois antisimétrico e deve ser construído com um vetor (o momento externo p), o tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. A forma mais geral deste tensor é

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\nu}\left[F_1\left(p^2\right)\right] + \varepsilon_{\mu\xi}p^{\xi}p_{\nu}\left[F_2\left(p^2\right)\right] + \varepsilon_{\nu\xi}p^{\xi}p_{\mu}\left[F_3\left(p^2\right)\right]. \tag{5.2}$$

O tensor $T_{\mu\nu}^{AV}$ possui um índice vetorial e outro axial tal que ele deve satisfazer as propriedades

$$p^{\nu}T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \tag{5.3}$$

$$p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} = 2mT_{\nu}^{PV}. \tag{5.4}$$

Contraindo com a forma geral adotda acima para impor estas propriedades teremos primeramente para o índice vetorial

$$p^{\nu}T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\mu\xi}p^{\xi}\left[F_1\left(p^2\right) + p^2F_2\left(p^2\right)\right].$$

A conservação da corrente vetorial impõe

$$F_1\left(p^2\right) = -p^2F_2\left(p^2\right).$$

A contração com o índice axial nos fornece

$$p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\nu\alpha}p^{\alpha}\left[p^2F_3\left(p^2\right) - F_1\left(p^2\right)\right].$$

Utilizand using the condition stated by the vector current conservano a condição fornecida pela contação com o índice vetorial podemos escrever isto na forma

$$p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} = \varepsilon_{\nu\alpha}p^{\alpha}p^2\left[F_2\left(p^2\right) + F_3\left(p^2\right)\right].$$

Um aspecto interessante desta expressão, assim como ocorreu no caso da amplitude VV, é a existência de um limite de baixa energia. A expressão indica que devemos ter em $p^2 = 0$ um resultado nulo para o divergente da corrente axial

$$\lim_{p^2 \to 0} \left[p^\mu T^{AV}_{\mu\nu} \right] = 0.$$

Entretanto nós temos que o divergente da corrente axial deve ser proporcional á corrente pseudo escalar, o que signica que

$$p^\mu T^{AV}_{\mu\nu} = 2m T^{PV}_\nu,$$

Assim nós somos obrigados a identificar

$$\frac{p^\mu T^{AV}_{\mu\nu}}{2m} = T^{PV}_\nu = \varepsilon_{\nu\mu} p^\mu \Gamma\left(p^2\right).$$

e o limite de baixa energia estabelece que

$$\Gamma\left(p^2\right)_{p^2=0} = 0,$$

Concuindo: a amplitude PV amplitude deve se anular em $p^2 = 0$.

A amplitude PV (finita) por sua vez foi calculada no capítulo anterior e o resultado obtido foi

$$T^{PV}_\mu = \left(\frac{i}{2\pi}\right) m \varepsilon_{\mu\alpha} p^\alpha \left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right].$$

Ese resultado estabelece claramente que a amplitude PV não se aunula em $p^2 = 0$, pois

$$\chi_0^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) = -\frac{1}{m^2}\left[1 + \frac{p^2}{6m^2} + O\left(p^4\right)\right],$$

o que implica em

$$T^{PV}_\mu\left(p^2 = 0\right) = \left(-\frac{i}{2\pi}\right)\frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\alpha} p^\alpha.$$

Portanto podemos concluir sem nenhuma dúvida que o limite de baixa energia,

$$\lim_{p_\mu \to 0} p^\mu T^{AV}_{\mu\nu} = 0,$$

não pode ser satisfeito simultaneamente com a relação estabelecida para o divergente da corrente axial com a corrente pseudo escalar.

A conclusão a respeito do que devemos esperar para o cálculo da amplitude AV é que *se a corrente vetorial é conservada o limite da baixa energia não poderá ser satisfeito simultaneamente á propriedade que relaciona o divergente da corrente axial com a corrente pseudo escalar. Uma destas duas últimas propriedade s de simetria será necessariamente violada.*

A implicação para o cálculo perturbativo de AV é que a identidade de Ward para a corrente axial será violada se o limite de baixa energia for satisfeito e vice versa. Estas duas propriedades jamais estarão simultaneamente na mesma expressão. Este é o fenômeno da anomalia axial AV em dimensão D=1+1. É importante notar que os argumentos utilizados não se restringem ao cálculo perturbativo permanecendo válidos mesmo que a solução seja exata.

Por outro lado nós sabemos que a expresão obtida no cálculo perturbativo ao nível um loop deve satisfazer às relações entre funções de green estabelecidas no capítulo 2 assim como fizemos para a amplitude VV. A expresão obtida foi

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AV}\left(k_1,k_2;m^2\right) &= -2\varepsilon_{\mu\alpha}\Delta_{\nu}^{\alpha}\left(m^2\right) \\ &+ 4\left[\frac{i}{(4\pi)}\right]\left[\varepsilon_{\mu\nu}q^2-\varepsilon_{\mu\alpha}q^{\alpha}q_{\nu}\right]\left[\chi_2^{-1}\left(q;m^2\right)-\frac{\chi_0^{-1}\left(q;m^2\right)}{2}\right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

Poderíamos analisar esta expressão diretamente mas é muito instrutivo perceber a relação entre esta e a amplitude VV

$$T_{\mu\nu}^{AV} = -\varepsilon_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}\left[T_{\beta\nu}^{VV}\right]. \tag{5.6}$$

Deste modo fica fácil a análise necessária. A contração com o índice vetorial nos fornece

$$\begin{aligned} p^{\nu}T_{\mu\nu}^{AV} &= -\varepsilon_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}\left[p^{\nu}T_{\beta\nu}^{VV}\right], \\ &= -\varepsilon_{\mu\alpha}g^{\alpha\beta}\left[T_{\beta}^{V}\left(k_1\right)-T_{\beta}^{V}\left(k_2\right)\right], \\ &= T_{\mu}^{A}\left(k_1\right)-T_{\mu}^{A}\left(k_2\right), \end{aligned}$$

mostrando que a relação entre funções de Green esperada é preservada. Por outro lado a

contração com o indíce axial nos revela

$$
\begin{aligned}
p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} &= -2\varepsilon_{\xi\chi}\left(k_2-k_1\right)_{\xi}\left[\Delta_{\chi\nu}^{(2)}\left(\lambda^2\right)\right]+\left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}p^{\mu}\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right],\\
&= \left[T_{\nu}^{A}\left(k_1\right)\right]-\left[T_{\nu}^{A}\left(k_2\right)\right]+2m\left[T_{\nu}^{PV}\right]+\left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}p^{\mu}.
\end{aligned}
$$

mostrando que a relação esperada é violada. O termo violador é finito e não ambíguo. Este termo é precisamente o termo anômalo. Podemos ver isso verificando as identidades de Ward. Como vimos no caso da amplitude VV, a consistência do cálculo perturbativo bidimensional é obtida com a imposição da Relação de Consistência $\Delta = 0$. O resultado então fica

$$
T_{\mu\nu}^{AV}\left(k_1,k_2;m^2\right)=\left(\frac{i}{\pi}\right)\left[\varepsilon_{\mu\nu}q^2-\varepsilon_{\mu\alpha}q^{\alpha}q_{\nu}\right]\left[\chi_2^{-1}\left(q;m^2\right)-\frac{\chi_0^{-1}\left(q;m^2\right)}{2}\right] \tag{5.7}
$$

A contração com o índice vetorial fornece

$$
p^{\nu}T_{\mu\nu}^{AV}=0
$$

implicando na manutenção da identidade de Ward relativa à corrente vetorial. Por sua vez a contração com o índice axial fornece

$$
\begin{aligned}
p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} &= \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}p^{\mu}\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right],\\
&= 2m\left[T_{\nu}^{PV}\right]+\left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}p^{\mu},
\end{aligned}
$$

mostrando uma violação da identidade de Ward relativa à corrente axial. Por outro lado o limite de baixa energia

$$
\begin{aligned}
\lim_{p_\mu\to 0}p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} &= \lim_{p_\mu\to 0}2m\left[\left(-\frac{i}{2\pi}\right)\frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}\right]+\left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}p^{\mu},\\
&= 0
\end{aligned}
$$

mostrando que este limite é satisfeito. Assim o resultado obtido para a amplitude AV está de acordo com o previsto pela análise geral que fizemos acima: a identidade de Ward vetorial é preservada assim como o limiite de baixa energia e a identidade de Ward relativa à corrente axial é violada. Este resultado está de acordo com o adotado em dimensão

$D = 3 + 1$ na amplitude AVV. O limite de baixa energia, relacionado ao decaimento eletromagnético do píon neutron, deve ser preservado assim como as identidades de Ward relativas á corrente vetorial (conservada) mas a identidade de ward relativa á corrente axial é violada (pelo termo anômalo). Estamos agora prontos para considerarmos as propriedades da amplitude finita AVV.

Capítulo 6

Verificação das relações entre funções de Green para a amplitude AVV

Depois de estabelecer um ponto de vista claro a respeito da amplitude AV que significa adotar a expressão

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \left(\frac{i}{\pi}\right)\left(\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}p_{\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}p^{2}\right)\frac{1}{p^{2}}\left[1 + m^{2}\chi_{0}^{(-1)}\left(p^{2}, m^{2}\right)\right], \tag{6.1}$$

podemos concluir nossa investigação verificando as relações entre funções de Green para a amplitude AVV. Teremos que efetuar as contrações com os momentos externos e, no resultado obtido, identificar as funções que aparecem nas relações entre funções de Green para a contração. Como vimos para a amplitude anômala AV se alguma relação entre função de Green for violada teremos uma anomalia.

Primeiramente notemos que as amplitudes que calculamos foram escritas em termos de três conjuntos de funções; as funções $\chi_{k}^{(-1)}$, para as funções de dois pontos, e as funções $\xi_{nm}^{(-2)}$ e $\xi_{nm}^{(-1)}$ para as funções de três pontos. Estes dois conjuntos são relacionados. O problema que encontraremos ao contrair as amplitudes de três pontos é que ficaremos com combinações destas funções para um certo valor de n+m que corresponde ao número de índices de Lorentz da amplitude contraída. Estas combinações terão que desaparecer em favor de outras correspondentes a soma n+m-1 pois a amplitude contraída terá um índice de Lorentz a menos. Assim é essencial que identifiquemoa tais reduções destas

funções antes mesmo de contraírmos as expressões correspondentes. Para identificar estas relações comecemos primeiramente por perceber que cada função $\xi_{nm}^{(-h)}$ pode ser reduzida para uma combinação de funções $\chi_k^{(-1)}$ mais funções $\xi_{nm}^{(-h)}$ correspondentes à soma $n+m$ diminuida de uma unidade $(n+m-1)$. As operações necessárias são integrações por partes ou derivação sob o sinal de integração.

Como tal para o caso $n+m=1$ teremos as reduções

$$\xi_{01}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(q^2-p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_0^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_0^{(-1)}(p,m)\right]-\left[\chi_0^{(-1)}(q,m)\right]+\left(p^2-p\cdot q\right)\xi_{00}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{10}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(p^2-p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_0^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_0^{(-1)}(q,m)\right]-\left[\chi_0^{(-1)}(p,m)\right]+\left(q^2-p\cdot q\right)\xi_{00}^{(-2)}\right\}.$$

Para o caso $n+m=2$ nós temos

$$\xi_{02}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(q^2-p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p,m)\right]-\xi_{00}^{(-1)}+\left(p^2-p\cdot q\right)\xi_{01}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{20}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(p^2-p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_1^{(-1)}(q,m)\right]-\xi_{00}^{(-1)}+\left(q^2-p\cdot q\right)\xi_{10}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{11}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(p^2-p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\chi_1^{(-1)}(p,m)\right]+\frac{(p\cdot q)}{p^2}\xi_{00}^{(-1)}+\left(q^2-p\cdot q\right)\xi_{01}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{11}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(q^2-p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\chi_1^{(-1)}(q,m)\right]+\frac{(p\cdot q)}{q^2}\xi_{00}^{(-1)}+\left(p^2-p\cdot q\right)\xi_{10}^{(-2)}\right\},$$

e para o caso $n+m=3$ temos

$$\xi_{30}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(p^2-p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_2^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_2^{(-1)}(q,m)\right]-2\xi_{10}^{(-1)}+\left(q^2-p\cdot q\right)\xi_{20}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{03}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(q^2-p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_2^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_2^{(-1)}(p,m)\right]-2\xi_{01}^{(-1)}+\left(p^2-p\cdot q\right)\xi_{02}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{p^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(p^2-p\cdot q)}{p^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)-\chi_2^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{p^2}\xi_{10}^{(-1)}-\xi_{01}^{(-1)}+\left(q^2-p\cdot q\right)\xi_{11}^{(-2)}\right\},$$

$$\xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{q^2}{p^2q^2-(p\cdot q)^2}\right\}\left\{\frac{(q^2-p\cdot q)}{q^2}\left[\chi_1^{(-1)}(p-q,m)-\chi_2^{(-1)}(p-q,m)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(p\cdot q)}{q^2}\xi_{01}^{(-1)}-\xi_{10}^{(-1)}+\left(p^2-p\cdot q\right)\xi_{11}^{(-2)}\right\}.$$

Estas reduções são necessárias se queremos identificar na amplitude contraída as amplitudes que aparecem nas relações entre funções de Green. Mas o que facilita a referida tarefa é a identificação de combinações simples destes conjuntos de reduções. São combinações que permitem simplificar o coeficiente das reduções apresentadas acima. Para as funções correspondentes a $n+m=3$ teremos:

$$p^2\xi_{30}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]-\xi_{10}^{(-1)}+\frac{1}{2}p^2\xi_{20}^{(-2)}, \tag{6.2}$$

$$q^2\xi_{03}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]-\xi_{01}^{(-1)}+\frac{1}{2}q^2\xi_{02}^{(-2)}, \tag{6.3}$$

$$q^2\xi_{12}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{21}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\xi_{10}^{(-1)}+\frac{1}{2}q^2\xi_{11}^{(-2)}, \tag{6.4}$$

$$p^2\xi_{21}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{12}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\xi_{01}^{(-1)}+\frac{1}{2}p^2\xi_{11}^{(-2)}, \tag{6.5}$$

$$q^2\left[\xi_{21}^{(-2)}\right]+(p\cdot q)\left[\xi_{30}^{(-2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_2^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}q^2\xi_{20}^{(-2)}, \tag{6.6}$$

Para $n+m=2$:

$$p^2\xi_{20}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{11}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]-\frac{1}{2}\xi_{00}^{(-1)}+\frac{p^2}{2}\xi_{10}^{(-2)}, \tag{6.7}$$

$$q^2\xi_{02}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{11}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]-\frac{1}{2}\xi_{00}^{(-1)}+\frac{q^2}{2}\xi_{01}^{(-2)}, \tag{6.8}$$

$$p^2\xi_{11}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{02}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]+\frac{p^2}{2}\xi_{01}^{(-2)}, \tag{6.9}$$

$$q^2\xi_{11}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{20}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]+\frac{q^2}{2}\xi_{10}^{(-2)}, \tag{6.10}$$

E finalmente para $n+m=1$:

$$q^2\xi_{01}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{10}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]+\frac{1}{2}q^2\xi_{00}^{(-2)}, \tag{6.11}$$

$$p^2\xi_{10}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{01}^{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_0^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]+\frac{1}{2}p^2\xi_{00}^{(-2)}, \tag{6.12}$$

$$q^2\xi_{01}^{(-1)}+(p\cdot q)\,\xi_{10}^{(-1)}=\frac{1}{2}(p-q)^2\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}p^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]+\frac{1}{2}q^2\xi_{00}^{(-1)}. \tag{6.13}$$

Notemos que as funções que aparecem no lado esquerdo possuem a soma n+m superior em uma unidade áquelas que aarecem no lodo direito onde aparecem também funções do tipo $\chi_k^{(-1)}$ ssociadas a funções de dois pontos, precisamente o que ocorre quando contraímos uma amplitude para gerar uma relação entre funções de Green. Agora estamos prontos para contrair a amplitude AVV com seus momentos externos, reorganizar os termos e identificar as amplitudes que devem aparecer no resultado comtraído.

Comecemos conssiderando as amplitudes que aparecem na amplitude AVV como subestrtuturas, tomando primeiro a amplitude VPP. Contraindo com q^λ teremos

$$\begin{aligned}[-i\,(4\pi)]\,q^\lambda T_\lambda^{VPP}&=(p\cdot q)\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\\&-\left(p^2-p\cdot q\right)\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\&+2\left(p^2-p\cdot q\right)\left[q^2\xi_{01}^{(-2)}+(p\cdot q)\,\xi_{10}^{(-2)}\right]\\&+\left(p^2-p\cdot q\right)q^2\xi_{00}^{(-2)}.\end{aligned}$$

Utilizando então a propriedade (6.11) teremos o resultado

$$[-i\,(4\pi)]\,q^{\lambda}T_{\lambda}^{VPP} = p^2\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right] - (p-q)^2\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right],$$

ou ainda reorganizando convenientemente pela adição e subtração de um termo

$$\begin{aligned}[-i\,(4\pi)]\,q^{\lambda}T_{\lambda}^{VPP} = &\left\{-2\left[I_{log}^{(2)}\left(m^2\right)\right] + \frac{i}{(4\pi)}p^2\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\right\}\\ &-\left\{-2\left[I_{log}^{(2)}\left(m^2\right)\right] + \frac{i}{(4\pi)}(p-q)^2\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

Inspecionando a expressão obtida no capítulo 4 para a amplitude PP, Eq.(**??**), podemos identificar

$$q^{\lambda}T_{\lambda}^{VPP} = \left[T^{PP}\left(k_1,k_2\right)\right] - \left[T^{PP}\left(k_2,k_3\right)\right],$$

que é a relação esperada, Eq. (**??**).

Para a amplitude PPV que também aparece na expressão para AVV, Eq.(4.18) teremos

$$\begin{aligned}[-i\,(4\pi)]\,(q-p)^{\nu}\,T_{\nu}^{PPV} = &\left(p^2 - p\cdot q\right)\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\\ &-\left(q^2 - p\cdot q\right)\left[\chi_0^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]\\ &+2\,(p\cdot q)\left[p^2\xi_{10}^{(-2)} + (p\cdot q)\,\xi_{01}^{(-2)}\right]\\ &-2\,(p\cdot q)\left[q^2\xi_{01}^{(-2)} + (p\cdot q)\,\xi_{10}^{(-2)}\right]\\ &-\left(p^2-q^2\right)(p\cdot q)\,\xi_{00}^{(-2)}.\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades (6.11) e (6.12) teremos

$$[-i\,(4\pi)]\,(q-p)^{\nu}\,T_{\nu}^{PPV} = p^2\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right] - q^2\left[\chi_0^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right],$$

o que significa

$$(q-p)^{\nu}\,T_{\nu}^{PPV} = \left[T^{PP}\left(k_1,k_2\right)\right] - \left[T^{PP}\left(k_1,k_3\right)\right],$$

o que concorda com a relação (**??**).

Agora, para a amplitude PVP, dada por (4.19), a contração com p^μ fornece

$$\begin{aligned}
[-i\,(4\pi)]\,p^\mu T^{PVP}_\mu = &-\left(p^2 - p\cdot q\right)\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] + (p\cdot q)\left[\chi_0^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] \\
&- \left[(p-q)^2 - p^2 + q^2\right]\left[p^2\xi_{10}^{(-2)} + (p\cdot q)\,\xi_{01}^{(-2)}\right] \\
&+ p^2\left(q^2 - p\cdot q\right)\xi_{00}^{(-2)}.
\end{aligned}$$

A utilização da propriedade (6.12)permite obter o resultado

$$[-i\,(4\pi)]\,p^\mu T^{PVP}_\mu = -\,(p-q)^2\left[\chi_0^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] + q^2\left[\chi_0^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right],$$

o qual implica que a relação (**??**) é preservada. Os resultados obtidos acima serão úteis para as contrações envolvendo a amplitude AVV.

Agora consideremos as contrações para o tensor $T^{odd}_{\lambda\mu\nu}$. Teremos primeiramente

$$\begin{aligned}
[-i\,(4\pi)]\,q^\lambda T^{odd}_{\lambda\mu\nu} = &\,4\varepsilon_{\mu\rho}\Big\{-p_\rho p_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
&+ (p-q)_\rho\,(p-q)_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right]\Big\} \\
&+ 2\varepsilon_{\mu\rho}q_\rho q_\nu\left\{-\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] + q^2\xi_{01}^{(-2)} - 4m^2\xi_{01}^{(-2)}\right\} \\
&+ 2\varepsilon_{\mu\rho}q_\rho p_\nu\Big\{-\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
&+ 2\left[p^2\xi_{10}^{(-2)} + q^2\xi_{01}^{(-2)}\right] - 2\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&+ \left(q^2 - 4m^2\right)\xi_{10}^{(-2)} - q^2\xi_{00}^{(-2)}\Big\} \\
&+ 4\varepsilon_{\mu\nu}\Big\{(p-q)^2\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&- p^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) - \chi_2^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
&+ q^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] - \frac{1}{2}(p\cdot q)\left[\chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}q^2\left[p^2\xi_{10}^{(-2)} + (p\cdot q)\,\xi_{01}^{(-2)}\right] - \frac{1}{2}q^2\left[q^2\xi_{01}^{(-2)} + (p\cdot q)\,\xi_{10}^{(-2)}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(p^2 - p\cdot q\right)q^2\xi_{00}^{(-2)} + m^2\left(q^2 - p\cdot q\right)\xi_{00}^{(-2)}\Big\},
\end{aligned}$$

e depois

$$
\begin{aligned}
[-i\,(4\pi)]\,p^{\mu}T^{odd}_{\lambda\mu\nu} = 2\varepsilon_{\lambda\nu}\Big\{&(p-q)^2\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\
&-q^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]\Big\}\\
&-\varepsilon_{\lambda\rho}\Big\{-4p^{\rho}p_{\nu}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\
&-2p^{\rho}p_{\nu}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]+2p^{\rho}p_{\nu}\left[p^2\xi_{10}^{(-2)}\right]\\
&-4q^{\rho}q_{\nu}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\
&+4q^{\rho}q_{\nu}\left[\chi_2^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]\\
&+4p^{\rho}q_{\nu}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\
&+2p^{\rho}q_{\nu}\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]-2p^{\rho}q_{\nu}p^2\left[\xi_{10}^{(-2)}\right]\\
&+4q^{\rho}p_{\nu}\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2,m^2\right)\right]\\
&+2q^{\rho}p_{\nu}\left[\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]+2q^{\rho}p_{\nu}p^2\left[\xi_{01}^{(-2)}+\xi_{10}^{(-2)}-\xi_{00}^{(-2)}\right]\Big\},
\end{aligned}
$$

e finalmente

$$
\begin{aligned}
[-i\,(4\pi)]\,(q-p)^{\nu}\,T^{odd}_{\lambda\mu\nu} = 2\varepsilon_{\lambda\mu}\Big\{&q^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]\\
&-p^2\left[\chi_1^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)-2\chi_2^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\Big\}\\
&-\varepsilon_{\lambda\rho}\Big\{2p_{\rho}p_{\mu}\left[2\chi_2^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\\
&-2p_{\rho}p_{\mu}\,(p-q)^2\left[\xi_{10}^{(-2)}\right]\\
&-2q_{\rho}q_{\mu}\left[2\chi_2^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)\right]\\
&+2q_{\rho}q_{\mu}\,(p-q)^2\left[\xi_{01}^{(-2)}\right]\\
&-2q_{\rho}p_{\mu}\left[\chi_1^{(-1)}\left(q^2,m^2\right)-\chi_1^{(-1)}\left(p^2,m^2\right)\right]\\
&-2q_{\rho}p_{\mu}p^2\left[\xi_{01}^{(-2)}+\xi_{10}^{(-2)}-\xi_{00}^{(-2)}\right]\\
&+2q_{\rho}p_{\mu}q^2\left[\xi_{01}^{(-2)}+\xi_{10}^{(-2)}-\xi_{00}^{(-2)}\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Para obtermos os resultados acima utilizamos também a identidade

$$\varepsilon_{\mu\nu}p_{\lambda}+\varepsilon_{\nu\lambda}p_{\mu}+\varepsilon_{\lambda\mu}p_{\nu}=0,$$

e as propriedades adicionais

$$
\begin{aligned}
\xi_{10}^{(-1)} &= \left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&\quad + 2m^2\xi_{10}^{(-2)} - q^2\xi_{11}^{(-2)} - p^2\xi_{20}^{(-2)} \ , \\
\xi_{01}^{(-1)} &= \left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&\quad + 2m^2\xi_{01}^{(-2)} - p^2\xi_{11}^{(-2)} - q^2\xi_{02}^{(-2)} \ ,
\end{aligned}
$$

e

$$
p^2\xi_{10}^{(-2)} + q^2\xi_{01}^{(-2)} - 2m^2\xi_{00}^{(-2)} = 2\left[\chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right].
$$

para as funções $\xi_{nm}^{(-1)}$ e $\xi_{nm}^{(-2)}$.

Reunindo os resultados acima poderemos finalmente obter o resultado desejado para as contrações da amplitude AVV com os momentos externos. Teremos

$$
\begin{aligned}
q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu}(p-q)^2\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&+ \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\mu\rho}(p-q)^\rho(p-q)_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&- \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\mu\rho}p^\rho p_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
&+ \left(\frac{i}{\pi}\right)m^2\varepsilon_{\nu\mu}\left\{\left[\chi_0^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] - \left(q^2 - p\cdot q\right)\xi_{00}^{(-2)}\right\} \\
&+ \left(\frac{i}{\pi}\right)m^2\varepsilon_{\mu\rho}\left\{p^\rho q_\nu\xi_{00}^{(-2)} + q^\rho q_\nu\left[-2\xi_{01}^{(-2)}\right] + q^\rho p_\nu\left[-2\xi_{10}^{(-2)} + \xi_{00}^{(-2)}\right]\right\} \\
&+ \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu} \ ,
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

e

$$
\begin{aligned}
p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\lambda\nu}q^2\left[\chi_2^{(-1)}\left(q^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] \\
&- \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\lambda\nu}(p-q)^2\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&+ \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\lambda\rho}(p-q)^\rho(p-q)_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left((p-q)^2, m^2\right)\right] \\
&- \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\lambda\rho}q^\rho q_\nu\left[\chi_2^{(-1)}\left(q^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] \ ,
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

e, finalmente,

$$
\begin{aligned}
(q-p)^{\nu}\, T^{AVV}_{\lambda\mu\nu} = & \left(\frac{i}{\pi}\right) \varepsilon_{\lambda\mu} p^2 \left[\chi_2^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
& - \left(\frac{i}{\pi}\right) \varepsilon_{\lambda\mu} q^2 \left[\chi_2^{(-1)}\left(q^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] \\
& - \left(\frac{i}{\pi}\right) \varepsilon_{\lambda\rho} p^{\rho} p_{\mu} \left[\chi_2^{(-1)}\left(p^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(p^2, m^2\right)\right] \\
& + \left(\frac{i}{\pi}\right) \varepsilon_{\lambda\rho} q^{\rho} q_{\mu_2} \left[\chi_2^{(-1)}\left(q^2, m^2\right) - \chi_1^{(-1)}\left(q^2, m^2\right)\right] \ . \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

Resta-nos então analisar os resultados obtidos e concluir nossa investigação.

Capítulo 7

Comentários finais e conclusões

No presente trabalho investigamos a amplitude AVV em dimensão espaço temporal D=1+1. Estávamos interessados em responder se esta amplitude finita é ou não anômala. Para tal consideramos as relações entre funções de Green estabelecidas para as contrações da amplitude (para um valor do momento do loop) com os respecticos momentos externos. Estas relações quando integradas no momento do loop estabelecem relações entre amplitudes do cálculo perturbativo. A violação destas relações implicará na existência de violações de relações de simetria.

A pretendida investigação foi feita com a utilização de uma estratégia recentemente desenvolvida para o cálculo perturbativo que não faz uso de regularizações. As amplitudes não são modificadas em relação às formas produzidas pelas regras de Feynman da teoria, mesmo na presença de divergências. Não há expansões ou limites e integrais divergentes não são de fato resolvidas. Elas são escritas como combinações de objetos básicos os quais não são modificados. As integrais finitas são resolvidas e escritas em termos de funções básicas. Relaçôes de consistência, que são propriedades específicas das integrais de Feynman divergentes (reduções tensoriais) são identificadas pela imposição da preservação de simetrias fundamentais como a invariância translacional do espaço tempo na expansão perturbativa. Este procedimento foi utilizado para estabelecer um ponto de vista claro a respeito da amplitude anômala AV que é divergente e está relacionada a funções de

green linearmente divergentes através das formas contraídas com os momentos externos. Argumentos sólidos baseados em aspectos gerais da amplitude VV, relacionada ao tensor de polarização do vácuo para a QED, são estendidos para a amplitude anômala AV, de modo a estabelecer a forma consistente desta amplitude, adotada como

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \left(\frac{i}{\pi}\right)\left(\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}p_{\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}p^{2}\right)\frac{1}{p^{2}}\left[1 + m^{2}\chi_{0}^{(-1)}\left(p^{2}, m^{2}\right)\right], \tag{7.1}$$

que satisfaz a identidade de Ward vetorial

$$p_{\nu}T_{\mu\nu}^{AV} = 0, \tag{7.2}$$

assim como ao limite de baixa energia

$$\lim_{p^{2}\to 0}\left[p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV}\right] = 0,$$

mas viola a identidade de Ward relativa à proporcionalidade entre o divergente da corrente axial e a corrente pseudo escalar

$$p^{\mu}T_{\mu\nu}^{AV} \neq 2mT_{\nu}^{PV}.$$

uma vez que a amplitude (finita) PV

$$T_{\mu}^{PV} = \left(\frac{i}{2\pi}\right)m\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}\left[\chi_{0}^{(-1)}\left(p^{2}, m^{2}\right)\right].$$

não se anula em $p^{2} = 0$. O termo anômalo que viola a identidade de ward axial corresponde ao valor a momento nulo da amplitude PV

$$T_{\mu}^{PV}\left(p^{2} = 0\right) = \left(-\frac{i}{2\pi}\right)\frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\alpha}p^{\alpha}.$$

A forma adotada para a amplitude AV é completamente consistente com o procedimento adotado em dimensão $D = 3+1$. A amplitude anômala possui quatro propriedades de simetria, sendo três identidades de Ward e um limite de baixa energia. Estes não podem estar simultaneamente presentes na mesma forma matemática para a amplitude AVV, mesmo que esta fosse obtida através de solução exata das equações de movimento. Como

o limite de baixa energia está relacionado à fenomenologia (decaimento eletromagnético do píon neutro) ele não pode ser admitido violado e assim a identidade de Ward relativa à correte axial é violada por construção ao passo que aquelas relativas à corrente vetorial (conservada) é mantida preservada.

De posse da expressão para a amplitude AV, e tomando a expressão obtida para a amplitude AVV, realizamos as contrações com os momentos externos e reescrevemos as formas contraídas convenientemente através de propriedades das funções finitas utilizadas para escrever as amplitudes de dois e três propagadores. Para a amplitude AVV estabelecemos a expressão (4.24) e as contrações com os momentos (6.14), (6.15), and (6.16). Podemos então responder a pergunda colocada como sendo o ponto principal da presente investigação. As relações entre funções de Green para a amplitude AVV são preservadas?

Para responder à pergunta acima basta que identifiquemos nas formas contraídas da amplitude AVV as funções de Green esperadas, conforme as equações ( ). ( ) e ( ). É fácil perceber na expressão ( ) que ela significa

$$p^{\mu} T^{AVV}_{\lambda\mu\nu}\left(k_1, k_2, k_3\right) = T^{AV}_{\lambda\nu}\left(k_1, k_3\right) - T^{AV}_{\lambda\nu}\left(k_2, k_3\right).$$

Para tal basta considerar a expressão para a amplitude anômala AV fornecida acima. Por sua vez a equação ( ) permite-nos identificar

$$\left(q-p\right)^{\nu} T^{AVV}_{\lambda\mu\nu}\left(k_1, k_2, k_3\right) = T^{AV}_{\lambda\mu}\left(k_1, k_2\right) - T^{AV}_{\lambda\mu}\left(k_1, k_3\right) \ .$$

E a expressão ( ) nos fornecerá

$$\begin{aligned} q^{\lambda} T^{AVV}_{\lambda\mu\nu}\left(k_1, k_2, k_3\right) &= T^{AV}_{\nu\mu}\left(k_1, k_2\right) - T^{AV}_{\mu\nu}\left(k_2, k_3\right) \\ &\quad + 2m\left[T^{PVV}_{\mu\nu}\left(k_1, k_2, k_3\right)\right] + \left(\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\nu\mu} \ , \end{aligned}$$

onde a expressão ( ) para a amplitude PVV também foi utilizada.

Mediate os resultados acima a conclusão parece simples e imediata; a amplitude AVV não satisfaz as suas relações entre funções de Green e possui uma anomalia. O valor d o termos anômalo é precisamente aquele que permite a preservação do limmite de baixa

energia de modo completamente análogo ao caso da amplitude Av em dimensão D=1+1 , da amplitude AVV em dimensão D=3+1 da amplitude AVVV em dimensão D=5+1 e assim por diante. A diferença marcate entre o caso agora apresentado na presente investigação e as demais citadas logo acima está no fato de a presente ser finita ao passo que as demais são divergentes. A tradiciaonal utilização das ambiguidades associadas ao cálculo perturbativo não estão presentes nesta amplitude. Isso mostra de modo claro que anomalias são propriedades dos tensores envolvidos e não das amplitudes perturbativas assim como não há nenhuma ssociação relevante entre divergência (e ambiguidades) com a existência de anomalias.

Como perspectivas, encorajadas pelos resultados da presente investigação, seria interessante investigar também a amplitude anômala AAA em dimensão D=1+1 e as amplitudes AVVV e VAAA em dimensão D=3+1. Os resultados destas investigações poderão esclarecer de modo definitivo a questão da existência ou não de anomalias em amplitudes finitas bem como estabelecer aspectos ainda mais gerais a respeito deste intrigante e importante fenômeno de TQC.

Apêndice A

Álgebra das matrizes de Dirac

No capítulo 2 construimos as densidades fermiônicas escalar, pseudo-escalar, vetorial, axial e tensorial utilizando os campos espinoriais massivos e um conjunto de matrizes. Estas são as chamadas matrizes de Dirac que são um conjunto de matrizes 4×4 que satisfazem a álgebra não comutativa de Clifford. Uma vez que estas matrizes estão presentes nas correntes, às quais os campos se acoplam, elas estarão também presentes na lagrangiana, nas funções de Green e, consequentemente, nas amplitudes físicas perturbativas. Neste contexto, ao longo do desenvolvimento das investigações acerca do modelo considerado somos levados a utilizar propriedades e identidades que estas matrizes obedecem. Neste apêndice iremos detalhar estas propriedades e identidades que se mostram fundamentais para o nossos objetivos neste trabalho.

Começamos por definir as matrizes que formam o conjunto das matrizes de Dirac. Estas são 4 matrizes γ_μ 4×4 que obedecem a álgebra não comutativa de Clifford:

$$\{\gamma^\mu \ , \ \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\hat{I}, \tag{A.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowki:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

e $\hat{I}$ é a matriz identidade 4×4. Definimos também uma matriz que possui a propriedade de anticomutar com todas as matrizes γ_μ, esta é a matriz γ_5 definida por:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \tag{A.3}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

Obviamente que não existe somente um conjunto de matrizes que satisfazem a álgebra de Clifford, de modo que podemos escolher trabalhar com uma das representações possíveis. Fazemos a escolha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e deste modo a matriz γ_5 será dada por:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificarmos as seguintes propriedades:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\hat{I}, \tag{A.4}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu, \tag{A.5}$$

$$\gamma^5 \gamma^5 = \hat{I}, \tag{A.6}$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5, \tag{A.7}$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu = 0, \tag{A.8}$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} = -i \left(g_{\mu\alpha}\gamma_\beta - g_{\mu\beta}\gamma_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\nu \gamma^5 \right), \tag{A.9}$$

onde:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \left(\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha \right). \tag{A.10}$$

A contração das matrizes de Dirac com quadrivetores do espaço-tempo é representada por:

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu, \tag{A.11}$$

e conseqüentemente teremos:

$$\not{k}\ \not{p} + \not{p}\ \not{k} = 2k.p, \tag{A.12}$$

$$\gamma_\mu\ \not{k} + \not{k}\gamma_\mu = 2k_\mu, \tag{A.13}$$

$$\gamma^\mu\ \not{k}\ \not{p}\gamma_\mu = \not{p}\ \not{k} + 2p.k, \tag{A.14}$$

$$\gamma^\mu\ \not{k}\gamma_\mu = -\ \not{k}, \tag{A.15}$$

e:

$$\gamma^\mu\ \not{k}\ \not{p}\ \not{q}\gamma_\mu = \not{k}\ \not{p}\ \not{q} - 2\ \not{q}\ \not{p}\ \not{k}. \tag{A.16}$$

Para encerrarmos este apêndice vamos analizar os traços das matrizes de Dirac, os quais surgem quando estamos analizando as funções de Green. Os traços são dados por:

$$Tr\left(\gamma_\mu\right) = 0, \tag{A.17}$$

$$Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu\right) = 4g_{\mu\nu}, \tag{A.18}$$

$$Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\right) = 0, \tag{A.19}$$

$$Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta\right) = 4\left(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right), \tag{A.20}$$

$$Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta\right) = 0, \tag{A.21}$$

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\gamma_\lambda\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\rho\right) &= 4\left\{\left(g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}+g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\lambda}\right. \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\mu\nu}+g_{\lambda\mu}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\alpha} \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\alpha\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\alpha\nu}+g_{\lambda\alpha}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\mu} \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu}-g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}+g_{\lambda\alpha}g_{\mu\nu}\right)g_{\rho\beta} \\
&\quad \left.\left(g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu}-g_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta}+g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\right)g_{\rho\nu}\right\}, \qquad \text{(A.22)} \\
Tr\left(\gamma_5\right) &= 0, \qquad \text{(A.23)} \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\right) &= 0, \qquad \text{(A.24)} \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha\right) &= 0, \qquad \text{(A.25)} \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) &= 0, \qquad \text{(A.26)} \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) &= 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad \text{(A.27)} \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\right) &= 0, \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

e:

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\tau\right) &= 4\left\{\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\tau}g_{\mu\nu}-\varepsilon_{\nu\sigma\lambda\tau}g_{\mu\rho}+\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\tau}g_{\nu\rho}\right. \\
&\quad \left.+\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}g_{\sigma\lambda}-\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}g_{\sigma\tau}+\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}g_{\lambda\tau}\right\}. \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}
$$

Estes são os resultados necessários acerca da álgebra das matrizes de Dirac que se mostram interessantes no presente trabalho.

Apêndice B

Parametrização de Feynman

Um dos objetivos do capítulo 2 foi escrever as funções de Green de um, dois e três pontos como uma combinação de integrais de Feynman. Estas integrais são da forma:

$$(I_N)^{\mu\nu...\lambda} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu ... k^\lambda}{\left[(k+k_1)^2 - m_1^2\right]\left[(k+k_2)^2 - m_2^2\right] ... \left[(k+k_N)^2 - m_N^2\right]}. \tag{B.1}$$

É fácil observarmos, atráves da contagem de potências do momento de integraçãon k, que algumas destas integrais podem ser divergentes e outras finitas. A possibilidade da existência de integrais divergentes nos obrigou a adotar um método para manipulação destas estruturas matematicamente indefinidas. Neste ponto vimos que com a adoção de uma distribuição regularizadora implícita e o uso de identidades puramente algébricas poderíamos separar a parte divergente da parte finita de uma integral de Feynman. A parte divergente destas integrais pode ser escrita como uma combinação de somente cinco estruturas divergentes básicas. Já a parte finita foi integrada usando-se para isso os métodos usuais de integração. O objetivo deste apêndice está em elucidar a primeira parte da solução das integrais finitas, que é a *Parametrização de Feynman.*

Tal estratégia consiste em utilizar as identidades:

$$\frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right)}{\left[a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n\right]^n}, \tag{B.2}$$

para reescrever os integrandos. Na expressão acima os $a_i's$ são os propagadores dos campos correspondentes às linhas internas dos diagramas ou estruturas do tipo $(k^2 - \lambda^2)^L$. Porém

a identidade acima não compreende todas as possíves formas que poderemos encontrar nos integrandos, pois podemos nos deparar com integrais onde $L > 1$ ou até mesmo onde os propagadores podem aparecer repetidos. Neste caso devemos encontrar uma identidade análoga à acima mostrada para procedermos a parametrização. Para isso basta que derivemos a expressão acima em relação a algum dos parâmetros $a_i's$. Deste modo teremos:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 ... a_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) x_1}{\left[a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n\right]^{n+1}}. \tag{B.3}$$

Com o uso destas relações, e outras que podem ser deduzidas a partir destas, podemos construir a lista de identidades que são necessárias para procedermos a parametrização das integrais finitas que surgem ao longo do presente trabalho. Esta lista é formada pelas relações:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{\left[(b-a)z + a\right]^2}, \tag{B.4}$$

$$\frac{1}{a^2 b} = 2\int_0^1 \frac{(1-z)dz}{\left[(b-a)z + a\right]^3}, \tag{B.5}$$

$$\frac{1}{a^3 b} = 3\int_0^1 \frac{(1-z)^2 dz}{\left[(b-a)z + a\right]^4}, \tag{B.6}$$

$$\frac{1}{a^4 b} = 4\int_0^1 \frac{(1-z)^3 dz}{\left[(b-a)z + a\right]^5}, \tag{B.7}$$

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^3}, \tag{B.8}$$

$$\frac{1}{a^2 bc} = 6\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^4}, \tag{B.9}$$

$$\frac{1}{a^3 bc} = 12\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)^2 dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^5}, \tag{B.10}$$

$$\frac{1}{abcd} = 6\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{\left[(c-a)z + (b-a)y + (d-a)x + a\right]^4}, \tag{B.11}$$

e:

$$\frac{1}{a^2 bcd} = 24\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{(1-y-z-x)dx}{\left[(c-a)z + (b-a)y + (d-a)x + a\right]^5}. \tag{B.12}$$

A título de exemplo apliquemos a parametrização de Feynman à integral:

$$I = -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2.k + \lambda^2 - m_2^2)}{(k^2 - \lambda^2)^2 \left[(k + k_2)^2 - m_2^2\right]}, \tag{B.13}$$

que surge na solução da integral de Feynman (I_2). Notamos que o denominador possui a forma a^2b e deste modo utilizamos a parametrização:

$$\frac{1}{a^2b} = 2\int_0^1 (1-z)\,dz \frac{1}{\left[(b-a)\,z+a\right]^3}. \tag{B.14}$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= \left(k^2-\lambda^2\right), \\ b &= (k+k_2)^2 - m_2^2. \end{aligned}$$

Assim teremos:

$$(b-a)\,z + a = (k+k_2z)^2 + k_2^2\,(1-z)\,z + \left(\lambda^2 - m_2^2\right) z - \lambda^2. \tag{B.15}$$

Definindo então:

$$\begin{aligned} k' &= k + k_2 z\ , \\ H &= k_2^2\,(1-z)\,z + \left(\lambda^2 - m_2^2\right) z - \lambda^2. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Logo:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -2k_2^2 z + k_2^2 - m_2^2 + \lambda^2. \tag{B.17}$$

Substituindo na integral teremos:

$$A = -2\int_0^1 (1-z)\,dz \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{(-2k_2^2 z + k_2^{2\prime} + \lambda^2 - m_2^2 + 2k_2.k)}{\left[k'^2 + H\right]^3}, \tag{B.18}$$

$$A = -2\int_0^1 (1-z)\,dz \left\{ \frac{\partial H}{\partial z} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k'^2+H\right]^3} + 2k_2^\alpha \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{\left[k'^2+H\right]^3} \right\}. \tag{B.19}$$

Após obtermos a forma acima para uma integral de Feynman finita devemos proceder com a integração no momento do loop k, e para isso utilizamos a integração dimensional.

Apêndice C

Integração Dimensional

No apêndice anterior consideramos o primeiro passo para a solução das integrais finitas que surgem na análise das funções de Green presentes neste estudo, a parametrização de Feynman. Para encontrarmos a solução final destas integrais falta-nos, ainda, estudar a integração dimensional, que é o objetivo deste apêndice.

Com o uso da parametrização de Feynman é possível colocar os integrandos em uma forma geral, qualquer que seja a integral. Esta forma geral é do tipo:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, ...)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \tag{C.1}$$

Para que não seja necessário determinarmos a solução de um conjunto destas integrais podemos solucionar a mais simples delas e então encontrar um método para determinar a solução das demais a partir da solução desta primeira.

Partimos em busca da solução da mais simples das integrais vindas da parametrização de Feynman, que é a integral:

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \tag{C.2}$$

O denominador pode ser reorganizando na forma:

$$\left(k^2 + 2Q \cdot k - H^2\right) = (k + Q)^2 - \left(Q^2 + H^2\right), \tag{C.3}$$

e uma vez que estamos analizando integrais finitas podemos realizar um shift na variável

de integração sem nos preocuparmos com termos de superfícice. Realizando o shift:

$$k' = k + Q, \tag{C.4}$$

juntamente com a definição:

$$M^2 = Q^2 + H^2, \tag{C.5}$$

a integral tomará a forma:

$$I = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}. \tag{C.6}$$

Agora fazemos uma extensão $n-$dimensional do espaço dos momenta:

$$I = \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha}. \tag{C.7}$$

Uma vez que este espaço dos momenta é um espaço tipo Minkowski, teremos:

$$d^nk = dk_0 dk_1 dk_2 ... dk_m = dk_0 d^m\mathbf{k}, \tag{C.8}$$

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2, \tag{C.9}$$

$$\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_m^2, \tag{C.10}$$

onde $m = n - 1$. Assim a integral ficará:

$$I = \int d^m\mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{\left[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2})^2\right]^\alpha} \right\}. \tag{C.11}$$

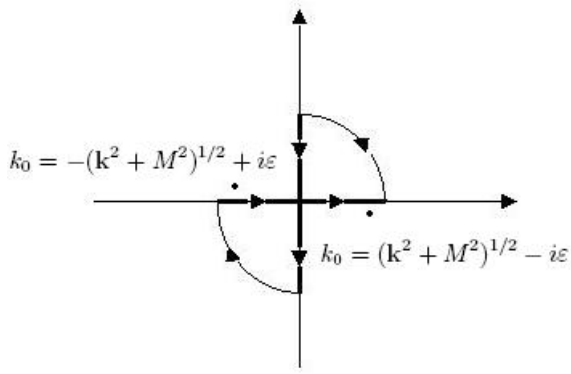
A integração em k_0 pode ser realizada no plano complexo. Notamos no entanto que os pólos do integrando estão situados sobre o eixo real, mas podemos escrever a integral I da seguinte maneira:

$$I\,(Q, n) = \int d^m\mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{\left[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon)^2\right]^\alpha} \right\}. \tag{C.12}$$

que faz com que os pólos estejam situados, no plano complexo, nos pontos:

$$k_0 = -(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} + i\varepsilon \tag{C.13}$$

$$k_0 = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon \tag{C.14}$$



Com o contorno C escolhido, a integral de $f(k_0)$:

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{k_0^2 - \left[(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon\right]^2\right\}^{\alpha}}, \tag{C.15}$$

se anula. Observemos ainda que $f(k_0)$ cai abruptamente com k_0 grande (tanto quanto $\alpha > 1$). Isto é:

$$\lim_{k_0 \to \infty} \left[f\left(k_0\right)\right] \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}. \tag{C.16}$$

Então a contribuição sobre o contorno circular C se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos a conveniente mudança de variável:

$$k_0 \longrightarrow ik_{m+1}, \tag{C.17}$$

com k_{m+1} real. Com isso a integral em k_0 fica:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f\left(k_0\right) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1}\ f\left(ik_{m+1}\right), \tag{C.18}$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f\left(k_0\right) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[\left(ik_{m+1}\right)^2 - \left(\left(\mathbf{K}^2 + M^2\right)^{1/2} - i\epsilon\right)^2\right]^{\alpha}}, \tag{C.19}$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f\left(k_0\right) = i\left(-1\right)^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[k_{m+1}^2 + \left(\left(\mathbf{K}^2 + M^2\right)^{1/2} - i\epsilon\right)^2\right]^{\alpha}}. \tag{C.20}$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, de um espaço dos momenta tipo Minkowski para um espaço tipo Euclideano $n-$dimensional, e assim:

$$k_\mu = (k_1, k_2, ..., k_{m+1}), \tag{C.21}$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_{m+1}^2, \tag{C.22}$$

$$d^n k = dk_1 dk_2 ... dk_{m+1}.$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} i \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{C.23}$$

Agora expressamos as coordenadas deste espaço Euclidiano $n-$dimensional dos momenta em coordenadas polares:

$$\begin{cases} k_1 = k sen\theta_m sen\theta_{m-1} ... sen\theta_2 sen\theta_1, \\ k_2 = k sen\theta_m sen\theta_{m-1} ... sen\theta_2 cos\theta_1, \\ '' \quad '' \quad '' \\ k_{m+1} = k cos\theta_m. \end{cases} \tag{C.24}$$

Logo o elemento de volume será dado por:

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m. \tag{C.25}$$

A integral nos momenta toma a forma:

$$I = (-1)^\alpha i \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{C.26}$$

Nos preocupemos agora em realizar as m integrações nos ângulos $\theta_1 ... \theta_m$ para depois integrarmos no momento k. Usando então os seguintes resultados:

$$\int_0^\pi sen^m\theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \tag{C.27}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{C.28a}$$

Obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi sen^2\theta_3 d\theta_3 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m \; = \\ = \; & (2\pi) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+1)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\right] ... \\ & ... \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+m-1}{2}\right)}\right] \\ = \; & \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{C.29}$$

ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \tag{C.30}$$

Voltando com este resultado para a integral:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2+M^2)^\alpha}, \tag{C.31}$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler [19], fornece:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)\right)}{(M^2)^{\alpha-\left(\frac{m+1}{2}\right)}\Gamma(\alpha)}. \tag{C.32}$$

Como $m+1=n$, teremos:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(2)^n\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}(\pi)^{m+1-\left(\frac{m+1}{2}\right)}}, \tag{C.33}$$

ou ainda:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}. \tag{C.34}$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega, \tag{C.35}$$

que então nos fornecerá:

$$I = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^\omega\Gamma(\alpha)(-Q^2-H^2)^{\alpha-\omega}}, \tag{C.36}$$

que é o resultado desejado. A presença da função $\Gamma(\alpha-\omega)$ nos diz que o resultado obtido é válido para $\alpha > \omega$, ou seja, para integrais finitas. A solução para as demais formas genéricas que aparecem em (C.1) podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^\alpha}, \tag{C.37}$$

derivamos ambos os lados de I em relação ao momento externo Q_μ e obtemos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^{\alpha+1}} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha+1-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha+1)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega+1}}. \tag{C.38}$$

Definindo $\alpha' = \alpha + 1$, uma vez que α é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}. \tag{C.39}$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras soluções necessárias para os cálculos das integrais que surgem na avaliação das funções de Green.

A seguir apresentamos os resultados para as formas genéricas (C.1) encontradas nos cálculos das funções consideradas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{\Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}, \tag{C.40}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}, \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.\\ &+ \left. \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.\\ &+ \left. \frac{\omega\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.\\ &+ \left. \frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha}Q_\nu + \delta_{\alpha\nu}Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.44}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.\\ &+ \left. \frac{\frac{1}{2}(2\omega+2)Q_\alpha \Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.45}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.\\ &+ \frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\nu}Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha}Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta}Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha}Q_\mu Q_\beta + \right.\\ &+ \left.\delta_{\nu\beta}Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta}Q_\mu Q_\nu\right) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} + \\ &+ \left. \frac{1}{4}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}}\right],\end{aligned} \tag{C.46}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4}\frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right)\left[\frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left((2\omega+4)Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta}Q^2\right)\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega-1}} +$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{4}(2\omega+2)\delta_{\alpha\beta}\Gamma(\alpha-\omega-2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega-2}}\right], \tag{C.47}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4}\frac{k^4}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right)\left[\frac{Q^4\Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.$$
$$+ \frac{(2\omega+2)Q^2\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega-1}} +$$
$$\left. + \frac{\omega(\omega+1)\Gamma(\alpha-\omega-2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega-2}}\right]. \tag{C.48}$$

É interessante notar que decorrem destes resultados as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\mu = zero, \tag{C.49}$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2), \tag{C.50}$$

$$iii) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega+1)}\left(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right)\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2). \tag{C.51}$$

Os resultados deduzidos acima são suficientes para a solução de todas as integrais de Feynman consideradas no presente trabalho.

Bibliografia

[1] • A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905).

[2] • P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **112**, 661 (1926).

[3] • W. E. Lamb and R. C. Rutherford, Phys. Rev. **72**, 241(1947);

• B. E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael, Phys. Rep. **3C**, 193 (1972);

• J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);

• P. Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **72**, 1256 (1946);

• P. Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **73**, 412 (1948);

• T. Kinoshita, "Quantum Electrodynamics", World Scientific, Singapure (1990);

• A. Akhiezer and V. B. Berestetskii, "Quantum Electrodynamics", Interscience, New York (1965);

• J. M. Jauch and F. Rohrlich, "The Theory of Photons and Electrons", Springer Verslag Berlin (1976);

• V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, "Relativistic Quantum Theory", Pergamon Press, Oxford (1971);

• J. Schwinger, "Quantum Electrodynamics", Dover, New York (1958);

• W. Greiner and J. Reinheardt, "Quantum Electrodynamics", Springer Verlag, Heidelberg (1994);

• N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Wiley-Interscience (1959).

[4] • S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996);

• P. Ramond, “Field Theory: A modern Primer”, Addisson-Wesley (1990);

• C. Itzykson an J. B. Zuber, “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill, New York (1980);

• R. P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961);

• F. Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);

• P. H. Frampton, “ Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);

• B. de Witt and J. Smith, ”Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986);

• D. Lurié, “Particles and Fields”, Interscience, New York (1968);

• L. Ryder, ”Quantum Field Theory”, Cambridge University Press, New York (1985).

[5] • t’Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);

• C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Lett. **40B**, 566 (1972);

• G. M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. **4**, 329 (1972);

• J. F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. **4**, 289 (1972);

• E. R. Speer and M. J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré **A14**, 1 (1971);

• P. H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987), Capítulo XX;

• B. de Witt and J. Smith, ”Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986), Capítulo XX;

• M. E. Fisher and D. S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, 224 (1964);

• K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972);

• K. G. Wilson, Phys. Rev. **07**, 2911 (1973);

• K. G. Wilson and J. Kogat, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).

[6] • t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);

• M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B159**, 225 (1979);

• P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. **52**, 11 (1977);

• P. Ramond, "Field Theory: A modern Primer", Addisson-Wesley (1990);

• P. H. Frampton, "Field Theories", Benjamin Cummings Publishing Company (1987);

[7] • G. Leibrant, Rev. Mod. Phys. **47** (849) 1975;

• R. Gastmans and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1973);

• R. Gastmans, J. Verwaest and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1976);

• W. Marciano and A. Sirlin, Nucl. Phys. **B88**, 86 (1975).

[8] • B. de Wit, "Introduction to Quantum Field Theory", Utrecht Lecture Notes, 2006.

[9] • O. A. Battistel, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (1999);

• O. A. Battistel and M. C. Nemes, Phys. Rev. D**59** (1999), 055010;

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B**610** 317 (2001);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G**27** L53-L60 (2001);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, L1-L10 (2002);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Phys. Rev. D**65** 1250 (2002);

• O. A. Battistel and O. L. Battistel, Int. J. Mod. Phys. A**17**, 1979 (2002);

• O. A. Battistel and G. Krein, Mod. Phys. Lett A**18**: 2255-2264 (2003);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C **1**, 001 (2003);

• G. Dallabona and O. A. Battistel, Phys. Rev. D**70**, 065017 (2004);

• O. A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).

[10] • O. A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).

[11] • E. Gambin, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria (2004).

• O. A. Battistel, J. Phys. G ...

[12] • O. A. Battitel, Dimensional aspects of anomalies, trabalho em preparação.

[13] • O. A. Battitel, Scale Ambiguities in perturbative calculations, trabalho em preparação.

[14] • Gross, D. J. Neveu, Phys. Rev. D **10** 3235 (1974).

[15] • H. W. Furry, Phys. Rev. **51,** 125 (1937).

[16] • O. A. Battistel, Parametrização da Ambigüidade de escala no cálculo Perturbativo, em preparação.

[17] • L. S. Gertsein e R. Jackiw, Phys. Rev. **181,** 1955 (1969).

[18] • R. A. Bertlmann, "*Anomalies in Quantum Field Theory*", Oxford University Press (1996);

• T. P. Cheng and L. F. Li, " Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University Press, New York (1984);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 1 (2002).

• J. S. Bell and Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, 47 (1973);

• Fijikawa, K. Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979);

• Sutherland, D. G., Nucl. Phys, **B2**, 433 (1966);

• Veltman, M. Proc. R. Soc. **A301**, 107 (1967);

• Bardeen, W. A. Phys. Rev. **184**, 1848 (1969);

• K. G. Wilson, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).

• I. S. Gerstein and R. Jackiw, Phys. Rev. **181** 1955 (1969);

[19] • T. P. Cheng and L. F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University, New York (1984).

[20] • O. A. Battistel and G. Krein, Mod. Phys. Let. **A18** 2255 (2003);

• R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. Krein and O.A. Battistel, Phys. Rev. **C 73**, 018201 (2006).

[21] • O.A. Battistel and G. Dallabona, A predictive formulation of Nambu-Jona-Lasinio model, submetido para publicação.

[22] D. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev **D6**, 477 (1972),

C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, Phys. Lett. **38B**, 519 (1972).

[23] B. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory* (Oxford University Press, Oxford, 1996),

K. Fukikawa and H. Suzuki, *Path Integral and Quantum Anomalies* (Oxford University Press, Oxford, 1996).

[24] J. Schwinger, Phys. Rev **82**, 664 (1951).

[25] J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60**, 47 (1969).

[26] S.L. Adler, Phys Rev **177**, 2426 (1969).

[27] A. Bilal, *Lectures on Anomalies*, arxiv: 0802.0634v1 (2008).

[28] K. Fukikawa, *Quantum Anomalies and some recent developments*, arxiv: 0902.2066v1 (2009).

[29] W.A. Bardeen, R. Gastmans and B. Lautrup, Nucl. Phys. **B48**, 319 (1972),

D.A. Akyeampong and R. Delburgo, Nuovo Cimento **A 17**, 578 (1973),

P. Breitenlohner and D. Maison, Commun. Math. Phys. **52**, 11 (1977),

G. Bonneau, Phys. Lett. **B96**, 147 (1980).

[30] O.A. Battistel, PhD Thesis(1999), Universidade Federal de Minas Gerais, Basil.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo