

**UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
PEDRO MARQUES CORRÊA NETO**

**DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL: UM EXPERIMENTO DE ENSINO
UTILIZANDO O *SOFTWARE R* COM FOCO NA EXPLORAÇÃO DE
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

**SÃO PAULO
2010**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
PEDRO MARQUES CORRÊA NETO

**DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL: UM EXPERIMENTO DE ENSINO
UTILIZANDO O *SOFTWARE R* COM FOCO NA EXPLORAÇÃO DE
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Prof^a. Dra. Monica Karrer** e co-orientação da **Prof^a. Dra. Verônica Yumi Kataoka**.

SÃO PAULO
2010

C844d Corrêa Neto, Pedro Marques.

Distribuição binomial: um experimento de ensino utilizando o Software R com foco na exploração de registros de representação semiótica / Pedro Marques Corrêa Neto – São Paulo : [s.n.], 2010. 239f.; il. ; 30 cm.

Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática.

Orientador: Prof^a Dr^a. Monica Karrer.

Co-orientador: Prof^a Dr^a. Verônica Yumi Kataoka

1. Distribuição binomial 2. Registros de representação semiótica 3. Software R 4. Design Experiment I. Título

CDD: 005.1

PEDRO MARQUES CORRÊA NETO

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL: UM EXPERIMENTO DE ENSINO UTILIZANDO O SOFTWARE R COM FOCO NA EXPLORAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO,
COMO EXIGÊNCIA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

Presidente e Orientadora

Nome: Dra. Monica Karrer

Titulação: Doutora em Educação Matemática

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo - SP

1º Titular

Nome: Dra. Irene Mauricio Cazorla

Titulação: Doutora em Educação

Instituição: Universidade Estadual de Santa Cruz - BA

2º Titular e Co-orientadora

Nome: Dra. Verônica Yumi Kataoka

Titulação: Doutora em Estatística e Experimentação Agropecuária

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo - SP

3º Titular

Nome: Dr. Raymond Guy Jean-Claude Duval

Titulação: Doutor em Filosofia e Psicologia

Instituição: Université Du Littoral Cote d' Opale - França

Biblioteca

Bibliotecário:

Assinatura: _____ Data ____/____/____

São Paulo, ____ de _____ de 2010

BANCA EXAMINADORA



④ R.---

Vânica Yun. Kalade

R. Duval

Dedico este trabalho à minha amada esposa Elen, aos meus amados filhos Tarsila, Felipe, Clarice e Luisa, aos meus amados pais Margarida e José (*in memoriam*) e aos meus amados irmãos Vera Lucia, Marco Antônio, Valéria Aparecida, Julio Cesar e Selma Regina.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Monica Karrer pela parceria, paciência, dedicação, estímulo e competência na orientação deste trabalho.

À Professora Doutora Verônica Yumi Kataoka pela parceria, paciência, dedicação e estímulo na co-orientação deste trabalho e por ter aceitado participar da banca contribuindo com sua experiência e competência com a realização desta pesquisa.

À Professora Doutora Irene Maurício Cazorla por ter aceitado participar da banca e pela dedicação e orientações dadas, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor Raymond Guy Jean-Claude Duval pela sua dedicação aos estudos relativos à psicologia cognitiva, pelo desenvolvimento da teoria utilizada como referencial nesta pesquisa e por sua participação na banca, enriquecendo este trabalho.

Aos Professores Doutores Tânia Maria Mendonça Campos e Ruy Pietropaolo pela implantação e competente condução do programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNIBAN Brasil.

Ao Professor Wilton Carlos Rentero pelo apoio na realização desta dissertação e pelo incentivo dado durante minha trajetória no curso.

Aos alunos participantes voluntários desta pesquisa pelo carinho e comprometimento demonstrados nas várias manhãs de sábado em que nos reunimos.

À minha amada mãe Margarida por ter me ensinado a ler, pelas orientações de vida e por todo o amor a mim dedicado.

Ao meu amado pai José (*in memoriam*) pelo incentivo à leitura e ao estudo, pelo companheirismo e pelos ensinamentos dados enquanto pudemos estar juntos.

Aos meus irmãos Vera Lucia, Marco Antônio, Valéria Aparecida, Julio Cesar e Selma Regina pelo amor a mim dedicado, por sempre torcerem por mim e por toda história de vida que temos.

Aos meus amados filhos Tarsila, Felipe e Clarice pelo carinho e apoio dados, fundamentais na fase de testes do experimento de ensino desta pesquisa e pelo amor a mim dedicado.

À minha amada filha Luisa pela luz que derrama sobre mim todos os dias.

À minha amada esposa Elen por ter me levado pela mão ao programa de Mestrado e nunca dela ter soltado, ignorando suas próprias dificuldades para dar atenção às minhas e pelo amor com o qual tem me sustentado dia após dia.

Ao senhor Deus por me conduzir e por ter colocado em minha vida todas estas pessoas maravilhosas.

Para que o meu inimigo não diga: Prevaleci contra ele; e os meus adversários se
não alegrem, vindo eu a vacilar.

Mas eu confio na tua benignidade; na tua salvação meu coração se alegrará.

Cantarei ao Senhor, porquanto me tem feito muito bem.

Salmo 13:4-6

RESUMO

Este estudo objetivou o desenvolvimento, a aplicação e a avaliação de um experimento de ensino diferenciado sobre o conteúdo de Distribuição Binomial, o qual explorou a relação entre os diversos registros de representação semiótica desse objeto matemático e o trabalho com o ambiente computacional *software-R*. A metodologia adotada para a construção e condução do experimento foi a do *Design Experiment* de Cobb et al. (2003), sendo o estudo desenvolvido em duas etapas. Na primeira, sete sujeitos do curso de Engenharia de uma instituição particular de ensino do estado de São Paulo participaram de uma avaliação individual sobre o conteúdo de distribuição Binomial. Nesta fase, objetivou-se avaliar seus conhecimentos prévios sobre esse objeto matemático. Na segunda etapa, os mesmos estudantes participaram do experimento elaborado como alternativa às práticas existentes nesse domínio. Com isso, buscou-se investigar suas trajetórias de aprendizagem diante de uma abordagem diferenciada de distribuição Binomial e o impacto das escolhas realizadas. A teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) fundamentou esse estudo, desde a concepção das atividades até a análise dos dados. Ressalta-se a importância desse tipo de trabalho, dadas as dificuldades recorrentes na aprendizagem de conteúdos da disciplina de Probabilidade detectadas por pesquisadores da área. A análise comparativa dos dados obtidos nas duas fases do experimento revelou que os estudantes apresentaram evoluções. Dentre elas, destacamos as referentes ao reconhecimento de uma distribuição Binomial nas diversas representações, ao estabelecimento de conversões que partiam do registro gráfico e à compreensão da necessidade de um modelo teórico de análise. O *software* selecionado, por permitir uma visão interativa e simultânea entre dois registros, representou um ambiente rico para o estabelecimento de experimentações, favorecendo principalmente as situações que requeriam análises partindo de representações gráficas.

Palavras-chave: Distribuição Binomial. Registros de Representação Semiótica. *Software R. Design Experiment.*

ABSTRACT

This study targeted the development, the application and the evaluation of a differentiated learning experiment about the Binomial Distribution content which exploited the relation among the several the semiotics representation records from this mathematics object and the work with Software-R computing atmosphere. The methodology proposed for building and conducting such experiment was The Cobb et al's Design Experiment (2003). Such study was developed into two phases. On the first, seven people were individually tested from a São Paulo State's engineering course of a private teaching institution about the Binomial distribution content. In this phase we intended to evaluate their pre-knowledge about this math object. On the second phase the same people took part of an elaborated experiment as an alternative to the existing practices in this overcoming. So it was intended to investigate its learning trajectory in face of an approach about the Binomial distribution and the impact of the choices made. Duval's semiotics representation records theory (1995,2000, 2003, 2006) based this study since the conception of the activities up to the data analysis. It must be pointed out the importance of this kind of work considering the same old difficulties in the contents learning on the discipline of Probability detected by the researchers of this field. The data comparative analysis of the phases of the experiment revealed that the students showed evolution among them it was verified the recognition in the binomial distribution on the several representations to the conversion establishment from the graphic records and to the understanding needs of an analysis theory model. The selected software represented a rich atmosphere to make experiments, favoring mainly the situations that required analyses starting from the graphic representations.

Key words – Binomial Distribution. Semiotics Representation Records. Software R. Design Experiment.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Uma tela do <i>Software-R</i> (gráfico 2).....	41
Figura 2 – Tela inicial do <i>Software-R</i>	42
Figura 3 – Etapas para instalação do pacote <i>TeachingDemos</i> via <i>web</i>	44
Figura 4 – Janela de seleção de pacotes do <i>Software-R</i>	45
Figura 5 – Janela de seleção das distribuições de probabilidade.....	46
Figura 6 – Janela de seleção do gráfico da distribuição Binomial.....	47
Figura 7 – Janela de valores de “n” e “p”.....	48
Figura 8 – Janela de manipulação dos valores de “n” e “p”.....	49
Figura 9 – Exemplo de registro gráfico (I) (gráfico 3).....	50
Figura 10 – Exemplo de registro gráfico (II) (gráfico 4).....	51
Figura 11 – Estrutura do pensamento estatístico conforme Wild e Pfannkuch.....	55
Figura 12 – Design Experiment: um método científico de investigação.....	73
Figura 13 – Tela inicial do <i>Software-R</i>	102
Figura 14 – Janela de seleção de pacotes do <i>Software-R</i>	103
Figura 15 – Janela de seleção das distribuições de probabilidade.....	103
Figura 16 – Janela Ferramentas.....	104
Figura 17 – Janela <i>Load Plug-ins</i>	105
Figura 18 – Janela <i>Visualize distributions</i>	105
Figura 19 – Janela de manipulação dos valores de “n” e “p”.....	106
Figura 20 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (I) (gráfico 7).....	109
Figura 21 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (II) (gráfico 8).....	109
Figura 22 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (III) (gráfico 9).....	110
Figura 23 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (IV) (gráfico 10).....	110

Figura 24 – Resposta do aluno <i>E</i> – Tarefa 1 da atividade preliminar.....	125
Figura 25 – Respostas dos alunos <i>E</i> e <i>M</i> – Tarefa 2 da atividade preliminar.....	127
Figura 26 – Resposta do aluno <i>I</i> – Tarefa 2 da atividade preliminar.....	127
Figura 27 – Respostas dos alunos <i>V</i> e <i>J</i> – Tarefa 2 da atividade preliminar.....	128
Figura 28 – Resposta do aluno <i>E</i> – Tarefa 3, item “a” da atividade preliminar.....	131
Figura 29 – Respostas dos alunos <i>D</i> , <i>I</i> , <i>V</i> e <i>O</i> – Tarefa 3, item “a” da atividade preliminar.....	132
Figura 30 – Resposta do aluno <i>E</i> – Tarefa 3, item “b” da atividade preliminar.....	133
Figura 31 – Resposta da dupla <i>D.E.</i> – Tarefa “b” da atividade 1.....	135
Figura 32 – Resposta do trio <i>I.V.O.</i> – Tarefa “b” da atividade 1.....	136
Figura 33 – Resposta da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa “b” da atividade 1.....	136
Figura 34 – Resposta da dupla <i>D.E.</i> – atividade 2.....	139
Figura 35 – Resposta do trio <i>I.V.O.</i> – Tarefa “c” da atividade 2.....	143
Figura 36 – Respostas dos grupos <i>J.M.</i> e <i>I.V.O.</i> – Tarefa “g” da atividade 2.....	144
Figura 37 – Resposta da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa 1 da atividade 3.....	147
Figura 38 – Respostas dos grupos <i>D.E.</i> e <i>J.M.</i> – Tarefa 4 da atividade 3.....	149
Figura 39 – Respostas dos grupos <i>D.E.</i> e <i>I.V.O.</i> – Tarefa 3 da atividade 4.....	152
Figura 40 – Resposta da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa 3 da atividade 4.....	153
Figura 41 – Registro gráfico de (hi) da dupla <i>D.E.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	155
Figura 42 – Registro gráfico de (hi) do trio <i>I.V.O.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	156

Figura 43 – Registro gráfico de (hi) da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	157
Figura 44 – Registro gráfico de (pi) da dupla <i>D.E.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	158
Figura 45 – Registro gráfico de (pi) do trio <i>I.V.O.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	159
Figura 46 – Registro gráfico de (pi) da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	160
Figura 47 – Registro gráfico de (pi) e (hi) da dupla <i>D.E.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	162
Figura 48 – Registro gráfico de (pi) e (hi) do trio <i>I.V.O.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	163
Figura 49 – Registro gráfico de (pi) e (hi) da dupla <i>J.M.</i> – Tarefa 5 da atividade 4.....	164
Figura 50 – Institucionalização de “p” e “q” – atividade 5.....	168
Figura 51 – Retomada de conteúdo (I) – Atividade 5.....	169
Figura 52 – Retomada de conteúdo (II) – Atividade 5.....	170
Figura 53 – Retomada de conteúdo (III) – Atividade 5.....	171
Figura 54 – Retomada de conteúdo (IV) – Atividade 5.....	172
Figura 55 – Retomada de conteúdo (V) – Atividade 5.....	172
Figura 56 – Retomada de conteúdo (VI) – Atividade 5.....	173
Figura 57 – Retomada de conteúdo (VII) – Atividade 5.....	174
Figura 58 – Gráfico da dupla <i>J.M.</i> item “g ₂ ” da tarefa “g” da atividade 7.....	185
Figura 59 – Itens “g ₃ ” e “g ₅ ” da tarefa “g” da atividade 7.....	186

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Segundo exemplo de análise da congruência da atividade de conversão.....	37
Tabela 2 – Primeiro exemplo de análise da congruência da atividade de conversão.....	38
Tabela 3 – Distribuição do número de bolinhas verdes retiradas.....	90
Tabela 4 – Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes...	94
Tabela 5 – Quadro comparativo do cálculo de probabilidades.....	96

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Exemplo de conversão no conteúdo distribuição Binomial.....	35
Quadro 2 – Exemplo de conversão no conteúdo distribuição Binomial.....	36
Quadro 3 – Exemplo de registro monofuncional.....	39
Quadro 4 – Exemplo de registro plurifuncional.....	39
Quadro 5 – Terminologia de conceitos estatísticos.....	67
Quadro 6 – Situação exemplo do registro de representação da árvore de possibilidades.....	68
Quadro 7 – Registros de representação semiótica.....	83
Quadro 8 – Atividade preliminar.....	84
Quadro 9 – Análise dos registros e conversões da atividade preliminar.....	85
Quadro 10 – Atividade 1.....	86
Quadro 11 – Análise dos registros e conversões da atividade 1.....	88
Quadro 12 – Resultados da experimentação.....	89
Quadro 13 – Atividade 2.....	89
Quadro 14 – Tarefas da atividade 2.....	90
Quadro 15 – Análise dos registros e conversões da atividade 2.....	91
Quadro 16 – Atividade 3, tarefa 1.....	92
Quadro 17 – Atividade 3, demais tarefas.....	94
Quadro 18 – Análise dos registros e conversões da atividade 3.....	95
Quadro 19 – Atividade 4.....	96

Quadro 20 – Análise dos registros e conversões da atividade 4.....	98
Quadro 21 – Atividade 5.....	99
Quadro 22 – Análise dos registros e conversões da atividade 5.....	100
Quadro 23 – Atividade 6.....	101
Quadro 24 – Análise dos registros e conversões da atividade 6.....	102
Quadro 25 – Atividade 7.....	107
Quadro 26 – Análise dos registros e conversões da atividade 7.....	111
Quadro 27 – Atividade 8, tarefa 1.1.....	112
Quadro 28 – Atividade 8, tarefa 1.2.....	113
Quadro 29 – Atividade 8, tarefa 1.3.....	114
Quadro 30 – Atividade 8, tarefa 1.4.....	115
Quadro 31 – Atividade 8, tarefa 1.5.....	116
Quadro 32 – Atividade 8, tarefa 1.6.....	117
Quadro 33 – Atividade 8, tarefa 2.1.....	118
Quadro 34 – Atividade 8, tarefa 2.2.....	119
Quadro 35 – Atividade 8, tarefas 3 e 4.....	120
Quadro 36 – Análise dos registros e conversões da atividade 8.....	121
Quadro 37 – Atividade preliminar – Tarefa 1.....	123
Quadro 38 – Atividade preliminar – Tarefa 1 – Respostas.....	124
Quadro 39 – Atividade preliminar – Tarefa 1 – Respostas.....	125
Quadro 40 – Atividade preliminar – Tarefa 2.....	126
Quadro 41 – Atividade preliminar – Tarefa 3.....	130

Quadro 42 – Atividade 1.....	134
Quadro 43 – Atividade 2.....	138
Quadro 44 – Tarefas da atividade 2.....	141
Quadro 45 – Atividade 3.....	145
Quadro 46 – Atividade 4.....	150
Quadro 47 – Atividade 5.....	166
Quadro 48 – Atividade 6.....	175
Quadro 49 – Respostas da dupla <i>D.E.</i> – atividade 6.....	177
Quadro 50 – Respostas do trio <i>I.V.O.</i> – atividade 6.....	178
Quadro 51 – Resposta da dupla <i>J.M.</i> – atividade 6.....	180
Quadro 52 – Atividade 7.....	181
Quadro 53 – Respostas da tarefa “f” da atividade 7.....	184
Quadro 54 – Atividade 8, tarefa 1.1.....	188
Quadro 55 – Atividade 8, tarefa 1.2.....	189
Quadro 56 – Atividade 8, tarefa 1.3.....	190
Quadro 57 – Atividade 8, tarefa 1.4.....	191
Quadro 58 – Atividade 8, tarefa 1.5.....	192
Quadro 59 – Atividade 8, tarefa 1.6.....	193
Quadro 60 – Atividade 8, tarefa 2.1.....	195
Quadro 61 – Atividade 8, tarefa 2.2.....	196
Quadro 62 – Atividade 8, tarefas 3 e 4.....	197
Quadro 63 – Respostas da tarefa 3 da atividade 8.....	198

Quadro 64 – Resposta da dupla <i>D.E.</i> – atividade preliminar – Tarefa 2, item “c” e atividade 6, item “2.a”.....	203
Quadro 65 – Resposta do trio <i>I.V.O.</i> – atividade preliminar – Tarefa 2, item “c” e atividade 6, item “2.a”.....	204
Quadro 66 – Respostas dos alunos <i>D</i> e <i>O</i> – atividade preliminar, tarefa 3.....	206
Quadro 67 – Respostas dos grupos <i>D.E.</i> e <i>I.V.O.</i> – atividade 8, tarefa 1.1.....	207

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Exemplo de conversão no conteúdo distribuição Binomial.....	36
Gráfico 2 – Uma tela do <i>Software-R</i>	41
Gráfico 3 – Exemplo de registro gráfico (I).....	50
Gráfico 4 – Exemplo de registro gráfico (II).....	51
Gráfico 5 – Registro de representação semiótica.....	83
Gráfico 6 – Atividade preliminar.....	84
Gráfico 7 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (I).....	109
Gráfico 8 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (II).....	109
Gráfico 9 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (III).....	110
Gráfico 10 – Registro gráfico no <i>Software-R</i> (IV).....	110
Gráfico 11 – Atividade 8, tarefa 1.1.....	112
Gráfico 12 – Atividade 8, tarefa 1.2.....	113
Gráfico 13 – Atividade 8, tarefa 1.3.....	114
Gráfico 14 – Atividade 8, tarefa 1.4.....	115
Gráfico 15 – Atividade 8, tarefa 1.5.....	116
Gráfico 16 – Atividade 8, tarefa 1.6.....	117
Gráfico 17 – Atividade 8, tarefa 2.1.....	118
Gráfico 18 – Atividade 8, tarefa 2.2.....	119
Gráfico 19 – Gráfico da dupla <i>J.M.</i> – item “g ₂ ” da tarefa “g” da atividade 7.....	185

Gráfico 20 – Item “g ₃ ” da tarefa “g” da atividade 7.....	186
Gráfico 21 – Item “g ₅ ” da tarefa “g” da atividade 7.....	186

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Atividade preliminar (ficha 1)	215
APÊNDICE 1 – Atividade preliminar (ficha 2)	216
APÊNDICE 1 – Atividade preliminar (ficha 3).....	217
APÊNDICE 2 – Atividade 1.....	218
APÊNDICE 3 – Atividade 2 (ficha 1)	219
APÊNDICE 3 – Atividade 2 (ficha 2)	220
APÊNDICE 4 – Atividade 3 (ficha 1)	221
APÊNDICE 4 – Atividade 3 (ficha 2).....	223
APÊNDICE 5 – Atividade 4.....	224
APÊNDICE 6 – Atividade 5.....	225
APÊNDICE 7 – Atividade 6.....	226
APÊNDICE 8 – Atividade 7.....	227
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 1).....	228
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 2)	229
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 3)	230
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 4)	231
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 5)	232
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 6)	233
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 7)	234
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 8)	235

APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 9)	236
APÊNDICE 9 – Atividade 8 (ficha 10)	237
APÊNDICE 10 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	238
APÊNDICE 11 – Termo de Responsabilidade da Instituição.....	239

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	25
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	33
2.1	REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E FUNCIONAMENTO COGNITIVO DA COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA.....	33
2.2	O <i>SOFTWARE R</i>	41
2.2.1	Pacote <i>TeachingDemos</i>	43
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E APRESENTAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO DESTES ESTUDO.....	52
3.1	DESCRIÇÃO DE TRABALHOS REVISADOS.....	52
3.2	APRESENTAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO E DE TEMAS CORRELATOS.....	65
3.2.1	Probabilidades.....	65
3.2.2	A Distribuição Binomial.....	69
3.2.3	Análise Combinatória.....	70
4	A METODOLOGIA <i>DESIGN EXPERIMENT</i>, APRESENTAÇÃO E ANÁLISE PRÉVIA DO EXPERIMENTO DE ENSINO.....	72
4.1	A METODOLOGIA DOS <i>DESIGNS EXPERIMENTS</i>	72
4.2	ASPECTOS RELEVANTES DA METODOLOGIA <i>DESIGN EXPERIMENT</i>	75
4.3	RELAÇÃO DO NOSSO ESTUDO COM A METODOLOGIA <i>DESIGN EXPERIMENT</i>	77
4.4	O CONTEXTO DA PESQUISA.....	78

4.4.1	Os sujeitos.....	78
4.4.2	O ambiente de trabalho e o tipo de coleta de dados.....	79
4.5	QUESTÃO DE PESQUISA.....	79
4.6	NOSSA HIPÓTESE INICIAL DE PESQUISA.....	79
4.7	O PAPEL DO PROFESSOR-PESQUISADOR.....	80
4.8	INFRA-ESTRUTURA UTILIZADA.....	81
4.9	APRESENTAÇÃO DO EXPERIMENTO DE ENSINO.....	81
4.9.1	Atividade preliminar.....	84
4.9.2	Análise prévia do experimento de ensino.....	86
5	ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DO EXPERIMENTO.....	122
5.1	ORGANIZAÇÃO DO EXPERIMENTO.....	122
5.1.1	Análise da primeira fase do experimento.....	123
5.1.2	Análise da segunda fase do experimento.....	134
6	CONCLUSÕES.....	200
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	210
	REFERÊNCIAS.....	212
	APÊNDICES.....	215

1 INTRODUÇÃO

Este estudo tratou do desenvolvimento, da aplicação e da avaliação de um experimento de ensino diferenciado sobre o conteúdo de distribuição Binomial, o qual explorou a relação entre os diversos registros de representação semiótica desse objeto matemático e o trabalho com o ambiente computacional *software-R*. Neste capítulo são apresentadas a trajetória e a motivação pessoal que conduziram o pesquisador à realização deste trabalho de pesquisa. Aqui também explicitamos a escolha da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) para fundamentar nosso estudo, bem como a opção pelo uso do *Software-R* como ferramenta de apoio. Definimos também nossa questão de pesquisa. Além disso, destacamos neste capítulo a metodologia dos *Designs Experiments* de Cobb et al. (2003) como a escolhida para embasar a elaboração e a condução do nosso experimento de ensino, apresentamos nossa hipótese inicial e descrevemos os sujeitos de pesquisa .

Atuando como professor de Matemática no Ensino Médio e no Ensino Superior, tive, em muitas ocasiões, a oportunidade de trabalhar os conteúdos referentes à Probabilidade e Estatística. Com isso, apresentarei, a seguir, uma descrição de minha trajetória pessoal nessa disciplina, destacando alguns fatores que motivaram a escolha deste tema.

Com a visão de ser a Estatística apenas *um ramo* da Matemática, trabalhei e vi outros professores trabalharem seus conteúdos sem o compromisso que hoje entendo ser inerente e imprescindível à disciplina. Os conteúdos de Probabilidade e Estatística eram tratados como tópicos muito úteis na elaboração de gráficos e apresentação de resultados de pesquisas realizadas nas repetitivas mostras e feiras culturais. Era, aliás, a construção de gráficos, a costumeira participação da Estatística na disciplina de Matemática e de seus professores responsáveis por cada segmento nos eventos escolares desse tipo. E só isso.

No Ensino Médio, não eram adotados livros específicos de Estatística e os conteúdos abordados limitavam-se aos existentes nos livros didáticos de Matemática. Surgia aí a primeira dificuldade no trabalho. Como a Estatística a ser

trabalhada era a de um ou dois capítulos do livro de Matemática, em muitas situações ela deixava de ser abordada. Os motivos alegados pelos professores eram muitos, tais como falta de tempo e não entendimento da sua importância na formação do indivíduo.

Em outro momento da minha trajetória como professor de Matemática, trabalhei, no Ensino Médio, com a Estatística tratada como uma disciplina integrante da grade curricular e, nesse caso, outra situação ali se apresentava. Agora tínhamos aulas semanais, avaliações específicas, notas, trabalhos e todo o tratamento que as demais disciplinas recebem dentro do contexto escolar. Mas ainda faltava alguma coisa.

Permanecia a ideia de não se adotar livros específicos uma vez que os livros de Matemática já contemplavam os conteúdos necessários à aprendizagem dos alunos naquele segmento de ensino. Também o número de aulas constante da grade curricular, apenas uma por semana, não era adequado para um trabalho mais consistente, uma vez que favorecia o desinteresse por parte dos alunos que não atribuíam à Estatística a mesma importância de outras disciplinas que contavam com um número maior de aulas semanais.

No Ensino Superior trabalhei com a disciplina intitulada “Tópicos de Probabilidade e Estatística” nos cursos de Licenciatura em Matemática, Administração de Empresas e Engenharia (nas modalidades civil, ambiental e de produção).

Nesse segmento de ensino, por tratar-se de formação superior, havia um maior comprometimento por parte dos alunos e um tratamento mais condizente com a relevância da disciplina dentro do projeto político pedagógico dos cursos. Ainda assim, a sensação de trabalho incompleto permanecia.

As muitas dificuldades apresentadas pelos alunos durante as aulas, aliadas ao alto índice de reprovação na disciplina causavam em mim inquietação e a reflexão na busca dos porquês dessa situação. Figueiredo (2000) em seu trabalho “Probabilidade Condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem” relata ter vivenciado esta mesma angústia ao perceber os seus alunos do curso de Extensão em Logística, todos com o curso superior completo, apresentarem estas mesmas dificuldades.

Também encontramos em Fernandez e Fernandez (1999) considerações relevantes sobre a falta de desenvolvimento do raciocínio probabilístico no ensino superior, que se alinham às nossas preocupações citadas anteriormente. Dizem as autoras:

Uma das grandes dificuldades com que se defrontam os alunos de 3º grau refere-se justamente a falta de desenvolvimento do raciocínio probabilístico, pois, em geral, chegam à Universidade pensando que entre o "verdadeiro" e o "falso" existe um vazio. Que choque para a maior parte desses alunos, quando descobrem a existência de um domínio baseado sobre a noção do "talvez" e que, aliás está muito mais ligada ao nosso cotidiano. Isso ocorre porque ainda são poucas as escolas de I e II graus que incluem em seu currículo disciplinas onde os conceitos de Probabilidade e Estatística são trabalhados, o que priva os alunos de uma grande quantidade de idéias novas e fecundas. Essa lacuna se reflete no momento em que os alunos são solicitados a apresentar um pensamento científico, já que Probabilidade e Estatística são elementos essenciais, exigindo um grande esforço e considerável período para atingir esse objetivo (FERNANDEZ e FERNANDEZ, 1999, p. 1).

O ingresso no programa de mestrado acadêmico em Educação Matemática da Universidade Bandeirante na linha Tecnologias Digitais e Educação Matemática, ampliou minhas reflexões e aí surgiram novos questionamentos. Como rever a metodologia usada no ensino médio no que tange o trabalho com Estatística a fim de minimizar as lacunas na construção da aprendizagem dos alunos? Como reestruturar as aulas de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior de modo a melhor administrar as dificuldades trazidas pelos alunos transformando-as possivelmente em alavancas para a construção de conhecimento estatístico mais completo, eficiente e produtivo? Muitas perguntas, muita ansiedade que aos poucos foram se afinando na medida em que o curso se desenvolvia.

Nesta linha de raciocínio, optamos pelo conteúdo distribuição Binomial como foco da nossa pesquisa, considerando a sua relevância, uma vez que ela pode ser considerada como ponto de partida para o estudo e a compreensão de outras distribuições de probabilidade.

Diante deste quadro, buscamos na revisão bibliográfica indícios de pesquisas que procuraram tratar essas questões. Pesquisando sobre a distribuição Binomial no Ensino Superior, Souza (2002) afirma possuir questionamentos similares.

A idéia de desenvolver um trabalho que nos ajudasse a conhecer melhor as dificuldades dos alunos na disciplina Estatística num curso superior surgiu da nossa própria experiência como professora de Estatística em cursos de Administração de Empresas e de Comunicação. A cada semestre letivo, observávamos que, apesar de encontrarmos novos alunos, as dificuldades deles eram, de modo geral, as mesmas (SOUZA, 2002, p. 1).

O objetivo principal da autora foi a elaboração de um experimento de ensino que favorecesse a apreensão da distribuição Binomial. Mais adiante no Capítulo 3 do presente trabalho faremos uma análise mais detalhada deste estudo.

Na mesma linha de raciocínio encontrei a pesquisa “A Mobilização de Conceitos Estatísticos: estudo exploratório com alunos de um Curso de Tecnologia em Turismo” (Novaes, 2004), onde a autora faz referência a pouca importância que tem sido dada à disciplina escolar Estatística e as conseqüências deste descaso. Diz a autora:

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – façam referências diretas à inclusão de elementos de Estatística e Probabilidade, no Ensino Fundamental e Médio, os alunos estão chegando aos cursos superiores com pouco ou nenhum contato com a Estatística. [...] Grande parte desses alunos está utilizando as ferramentas estatísticas de forma mecânica, usando as fórmulas e algoritmos sem a real compreensão do(s) objeto(s) matemático(s) que o justifica e, conseqüentemente, sem a percepção da aplicabilidade destas ferramentas na sua área de atuação. Se o processo de construção dos saberes estatísticos necessários não for vivenciado de forma adequada pelo aluno, este não terá as condições necessárias para reaplicá-los na sua vida profissional (NOVAES, 2004, p. 10).

Também esta pesquisa será objeto de análise no capítulo 3 deste trabalho.

Fazendo uma leitura atenta do item Tratamento da Informação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN-EF. Brasil, 1998, podemos constatar estas referências ao ensino de Probabilidade e Estatística no ensino Fundamental.

A demanda social é que leva a destacar esse tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade. Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de Probabilidade, além dos problemas de contagem que envolve o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. Com relação à Estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente em seu dia-a-dia. [...]. Com relação à Probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998, p. 52).

Tais leituras, aliadas à minha experiência pessoal, só reforçaram a minha intuição de que ainda é lenta a introdução da Probabilidade e Estatística nas séries iniciais da Educação Básica onde o pensamento probabilístico deveria ser introduzido e trabalhado, mesmo que intuitivamente.

A sociedade atual exige que o cidadão tenha conhecimento básico de Probabilidade e Estatística para não se tornar refém da interpretação de dados e para que possa tomar decisões de maneira crítica diante de informações estatísticas, o que é denominado por Gal (2002) de letramento estatístico. Este argumento, por si só, revela a importância de um trabalho estruturado com os conteúdos de Probabilidade e Estatística tanto na Educação Básica como no Ensino Superior.

Partindo da importância de um trabalho de integração de diversos registros para o desenvolvimento do conteúdo distribuição Binomial, com vistas a produzir reais mudanças metodológicas a serem implementadas em sala de aula, foi adotada a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) para fundamentar esse estudo e, nessa mesma perspectiva, foi selecionado, como recurso de apoio, o *software* livre *R*, tendo em vista que essa ferramenta permite

uma visão interativa e simultânea entre os registros gráfico e simbólico bem como entre os registros gráfico e numérico e a exploração dinâmica de situações que envolvem o registro gráfico.

Desta forma, o objetivo desse trabalho consistiu em investigar as compreensões apresentadas pelos sujeitos diante de uma abordagem diferenciada do conteúdo de distribuição Binomial.

Com isso, delimitamos a seguinte questão de pesquisa:

Em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software-R*, com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros, influencia na compreensão desse conceito?

Partindo do fato que utilizaremos a teoria dos registros de representação semiótica, apresentaremos nesse momento, de forma breve, os seus pontos centrais. Duval baseia-se no conceito de representação por meio dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido, a semiótica. Segundo ele, o estudo dos fenômenos relativos à aquisição do conhecimento só é possível com o recurso da noção de representação.

Para Duval, o reconhecimento das atividades cognitivas que os diferentes sistemas semióticos são capazes de cumprir, chamadas de formação, tratamento e conversão, destacando-se as conversões não-congruentes, bem como o domínio de uma efetiva coordenação entre registros, são essenciais ao acesso à compreensão matemática. Para a elaboração das atividades do experimento, foram considerados os seguintes registros: língua natural, gráfico, árvore de possibilidades, numérico, tabular e simbólico. O detalhamento dessa teoria e a descrição de sua relação com nosso estudo serão realizados no Capítulo 2.

É nesse contexto que a pesquisa ora intitulada *Distribuição Binomial: um experimento de ensino utilizando o software R com foco na exploração de registros de representação semiótica* se estabelece como um trabalho de investigação do processo de ensino e aprendizagem de tais temas.

Nosso experimento de ensino foi constituído por tarefas que propiciaram a exploração de diferentes registros de representação, buscando o desenvolvimento da coordenação simultânea das conversões entre dois ou mais destes registros.

Assim sendo, nossa hipótese inicial de pesquisa era de que os participantes envolvidos no experimento conseguissem, auxiliados pelas atividades criadas no ambiente papel&lápis e pela ferramenta computacional escolhida, o *Software-R*, perceber as características da distribuição Binomial, observar a importância de um modelo teórico de análise, determinar relações entre representações de diversos registros desse conteúdo e estabelecer análises partindo do registro gráfico, detectando o impacto que a mudança em um dos parâmetros da distribuição ocasiona nesse último registro. Com isso, esperava-se contribuir para uma compreensão diferenciada deste conceito.

Pelas características do *Software-R* que pode proporcionar o trabalho com conversões pouco usuais, destacando-se aí aquelas existentes entre o registro gráfico e os demais, tínhamos por concepção que o estudante obteria êxito no desenvolvimento de compreensões distintas das comumente obtidas nas intervenções tradicionais desse conteúdo.

Considerando tratar-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, com foco no entendimento do pensamento estabelecido pelos estudantes, foi adotado o *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) como metodologia do nosso estudo. *Design Experiment* envolve tentativas para permitir certas formas de aprendizagem e ao mesmo tempo fazer um estudo desse processo, permitindo ao pesquisador traçar um perfil específico de aprendizagem dos sujeitos envolvidos (COBB et al, 2003).

Nesta metodologia o experimento é organizado em ciclos e, em cada um dos ciclos todos os envolvidos têm a condição de refletirem sobre suas ações. O papel do pesquisador é promover os ajustes necessários para alcançar os resultados esperados. As atividades são elaboradas e modificadas em função das ações dos sujeitos e de suas respostas aos estímulos desencadeados a partir das tarefas a eles propostas. A cada reestruturação das tarefas todos os dados coletados mediante a apreciação do trabalho dos sujeitos e suas interações com o meio são novamente levados em consideração nas análises realizadas.

Na metodologia *Design Experiment*, trabalhamos com o que chamamos de *ecologia de aprendizagem* onde descrevemos os erros cometidos pelos alunos, o papel do ambiente em que o experimento é desenvolvido, os problemas ocorridos antes, durante e depois das interações e as intervenções feitas pelos pesquisadores,

por professores participantes e por pessoas alheias à pesquisa. Mais a frente, será tratada com maior aprofundamento esta metáfora.

Participaram do experimento sete alunos dos cursos de Engenharia de uma instituição particular de ensino do Estado de São Paulo. Tendo sido alunos do pesquisador quando cursaram a disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística”, foram voluntários a participarem da pesquisa.

Estes alunos foram submetidos à nossa atividade preliminar, de forma individual, atividade esta que visava avaliar os conhecimentos prévios de cada um deles, uma vez que já tiveram contato com o conteúdo.

Após a realização da atividade preliminar, os sujeitos foram divididos em três grupos, sendo duas duplas e um trio, para o prosseguimento da aplicação do experimento de ensino. Nesta fase, apesar do experimento ser realizado em grupos, houve momentos de discussão conjunta com todos os alunos, a fim de provocar o debate e a comparação das conclusões obtidas.

O pesquisador contou com a colaboração de uma pesquisadora assistente durante todo o processo.

Para facilitar o entendimento da estrutura desse trabalho, apresentaremos uma breve descrição de cada capítulo. No Capítulo 1, apresentamos a introdução, contendo as informações essenciais do trabalho. No Capítulo 2, apresentamos um detalhamento da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) e detalhes do *software* utilizado. No Capítulo 3, apresentamos a revisão bibliográfica, ou seja, a descrição de trabalhos que procuraram tratar de temas que têm relações com o nosso objeto de estudo, bem como a Teoria das Probabilidades na qual apresentamos, também, a definição matemática do conteúdo distribuição Binomial, baseada em Magalhães e Lima (2005). No Capítulo 4, descrevemos a metodologia dos *Designs Experiments* de Cobb et al (2003) e apresentamos as atividades que compõem o experimento, acompanhadas de uma análise preliminar. No Capítulo 5, apresentamos a análise dos dados, no Capítulo 6, as conclusões finais do estudo e, no Capítulo 7, nossas considerações finais. Por fim, apresentamos as referências bibliográficas deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) escolhida para fundamentar nosso estudo e é feita uma descrição do *Software-R* que será utilizado como ferramenta de apoio à aplicação do nosso experimento de ensino.

2.1 Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática

A teoria de Duval baseia-se no conceito de representação por meio dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido, a semiótica.

Quando falamos em linguagem, estamos nos referindo a algo muito mais amplo do que simplesmente a língua falada ou escrita (língua pátria). Nos relacionamentos interpessoais numa sociedade, existem outros tipos de linguagem: as dos surdos, da culinária, das cores, dos retratos, dos sons, dos gestos etc. A semiótica é, assim, a ciência que abrange todas as linguagens.

Segundo Duval (2003), o estudo dos fenômenos relativos à aquisição do conhecimento matemático só é possível com o recurso da noção de representação.

“Não podemos nos ater a um modelo geral comum de aquisição de conhecimento centrado sobre a ação, as interações e os desequilíbrios como fatores principais da construção de conceitos matemáticos. (...) A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios de conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, mas nas duas características seguintes: a importância primordial das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. (DUVAL, 2003, p.12 a 14)”.

O autor afirma que o acesso a objetos matemáticos não é possível por meios perceptivos ou instrumentais, dada a sua natureza “não real”, necessitando de uma relação de denotação que só é possível por meio de um sistema de representação semiótica. Ainda segundo o autor, os modelos de psicologia cognitiva ou os modelos

epistemológicos não atendem às necessidades específicas da aprendizagem matemática, pelo fato de não responderem à questão relacionada às condições cognitivas internas necessárias para qualquer estudante entender Matemática. Faz-se então necessário um modelo centrado nas condições cognitivas de compreensão, nas restrições de acesso aos objetos matemáticos.

As representações semióticas têm sua importância mais claramente reconhecida quando percebemos que o sistema de representação utilizado é que determina as condições e possibilidades do trabalho matemático. As diferenças de possibilidades existentes entre os sistemas de representação propiciam maior ou menor mobilidade daquele que o estuda. Também o fato de os objetos matemáticos não serem palpáveis nem perceptíveis, necessitando de uma representação que o designe, endossa essa importância.

Segundo Duval (1995), ao tratar dos registros, há três atividades cognitivas possíveis: formação, tratamento e conversão. Estas atividades, na medida em que possam ser verificadas, é que determinam a diferenciação entre um e outro sistema semiótico. O sistema semiótico que cumpre estas três atividades cognitivas é classificado pelo autor como registro de representação semiótica.

Na atividade de formação de representações em um registro semiótico particular, tem-se a finalidade de exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real (DUVAL, 1995). É o momento onde o registro é criado.

Tratamento e conversão são atividades cognitivas relacionadas à transformação entre representações que os diferentes sistemas semióticos são capazes de cumprir. A atividade de tratamento ocorre quando se faz uma transformação de uma representação para outra, no interior de um mesmo registro.

Com relação ao conteúdo de distribuição Binomial, citamos o seguinte exemplo de tratamento no registro numérico: $\binom{5}{2}(0,4)^2(0,6)^3 = \frac{5!}{2!.3!} \cdot 0,16 \cdot 0,216$

A atividade de conversão realiza uma transformação que produz outra representação em um registro (chegada) distinto do qual se partiu (registro de partida). Na conversão, as variações de representação no registro de partida provocam alguma modificação na representação no registro de chegada, conservando o mesmo objeto. Essas variações de representação são, assim, as mais importantes no trabalho cognitivo do estudante.

Os quadros 1 e 2 seguintes, apresentam um exemplo que envolve conversões do registro simbólico-algébrico para o numérico e deste para o gráfico no conteúdo de distribuição Binomial.

Registro simbólico-algébrico	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
Registro numérico	Se $n = 10, p = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9$

QUADRO 1 - Exemplo de conversão no conteúdo distribuição Binomial I

Fonte: Acervo pessoal

<p>Registro numérico</p>	$P(X=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1024} = 0,0009$ $P(X=1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{512} = 0,009$ $P(X=2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 45 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256} = 0,04$ $P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 120 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{128} = 0,12$ $P(X=4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 210 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64} = 0,21$ $P(X=5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32} = 0,24$ $P(X=6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 210 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{16} = 0,21$ $P(X=7) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 120 \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{8} = 0,12$ $P(X=8) = \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{4} = 0,04$ $P(X=9) = \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{512} = 0,009$ $P(X=10) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{1024} \cdot 1 = 0,0009$																								
<p>Registro gráfico (gráfico 1)</p>	<p>Distribuição Binomial: Tentativas (n) = 10, Probabilidade de sucesso (p) = 0.5</p> <table border="1"> <caption>Dados do Gráfico 1</caption> <thead> <tr> <th>Número de sucessos</th> <th>Densidade</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,0009</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,009</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,04</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,12</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,21</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,24</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,21</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,12</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,04</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,009</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,0009</td></tr> </tbody> </table>	Número de sucessos	Densidade	0	0,0009	1	0,009	2	0,04	3	0,12	4	0,21	5	0,24	6	0,21	7	0,12	8	0,04	9	0,009	10	0,0009
Número de sucessos	Densidade																								
0	0,0009																								
1	0,009																								
2	0,04																								
3	0,12																								
4	0,21																								
5	0,24																								
6	0,21																								
7	0,12																								
8	0,04																								
9	0,009																								
10	0,0009																								

Quadro 2 - Exemplo de conversão no conteúdo distribuição Binomial II

Fonte: Acervo pessoal

Na conversão congruente a passagem de uma representação para outra se faz de maneira espontânea, onde a transformação se aproxima de uma simples codificação, o que não ocorre na conversão não congruente, por não satisfazer a pelo menos uma das condições, a saber: correspondência semântica dos elementos significantes, a univocidade semântica terminal e uma mesma ordem possível de disposição das unidades significantes que compõem cada uma das duas representações.

A tabela 1 expõe um exemplo dado por Duval (2000) de um caso que ilustra este fenômeno da atividade de conversão.

Tabela 1 – Segundo exemplo de análise da congruência da atividade de conversão

TIPO DE CONVERSÃO	SISTEMA OU REGISTRO DA ESCRITA NATURAL	SISTEMA SIMBÓLICO-ALGÉBRICO
Conversão congruente	Conjunto de pontos com ordenada maior que abscissa.	$y > x$
Conversão não congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas e abscissas têm o mesmo sinal.	$x.y > 0$

Fonte: DUVAL, 2000, p. 63¹

Há várias pesquisas que comprovam a dificuldade encontrada pela maioria dos estudantes no estabelecimento de conversões, bem como problemas na distinção entre um objeto matemático e uma de suas possíveis representações. Também, ainda segundo essas pesquisas, ocorre significativa diferença no desempenho em questões que exploram os dois sentidos de conversão, considerando-se que uma conversão pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido oposto. Duval ressalta a importância de se explorar esse

¹ Traduzido por nós do original em Inglês.

duplo sentido de conversão, uma vez que o fato de um estudante dominar perfeitamente uma conversão em um sentido não garante que tenha o mesmo sucesso quando da conversão em sentido oposto. A tabela 2 apresenta o índice de acerto dos estudantes nos dois sentidos de conversão em uma atividade aplicada pelo pesquisador. A transformação $I \rightarrow II$ representa uma conversão do registro da língua natural escrita para o simbólico e a transformação $II \rightarrow I$ representa a conversão no sentido contrário.

Tabela 2 – Primeiro exemplo de análise da congruência da atividade de conversão

I	II	$I \rightarrow II$	$II \rightarrow I$
1. A soma de dois produtos de dois inteiros, todos os inteiros são diferentes.	$a.b + c.d$	90%	90%
2. O produto de um inteiro pela soma de dois outros.	$a.(b + c)$	71%	74%
3. A soma dos produtos de um inteiro com dois outros inteiros	$a.b + a.c$	48%	87%
4. A intersecção dos complementares de dois conjuntos	$CA \cap CB$	91%	81%
5. A união das intersecções de um conjunto com dois outros conjuntos	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	41%	81%

Fonte: DUVAL, 1995, p. 53²

Os registros também podem ser classificados com relação à sua natureza em monofuncionais ou multifuncionais.

Os registros monofuncionais são registros desenvolvidos para um tipo específico de tratamento, com a finalidade de obtenção de melhores desempenhos.

² Traduzido por nós do original em Francês.

São registros que admitem tratamento de modo algorítmico. Como exemplo, citamos e apresentamos no quadro 3 um cálculo de probabilidades que utiliza os registros de representação simbólico e numérico.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\text{Se } n = 10, p = \frac{1}{2}, P(X = 1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

Quadro 3 – Exemplo de registro monofuncional.

Fonte: Acervo pessoal

Os registros plurifuncionais são registros utilizados em diversos campos culturais, tanto para fins de comunicação como para tratamento. Admite várias formas de tratamento, excluindo-se aí o tratamento de modo algorítmico. Como exemplo, citamos a utilização da língua natural, apresentada no quadro 4.

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Imagine a retirada de 5 bolinhas com reposição a cada retirada.

a) Para o experimento em questão, quais são os possíveis resultados ao retirar uma bolinha?
(represente verde por “v” e amarela por “a”)

Quadro 4 – Exemplo de registro plurifuncional.

Fonte: Acervo pessoal

Para o autor, o reconhecimento de conversões não-congruentes e o domínio de uma efetiva coordenação entre registros são essenciais ao acesso à

compreensão matemática. Acredita também que a preocupação de explorar as conversões em duplo sentido melhora a qualidade das produções dos estudantes bem como o sucesso dos mesmos.

Duval diferencia a atividade matemática na perspectiva de ensino e aprendizagem da perspectiva de pesquisa feita por matemáticos. Do ponto de vista matemático, a conversão não tem nenhum papel na justificação ou na prova intervindo somente para a escolha do registro no qual os tratamentos possam ser mais econômicos ou mais potentes. Sendo assim, para os que têm a Matemática como foco principal, há a necessidade do uso de tratamentos no interior de um mesmo registro. Quando se pensa na perspectiva de ensino, a conversão torna-se fundamental, pois exige que o indivíduo tenha a capacidade de articulação das variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos sistemas semióticos envolvidos. O autor ressalta que duas representações do mesmo objeto matemático, produzidas em dois registros distintos, não têm o mesmo conteúdo, afirmando, porém, ser necessário dispor de ao menos dois registros de representação diferentes para que haja compreensão matemática, evidenciando que uma aprendizagem que não explora as conversões não capacita o estudante a realizar transferências.

Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. (Duval, 2003, p. 16).

Segundo o autor (2003), a diversidade dos registros de representação semiótica está presente na Educação Matemática, porém raramente é destacada ou até mesmo trabalhada pelo educador matemático. Normalmente o desenvolvimento das atividades de ensino da Matemática se resume no estudo dos tratamentos que, embora importante, não supre as necessidades nem considera, em sua plenitude, as possibilidades cognitivas dos educandos, fato já observado em pesquisas, tais como Karrer (2006), Karrer & Barreiro (2009), Pavlopoulou (1993), Sierpiska, Dreyfus e Hillel (1999), dentre outros.

2.2 O Software-R

Apenas para efeito ilustrativo, apresentamos a seguir uma tela do *Software-R*.

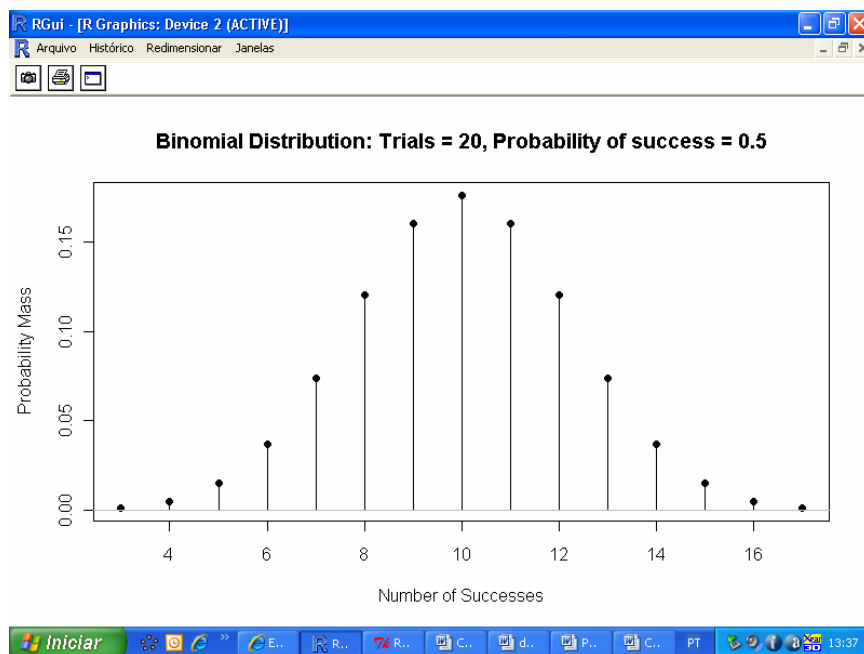


FIGURA 1 – Uma tela do Software R (Gráfico 2)

Fonte: Software R

O *software* estatístico *R* é um ambiente computacional integrado para manipulação, análise, e representação gráfica de dados baseado em linguagem de programação orientada por objetos e que disponibiliza uma grande variedade de métodos estatísticos: modelagem linear e não linear, testes estatísticos clássicos, séries temporais, métodos multivariados, Geoestatística, dentre outros.

Atualmente o *R* é o resultado de um esforço colaborativo mundial, sendo que dezenove pesquisadores (estatísticos, engenheiros de software, dentre outros profissionais) constituem o denominado *Core Team*, que é a equipe responsável pela avaliação de novos pacotes; e que realizam atualizações semestrais.

Na parte de documentação da linguagem, o *R* conta com diversos manuais e livros (<http://cran.r-project.org/> - link Manual), uma *newsletter* e vários outros artigos

escritos por terceiros e em diferentes línguas, que estão disponíveis na *web* gratuitamente.

Um dos atrativos do R é estar disponível sob os termos da GNU *General Public License da Free Software Foundation*, na forma de código aberto (*open source*), podendo ser compilado e rodado em um grande número de plataformas UNIX e similar (incluindo FreeBSD e Linux), além do *Windows 9x/NT/2000* e *MaCOs*.

Outra característica importante do R é que, dependendo do tipo de análise, computadores com configurações simples podem ser utilizados. Ressalta-se a informação da configuração, pois acreditamos que muitas escolas públicas possam conseguir, por meio de doações, computadores com capacidade similar (Kataoka et al, 2008). A única ressalva é que apenas para instalação do programa³ e dos pacotes desejados será necessário conectá-lo na Internet, ou caso a escola não tenha essa conexão, o professor deve dispor do programa e de um leitor de CD ou porta USB. Assim, considera-se que o uso de software pode ser ampliado para locais onde o acesso à Internet ainda é bem restrito.

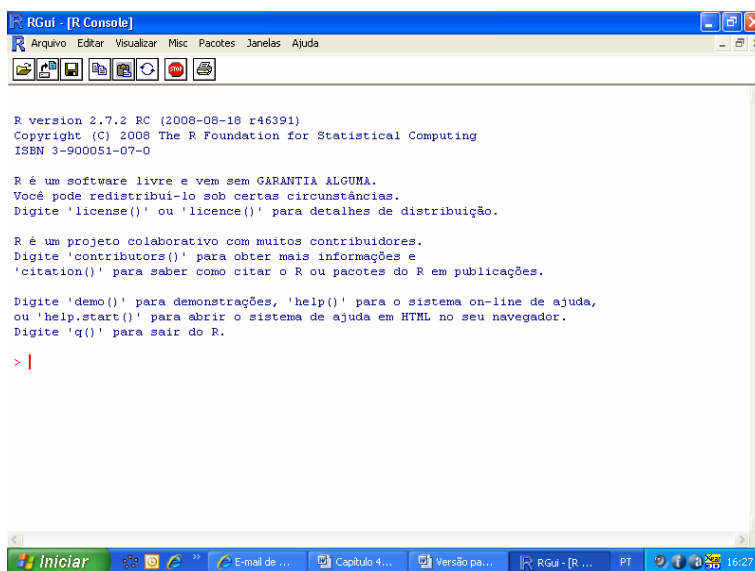


FIGURA 2 – Tela inicial do Software R

Fonte: Software R

³ Disponível em <http://cran.r-project.org/>, no *link windows*, *link base* e por fim o *link R-2.7.0-win32.exe*.

Em síntese, as principais vantagens do uso do *R* são: ser um software *free*, de código aberto; rodar tanto em Windows como em Linux e ter uma baixa exigência de configuração dos computadores, tornando possível seu uso em escolas públicas, onde os recursos computacionais e orçamentários são escassos.

2.2.1 Pacote *TeachingDemos*

Ao instalar a versão básica do *software R*, que traz vários pacotes denominados “recomendados”, o professor poderá adicionar também os “pacotes contribuídos”. Apresentaremos, a seguir, como exemplo, as etapas para instalação do pacote *TeachingDemos*, necessário para a execução de parte das tarefas propostas no experimento de ensino objeto desta pesquisa. Salientamos que para um funcionamento completo deste pacote, ainda será necessário instalar um pacote adicional denominado *tkrplot*.

Com o computador conectado à internet, deve ser adotado o seguinte procedimento (Figura 3).

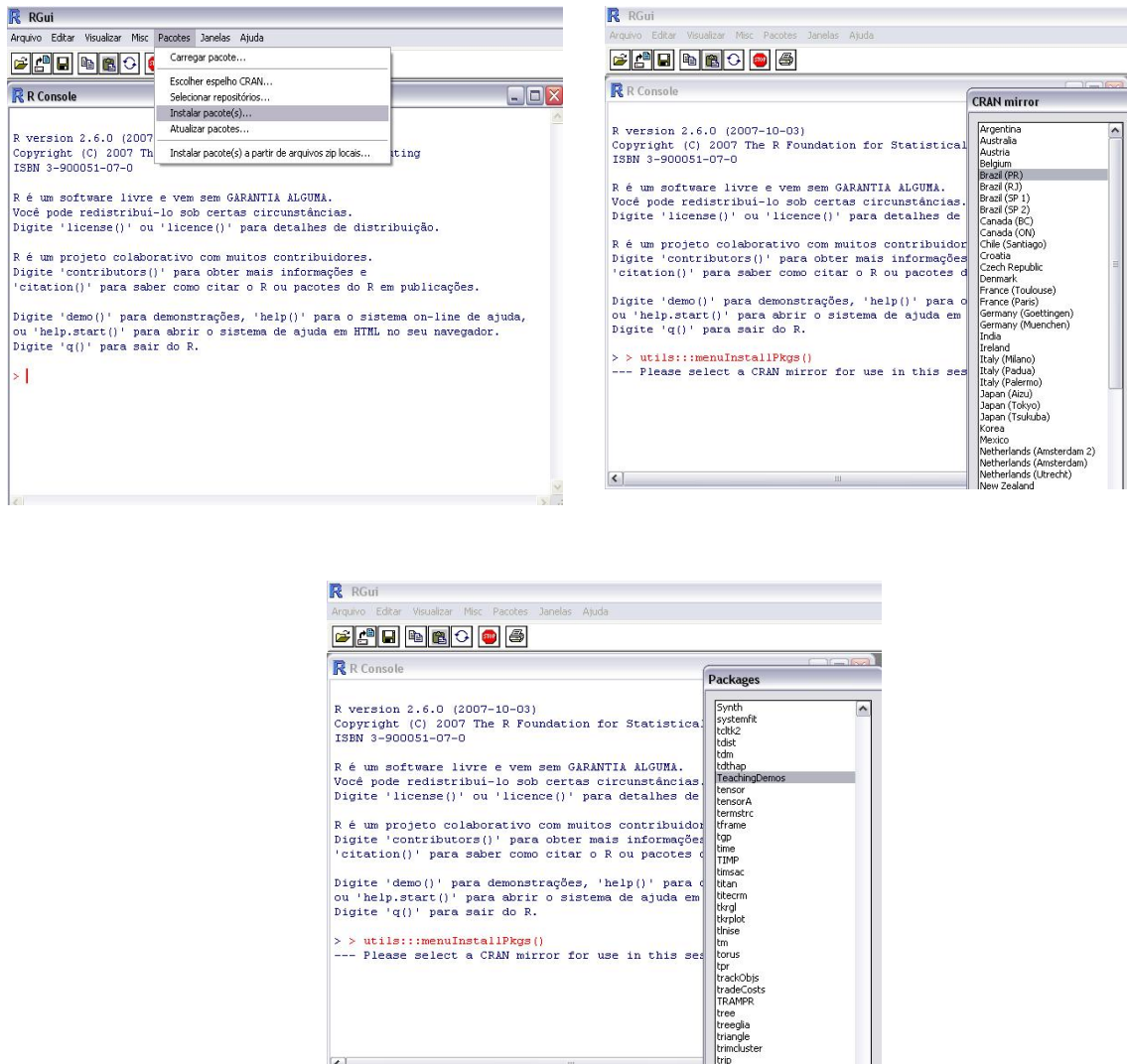


Figura 3 – Etapas para instalação do pacote *TeachingDemos* via web

Fonte: *Software R*

No caso de a escola não dispor de acesso à internet, o professor terá que copiar os “pacotes contribuídos” desejados em CD ou USB e colocá-los na pasta *R* – subpasta *library*.

Na presente pesquisa, o *Software-R* será utilizado como ferramenta de ensino durante a aplicação do experimento. Será instalado em três computadores de uma instituição particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo no que chamamos de ambiente tecnológico.

Nossa expectativa é que os participantes envolvidos no experimento consigam, auxiliados por esta ferramenta computacional escolhida, perceber as

características da distribuição Binomial e que isso possa contribuir então para uma compreensão diferenciada deste conceito.

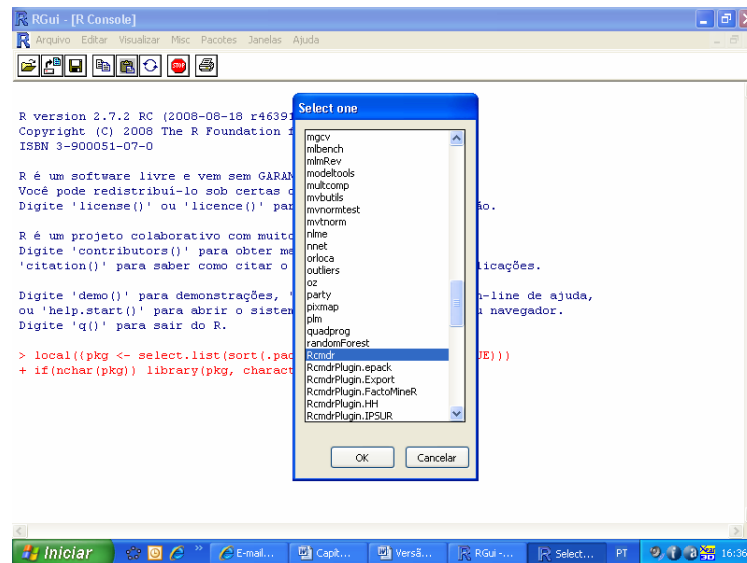


FIGURA 4 – Janela de seleção de pacotes do Software R

Fonte: Software R

Nesta janela (Figura 4) podemos selecionar o pacote necessário para o desenvolvimento da atividade. Nossos sujeitos de pesquisa selecionarão o pacote *Rcmdr* (*R commander*) onde encontrarão as ferramentas necessárias para o trabalho com o conteúdo de distribuição Binomial. O pacote *Rcmdr* será aberto numa tela separada, contendo uma janela de *script*, em que os comandos podem ser digitados e uma janela de resultados.

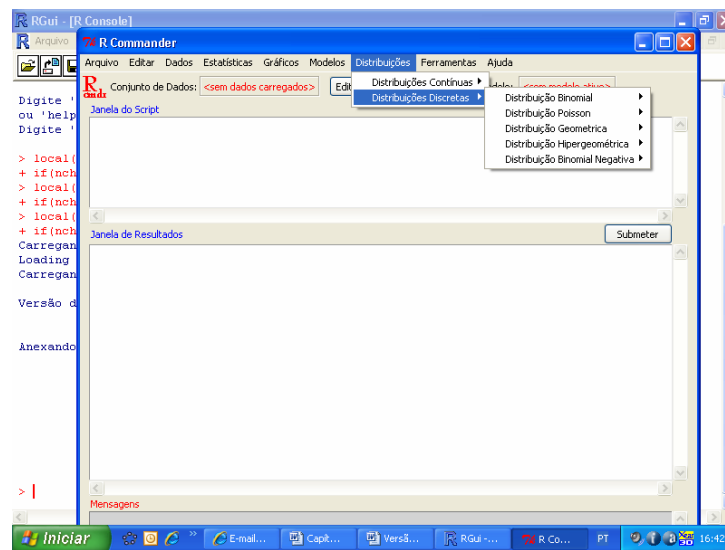


Figura 5 – Janela de seleção das distribuições de probabilidade

Fonte: Software R

Na janela de seleção das distribuições de probabilidade (Figura 5) utilizaremos a distribuição discreta Binomial.

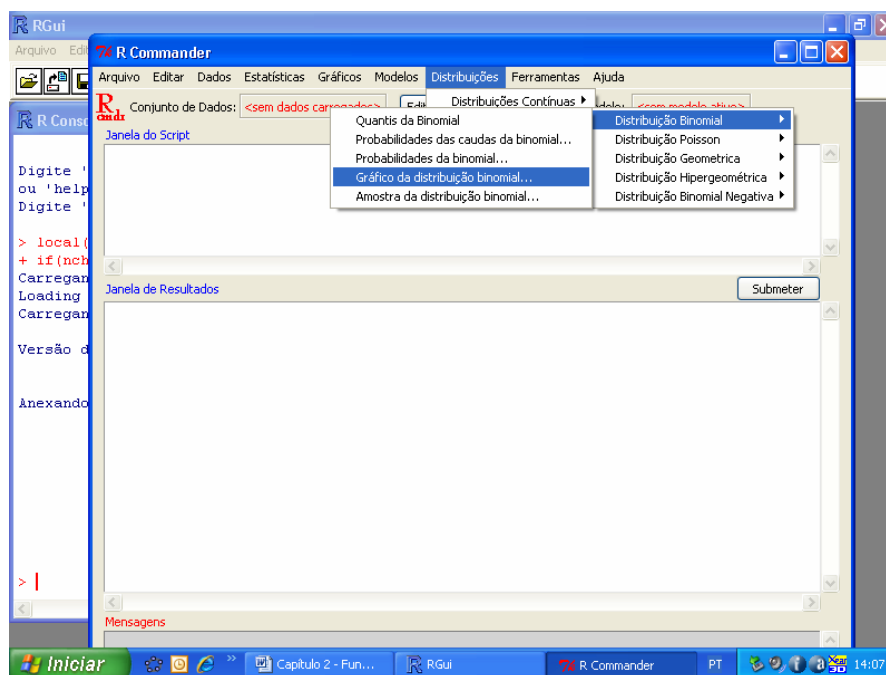


Figura 6 – Janela de seleção do gráfico da distribuição Binomial

Fonte: Software R

Depois de selecionada a opção distribuição discreta Binomial, os alunos selecionarão gráfico da distribuição Binomial (Figura 6). Neste momento se abrirá uma janela para que sejam determinados os valores de n e p (Figura 7).

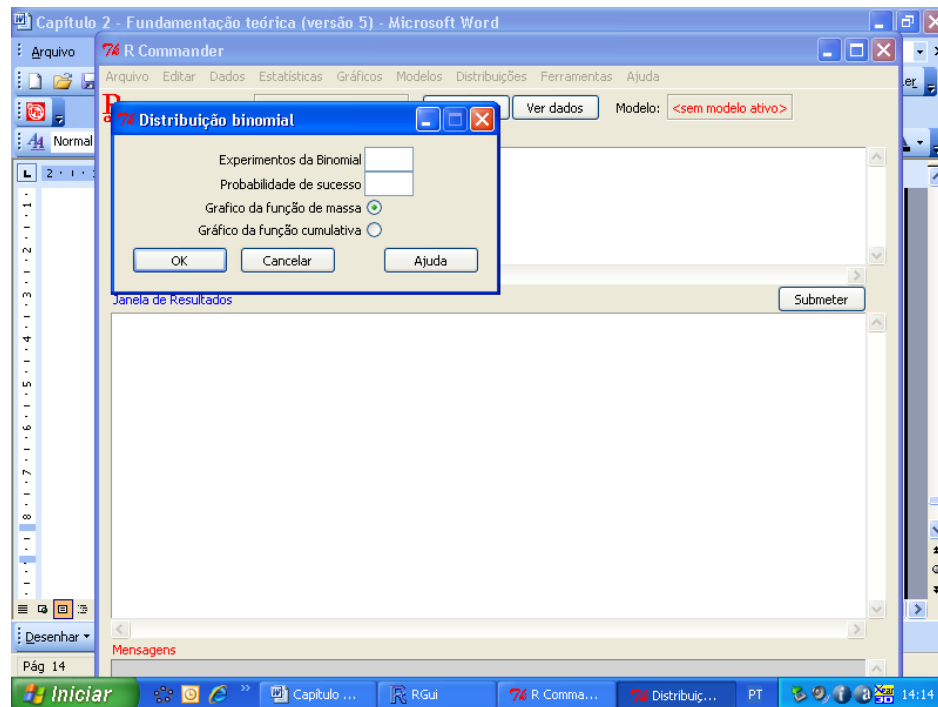


Figura 7 – Janela de valores de n e p

Fonte: Software R

Há ainda a possibilidade da manipulação dos valores de “ n ” e “ p ” de uma maneira mais prática. Após carregar o pacote *Rcmdr* o aluno poderá seguir o caminho *Ferramentas* → *Load Rcmdr Plug-in(s)* → *RcmdrPlugin.TeachingDemos* e, em seguida, *Distribuições* → *Visualize Distributions* → *Binomial distributions*. Uma janela de visualização se abrirá, como reproduzido na figura 8.

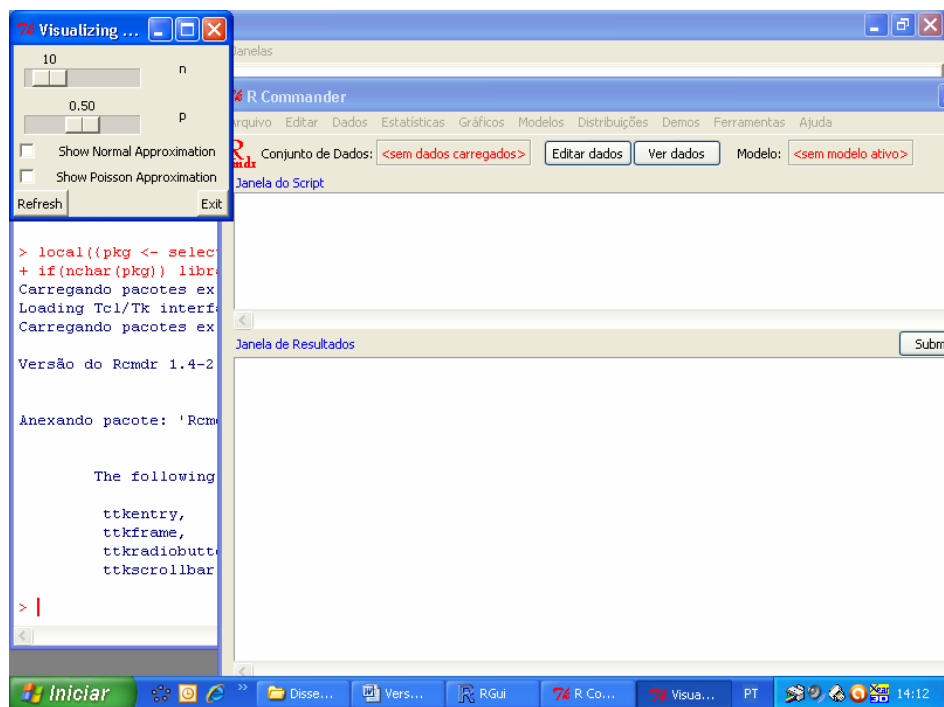


Figura 8 – Janela de manipulação dos valores de n e p

Fonte: Software R

A partir daí, nossos sujeitos de pesquisa explorarão o *software* orientados pelo professor-pesquisador durante a sequência das tarefas preparadas em cada atividade do experimento de ensino.

São exemplos de registros gráficos de distribuições binomiais fornecidos pelo *Software R*:

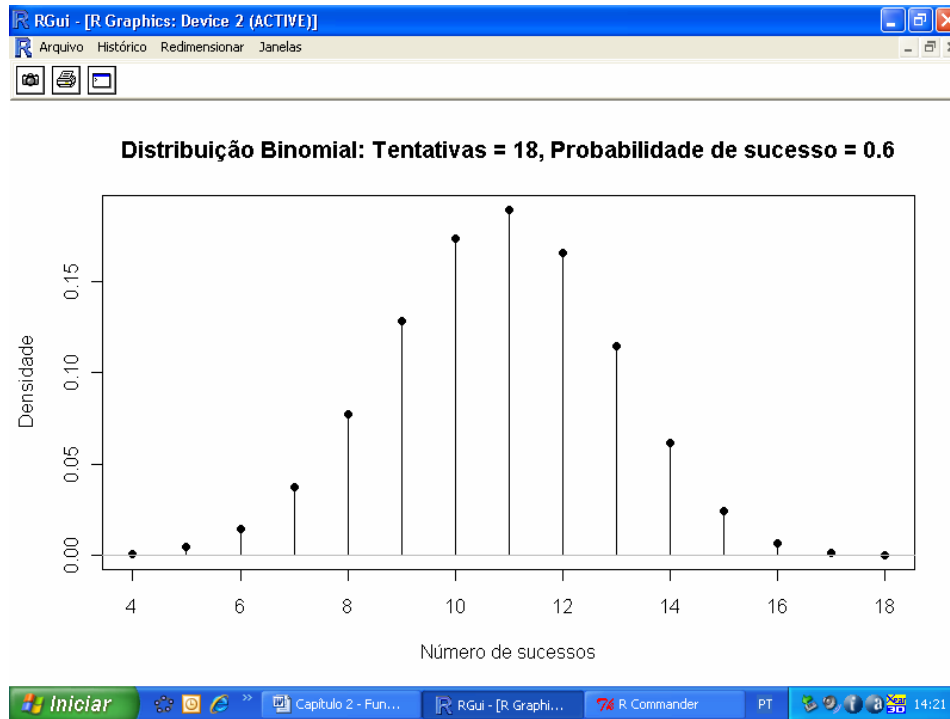


Figura 9 - Exemplo de registro gráfico (I) (Gráfico 3)

Fonte: *Software R*

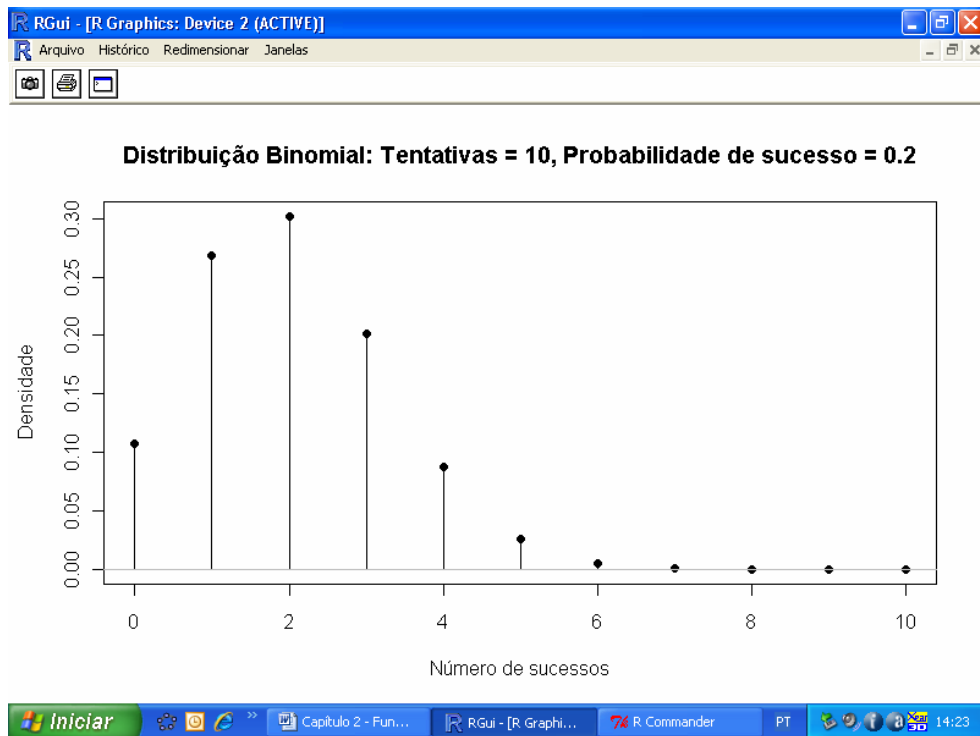


Figura 10 - Exemplo de registro gráfico (II) (Gráfico 4)

Fonte: *Software R*

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E APRESENTAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO DESTE ESTUDO

Neste capítulo, é apresentada a revisão bibliográfica, ou seja, a descrição de trabalhos que procuraram tratar de temas que têm relações com o nosso objeto de estudo, bem como uma breve revisão da Teoria das Probabilidades. Apresentamos, também, a definição matemática do conteúdo distribuição Binomial (MAGALHÃES e LIMA, 2005).

3.1 Descrição de trabalhos revisados

Nosso estudo buscou compreender como o processo de aprendizagem do conceito distribuição Binomial se desenvolve ao utilizarmos a teoria de Duval no seu encaminhamento. Para nos auxiliar, buscamos em pesquisas já realizadas indícios de como os estudantes constroem o pensamento estatístico relativo ao conceito em questão e a temas correlatos. Para compor esta revisão escolhemos os trabalhos realizados por Wild e Pfannkuch (1999) que ampliaram a definição de pensamento estatístico apresentada por Snee (1990), segundo o qual pensamento estatístico é um processo de pensamento que reconhece a presença da variação em torno de tudo o que se faz, o estudo de Figueiredo (2000), que pesquisou a introdução do conceito de Probabilidade Condicional em cursos de Estatística no Ensino Superior, Souza (2002), que desenvolveu um trabalho com os objetivos de conhecer melhor alguns aspectos da distribuição Binomial e de suas relações com outras distribuições de probabilidade e de elaborar uma sequência didática que favorecesse a apreensão da distribuição Binomial, Novaes (2004) que analisou se os alunos de um curso Superior de Tecnologia em Turismo estavam mobilizando de forma eficaz, os conceitos e concepções constituídos na aprendizagem em Estatística, Rodrigues (2007) que utilizou como modelo experimental fundamental no ensino de Probabilidade, a Urna de Bernoulli, Silva (2007) que realizou um estudo com professores de Matemática sobre pensamento estatístico e raciocínio sobre

variação, Kataoka et al. (2008) que apresentaram três atividades didáticas com orientações para execução de acordo com três procedimentos metodológicos: *query first*, experimentação aleatória e simulação computacional utilizando o *software* estatístico *R*, com o objetivo de contribuir para uma significativa articulação entre a teoria e a prática no ensino dos rudimentos da Teoria de Probabilidades na Educação Básica e Vieira (2008) que utilizou um ambiente de Estatística dinâmica visando estudar as interações entre aluno e *software*.

Wild e Pfannkuch (1999) discutem os processos mentais envolvidos na resolução de problemas estatísticos num sentido amplo de formulação dos mesmos até suas conclusões. Inspiraram-se na literatura e em entrevistas realizadas com estudantes de Estatística e com praticantes estatísticos visando descobrir os seus processos de raciocínio estatístico. Partindo de entrevistas, uma estrutura de quatro dimensões foi identificada para o pensamento estatístico: o ciclo investigativo, os tipos de pensamento, o ciclo interrogativo e disposições.

A primeira dimensão, ciclo investigativo, diz respeito à forma como se age e aquilo que se pensa durante o transcorrer de uma investigação estatística. Foi adaptada do modelo do PPDAC (*Problem, plan, data, analysis, conclusions*) de Mackay & Oldford (1994) e tem como objetivos entender a dinâmica de um sistema e abstrair e resolver um problema real, geralmente com a intenção de mudar este sistema para melhorar algum aspecto.

Na segunda dimensão, Wild e Pfannkuch (1999) classificam os tipos de pensamento em pensamento geral e pensamento fundamental. O pensamento geral refere-se aos tipos de pensamento comuns a todos os problemas a serem resolvidos. É a estratégia a ser utilizada, respondendo-se às perguntas: o que será feito? Como será feito? O que já se conhece sobre o assunto? Qual será o custo? Quais materiais serão necessários para a resolução do problema? Quais são os conceitos estatísticos do problema? Estas perguntas devem ser respondidas para que se possa decidir sobre a maneira em que os dados serão coletados e analisados bem como sobre a aplicação prática dos resultados obtidos. O pensamento fundamental é o reconhecimento da necessidade de dados, a transnumeração, que significa alteração de dados e representações de aspectos de um sistema para se chegar a uma melhor compreensão do problema, a variação a partir da tomada de decisão em situações de incerteza, um conjunto distinto de

modelos estatísticos considerando que “todo o pensamento usa modelos” (WILD e PFANNKUCH, 1999, p.227) e a integração da estatística com o contexto. Neste sentido, o experimento objeto desta pesquisa foi elaborado de modo a oferecer possibilidades de realização de tratamentos e conversões nos registros de representação ali existentes, buscando a compreensão e execução das tarefas nele contidas.

O ciclo interrogativo é um processo de pensamento genérico de uso constante na resolução de problemas estatísticos. O ciclo se aplica aos questionamentos macro e micro delineados pelo pensador durante a resolução do problema. O pensador gera possibilidades de caráter contextual, dos dados ou estatístico. Também faz a verificação da informação obtida a partir de uma referência interna (o que já conhecia) e externa (literatura, outras pessoas, dentre outras referências), para que possa tomar uma decisão sobre o que deve ser mantido e qual a sequência da pesquisa.

A quarta dimensão, denominada de disposições refere-se ao comprometimento do pensador com o problema em questão. O pensador pode ser curioso e permanecer na investigação buscando respostas para perguntas como: por quê? Como isso aconteceu? Isto é algo que acontece frequentemente? Como isso pode ser aproveitado? Pode ser imaginativo procurando enxergar o problema sob diferentes pontos de vista. Pode ainda ser céptico estando constantemente à procura da lógica e de possíveis falhas nas conclusões alcançadas. Baseando-se nestas definições, pode-se entender o pensamento estatístico como sendo um conjunto de estratégias mentais utilizadas pelo indivíduo com o intuito da tomada de decisões durante as etapas de um ciclo investigativo.

A figura 11 apresenta uma interpretação da definição de pensamento estatístico apresentada por Wild e Pfannkuch (1999).

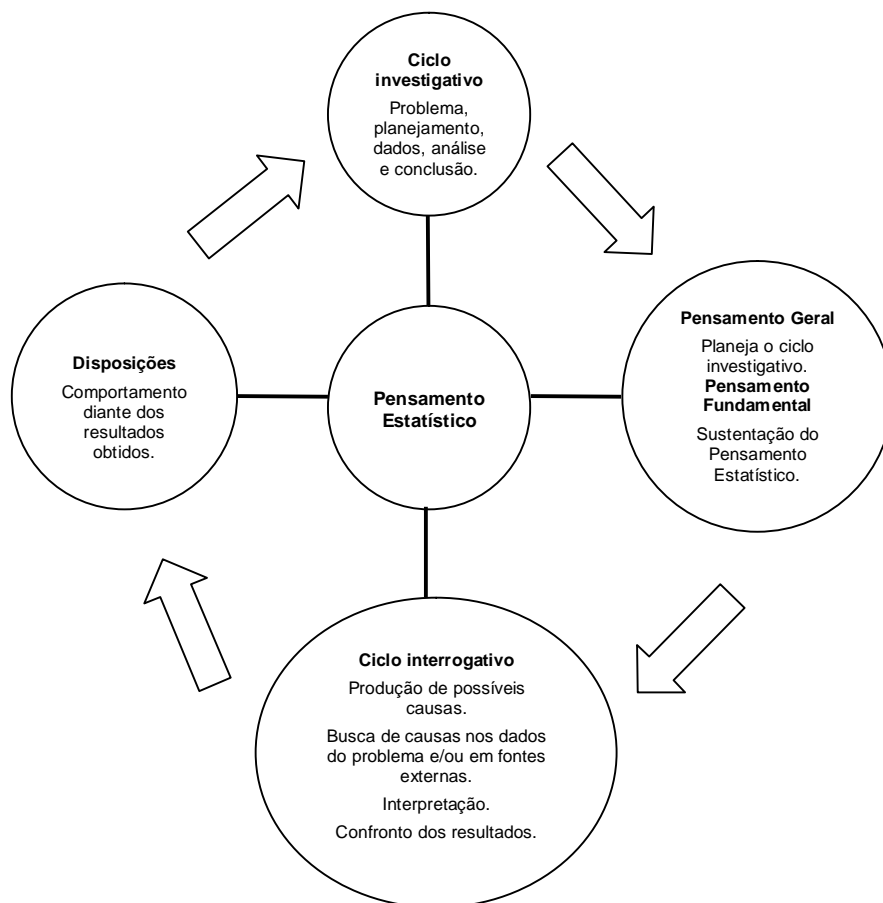


Figura 11 - Estrutura do Pensamento Estatístico conforme Wild e Pfannkuch (1999)

Fonte: Silva (2007, p.31)

Aqui vale a pena salientar que o experimento de ensino, objeto de estudo desta pesquisa, elaborado segundo a metodologia *Design Experiment*, procurou contemplar as quatro dimensões citadas por Wild e Pfannkuch (1999) como essenciais ao desenvolvimento do pensamento estatístico. A atividade 1 do experimento visou contemplar principalmente a dimensão denominada ciclo investigativo. Quanto à relação do experimento de ensino com o caráter do pensamento fundamental, destaca-se que os alunos tiveram a oportunidade de observar, comparar e avaliar os resultados obtidos a cada tarefa desenvolvida, bem como de trabalhar com os tratamentos e conversões havidos nos registros de representação nelas contidos, tendo assim condições de fazer inferências e de concluir a respeito.

No que diz respeito ao ciclo interrogativo, tanto o professor-pesquisador, quanto os alunos participantes do experimento, foram submetidos a questionamentos durante a realização das tarefas, o que nos remete à metodologia *Design Experiment*, na qual o papel do pesquisador é promover os ajustes necessários para alcançar os resultados esperados. O pensador pode tentar entender se a ideia observada possui uma fonte, bem como pode permitir que novas ideias surgidas sejam confrontadas com suas próprias, podendo ser também perseverante. Cada vez que as atividades do *Design* são remodeladas, os dados coletados para chegar a uma nova atividade também são analisados pelo pesquisador e todo o processo é levado em consideração nas análises.

No processo de ensino e aprendizagem de Estatística, além do desenvolvimento do pensamento estatístico deve ser considerado também o raciocínio estatístico. Segundo Garfield e Gal apud Garfield (2002, p. 1), o raciocínio estatístico é “a maneira com que as pessoas raciocinam com idéias estatísticas e como percebem a informação estatística”.

Para o desenvolvimento de um raciocínio estatístico mais avançado é necessário que o ensino proporcione condições para que o aluno compare conceitos, avalie e decida pela maneira mais adequada de analisar uma variável ou um conjunto de variáveis, mude de representação, entenda os contra-exemplos, atuando ativamente no processo desenvolvido.

Figueiredo (2000) elaborou, aplicou e analisou os resultados de uma sequência de ensino levando em consideração os princípios de uma Engenharia Didática. A sequência foi composta de quatro atividades com o intuito de fazer o aluno refletir sobre circunstâncias que envolvessem não só a probabilidade condicional, mas também os conceitos ligados ao teorema da probabilidade total e o teorema de Bayes. Utilizou, nas atividades, diferentes registros de representação articulados: linguagem natural, simbólica, diagrama de árvore e tabela de contingência tomando por base a teoria de registros de representação de Duval. Aplicou a sequência aos alunos de Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação concluindo ter a mesma auxiliado na minimização das dificuldades dos alunos percebidas durante sua prática docente sobre a manipulação dos conceitos ligados à Probabilidade por parte dos alunos, sendo que os questionamentos e as dificuldades apresentadas diante de situações que envolviam o conceito de

Probabilidade Condicional foi o que mais lhe chamou a atenção. Acredita ainda a autora que a sequência por ela aplicada tenha aberto novos temas para futuras pesquisas na área.

Figueiredo ressalta em seu trabalho que a maioria dos alunos apresentou resultados satisfatórios diante de questões que envolveram probabilidade condicional, desde que os eventos se apresentassem nas perguntas em linguagem natural. Quando, no entanto, questões análogas foram apresentadas na linguagem simbólica, as dificuldades surgidas foram bem mais acentuadas. Constatou, por exemplo, que os alunos compreendem melhor uma probabilidade quando esta se apresentava no registro de porcentagem do que no de fração, embora consigam operar melhor em fração do que em porcentagem, sugerindo aí que novas investigações sejam realizadas a fim de se estabelecer quais as concepções que os alunos têm da representação da probabilidade por meio do número na forma decimal ou fracionária. Destaca, ainda, ter levado mais tempo na introdução e manipulação das atividades do que seria necessário caso os alunos conhecessem os registros “diagrama de árvore” e “tabela de contingência”.

Souza (2002) desenvolveu seu trabalho com o objetivo de conhecer melhor alguns aspectos da distribuição Binomial como objeto estatístico e de suas relações com outras distribuições de probabilidade. Considera que a distribuição Binomial está inserida num contexto mais amplo de objetos estatísticos devido ao fato de ser necessária a compreensão de alguns tópicos anteriores a ela – variável aleatória, distribuição de probabilidades e distribuição de Bernoulli – para que ela mesma possa ser compreendida, assim como que estudando outras distribuições de probabilidade – hipergeométrica e de Poisson – e suas aproximações com a binomial seja possível perceber a importância da distribuição Binomial e a necessidade de sua compreensão para o prosseguimento dos estudos em Estatística.

Dentro desta preocupação com o entendimento da binomial, a autora destaca que na sua fórmula são usados diversos conceitos matemáticos e de probabilidade: fatorial, eventos complementares, intersecção de eventos, fórmula da combinação, dentre outros. Cita o uso da árvore de possibilidades, salientando que nos casos onde a repetição de ensaios é muito grande, este uso se torna muito trabalhoso, sugerindo assim o trabalho com a fórmula da binomial.

Outros objetivos da autora foram traçar um panorama sobre pesquisas já realizadas referentes ao ensino-aprendizagem de Probabilidade e elaborar uma sequência didática que favorecesse a apreensão da distribuição Binomial. Para elaborar sua sequência didática, baseou-se no panorama citado e em alguns constructos da Didática da Matemática, entre os quais o uso de mais de um registro de representação, de acordo com Raymond Duval.

A sequência didática foi aplicada a alunos do curso superior de Administração de Empresas, curso cujo maior enfoque, no geral, não é o matemático. Percebeu que nem todos os alunos dominavam todos os conceitos probabilísticos necessários para o desenvolvimento de um trabalho com a distribuição Binomial. A sequência elaborada pela pesquisadora se diferenciava da abordagem do ensino tradicional nos seguintes aspectos: utilizou a distribuição como ferramenta de resolução e como objeto de estudo, por meio da dialética ferramenta-objeto de Douady (1986); utilizou mais de um registro de representação e o jogo de quadros (probabilístico; algébrico); procurou ser precisa na linguagem natural para compreensão dos enunciados e dos contextos nos quais as situações se inseriam; rompeu o contrato didático existente; e procurou observar possíveis dificuldades e obstáculos, com o objetivo de tentar ultrapassá-los.

A autora concluiu que deficiências em pré-requisitos, por ela chamadas de falhas anteriores, tais como ausência de linguagem simbólica, problemas em relacionar “pelo menos”, “no máximo”, com “ \geq ”, “ \leq ”, potência de expoente “zero”, cálculo de fatorial e cálculo de porcentagem, interferiram no trabalho de sua pesquisa, uma vez que foi percebida muita dificuldade na resolução das atividades propostas, fazendo com que aspectos da distribuição Binomial passassem despercebidos, ao menos naquele momento de aplicação. Um exemplo dado pela autora diz respeito à dificuldade de interpretação de enunciados, bem como da compreensão do como utilizar a fórmula de distribuição Binomial institucionalizada durante a aplicação da atividade. Os alunos não verificaram, em nenhuma das questões da sequência, se o problema podia ser resolvido pela fórmula. Alegavam que, se a professora ensinou, a fórmula deveria ser utilizada. Assim, independentemente das características do enunciado, sempre procuraram “achar” p , x e n , ou seja, a probabilidade de sucesso, o número de sucessos e o número de tentativas, respectivamente.

Destacou, por fim, a constatação de que o uso da distribuição Binomial de probabilidades por parte dos alunos ocorreu mais por força de um contrato didático do que pela apreensão do conteúdo, salientando ser necessário um trabalho específico sobre esse conteúdo, que vá além do trabalho de se minimizar as falhas anteriores trazidas pelos alunos.

Sugere a autora, que novas pesquisas sejam realizadas na intenção de investigar questões surgidas durante a sua pesquisa e que não puderam ser tratadas naquele momento tais como o cálculo de uma probabilidade em situações nas quais era solicitado o cálculo do número de combinações e a questão verificada com algumas duplas que ao serem solicitadas a calcular a probabilidade de sair uma cara e uma coroa no lançamento de duas moedas consideraram apenas o caso cara/coroa, não levando em conta o caso coroa/cara.

Novaes (2004), considerando ser a Estatística ferramenta fundamental na interpretação e análise de dados, fornecendo elementos para controle, gestão e melhoria constante de processos e serviços, procurou analisar se os alunos do ensino superior estavam mobilizando de forma eficaz os conceitos e concepções constituídos na aprendizagem deste conteúdo, bem como detectar dificuldades e tipos de erros cometidos após a aprendizagem em Estatística.

Utilizou, como sujeitos de pesquisa, seis duplas de alunos que já haviam cursado a disciplina Estatística analisando seus procedimentos de resolução em situações-problema à luz de teorias da Didática da Matemática.

Analisou a apropriação dos objetos de ensino considerando os níveis de conceitualização dos conhecimentos pelos alunos, segundo a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996). Também considerou no desenvolvimento do seu trabalho duas das quatro dimensões de análise dos conteúdos de Matemática a ensinar de Robert (1998): *níveis de conceitualização* e *níveis de mobilização dos conhecimentos pelos alunos*. Propôs um estudo exploratório, esperando então que a análise servisse de ponto de partida para um aprofundamento da pesquisa sobre a construção de conceitos por alunos que utilizarão a Estatística como ferramenta profissional.

A autora identificou alguns invariantes na forma de conhecimentos em ação que poderiam estar na origem dos erros identificados em sua pesquisa. Por exemplo, os alunos confundiram os conceitos de média e de mediana demonstrando

mobilizarem erroneamente o conceito de distribuição simétrica o que poderia ser explicado, segundo a autora, por um conhecimento em ação segundo o qual “Toda distribuição de freqüências é simétrica” ou ainda “Toda distribuição de frequência pode ser modelada por uma distribuição Normal”. Também tiveram dificuldade com o tratamento com população e amostra permitindo à autora identificar um invariante operatório do tipo “Se a amostra é representativa, então dados amostrais podem ser utilizados como dados da população”.

Novaes (2004) identificou e classificou os erros observados em cinco categorias: tratar a amostra como se fosse a população; erro no conceito média/moda/mediana; dificuldade no trabalho com unidades; análise inadequada da variabilidade dos dados; e erro no cálculo de porcentagens. Observou que os erros se repetem e produzem regularidades. Quatro das seis duplas apresentaram a mesma dificuldade de associar população e amostra. Nenhuma destas quatro duplas fez uma análise adequada da variabilidade dos dados na situação, enquanto que as outras duas duplas não esboçaram procedimentos de resolução que pudessem demonstrar a dificuldade em questão, sendo assim interpretadas pela autora como possuidoras de dificuldade na realização de todo o procedimento proposto.

Alerta para a necessidade de não se fazer uma separação sistemática entre Estatística descritiva e inferencial, trabalhando, assim, com os princípios da análise exploratória de dados. Por considerar importante o tratamento paralelo no lugar da divisão clássica normalmente utilizada, motivado pela necessidade de se solucionar problemas práticos, sugere a utilização de computadores por serem estes capazes de analisar grande quantidade de informações assim como uma alteração na abordagem dos conteúdos matemáticos trabalhados, de forma que o aluno passe a atuar ativamente no processo de sua aprendizagem.

Rodrigues (2007) investigou em que medida a introdução de conceitos básicos de probabilidade no ensino fundamental por meio de um modelo (Urna de Bernoulli) favoreceria a construção destes conceitos. Percebeu, durante a aplicação da sua atividade, que os alunos sujeitos da pesquisa, atingiram o estágio de pré-probabilidade, o que indicou, segundo ele, a existência de uma real possibilidade da construção dos conceitos probabilísticos básicos por alunos do ensino fundamental, quando utilizado um modelo para tal. Ainda segundo o autor, esse resultado obtido

contradiz as opiniões de professores sujeitos de outras pesquisas, quando estes afirmaram ser o conteúdo de Probabilidade e Estatística muito complexo para ser abordado neste segmento de ensino. Tal afirmação se alinha com nossas preocupações expostas no Capítulo 1 deste trabalho, bem como vai ao encontro daquilo dito por Fernandez e Fernandez (1999) ao se referirem ao despreparo dos professores da Educação Básica para o desenvolvimento dos conteúdos de Probabilidade e Estatística. Segundo as autoras,

“Alguns livros de Matemática de II grau citam tópicos de Probabilidade e Estatística que raramente chegam a ser abordados, justamente porque o próprio conteúdo de Matemática é muito extenso, o professor está sempre pressionado pelo tempo para vencê-lo e tais conteúdos não eram avaliados no Vestibular. Acrescente-se a isso, que, por estar incluído em compêndios de Matemática, o próprio professor não está devidamente preparado para desenvolver este conteúdo de forma satisfatória, tendo em vista sua formação determinística (Fernandez e Fernandez, 1999, p.1).

Com base nos resultados de sua pesquisa, Rodrigues (2007) sugeriu uma reformulação dos cursos de Licenciatura em Matemática, visando um melhor preparo dos futuros professores de modo a sentirem-se, assim, mais seguros no trabalho com Probabilidade e Estatística na Educação Básica.

Em seu trabalho, Silva (2007) teve como objetivo verificar o raciocínio sobre variação e variabilidade nas etapas do ciclo investigativo do pensamento estatístico. Trabalhou com professores de Matemática da escola básica e com alunos de Matemática de uma universidade de São Paulo. Utilizou como estrutura conceitual e como organização da implementação de sua pesquisa as dimensões do pensamento estatístico (WILD e PFANNKUCH, 1999) por terem os autores declarado ser a variação seu componente fundamental.

Percebeu, durante a fase de sensibilização, que os professores apresentavam naturalmente o raciocínio sobre variabilidade, porém o mesmo não ocorria sobre variação. Com a realização de seu trabalho houve um avanço no desenvolvimento do pensamento estatístico dos professores que, segundo a autora, “já transitavam em três das quatro dimensões de sua estrutura elaborada por Wild e Pfannkuch (1999)”. Silva (2007) concluiu, no entanto, que o desenvolvimento do pensamento estatístico não implicou diretamente em um nível mais avançado do raciocínio de variação, objeto de seu estudo. Acredita a autora que o

desenvolvimento de aplicativos computacionais possa auxiliar na aquisição deste raciocínio.

Kataoka et al (2008) defendem o uso de experimentações aleatórias e de simulações computacionais para se obter uma aprendizagem ativa de Probabilidades. Citam Batanero e Godino (2002) cujo trabalho apresenta algumas orientações sobre como ajudar as crianças e adolescentes no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Alertam, no entanto, para o fato de que “se deve ter cautela no uso da simulação computacional, pois na maioria das vezes o aluno não sabe o que está acontecendo, visto que as operações ocorrem dentro do computador” (KATAOKA et al, 2008, p. 4).

Neste trabalho, os autores justificam o uso do *software R* por ser um ambiente computacional integrado que permite a manipulação, análise, e representação gráfica de dados baseado em linguagem de programação orientada por objetos, disponibilizando, assim, uma grande variedade de métodos estatísticos.

Após a descrição das atividades, os autores sugerem que ao final de cada uma delas seja solicitado ao aluno um relatório, em que ele tenha a oportunidade de reavaliar/aprimorar suas respostas iniciais. Recomendam ainda a utilização do pacote *TeachingDemos* tendo, com isso, o objetivo do estímulo a professores e alunos para que façam novas investigações no *R*, citando como exemplo, a exploração do pacote *Rcomander* (*Rcmdr*) “que tem uma interface gráfica “amigável”, mas com um diferencial para os outros softwares. Este pacote permite que o usuário utilize os aplicativos e, ao mesmo tempo, observe na tela as linhas de comando, de maneira que ele possa rodar fora do pacote, direto no *console* do *R*” (KATAOKA et al, 2008, p. 15).

Vieira (2008) discutiu quais os conceitos e procedimentos necessários, visando à construção de uma análise crítica de um conjunto de dados, favorecida pelo dinamismo de um ambiente computacional, que comporiam uma ferramenta para facilitar a mobilização de diferentes tipos de registros de representações semióticas.

Buscou o estudo da teoria de Duval, muito aplicada em pesquisas na Educação Matemática relativamente a conceitos algébricos e geométricos, dessa vez para a representação de conceitos estatísticos. Elaborou e aplicou uma sequência didática de atividades desenvolvidas com o uso do *software Fathom*,

concluindo que as interações com o ambiente informatizado e com os grupos, nas articulações dos diferentes tipos de representação, contribuíram com a compreensão de conceitos como a média aritmética e a mediana, bem como com a análise e interpretação de gráficos de colunas e de pontos. Estas variáveis, porém, foram ainda insuficientes na compreensão de medidas como os quartis e do gráfico Box-Plot. A autora cita o estudo de Baker, Biehler e Konold (2004) no qual relatam que tais dificuldades acontecem, pois, para compreender este tipo de gráfico, é necessário ter conhecimentos sobre quartis e a divisão dos dados em quartis é de difícil compreensão. Afirmam ainda que a mediana não é tão intuitiva aos estudantes quanto possa parecer. Sugerem, assim, que um número maior de atividades específicas seja elaborado com o intuito de melhor serem trabalhados os conceitos de mediana e de quartis.

A autora conclui que seria necessário mais tempo para que pudesse trabalhar os citados conceitos da maneira sugerida. Abre deste modo novas possibilidades para futuras pesquisas.

Ao revisar os trabalhos selecionados na busca de indícios de como os estudantes constroem o pensamento estatístico relativo ao conceito de distribuição Binomial, percebemos claramente a necessidade de mais pesquisas nesta área.

Nessa análise, destacamos que Silva (2007) apresentou como questão para próximas pesquisas, se o raciocínio de variação poderia ser estimulado com aplicativos computacionais.

Figueiredo (2000) concluiu que o seu estudo abriu novos temas para futuras pesquisas, evidenciando que os sujeitos apresentavam desempenhos distintos dependendo do tipo de registro apresentado no enunciado da atividade.

Souza (2002) também sugeriu que novos trabalhos sejam desenvolvidos de modo a investigar questões em aberto surgidas durante a sua pesquisa. A autora defende, em seu trabalho, que a compreensão da distribuição Binomial é vital para o prosseguimento do estudo em Estatística.

Novaes (2004) identificou invariantes que podem estar na origem dos erros por ela detectados e classificados em cinco categorias, defendendo consequentemente a visão da Estatística como um todo e não seccionada como costumeiramente ocorre, sugerindo a utilização de computadores nas práticas docentes por serem estes capazes de analisar grande quantidade de informações.

Houve, ainda, uma sugestão de modificações nos currículos dos cursos superiores de formação de professores de Matemática dada por Rodrigues (2007) motivado pelos resultados de sua pesquisa que apontaram para a necessidade de se formar profissionais da Educação Matemática em melhores condições para o trabalho com conteúdos de Probabilidade e de Estatística.

Em Kataoka et al (2008), percebemos que o desenvolvimento do raciocínio probabilístico na Educação Básica pode proporcionar aos estudantes a compreensão de acontecimentos de natureza aleatória no seu cotidiano, possibilitando, assim, uma leitura crítica de informações com tratamento estatístico. Os autores citam a importância do uso de recursos computacionais, em especial o *software R*, para a execução deste propósito.

No trabalho de Wild e Pfannkuch (1999) encontramos o detalhamento dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas estatísticos, denominado, pelos autores, de estrutura do pensamento estatístico.

Por fim, Vieira (2008), que utilizou a teoria de Duval, apontou para a necessidade de novos trabalhos de investigação em Estatística visando o desenvolvimento de novos procedimentos que venham a mobilizar diferentes registros de representação semiótica.

Partindo dessas evidências e considerando que as pesquisas indicaram a importância do uso de recursos computacionais e de um trabalho com diversas representações, nosso objeto de pesquisa teve a pretensão de dar prosseguimento aos trabalhos já realizados na busca das compreensões apresentadas pelos sujeitos diante de uma abordagem diferenciada do conteúdo de distribuição Binomial.

Para tanto, escolhemos a utilização do *software* livre *R* e o apoio teórico dos Registros de Representação Semiótica de Duval pretendendo, com o experimento a ser aplicado, investigar essas compreensões.

3.2 Apresentação do objeto matemático e de temas correlatos

3.2.1 Probabilidades

Fenômenos e Experimentos

De acordo com Cazorla e Oliveira (2010), fenômeno “é a definição de qualquer evento observável; literalmente, algo que pode ser visto” e experimento é o “ensaio científico destinado à verificação de um fenômeno realizado sob condições controladas, frequentemente fundamentado em hipóteses” (p. 118).

Quando se dominam as leis que vinculam as causas aos efeitos de um fenômeno, podemos denominá-lo de determinístico. Ou seja, esse fenômeno, quando submetido a provas repetidas em condições idênticas, apresenta valor fixo, como por exemplo, o fato de a água ferver a 100°C e chapas de ferro enferrujarem ao ar livre. Nesse tipo de fenômeno a antevisão dos resultados da experimentação, dentro de limites das possíveis quantificações, possibilita assegurar a veracidade ou falsidade das proposições a ele relacionadas.

Porém, nem todo fenômeno é determinístico. Com frequência nos deparamos com fenômenos cujos experimentos são incapazes de prever os resultados sendo dependentes do acaso, denominados de aleatórios ou estocásticos, tais como, a previsão das condições climáticas de um determinado dia, a taxa de inflação no próximo mês. A incerteza presente nesse tipo de fenômeno é considerada a base da teoria das probabilidades, pois, se todas as circunstâncias de um fenômeno são conhecidas, não há acaso, só certezas.

Modelo Probabilístico

É possível modelar fenômenos estocásticos que apresentam aleatoriedade nas ocorrências individuais e regularidade nas repetições. Por exemplo, no lançamento de uma moeda honesta não é possível determinar com certeza a face que será obtida. Porém, podemos prever com razoável precisão, o número de caras

– ou de coroas – a ser obtido quando do lançamento desta mesma moeda por um milhão de vezes.

O modelo probabilístico é o modelo matemático indicado para representar um fenômeno aleatório em que é possível fazer suposições a respeito da distribuição das frequências da sua ocorrência. Esse modelo está baseado na teoria das probabilidades.

A origem da teoria das probabilidades foi associada aos jogos de azar, mas atualmente é amplamente utilizada para modelar fenômenos socioeconômicos, particularmente em situações que demandem inferências e tomadas de decisão relativas a eventos que envolvem riscos. Tem utilização específica a cada área de atuação humana como na definição das políticas fiscais dos governos, na oferta de vagas proporcionada pelas escolas, no dimensionamento do número de leitos nos hospitais, dentre outros. Além disso, a teoria das probabilidades auxilia no desenvolvimento e avaliação de estratégias de ação, como por exemplo, o motorista que ajusta a velocidade à visibilidade ou as crianças que saem para brincar trajando roupas adequadas às temperaturas previstas.

Terminologia básica

Como em toda área do conhecimento humano, na teoria das probabilidades há uma terminologia usada para identificar os conceitos por ela trabalhados. No quadro 5, a seguir, apresentaremos quatro desses conceitos que julgamos inerentes à nossa pesquisa.

- espaço amostral: conjunto de todos os resultados possíveis de um certo fenômeno aleatório. Exemplos: em um lançamento de moedas, $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$; em extrações de cartas de um baralho, $\Omega = \{\text{ás, 2, 3, ... valete, dama, ...}\}$. Ele será representado pela letra grega Ω (ômega), e o seu número de elementos por N .
- evento: subconjuntos de Ω , representados pelas letras latinas maiúsculas A, B, Exemplos: lançado um dado, $A = \{1, 2, 3\}$ aponta o evento face menor que quatro; inspecionadas três peças, $P = \{\text{BBD}\}$ aponta as duas primeiras boas e a última, defeituosa; retirando-se cinco bolinhas coloridas de uma urna contendo bolinhas verdes e bolinhas amarelas, $B = \{\text{aavva}\}$ aponta três bolinhas amarelas e duas verdes. Indica-se o evento por uma letra maiúscula do alfabeto latino, e seus números de elementos por n . Quando o evento possui um único elemento ($n = 1$) é denominado de evento simples ou elementar, caso contrário, é um evento composto.
- Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω , diremos que A independe de B se a ocorrência de B não afeta a probabilidade de A, logo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- probabilidade: função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, conforme a seguinte definição:

Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz as condições:

$$i) 0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega;$$

$$ii) P(\Omega) = 1;$$

$$iii) P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j), \text{ com os } A_{j_s} \text{ disjuntos.}$$

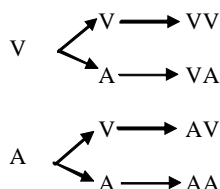
Quadro 5 - Terminologia de conceitos estatísticos.

Fonte: Magalhães e Lima (2005, pp. 37 e 38); adaptado por nós.

Um dos registros de representação que permite a contagem de n e N é o registro da árvore de possibilidades. Recebe esta denominação por produzir uma figura que tipifica uma árvore, com as chances sendo definidas por ramificações das já existentes. São princípios básicos deste registro: explicitação do espaço amostral; pontos do espaço amostral definidos pelas possíveis variantes do experimento; e pontos favoráveis estabelecidos pelo número de eventos que atendem à condição especificada. “Depois de apontados os elementos do espaço amostral, os valores procurados são obtidos por contagem direta. O número de elementos de Ω corresponde ao número de ramificações possíveis, dado pelo *princípio multiplicativo*.” (MILONE, 2009, p. 126).

Para exemplificar, considere a seguinte situação:

Numa urna com 4 bolas verdes (V) e 6 amarelas,(A) se forem retiradas duas bolas com reposição, a árvore de possibilidade pode ser representada como:



Nesse exemplo, N é igual a 4, n igual a 2, $\Omega = \{(VV), (VA), (AV), (AA)\}$, os pontos do espaço amostral definidos pelas possíveis variantes do experimento são V e A, e os pontos favoráveis seriam: VV, VA, AV e AA.

Quadro 6 – Situação exemplo do registro de representação da árvore de possibilidades

Fonte: Acervo pessoal

Variável aleatória discreta e função de probabilidade

De acordo com Dantas (2000), para descrever um experimento aleatório é importante associar valores numéricos aos seus resultados, mas como os eventos nesse tipo de experimento podem variar a cada realização do mesmo, também serão variados os valores numéricos correspondentes. Por exemplo, retomando a situação apresentada no quadro 6, no espaço amostral $\Omega = \{(VV), (VA), (AV), (AA)\}$, pode haver interesse de avaliar o número de ocorrências de bolas verdes. Nesse caso, ao evento (VV) é possível associar um valor “2” (por possuir duas bolas verdes), aos eventos (VA) e (AV) um valor igual a “1” e ao evento (AA), o valor “0”.

Dantas (2000) afirma que em “probabilidade a função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real é denominada uma variável aleatória” (p. 67).

Dá-se o nome de variável aleatória discreta a uma quantidade X, associada a cada possível resultado do espaço amostral, se esta assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade, como por exemplo, número de peças defeituosas por lote; de nascimentos por ano; de alunos na sala; de bolinhas retiradas de uma urna, assim como outros (Magalhães, 2005).

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, definida em um espaço amostral Ω , segundo Dantas (2005), é uma tabela que associa cada valor de X a sua probabilidade.

Uma parte importante da Estatística é obter, para uma dada variável aleatória, a função de probabilidade que melhor represente seu comportamento na população.

De acordo com Magalhães e Lima (2005), a função que associa a cada valor da variável aleatória discreta a sua probabilidade é denominada de *função discreta de probabilidade* ou, simplesmente, *função de probabilidade*, e pode ser representada com a seguinte notação:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$$

Ainda segundo Magalhães e Lima (2005), “a *função de distribuição* ou *função acumulada de probabilidade* de uma variável aleatória discreta X é definida, para qualquer número real x , pela seguinte expressão: $F(x) = P(X \leq x)$ ”.

No contexto da distribuição de probabilidade o valor médio de uma variável aleatória é denominado de *esperança matemática*. Para Dantas (2005) a esperança matemática de uma variável aleatória discreta X que assume valores, com respectivas probabilidades $P(X = x_i)$ para $i = 1, 2, \dots$ é dada por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

3.2.2 A Distribuição Binomial

Muitos experimentos possuem a característica de apresentarem somente dois tipos de resultados. Por exemplo, uma moeda é lançada: o resultado ou é cara, ou não, ocorrendo aí o resultado coroa. Um dado é lançado: ou ocorre face 5 ou não, ocorrendo, então, uma das faces 1, 2, 3, 4 ou 6. Nestes casos, “estamos interessados na ocorrência de *sucesso* (cara, face 5) ou *fracasso* (coroa, face diferente de 5). Essa terminologia (sucesso e fracasso) será usada frequentemente.” (BUSSAB, 2002, p. 142).

Para cada experimento que possua esta característica citada acima podemos definir uma variável aleatória X , que assume apenas dois valores: 1, no caso da ocorrência de sucesso, e 0, se ocorrer fracasso. Nomearemos p a probabilidade de sucesso, isto é, $P(\text{sucesso}) = P(S) = p$, $0 < p < 1$.

Segundo Bussab (2002), a variável aleatória X , que assume apenas os valores 0 e 1, com função de probabilidade $(x, p(x))$ tal que $p(0) = P(X = 0) = 1 - p$,

$p(1) = P(X = 1) = p$, é chamada *variável aleatória de Bernoulli*. Ainda segundo o autor, experimentos que resultam numa variável aleatória de Bernoulli são chamados *ensaios de Bernoulli*.

Os exemplos dados anteriormente podem ser generalizados. “Vamos designar por X o número total de sucessos em n ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p , $0 < p < 1$. Os possíveis valores de X são $0, 1, 2, \dots, n$ e os pares $(x, p(x))$, onde $p(x) = P(X = x)$, constituem a chamada *distribuição Binomial*.” (BUSSAB, 2002, p. 145).

A seguir apresentaremos a definição matemática dada por Magalhães e Lima (2005) à distribuição Binomial.

Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p . A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada Binomial com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \text{com } \binom{n}{k} \text{ representando o}$$

coeficiente binomial calculado por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Usaremos a notação $X \sim b(n, p)$ para indicar que a variável aleatória X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p .

A esperança matemática de uma distribuição Binomial é dada pela expressão $E(X) = np$. (MAGALHÃES e LIMA, 2005, p. 72)

Ressalta-se que a probabilidade de fracasso $(1-p)$ também pode ser representada por “ q ”.

3.2.3 Análise combinatória

Na composição da expressão da função de densidade da distribuição Binomial é utilizado um coeficiente binomial que é calculado pela combinação de n elementos tomados x a x . Durante o experimento de ensino foi necessário estimular a percepção dos alunos para essa relação. Mas para que a mesma não fosse apresentada apenas pelo professor pesquisador de forma direta, foi feita uma

revisão também dos conceitos de arranjo e permutação, e deixado a cargo dos alunos decidirem qual desses conceitos poderia representar adequadamente o coeficiente binomial.

Assim nessa seção apresentamos a definição dos conceitos *permutação*⁴ – que trata das possíveis composições de um evento A qualquer de Ω – e *combinação* – que por sua vez trata dos eventos de Ω constituídos exclusivamente de elementos distintos – utilizados na análise combinatória.

Permutar é sinônimo de trocar. Nos problemas de contagem associamos a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição. As permutações determinam quantos eventos constituídos de n eventos simples se pode construir, considerando que os agrupamentos difiram uns dos outros por ao menos um elemento ou pela ordem em que os elementos estão dispostos em cada agrupamento. Pode-se obter o total de permutações possíveis de n pontos distintos, tomados x de cada vez, pela fórmula: $P_{n,x} = \frac{n!}{(n-x)!}$, onde $n! = n(n-1)(n-2)\dots$ 3.2.1.

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos. Por combinação devemos entender eventos distintos, de tamanho x , possíveis de serem obtidos de um conjunto de n elementos. As combinações sempre produzem subconjuntos distintos, isto é, agrupamentos só distinguíveis pelos itens que os compõem, sendo que a ordem ou disposição em que eles aparecem é indiferente. Pode-se obter o total de combinações possíveis de n pontos distintos, tomados x de cada vez, pela fórmula:

$$C_{n,x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \text{ onde } n! = n(n-1)(n-2)\dots \text{ 3.2.1 e } x! = x(x-1)(x-2)\dots \text{ 3.2.1.}$$

⁴ Milone (2009) assume as permutações e os arranjos como grupamentos idênticos, dado que permutar nada mais é que arranjar todos os elementos dos conjuntos. O autor reserva o termo arranjo para apontar os possíveis modos de arrumar os elementos.

4 A METODOLOGIA *DESIGN EXPERIMENT*, APRESENTAÇÃO E ANÁLISE PRÉVIA DO EXPERIMENTO DE ENSINO

Neste capítulo é apresentada a metodologia dos *Designs Experiments* de Cobb et al.(2003), sua relação com o presente estudo e os motivos da opção por ela. Apresentamos também o experimento de ensino, elaborado com a finalidade de dar prosseguimento aos trabalhos de pesquisa já realizados em Educação Matemática, na busca das compreensões apresentadas pelos sujeitos diante de uma abordagem diferenciada do conteúdo de distribuição Binomial.

4.1 A metodologia dos *Designs Experiments*

A metodologia dos *Designs Experiments* surgiu por volta do ano de 1970, nos Estados Unidos da América. Não havia, até então, modelos com raízes na Educação Matemática que possibilitassem considerar especificamente o progresso de um estudante diante de uma comunicação matemática interativa. Até este momento da história, os modelos utilizados para a análise da matemática dos estudantes, aplicados para se entender desenvolvimentos matemáticos eram de outras áreas, como da epistemologia, da psicologia e da filosofia. Esta situação, aliada ao fato de haver uma lacuna entre a prática da pesquisa e a prática de ensino, é considerada como elemento motivador da criação da metodologia.

De início, a metodologia experimental utilizada antes dos experimentos, selecionava uma amostra de sujeitos submetendo-os a diferentes tratamentos. Comparando-se os efeitos de um tratamento com os efeitos de outros tratamentos, buscava-se determinar diferenças entre eles. Havia o cuidado entre os pesquisadores em formular fatores que pudessem ser sistematicamente variados, de modo que houvesse uma variação correspondente em outras variáveis. Omitia-se, assim, a análise conceitual, considerando os sujeitos como recipientes de tratamentos e não como foco da análise. Não participavam da construção dos tratamentos e existiam como indivíduos a serem tratados. Assim, ao contrário da

proposta do *Design Experiment*, o interesse principal do pesquisador não eram os significados construídos pelos estudantes.

Como estamos interessados em investigar como um experimento de ensino, elaborado com a intenção de explorar os diversos registros de representação, pode favorecer o sujeito a se apropriar do conteúdo distribuição Binomial, adotamos o *Design Experiment* como metodologia de nosso estudo, o qual tem caráter qualitativo.

Na figura 12 representamos as idéias dessa metodologia por meio de um diagrama.

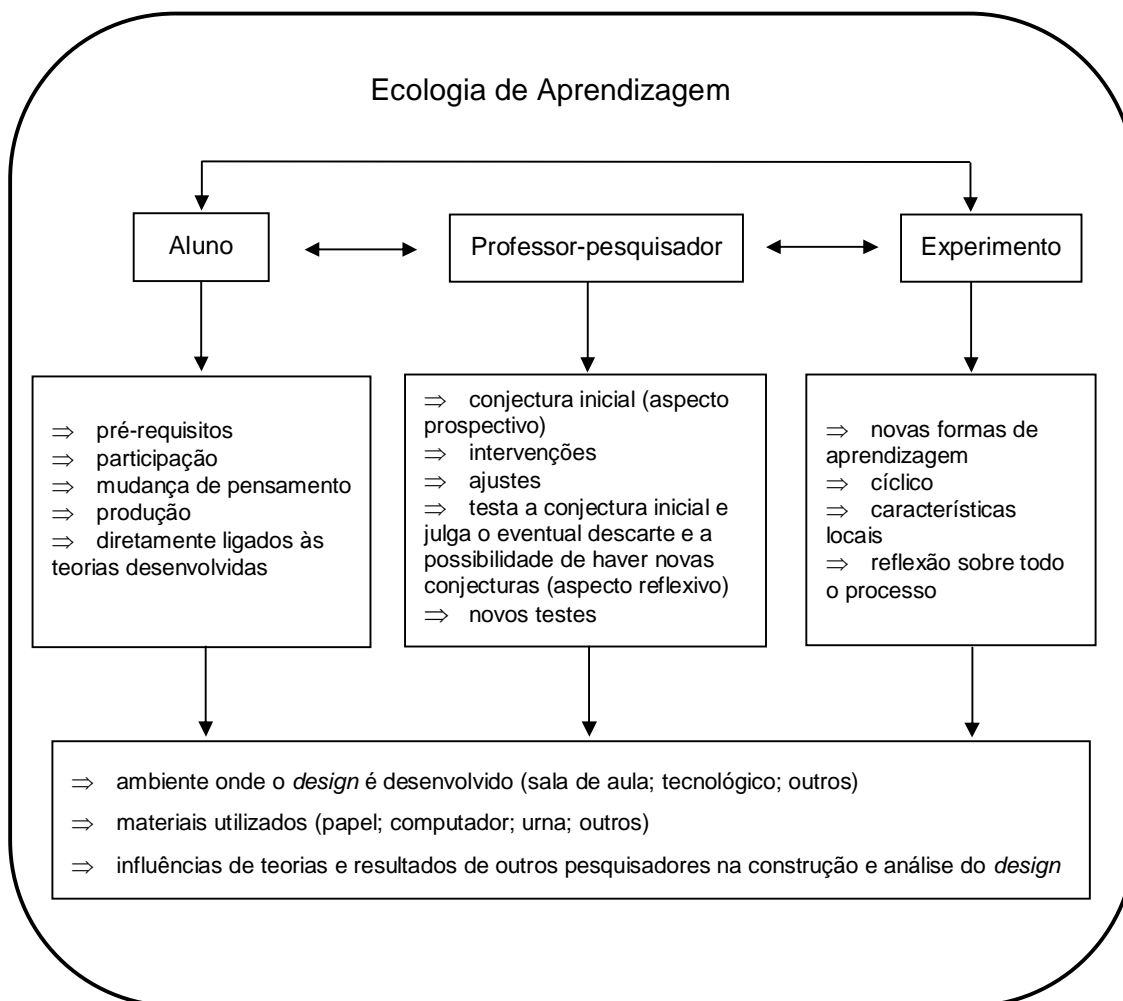


Figura 12 - Design Experiment: um método científico de investigação

Fonte: Acervo pessoal

Segundo Cobb et al. (2003), *Design Experiment* envolve ciclos para permitir certas formas de aprendizagem e ao mesmo tempo fazer um estudo desse processo, permitindo ao pesquisador traçar um perfil específico de aprendizagem do sujeito. A cada ciclo, os participantes - professores, estudantes e pesquisadores - têm a condição de refletir sobre suas ações e produções e, dentro desta metodologia, o papel do pesquisador é realizar os ajustes julgados necessários para alcançar os resultados esperados.

Nesta metodologia as atividades não são fixas, mas sim moldadas em função das ações e produções dos sujeitos e suas interações com o meio. Cada vez que as atividades são reajustadas e remodeladas, os dados coletados para se chegar a uma nova atividade são também analisados pelo pesquisador e todo o processo é levado em consideração nas análises.

Analisando processos de aprendizagem de domínios específicos, não representa apenas uma sequência de atividades preparadas e direcionadas à aprendizagem de um determinado domínio. Por isso é considerada uma *ecologia de aprendizagem*, pois descreve erros cometidos pelos alunos, problemas ocorridos antes, durante e depois das interações, intervenções feitas pelos pesquisadores, por professores participantes e por pessoas alheias a pesquisa e fatores e influências do ambiente em que todo esse processo ocorre. Segundo Cobb et al. (2003), a expressão “ecologia de aprendizagem” é dada por envolver vários elementos de diferentes tipos e níveis, por meio da concepção de seus elementos, e por antecipar-se ao funcionamento conjunto destes elementos apoiando assim a aprendizagem. *Design Experiments*, portanto, constituem um meio de abordagem da complexidade existente nos contextos educativos.

Esta metodologia visa gerar inovações no ensino e considerar o processo de aprendizagem de uma forma mais ampla de modo a alcançar não só o que normalmente é considerado como conhecimento como também que haja evolução da aprendizagem, refletida por práticas sociais relevantes e até mesmo construção da própria identidade por parte do indivíduo. Tem caráter flexível, cíclico e adaptável às produções dos sujeitos.

Na elaboração do *Design Experiment* todos os elementos constituintes devem ser observados, tais como: questões a serem propostas aos estudantes, o provável discurso a ser desenvolvido, as regras de participação a serem estabelecidas, os

instrumentos, as ferramentas e os materiais que serão utilizados, bem como os significados das relações entre estes elementos. “*Uma teoria proveniente do Design Experiment deve explicar como ele funciona e oferecer sugestões de como pode ser adaptado a novas circunstâncias, além das possibilidades de gerar e testar novas hipóteses. Desta forma, este tipo de metodologia é, ao mesmo tempo, pragmático e teórico*” (KARRER, 2006, p. 197).

Para interpretar as formas de aprendizagem que surgem durante a execução de um Design Experiments, o pesquisador, que pode também assumir papel do professor, deve contribuir para a criação de uma teoria universal. Porém para o experimento, as explicações são de natureza “local”, ou seja, os dados são analisados dentro de um contexto onde são levadas em conta todas as variáveis envolvidas na pesquisa: o perfil de cada participante, o conteúdo matemático envolvido, as demandas das atividades, o espaço físico onde é aplicada a pesquisa, a cultura dos envolvidos, dentre outros aspectos.

Dando ênfase na análise do pesquisador quanto aos aspectos do pensamento matemático dos estudantes e das possíveis modificações desses pensamentos, o *Design Experiment* é considerado como método científico de investigação. Assim, cabe ao pesquisador criar situações e modos de interação, num encorajamento à mudança dos pensamentos usuais dos estudantes. O professor-pesquisador deve preocupar-se, na elaboração desta metodologia, com o que poderá dizer sobre as possibilidades apresentadas aos estudantes, assim como sobre a sustentação e a modificação de seus esquemas matemáticos já existentes.

4.2 Aspectos relevantes da metodologia *Design Experiment*

Dentro da metodologia dos *Designs Experiments*, segundo Cobb et al. (2003), existem cinco pontos relevantes que merecem destaque:

1. A tentativa de desenvolver uma teoria de aprendizagem que consiga delinear todo o processo ocorrido - a participação dos sujeitos da pesquisa, o desenrolar das atividades e intervenções realizadas.

Pretende-se, com esta metodologia, desenvolver um modelo no qual os estudantes possam desenvolver suas concepções de um determinado conteúdo

matemático específico, em conjunto com os questionamentos e práticas de ensino que possam fornecer suporte para a aprendizagem em questão.

2. Propor novas formas de aprendizagem, permitindo ao leitor uma reflexão sobre todo o processo, desde a sugestão de novos modelos educacionais a possibilidade de intervenção nos já existentes;

A metodologia *Design Experiments* possui caráter intervencionista, tendo por objetivo investigar reais possibilidades de novas formas de aprendizagem, sempre visando mudanças educacionais. Por tratar-se de uma ecologia de aprendizagem necessita da completa especificação das ocorrências surgidas devendo-se distinguir elementos que representem o objetivo da investigação daqueles considerados pré-requisitos.

3. Os aspectos prospectivo e reflexivo desta metodologia.

O pesquisador parte de uma conjectura inicial (fase prospectiva) e durante os ciclos do design pode testá-la e a partir dos resultados julgar se será necessário descartá-la e gerar outras que possam dar suporte às formas de aprendizagem em questão (fase reflexiva);

A forma particular de aprendizagem que será testada tem como plano inicial estabelecer conjecturas sobre os significados que lhe darão suporte. No transcorrer do experimento, serão realizadas e testadas conjecturas mais específicas de acordo com as produções dos alunos. No caso de alguma das conjecturas iniciais ser descartada durante o processo, existe a possibilidade da criação de novas conjecturas que, assim como as anteriores, serão também testadas.

4. O caráter cíclico, onde a cada experimento podemos re-visitamos nossas conjecturas e criar novos modelos visando atingir um objetivo específico;

Desta forma, na condução do design, os pesquisadores dotam o sistema de uma característica cíclica uma vez que o plano é alterado com frequência dependendo, como já dito anteriormente, das produções havidas pelos sujeitos. Ocorrem interações complexas, adaptações e *feedbacks* constantes quebrando assim a visão do ensino tradicional onde pesquisadores, professores e alunos desempenham tão somente papéis fixos e pré-definidos na aprendizagem matemática.

5. As teorias desenvolvidas nesta metodologia estão relacionadas a um domínio específico do processo de aprendizagem, e também estão diretamente ligadas aos participantes da pesquisa.

Durante o processo as teorias desenvolvidas são revestidas de simplicidade por se relacionarem a um domínio específico do processo de aprendizagem e por desempenharem um trabalho real dentro da atividade do Design.

O *Design Experiment* pode se manifestar de diversas formas:

- *One-on-one* (pesquisador e professor-aluno) trata-se do *design* em que uma equipe de pesquisadores trabalha com poucos alunos;
- *Classroom experiments* que se caracteriza por experiências em sala de aula em que uma equipe de pesquisa colabora com um professor (que pode ser um membro da equipe de pesquisa) para assumir a responsabilidade pela instrução;
- *Preservice teacher development experiments* no qual uma equipe de pesquisa ajuda a organizar e estudar a formação de futuros professores;
- *In-service teacher development studies* em que os pesquisadores colaboram com os professores para apoiar o desenvolvimento de uma comunidade profissional;
- *School and school district restructuring experiments* no qual uma equipe de pesquisadores colabora com os professores, administradores escolares e outras partes interessadas com o apoio organizacional.

4.3 Relação do nosso estudo com a metodologia *Design Experiment*

Pelo fato de nossa proposta ter por objetivo investigar as produções dos estudantes diante de uma abordagem diferenciada do conteúdo de distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software-R* com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros de representação, optamos por adotar como metodologia o *Design Experiment*. O foco deste trabalho esteve na análise do pensamento estatístico dos estudantes quando estes se depararam com a abordagem proposta e na flexibilização para possíveis adaptações diante das produções apresentadas.

O objetivo foi criar uma versão em pequena escala de uma ecologia de aprendizagem para que pudesse ser estudada em profundidade e detalhe. Utilizamos a configuração “*One-on-one (teacher-experimenter and student)*” (Cobb & Steffe, 1983; Steffe & Thompson, 2000), onde uma equipe de pesquisadores realiza uma série de sessões de ensino com um número reduzido de alunos.

4.4 O contexto da pesquisa

4.4.1 Os sujeitos

Para participarem da pesquisa convidamos alunos do ensino superior, dos cursos de Engenharia de uma instituição particular de ensino do Estado de São Paulo. Foram alunos que, no momento da aplicação, cursavam o quarto e o quinto semestres de seus respectivos cursos de graduação, voluntários, que foram escolhidos por terem sido alunos do pesquisador na disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística” no segundo semestre do curso, tendo, na ocasião, trabalhado com o conteúdo distribuição Binomial, objeto deste estudo.

Foram sete participantes do experimento, divididos em três grupos para a realização das atividades, exceto da que denominamos “Atividade preliminar” a qual foi aplicada de forma individual, tarefa por tarefa, com o objetivo de se investigar os conhecimentos prévios de cada aluno participante, uma vez que eles já tiveram contato com o conteúdo de distribuição Binomial.

Pelo número de sujeitos participantes e pela necessidade de uma completa especificação das ocorrências surgidas durante a aplicação do experimento de ensino que foi simultânea a todos os grupos, o pesquisador contou com a colaboração de uma pesquisadora assistente durante todo o processo.

4.4.2 O ambiente de trabalho e o tipo de coleta de dados

A pesquisa aconteceu nas instalações de uma Universidade particular do Estado de São Paulo, em sessões semanais de aproximadamente cinquenta minutos de duração cada, num total de dez encontros.

Desta instituição de ensino foram utilizados tanto uma sala de aula para a fase da pesquisa onde foi criado o ambiente papel&lápis, quanto um laboratório de informática que se constituiu num ambiente tecnológico para a fase do trabalho com o *Software-R*. Como os sujeitos foram organizados em grupos, o *software-R* foi instalado em três computadores desse laboratório.

Foram considerados como material de análise das produções dos alunos as fichas contendo as atividades propostas com os devidos registros feitos por eles, anotações outras realizadas pelo pesquisador, gravações das falas dos alunos quando da participação da fase relativa ao ambiente tecnológico e as gravações das telas dos computadores onde os alunos trabalharam com o *Software-R*, sendo nesse ambiente utilizado o *software* de captura de telas *Free Screen Recorder*.

4.5 Questão de pesquisa

Delimitamos, nesse trabalho, a seguinte questão de pesquisa:

Em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software-R*, com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros, influencia na compreensão desse conceito?

4.6 Nossa hipótese inicial de pesquisa

As atividades que compuseram nosso experimento de ensino foram elaboradas com o intuito de possibilitar a exploração de diferentes representações e suas especificidades, na busca do desenvolvimento da coordenação simultânea das conversões entre dois ou mais registros assim como da exploração de conversões tanto congruentes como não-congruentes.

Assim sendo, nossa hipótese inicial de pesquisa era que os participantes envolvidos no experimento conseguissem, auxiliados pelas atividades criadas no ambiente papel&lápis e pela ferramenta computacional escolhida, o *Software-R*, perceber as características da distribuição Binomial, observar a importância de um modelo teórico de análise, determinar relações entre representações de diversos registros desse conteúdo e estabelecer análises partindo do registro gráfico, detectando o impacto que a mudança em um dos parâmetros da distribuição ocasiona nesse último registro. Com isso, esperava-se contribuir para uma compreensão diferenciada deste conceito.

Era provável que o caráter dinâmico do *Software-R* permitisse que o aluno testasse experimentalmente as conjecturas formuladas a partir da realização das tarefas presentes nas atividades propostas na experimentação. Tendo em vista que as tarefas no *software* envolveram conversões pouco usuais, principalmente evidenciando relações entre o registro gráfico e os demais, era esperado que o estudante desenvolvesse compreensões distintas das obtidas em abordagens usuais desse conteúdo.

4.7 O papel do professor-pesquisador

Sugerir modificações no design das atividades propostas e conduzir o experimento de forma a adaptá-lo às produções dos estudantes foram atribuições do professor-pesquisador. Sempre que necessário assumiu o papel de professor, porém sem interferir nas atividades de maneira a apresentar respostas. A participação do professor-pesquisador foi voltada a gerar questionamentos, dar sugestões, solicitar a comparação entre situações havidas, com a finalidade de propiciar às duplas condições de avaliar e validar suas resoluções. Também inseriu novas tarefas sempre que julgou necessário, buscando proporcionar aos alunos condições de prosseguirem com a resolução.

4.8 Infra-estrutura utilizada

Durante a aplicação do experimento de ensino, foram utilizados dois ambientes distintos, nas dependências de uma Universidade particular do Estado de São Paulo na qual os alunos voluntários estudam. Num primeiro momento, que durou da aplicação da Atividade preliminar à Atividade 06, o experimento foi aplicado em uma sala de aula no que chamamos de ambiente papel&lápis. Foram utilizados como recursos materiais, carteiras, mesa do professor, papel, lápis, urnas, bolinhas na cor verde e na cor amarela, giz e lousa. Num segundo momento, durante a aplicação da Atividade 7, utilizamos o ambiente tecnológico que se formou pelo uso de três computadores de um dos laboratórios de informática da Instituição. Nesta atividade foi utilizado o *Software-R* que representou um ambiente rico para o estabelecimento de experimentações, favorecendo principalmente as análises que partiram de representações gráficas. Para a aplicação da Atividade 8, utilizamos novamente o ambiente papel&lápis.

4.9 Apresentação do experimento de ensino

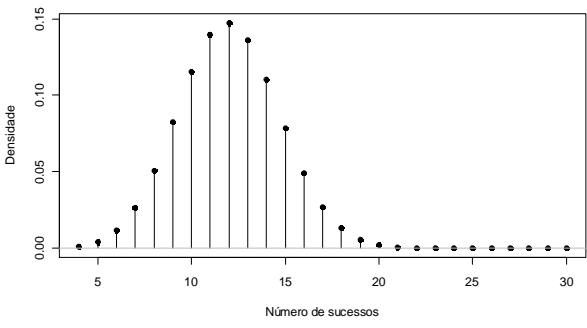
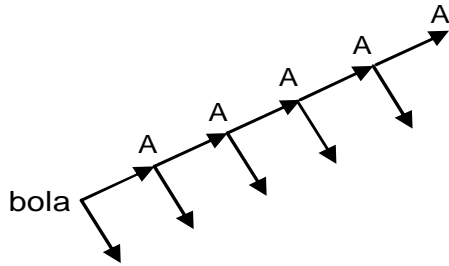
Nosso experimento de ensino foi elaborado adotando como referência principal a sequência didática (SD) “Passeios Aleatórios da Mônica (PAM)” proposta por Fernandez e Fernandez (1999), para o estudo da distribuição Binomial no Ensino Superior, posteriormente adaptada por Cazorla e Santana (2006), para o ensino de Probabilidade na Educação Básica.

O objetivo geral deste experimento consistiu em oferecer aos alunos uma possibilidade de trabalho sobre distribuição Binomial, partindo de suas próprias conjecturas sobre chance e probabilidade, passando por uma experimentação prática de retirada de bolinhas de uma urna de forma aleatória e chegando possivelmente a estruturação de uma fórmula para o cálculo desta distribuição. Após isso, os alunos realizaram uma atividade no *software-R* ampliando, assim, as possibilidades de exploração do conteúdo.

No experimento foram explorados os registros de representação semiótica onde, além de tratamentos no interior dos mesmos, pretendia-se inserir situações de conversões entre dois ou mais registros.

Assim, serão apresentadas as atividades que compuseram o experimento, construídas de modo a explorar a coordenação entre os diversos registros inerentes ao conteúdo de distribuição Binomial. As atividades tal qual foram apresentadas aos alunos no que diz respeito à formatação estão em apêndice a este trabalho. Ainda, será apresentada uma análise preliminar de cada atividade com foco na teoria de Duval (1995, 2000, 2003, 2006).

Para essa análise, realizamos uma classificação dos registros e das representações presentes neste conteúdo, conforme ilustrado no quadro 7.

REGISTRO	EXEMPLOS DE REPRESENTAÇÕES								
Língua natural	probabilidade de não sair bola verde em cinco resultados								
Gráfico (Gráfico 5)									
Árvore de possibilidades									
Numérico	$\binom{5}{0} \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^5$								
Tabular	<table border="1" data-bbox="678 1423 1317 1543"> <thead> <tr> <th>nº de bolas verdes</th> <th>nº de vezes retiradas (fi)</th> <th>Frequência relativa (hi)</th> <th>Porcentagem 100*hi</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0,03125</td> <td>3,125</td> </tr> </tbody> </table>	nº de bolas verdes	nº de vezes retiradas (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi	0	1	0,03125	3,125
nº de bolas verdes	nº de vezes retiradas (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi						
0	1	0,03125	3,125						
Simbólico	$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot (p)^k \cdot (1-p)^{n-k}$ <p>AAAAA</p>								

Quadro 7 – Registros de representação semiótica

Fonte: Acervo pessoal

4.9.1 Atividade preliminar

Com o intuito de avaliar o conhecimento prévio dos sujeitos, tendo em vista que eles já estudaram o conteúdo de distribuição Binomial, foi aplicada, de forma individual, uma atividade preliminar, cujas tarefas são apresentadas a seguir (Quadro 8).

Tarefa 1. Você já estudou o tópico de distribuição Binomial?

() Sim () Não

Caso sim, escreva sobre essa distribuição e dê um exemplo de sua aplicação.

Tarefa 2. Resolva a questão:

Considere um dado “honesto” com faces numeradas de 1 a 6.

- ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de obter a face com o número 6?
- ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de não obter a face com o número 6?
- se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

Tarefa 3. O gráfico seguinte representa uma distribuição Binomial, analise-o e responda as questões.

a) qual o valor do tamanho de amostra? Justifique.

b) o valor da probabilidade de sucesso é:

() maior do que 0,5 () menor do que 0,5 () igual a 0,5

Justifique.

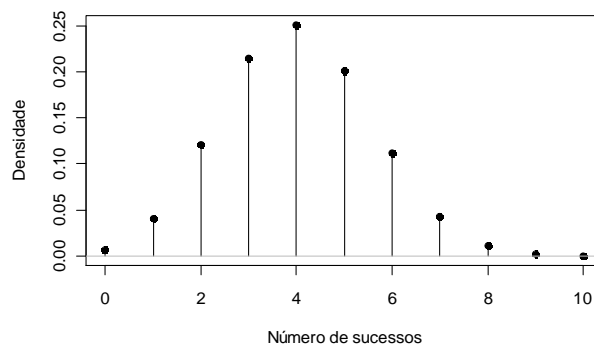


Gráfico 6

Quadro 8 – Atividade preliminar

Fonte: Acervo pessoal

Nessa atividade preliminar, o objetivo da primeira tarefa era o de investigar o que foi assimilado do estudo do conteúdo distribuição Binomial na ocasião em que cursaram a disciplina Estatística. Pretendia-se que os alunos escrevessem livremente o que recordassem e julgassem conhecer a respeito do conteúdo em questão. Na realização dessa tarefa esperava-se que fizessem uso dos registros da língua natural e numérico, podendo também aparecer o registro simbólico.

O objetivo da segunda tarefa era o de avaliar seus conhecimentos acerca do conceito de probabilidade e probabilidade complementar, chegando logo após, ao cálculo de probabilidade numa situação que envolvia a distribuição Binomial. Nesta tarefa os registros esperados eram o numérico e o simbólico.

A proposta da terceira tarefa desta atividade preliminar era a de investigar em que medida os alunos sabiam ou conheciam as principais propriedades da distribuição Binomial, isto é, seus parâmetros “n” e “p” e que $E[X] = np$, distribuição esta dada a partir de seu registro gráfico, que envolve uma probabilidade de sucesso de 0,4 (ou 40%) e 10 tentativas do experimento.

Esperava-se que a análise dos resultados desta atividade preliminar confrontada com a análise dos resultados do experimento de ensino que compõe a presente pesquisa, pudesse nos fornecer subsídios para investigar a evolução dos sujeitos e avaliar as atividades do experimento, na busca de respostas para nossa questão de pesquisa: Em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software-R*, com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros, favorece a compreensão desse conceito?

Apresentamos, no quadro 9, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
1	<i>Língua natural</i>	<i>Língua natural</i>	X	
2	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico ou simbólico</i>		X
3	<i>Língua natural e gráfico</i>	<i>Língua natural e numérico</i>	X	X

Quadro 9 - Análise dos registros e conversões da atividade preliminar

Fonte: Acervo pessoal

A atividade preliminar apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 1.

4.9.2 Análise prévia do experimento de ensino

A primeira atividade do experimento, apresentada no quadro 10, tinha por objetivo que os alunos fizessem conjecturas sobre a situação apresentada, fazendo uso dos registros da língua natural, numérico e/ou simbólico. Por meio de suas produções, seria possível investigar seus conhecimentos sobre chance.

Atividade 1

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Tarefas:

a) Para o experimento em questão, quais são os possíveis resultados ao retirar uma bolinha?

(represente verde por “v” e amarela por “a”)

b) Qual é a chance de sair verde? Por quê?

Qual é a chance de sair amarela? Por quê?

c) Imagine que você retire 5 bolinhas com reposição a cada retirada. Como você anotaria seu resultado imaginário?

Por quê?

Quadro 10 – Atividade 1

Fonte: Acervo pessoal

A resposta esperada para a tarefa “a” era “V ou A” para bolinha verde ou bolinha amarela, respectivamente.

Na tarefa “b” esperava-se que percebessem a relação entre o número de bolinhas verdes e o total de bolinhas, bem como entre o número de bolinhas amarelas e o total de bolinhas. Era de se esperar que a resposta fosse dada na forma de porcentagem ou na forma de fração sendo esta resposta “40% ou $\frac{4}{10}$ de chance de sair bolinha verde e 60% ou $\frac{6}{10}$ de chance de sair bolinha amarela”. Como justificativa para a resposta esperava-se que os alunos utilizassem a relação “*resultado favorável : total de possibilidades*”.

Era esperado o uso do registro de representação numérico.

Na tarefa “c”, ainda provocando a elaboração de conjecturas, pretendia-se que os alunos começassem a imaginar o experimento sendo realizado por eles. Esperava-se, nesta tarefa, que os alunos respondessem três amarelas e duas verdes em qualquer ordem, utilizando aí de tratamentos no interior do registro simbólico: “AAVV”, “VVAAA”, “VAAAV” etc., considerando o fato de o total de bolinhas retiradas corresponder à metade do número de bolinhas existentes na urna, e, portanto, para o cálculo da chance de sair bolinha de uma ou de outra cor deva-se dividir o número de resultados favoráveis citados na tarefa “b” também por dois. Havia ainda a ser considerada a hipótese de que o aluno já conseguisse pensar em termos de porcentagem, uma vez que na tarefa “b” ele teria calculado a chance e não a quantidade. Em assim sendo, poderia responder à tarefa “c” efetuando 40% de 5 bolinhas, o que dará 2 bolinhas. Também era possível que o registro fosse feito como “2V e 3A” ou “3A e 2V”. Havia ainda a possibilidade de que os alunos não fizessem conexão entre as tarefas “b” e “c”, considerando então outras possibilidades de resultados tais como “VVVVV”, “AAAAA”, “VVVVA”, “VAAAA” etc., podendo ocorrer, também neste caso, tratamentos no interior do registro simbólico. Neste caso, o professor-pesquisador interviria retomando as tarefas “a” e “b” com questionamentos do tipo: Na retirada de uma bolinha as chances de sair verde é a mesma chance de sair amarela? Na retirada de uma bolinha qual cor tem mais chance de sair? Seguindo nesta linha de questionamentos esperava-se que os alunos retomassem a tarefa “c” reavaliando suas respostas.

Apresentamos, no quadro 11, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
a	<i>Língua natural</i>	<i>Simbólico</i>		X
b	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico</i>		X
c	<i>Língua natural</i>	<i>Simbólico</i>		X

Quadro 11 - Análise dos registros e conversões da atividade 1

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 1 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 2.

Na atividade 2 os alunos realizaram um experimento prático que consistiu na retirada de 5 bolinhas de forma aleatória, com reposição a cada retirada, por 30 vezes, de uma urna contendo 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas. Os resultados obtidos deveriam ser registrados no Quadro 12: Resultados da experimentação. Neste quadro, no preenchimento da sequência e do número de bolas verdes obtidas, os alunos estabeleceriam uma conversão do registro simbólico para o registro numérico. Esta atividade tinha por objetivo proporcionar aos alunos uma vivência prática da situação apenas imaginada na atividade 1.

Atividade 2

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Retirar 5 bolinhas com reposição a cada retirada, por 30 vezes, anotando os resultados obtidos.

Quadro 12 – Resultados da experimentação

Repetição	Sequência	nº de bolas verdes	Repetição	Sequência	nº de bolas verdes
1.			16.		
2.			17.		
3.			18.		
4.			19.		
5.			20.		
6.			21.		
7.			22.		
8.			23.		
9.			24.		
10.			25.		
11.			26.		
12.			27.		
13.			28.		
14.			29.		
15.			30.		

Quadro 13 – Atividade 2

Fonte: Acervo pessoal

Tarefas:

- a) Em sua opinião, qual a quantidade de verdes mais esperada na retirada de 5 bolinhas com reposição? Por quê?
- b) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem mais chance de ser retirada: 0 ou 3? Por quê?
- c) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem menos chance de ser retirada? Por quê?
- d) Existe a chance de saírem 5 bolinhas verdes? Por quê?
- e) Sistematizem os resultados na Tabela 3, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência _TDF.

Tabela 3. Distribuição do número de bolinhas verdes retiradas

nº de bolas verdes	nº de vezes retiradas (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$

- f) Observando a TDF, qual é a frequência relativa de:

- não obter bola verde? _____
- obter 1 bola verde? _____
- obter 4 bolas verdes? _____

Em quanto por cento das retiradas aconteceram 2 bolas verdes?

- g) Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 1 com os dos seus colegas. Esses são iguais? () sim () não

Por quê?

Nas tarefas “a”, “b”, “c” e “d”, esperava-se que os alunos fizessem conjecturas sobre o número de bolinhas verdes obtidas na retirada de 5 bolinhas com reposição. Pretendia-se investigar em que medida os resultados do experimento prático registrados no Quadro 1 influenciariam as respostas dadas a estas tarefas. Era esperado o uso dos registros numérico e da língua natural.

Na tarefa “e” os alunos fariam uso do registro tabular preenchendo a Tabela 3: Distribuição do número de bolinhas verdes retiradas. Para isso utilizariam os resultados obtidos no experimento. Não eram esperados problemas com os cálculos da frequência relativa (h_i) nem das porcentagens, uma vez que na tabela havia a indicação do procedimento para realizá-los.

Na tarefa “f” esperava-se que os alunos interpretassem os dados registrados na Tabela 3 e fizessem uso do registro numérico.

Com a tarefa “g” os alunos teriam a oportunidade de comparar seus resultados com os resultados das outras duplas participantes. Esperava-se com esta tarefa que percebessem que o fato das retiradas das bolinhas serem realizadas de forma aleatória tenha provocado resultados diferentes, registrando tal fato na língua natural.

Apresentamos, no quadro 15, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
Quadro	<i>Simbólico</i>	<i>Numérico</i>		X
a	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico e Língua natural</i>	X	X
b	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico e Língua natural</i>	X	X
c	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico e Língua natural</i>	X	X
d	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico e Língua natural</i>	X	X
e	<i>Tabular</i>	<i>Numérico</i>		X
f	<i>Tabular</i>	<i>Numérico</i>		X
g	<i>Língua natural</i>	<i>Língua natural</i>	X	

Quadro 15 - Análise dos registros e conversões da atividade 2

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 2 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 3.

Na atividade 3 os alunos construiriam a árvore de possibilidades que representava a distribuição “número de bolinhas verdes em 5 retiradas”, a partir do 2º sorteio. A atividade tinha por objetivo que os alunos percebessem e identificassem o espaço amostral associado ao experimento proposto.

Atividade 3

Tarefas:

- 1) Completem a árvore de possibilidades, indicando a sequência sorteada:

Quadro 16 – Atividade 3, tarefa 1.

Fonte: Acervo pessoal

2) Quantos caminhos existem ao todo? _____

3) Verifiquem, nas sequências construídas, quantos caminhos possuem a seguinte quantidade de bolas verdes e escrevam as sequências:

a) 0 _____

b) 1 _____

c) 2 _____

d) 3 _____

e) 4 _____

f) 5 _____

4) Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencham a Tabela 4:

Tabela 4 – Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes

nº de bolas verdes	Expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total	////////////////////////////////////	1

Fonte: Acervo pessoal

Quadro 17 – Atividade 3, demais tarefas

Fonte: Acervo pessoal

Na tarefa 1 os alunos deveriam completar a árvore de possibilidades referente ao experimento, indicar as sequências sorteadas, a quantidade de bolas verdes obtidas em cada sequência e calcular a probabilidade de ocorrência de cada caminho. Deveriam fazer uso dos registros da árvore de possibilidades, simbólico e numérico, havendo aí conversão do registro da árvore de possibilidades para o simbólico e deste para o numérico.

Na tarefa 2 os alunos deveriam contar os caminhos obtidos. Esperava-se que chegassem ao número de 32 caminhos. Foi utilizado o registro numérico.

Na tarefa 3 foram utilizados os registros numérico e simbólico. Esperava-se que os alunos percebessem que o número de ocorrências de uma determinada quantidade de bolinhas verdes não dependia da posição em que elas aparecessem nas sequências, devendo então considerar todos os caminhos em que a quantidade analisada ocorria.

Para realizarem a tarefa 4 os alunos preencheriam a Tabela 4: Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes. Fariam, portanto, uso dos registros tabular e numérico. Esperava-se que percebessem e constatassem que a soma das probabilidades seria igual a 1.

Apresentamos, no quadro 18, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
1	<i>Língua natural</i>	<i>Árvore de possibilidades</i>		X
1	<i>Árvore de possibilidades</i>	<i>Simbólico</i>		X
1	<i>Simbólico</i>	<i>Numérico</i>		X
2	<i>Língua natural</i>	<i>Numérico</i>		X
3	<i>Numérico</i>	<i>Simbólico</i>		X
4	<i>Numérico</i>	<i>Numérico e tabular</i>	X	X

Quadro 18 - Análise dos registros e conversões da atividade 3

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 3 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 4.

A atividade 4 tinha por objetivo proporcionar condições para que os alunos comparassem os resultados obtidos nas duas formas de atribuição de probabilidades realizadas até este momento: cálculo da frequência relativa por ocasião da realização do experimento prático que consistiu na retirada de 5 bolinhas de forma aleatória, com reposição a cada retirada, por 30 vezes, de uma urna contendo 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas e cálculo das probabilidades por meio da análise dos resultados obtidos na árvore de probabilidades construída.

Atividade 4Tarefas:

1) Preencham a tabela 5 com os resultados das Tabelas 3 e 4:

Tabela 5 – Quadro comparativo do cálculo de probabilidades.

nº de bolas verdes	Frequência relativa (h_i)	Árvore de possibilidades (p_i)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Fonte: Acervo pessoal

- 2) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?
- 3) Comparem os resultados da Tabela 5, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir?
- 4) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?
- 5) Construam os gráficos dos resultados de (h_i), de (p_i) e (h_i) e (p_i) no mesmo plano.
- 6) Comparem os gráficos construídos com as construções das outras duplas. O que vocês podem concluir?

Quadro 19 – Atividade 4

Fonte: Acervo pessoal

Na tarefa 1 os alunos utilizariam os registros tabular e numérico. Não eram esperadas dificuldades na realização desta tarefa por tratar-se de simples cópia de resultados já obtidos em atividades anteriores.

Na tarefa 2 esperava-se que os alunos registrassem, utilizando a língua natural, suas observações e conclusões que pudessem justificar as diferenças entre

os valores obtidos para as frequências relativas (h_i) e as probabilidades (p_i) respectivas em cada quantidade de bolinhas verdes ocorrida.

Também na tarefa 3 seria usado o registro da língua natural. Esperava-se, nesta tarefa, que os alunos percebessem que em todas as duplas os resultados obtidos como valores das probabilidades de ocorrências de cada quantidade de bolinhas verdes pela árvore de probabilidades eram exatamente iguais e que o mesmo não ocorria quando se observavam os resultados obtidos como valores das frequências relativas a cada quantidade de bolinhas verdes retirada, e, a partir de tais constatações, relatassem suas conclusões a respeito.

Na tarefa 4 retornaríamos o questionamento da tarefa 2 na expectativa de que a realização da comparação proposta na tarefa 3 fornecesse mais argumentos às duplas. Novamente deveria ser utilizado o registro da língua natural.

Para a execução da tarefa 5 os alunos fariam uma conversão do registro numérico para o registro gráfico. Deveriam construir os gráficos representativos dos resultados por eles obtidos como frequência relativa (h_i) e de probabilidade (p_i) em planos separados. Em seguida, deveriam construir novamente os gráficos de (h_i) e de (p_i) agora num mesmo plano. Esperava-se com a execução desta tarefa que os alunos utilizassem os registros gráficos na comparação dos resultados obtidos auxiliando assim a obtenção de suas conclusões sobre os motivos que causaram as diferenças nos valores encontrados nos cálculos da (h_i) bem como nos valores coincidentes quando se observavam as (p_i) determinadas.

Ao compararem seus gráficos com as construções das outras duplas, na tarefa 6, esperava-se que os alunos reforçassem sua percepção de que os valores obtidos nos cálculos das frequências relativas eram diferentes em cada uma das duplas, enquanto que os cálculos das probabilidades para cada quantidade de bolinhas verdes obtidas na construção da árvore de probabilidades produziram resultados respectivamente iguais. Na realização desta tarefa os alunos fariam uso do registro da língua natural. Neste caso, apesar do experimento ser realizado em duplas, haveria momentos de discussão conjunta com todos os alunos, a fim de provocar o debate e a comparação das conclusões obtidas.

Apresentamos, no quadro 20, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
1	<i>Tabular</i>	<i>Tabular</i>	X	
2	<i>Língua natural</i>	<i>Língua natural</i>	X	
3	<i>Tabular</i>	<i>Língua natural</i>		X
4	<i>Língua natural</i>	<i>Língua natural</i>	X	
5	<i>Numérico</i>	<i>Gráfico</i>		X
6	<i>Gráfico</i>	<i>Gráfico</i>	X	

Quadro 20 - Análise dos registros e conversões da atividade 4

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 4 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 5.

O objetivo da atividade 5 era avaliar se a realização das atividades anteriores já era suficiente para que os alunos chegassem à determinação de uma fórmula que relacionasse o número de bolinhas verdes retiradas com a respectiva probabilidade, entendendo o caminho percorrido até aqui. Para tal, foi elaborada uma tarefa na qual os alunos deveriam relacionar o número de vezes da ocorrência de cada quantidade de bolinhas verdes com a probabilidade de cada uma das quantidades. Na realização desta tarefa os estudantes fariam uso dos registros tabular e numérico havendo uma conversão do registro numérico para o registro simbólico.

Atividade 5Tarefa:

Partindo dos resultados da Tabela 4, procurem determinar uma “fórmula” que relacione o número de bolinhas verdes com a respectiva probabilidade:

Tabela 4 – Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes.

nº de bolas verdes	nº de vezes em que aparece	Probabilidade (pi)
0	1	
1	5	
2	10	
3	10	
4	5	
5	1	
Total	32	1

Fonte: Acervo pessoal

$$P(X=0) =$$

$$P(X=4) =$$

$$P(X=1) =$$

$$P(X=5) =$$

$$P(X=2) =$$

$$P(X=k) =$$

$$P(X=3) =$$

Quadro 21 – Atividade 5

Fonte: Acervo pessoal

Eram esperadas dificuldades na realização da tarefa desta atividade 5 no que dizia respeito à conversão do registro numérico para o registro simbólico, como já constatado em pesquisa anterior realizada por Souza (2002). Nela a autora concluiu que os alunos preferem o uso da árvore de probabilidades do que da fórmula de distribuição por julgarem-na mais simples, ignorando o fato de haver casos onde o número de repetições é muito grande. Ainda nesta pesquisa, a autora relata ter institucionalizado as fórmulas de combinação e de distribuição Binomial uma vez que, pelo trabalho com sua sequência didática não foi possível aos alunos a obtenção da fórmula de modo independente.

Caso estas dificuldades na execução da atividade 5 realmente surgissem, o professor-pesquisador deveria interferir utilizando-se de novos questionamentos a

respeito dos valores obtidos experimentalmente até então, ou até mesmo de novas atividades elaboradas a partir da constatação das dificuldades e de suas características de modo a direcionar os alunos na busca de uma fórmula que generalizasse os cálculos de distribuições Binomiais em consonância com o disposto na metodologia dos *Designs Experiments* adotada nesta pesquisa.

Sendo a fórmula esperada $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, acreditava-se que as

dificuldades poderiam surgir na obtenção do número binomial $\binom{n}{k}$ que fornece a quantidade de vezes em que a quantidade k de ocorrências esperadas acontece, no nosso caso, o número de bolinhas verdes sorteadas em cinco retiradas com reposição a cada retirada de uma urna que contenha 10 bolinhas sendo 4 verdes e 6 amarelas. Uma possibilidade de trabalho para se sanar esta eventual dificuldade era a realização de atividades que envolvesse o conceito de combinação para, a partir daí, obter o número binomial.

Nesse momento o professor-pesquisador institucionalizaria a fórmula da distribuição Binomial.

Apresentamos, no quadro 22, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
Única	<i>Tabular e numérico</i>	<i>Simbólico</i>		<i>X</i>

Quadro 22 - Análise dos registros e conversões da atividade 5

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 5 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 6.

Uma vez deduzida a fórmula de distribuição Binomial, seria proposta a atividade 6 que tinha por objetivo que os alunos aplicassem a fórmula construída, na resolução de situações-problema.

Atividade 6

Tarefa:

Resolva os seguintes problemas:

1) Uma prova é constituída de 7 questões em forma de teste com 5 alternativas em cada teste, onde apenas uma é correta. Se um aluno “chutar” todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar:

- a) exatamente 6 questões?
- b) exatamente 4 questões?
- c) exatamente 1 questão?

2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:

- a) exatamente quatro vezes?
- b) exatamente seis vezes?
- c) exatamente dez vezes?

Quadro 23 – Atividade 6

Fonte: Acervo pessoal

Na realização da tarefa da atividade 6 os alunos deveriam utilizar os registros da língua natural, numérico e simbólico. Eram esperadas conversões dos registros da língua natural para o simbólico e deste para o numérico. Esperava-se que os alunos conseguissem chegar às respostas das questões formuladas pelo uso da fórmula de distribuição Binomial construída na atividade 5. Se tal hipótese não se confirmasse, mais uma vez deveria ocorrer a interferência do professor-pesquisador sugerindo comparações, elaborando novas tarefas sempre buscando que os alunos atingissem o sucesso esperado, porém sem deixar escapar de vista a característica cíclica da metodologia adotada intervindo sim, mas sem dar as respostas procurando fazer com que seus novos questionamentos e sugestões provocassem a reflexão e que desta emergissem as conclusões esperadas.

Apresentamos, no quadro 24, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
Única	<i>Língua natural</i>	<i>Simbólico</i>		X
Única	<i>Simbólico</i>	<i>Numérico</i>		X

Quadro 24 - Análise dos registros e conversões da atividade 6

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 6 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 7.

A atividade 7 descrita a seguir seria realizada no ambiente tecnológico onde os sujeitos teriam a oportunidade de trabalhar com o *Software-R*.

O objetivo desta atividade era proporcionar aos alunos uma possibilidade de verificação e validação das conjecturas feitas até então, por meio de representações gráficas, uma vez que o *software* adotado assim o permite.

Como este *software* nunca foi utilizado pelos alunos, antes do início da atividade houve uma breve apresentação do mesmo a fim de familiarizá-los suficientemente para o bom desenvolvimento das tarefas propostas.

Seguem algumas telas do *software* que foram introduzidas aos alunos.

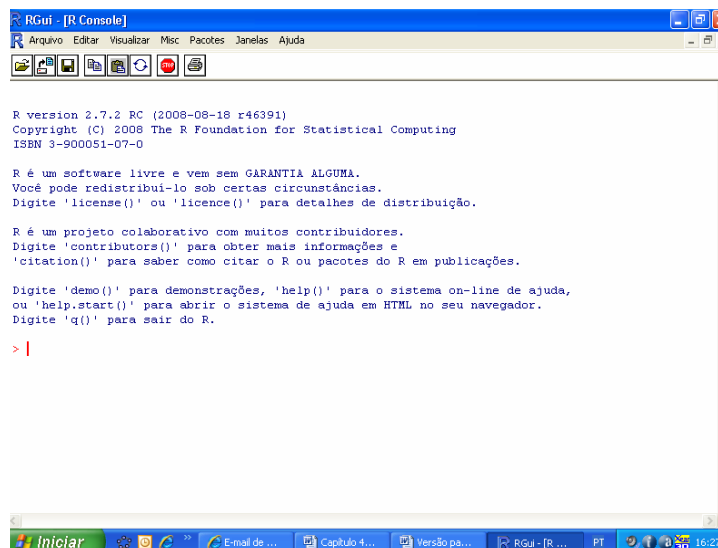


Figura 13 – Tela inicial do *Software R*

Fonte: *Software R*

A tela inicial do *Software-R* traz informações gerais sobre o programa, licença de uso, citação em publicações, ajuda, procedimento para obtenção de demonstrações e como fazer para sair do programa.

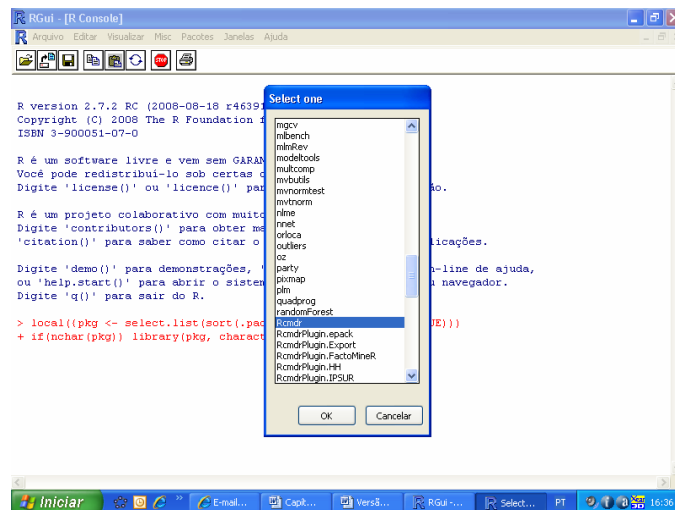


Figura 14 – Janela de seleção de pacotes do *Software R*

Fonte: *Software R*

Esta janela apresenta ao usuário as opções de pacotes disponíveis para serem carregados para uso. No nosso caso, utilizamos o pacote *Rcmdr* (*R commander*) onde encontramos as ferramentas para o trabalho com o conteúdo distribuição Binomial.

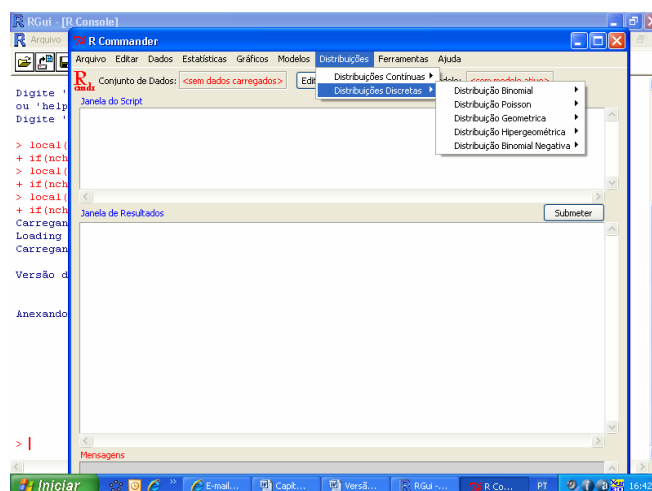


Figura 15 – Janela de seleção das distribuições de probabilidade

Fonte: *Software R*

Na janela de seleção das distribuições de probabilidade utilizamos a distribuição discreta Binomial.

Para a manipulação dos valores de “n” e “p”, os alunos poderiam utilizar a sequência de telas reproduzidas nas 4 figuras seguintes.

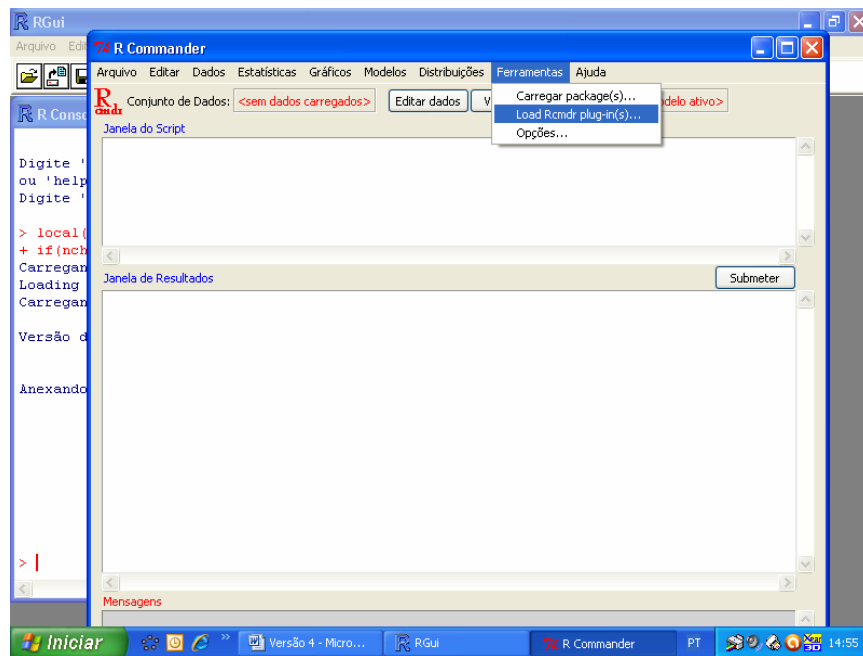


Figura 16 – Janela Ferramentas

Fonte: *Software R*

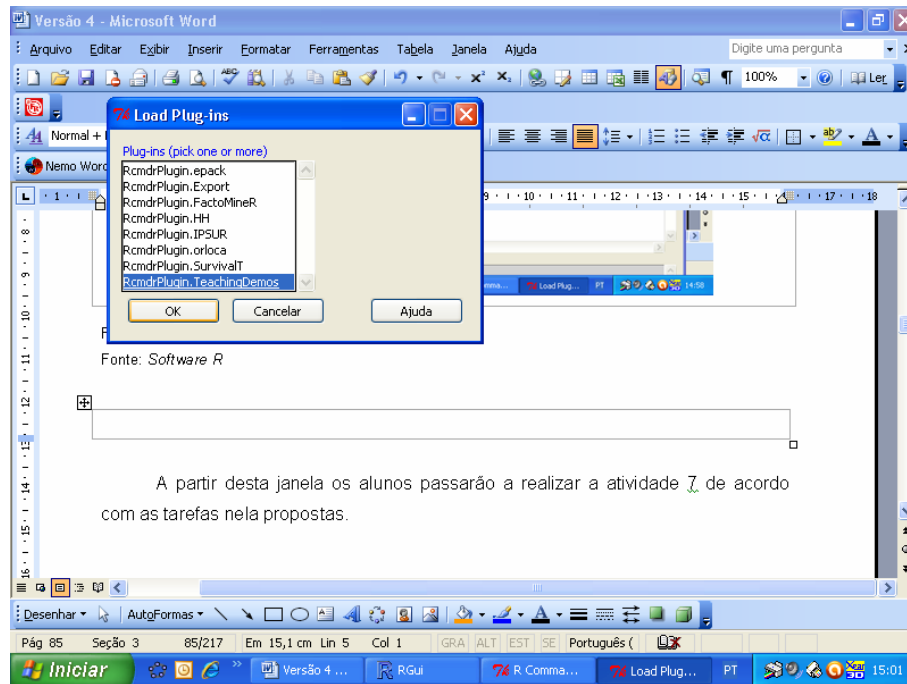


Figura 17 – Janela *Load Plug-ins*

Fonte: Software R

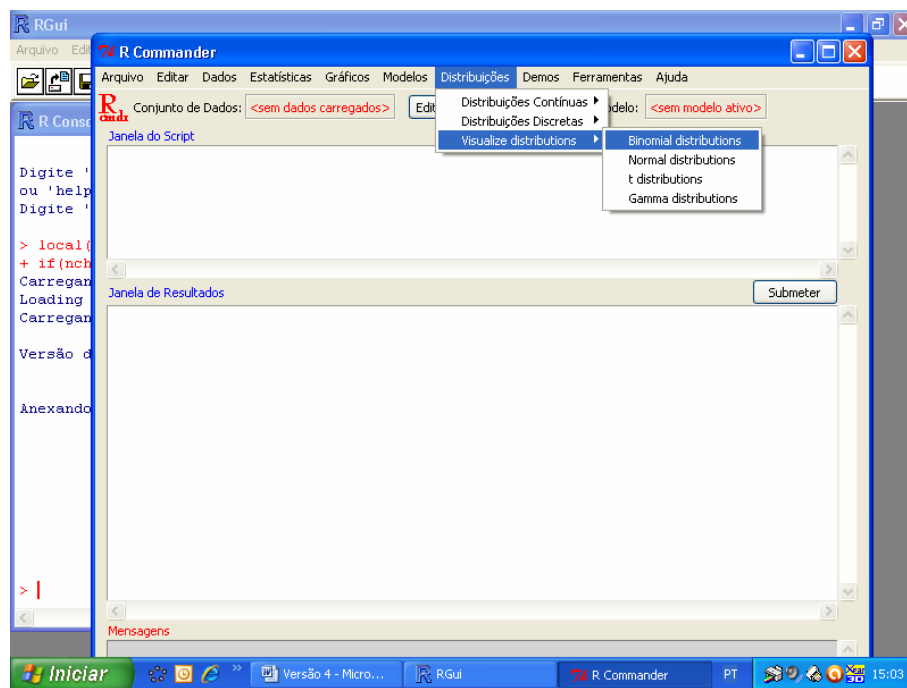


Figura 18 – Janela *Visualize distributions*

Fonte: Software R

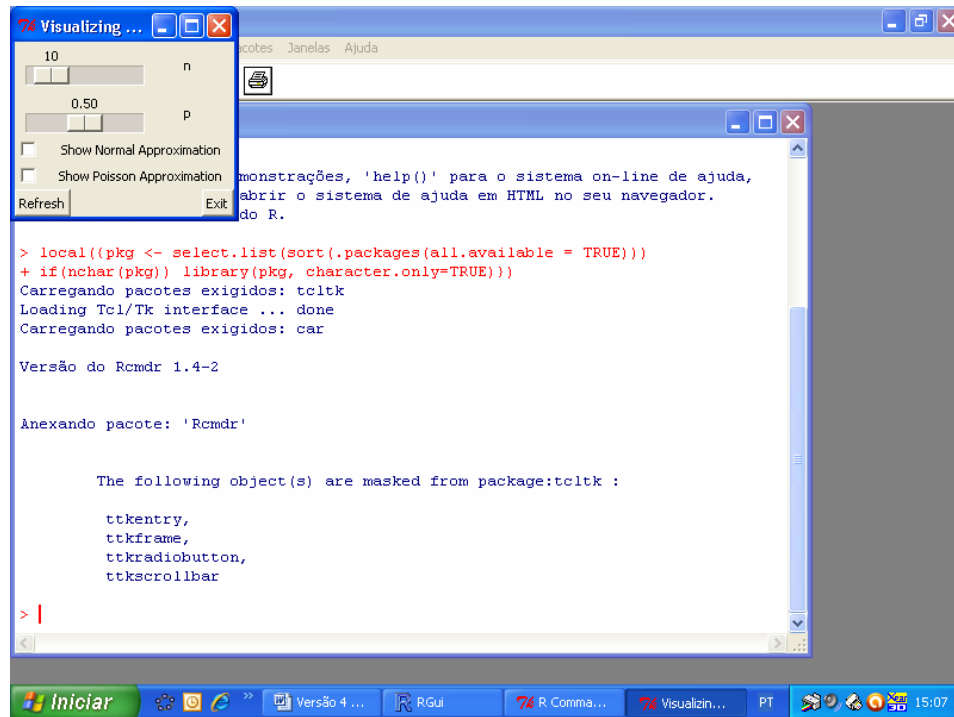


Figura 19 – Janela de manipulação dos valores de n e p

Fonte: *Software R*

A partir desta janela os alunos passariam a realizar a atividade 7 de acordo com as tarefas nela propostas.

Atividade 7Tarefas:

- a) O que representa n ?
- b) O que representa p ?
- c) Aumentando n , o que ocorre com o gráfico?
- d) Aumentando p , o que ocorre com o gráfico?
- e) Se $n = 30$ e $p = 0,2$, verifique no gráfico qual o valor da $P(X=4)$
- f) Se $n = 8$ e $p = 0,3$, determine a probabilidade de cada “X” e verifique qual o valor da soma dessas probabilidades.
- g) Sabe-se que a média da distribuição, indicada por $E(X)$, é dada por $E(X)=n.p$.

Em cada caso abaixo, determine $E(X)$ e observe o gráfico em relação à posição da média $E(X)$ no gráfico. Registre suas observações.

Copie e cole cada gráfico em um documento do MS-WORD.

g₁) se $n=10$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g₂) se $n=10$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g₃) se $n=10$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

g₄) se $n=10$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

g₅) se $n =15$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g₆) se $n=15$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g₇) se $n=15$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

g₈) se $n=15$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

Quadro 25 – Atividade 7

Fonte: Acervo pessoal

Fazendo uso do registro da língua natural e partindo de experimentações observadas na tela do software, nas tarefas “a” e “b”, pretendia-se que os alunos notassem os valores de n (tamanho da amostra) e de p (probabilidade de sucesso) determinando assim o significado de cada um numa distribuição de probabilidade Binomial.

Nas tarefas “c” e “d” após atribuírem valores para n e para p os alunos comandariam a construção do gráfico correspondente à situação. Haveria então uma conversão realizada pelo *software* do registro numérico para o registro gráfico. Esperava-se que os alunos percebessem no gráfico construído as grandezas n e p analisadas, ou seja, que aumentando o valor de p com n fixo, o gráfico sofreria um “deslocamento” para a direita do seu ponto máximo $[E(X)]$, uma vez que quanto maior a probabilidade de sucesso em uma tentativa, maior seria a possibilidade de uma quantidade maior de sucessos. Já quando se aumentava o valor de n com p fixo, este “deslocamento” não ocorreria havendo então apenas uma alteração no valor $[E(X)]$ proporcional à alteração provocada em n . A partir daí, variando os valores de acordo com o que era pedido em cada tarefa, os alunos deveriam se utilizar do registro da língua natural para respondê-las. Na tarefa “e” esperava-se que os estudantes pela leitura do gráfico determinassem a resposta 0,13 (aproximadamente). Na tarefa “f” esperava-se que as respostas dadas fossem valores aproximados a $P(X=0)=0,06$; $P(X=1)=0,20$; $P(X=2)=0,29$; $P(X=3)=0,26$; $P(X=4)=0,13$; $P(X=5)=0,04$; $P(X=6)=0,01$; $P(X=7)=0,005$; e $P(X=8)=0,005$, observando que a soma das probabilidades era igual a 1. Para a tarefa “g” esperava-se que os estudantes, por manipulação no *software*, constatassem que o resultado da média $E(X)$ era um valor próximo do elemento X relacionado com o maior valor de probabilidade.

Nestas atividades, esperava-se que os sujeitos percebessem além das mudanças nos registros gráficos o padrão de comportamento das curvas, na medida em que variassem os valores das grandezas.

A seguir são apresentadas telas do *Software-R* com registros gráficos mostrando a adaptação da imagem gráfica aos valores estabelecidos para n e p .

Na primeira tela apresentada (Figura 20) temos $n=10$ e $p=0,2$.

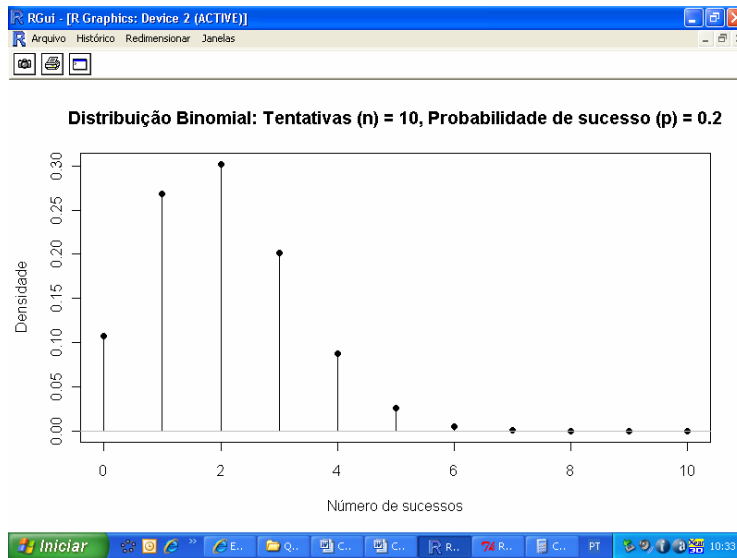


Figura 20. Registro gráfico no Software R (I) (Gráfico 7)

Fonte: *Software R*

Nesta segunda tela apresentada (Figura 21) temos a representação de $n=20$ e $p=0,2$

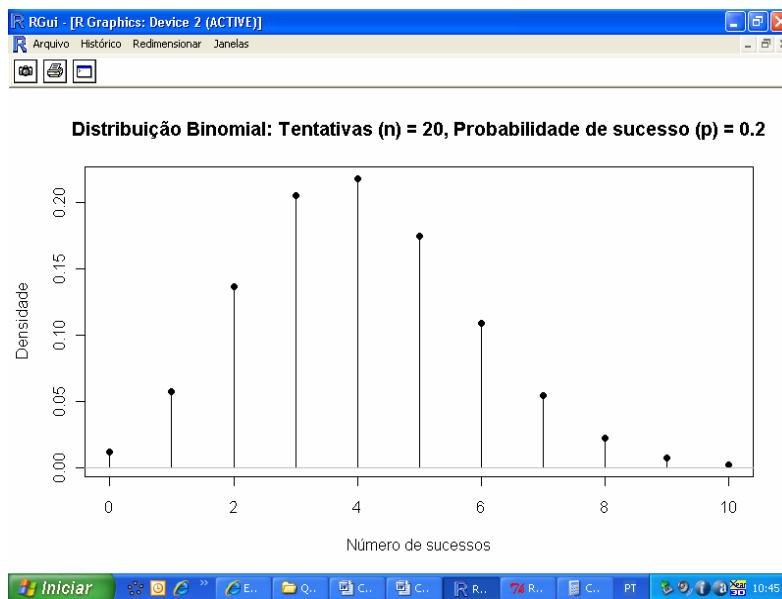


Figura 21. Registro gráfico no Software-R (II) (Gráfico 8)

Fonte: *Software R*

Na terceira tela apresentada (Figura 22) apresentada, temos $n=10$ e $p=0,3$.

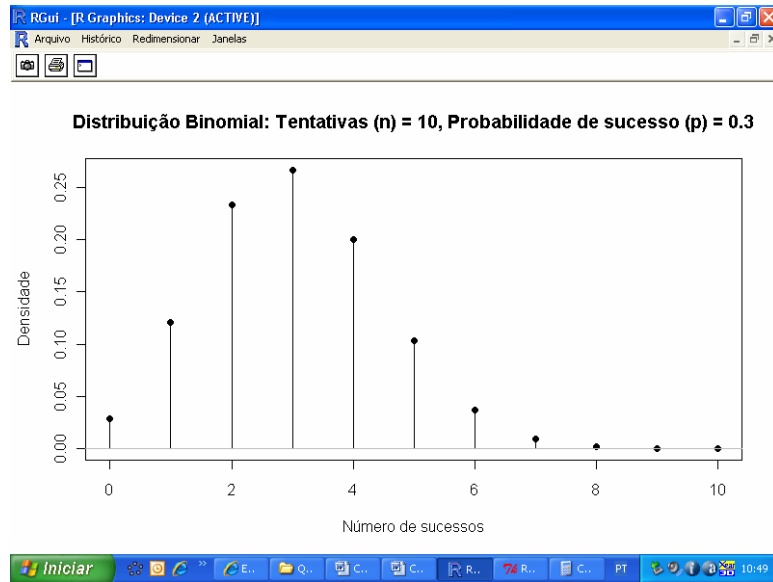


Figura 22. Registro gráfico no Software-R (III) (Gráfico 9)

Fonte: *Software R*

Esta última tela apresentada (Figura 23) apresenta o registro gráfico onde $n=10$ e $p=0,7$.

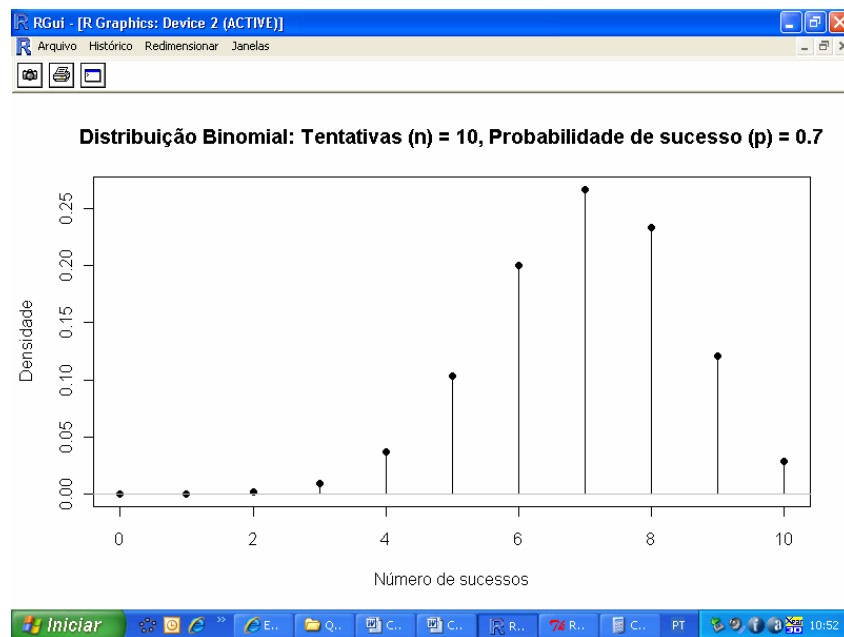


Figura 23. Registro gráfico no Software-R (IV) (Gráfico 10)

Fonte: *Software R*

Apresentamos, no quadro 26, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
a	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X
b	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X
c	<i>Numérico</i>	<i>Gráfico</i>		X
c	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X
d	<i>Numérico</i>	<i>Gráfico</i>		X
d	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X
e	<i>Gráfico</i>	<i>Gráfico</i>	X	
f	<i>Gráfico</i>	<i>Numérico</i>		X
g	<i>Simbólico</i>	<i>Numérico</i>		X
g	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X

Quadro 26 - Análise dos registros e conversões da atividade 7

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 7 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 8.

Após o trabalho com o *Software-R* no computador, passaríamos à atividade 8, composta de quatro tarefas propostas no ambiente papel&lápis. Pretendia-se observar se o trabalho anterior no *software* permitiria ao estudante o estabelecimento de análises partindo do registro gráfico. Na tarefa 1 foram apresentados aos alunos registros gráficos em papel solicitando então que os mesmos identificassem elementos componentes da distribuição Binomial. Para a realização desta tarefa seria necessário o uso dos registros de representação gráfico dado pela atividade, numérico e da língua natural. Esperava-se que os sujeitos procedessem a conversões entre os registros gráficos e os registros numéricos e da língua natural.

Atividade 8Tarefa 1:

1) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

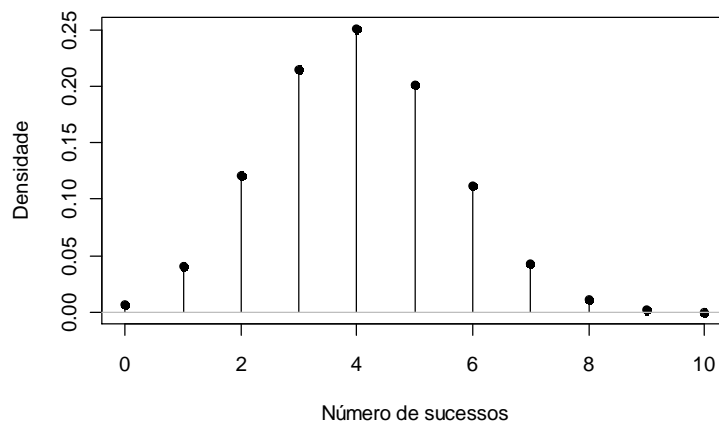


Gráfico 11 – Atividade 8, tarefa 1.1

Fonte: *Software R*

Quadro 27 – Atividade 8, tarefa 1.1

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=10$ e que p é menor do que 0,5, dado que o gráfico mostra um “deslocamento” à esquerda. Outra forma de determinar um valor aproximado para p seria observar que $X=4$ é o elemento de maior probabilidade, logo, $E(X)$ é aproximadamente 4. Neste caso, p é aproximadamente igual a 0,4.

Atividade 8

Tarefa 1:

2) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

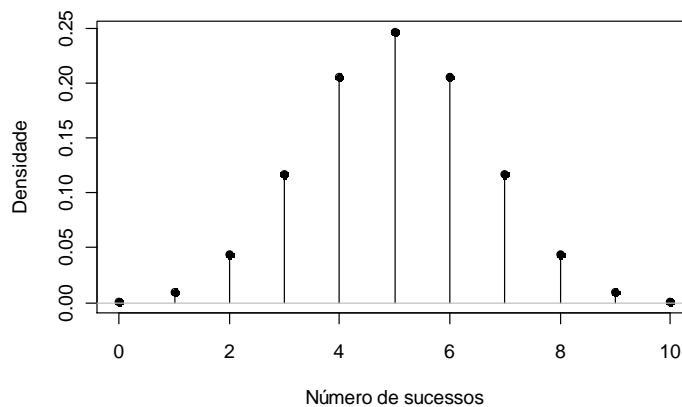


Gráfico 12 – Atividade 8, tarefa 1.2

Fonte: *Software R*

Quadro 28 – Atividade 8, tarefa 1.2

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=10$ e que $p=0,5$ dado que o gráfico apresentava uma simetria com eixo em $X=5$. Logo, com base no fato de que $X=5$ era o valor relacionado à maior probabilidade, o aluno poderia conjecturar que $E(X)$ era aproximadamente 5 e que, neste caso, p era aproximadamente igual a 0,5.

Atividade 8Tarefa 1:

3) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

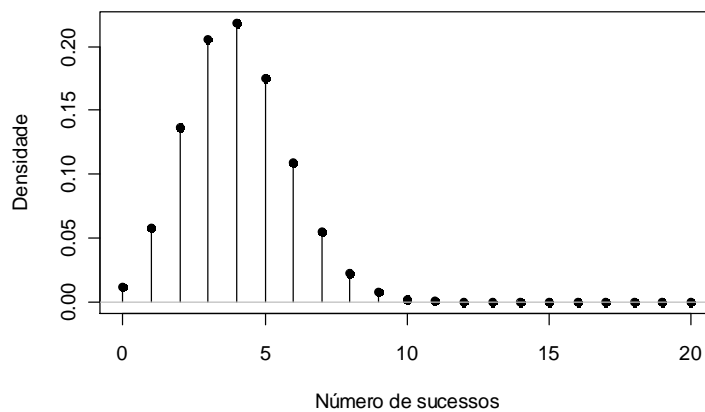


Gráfico 13 – Atividade 8, tarefa 1.3

Fonte: *Software R*

Quadro 29 – Atividade 8, tarefa 1.3

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=20$ e que p era menor do que 0,5, dado que o gráfico mostra um “deslocamento” à esquerda. Outra forma de determinar um valor aproximado para p seria observar que $X=4$ é o elemento de maior probabilidade, logo, $E(X)$ é aproximadamente 4. Neste caso, p é aproximadamente igual a 0,2.

Atividade 8Tarefa 1:

4) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

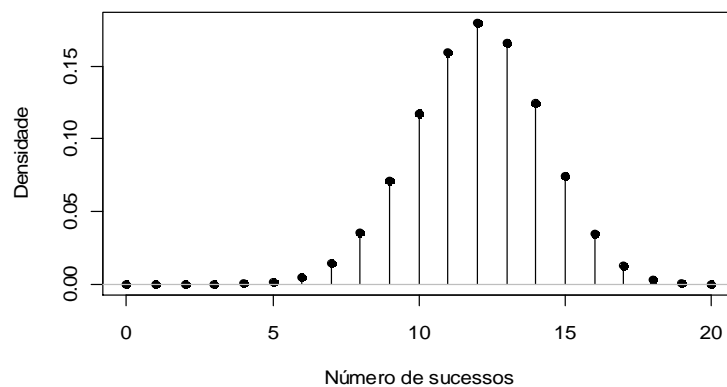


Gráfico 14 – Atividade 8, tarefa 1.4

Fonte: *Software R*

Quadro 30 – Atividade 8, tarefa 1.4

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=20$ e que p era maior do que 0,5, dado que o gráfico mostra um “deslocamento” à direita. Outra forma de determinar um valor aproximado para p seria observar que $X=12$ é o elemento de maior probabilidade, logo, $E(X)$ é aproximadamente 12. Neste caso, p é aproximadamente igual a 0,6.

Atividade 8Tarefa 1:

5) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

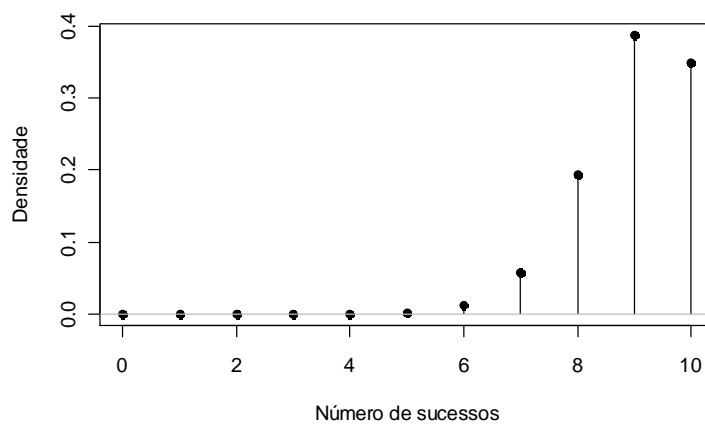


Gráfico 15 – Atividade 8, tarefa 1.5

Fonte: *Software R*

Quadro 31 – Atividade 8, tarefa 1.5

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=10$ e que p era maior do que 0,5, dado que o gráfico mostra um “deslocamento” à direita. Outra forma de determinar um valor aproximado para p seria observar que $X=9$ é o elemento de maior probabilidade, logo, $E(X)$ é aproximadamente 9. Neste caso, p é aproximadamente igual a 0,9.

Atividade 8Tarefa 1:

6) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

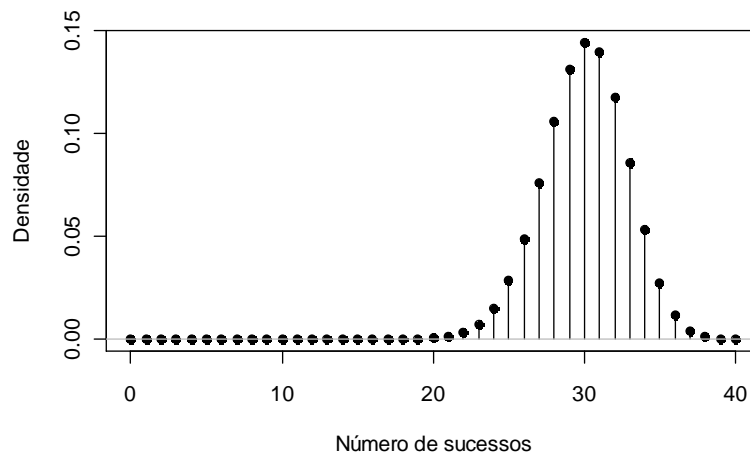


Gráfico 16 – Atividade 8, tarefa 1.6

Fonte: *Software R*

Quadro 32 – Atividade 8, tarefa 1.6

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=40$ e que p era maior do que 0,5, dado que o gráfico mostra um “deslocamento” à direita. Outra forma de determinar um valor aproximado para p seria observar que $X=30$ é o elemento de maior probabilidade, logo, $E(X)$ é aproximadamente 30. Neste caso, p é aproximadamente igual a 0,75.

Na tarefa 2, também seriam apresentados aos sujeitos registros gráficos em papel solicitando então que os mesmos identificassem elementos componentes da distribuição Binomial. Nesta tarefa, avaliando o gráfico, pretendia-se que os

estudantes determinassem o valor de n e apresentassem uma estimativa de p , q (valor da probabilidade complementar) e de $E(X)$ (valor da esperança de probabilidade). Para a realização desta tarefa seria necessário o uso dos registros de representação gráfico dado pela atividade, numérico e da língua natural. Os sujeitos deveriam proceder as conversões entre os registros gráficos e os registros numéricos e da língua natural bem como do registro simbólico para o numérico, no caso do cálculo de q .

Atividade 8

Tarefa 2:

- 1) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .

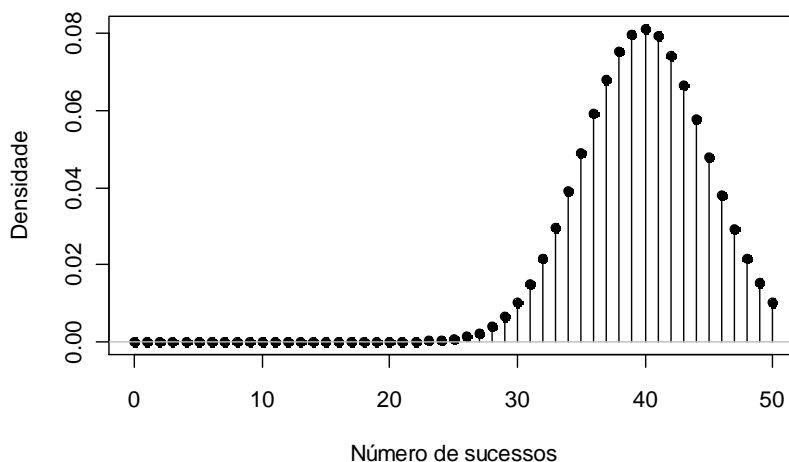


Gráfico 17 – Atividade 8, tarefa 2.1

Fonte: *Software R*

Quadro 33 – Atividade 8, tarefa 2.1

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=50$. Em seguida, avaliando que $X=40$ é o elemento de maior probabilidade, estimassem que $E(X)$ é um resultado próximo de 40. Neste caso, dado que $E(X)=n.p$, era possível estimar

que p seria aproximadamente 0,8 e, como $p=1-q$, q seria aproximadamente 0,2. Por já terem vivenciado neste experimento que $[E(X)]=n.p$, deveriam calcular com tranquilidade o valor de p . Acreditava-se que não deveria ocorrer problemas na obtenção do valor de q uma vez que o mesmo se referia à probabilidade complementar ($1 - p$) como já trabalhado na atividade 5 deste experimento.

Caso os estudantes apresentassem dúvidas, o professor-pesquisador retomaria a atividade 8 do seu início lançando durante o seu transcorrer perguntas que pudessem favorecer a compreensão do que se pedia.

Atividade 8

Tarefa 2:

2) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .

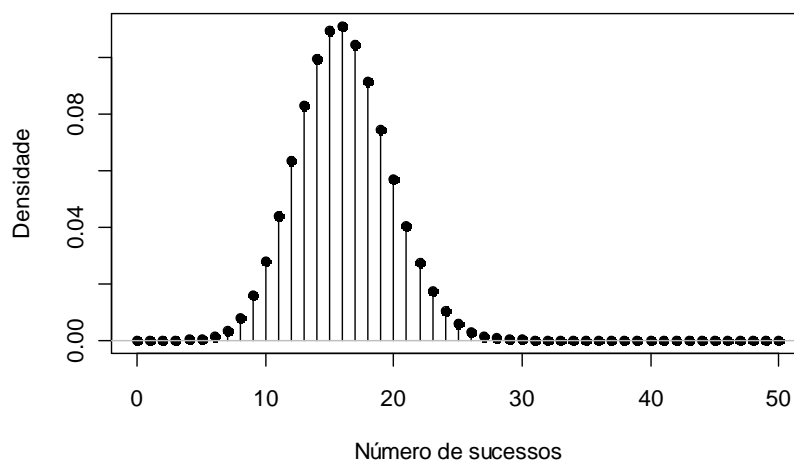


Gráfico 18 – Atividade 8, tarefa 2.2

Fonte: *Software R*

Quadro 34 – Atividade 8, tarefa 2.2

Fonte: Acervo pessoal

Esperava-se que os estudantes determinassem que $n=50$. Em seguida, avaliando que $X=16$ era o elemento de maior probabilidade, estimassem que $E(X)$

era um resultado próximo de 16. Neste caso, dado que $E(X)=n.p$, era possível estimar que p seria aproximadamente 0,32 e, como $p=1-q$, q seria aproximadamente 0,68.

Novamente, acreditava-se que não deveria ocorrer problemas na obtenção do valor de q uma vez que o mesmo se referia à probabilidade complementar ($1 - p$) como já trabalhado na atividade 5 deste experimento.

Caso os estudantes apresentassem dúvidas, o professor-pesquisador retomaria a atividade 8 do seu início lançando durante o seu transcorrer perguntas que pudessem favorecer a compreensão do que se pedia.

Atividade 8

Tarefa 3:

Em qual gráfico da tarefa 2 o valor da probabilidade “p” está “mais próximo” de 0,5? Justifique pelos valores encontrados e pela análise gráfica.

Tarefa 4:

Qual gráfico da tarefa 2 apresenta o maior número de tentativas? Justifique.

Quadro 35 – Atividade 8, tarefas 3 e 4

Fonte: Acervo pessoal

As tarefas 3 e 4 tinham por objetivo que os alunos interpretassem as informações contidas nos gráficos da tarefa 2 fazendo conversões dos registros numérico para a língua natural e gráfico para o registro da língua natural.

Esperava-se que os estudantes estabelecessem a comparação solicitada com base nos resultados numéricos encontrados, mas que também fizessem uma análise gráfica com base no questionamento apresentado. Esperava-se, também, após todas estas tarefas executadas, que os alunos tivessem condições de perceber o deslocamento da curva de acordo com os valores de n e p dados. Neste caso,

bastaria a eles identificarem em qual dos registros gráficos o valor de $[E(X)]$ estava mais próximo de 25 que era o valor esperado no caso de $n=0,5$. Caso os estudantes apresentassem dúvidas, o professor-pesquisador retomaria a atividade 8 do seu início lançando durante o seu transcorrer perguntas que pudessem favorecer a compreensão do que se pede.

Neste ponto do experimento esperava-se que os alunos tivessem condições de perceber as relações existentes entre o número de tentativas, o valor da probabilidade de sucesso e o registro gráfico das representações das situações que envolviam distribuição Binomial.

Apresentamos, no quadro 36, os registros de representação que esperávamos fossem utilizados pelos alunos na realização desta atividade.

Tarefa	Registro de partida	Provável registro de chegada	Tratamento	Conversão
1	<i>Gráfico</i>	<i>Numérico e língua natural</i>		X
2	<i>Simbólico</i>	<i>Numérico</i>		X
2	<i>Gráfico</i>	<i>Numérico e língua natural</i>		X
3	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X
4	<i>Gráfico</i>	<i>Língua natural</i>		X

Quadro 36 - Análise dos registros e conversões da atividade 8

Fonte: Acervo pessoal

A atividade 8 apresentada tal qual o foi aos alunos consta no apêndice 9.

O experimento do qual terminamos agora a apresentação, foi elaborado na expectativa de se obter um instrumento de ensino de um conteúdo específico da Estatística, que pudesse oferecer aos professores e alunos envolvidos no ensino de distribuição Binomial, uma nova possibilidade de trabalho. Partiu da importância de um trabalho de integração de diversos registros para o desenvolvimento desse conteúdo, com vistas a produzir reais mudanças metodológicas a serem implementadas em sala de aula. Nessa linha de pensamento temos a consciência de tratar-se de um *design* com especificação própria e modesta, porém esperamos que após sua aplicação e às revisões que certamente deverão ocorrer no seu corpo possa vir a nortear os trabalhos dos professores que hoje vivenciam as dificuldades detectadas na revisão bibliográfica que compõe esta pesquisa.

5 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DO EXPERIMENTO

5.1 Organização do experimento

Neste capítulo, serão descritas e analisadas as produções de sete estudantes voluntários e participantes do experimento, os quais cursavam, no momento da aplicação do experimento, o quarto ou o quinto semestres do curso de Engenharia Ambiental de uma Instituição Particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo. Estes estudantes foram alunos do professor-pesquisador quando cursaram a disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística” no segundo semestre do citado curso.

Na primeira fase, os sujeitos foram submetidos à nossa atividade preliminar de forma individual. Já na segunda, eles foram organizados em duas duplas e um trio.

Foram coletados, analisados e comparados três tipos de dados: os registros escritos nas fichas que continham as atividades propostas, as gravações das falas dos alunos quando da participação da fase relativa ao ambiente tecnológico, as quais permitiram observar os diálogos estabelecidos entre os estudantes de cada dupla ou trio e entre o professor-pesquisador e os alunos e as gravações das telas dos computadores onde os alunos trabalharam com o *Software-R*, sendo aí utilizado um *software* de captura de telas⁵.

Serão duas fases apresentadas na descrição desta análise. Na primeira delas (Fase I) do experimento, realizada individualmente, não houve qualquer interferência do professor-pesquisador, considerando que o objetivo era avaliar os conhecimentos prévios de cada um deles, uma vez que já tiveram contato com o conteúdo. Na segunda fase (Fase II), quando os alunos foram organizados em duas duplas e um trio, em coerência com a metodologia adotada, o papel do professor-pesquisador tornou-se mais ativo. Cabe aqui ressaltar que nessa fase houve a necessidade de intervenções do professor-pesquisador em vários momentos. Por

⁵ Free Screen Recorder; versão 2.9 – NBXSOFT

exemplo, na atividade 5 da Fase II, foram necessárias orientações do professor-pesquisador no sentido de fornecer subsídios para a continuidade dos trabalhos, com a intenção de relembrar conceitos básicos de cálculo combinatório. Isto ocorreu porque os sujeitos, apesar de obterem êxito no registro das expressões matemáticas para o cálculo das probabilidades envolvidas na atividade, não conseguiram generalizá-las obtendo assim uma fórmula de cálculo de probabilidades da distribuição Binomial. Neste momento, em consonância com o disposto na metodologia dos *Design Experiments*, foram utilizados novos questionamentos e trabalhados os conceitos de permutação simples, arranjo simples, combinação simples e número binomial.

5.1.1 Análise da primeira fase do experimento

A aplicação da atividade preliminar foi realizada de forma individual, com sete estudantes provenientes de turmas distintas. Como característica comum, eles possuíam o fato de já terem estudado o conteúdo distribuição Binomial na disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística” cursada no segundo semestre de seus cursos de graduação. A abordagem de ensino adotada naquela ocasião não teve a preocupação de explorar a coordenação de registros e a integração de recursos computacionais. Nesse texto, os alunos serão identificados como alunos *D, E, I, V, O, J e M*.

Com o objetivo de facilitar a leitura, serão reproduzidos, a seguir, os enunciados das tarefas da Atividade Preliminar, seguidos da descrição e análise das produções dos estudantes.

<p>Tarefa 1.</p> <p>Você já estudou o tópico de distribuição Binomial?</p> <p>() Sim () Não</p> <p>Caso sim, escreva sobre essa distribuição e dê um exemplo de sua aplicação.</p>
--

Quadro 37 – Atividade preliminar – Tarefa 1 – Fase I

Fonte: Acervo pessoal

O objetivo da primeira tarefa desta atividade preliminar era o de investigar o que foi assimilado do estudo do conteúdo de distribuição Binomial na ocasião em que o tiveram como parte da disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística”.

Pelas respostas obtidas percebemos que, embora tenham estudado o conteúdo de distribuição Binomial, nenhum deles apresentou uma concepção sólida desse conceito. Três sujeitos (*D*, *I* e *J*) afirmaram não recordar o conceito de distribuição Binomial. Os sujeitos *E*, *V* e *M* não definiram as características da distribuição, porém, procuraram apresentar, no registro da língua natural escrita, situações nas quais são aplicados cálculos de probabilidades, conforme se pode observar no quadro 38.

Alunos	<i>E</i>	<i>V</i>	<i>M</i>
Respostas	<p>Sim.</p> <p>É aquela distribuição aleatória, onde verificamos todas as possibilidades de um dado experimento. Ex.: Jogo de dados (2 vezes).</p> <p><i>Neste ponto o aluno fez um esboço de uma árvore de possibilidades.</i></p> <p>Desta forma, podemos demonstrar conforme modelo acima (<i>árvore</i>), ou calcular matematicamente.</p>	<p>Sim.</p> <p>É o sistema de contagem aleatório.</p> <p>Ex.: em uma contagem a pessoa vai retirar a bolinha aleatoriamente.</p>	<p>Sim.</p> <p>Fazer uma eleição distribuindo por classe, gênero por comunidades, outras possibilidades mostrar estatisticamente as possibilidades do que vai dar como, por exemplo, na loteria, eleição, quantidade de alunos reprovados etc.</p>

Quadro 38 – Atividade preliminar – Tarefa 1 – Fase I – Respostas

Fonte: Acervo pessoal

Já o aluno *O*, além de não definir as características da distribuição Binomial, utilizou como exemplo a linguagem computacional, afastando-se, portanto, da Probabilidade e da Estatística. No quadro 39 é reproduzida a sua resposta.

Aluno	O
Resposta	<p>Sim.</p> <p>Aplicação em várias áreas, como por exemplo, programação de computador onde se utiliza 0 e 1.</p> <p>Com estes dois algarismos é possível fazer qualquer programa.</p>

Quadro 39 – Atividade preliminar – Tarefa 1 – Fase I – Respostas

Fonte: Acervo pessoal

A noção de árvore de possibilidades apareceu somente na produção do aluno E que dela fez um esboço, como se pode verificar na figura 24.

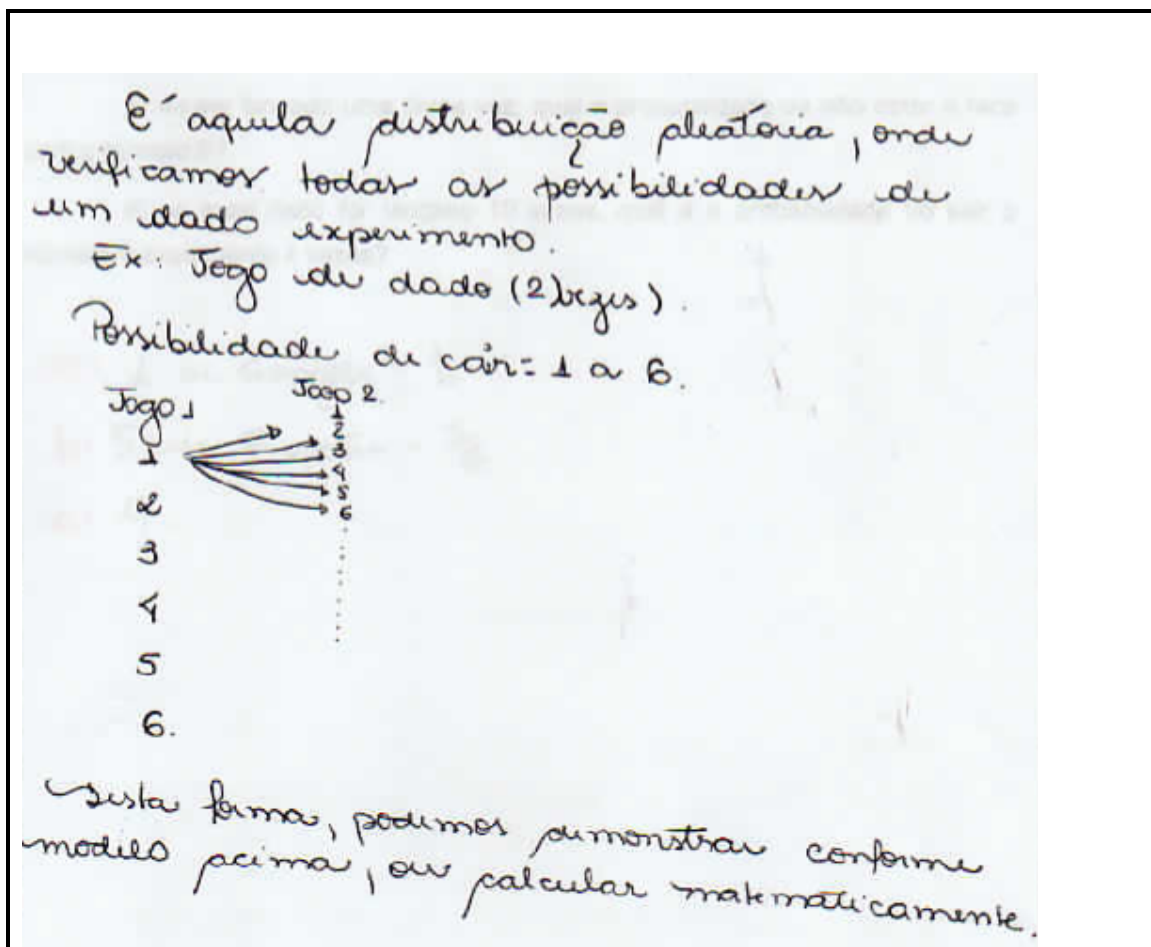


Figura 24 – Resposta do aluno E – Tarefa 1 da atividade preliminar

Fonte: Experimento de ensino

Excetuando-se o aluno *E* que fez uso do registro de árvore de possibilidades além do registro da língua natural, todos os demais estudantes utilizaram apenas o registro da língua natural. O registro simbólico citado em nossa análise preliminar como possível de ser usado não apareceu nessas produções.

Tarefa 2.

Resolva a questão:

Considere um dado “honesto” com faces numeradas de 1 a 6.

- a) ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de obter a face com o número 6?
- b) ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de não obter a face com o número 6?
- c) se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

Quadro 40 – Atividade preliminar – Tarefa 2 – Fase I

Fonte: Acervo pessoal

O objetivo da segunda tarefa desta atividade preliminar era o de avaliar os conhecimentos dos alunos acerca dos conceitos de probabilidade e de probabilidade complementar, sendo o último item referente ao cálculo de probabilidade numa situação que envolvia a distribuição Binomial.

Quatro alunos, *D*, *E*, *O* e *M* responderam corretamente os itens “a” e “b”, demonstrando conhecimentos de probabilidade e de probabilidade complementar. Ressalte-se que os alunos *E* e *M*, além de apresentarem as respostas numéricas na forma de frações, procuraram também descrevê-las na língua natural escrita, como se pode ver na figura seguinte.

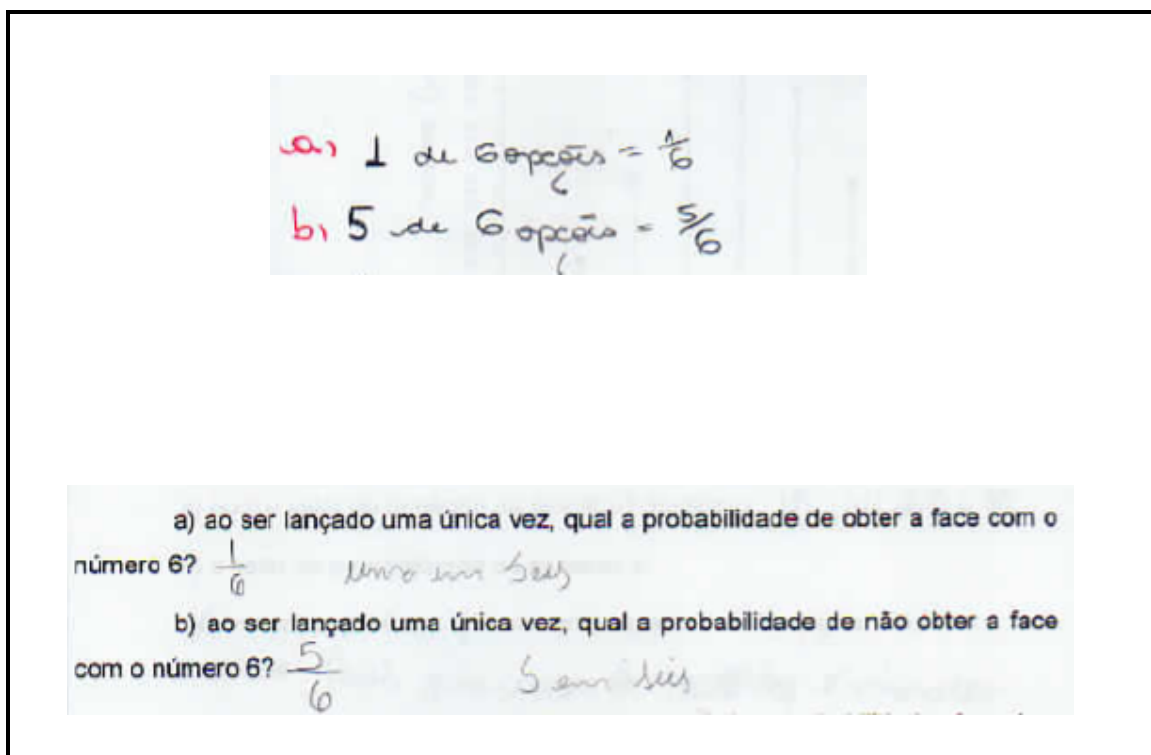


Figura 25 – Respostas dos alunos *E* e *M* respectivamente – Tarefa 2 da atividade preliminar
 Fonte: Experimento de ensino

Na resposta do aluno *I*, percebe-se um desconhecimento dos conceitos abordados, revelando uma confusão entre probabilidade do evento e número de casos favoráveis ao evento. No caso da resposta do item “b”, nota-se um erro de conceito, uma vez que foi dado como resposta o número 5, desconsiderando o fato de que o resultado de uma probabilidade deveria pertencer ao intervalo $[0,1]$.

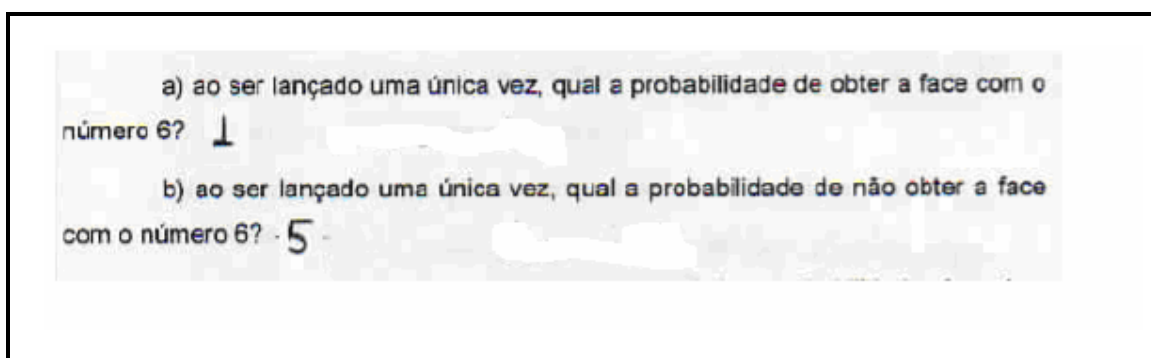


Figura 26 – Resposta do aluno *I* – Tarefa 2 da atividade preliminar
 Fonte: Experimento de ensino

Já os alunos *V* e *J* deram suas respostas na forma de porcentagem, porém de modo incorreto como consta da figura 27.

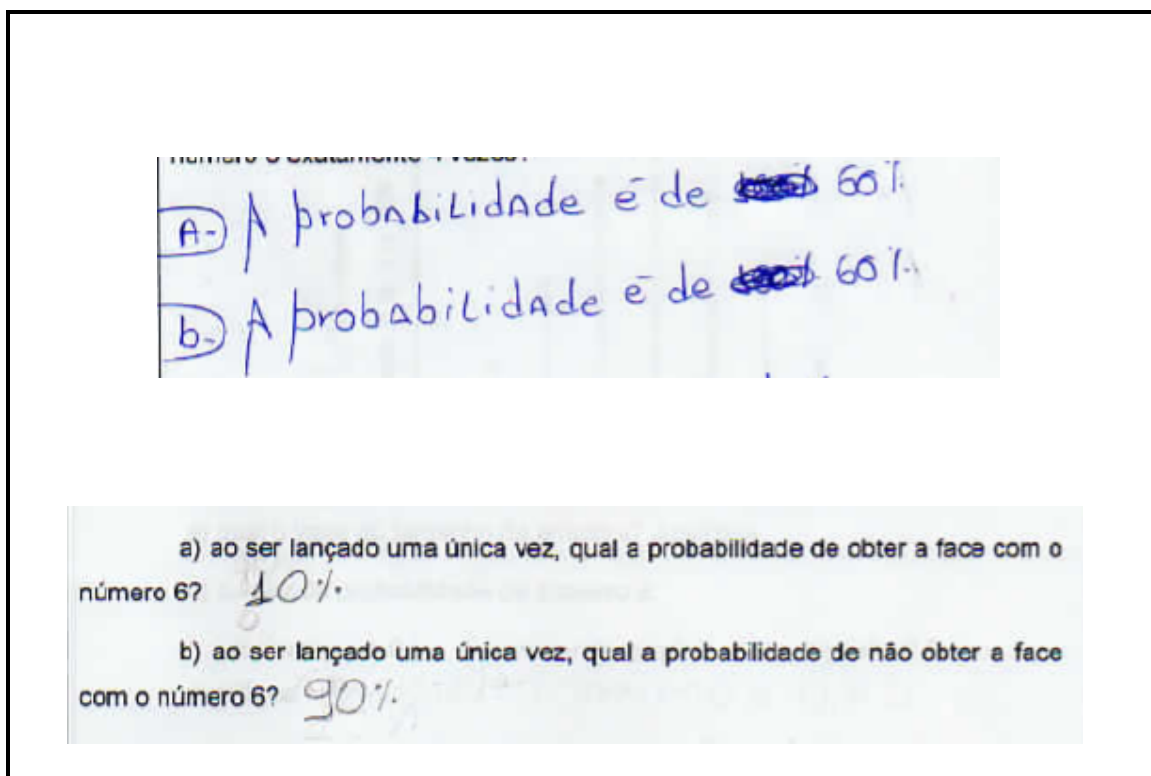


Figura 27 – Respostas dos alunos *V* e *J* respectivamente – Tarefa 2 da atividade preliminar

Fonte: Experimento de ensino

Tendo em vista que essa primeira etapa foi diagnóstica, sem qualquer interferência do professor-pesquisador, os registros escritos dos sujeitos não foram suficientes para inferir sobre os motivos que os levaram a dar estas respostas.

Nenhum dos alunos respondeu corretamente a questão do item “c” desta atividade preliminar, referente a uma aplicação da distribuição Binomial. Houve, no entanto, uma coincidência de respostas dos alunos *D*, *I*, *V*, *O* e *J* que registraram 4 em 10 ou 40%. É provável que essa resposta incorreta tenha sido dada com base na relação entre a quantidade de sucessos e o número de repetições do experimento. O aluno *E* respondeu “4” e o aluno *M* deu como resposta “ $\frac{6}{4}$ ”. Como resultado da aplicação deste item da tarefa 2 da atividade preliminar podemos afirmar que os

sujeitos de pesquisa não estabeleceram a relação entre a distribuição Binomial e a tarefa proposta. Cabe ressaltar que esse é um tipo de tarefa usual no trabalho com essa distribuição.

Partindo dessa análise diagnóstica, consideramos que os sujeitos não têm o domínio dessa distribuição, sendo essa constatação primordial para a elaboração da Fase 2 do experimento. Não houve o uso do registro simbólico na resolução desta tarefa como era de nossa expectativa, uma vez que, por já terem cursado a disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística”, poderiam ter utilizado a simbologia apropriada para representar, por exemplo, o cálculo da probabilidade complementar investigado no item b desta tarefa. Os alunos utilizaram apenas o registro numérico.

Analisando as produções dos alunos, identificamos que poucos diversificaram as representações, o que provavelmente ocorreu pelo fato de o ensino normalmente privilegiar o trabalho com determinados registros em detrimento de outros, conforme apontado por Duval (2003). Dificuldades em lidar com certas representações foram também percebidas e narradas por outros pesquisadores. Por exemplo, Souza (2002) concluiu em seu trabalho que deficiências em pré-requisitos, por ela chamadas de falhas anteriores, tal como ausência de linguagem simbólica, interferiram no trabalho de sua pesquisa, uma vez que foi percebida muita dificuldade na resolução das atividades propostas, fazendo com que aspectos da distribuição Binomial passassem despercebidos, ao menos naquele momento de aplicação. Figueiredo (2000) resalta em seu trabalho que a maioria dos alunos apresentou resultados satisfatórios diante das questões que se apresentaram em linguagem natural. Quando, no entanto, questões análogas foram apresentadas na linguagem simbólica, as dificuldades surgidas foram bem mais acentuadas.

A proposta da terceira tarefa desta atividade preliminar era a de investigar em que medida os alunos alcançariam êxito na interpretação de uma distribuição Binomial dada a partir de seu registro gráfico, que envolvia uma probabilidade de sucesso de 0,4 (ou 40%) e 10 tentativas do experimento. A tarefa requeria uma conversão do registro gráfico para o numérico.

Tarefa 3.

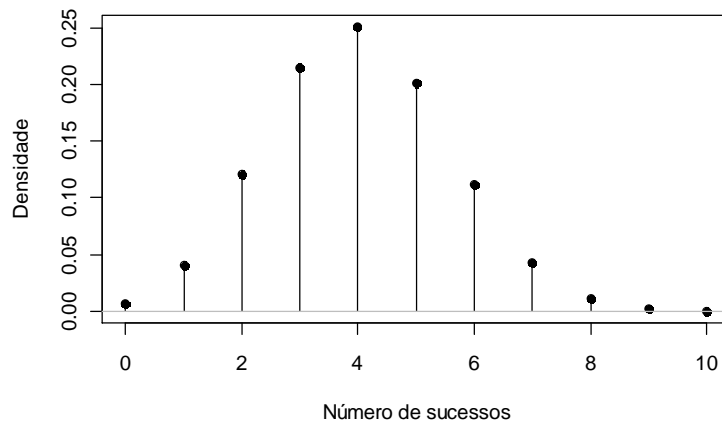
O gráfico seguinte representa uma distribuição Binomial, analise-o e responda as questões.

a) qual o valor do tamanho de amostra? Justifique.

b) o valor da probabilidade de sucesso é:

() maior do que 0,5 () menor do que 0,5 () igual a 0,5

Justifique.



Quadro 41 – Atividade preliminar – Tarefa 3 – Fase I

Fonte: Acervo pessoal

Para a questão do item “a”, três alunos, *E*, *J* e *M*, deram respostas corretas, porém, apenas o aluno *E* procurou dar uma explicação baseada no gráfico apresentado. O aluno *J* respondeu apenas “10. Pois foi o número de amostras recolhidas”, enquanto que o aluno *M* foi ainda mais sucinto respondendo “10. Vai de 0 a 10”. Na figura 28 é apresentada a resposta do aluno *E*.

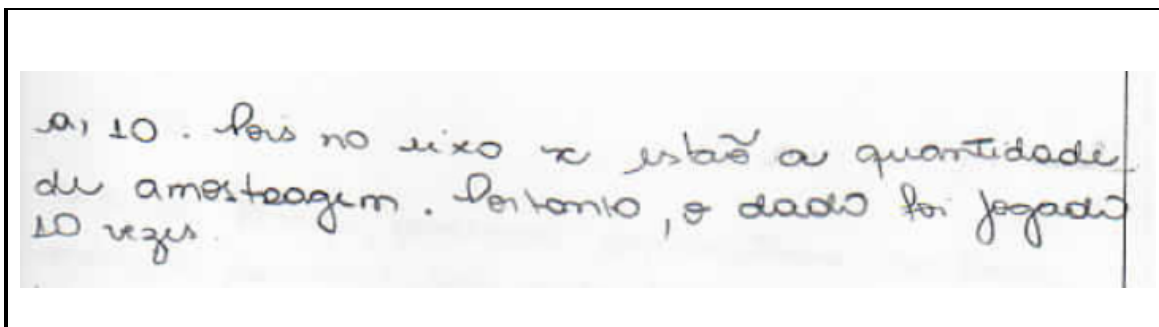


Figura 28 – Resposta do aluno *E* – Tarefa 3, item “a” da atividade preliminar

Fonte: Experimento de ensino

Nota-se na produção do aluno *E*, a relação da situação proposta no registro gráfico com problemas de lançamento de dados, provavelmente por esse tipo de aplicação ser frequentemente trabalhado na introdução de cálculo de probabilidades.

Os alunos *D*, *I*, *V* e *O* deram como resposta 0,25 que foi a leitura do valor máximo verificado no eixo vertical do gráfico. O aluno *O* chegou até a citar 0,25 como “o maior valor atingido”. Estas respostas são reproduzidas na figura 29.

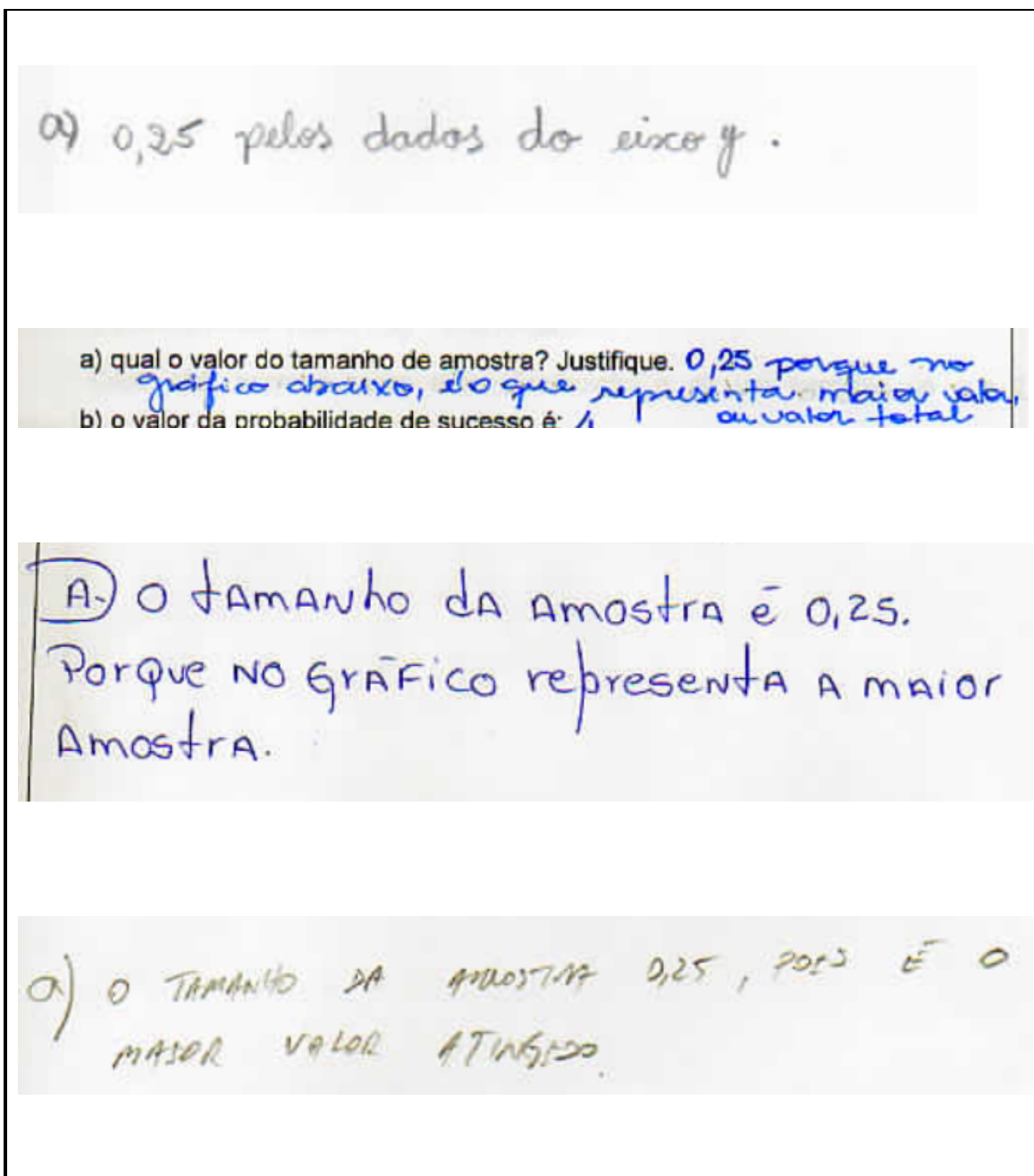


Figura 29 – Respostas dos alunos D, I, V e O respectivamente – Tarefa 3, item “a” da atividade preliminar

Fonte: Experimento de ensino

Conclui-se, então, que a maioria dos estudantes apresentou dificuldades em analisar o tamanho da amostra partindo da leitura gráfica.

Nenhum dos sujeitos respondeu corretamente à questão formulada no item “b” desta tarefa 3. Apesar de os alunos E, I, V e J terem afirmado ser o valor da

probabilidade de sucesso menor do que 0,5, o que estaria correto, pelas suas justificativas ou ausência delas, notou-se claramente que não possuíam elementos para produzir uma explicação satisfatória de suas respostas partindo da análise gráfica.

Os alunos *V* e *O* nem chegaram a justificar suas respostas. Já os alunos *D* e *M* responderam ser a probabilidade de sucesso maior do que 0,5, porém por suas justificativas escritas não foi possível analisar os motivos dos erros. O aluno *E*, que até então vinha se destacando com respostas um pouco mais elaboradas do ponto de vista de diversificação de registros e de conhecimento matemático, desta vez também apresentou dificuldades, adotando os valores apresentados no eixo vertical para compor sua resposta.

Reproduzimos a seguir (Figura 30) a resposta dada pelo aluno *E*.

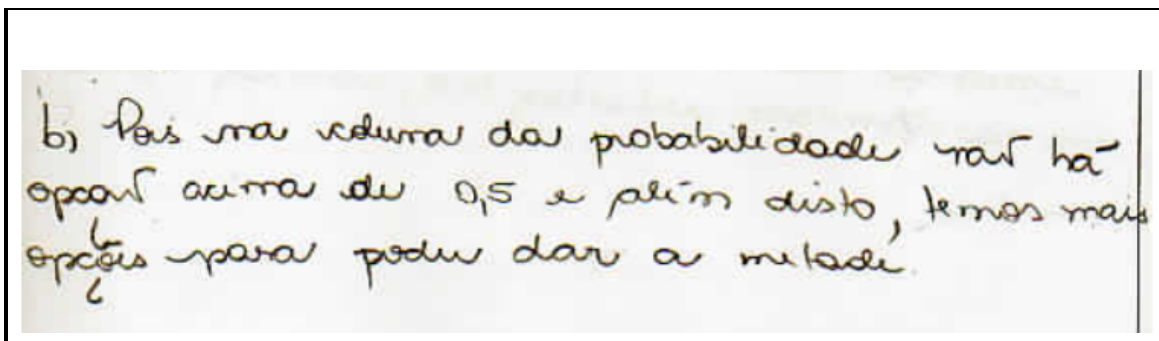


Figura 30 – Resposta do aluno *E* – Tarefa 3, item “b” da atividade preliminar

Fonte: Experimento de ensino

Dessa forma, avaliando as produções dos estudantes nos dois itens dessa tarefa, concluímos que há dificuldades na interpretação de uma distribuição Binomial dada a partir de seu registro gráfico.

Provavelmente os equívocos cometidos nas interpretações do registro gráfico tenham ocorrido devido ao fato desse tipo de registro não ter sido explorado no momento em que estes alunos estudaram o conteúdo há três semestres. Nessa ocasião, quando do trabalho com distribuição Binomial, foi dada ênfase apenas aos registros numérico, simbólico e da língua natural, uma vez que são estes os privilegiados no livro didático adotado.

5.1.2 Análise da segunda fase do experimento

Passaremos agora a analisar as atividades da Fase 2 do experimento de ensino, aplicadas aos alunos organizados em duas duplas e um trio, os quais passarão, a partir desse momento, a ser chamados de *grupos* sempre que fizermos referência a mais de um deles. Esses grupos serão identificados por *D.E.*, *I.V.O.* e *J.M.*

Como na análise da fase anterior, serão reproduzidos os enunciados das tarefas de cada atividade, seguidos da descrição e análise das produções dos estudantes.

A primeira atividade do experimento, apresentada no quadro seguinte, teve por objetivo que os alunos fizessem conjecturas sobre a situação apresentada, fazendo uso dos registros da língua natural, numérico e/ou simbólico. Por meio de suas produções, pretendíamos investigar seus conhecimentos sobre chance.

<p><u>Atividade 1</u></p> <p>Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.</p> <hr/>
<p><u>Tarefas:</u></p> <p>a) Para o experimento em questão, quais são os possíveis resultados ao retirar uma bolinha? (represente verde por “v” e amarela por “a”)</p> <p>b) Qual é a chance de sair verde? Por quê?</p> <p>Qual é a chance de sair amarela? Por quê?</p> <p>c) Imagine que você retire 5 bolinhas com reposição a cada retirada. Como você anotaria seu resultado imaginário?</p> <p>Por quê?</p>

Quadro 42 – Atividade 1 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Na tarefa “a”, obtivemos como resposta da dupla *D.E.* “É possível sair bolinha v e a”. Esta resposta evidencia uma falta de cuidado na escrita, uma vez que a questão propõe a retirada de apenas uma bolinha e, sendo assim, o correto seria o uso de “ou” no lugar de “e”, assim como fizeram os alunos dos grupos *I.V.O.* e *J.M.*. Nota-se também que a dupla *J.M.* não fez uso do registro simbólico, pois respondeu com o registro da língua natural, não realizando assim a conversão esperada entre estes dois registros. Os demais grupos realizaram esta conversão.

Ao responder a tarefa “b”, a dupla *D.E.* não determinou uma relação entre o número de bolinhas verdes e o total de bolinhas, nem entre o número de bolinhas amarelas e o total de bolinhas existente na urna utilizando a relação “*resultado favorável : total de possibilidades*” como esperávamos ao propormos esta tarefa. Relacionou apenas como de maior ou menor quantidade utilizando somente o registro da língua natural como pode ser observado na figura 31.

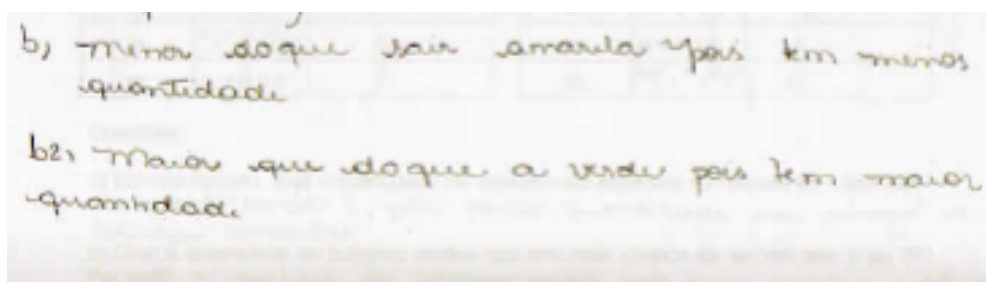


Figura 31 – Resposta da dupla *D.E.* – Tarefa “b” da atividade 1 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

O trio *I.V.O.* fez a relação esperada, usando o registro numérico para responder a tarefa, demonstrando assim conhecimento de cálculo de probabilidade.

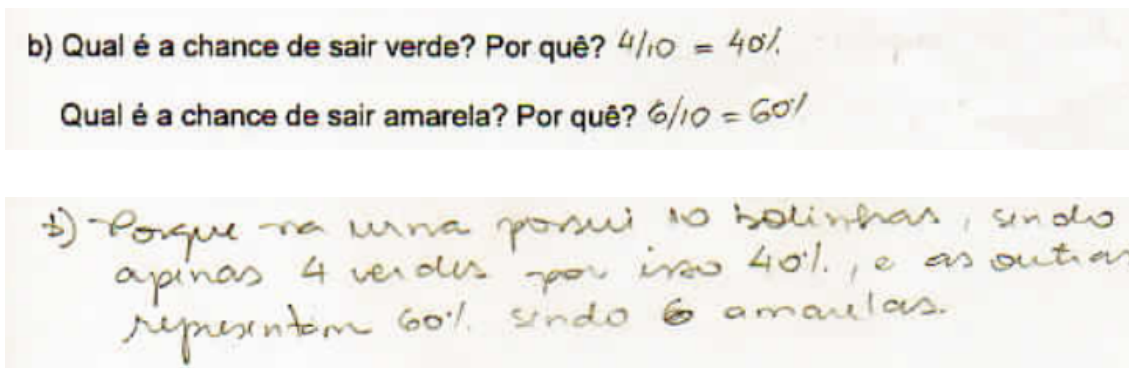


Figura 32 – Resposta do trio I.V.O. – Tarefa “b” da atividade 1 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Já a dupla J.M. embora tenha feito o uso do registro numérico para dar sua resposta e tê-la dado nas formas de porcentagem e de fração, como esperávamos na nossa análise prévia da atividade, não conseguiu justificá-la pela relação “*resultado favorável : total de possibilidades*”. Também não ficou claro o porquê da referência à fração $\frac{1}{10}$ feita pela dupla.

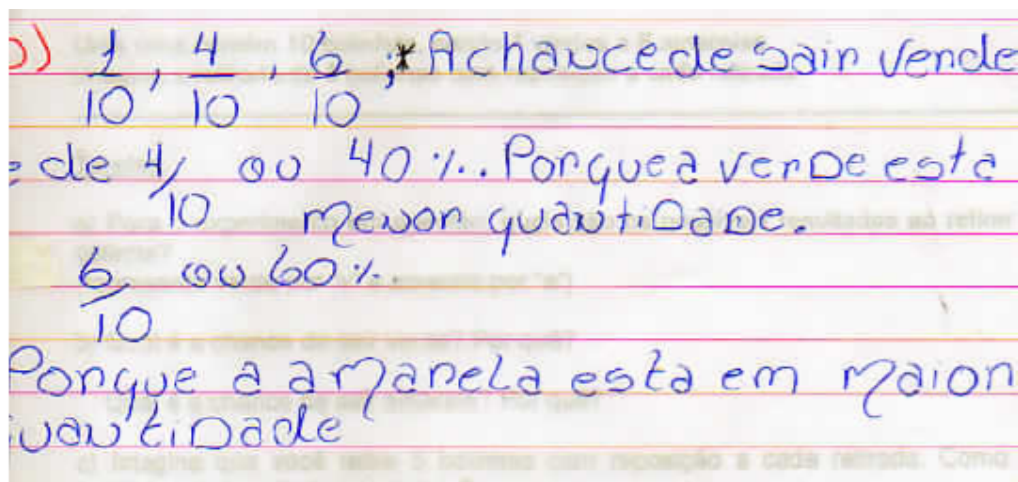


Figura 33 – Resposta da dupla J.M. – Tarefa “b” da atividade 1 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Na elaboração da tarefa “c” tivemos como preocupação que os alunos começassem a imaginar a ocorrência do experimento e fizessem uso dos registros da língua natural e simbólico. Queríamos investigar se os sujeitos fariam relação entre esta tarefa e a tarefa “b”, bem como se realizariam tratamentos no interior do registro simbólico.

A dupla *D.E.* não utilizou o registro simbólico na sua resposta. Usou o registro da língua natural para responder 3 amarelas e 2 verdes. Sua justificativa foi mais elaborada do que as justificativas dos outros grupos, citando a aleatoriedade do experimento, porém associando o termo “sorte” à garantia de que deveria sair menos bolas verdes por existirem em menor quantidade. Percebe-se aí uma incoerência no raciocínio probabilístico.

O trio *I.V.O.*, por sua vez, além do registro da língua natural, fez uso do registro simbólico sem, no entanto, realizar o tratamento em seu interior como esperávamos. Deu como resposta “aavav” demonstrando ter relacionado as tarefas “b” e “c”, justificando pelo fato das bolinhas amarelas representarem 60% do total de bolinhas na urna. Não citou, no entanto a possibilidade de saírem mais bolinhas verdes do que amarelas ou outras situações possíveis.

Na resposta dada pela dupla *J.M.* não se verifica o uso do registro simbólico. Os alunos desta dupla utilizaram apenas o registro numérico e o registro da língua natural, mas chegaram à resposta esperada de 3 amarelas e 2 verdes. Na justificativa, porém, afirmaram que as bolinhas amarelas saíam em maior quantidade devido ao fato de haver reposição após cada retirada. Assim como a dupla *D.E.*, não levaram em consideração outras possibilidades de resultados tais como “vvvvv”, “vvvva”, dentre outros, e os possíveis tratamentos que poderiam ser realizados no interior de cada um destes registros.

Identificamos, após essa análise, que todos os grupos fixaram o resultado com base na “proporcionalidade” – Se em 10 bolas existem 6 amarelas e 4 verdes, em 5 bolas haverá 3 amarelas e 2 verdes, não observando a possibilidade de outros resultados. Tal fato justifica a proposta das próximas atividades, que visam tanto a construção experimental dessa situação como a sua análise teórica.

Analisando as produções referentes à atividade 1 dos sujeitos envolvidos em nossa pesquisa, percebemos que há lacunas em conhecimentos de probabilidade, faltando, por vezes, pré-requisitos que lhes permitam a formulação de

justificativas mais apropriadas com o estudo em questão. Esperamos que o trabalho experimental, a diversificação de registros e o apoio da ferramenta software-R propostos nesse estudo possam minimizar essas dificuldades de análise e justificação.

Com o objetivo de proporcionar aos alunos uma vivência prática da situação apenas imaginada na atividade 1, a atividade 2 apresentada no quadro 43, envolve a organização dos dados obtidos experimentalmente, estabelecendo uma conversão do registro simbólico para o registro numérico.

Atividade 2

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Retirar 5 bolinhas com reposição a cada retirada, por 30 vezes, anotando os resultados obtidos.

Quadro 12 - Resultados da experimentação

Repetição	Sequência	nº de bolas verdes	Repetição	Sequência	nº de bolas verdes
1.			16.		
2.			17.		
3.			18.		
4.			19.		
5.			20.		
6.			21.		
7.			22.		
8.			23.		
9.			24.		
10.			25.		
11.			26.		
12.			27.		
13.			28.		
14.			29.		
15.			30.		

Quadro 43 – Atividade 2 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Os três grupos realizaram o experimento da atividade 2. Houve a necessidade de intervenção do professor-pesquisador no sentido de garantir a aleatoriedade do experimento. Isto porque, a dupla *J.M.* num primeiro momento tentou “escolher” a cor da bolinha a ser retirada, ao que o professor-pesquisador interrompeu o processo. Após argumentar sobre a necessidade de se retirar as bolinhas aleatoriamente, fez com que a dupla reiniciasse o experimento. O trio *I.V.O.* reclamou que as bolinhas “grudavam nos cantos” do saquinho que foi utilizado como urna. Os alunos foram orientados a soltarem as bolinhas manuseando o saquinho por fora, evitando assim qualquer possibilidade de influência na cor da bolinha retirada em cada etapa do experimento.

No preenchimento da tabela foram utilizados os registros simbólico e numérico, havendo aí a conversão esperada.

Como exemplo de resolução, reproduzimos o quadro preenchido pela dupla *D.E.* (Figura 34).

Quadro 12: Resultados da experimentação.

Repetição	Sequência	nº de bolas verdes	Repetição	Sequência	nº de bolas verdes
1.	VVAAV	3	16.	A ₁ A ₂ A ₃ A ₄ A ₅	0
2.	V ₁ A ₁ V ₁ A ₁ V	3	17.	AAAAA	0
3.	VAVAA	2	18.	V ₁ V ₁ V ₁ V ₁ A	4
4.	V ₁ A ₁ V ₁ A ₁ V	3	19.	VVAVV	4
5.	AAVAA	1	20.	A ₁ V ₁ A ₁ V ₁ A	2
6.	V ₁ A ₁ A ₁ A ₁ A	1	21.	VAVAA	2
7.	AAAAA	0	22.	A ₁ A ₁ A ₁ A ₁ A	0
8.	V ₁ A ₁ V ₁ V ₁ V	4	23.	VVVAA	3
9.	AAVVV	3	24.	V ₁ A ₁ V ₁ A ₁ A	2
10.	V ₁ V ₁ A ₁ A ₁ V	3	25.	AVAAV	2
11.	AAVAA	1	26.	V ₁ A ₁ A ₁ A ₁ A	1
12.	A ₁ V ₁ V ₁ A ₁ V	3	27.	AAAVV	2
13.	AAVAV	2	28.	V ₁ A ₁ A ₁ V ₁ A	2
14.	A ₁ V ₁ A ₁ V ₁ V	3	29.	AAAVA	1
15.	AVAAA	1	30.	A ₁ V ₁ V ₁ V ₁ V	4

Figura 34 – Resposta da dupla *D.E.* – Atividade 2 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Fato relevante ocorrido neste ponto da aplicação das atividades foi a fala do aluno *E*, que após observar o quadro 1 preenchido disse: “*Acho que erramos na atividade 1. Não dá para saber qual cor vai sair mais*”. Em nosso entendimento, esta observação revela que o aluno conseguiu observar outras possibilidades de resultados para o experimento sugerido na atividade 1. Fica assim evidenciada uma evolução, uma vez que a sua dupla *D.E.*, no item “c” da atividade 1, não aceitava a possibilidade de obter um resultado com mais bolas verdes do que amarelas, por existirem menos bolas desta cor na urna. Podemos então dizer que o trabalho experimental permitiu superar a ideia inicial apresentada pelos alunos na primeira atividade do experimento de que o único resultado possível seria 3A e 2V.

Ao ouvirem a observação do aluno *E*, os demais alunos manifestaram concordância, alguns assentindo com a cabeça, outros utilizando frases curtas como “é mesmo”, “é verdade”.

No quadro 44 apresentamos as tarefas da atividade 2.

Tarefas:

- a) Em sua opinião, qual a quantidade de verdes mais esperada na retirada de 5 bolinhas com reposição? Por quê?
- b) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem mais chance de ser retirada: 0 ou 3? Por quê?
- c) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem menos chance de ser retirada? Por quê?
- d) Existe a chance de saírem 5 bolinhas verdes? Por quê?
- e) Sistematizem os resultados na Tabela 3, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência _TDF.

Tabela 3. Distribuição do número de bolinhas verdes retiradas

nº de bolas verdes	nº de vezes retiradas (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$

- f) Observando a TDF, qual é a frequência relativa de:

- não obter bola verde? _____
- obter 1 bola verde? _____
- obter 4 bolas verdes? _____

Em quanto por cento das retiradas aconteceram 2 bolas verdes?

- g) Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 3 com os dos seus colegas.

Esses são iguais? () sim () não

Por quê?

Quadro 44 – Tarefas da atividade 2 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Nas tarefas “a”, “b”, “c” e “d”, esperava-se que os alunos fizessem conjecturas sobre o número de bolinhas verdes obtidas na retirada de 5 bolinhas com reposição. Pretendia-se investigar em que medida os resultados do experimento prático registrados no Quadro 1 influenciariam as respostas dadas a estas tarefas. Era esperado o uso dos registros numérico e da língua natural.

Na tarefa “a” os grupos *D.E.* e *I.V.O.* responderam 2 bolinhas verdes utilizando os registros numérico e da língua natural. As justificativas, porém foram diferentes. Enquanto a dupla *D.E.* citou apenas a pouca quantidade de bolinhas verdes em relação às amarelas, o trio *I.V.O.* considerou o fato de o total de bolinhas retiradas corresponder à metade do número de bolinhas existentes na urna, e, portanto, para o cálculo da chance de sair bolinha de uma ou de outra cor devia-se dividir o número de resultados favoráveis por dois mantendo-se, assim, a proporção de 40% de bolinhas verdes. A dupla *J.M.* respondeu na forma de fração e porcentagem, também utilizando os registros numérico e da língua natural, não especificando o número de bolinhas verdes esperado. Como justificativa alegou apenas ser o número de bolinhas verdes menor do que o número de bolinhas amarelas.

Como resposta da tarefa “b”, os três grupos deram o número 3. A dupla *D.E.* foi influenciada pelos resultados obtidos no experimento prático justificando sua resposta como comprovada no experimento. Afirmou também ser difícil “*zerar a quantidade de alguma bolinha*”. O trio *I.V.O.* citou novamente o fato de existirem menos bolinhas verdes do que amarelas, na proporção de 2 para 3 para justificar ser pequena a chance de saírem todas amarelas. A dupla *J.M.* também considerou o resultado do experimento prático alegando não terem saído só amarelas em nenhum momento. Em todas as respostas foram utilizados os registros da língua natural e o numérico.

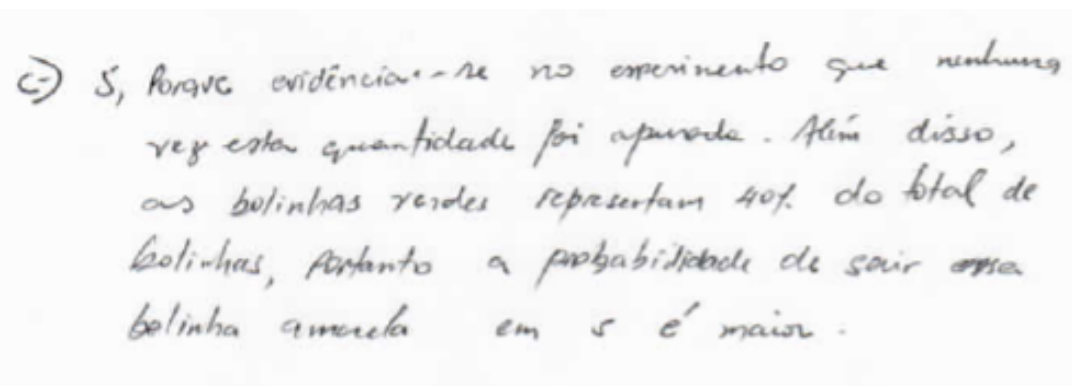
Ao observarmos as respostas dadas à pergunta da tarefa “c”, percebemos que, agora, foi o trio *I.V.O.* que se referiu ao experimento realizado para justificar sua resposta. Usou novamente a proporção entre o número de bolinhas verdes e o número de bolinhas amarelas para concluir sobre a dificuldade de saírem 5 bolinhas verdes.

A dupla *J.M.* respondeu não haver nenhuma quantidade de bolinhas verdes com menos chance de ser retirada considerando que “*a probabilidade de saírem 5*

amarelas é pequena” demonstrando aí não ter compreendido a pergunta formulada nem percebido que, embora a probabilidade de saírem 5 bolinhas amarelas realmente não seja muito grande, ela existe,

A dupla *D.E.* limitou-se a responder “5” por haver as “*bolinhas amarelas a serem observadas*”.

Reproduzimos na figura 35 a resposta do trio *I.V.O.*



c) S, porque evidenciar-se no experimento que nenhuma vez esta quantidade foi aprovada. Além disso, as bolinhas verdes representam 40% do total de bolinhas, portanto a probabilidade de sair essa bolinha amarela em 5 é maior.

Figura 35 – Resposta do trio *I.V.O.* – Tarefa “c” da atividade 2 – Fase II

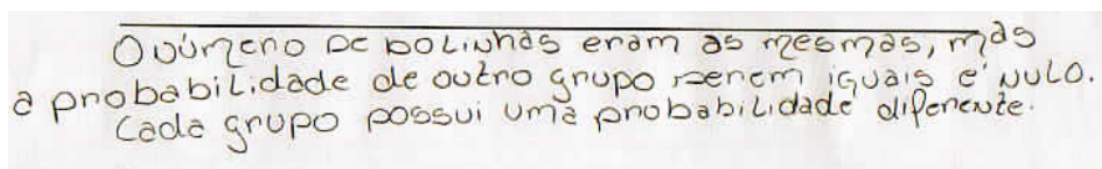
Fonte: Experimento de ensino

Os três grupos deram a mesma resposta para a pergunta da tarefa “d”. Todos escreveram que existe a chance de saírem 5 bolinhas verdes, sendo porém esta chance muito pequena.

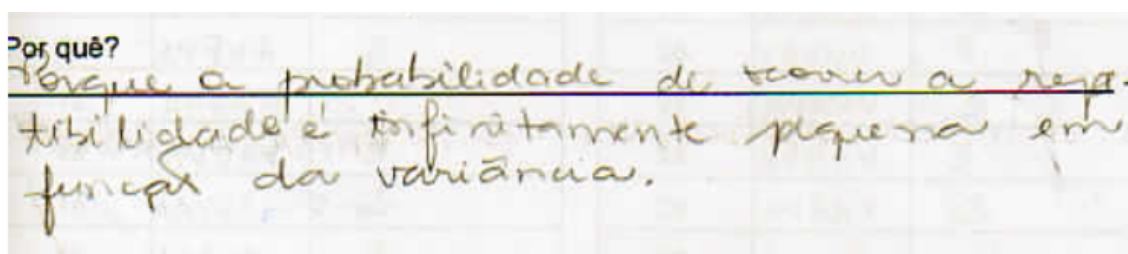
Não houve nenhum problema na realização da tarefa “e”, como já esperávamos, uma vez que na tabela havia as indicações dos procedimentos solicitados. Os três grupos preencheram a tabela, efetuaram os cálculos da frequência relativa (h_i) e da porcentagem ($100 \cdot h_i$) utilizando para isso o registro tabular.

Na tarefa “f” todos os grupos interpretaram os dados registrados na tabela da tarefa “e” fazendo uso do registro numérico. Também não houve dificuldade na execução desta tarefa.

Com a mediação do professor-pesquisador e de seu assistente, os grupos realizaram a tarefa “g”. Foi interessante perceber que, num primeiro momento houve espanto dos alunos ao constatarem valores diferentes obtidos por cada grupo. Aos poucos, conversando entre si, foram percebendo o que havia ocorrido e chegaram à conclusão de que o fato das retiradas das bolinhas terem sido realizadas de forma aleatória provocou diferença nos resultados. Embora todos concordassem com isso, houve dificuldade no registro desta conclusão, mesmo tendo sido utilizado o registro da língua natural. Ao contrário do que relata Figueiredo (2000) em seu trabalho, ressaltando que a maioria dos alunos apresentou resultados satisfatórios diante de questões que envolveram perguntas em linguagem natural, pelo menos nesta tarefa “g”, os alunos não conseguiram expressar satisfatoriamente os seus pensamentos. Vejamos como exemplo, a figura 36, que reproduz as respostas dadas pelos grupos *J.M.* e *I.V.O.*



O número de bolinhas eram as mesmas, mas a probabilidade de outro grupo serem iguais é nulo. Cada grupo possui uma probabilidade diferente.



Por quê?
Porque a probabilidade de ocorrer a repetibilidade é infinitamente pequena em função da variância.

Figura 36 – Respostas dos grupos *J.M.* e *I.V.O.* respectivamente – Tarefa “g” da atividade 2 – Fase II
Fonte: Experimento de ensino

A atividade 3 foi elaborada com a intenção de que os sujeitos construíssem a árvore de possibilidades representativa da distribuição em questão, a partir do 2º

sorteio. Tínhamos por objetivo que os alunos percebessem e identificassem todas as possibilidades teóricas de resultados existentes para o evento proposto.

Para facilitar a compreensão do leitor reproduzimos as tarefas da atividade 3 no quadro 45.

Tarefas:

- 1) Completem a árvore de possibilidades, indicando a sequência sorteada:
- 2) Quantos caminhos existem ao todo? _____
- 3) Verifiquem, nas sequências construídas, quantos caminhos possuem a seguinte quantidade de bolas verdes e escrevam as sequências:
 - a) 0 _____
 - b) 1 _____
 - c) 2 _____
 - d) 3 _____
 - e) 4 _____
 - f) 5 _____
- 4) Analisando e sistematizando os resultados da árvore de possibilidades, preencham a Tabela 4:

Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes

nº de bolas verdes	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total	////////////////////////////////////	1

Quadro 45 – Atividade 3 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Houve muita dificuldade na realização da tarefa 1 uma vez que os alunos não conseguiram, num primeiro momento, organizar os ramos da árvore numa disposição que permitisse toda a sua construção. A dupla *J.M.* precisou, inclusive, de uma nova cópia da grade fornecida para a realização desta tarefa, pois a primeira ficou comprometida devido às inúmeras tentativas de construção da árvore.

Foi necessária a intervenção do professor-pesquisador que, como prevê a metodologia dos *Designs Experiments* chamou a atenção para a parte da árvore já construída, referente ao primeiro sorteio, indagando sobre os significados das letras “A” e “V” nela existentes bem como sobre as aberturas que se deviam dar aos ramos da árvore daquele ponto em diante. Foi somente após uma troca de impressões entre todos os participantes que a construção da árvore pôde ser concluída. Nota-se aqui uma confirmação do relato de Figueiredo (2000) que também se viu diante desta mesma dificuldade na aplicação da sua atividade de pesquisa. A autora cita inclusive que este desconhecimento sobre o registro de árvore de possibilidades fez com que levasse mais tempo do que o previsto na manipulação das atividades. Terminada a construção da árvore de possibilidades, nossos alunos preencheram a coluna “sequência” indicando uma a uma, todas as possibilidades envolvidas no experimento. Como na árvore já haviam sido registradas as letras “A” e “V” para designarem, respectivamente, bola amarela ou bola verde em todos os seus ramos, não houve dificuldade na conversão do registro da árvore de possibilidades para o simbólico. Já na conversão do registro simbólico para o numérico, houve novamente a necessidade de intervenção do professor-pesquisador. De início, os alunos achavam que deveriam adicionar as probabilidades de cada bola para poderem indicar a probabilidade do caminho na última coluna da grade fornecida. Foi então realizada uma simulação de outro experimento: lançamento de um dado por três vezes. Na construção da árvore de possibilidades deste novo experimento, os alunos conseguiram perceber a multiplicação das probabilidades como a operação adequada para se chegar à probabilidade do caminho todo. A partir daí, todos os grupos fizeram a conversão do registro simbólico para o registro numérico. Destaca-se, nesta situação, a necessidade de inserção de uma nova atividade para os alunos evoluírem em suas compreensões. Essa intervenção é prevista e indicada na metodologia adotada, uma vez que ela possui um caráter cíclico, iterativo e flexível, visando a adaptabilidade às produções dos estudantes.

Na figura 37 apresentamos, como exemplo, a construção da árvore de possibilidades e as conversões realizadas pela dupla *J.M.*

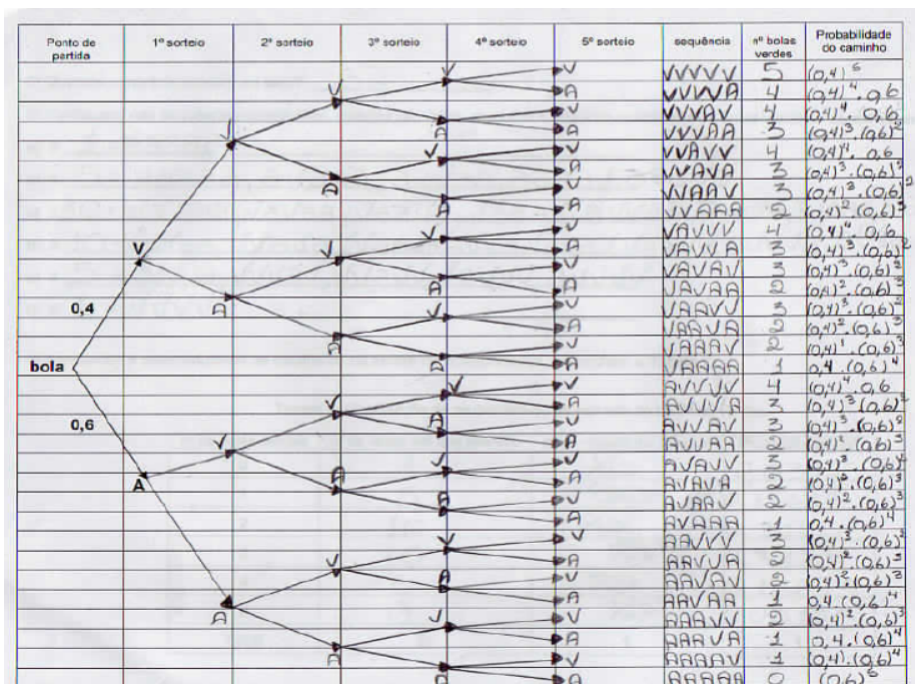


Figura 37 – Resposta da dupla *J.M.* – Tarefa 1 da atividade 3 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Na tarefa 2 não houve qualquer dificuldade para a resolução, uma vez que os alunos precisaram apenas contar quantos caminhos existiam ao todo. Todos os grupos responderam corretamente 32 caminhos fazendo uso do registro numérico.

Tínhamos a expectativa de que na tarefa 3 os alunos percebessem que o número de ocorrências de uma determinada quantidade de bolinhas verdes não depende da posição em que elas aparecem nas seqüências e que, portanto, deveriam considerar todos os caminhos em que a quantidade analisada ocorreu.

Os alunos fizeram as contagens, utilizaram os registros numérico e simbólico, não apresentando dificuldades na execução da tarefa, demonstrando a compreensão esperada.

Para realizarem a tarefa 4 desta atividade 3 os alunos fizeram uso dos registros tabular e numérico. Mesmo já tendo passado pela dificuldade na execução da tarefa 1 no momento da conversão do registro simbólico para o numérico e, tendo conseguido naquela oportunidade compreender tratar-se de multiplicação de probabilidades, ao se depararem com o preenchimento da tabela “Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes”, os alunos demonstraram certa insegurança. O trio *I.V.O.*, por exemplo, ao preencher a coluna “expressão matemática para o cálculo da probabilidade” não colocou a quantidade de vezes que cada probabilidade do caminho havia ocorrido, apenas copiando os registros feitos na grade onde foi realizada a construção da árvore de possibilidades. Com a intervenção do professor-pesquisador, os alunos do trio voltaram à tarefa 2 e após analisá-la juntamente com a resposta dada, 32 caminhos, perceberam que deveriam registrar quantas vezes cada probabilidade do caminho havia ocorrido. Sendo assim, corrigiram sua resposta da tarefa 4. Destaca-se, neste momento, o aspecto cíclico da metodologia dos *Design Experiment*, o qual prevê retornos às atividades já realizadas, com vistas a garantir a construção de novas concepções. As duplas *D.E.* e *J.M.*, após conversarem e analisarem todas as tarefas da atividade 3, conseguiram por si só realizarem a tarefa de forma satisfatória, como pode ser observado na figura 38.

Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes

nº de bolas verdes	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0	$1 \cdot (0,6)^5$	0,078
1	$5 \cdot [(0,4) \cdot (0,6)^4]$	0,26
2	$10 \cdot [(0,4)^2 \cdot (0,6)^3]$	0,35
3	$10 \cdot [(0,4)^3 \cdot (0,6)^2]$	0,23
4	$5 \cdot [(0,4)^4 \cdot 0,6]$	0,072
5	$1 \cdot [(0,4)^5]$	0,010
Total	////////////////////////////////////	1

Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes

nº de bolas verdes	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0	$1 \cdot (0,6)^5$	0,07776
1	$5 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^4$	0,2592
2	$10 \cdot (0,4)^2 \cdot (0,6)^3$	0,3456
3	$10 \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^2$	0,2304
4	$5 \cdot (0,4)^4 \cdot 0,6$	0,0768
5	$1 \cdot (0,4)^5$	0,01024
Total	////////////////////////////////////	1

Figura 38 – Respostas dos grupos D.E. e J.M. respectivamente – Tarefa 4 da atividade 3 – Fase II
 Fonte: Experimento de ensino

Todos os grupos perceberam que a soma das probabilidades é igual a 1 e que as pequenas variações encontradas ocorreram devido ao número de ordens decimais considerado. Dessa forma, concluímos que o objetivo da atividade foi atingido.

A atividade 4 tinha por objetivo proporcionar condições para que os alunos comparassem os resultados obtidos nas duas formas de atribuição de probabilidades realizadas até aquele momento: cálculo da frequência relativa por ocasião da realização do experimento prático que consistiu na retirada de 5 bolinhas de forma aleatória, com reposição a cada retirada, por 30 vezes, de uma urna

contendo 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas e cálculo das probabilidades por meio da análise dos resultados obtidos na árvore de possibilidades construída. No quadro 46, apresentamos as tarefas desta atividade.

Atividade 4

Tarefas:

1) Preencham a tabela 5 com os resultados das Tabelas 3 e 4:

Tabela 5. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades.

nº de bolas verdes	Frequência relativa (hi)	Árvore de possibilidades (pi)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

- 2) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?
- 3) Comparem os resultados da Tabela 5, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir?
- 4) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?
- 5) Construam os gráficos dos resultados de (hi), de (pi) e (hi) e (pi) no mesmo plano.
- 6) Comparem os gráficos construídos com as construções das outras duplas. O que vocês podem concluir?

Quadro 46 – Atividade 4 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Na tarefa 1 os alunos utilizaram os registros tabular e numérico. Não houve dificuldade na realização desta tarefa por tratar-se de simples transcrição de resultados já obtidos em atividades anteriores.

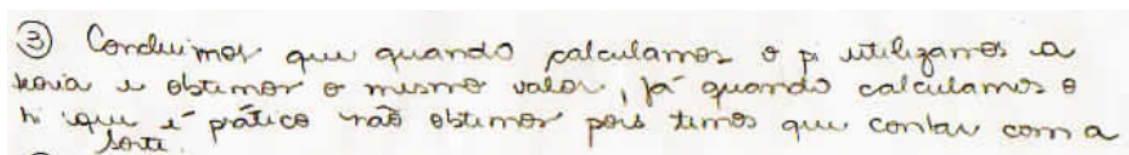
Na tarefa 2 esperávamos que os alunos registrassem, em língua natural escrita, suas observações e conclusões que pudessem justificar as diferenças entre os valores obtidos para as frequências relativas (h_i) e as probabilidades (p_i) respectivas em cada quantidade de bolinhas verdes ocorrida. Pelas respostas dadas a esta tarefa, constatamos que os alunos, em sua maioria, perceberam que a diferença entre os dois métodos de se calcular probabilidades está na aleatoriedade do experimento prático em contraposição ao método de cálculo pela árvore de possibilidades que apresenta a probabilidade teórica dos eventos envolvidos no experimento. O trio *I.V.O.*, fazendo uso do registro da língua natural deu respostas curtas e diretas: *“ h_i é calculada pelo método prático. p_i é calculada teoricamente.”*. A dupla *J.M.* também utilizando o registro da língua natural, respondeu: *“A diferença entre os dois comparativos é que na árvore, podemos visualizar várias possibilidades de acordo com o sorteio, já a retirada aleatória possui aspectos que podem alterar o resultado.”*. Embora não tenha sido possível compreender, pela análise da produção escrita, o que a dupla estava querendo dizer ao associar o sorteio à árvore, na segunda parte da resposta percebemos claramente a referência ao acaso como responsável pelos diferentes resultados obtidos na comparação entre os dois métodos utilizados. A dupla *D.E.* expressou-se de forma mais confusa. Pelo registro da língua natural respondeu⁶: *“No cálculo p_i utilizamos a expressão do caminho multiplicado pela quantidade de bolas retiradas na cor correspondente. No cálculo h_i utilizamos o número de bola retirado dividido pelo total de bolas.”*. Ao analisarmos esta resposta, notamos que não houve a interpretação da diferença entre as duas formas de calcular probabilidades, como esperado. Fazendo uso das características da metodologia *Design Experiment*, o professor-pesquisador interferiu questionando o significado da resposta dada à tarefa. Ao tentarem explicar, os alunos da dupla perceberam a incorreção e solicitaram que fosse considerada a seguinte resposta para a tarefa: *“No cálculo p_i utilizamos a expressão do caminho*

⁶ Grifos feitos pela dupla.

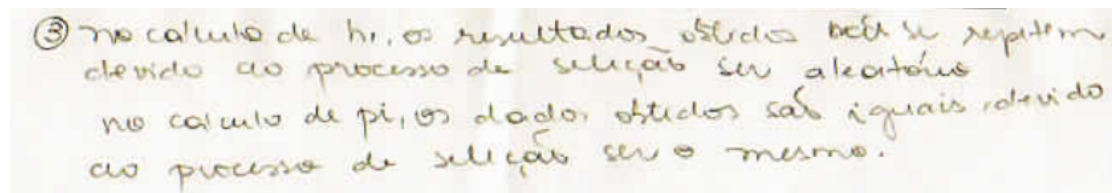
multiplicada pelo número de vezes que ela apareceu na árvore. No cálculo h_i utilizamos a expressão da probabilidade multiplicada pelo número de vezes que saiu no sorteio prático". Notamos uma evolução no entendimento dos alunos desta dupla após a intervenção do professor-pesquisador.

Observamos, neste contexto, que os estudantes perceberam que a situação representava a soma de caminhos mutuamente excludentes, uma vez que utilizaram a multiplicação de um caminho por cinco.

Também na tarefa 3 foi usado o registro da língua natural. Esperávamos, nesta tarefa, que os alunos percebessem que em todos os grupos os resultados obtidos como valores das probabilidades de ocorrências de cada quantidade de bolinhas verdes pela árvore de probabilidades eram exatamente iguais e que o mesmo não ocorria quando eram observados os resultados obtidos como valores das frequências relativas a cada quantidade de bolinhas verdes retirada, e, a partir de tais constatações, relatassem suas conclusões a respeito. Desta vez os grupos *D.E.* e *I.V.O.* deram respostas muito semelhantes embora utilizando palavras um pouco diferentes como podemos observar na figura 39.



③ Concluímos que quando calculamos o p_i utilizamos a teoria e obtemos o mesmo valor, já quando calculamos o h_i que é prático não obtemos pois temos que contar com a sorte.



③ no cálculo de h_i , os resultados obtidos não se repetem devido ao processo de seleção ser aleatório no cálculo de p_i , os dados obtidos são iguais devido ao processo de seleção ser o mesmo.

Figura 39 – Respostas dos grupos *D.E.* e *I.V.O.* respectivamente. – Tarefa 3 da atividade 4 – Fase II
Fonte: Experimento de ensino

Analisando essas duas produções concluímos que o objetivo da tarefa foi atingido, uma vez que ambas as duplas demonstraram ter percebido que em todos os grupos os resultados obtidos no cálculo da (π) eram exatamente iguais e que o mesmo não ocorria quando eram observados os resultados obtidos como valores da (h_i).

A dupla *J.M.* por sua vez, apresentou uma resposta que nos leva a concluir que não tiveram a mesma percepção dos outros dois grupos. A resposta dada pela dupla consta na figura 40.

03) Os processos de seleção não os mesmos, por isso a frequência relativa, igual a $\frac{1}{3}$.

Figura 40 – Resposta da dupla *J.M.* – Tarefa 3 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

A dupla demonstrou, com esta resposta, não ter compreendido o objetivo existente na formulação da questão. Talvez tenha entendido que o que a questão propunha era uma comparação individual dos métodos adotados. Sendo assim, justificar-se-ia a resposta uma vez que o método usado para o cálculo de (π) foi o mesmo para os três grupos, assim também ocorrendo quando do cálculo de (h_i). Apesar de constatar problemas na compreensão da tarefa, o professor-pesquisador resolveu não interferir nesse momento, uma vez que nas tarefas seguintes os estudantes teriam a oportunidade de explorar novamente a situação.

Elaboramos a tarefa 4 retornando o questionamento da tarefa 2 na expectativa de que a realização da comparação proposta na tarefa 3 fornecesse mais argumentos aos grupos. Esperávamos uma produção utilizando o registro da língua natural. Na produção da dupla *D.E.* notamos a influência da realização da tarefa 3, pois nesta tarefa 4 deram uma resposta bem mais clara e coerente com as respostas dos demais grupos, diferentemente do que ocorreu na tarefa 2.

Responderam tratar-se de um processo prático vinculando novamente a palavra “sorte” à aleatoriedade e de um processo teórico usando a palavra “exato” para reforçar o fato de o cálculo da (π) ter sido realizado teoricamente sem nenhuma influência de fatores como os presentes no cálculo da (h_i) . O trio *I.V.O.* respondeu “*idem a resposta 3*”, reafirmando o entendimento de que, para o cálculo da (h_i) , foi realizado um experimento que trazia consigo a aleatoriedade, por isso provocando resultados diferentes entre os grupos, porém, para o cálculo da (π) a construção da árvore de possibilidades forneceu resultados teóricos e conseqüentemente iguais para todos os grupos. Também a dupla *J.M.* desta vez conseguiu elaborar uma resposta mais clara ao escrever: “*Um processo é de retirada (pode sair qualquer cor) e outro é teórico*”. Partindo disso, entendemos que o objetivo da tarefa foi atingido.

Esperávamos que, para a execução da tarefa 5, os alunos fizessem uma conversão do registro numérico para o registro gráfico, por meio da construção dos gráficos representativos dos resultados por eles obtidos como frequência relativa (h_i) e de probabilidade (π) em planos separados. Em seguida, deveriam construir novamente os gráficos de (h_i) e de (π) agora num mesmo plano. Com a execução desta tarefa, esperávamos que os alunos utilizassem os registros gráficos na comparação dos resultados obtidos auxiliando assim a obtenção de suas conclusões sobre os motivos que causaram as diferenças nos valores encontrados nos cálculos da (h_i) bem como nos valores coincidentes quando se observam as (π) determinadas. Logo no início da construção do primeiro gráfico, os grupos apresentaram a primeira dúvida: qual a graduação mais adequada a ser utilizada nos eixos? Foi necessária a intervenção do professor-pesquisador questionando sobre os valores máximos e mínimos bem como os demais valores intermediários que possuíam para serem registrados na representação gráfica. Os três grupos adotaram uma graduação de 5 em 5 centésimos para o eixo vertical (h_i) a cada dois quadrados da malha fornecida. Nas figuras seguintes apresentamos os registros gráficos de (h_i) construídos pelos grupos.

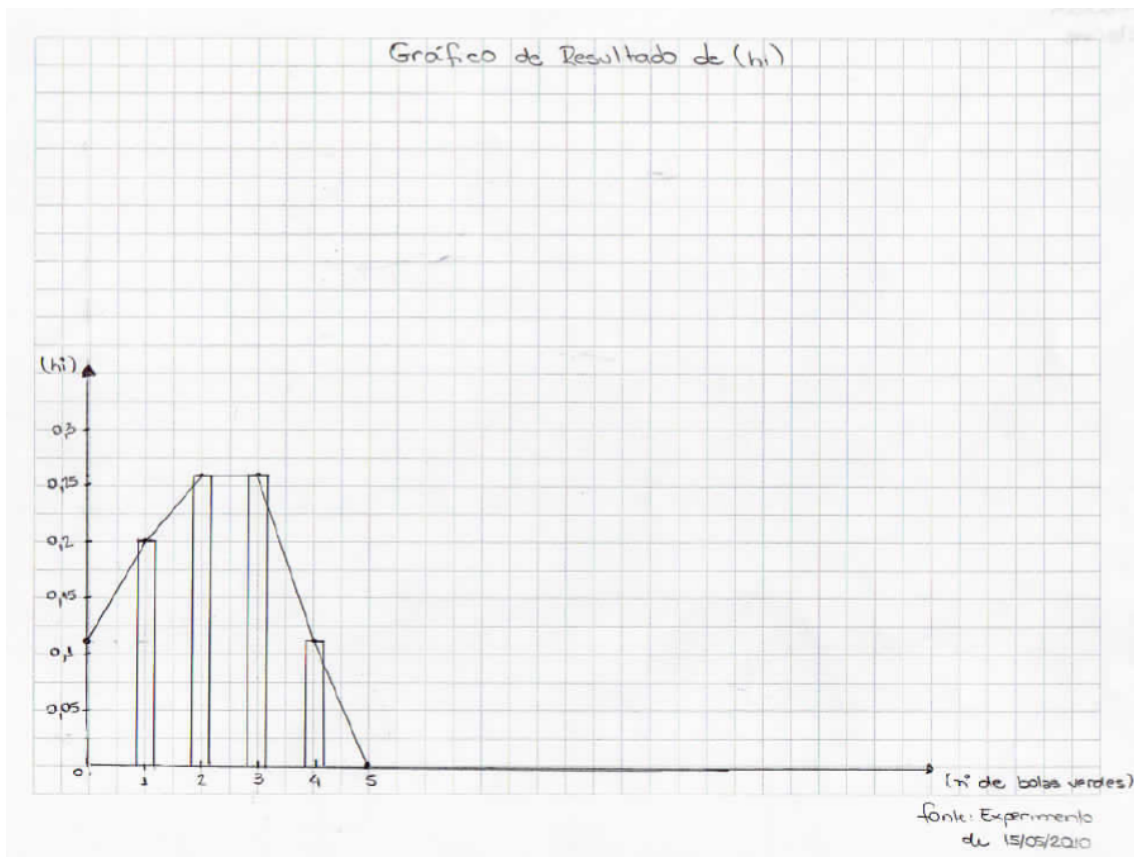


Figura 41 – Registro gráfico de (h_i) da dupla *D.E.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Depois de adotada a graduação dos eixos, a dupla *D.E.* não solicitou mais nenhuma orientação ao professor-pesquisador. Toda a construção do gráfico foi realizada de forma independente, desde o título que ali foi colocado devido a uma lembrança do aluno *E.* manifestada verbalmente por: “*Me lembro que sempre que construímos gráficos devemos colocar o seu título, os nomes dos eixos e a fonte de onde saíram os dados nele representados.*”, até a decisão de traçar barras de colunas ligando os pontos médios dos intervalos que cada coluna representava. Essa construção ocorreu fortemente baseada nas lembranças do aluno *E.*, que parece ter confundido o experimento realizado com a construção de histogramas, assunto tratado em nosso curso quando do trabalho com a disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística”. Apesar de constatar incorreções na construção deste registro gráfico o professor-pesquisador resolveu não interferir, uma vez que na

tarifa seguinte a dupla teria a oportunidade de comparar suas construções com as dos outros grupos e assim refletir sobre a sua produção.

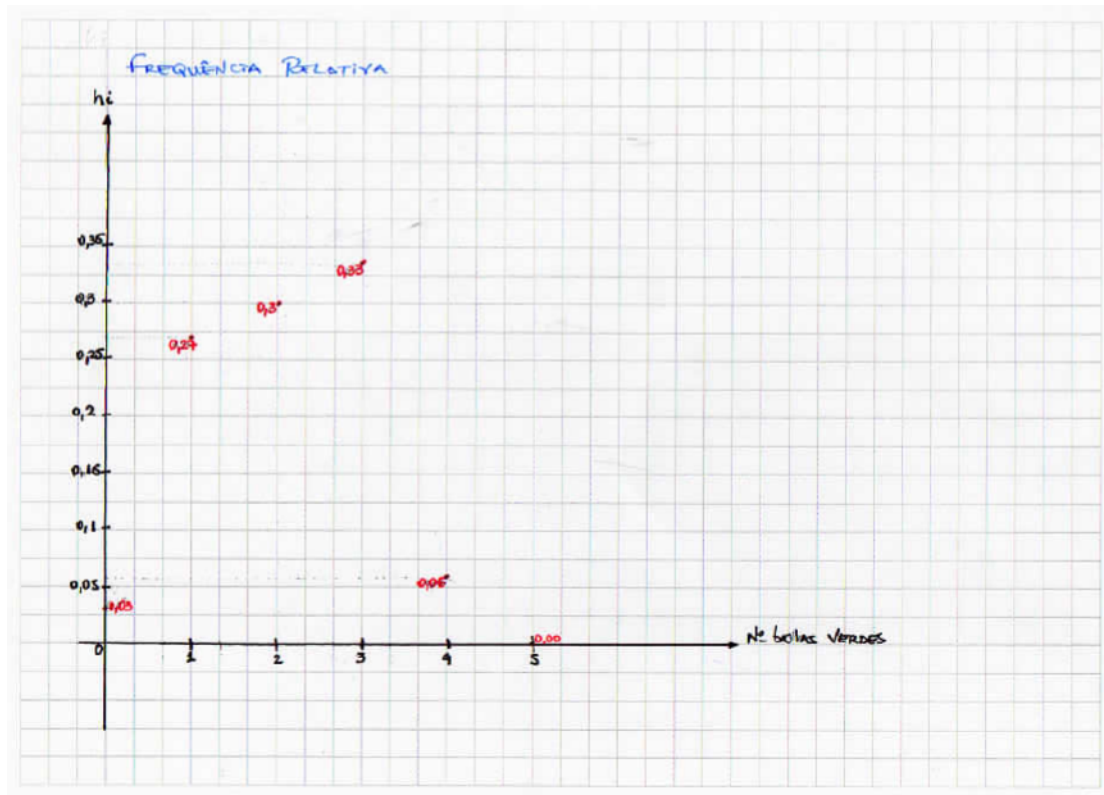


Figura 42 – Registro gráfico de (h_i) do trio *I.V.O.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Já os grupos *I.V.O.* e *J.M.* solicitaram a presença do professor-pesquisador, pois estavam em dúvida quanto a unir ou não os pontos registrados na representação gráfica. Mais uma vez foram indagados sobre as características do experimento realizado e do respectivo registro gráfico que deveria ser feito. Perguntas como: Como fazemos a leitura das coordenadas de cada ponto? Qual a leitura a ser feita no eixo “número de bolas verdes” (horizontal) no caso de os pontos

estarem ligados. Assim, refletindo e discutindo entre eles, perceberam que não deveriam ligar os pontos, pois não havia a possibilidade de retirada de 1,5 bolas verdes ou 4,2 bolas verdes, por exemplo.

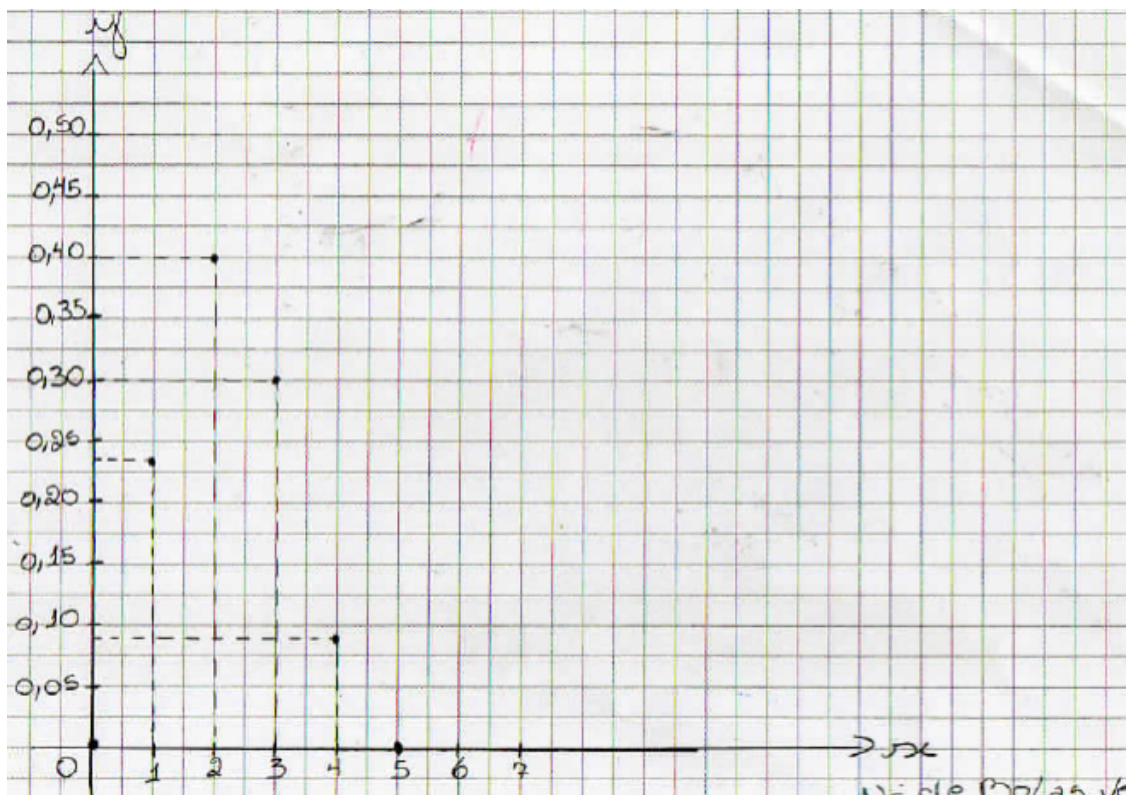


Figura 43 – Registro gráfico de (h_i) da dupla *J.M.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

A dupla *J.M.* construiu o seu gráfico de forma muito semelhante ao do trio *I.V.O.*, só não colocou um título para ele.

Após a construção do gráfico de (h_i) , não houve dificuldade na construção do gráfico de (p_i) . Apenas a dupla *J.M.* preferiu graduar o eixo das probabilidades de dois em dois centésimos, enquanto que os outros dois grupos mantiveram a gradação de 5 em 5 centésimos utilizada no gráfico anterior. Aqui, novamente o

professor-pesquisador preferiu não interferir, deixando para o momento de discussão em grupo, previsto para a tarefa seguinte.

As próximas três figuras reproduzem os registros gráficos de (π).

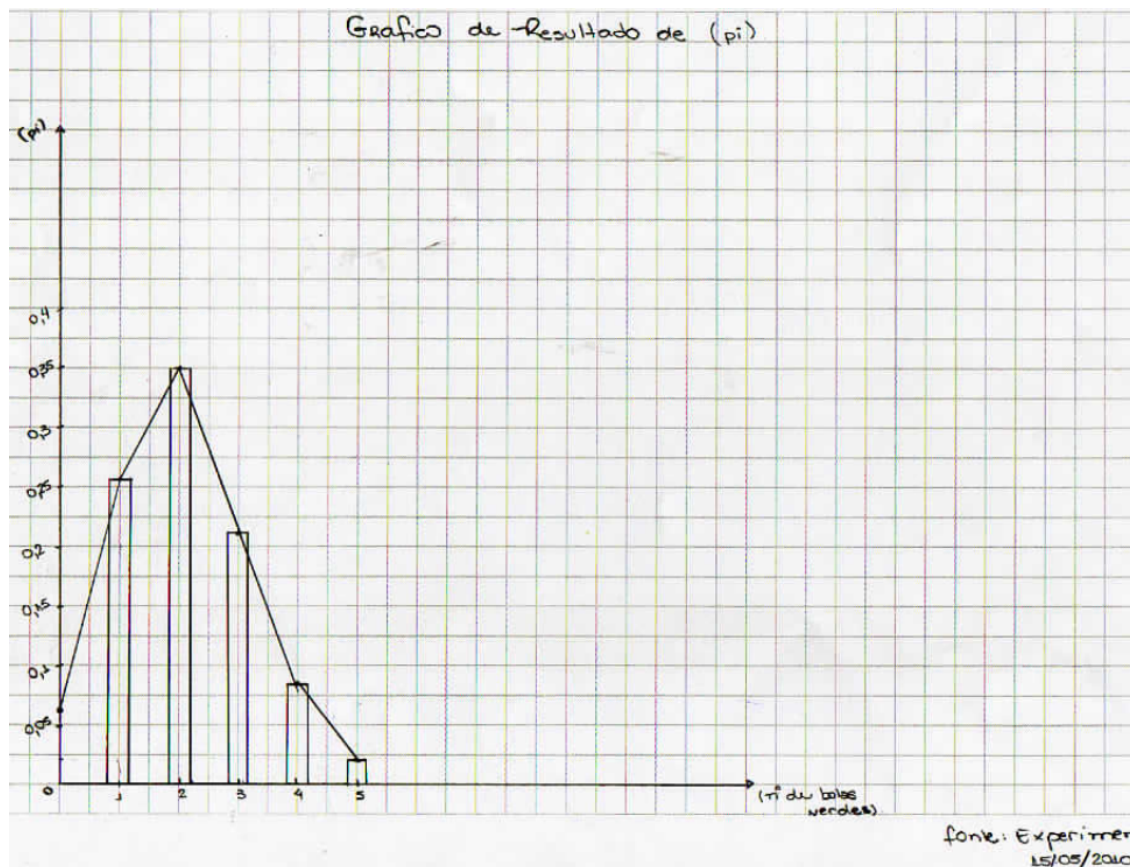


Figura 44 – Registro gráfico de (π) da dupla *D.E.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Percebemos neste registro da dupla *D.E.*, os mesmos cuidados verificados no gráfico anterior (*hi*) quanto a títulos e fonte, bem como o mesmo equívoco ao se utilizarem de colunas e ligarem os seus pontos médios.

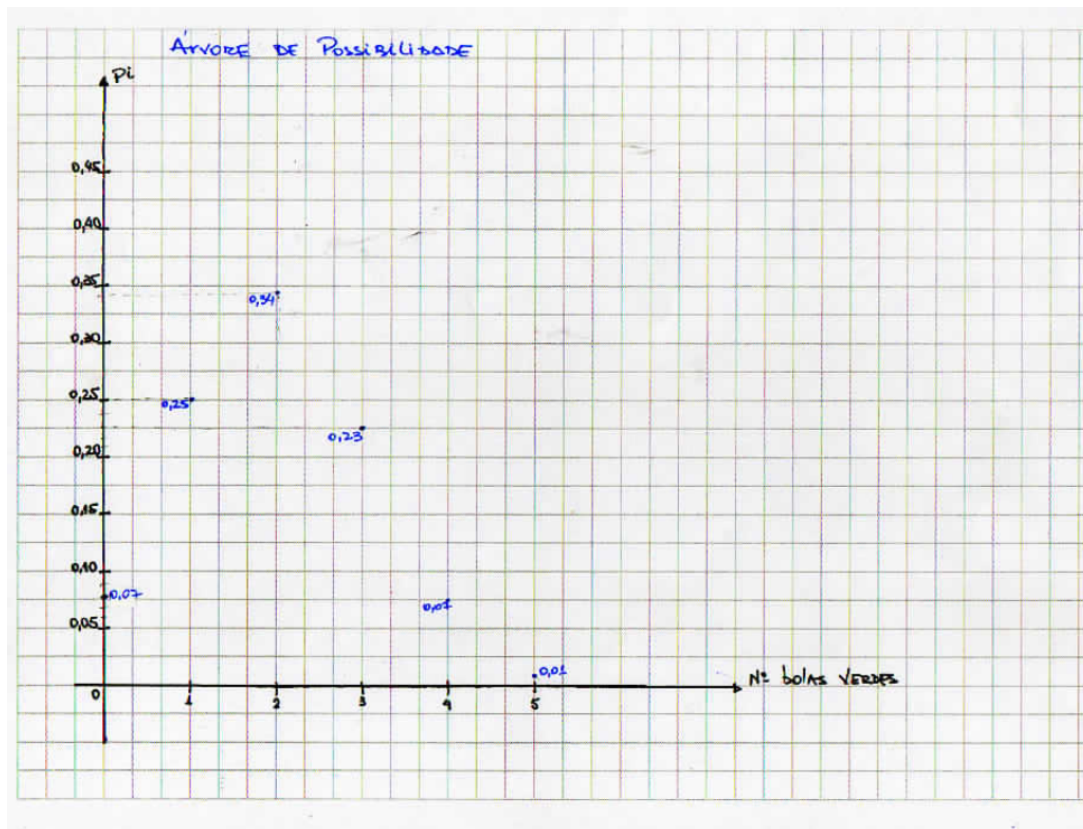


Figura 45 – Registro gráfico de (p_i) do trio *I.V.O.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Observamos que o trio *I.V.O.* manteve as características adotadas no gráfico de (h_i) .

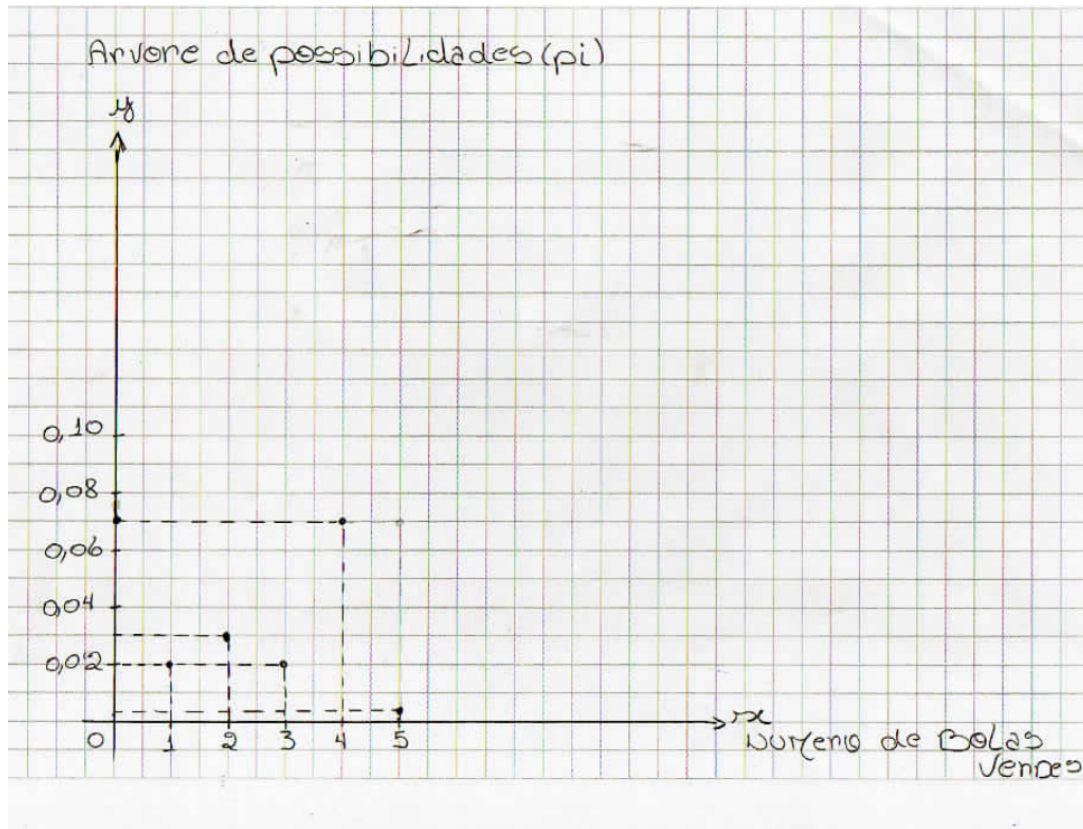


Figura 46 – Registro gráfico de (pi) da dupla *J.M.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

A dupla *J.M.* também construiu o gráfico de (pi) sem dificuldade, mantendo os critérios adotados no registro gráfico anterior.

Para a terceira parte desta tarefa 5 da atividade 4, os alunos reproduziram os dois gráficos construídos. Notamos, nesta etapa de execução da tarefa, entendimentos distintos entre os grupos. A dupla *D.E.* por exemplo, abandonou, não sendo possível detectar o porquê, o uso de colunas nos seus registros. Manteve, no entanto, os pontos ligados, lembrando a construção de histogramas como já citado nesta análise. Também permaneceu fiel ao procedimento de dar títulos ao gráfico e aos eixos, indicar a fonte dos dados e, desta vez, incluiu até uma legenda visando facilitar o entendimento por parte do leitor.

O trio *I.V.O.* por sua vez fez uma cópia dos dois gráficos utilizando apenas um plano como indicado no enunciado da tarefa.

Já a dupla *J.M.* ao invés de utilizar um mesmo plano para os dois registros gráficos, os fez separadamente, lado a lado numa mesma malha quadriculada.

Analisando as produções dos sujeitos nesta tarefa 5, percebemos que, embora tenham noção do que venha a ser registro gráfico, os mesmos tiveram muita dificuldade para produzi-los, desde a indecisão inicial sobre como graduar os eixos, passando pela questão de ligarem ou não os pontos obtidos, chegando até o final com essa discrepância no entendimento do enunciado da tarefa. Olhando atentamente para os registros gráficos obtidos percebemos outro detalhe digno de menção. A dupla *J.M.*, por exemplo, apesar de reconhecer tratar-se de uma relação entre número de bolas verdes e frequência relativa num momento e entre número de bolas verdes e probabilidade da obtenção de um determinado número de bolas verdes em outro e até registrar nos eixos horizontais o título “número de bolas verdes”, manteve, também, as indicações de “x” e “y” na nomeação dos eixos horizontal e vertical respectivamente. Souza (2002) também percebeu esta dificuldade de interpretação de enunciados bem como deficiências em pré-requisitos que acabaram por interferir no trabalho de sua pesquisa. Vieira (2008) também verificou que os alunos conseguiam ler dados em gráficos, porém apresentavam dificuldades em representar os dados, ou seja, apresentavam dificuldades na construção de gráficos. Nesse aspecto, foram necessárias intervenções do professor-pesquisador, previstas na metodologia dos *Designs Experiments*, para que os alunos pudessem prosseguir suas resoluções utilizando o registro gráfico.

Reproduzimos, nas próximas três figuras, a terceira etapa de produção dos alunos referente à tarefa 5 da atividade 4 do nosso experimento.

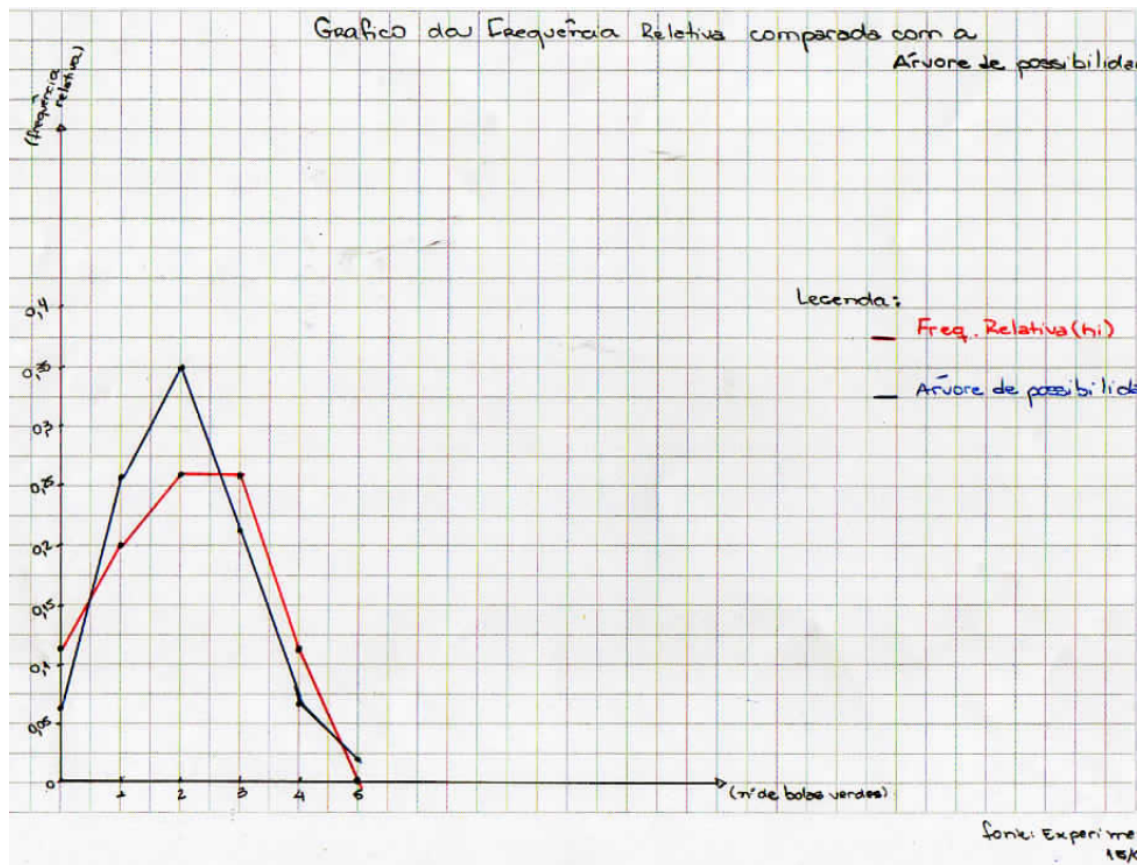


Figura 47 – Registro gráfico de (p_i) e (h_i) da dupla D.E. – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

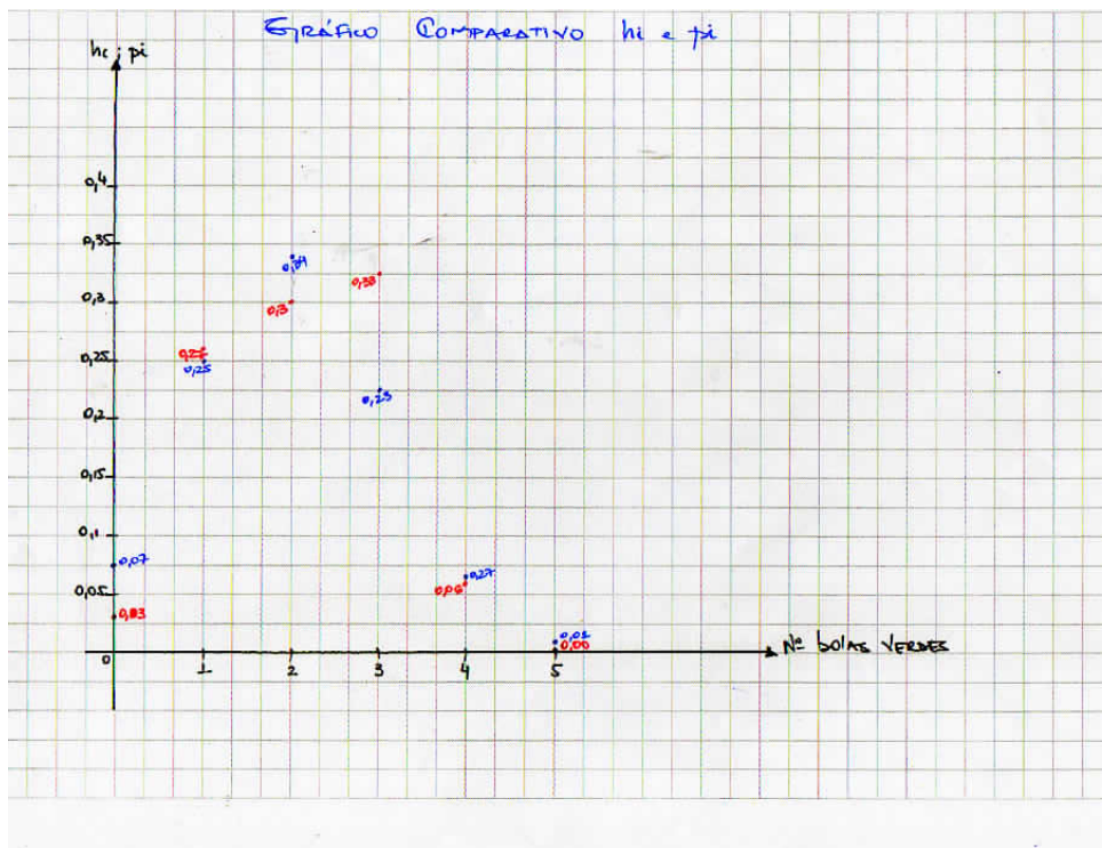


Figura 48 – Registro gráfico de (p_i) e (h_i) do trio I.V.O. – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

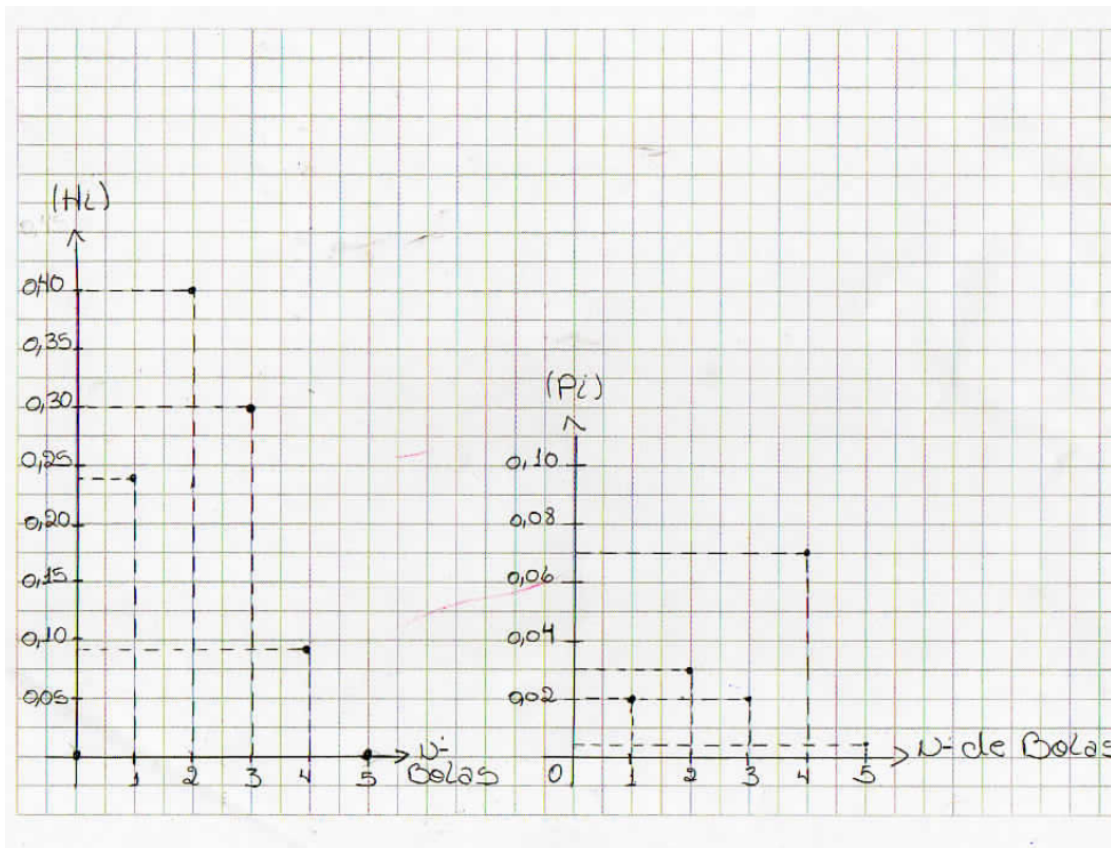


Figura 49 – Registro gráfico de (p_i) e (h_i) da dupla *J.M.* – Tarefa 5 da atividade 4 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Ao compararem seus gráficos com as construções das outras duplas, na tarefa 6, esperávamos que os alunos reforçassem sua percepção de que os valores obtidos nos cálculos das frequências relativas são diferentes em cada uma das duplas, enquanto que os cálculos das probabilidades para cada quantidade de bolinhas verdes obtidas na construção da árvore de probabilidades produziram resultados respectivamente iguais. Na realização desta tarefa os alunos fizeram uso do registro da língua natural. Nesta etapa, apesar do experimento ter sido realizado em grupos, houve momentos de discussão conjunta com todos os alunos, a fim de provocar o debate e a comparação das conclusões obtidas. Nesta discussão, os equívocos cometidos pelas duplas *D.E.* e *J.M.* foram destacados. Com a condução do professor-pesquisador, os alunos conversaram sobre o uso de barras de colunas

e sobre os pontos ligados nos registros gráficos da dupla *D.E.* Os próprios alunos dos outros dois grupos se encarregaram de explicar o porquê de não ser correto este procedimento na tarefa em questão, uma vez que tinham sido orientados pelo professor-pesquisador. O aluno *E.* confirmou a suspeita havida e citada nesta análise, ao dizer que “*Eu me lembrei das construções que fizemos quando estudamos Estatística. Nós fazíamos as barras e ligávamos os pontos*”. Os alunos da dupla foram então esclarecidos pelo professor-pesquisador, de que esse procedimento referia-se à construção de histogramas, ao que esboçaram concordância e compreensão do equívoco cometido. Perguntaram se havia a necessidade de novas construções. O professor-pesquisador explicou que não seria necessário, uma vez que a discussão coletiva havia atingido o objetivo da tarefa, permitindo que todos os alunos compreendessem qual a maneira correta de se construir gráficos nas situações propostas. Quanto à dupla *J.M.*, ao verificar as construções dos outros grupos, percebeu que a graduação diferenciada dos eixos nos dois gráficos prejudicou a construção conjunta e a conseqüente comparação. Os alunos da dupla demonstraram certo desconforto com a constatação, sendo imediatamente tranquilizados pelo professor-pesquisador. A dupla *J.M.*, a exemplo da dupla *D.E.*, perguntou sobre a necessidade de novas construções e assim como ocorreu com a outra dupla, foram dispensados de fazê-las.

Os três grupos deram respostas idênticas na essência, diferenciando-se apenas nas formas de expressão. Afirmaram ter confirmado, na análise dos registros gráficos produzidos, que a diferença nos resultados obtidos para (h_i) foi causada pelo fato de o experimento ser aleatório, não havendo como prever os resultados, enquanto que na obtenção da (p_i) o uso da árvore de possibilidades lhes propiciou valores teóricos das probabilidades. Salientaram também, no momento da comparação entre as suas produções, que os registros gráficos deixam claras as diferenças entre as duas formas de se calcular probabilidades, pois é possível perceber que os pontos referentes aos gráficos de (p_i) e de (h_i) não são coincidentes, o que reforça a conclusão obtida.

Desta forma, apesar das deficiências apresentadas pelos estudantes, principalmente nos registros gráfico e na língua natural escrita, concluímos que o objetivo da atividade foi atingido, principalmente no momento de discussão conjunta, ou seja, entendemos que o trabalho de exploração das diversas representações e a

discussão dos resultados favoreceram a análise comparativa entre os resultados, culminando nas conclusões fornecidas pelos sujeitos.

A atividade 5 objetivou a formalização da situação presente na atividade anterior, a qual naquele momento foi construída utilizando a árvore de possibilidades e o registro gráfico. Para a realização desta tarefa, os estudantes fizeram uso dos registros tabular e numérico, havendo uma conversão do registro numérico para o registro simbólico.

Apresentamos no quadro 47 a atividade 5.

<u>Atividade 5</u>			
<u>Tarefa:</u>			
Partindo dos resultados da Tabela 4, procurem determinar uma “fórmula” que relacione o número de bolinhas verdes com a respectiva probabilidade:			
Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes.			
nº de bolas verdes	nº de vezes em que aparece	expressão matemática para o cálculo da probabilidade	Probabilidade (pi)
0	1		
1	5		
2	10		
3	10		
4	5		
5	1		
Total	32	////////////////////////////////////	1
P(X=0) =			P(X=3) =
P(X=1) =			P(X=4) =
P(X=2) =			P(X=5) =
P(X=k) =			

Quadro 47 – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

O preenchimento da tabela foi realizado sem dificuldades pelos alunos, uma vez que esta já havia sido preenchida na atividade 3 deste experimento, quando da construção da árvore de possibilidades. No cálculo das probabilidades, também não houve problemas. Os grupos copiaram as expressões constantes da tabela percebendo que os registros simbólicos $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$ e $P(X=5)$ correspondiam às probabilidades de se obter 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 bolas verdes, respectivamente. Ao chegarem ao registro $P(X=k)$, porém, não conseguiram continuar a desenvolver a tarefa. Neste ponto, consideramos os aspectos prospectivo e reflexivo da metodologia utilizada, onde o pesquisador parte de uma conjectura inicial (prospectivo) e durante os ciclos do design pode testá-la e a partir dos resultados julgar se será necessário descartá-la e gerar outras que possam dar suporte às formas de aprendizagem em questão (reflexivo). Também levamos em conta seu caráter cíclico, segundo o qual a cada experimento podemos re-visitar nossas conjecturas e criar novos modelos visando atingir um objetivo específico. Partindo disso, houve a necessidade de uma intervenção mais intensa do professor-pesquisador, conforme poderá ser constatado adiante. A dificuldade, por nós já esperada e também relatada por Souza (2002), da conversão do registro numérico para o simbólico, se apresentou aos nossos alunos. Retomando os valores obtidos até aquele ponto do experimento, o professor-pesquisador, em conjunto com os sujeitos, criou meios para a obtenção de uma fórmula que pudesse generalizar os cálculos de uma distribuição Binomial. Para a conversão do registro numérico para o simbólico das probabilidades de sucesso e de insucesso, foram institucionalizados os símbolos “p” e “q”, respectivamente. Os alunos retomaram os valores numéricos de 0,4 e 0,6 obtidos em atividades anteriores e os associaram a estas probabilidades. Perceberam também, com as intervenções do professor-pesquisador, que o expoente de 0,4 correspondia ao número de bolas verdes para o qual se pretendia calcular a probabilidade e que o expoente de 0,6 correspondia à diferença entre o número de bolas retiradas e o número de bolas verdes, sem, no entanto fazerem qualquer menção ao conceito de probabilidade complementar. Sendo assim, parte da fórmula estava determinada: $p^k . q^{n-k}$.

Reproduzimos na figura 50 um recorte deste trabalho.

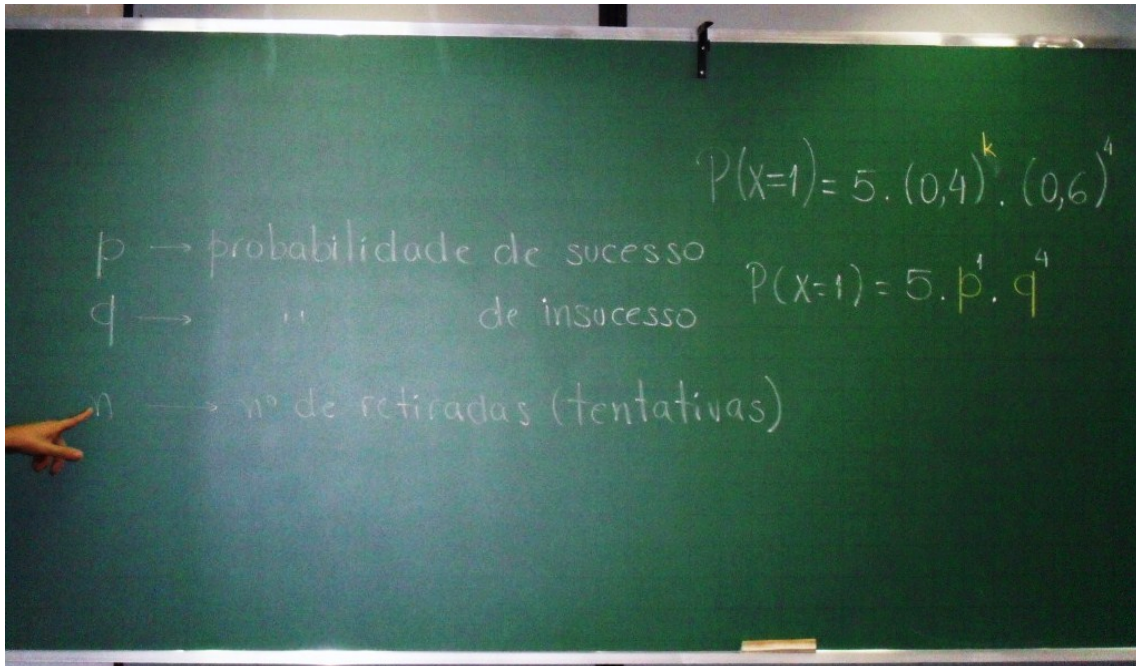


Figura 50 – Institucionalização de “p” e “q” – Atividade 5 - Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Faltava ainda a determinação do número binomial $\binom{n}{k}$ que fornece o número de vezes em que a quantidade k de ocorrências esperadas acontece, no nosso caso, uma expressão que revela em quantos “caminhos” na árvore de possibilidades ocorre a quantidade de bolinhas verdes considerada, ao se sortear cinco bolinhas com reposição de uma urna contendo 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas. Por si só, nenhum aluno conseguiu chegar a este número. A estratégia escolhida pelo professor-pesquisador foi a de relembrar com os sujeitos os conceitos de fatorial, permutação simples, arranjo simples, combinação simples e número binomial, já vistos por eles, anteriormente no curso de Probabilidade. Nas figuras seguintes, reproduzimos parte deste trabalho realizado de retomada de conteúdo.

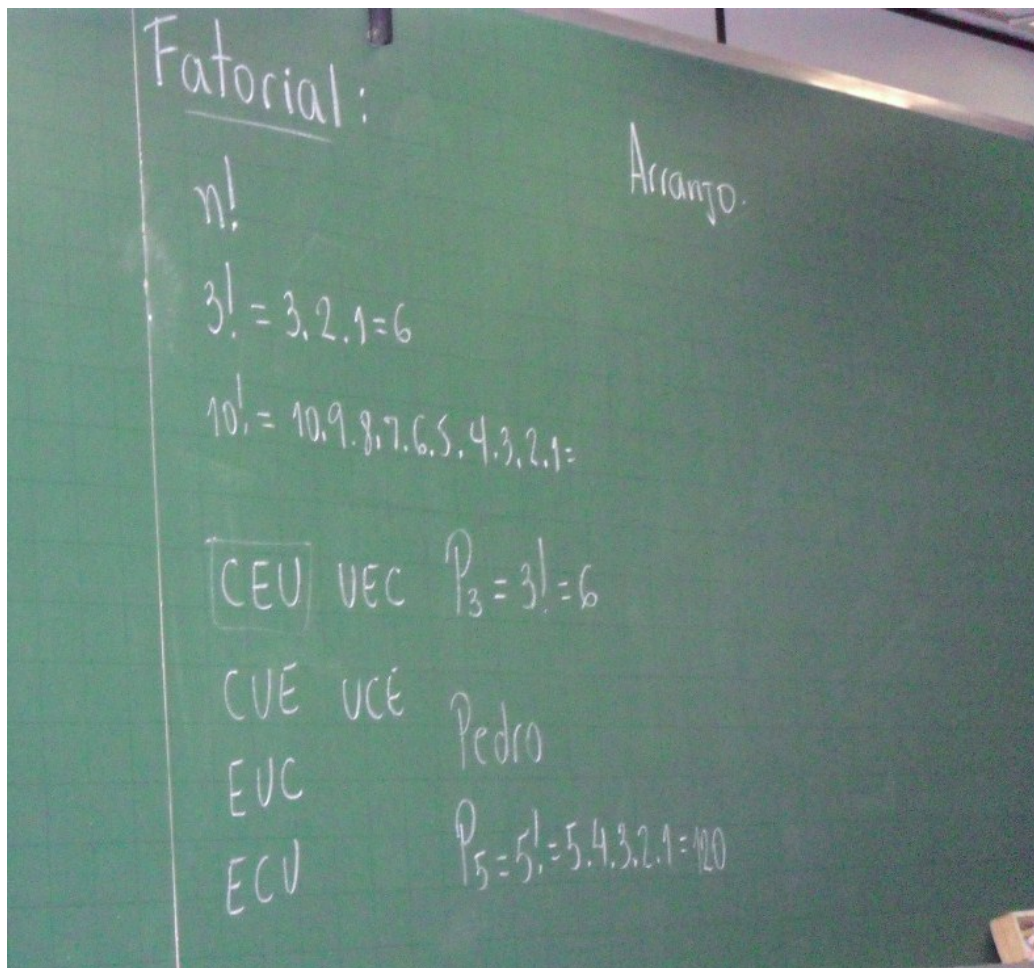


Figura 51 – Retomada de conteúdo (I) – Atividade 5 – Fase II

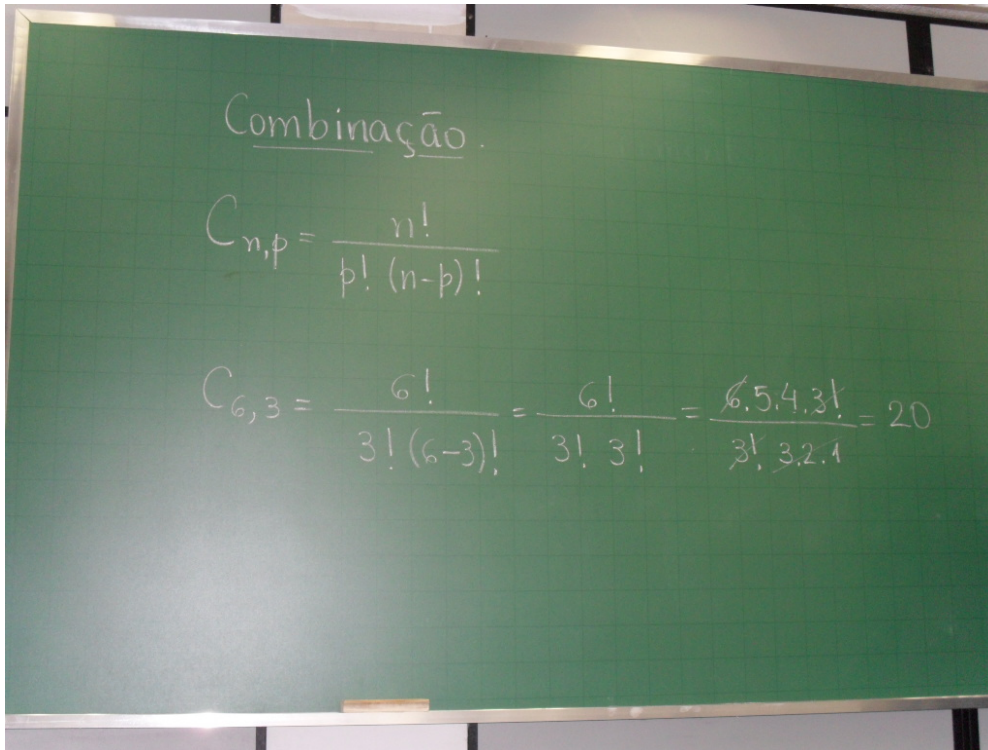
Fonte: Acervo pessoal

Arranjo. $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5040$$
$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Figura 52 – Retomada de conteúdo (II) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal



Combinac̃ao.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$
$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! (6-3)!} = \frac{6!}{3! 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Figura 53 – Retomada de conteúdo (III) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Após esta retomada dos conceitos de fatorial, permutac̃ao simples, arranjo simples e combinac̃ao simples, os alunos foram convidados a refletirem sobre qual destes conceitos se adequava ao conceito de distribuic̃ao Binomial utilizado em nosso experimento. Precisaram, aÍ, considerar as caracterÍsticas de cada conceito tais como, formac̃ao de grupos, ordem dos elementos de cada grupo, dentre outras questões. Nas figuras a seguir apresentamos mais trÊs recortes do trabalho realizado.

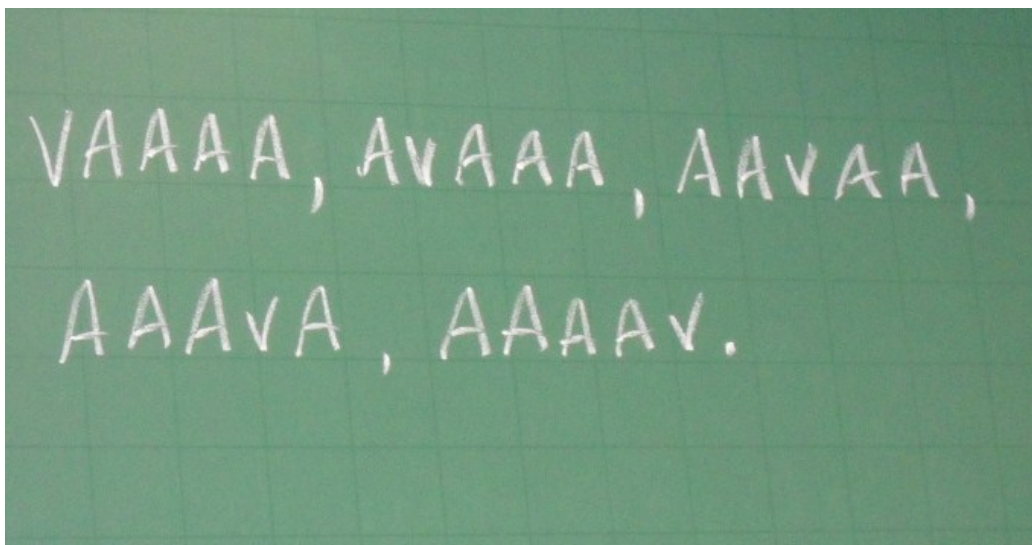


Figura 54 – Retomada de conteúdo (IV) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Handwritten binomial probability formula on a green grid background:

$$P(X=1) = 5 \cdot (0,4)^1 \cdot (0,6)^4$$

$$P(X=k) = \textcircled{5} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

?

Figura 55 – Retomada de conteúdo (V) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

$$P(X=k) = 5 \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

?

↓

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

número binomial

Figura 56 – Retomada de conteúdo (VI) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

O desenvolvimento deste trabalho favoreceu o entendimento dos alunos que perceberam então que o número de vezes em que determinado número de bolas verdes aparece corresponde a um número binomial, onde “n” é o número de bolinhas retiradas e “k” é o número de bolas verdes obtidas. Sendo assim, afirmaram terem compreendido a composição da fórmula requerida nesta atividade 5 como sendo $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Como previsto, a conversão do registro numérico para o simbólico não ocorreu espontaneamente, sendo as intervenções realizadas fundamentais para a

formalização da situação. Encerramos a análise da atividade 5 apresentando mais uma figura que reproduz trecho do trabalho desenvolvido.

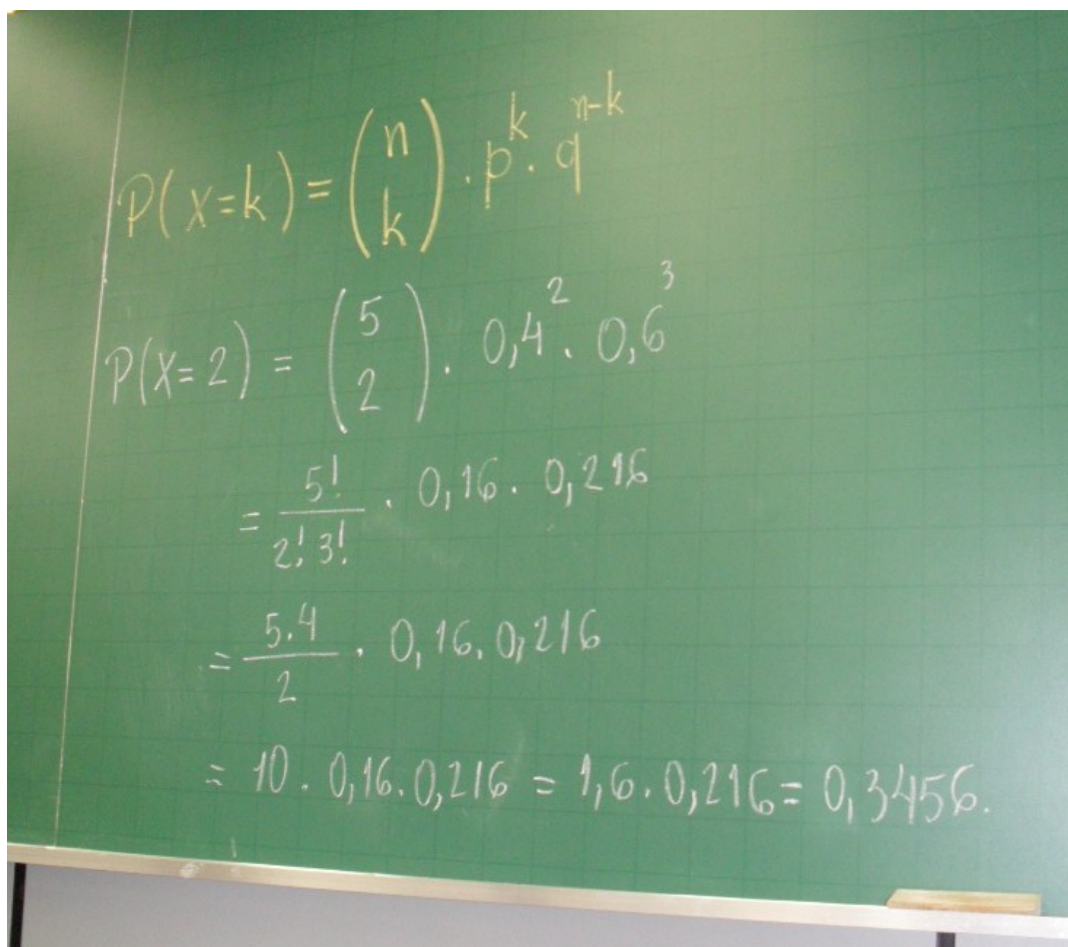

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \\P(X=2) &= \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 \\&= \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,16 \cdot 0,216 \\&= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0,16 \cdot 0,216 \\&= 10 \cdot 0,16 \cdot 0,216 = 1,6 \cdot 0,216 = 0,3456.\end{aligned}$$

Figura 57 – Retomada de conteúdo (VII) – Atividade 5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Considerando a construção realizada em conjunto com os sujeitos de pesquisa, concluímos que o objetivo da atividade foi atingido e procuraremos avaliar em que medida esse conjunto de atividades fornecerá o suporte necessário para a resolução da atividade 6.

Uma vez deduzida a fórmula de distribuição Binomial, foi proposta a atividade 6 que teve por objetivo que os alunos aplicassem a fórmula construída, na resolução de situações-problema.

Era esperado o uso dos registros da língua natural, numérico e simbólico. Também eram esperadas conversões dos registros da língua natural para o simbólico e deste para o numérico. A expectativa era de que a fórmula de distribuição Binomial deduzida na atividade 5 fosse utilizada e que a resolução das situações-problema apresentadas nesta atividade não trouxesse maiores dificuldades aos grupos de alunos.

No quadro 48 apresentamos a atividade proposta.

Atividade 6

Tarefa:

Resolva os seguintes problemas:

1) Uma prova é constituída de 7 questões em forma de teste com 5 alternativas em cada teste, onde apenas uma é correta. Se um aluno “chutar” todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar:

- a) exatamente 6 questões?
- b) exatamente 4 questões?
- c) exatamente 1 questão?

2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:

- a) exatamente quatro vezes?
- b) exatamente seis vezes?
- c) exatamente dez vezes?

Quadro 48 – Atividade 6 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Os grupos *D.E.* e *I.V.O.* aplicaram a fórmula da distribuição Binomial na resolução das situações-problema. Não houve, em ambos os grupos, a conversão do registro da língua natural para o simbólico e, a conversão do registro simbólico

para o numérico não se deu em sua plenitude. Embora os dois grupos tenham chegado às respostas corretas em todos os itens da tarefa proposta, excetuando-se o trio *I.V.O.* que no item “c” da situação 2 deu uma resposta errada pela falta de uma ordem decimal, não houve por parte dos grupos, o cuidado de apresentar, no registro numérico, uma forma organizada dos cálculos por eles desenvolvidos. Ocorreram omissões de alguns dados e foram percebidos também problemas notacionais que, no entanto, não prejudicaram o resultado final. Não foi necessária a interferência do professor-pesquisador. Os grupos não levaram muito tempo para concluir a tarefa. Talvez esteja aí a explicação para estas pequenas incorreções citadas. Figueiredo (2000) ressaltou em seu trabalho que a maioria dos alunos apresentou resultados satisfatórios diante de questões apresentadas em linguagem natural escrita, enquanto que em questões análogas apresentadas na linguagem simbólica as dificuldades surgidas foram bem mais acentuadas. No nosso caso, os alunos apresentaram dificuldades notacionais ao se verem diante da necessidade do uso dos registros simbólico e numérico. Também Souza (2002) concluiu em seu trabalho que deficiências em pré-requisitos, tais como ausência de linguagem simbólica, interferiram no trabalho de sua pesquisa devido às muitas dificuldades apresentadas pelos seus alunos.

Reproduzimos nos quadros 49 e 50, a seguir, os registros numéricos utilizados pelos grupos *D.E.* e *I.V.O.*

1)

$$\text{a) } P(6) = \binom{7}{6} \cdot (0,2)^6 \cdot (0,8)^1 \therefore \frac{7!}{6!(7-1)!} = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1!} = 7$$

$$P(6) = 0,0003584$$

$$\text{b) } P(4) = \binom{7}{4} \cdot (0,2)^4 \cdot (0,8)^3 \therefore \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$$

$$P(4) = 0,028672$$

$$\text{c) } P(1) = \binom{7}{1} \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^6 \therefore \frac{7!}{1!(7-1)!} = 7$$

$$P(1) = 0,3670016$$

$$\text{2) a) } P(4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4=6} \therefore \frac{10!}{4!(10-4)!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = 210 \rightarrow 0,054265875$$

$$\text{b) } P(6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-6} \therefore \frac{10!}{6!(10-6)!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{6! \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = 210 \rightarrow 0,002170635$$

$$\text{c) } P(10) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-10} \therefore \frac{10!}{10!(10-10)!} = 1$$

$$P(10) = 0,000000016$$

Quadro 49 – Respostas da dupla D.E. – Atividade 6 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Podemos perceber no quadro anterior, dentre outros, um erro de registro no item “a” da situação 1, no qual os alunos registraram “(7 – 1)!” no lugar de “(7 – 6)!” obtendo, apesar do erro, o resultado correto “1!”.

1)

$$\text{a) } P(6) = \binom{7}{6} (0,2)^6 (0,8)^{7-6} = \frac{7!6!}{6!.1!} \cdot 0,000064 \cdot 0,8 \rightarrow \\ \rightarrow 0,0003584$$

$$\text{b) } P(4) = \binom{7}{4} (0,2)^4 (0,8)^{7-4} = \frac{7!.6!.5!.4!}{4!.3!} \cdot 0,0016 \cdot 0,512 \rightarrow \\ \rightarrow 0,028672$$

$$\text{c) } P(1) = \binom{7}{1} (0,2)^1 (0,8)^{7-1} = \\ = \frac{7!.6!.5!.4!.3!.2!.1!}{1!.6!.5!.4!.3!.2!.1!} \cdot 0,2 \cdot 0,262144 = 0,3670016$$

$$\text{2) a) } P(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4} = \\ = \frac{10!.9!.8!.7!.6!.5!.4!}{4!.6!} \cdot 0,000771 \cdot 0,3348 = 0,0542$$

$$\text{b) } P(6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-6} = \\ = \frac{10!.9!.8!.7!.6!}{6!.4!} \cdot 0,000021 \cdot 0,4822 = 0,002126$$

$$\text{c) } P(10) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-10} = \frac{10!}{10!} \cdot 0,000000161 = \\ = 0,00000016$$

Quadro 50 – Respostas do trio *I.V.O.* – Atividade 6 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Em todos os itens, a dupla *J.M.* não obteve resultados corretos. Como as outras duplas, ela não solicitou a presença do professor-pesquisador e concluiu a tarefa sem levar muito tempo para isso. Observando as respostas dadas pelos alunos desta dupla e reproduzidas no quadro 51, notamos evidências de que, para eles, a atividade 5 não foi suficiente para fundamentar a resolução da atividade 6.

Em todas as respostas, a dupla *J.M.* registrou o número binomial como uma fração. Numa mesma situação-problema, utilizaram valores distintos para representar tanto a probabilidade de sucesso “p” quanto a probabilidade de insucesso “q”, chegando ao extremo de considerarem como 100% a probabilidade de sair o número 6 exatamente 10 vezes em 10 lançamentos de um dado. Ao efetuarem os cálculos de cada probabilidade, parecem ter utilizado o seguinte raciocínio: multiplicar a fração (número binomial) pelas probabilidades de sucesso e de insucesso e transformar o resultado decimal obtido num resultado na forma de porcentagem, fazendo a leitura tendo como referência a segunda ordem decimal”. Como exemplo citamos os cálculos feitos no item “b” da situação 1:

$$P(4) = \binom{7}{4} (0,3)^4 \cdot (0,7)^3$$

$$P(4) = \frac{7}{4} \cdot 0,0081 \cdot 0,343$$

$$P(4) = \frac{0,0194481}{4}$$

$$P(4) = 0,0048 = 4\%$$

Como já relatado, não foi solicitada a interferência do professor-pesquisador no trabalho dos grupos sendo, portanto essa dedução acima meramente especulativa.

Esta dupla não realizou satisfatoriamente a conversão do registro da língua natural para o simbólico nem deste para o registro numérico, uma vez que suas respostas não apresentaram o que deles se esperava após o desenvolvimento da atividade 5.

Considerando que na metodologia *Design Experiment* adotada o experimento é organizado em ciclos e, em cada um dos ciclos todos os envolvidos têm a condição de refletirem sobre suas ações, o professor-pesquisador promoveu, neste momento, alguns ajustes com a intenção de que a dupla *J.M.* evoluísse na sua compreensão. Todos os alunos foram então convidados a discutirem em conjunto sobre as respostas dadas aos dois problemas da atividade 6. Os alunos da dupla *J.M.* tiveram dificuldade para explicar o raciocínio utilizado na realização da tarefa. Perceberam, porém, as incorreções cometidas, e alegaram terem considerado o número binomial como sendo uma fração, o que confirmou nossa dedução citada

nesta análise. Após solicitação do professor-pesquisador, refizeram todos os cálculos chegando, aí, aos resultados esperados.

1)

$$\text{a) } P(6) = \binom{7}{6} \cdot (0,2)^6 \cdot (0,8)^{7-6} = 0,5\%$$

$$\text{b) } P(4) = \binom{7}{4} \cdot (0,3)^4 \cdot (0,7)^{7-4} = 0,4\%$$

$$\text{c) } P(1) = \binom{7}{1} \cdot (0,1)^1 \cdot (0,9)^{7-1} = 0,3\%$$

2)

$$\text{a) } P(4) = \binom{10}{4} \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6)^{10-4} = 0,2\%$$

$$\text{b) } P(6) = \binom{10}{6} \cdot (0,6)^6 \cdot (0,4)^{10-6} = 0,1\%$$

$$\text{c) } P(10) = \binom{10}{10} \cdot (100)^{10} \cdot (0)^{10-10} = 100\%$$

Quadro 51 – Respostas da dupla *J.M.* – Atividade 6 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

A atividade 7 descrita a seguir foi realizada no ambiente tecnológico, no qual os sujeitos tiveram a oportunidade de trabalhar com o *Software R*.

O objetivo desta atividade foi proporcionar aos alunos uma exploração diferenciada da distribuição Binomial, efetuando relações simultâneas entre representações gráficas, simbólicas e numéricas, proporcionadas pelo aspecto dinâmico do *software*. Essa ferramenta representa um ambiente rico para a verificação e validação de conjecturas, uma vez que é possível observar, em tempo real, o que uma alteração no registro numérico ocasiona no registro gráfico. Duval (2003) afirma que a mobilização simultânea de ao menos dois registros de

representação ou a possibilidade de troca, a todo o momento, de registro de representação é que promove a originalidade da atividade matemática. O autor afirma, assim, que a compreensão em matemática implica na capacidade de transitar entre mais de um registro de representação semiótica.

Como este *software* nunca havia sido utilizado pelos alunos, antes do início da atividade houve uma breve apresentação do mesmo, a fim de familiarizá-los suficientemente para garantir o estabelecimento de reflexões sobre aspectos da distribuição Binomial.

Atividade 7

Tarefas:

- a) O que representa n ?
- b) O que representa p ?
- c) Aumentando n , o que ocorre com o gráfico?
- d) Aumentando p , o que ocorre com o gráfico?
- e) Se $n = 30$ e $p = 0,2$, verifique no gráfico qual o valor da $P(X=4)$
- f) Se $n = 8$ e $p = 0,3$, determine a probabilidade de cada "X" e verifique qual o valor da soma dessas probabilidades.
- g) Sabe-se que a média da distribuição, indicada por $E(X)$, é dada por $E(X)=n.p$.
Em cada caso abaixo, determine $E(X)$ e observe o gráfico em relação à posição da média $E(X)$ no gráfico. Registre suas observações.

Copie e cole cada gráfico em um documento do MS-WORD.

g1) se $n=10$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g2) se $n=10$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g3) se $n=10$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

g4) se $n=10$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

g5) se $n=15$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g6) se $n=15$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g7) se $n=15$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

g8) se $n=15$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

Quadro 52 – Atividade 7 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Fazendo uso do registro da língua natural e partindo de experimentações observadas na tela do software, nas tarefas “a” e “b”, pretendia-se que os alunos notassem os valores de n (número de tentativas) e de p (probabilidade de sucesso), determinando, assim, o significado de cada um numa distribuição de probabilidade binomial. Todos os grupos responderam da mesma forma atribuindo a “ n ” o número de tentativas e a “ p ” a probabilidade de sucesso.

Nas tarefas “c” e “d”, após atribuírem valores para “ n ” e para “ p ”, os alunos comandaram a construção do gráfico correspondente à situação. Houve então uma conversão realizada pelo *software* do registro numérico para o registro gráfico. Esperávamos que os alunos percebessem no gráfico construído as grandezas “ n ” e “ p ” analisadas, ou seja, que aumentando o valor de “ p ” com “ n ” fixo, o gráfico sofreria um “deslocamento” do seu ponto máximo para a direita, uma vez que quanto maior a probabilidade de sucesso em uma tentativa, maior será a possibilidade de uma quantidade maior de sucessos. Já quando se aumenta o valor de “ n ” com “ p ” fixo, este “deslocamento” não ocorre havendo então apenas uma alteração na posição do ponto máximo, de acordo com a alteração provocada em “ n ”. A partir daí, variando os valores de acordo com o que é pedido em cada tarefa, os alunos deveriam se utilizar do registro da língua natural para respondê-las. Inicialmente, nenhum dos grupos percebeu o esperado. Todos responderam que a probabilidade diminui ao aumentarmos “ n ” baseando-se apenas nas alterações verificadas no eixo vertical. Já quando se aumenta o “ p ”, segundo a dupla *D.E.* “*O gráfico fica mais limpo, ou seja, se aproxima do ideal*” enquanto que o trio *I.V.O.* respondeu “*Quanto maior o p maior a probabilidade de sucesso*” e a dupla *J.M.* registrou “*As chances aumentam*”. Percebemos que somente a dupla *D.E.* procurou observar o que ocorria com o gráfico, apresentando, ainda assim, uma resposta que não refletiu o que se pretendia ao propormos a tarefa. Os outros grupos não fizeram a leitura gráfica. Observa-se, por estas produções, a dificuldade dos estudantes em apresentar uma leitura gráfica, apesar de o software proporcionar as relações simultâneas entre os registros envolvidos. Essa observação contraria o que constatou Vieira (2008) em sua pesquisa. A autora afirmou que seus alunos conseguiam realizar a leitura gráfica apresentando, porém, dificuldades na sua construção. O professor-pesquisador considerou ser mais adequado aguardar o desenvolvimento das demais tarefas

desta atividade 7 para aí sim avaliar se houve ou não evolução no entendimento dos sujeitos.

Na tarefa “e” esperávamos que os estudantes pela leitura do gráfico determinassem a resposta 0,13 (aproximadamente). Os grupos *D.E.* e *I.V.O.* responderam 0,13 e a dupla *J.M.* respondeu 0,20, afastando-se do esperado. Ao serem indagados sobre o raciocínio utilizado, disseram ter considerado “a maior probabilidade mostrada no gráfico”. Foram então orientados a lerem novamente o enunciado da tarefa “e”. Como não demonstraram a percepção de tratar-se de $P(X=4)$, o professor-pesquisador chamou-os à atenção para esse fato. Em seguida, fazendo nova leitura no gráfico, reformularam sua resposta para 0,13.

Na tarefa “f” esperávamos que as respostas dadas fossem valores aproximados a $P(X=0)=0,06$; $P(X=1)=0,20$; $P(X=2)=0,29$; $P(X=3)=0,26$; $P(X=4)=0,13$; $P(X=5)=0,04$; $P(X=6)=0,01$; $P(X=7)=0,005$; e $P(X=8)=0,005$, observando que a soma das probabilidades seria igual a 1. Apenas o trio *I.V.O.* não respondeu a probabilidade de cada “X”, dando apenas o valor da soma das probabilidades, demonstrando dificuldades de interpretação do enunciado. Os alunos deste trio tinham, porém, todos os valores das probabilidades de cada “X” anotadas em um rascunho que haviam utilizado para chegarem à soma das mesmas. Os outros dois grupos responderam à tarefa “f” registrando valores próximos aos esperados como se pode verificar no quadro 53 onde são reproduzidas as respostas dos três grupos.

<p>Dupla <i>D.E.</i></p> <p>f) $X(0) = 0,06$; $X(1) = 0,19$; $X(2) = 0,29$; $X(3) = 0,25$; $X(4) = 0,14$; $X(5) = 0,05$; $X(6) = 0,03$; total = 1,00.</p>	<p>Trio <i>I.V.O.</i></p> <p>f) 1,02</p>	<p>Dupla <i>J.M.</i></p> <p>f) $X = 0$; $P = 0,07$</p> <p>$X = 1$; $P = 0,20$</p> <p>$X = 2$; $P = 0,30$</p> <p>$X = 3$; $P = 0,25$</p> <p>$X = 4$; $P = 0,14$</p> <p>$X = 5$; $P = 0,05$</p> <p>$X = 6$; $P = 0,02$</p> <p>$X = 7$; $P = 0$</p> <p>$X = 8$; <u>$P = 0$</u></p> <p>1,03</p>
--	--	---

Quadro 53 – Respostas da tarefa “f” da atividade 7 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Para a tarefa “g” esperávamos que os estudantes, por manipulação no software, constatassem que o resultado da média $[E(X)]$ é um valor próximo do elemento “X” relacionado com o maior valor de probabilidade. Todos os grupos perceberam a relação entre $[E(X)]$ e o elemento “X” relacionado como o maior valor de probabilidade. Os grupos *I.V.O.* e *J.M.* deram respostas idênticas ao passo que a dupla *D.E.* não encontrou os valores esperados de $[E(X)]$ nos itens g_5 , g_6 , g_7 e g_8 da tarefa. Quando indagados sobre o ocorrido, os alunos desta dupla afirmaram que se confundiram na leitura dos enunciados, tendo considerado $n=10$ para todos os itens da tarefa.

Na figura 58 reproduzimos um dos gráficos construídos pela dupla *J.M.* copiados e colados em documentos do MS-WORD como solicitado no enunciado da tarefa “g”.

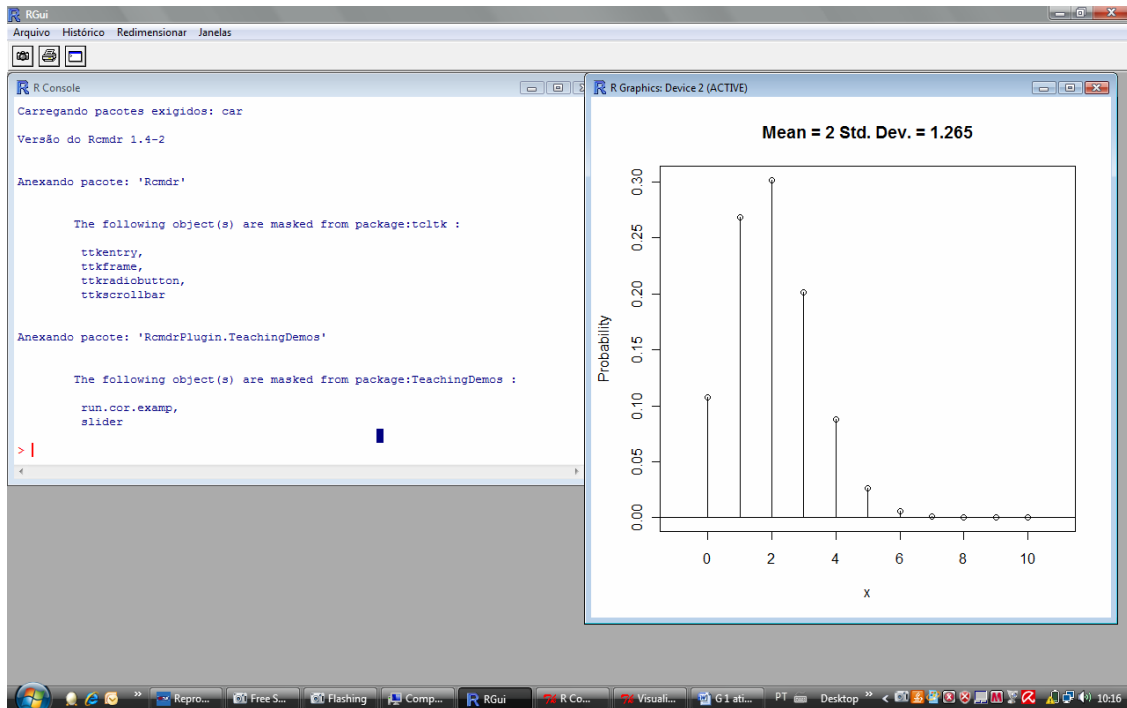


Figura 58 – Gráfico da dupla *J.M.* – item “g₂” da tarefa “g” da atividade 7 – Fase II (gráfico 19)

Fonte: Experimento de ensino

Fato interessante de se relatar diz respeito à percepção dos alunos que não foram iludidos pela representação gráfica nos casos em que o elemento “X” relacionado com o maior valor de probabilidade não representava exatamente o valor de $[E(X)]$ como nos itens g₃, g₄, g₅, g₇ e g₈.

A figura 59 nos traz dois desses exemplos.

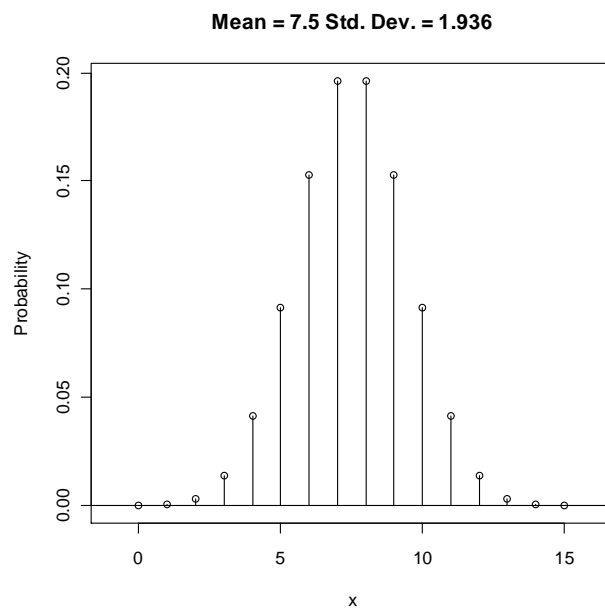
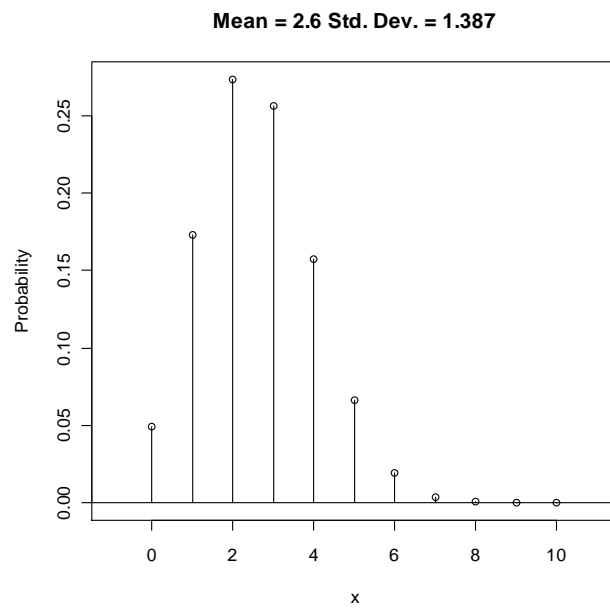


Gráfico 20 – Item “g₃” (se n=10 e p=0,26) da tarefa “g” da atividade 7 – Fase II

Gráfico 21 – Item “g₅” (se n=15 e p=0,5) da tarefa “g” da atividade 7 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Figura 59 – Itens “g₃” e “g₅” respectivamente da tarefa “g” da atividade 7 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Apesar de terem em sua maioria obtido êxito na execução das tarefas previstas na atividade 7 os sujeitos não demonstraram a compreensão do padrão de comportamento das curvas, na medida em que variavam os valores das grandezas. Termos como “gráfico mais limpo”, “barras mais altas”, “mais barras” e “menos barras” foram trazidos pelos alunos sem, no entanto produzirem uma conclusão mais elaborada sobre o significado de cada uma destas alterações verificadas nos registros gráficos construídos.

Ao analisarmos as produções dos sujeitos, percebemos que o *software* teve papel importante na resolução da atividade, mesmo não tendo sido explorado da maneira que esperávamos. Propiciou a observação da relação entre os valores de “X” e as respectivas probabilidades sem a necessidade de cálculos exaustivos em papel o que facilitou a constatação de que a soma das probabilidades é igual a 1. Já na tarefa “g”, o *software* permitiu a verificação da relação entre os valores de “X” e de $[E(X)]$. Quando comparado ao ambiente papel&lápis, o *software* leva vantagem pelo fato de oferecer ao aluno a possibilidade de manipulação e de verificação simultânea da relação entre o registro gráfico e o registro numérico, permitindo o estabelecimento e a verificação experimental de conjecturas, além de dispensar os inúmeros cálculos que seriam necessários para o estabelecimento desta relação.

Pelas observações aqui registradas, avaliamos que o trabalho no *software* não foi suficiente para atingir o esperado. Provavelmente os estudantes não estão acostumados com esse tipo de exploração. Talvez fossem necessárias mais atividades de exploração e mais questionamentos. Sugerimos, então, para aqueles que desejarem utilizar o experimento, a inserção de mais itens e questionamentos para que o estudante tenha maiores condições de estabelecer as relações esperadas.

Após o trabalho com o *Software-R* no computador, passamos à atividade 8, composta de quatro tarefas propostas no ambiente papel&lápis. Pretendíamos observar se o trabalho anterior no *software* permitiria ao estudante o estabelecimento de análises que partiam do registro gráfico.

Na tarefa 1 foram apresentados aos alunos registros gráficos em papel solicitando então que os mesmos identificassem elementos componentes da distribuição Binomial. Para a realização desta tarefa foi necessário o uso dos registros de representação gráfico dado pela atividade, numérico e da língua natural.

Com isso, esperávamos que os sujeitos procedessem as conversões entre os registros gráficos e os registros numéricos e da língua natural.

Para facilitar a leitura, reproduziremos os gráficos propostos nesta tarefa em quadros, seguidos da análise das respostas dadas pelos alunos.

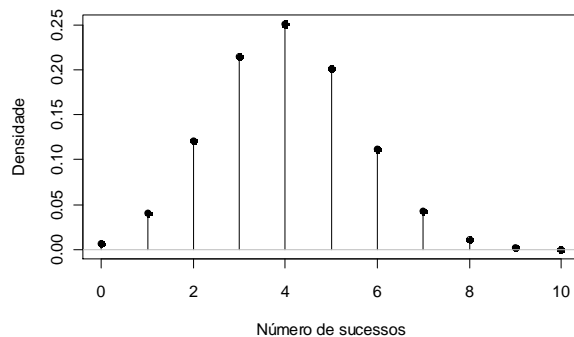
Atividade 8

Tarefa 1:

1) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.



Quadro 54 – Atividade 8, tarefa 1.1 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Todos os grupos responderam corretamente às questões da tarefa 1 item 1: $n = 10$ e “ p ” menor do que 0,5. Nenhum grupo, no entanto associou o deslocamento do gráfico para a esquerda para justificar que “ p ” era menor do que 0,5. Para a determinação do valor de “ p ”, todos o encontraram efetuando a divisão do “ X ” relacionado à maior probabilidade ($X=4$) pelo valor de “ n ”.

Desta forma, observa-se que os estudantes se utilizaram da fórmula $E(X)=n.p$ para estimar o valor de “p”, estabelecendo uma conversão do registro simbólico para o numérico, fato não esperado. Como a questão não solicitava o valor de “p”, mas apenas a análise deste valor em relação ao número 0,5, era esperado que os estudantes partissem da análise gráfica para justificar sua resposta. É provável que a tarefa da atividade anterior do experimento, a qual mostrava a aproximação entre o valor de $E(X)=n.p$ e o valor de “X” de maior probabilidade, tenha influenciado nessa resolução, desviando a atenção do estudante com relação à análise gráfica.

A seguir, apresentamos o enunciado da tarefa 1.2. da atividade 8.

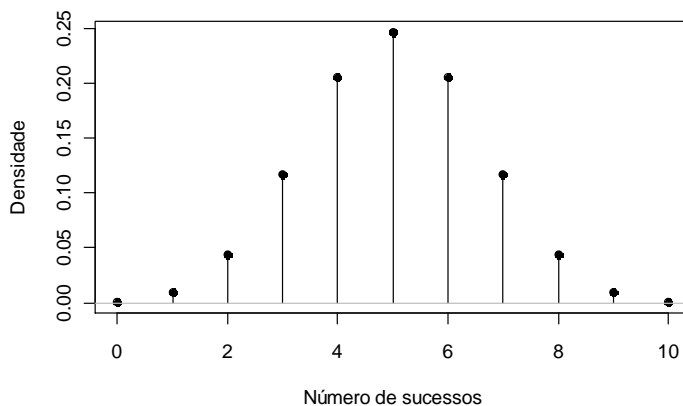
Atividade 8

Tarefa 1:

2) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

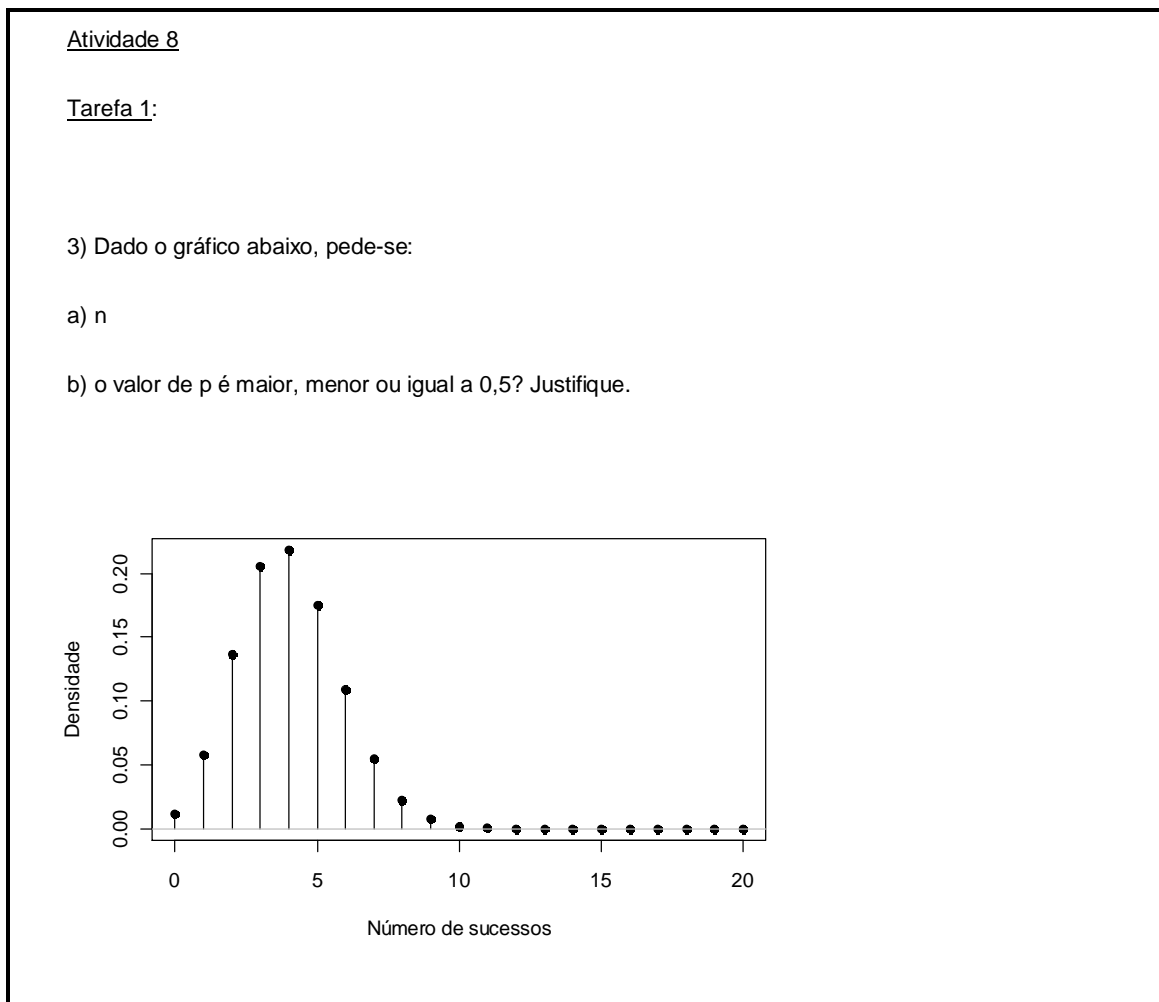


Quadro 55 – Atividade 8, tarefa 1.2 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Também neste registro gráfico todos os grupos responderam acertadamente: $n = 10$ e “ p ” igual a 0,5. Novamente não foi destacada a disposição do gráfico que, neste caso, apresenta uma simetria com o eixo em $X=5$. Para o cálculo de “ p ”, fizeram a divisão de 5 por 10.

O quadro 56 contém o enunciado da próxima tarefa da Atividade 8.



Quadro 56 – Atividade 8, tarefa 1.3 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Os três grupos responderam que, neste registro gráfico, $n = 20$ e “ p ” é menor do que 0,5 de forma correta mais uma vez. As justificativas seguiram o mesmo estilo

das duas anteriores, sem fazer qualquer menção ao deslocamento do gráfico para a esquerda, o que poderia indicar ser “p” menor do que 0,5. Novamente eles utilizaram apenas o quociente entre o valor de “X” que apresenta a maior probabilidade e o valor de “n”. Somente a dupla *J.M.* esboçou uma justificativa ao registrar na língua natural: “O valor de p é menor que 0,5 pois o número de sucesso é maior e a probabilidade menor”.

A seguir, apresentamos o enunciado da próxima tarefa da Atividade 8.

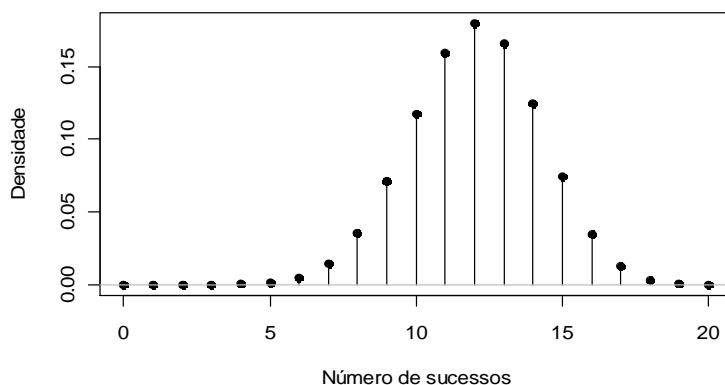
Atividade 8

Tarefa 1:

4) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.



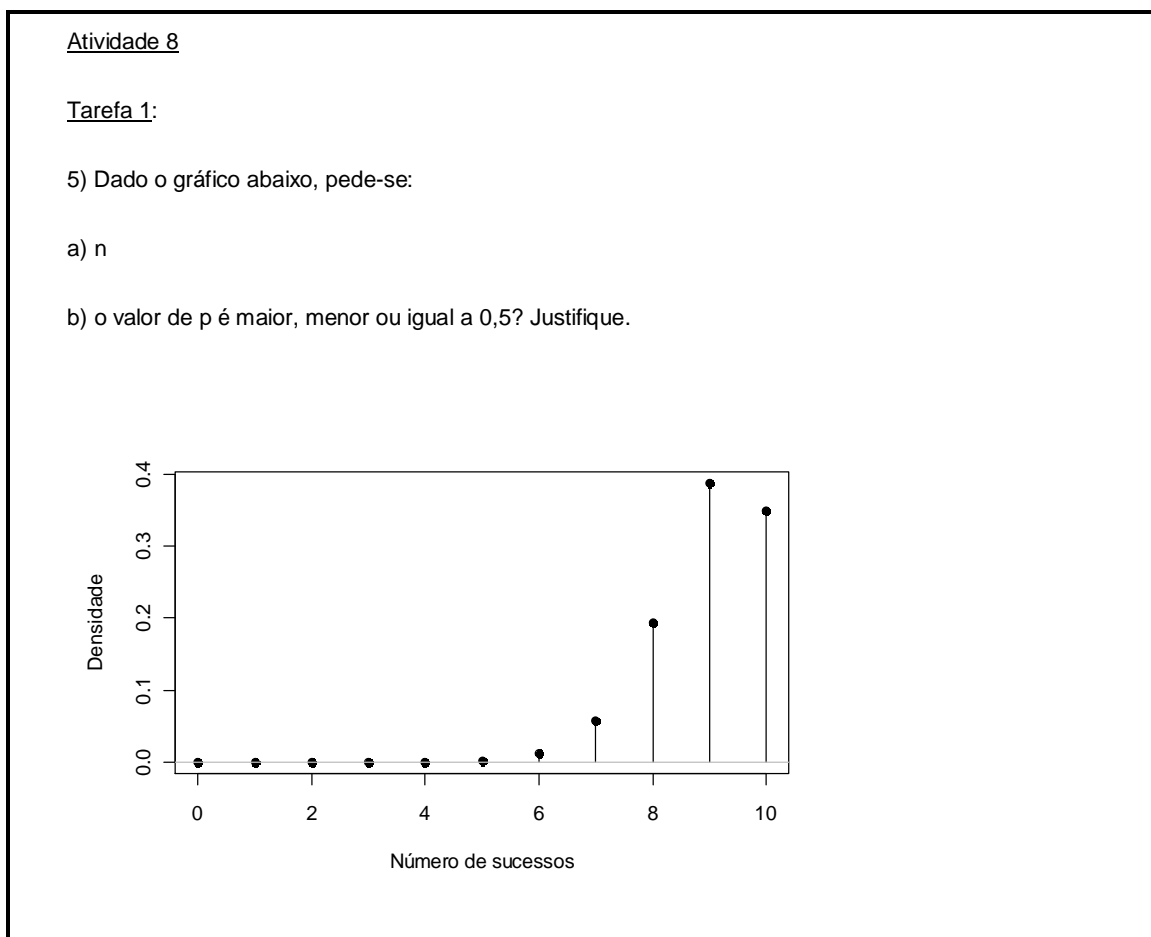
Quadro 57 – Atividade 8, tarefa 1.4 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Em mais essa oportunidade as respostas dos três grupos foi acertada. Todos registraram $n = 20$ e “p” maior do que 0,5. O valor de “p” foi calculado pela divisão de

12, que representa o “X” de maior probabilidade no registro gráfico proposto, pelo valor de “n”.

No quadro 58, apresentamos o enunciado da tarefa 1.5 da Atividade 8.



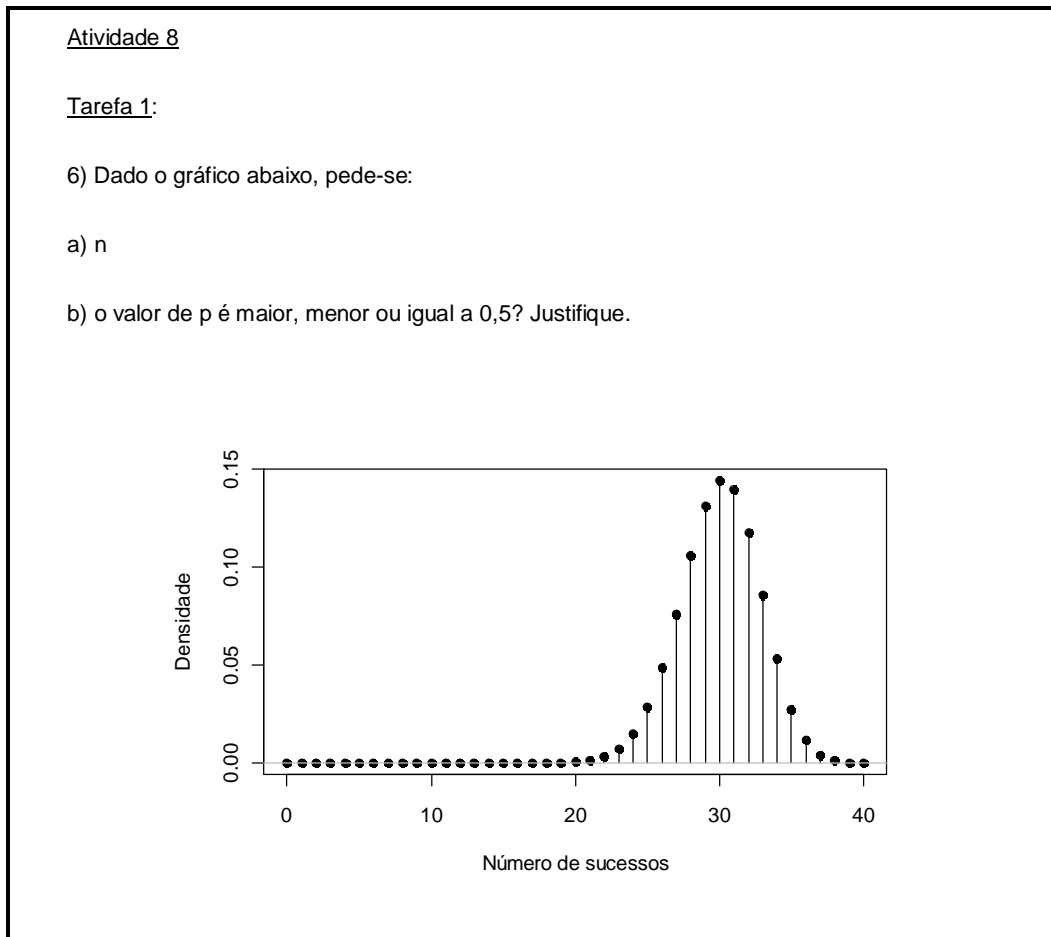
Quadro 58 – Atividade 8, tarefa 1.5 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado nas análises dos quatro registros gráficos anteriores, os grupos, sem exceção, acertaram os valores de $n = 10$ e “p” maior do que 0,5. Outra vez a dupla *J.M.* foi um pouco além na sua justificativa dizendo que p é maior do que 0,5 “*pois a probabilidade chega quase a 1*”. Sabemos,

no entanto que essa conclusão só foi elaborada após a observação do valor de $p = 0,9$ que foi obtido da mesma forma que das etapas anteriores desta tarefa.

A seguir, apresentamos o enunciado da tarefa 1.6 da Atividade 8.



Quadro 59 – Atividade 8, tarefa 1.6 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Respondendo $n = 40$ e “ p ” maior do que $0,5$, todos os grupos concluíram a tarefa 1 com acerto, valendo-se do mesmo raciocínio já mencionado nesta análise.

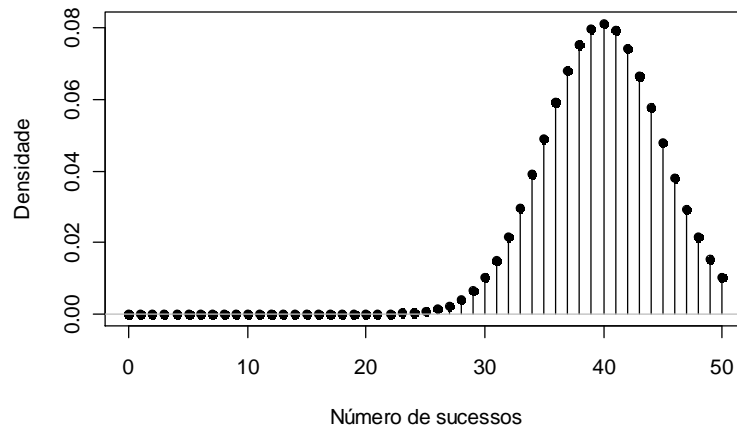
Concluimos assim, que na atividade 8, não houve a percepção dos alunos sobre o comportamento do registro gráfico conforme eram alterados os valores de “ n ” e de “ p ”. Os deslocamentos para a esquerda ou para a direita, bem como a simetria presente na situação do registro gráfico 2 foram ignorados pelos sujeitos durante a aplicação da atividade. É provável que o enunciado da atividade 7 tenha

contribuído para esse resultado, uma vez que nele apresentamos a possibilidade de se estimar $E(X)$ fazendo $n.p$. Em seguida, na execução da tarefa “g” desta mesma atividade 7, foi possível aos alunos perceberem a relação existente entre o “X” de maior probabilidade, o valor de “p” e o valor de “n”. Parece-nos, então que os alunos foram induzidos ao cálculo algébrico, o que acabou por permitir que não mantivessem a atenção no registro gráfico como um todo, procurando perceber as alterações advindas dos valores creditados a “p” e a “n”. A dupla *D.E.* por exemplo, usou a expressão “*Porque o cálculo demonstra*” em todas as suas justificativas. Ainda assim consideramos positivos os resultados obtidos com a tarefa no que diz respeito às conversões do registro gráfico para os registros simbólicos, numéricos e da língua natural.

Na tarefa 2, também foram apresentados aos sujeitos registros gráficos em papel solicitando então que os mesmos identificassem elementos componentes da distribuição Binomial. Nesta tarefa, avaliando o gráfico, pretendíamos que os estudantes determinassem o valor de “n” e apresentassem uma estimativa de “p”, “q” (valor da probabilidade complementar) e de $[E(X)]$ (valor da esperança de probabilidade). Para a realização desta tarefa foi necessário o uso dos registros de representação gráfico dado pela atividade, numérico e da língua natural. Os sujeitos deveriam proceder a conversões entre os registros gráficos e os registros numéricos e da língua natural bem como do registro simbólico para o numérico, no caso do cálculo de “q”. A seguir, apresentaremos os enunciados dessas tarefas.

Atividade 8Tarefa 2:

1) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .

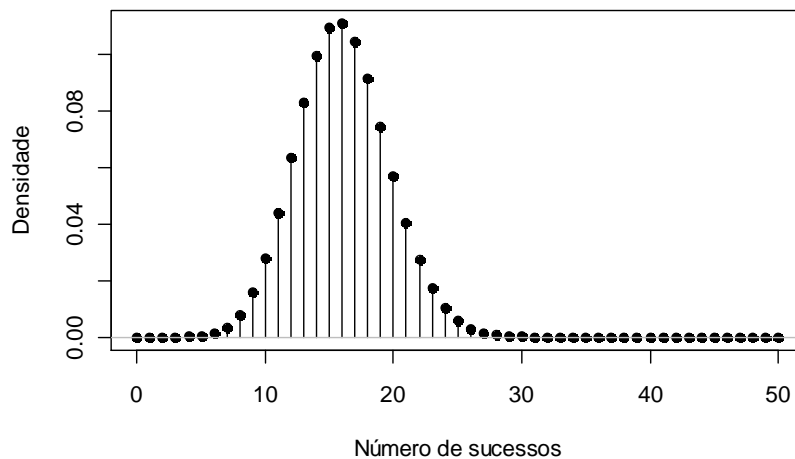


Quadro 60 – Atividade 8, tarefa 2.1 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Atividade 8Tarefa 2:

2) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .



Quadro 61 – Atividade 8, tarefa 2.2 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Não houve nenhuma dificuldade na realização desta atividade. Em cada registro gráfico, os alunos fizeram a leitura do valor de “ n ” no eixo horizontal, observaram o valor de “ X ” que possuía a maior probabilidade e, baseados nas atividades anteriores, efetuaram as operações necessárias para chegarem aos valores corretos da estimativa de $[E(X)]$ e de “ p ”. Quanto ao valor de “ q ”, os alunos mencionaram a lembrança de terem com ele trabalhado na atividade 5 deste experimento e, após alguns questionamentos do professor-pesquisador, concluíram tratar-se da probabilidade complementar $(1 - p)$. A partir daí, estimar o seu valor em ambos os registros gráficos propostos foi algo muito natural a todos os grupos.

Como já esperado por nós quando da análise prévia do experimento, foram realizadas as conversões do registro gráfico para o numérico e para o da língua natural assim como do simbólico para o numérico.

As tarefas 3 e 4 tinham por objetivo que os alunos interpretassem as informações contidas nos gráficos da tarefa 2 fazendo conversões dos registros numérico para a língua natural e gráfico para o registro da língua natural.

Esperávamos que os estudantes estabelecessem a comparação solicitada com base nos resultados numéricos encontrados, mas que também fizessem uma análise gráfica com base no questionamento apresentado. Esperávamos, também, após todas estas tarefas executadas, que os alunos tivessem condições de perceber o deslocamento da curva de acordo com os valores de “n” e “p” dados. Neste caso, bastaria a eles identificarem em qual dos registros gráficos o valor de $[E(X)]$ está mais próximo de 25, que é o valor esperado no caso de $p=0,5$.

Atividade 8

Tarefa 3:

Em qual gráfico da tarefa 2 o valor da probabilidade “p” está “mais próximo” de 0,5? Justifique pelos valores encontrados e pela análise gráfica.

Tarefa 4:

Qual gráfico da tarefa 2 apresenta o maior número de tentativas? Justifique.

Quadro 62 – Atividade 8, tarefas 3 e 4 – Fase II

Fonte: Acervo pessoal

Ao responderem à tarefa 3, os grupos *D.E.* e *I.V.O.* nos surpreenderam positivamente. A dupla *D.E.* mencionou a estética como fator preponderante para a definição de qual dos registros gráficos apresenta “p” mais próximo de 0,5. Parece-nos, neste momento que ao final do experimento, essa dupla revela ter percebido que a disposição dos valores no gráfico determinam a relação entre o valor de “p” e 0,5 como investigamos na tarefa 1 desta atividade. O trio *I.V.O.* também mencionou o fato de terem observado que a disposição dos pontos indicava uma tendência centralizada. Também aqui consideramos ter ocorrido progresso no entendimento

dos alunos deste trio em relação à sua produção na tarefa 1 desta mesma atividade. A dupla *J.M.* por sua vez, também considerou ser o gráfico 2 o que apresentava um valor de “p” mais próximo de 0,5, alegando estar este gráfico melhor distribuído do que o primeiro. Há, nesta referência à distribuição gráfica, uma possibilidade de eles também terem percebido a tendência centralizada dos pontos.

O quadro 63 reproduz as respostas dos grupos para o questionamento presente na tarefa 3.

<i>D.E.</i>	<i>I.V.O.</i>	<i>J.M.</i>
O gráfico que apresenta o p de 0,3, porque visivelmente ele está melhor “esteticamente” distribuído.	Verificou-se que o valor que se aproximou de p foi 0,32, uma vez que, falta (sic) apenas 0,18 para 0,5. Analisando o gráfico verifica-se que a disposição dos pontos indica uma disposição e tendência centralizada.	O que mais se aproxima é o gráfico 2.2. Na comparação entre os dois gráficos ele está melhor distribuído. A probabilidade de sucesso é menor.

Quadro 63 – Respostas da tarefa 3 da atividade 8 – Fase II

Fonte: Experimento de ensino

Com base nestas produções, constatamos que os estudantes adquiriram, por meio das explorações no software, a percepção da análise gráfica da probabilidade de sucesso. Provavelmente, nas atividades anteriores, o outro método de análise foi escolhido por fornecer um valor aproximado de “p”.

Para a tarefa 4 não tivemos unanimidade de respostas. Enquanto os grupos *D.E.* e *I.V.O.* responderam não haver diferença no número de tentativas sendo em ambos os casos $n = 50$, a dupla *J.M.* disse que no gráfico 1 o número de tentativas foi maior com número de retiradas igual a 50 e probabilidade de 80%. Parece-nos ter ocorrido uma confusão entre os dados presentes nos registros gráficos e o que se perguntou no enunciado da tarefa. Novamente se apresentou aqui uma situação onde os sujeitos dessa dupla não conseguiram se expressar no registro da língua natural com clareza. O professor-pesquisador sugeriu então que as respostas fossem analisadas em conjunto. O aluno *M.*, percebendo o equívoco na resposta da

sua dupla, alegou terem confundido os dados fornecidos nos registros gráficos analisados na tarefa. O aluno *J.* concordou com o colega e respondeu oralmente, desta vez de forma correta.

Neste ponto final do nosso experimento esperávamos que os alunos tivessem condições de perceber as relações existentes entre o número de tentativas, o valor da probabilidade de sucesso e o registro gráfico das representações das situações que envolvem distribuição Binomial. Pelas produções analisadas, concluímos que nosso objetivo foi atingido quase que na totalidade, pois chegamos ao término das atividades previstas observando que alguns alunos tiveram um aproveitamento maior do que outros. Isso considerado, concluímos que os alunos conseguiram atingir as expectativas. Partindo do gráfico, eles determinaram “*n*” e conseguiram estimar “*p*” por meio da observação de que $[E(X)]$ tem valor próximo do “*X*” de maior probabilidade. Apesar de utilizarem um caminho não previsto na atividade inicial, os alunos mostraram a compreensão gráfica da relação entre “*p*” e o gráfico na última atividade.

Ao compararmos as produções individuais dos sujeitos quando da aplicação da atividade preliminar (Fase I) com as produções dos grupos obtidas nesta atividade 8, percebemos claramente uma evolução no entendimento dos mesmos. Enquanto que na tarefa 3, item “*a*” da atividade preliminar, quatro dos sete alunos não conseguiram determinar corretamente o valor do tamanho da amostra, nesta última atividade, na tarefa 1, todos os grupos determinaram com acerto o valor de “*n*” em todos os registros gráficos apresentados. A mesma evolução de entendimento pode ser observada quando comparamos as produções registradas no item “*b*” da tarefa 3 da atividade preliminar, com a tarefa 1 desta atividade 8. Na atividade preliminar, três dos sete alunos responderam incorretamente e os demais, mesmo tendo respondido de forma correta, demonstraram pelas suas justificativas ou ausência delas, não possuírem o entendimento necessário para responder se o valor da probabilidade de sucesso era maior, menor ou igual a 0,5. Já na tarefa 1 da atividade 8, novamente todos os grupos responderam com acerto.

No próximo capítulo, apresentaremos a conclusão de nosso estudo, contendo a análise das principais evoluções detectadas, as influências do software e sugestões para futuras pesquisas.

6 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, apresentaremos uma análise da evolução dos sujeitos que participaram da pesquisa, com base na teoria e nos trabalhos presentes na revisão bibliográfica desse estudo. Além disso, avaliaremos as influências do software-R na execução do experimento. Para melhor situar o leitor, apresentaremos, de forma sintética, os principais pontos de nosso trabalho.

No início da nossa investigação, buscamos na revisão bibliográfica indícios de pesquisas que procuraram tratar de questões relativas ao trabalho com Probabilidade e Estatística na educação básica e no ensino superior. Refletindo sobre as leituras realizadas, decidimo-nos pelo conteúdo de distribuição Binomial como foco da nossa pesquisa, dado que essa distribuição é o ponto de partida para o entendimento de outras distribuições de probabilidades, sendo possível o confronto entre um trabalho experimental e o modelo teórico.

Considerando a importância de um trabalho de integração de diversos registros para o desenvolvimento desse conteúdo, com a intenção de produzir reais mudanças metodológicas que possam ser implementadas em sala de aula, adotamos a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003, 2006) para fundamentar nosso estudo e, nessa mesma perspectiva, selecionamos, como recurso de apoio, o *software* livre *R*, tendo em vista que essa ferramenta permite uma visão interativa e simultânea entre dois registros e a exploração dinâmica de situações que envolvem o registro gráfico. Por tratar-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, com foco no entendimento do pensamento estabelecido pelos estudantes, adotamos o *Design Experiment* de Cobb et al. (2003) como metodologia do nosso estudo. Definidos o conteúdo, a fundamentação teórica e a ferramenta tecnológica, desenvolvemos um experimento de ensino diferenciado, elaborado de forma a explorar os diversos registros nos ambientes papel&lápis e software-R, com a finalidade de favorecer a aprendizagem do conteúdo. Com esse experimento, pretendíamos responder à seguinte questão de pesquisa: Em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software-R*, com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros, influencia na compreensão desse conceito?

Como sujeitos de pesquisa, convidamos sete alunos dos cursos de Engenharia de uma instituição particular de ensino do Estado de São Paulo. Tendo sido alunos do pesquisador quando cursaram a disciplina “Tópicos de Probabilidade e Estatística”, foram desta feita, voluntários a participarem da pesquisa.

Estes alunos foram submetidos à nossa atividade preliminar, de forma individual, atividade esta que visava avaliar os conhecimentos prévios de cada um deles, uma vez que já tiveram contato com o conteúdo.

Após a realização da atividade preliminar, por nós chamada de Fase I, os sujeitos foram divididos em três grupos sendo duas duplas e um trio para o prosseguimento da aplicação do experimento de ensino naquela que foi denominada Fase II. Nesta fase, composta de oito atividades, apesar de o experimento ser realizado em grupos, houve momentos de discussão conjunta entre o professor-pesquisador e todos os alunos, a fim de provocar o debate e a comparação das conclusões obtidas. O professor-pesquisador contou com a colaboração de uma pesquisadora assistente durante todo o processo.

Na análise das produções dos sujeitos envolvidos na pesquisa, percebemos que houve evoluções entre as apresentadas na Fase I, na qual foi aplicada uma atividade preliminar e a Fase II, que contou com as demais atividades. Apresentaremos, então, a análise dessas evoluções.

Observamos na aplicação da atividade 1, tarefa “c”, que todos os grupos consideraram como resultado imaginário da retirada de 5 bolinhas com reposição a cada retirada, 3 amarelas e 2 verdes, chegando a dupla *D.E.* a enfatizar, inclusive, que certamente sairiam menos bolinhas verdes, uma vez que na urna havia também menos bolinhas desta cor do que amarelas. Desta forma, foi constatado que os alunos utilizaram a ideia de proporcionalidade como recurso para apresentar suas respostas, uma vez que não consideravam outras possibilidades senão a de 3 amarelas e 2 verdes. Logo em seguida, na atividade 2, ao realizarem o experimento prático, os alunos desta dupla observaram que não havia esta garantia por eles deduzida. Perceberam, ao preencherem o quadro “Resultados da experimentação”, que o experimento poderia ter como resultado, por exemplo, vvva, vvvva ou até mesmo vvvv. Retomando e analisando a fala do aluno *E*, relatada em nossa análise da atividade 2, que ao preencher o quadro “Resultados da experimentação” disse: *“Acho que erramos na atividade 1. Não dá para saber qual cor vai sair mais”*,

concluimos ter ocorrido uma evolução do entendimento dos alunos que superaram a ideia inicial apresentada na atividade 1 de que o único resultado possível seria 3a e 2v, por meio do trabalho experimental realizado.

No item “c” da tarefa 2 da atividade preliminar, nenhum aluno respondeu corretamente à questão formulada sobre a aplicação da distribuição Binomial. Com o desenvolvimento da Fase II, obtivemos na atividade 6 item 2.a, na qual a mesma questão foi proposta, dois grupos obtendo à resposta correta sem qualquer interferência do professor-pesquisador, como pode ser observado nos quadros 64 e 65 nos quais reproduzimos as questões e as respostas dadas à elas na atividade preliminar e na atividade 6.

Tarefa 2.

Resolva a questão:

Considere um dado “honesto” com faces numeradas de 1 a 6.

a) ...

b) ...

c) se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

Aluno D: $\frac{4}{10}$ **Aluno E:** 4

Atividade 6

Tarefa:

Resolva os seguintes problemas:

1) ...

2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:

a) exatamente quatro vezes?

b) ...

c) ...

Dupla D.E.:

$$P(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4=6} \therefore \frac{10!}{4!(10-4)!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4} = 210 \rightarrow 0,054265875$$

Quadro 64 – Respostas da dupla D.E. – Atividade preliminar – Tarefa 2, item “c” e atividade 6, item “2.a” respectivamente

Fonte: Experimento de ensino

Tarefa 2.

Resolva a questão:

Considere um dado “honesto” com faces numeradas de 1 a 6.

- a) ...
- b) ...
- c) se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

Aluno J: 4 vezes – 40% **Aluno V:** 40% **Aluno O:** $\frac{2}{5}$

Atividade 6

Tarefa:

Resolva os seguintes problemas:

- 1) ...
- 2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:
- a) exatamente quatro vezes?
- b) ...
- c) ...

Trio I.V.O.:

$$P(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4} =$$

$$= \frac{10! \cdot 9! \cdot 8! \cdot 7! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4!}{4! \cdot 6!} \cdot 0,000771 \cdot 0,3348 = 0,0542$$

Quadro 65 – Respostas do trio I.V.O. – Atividade preliminar – Tarefa 2, item “c” e atividade 6, item “2.a” respectivamente

Fonte: Experimento de ensino

Atribuimos essa evolução à construção gradativa e experimental do conceito e à exploração desse objeto matemático por meio dos diferentes registros.

Essa evolução nas produções dos alunos também pode ser verificada quando comparamos as respostas dadas às questões formuladas na tarefa 3 da atividade preliminar, na qual investigávamos a capacidade de interpretação de uma distribuição Binomial dada a partir de seu registro gráfico e as dadas na tarefa 1 da atividade 8, oportunidade na qual os alunos trabalharam no ambiente papel&lápis após terem vivenciado, na atividade 7, o trabalho com o *software R*. Enquanto que na atividade preliminar a maioria dos estudantes apresentou dificuldades em analisar o tamanho da amostra partindo da leitura gráfica e nenhum dos que responderam corretamente sobre a comparação proposta entre o valor da probabilidade de sucesso e 0,5 soube justificar a sua resposta, na atividade 8 já houve acerto na comparação. Foi possível aos alunos, partindo dos registros gráficos dados, a determinação do valor de “n” e a análise de situações em que “p” era maior, menor ou igual a 0,5.

Nos quadros 66 e 67 seguintes, reproduzimos as questões da tarefa 3 da atividade preliminar e da tarefa 1.1 da atividade 8, bem como as respostas dadas à elas por alguns dos alunos, a fim de ilustrar a evolução detectada.

Tarefa 3.

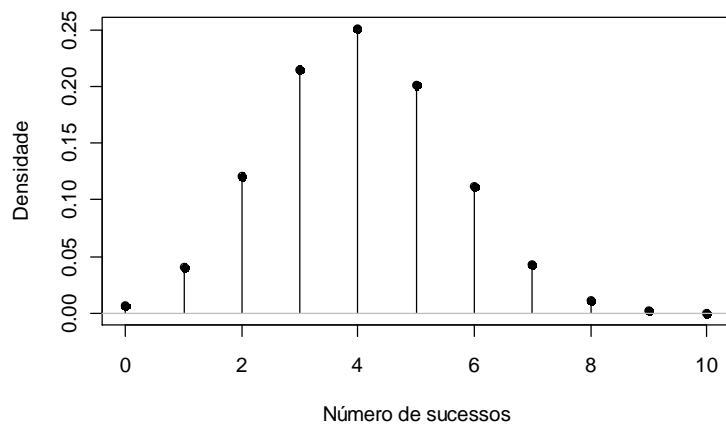
O gráfico seguinte representa uma distribuição Binomial, analise-o e responda as questões.

a) qual o valor do tamanho de amostra? Justifique.

b) o valor da probabilidade de sucesso é:

() maior do que 0,5 () menor do que 0,5 () igual a 0,5

Justifique.



Aluno D: a) 0,25 pelos dados do eixo y. b) maior do que 0,5 pelos dados do eixo x.

Aluno O: a) 0,25, pois é o maior valor atingido. b) maior do que 0,5.

Quadro 66 – Respostas dos alunos D. e O. – Atividade preliminar – Tarefa 3 – Fase I

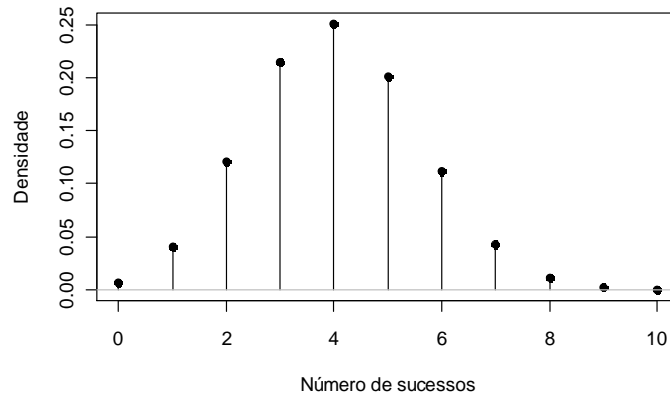
Fonte: Experimento de ensino

Tarefa 1.

1) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.



Dupla D.E.: a) 10 b) $4 = 10p$ $p = 4/10 = 0,4$ (É menor). Porque o cálculo demonstra.

Trio I.V.O.: a) 10 b) O valor de p é menor, pois $p = 4/10 = 0,4$.

Quadro 67 – Respostas dos grupos D.E. e I.V.O. – Atividade 8, tarefa 1.1

Fonte: Experimento de ensino

Atribuímos essa evolução ao trabalho com diversos registros de representação, que buscou o desenvolvimento da coordenação simultânea das conversões entre dois ou mais destes registros e ao aspecto dinâmico do *software*. Segundo Duval (2003), a diversidade dos registros de representação semiótica está presente na Educação Matemática, porém raramente é destacada ou até mesmo trabalhada pelo educador matemático. Aliado a esse trabalho, o *software R*, utilizado como ferramenta de ensino, favoreceu que os alunos percebessem as características da distribuição Binomial, contribuindo para uma compreensão

diferenciada deste conceito, uma vez que pôde proporcionar o trabalho com conversões pouco usuais, como aquelas entre o registro gráfico e os demais. Acreditamos ainda que a opção pela metodologia dos *Design Experiment* também propiciou o bom desenvolvimento das atividades, por permitir a flexibilização na condução do experimento visando a adaptação às produções apresentadas pelos sujeitos, o que foi efetivado em vários momentos em que o professor-pesquisador precisou interferir para propor novas situações que pudessem colaborar para a compreensão dos alunos.

Pretendíamos, com esse estudo, responder a seguinte questão: Em que aspectos uma abordagem diferenciada sobre distribuição Binomial, elaborada nos ambientes papel&lápis e *software R*, com a preocupação de explorar relações entre os diversos registros, influencia na compreensão desse conceito?

A partir da análise das evoluções apresentadas, podemos concluir que a abordagem do *design* influenciou positivamente em diversos aspectos. Em primeiro lugar, ela permitiu o confronto entre o trabalho experimental e o teórico, evidenciando a necessidade de um modelo teórico e superando a concepção ingênua de que só havia um resultado possível (três amarelas e duas verdes) para o experimento proposto. Ela também gerou uma visão integrada do conceito, uma vez que foi explorada a relação entre vários registros, favorecendo o reconhecimento da distribuição nas suas diversas representações. Outro aspecto a considerar é o fato de ela permitir a construção gradativa do conceito, para que o aluno calculasse probabilidades nessa distribuição de forma significativa, dado que a fórmula de cálculo foi construída e discutida com os estudantes. Por fim, destacamos que essa abordagem favoreceu a leitura gráfica, tendo em vista que o *software-R* permitiu o estabelecimento de relações entre os parâmetros “n” e “p” e entre esses e o valor de $[E(X)]$.

Tínhamos por hipóteses de pesquisa que os participantes envolvidos no experimento conseguissem, auxiliados pelas atividades criadas no ambiente papel&lápis e pela ferramenta computacional escolhida, o *Software R*, perceber as características da distribuição Binomial. Diante das evidências apresentadas na análise da evolução dos grupos, podemos concluir que estas características foram percebidas pelos alunos que, do completo desconhecimento do que vinha a ser uma distribuição Binomial e de quais as suas aplicações, chegaram a resolver problemas

reconhecendo haver neles apenas dois resultados possíveis – sucesso e insucesso – bem como identificando os parâmetros “p” e “q” ali envolvidos.

Acreditamos que este bom resultado foi obtido pela conjunção dos dois ambientes, papel&lápiz e *software R*, utilizados na pesquisa.

Uma segunda hipótese consistiu em o estudante observar a importância de um modelo teórico de análise. As atividades 2, 3 e 4 permitiram que os alunos percebessem a diferença entre o trabalho experimental e o teórico. Identificaram que no experimental, havia a influência da aleatoriedade, o que provocou resultados distintos obtidos pelos grupos, enquanto que no modelo teórico, todos obtiveram os mesmos resultados. Perceberam que pelo fato de não termos como prever o resultado exato de um experimento aleatório, devemos buscar os resultados prováveis por meio de um modelo teórico, sendo este utilizado nos estudos das probabilidades. Outra hipótese estabelecida por nós era que os alunos pudessem determinar relações entre representações de diversos registros desse conteúdo. Pela análise das evoluções dos grupos podemos concluir que os alunos, em sua maioria, conseguiram relacionar as representações dos registros numérico, simbólico, gráfico, árvore de possibilidades e da língua natural. Na atividade 5 do experimento, por exemplo, os alunos utilizaram registros numéricos surgidos da conversão de registros de árvore de possibilidades para os simbólicos e destes para os numéricos. No desenvolvimento desta atividade outra conversão foi realizada do registro numérico para o simbólico na ocasião em que determinaram uma fórmula que relacionasse o número de bolinhas verdes com a respectiva probabilidade. O uso do *software R*, na atividade 7, dinamizou os trabalhos, permitindo análises dinâmicas das relações entre os registros. Consideramos assim validada essa nossa hipótese. Havia ainda uma última hipótese a ser verificada. A de que os alunos conseguissem estabelecer análises partindo do registro gráfico, detectando o impacto que a mudança em um dos parâmetros da distribuição ocasionaria nesse último registro. Nesse caso, consideramos também validada a hipótese, embora, como relatado em nossa análise da atividade 8, os alunos não tenham seguido o caminho esperado por nós para atingirem o objetivo traçado, fazendo com que o professor-pesquisador lançasse mão da flexibilização prevista na metodologia utilizada. Na seção seguinte, serão apresentadas as considerações finais desse estudo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da análise apresentada nos capítulos anteriores, concluímos que os objetivos propostos foram atingidos. A abordagem do *design* permitiu o confronto entre o trabalho experimental e o teórico, gerou uma visão integrada do conceito, permitiu a construção gradativa do mesmo, favoreceu a leitura gráfica, tendo em vista que o *software R* permitiu o estabelecimento de relações entre os parâmetros “n” e “p” e entre esses e o valor de $E(X)$. A associação dos dois ambientes, “papel & lápis” e “*software R*” foi primordial para o desenvolvimento do experimento, uma vez que permitiu a integração de situações de organização de dados com fases de experimentação.

Apesar dos resultados positivos, evidenciamos, durante o experimento, dificuldades dos estudantes na expressão escrita, nas representações simbólicas e na construção de gráficos. Procuramos, com base na metodologia adotada, que prevê a adaptação às produções dos sujeitos, fornecer questionamentos, inserir novas atividades, relembrar conceitos, visando o não bloqueio do processo. Os momentos de discussão conjunta representaram um espaço favorável para a análise comparativa das produções, permitindo aos estudantes a reflexão e a avaliação de seus próprios registros.

No caso das atividades que utilizaram o *software*, indicamos, para aqueles que desejarem utilizar o experimento com seus alunos, uma familiarização mais intensa com a ferramenta e a apresentação da igualdade $E(X)=n.p$ somente ao final da aplicação da última atividade, para que o foco não seja desviado da análise gráfica das relações entre n e p, como ocorreu em nossa aplicação.

Além disso, caso o experimento tenha que ser utilizado em um tempo reduzido, sugerimos que sejam aplicadas as seguintes atividades da Fase II do experimento: Conjecturas; Experimento prático; Árvore de possibilidades (incorporando a atividade 4); Determinação da “fórmula” (incorporando a atividade 6), Trabalhando com o *software R* (incorporando a atividade 8).

Como dissemos no capítulo da revisão bibliográfica deste trabalho, nosso objeto de pesquisa tinha a pretensão de dar prosseguimento aos trabalhos já realizados na busca das compreensões apresentadas pelos sujeitos diante de uma

abordagem não tradicional do conteúdo de distribuição Binomial. Partindo das evidências relatadas, concluímos que o experimento contribuiu para uma compreensão diferenciada deste conceito.

Sugerimos como perspectivas para futuras pesquisas, que os recursos do *software R* sejam utilizados em investigações sobre outras distribuições de probabilidade, de modo a contribuir com formas adicionais de ensino da Probabilidade e Estatística, favorecendo análises diferenciadas das comumente obtidas no ambiente papel&lápis.

Por fim, o que se espera é que a proposição de experimentos de ensino como o apresentado nessa pesquisa possa contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da distribuição Binomial, auxiliando no desenvolvimento do pensamento e do raciocínio estatístico de estudantes universitários e, por conseguinte, possibilitando um aumento no nível de letramento estatístico dos mesmos.

REFERÊNCIAS

- BAKER, A., BIEHLER, R., KONOLD, C. **Should young students learn about box plot?** Curricular Development in Statistics Education. Sweden, 2004, p. 163-173.
- BUSSAB, W. de O., MORETTIN, P. A. **Estatística básica** – 5 ed. – São Paulo: Saraiva, 2002.
- CAZORLA, I. M., SANTANA, E. R. dos S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio** – 1 ed. – Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.
- CAZORLA, I. M., OLIVEIRA, M. S. da. Para saber mais In: Irene Cazorla; Eurivalda Santana (Org.). **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico** – 1 ed. – Itabuna, BA: Via Litterarum, 2010, v.1, p. 113-144.
- COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. Educational Researcher, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.
- DANTAS, C. A. B. **Probabilidade : Um curso Introdutório** – 2 ed. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.
- DUVAL, R. **Basic Issues for Research in Mathematics Education**. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. Proceedings of the 24th PME. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000. p. 55-69.
- DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.
- DUVAL, R. **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics, Springer, n. 61, p. 103-131, 2006.
- FERNANDEZ, D., FERNANDEZ, D. X. **O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição Binomial**. Anais da conferência Internacional “Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios para o século XXI”. Florianópolis: UFSC, 1999.
- FIGUEIREDO, A. C. **PROBABILIDADE CONDICIONAL: “Um enfoque de seu ensino-aprendizagem”**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

GAL, I. **Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilites.** International Statistical Review, n. 70, 2002.

GARFIELD, J. **The Challenge of Developing Statistical Reasoning.** Journal of Statistics Education, v. 10, nº 3, pp. 1-11, 2002.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 5 – 6 ed.** São Paulo: Atual, 1993.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra linear e Geometria; Um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.** Tese de Doutorado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

KARRER, M.; BARREIRO, S.N. **Introdução ao estudo de vetores: análise de dois livros didáticos sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica.** In: IV ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 4, 2009, Ouro Preto. Anais do IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto. Ouro Preto: UFOP, 2009, v.1, p. 484-507.

KATAOKA, V. Y., CAZORLA, I. M., SILVA, C. B., OLIVEIRA, M. S. da. **O uso do R no ensaio de Probabilidade na Educação Básica: animation e teachingdemos.** In: Anais do 18º SINAPE, 2008, Estância de São Pedro, SP: Associação Brasileira de Estatística – ABE, 2008, v.1, p. 1-8.

MAGALHÃES, M.N., LIMA, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística – 6 ed. rev. –** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2005.

MILONE, G. **Estatística: geral e aplicada.** São Paulo: Cengage Learning, 2009.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998, p. 52).

NOVAES, D. V. **A MOBILIZAÇÃO DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS: Estudo exploratório com alunos de um Curso de Tecnologia em Turismo.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004.

PAVLOPOULOU, K. **Un problème décisive pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation.** Annales de didactique et de Sciences cognitives, n. 5, 1993, p. 67-93.

R version 2.7.2 RC (2008-08-18 r46391) - Copyright (C) 2008 The R Foundation for Statistical Computing - ISBN 3-900051-07-0

ROBERT, A. **Outils D'Analyse des Contenus Mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université.** RECHERCHES EM DIDACTIQUE DES MATÉMATIQUES, Vol. 18, nº 2, pp. 139-190. 1998.

RODRIGUES, M. R. **A URNA DE BERNOULLI COMO MODELO FUNDAMENTAL NO ENSINO DE PROBABILIDADE.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SIERPINSKA, A.; DREYFUS, T.; HILLEL, J. **Evaluation of a design: Linear transformations**. Recherches en Didactique des Mathématiques, France, v. 19, n. 1, p. 9-39, 1999.

SILVA, C. B. **Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de Matemática**. 2007. 354 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

SNEE, R. D. **Statistical Thinking and its contribution to Total Quality**. The American Statistician, v. 44, n. 2, p. 116-121, 1990.

SOUZA, C. A. **A DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL NO ENSINO SUPERIOR**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

VIEIRA, M. **ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

WILD, C.; PFANNKUCH, M. **Statistical Thinking in Empirical Enquiry**. International Statistical Review, v. 67, n. 3, p. 223-265, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 - Atividade preliminar (Ficha 1)

Tarefa 1. Você já estudou o tópico de distribuição Binomial?

() Sim () Não

Caso sim, escreva sobre essa distribuição e dê um exemplo de sua aplicação.

APÊNDICE 1 - Atividade preliminar (Ficha 2)

Tarefa 2. Resolva a questão:

Considere um dado “honesto” com faces numeradas de 1 a 6.

- a) ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de obter a face com o número 6?
- b) ao ser lançado uma única vez, qual a probabilidade de não obter a face com o número 6?
- c) se esse dado for lançado 10 vezes, qual é a probabilidade de sair o número 6 exatamente 4 vezes?

APÊNDICE 1 - Atividade preliminar (Ficha 3)

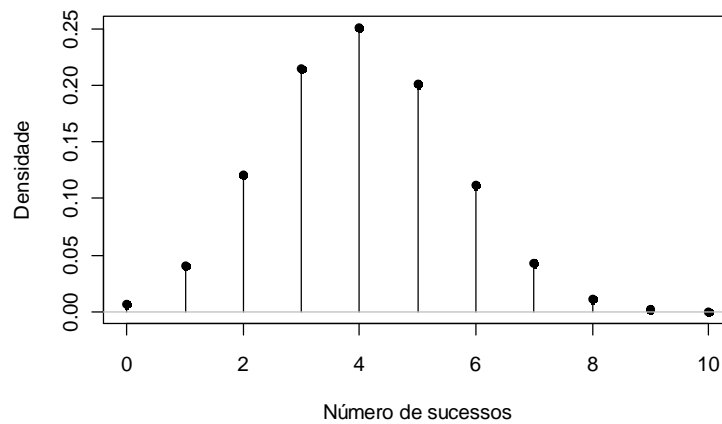
Tarefa 3. O gráfico seguinte representa uma distribuição Binomial, analise-o e responda as questões.

a) qual o valor do tamanho de amostra? Justifique.

b) o valor da probabilidade de sucesso é:

() maior do que 0,5 () menor do que 0,5 () igual a 0,5

Justifique.



APÊNDICE 2 - Atividade 1Atividade 1

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Tarefas:

a) Para o experimento em questão, quais são os possíveis resultados ao retirar uma bolinha?

(represente verde por “v” e amarela por “a”)

b) Qual é a chance de sair verde? Por quê?

Qual é a chance de sair amarela? Por quê?

c) Imagine que você retire 5 bolinhas com reposição a cada retirada. Como você anotaria seu resultado imaginário?

Por quê?

APÊNDICE 3 - Atividade 2 (Ficha 1)

Atividade 2

Uma urna contém 10 bolinhas, sendo 4 verdes e 6 amarelas.

Retirar 5 bolinhas com reposição a cada retirada, por 30 vezes, anotando os resultados obtidos.

Quadro 12 - Resultados da experimentação

Repetição	Sequência	nº de bolas verdes	Repetição	Sequência	nº de bolas verdes
1.			16.		
2.			17.		
3.			18.		
4.			19.		
5.			20.		
6.			21.		
7.			22.		
8.			23.		
9.			24.		
10.			25.		
11.			26.		
12.			27.		
13.			28.		
14.			29.		
15.			30.		

APÊNDICE 3 - Atividade 2 (Ficha 2)

Tarefas:

- a) Em sua opinião, qual a quantidade de verdes mais esperada na retirada de 5 bolinhas com reposição? Por quê?
- b) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem mais chance de ser retirada: 0 ou 3? Por quê?
- c) Qual a quantidade de bolinhas verdes que tem menos chance de ser retirada? Por quê?
- d) Existe a chance de saírem 5 bolinhas verdes? Por quê?
- e) Sistematizem os resultados na Tabela 3, chamada de Tabela de Distribuição de Frequência _TDF.

Tabela 3. Distribuição do número de bolinhas verdes retiradas

nº de bolas verdes	nº de vezes retiradas (fi)	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100*hi
0			
1			
2			
3			
4			
5			
Total	30	1,00	100,00

Onde $hi = fi/30$

f) Observando a TDF, qual é a frequência relativa de:

- não obter bola verde? _____
- obter 1 bola verde? _____
- obter 4 bolas verdes? _____

Em quanto por cento das retiradas aconteceram 2 bolas verdes?

g) Comparem seus resultados sistematizados na Tabela 1 com os dos seus colegas.

Esses são iguais? () sim () não

APÊNDICE 4 - Atividade 3 (Ficha 1)Atividade 3Tarefas:

- 1) Completem a árvore de probabilidades, indicando a sequência sorteada:

APÊNDICE 5 - Atividade 4

Atividade 4

Tarefas:

1) Preencham a tabela 5 com os resultados das Tabelas 3 e 4:

Tabela 5. Quadro comparativo do cálculo de probabilidades.

nº de bolas verdes	Frequência relativa (h_i)	Árvore de possibilidades (p_i)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

2) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?

3) Comparem os resultados da Tabela 5, com os resultados de outra dupla. O que vocês podem concluir?

4) Qual é a diferença entre essas duas formas de calcular probabilidades?

5) Construam os gráficos dos resultados de (h_i), de (p_i) e de (h_i) e (p_i) no mesmo plano.

6) Comparem os gráficos construídos com as construções das outras duplas. O que vocês podem concluir?

APÊNDICE 6 - Atividade 5

Atividade 5

Tarefa:

Partindo dos resultados da Tabela 4, procurem determinar uma “fórmula” que relacione o número de bolinhas verdes com a respectiva probabilidade:

Tabela 4. Distribuição de probabilidade da retirada de bolinhas verdes.

nº de bolas verdes	nº de vezes em que aparece	Probabilidade (pi)
0	1	
1	5	
2	10	
3	10	
4	5	
5	1	
Total	32	1

$$P(X=0)=$$

$$P(X=1)=$$

$$P(X=2)=$$

$$P(X=3)=$$

$$P(X=4)=$$

$$P(X=5)=$$

$$P(X=k)=$$

APÊNDICE 7 - Atividade 6Atividade 6Tarefa:

Resolva os seguintes problemas:

1) Uma prova é constituída de 7 questões em forma de teste com 5 alternativas em cada teste, onde apenas uma é correta. Se um aluno “chutar” todas as respostas, qual é a probabilidade de ele acertar:

- a) exatamente 6 questões?
- b) exatamente 4 questões?
- c) exatamente 1 questão?

2) Um dado é jogado 10 vezes. Qual é a probabilidade de sair o número 6:

- a) exatamente quatro vezes?
- b) exatamente seis vezes?
- c) exatamente dez vezes?

APÊNDICE 8 - Atividade 7Atividade 7Tarefas:

- a) O que representa n ?
- b) O que representa p ?
- c) Aumentando n , o que ocorre com o gráfico?
- d) Aumentando p , o que ocorre com o gráfico?
- e) Se $n = 30$ e $p = 0,2$, verifique no gráfico qual o valor da $P(X=4)$
- f) Se $n = 8$ e $p = 0,3$, determine a probabilidade de cada "X" e verifique qual o valor da soma dessas probabilidades.
- g) Sabe-se que a média da distribuição, indicada por $E(X)$, é dada por $E(X)=n.p$. Em cada caso abaixo, determine $E(X)$ e observe o gráfico em relação à posição da média $E(X)$ no gráfico. Registre suas observações
Copie e cole cada gráfico em documento do MS-WORD..

g₁) se $n=10$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g₂) se $n=10$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g₃) se $n=10$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

g₄) se $n=10$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

g₅) se $n =15$ e $p=0,5$, $E(X)=$ _____

g₆) se $n=15$ e $p=0,2$, $E(X)=$ _____

g₇) se $n=15$ e $p=0,26$, $E(X)=$ _____

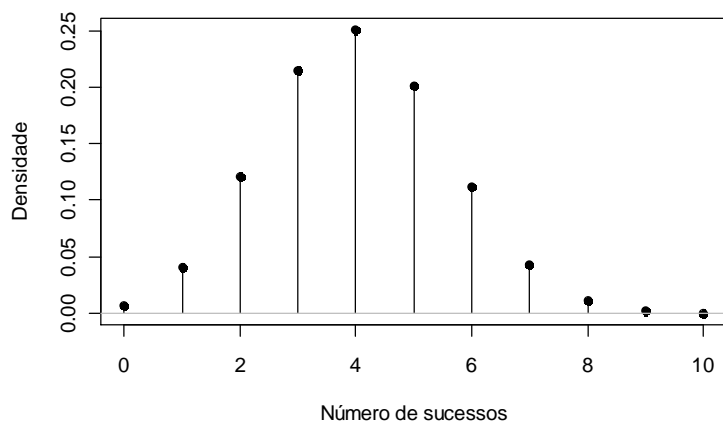
g₈) se $n=15$ e $p=0,75$, $E(X)=$ _____

APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 1)Atividade 8Tarefa 1:

1) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

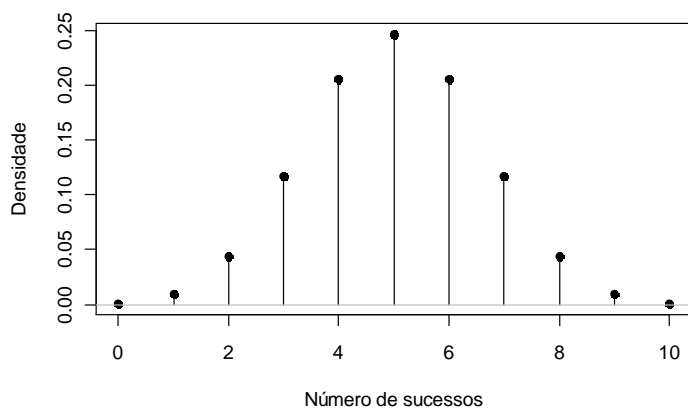


APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 2)Atividade 8Tarefa 1:

2) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

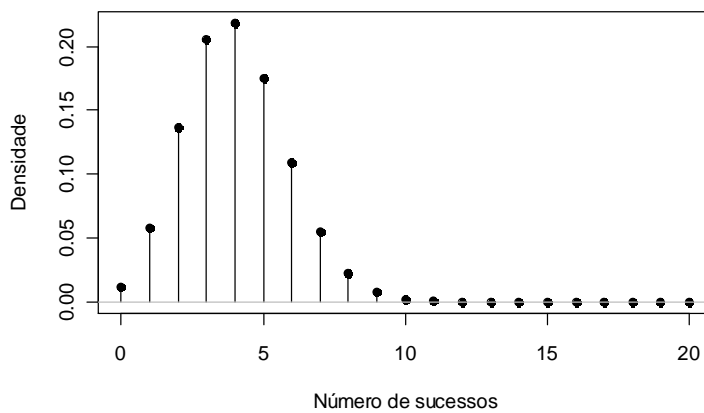


APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 3)Atividade 8Tarefa 1:

3) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

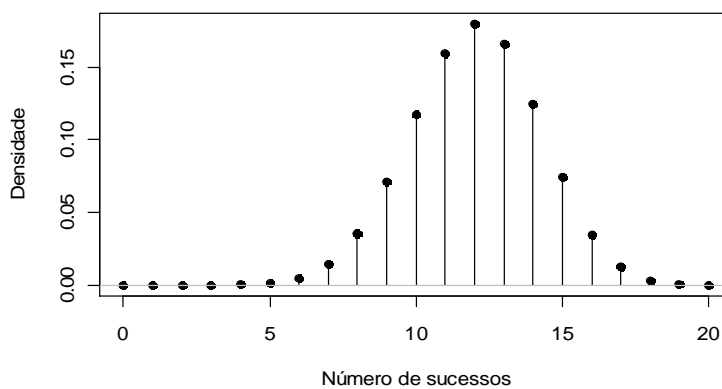


APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 4)Atividade 8Tarefa 1:

4) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

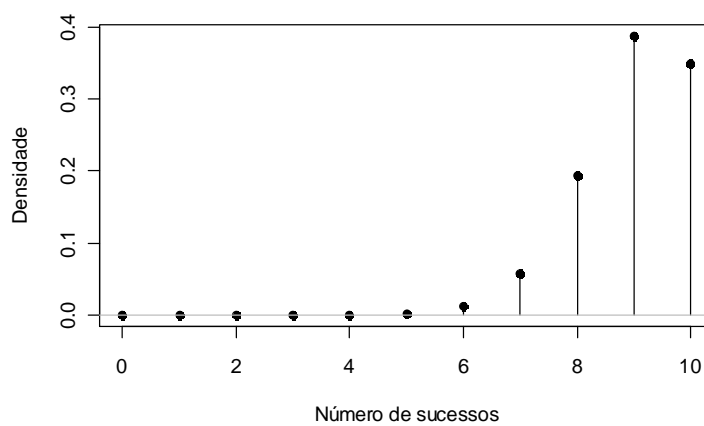


APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 5)Atividade 8Tarefa 1:

5) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.

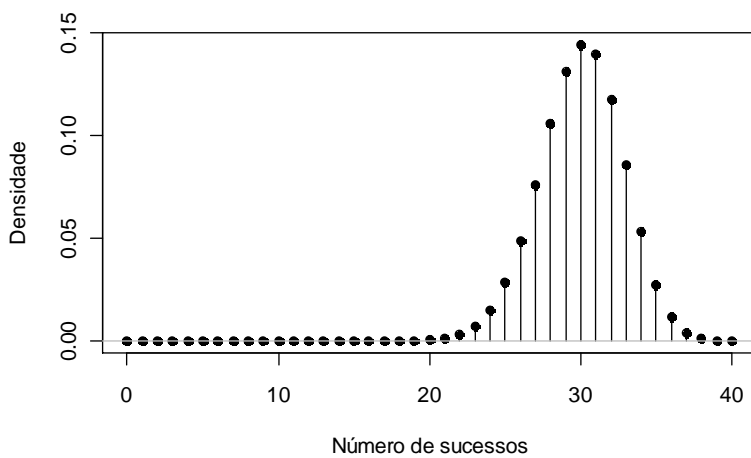


APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 6)Atividade 8Tarefa 1:

6) Dado o gráfico abaixo, pede-se:

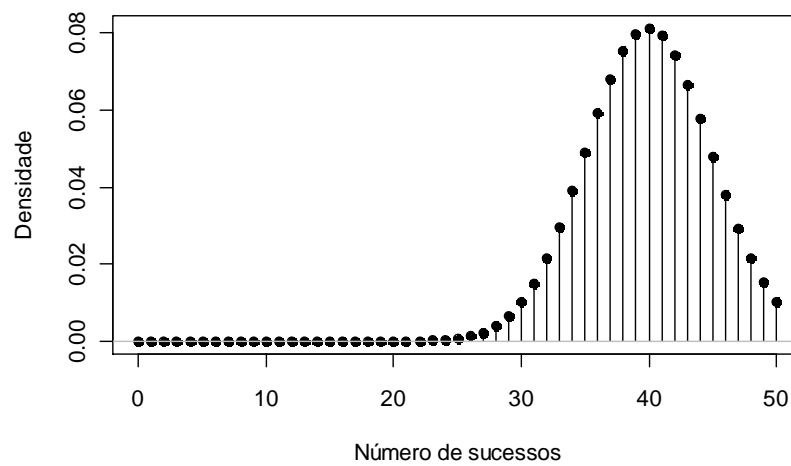
a) n

b) o valor de p é maior, menor ou igual a 0,5? Justifique.



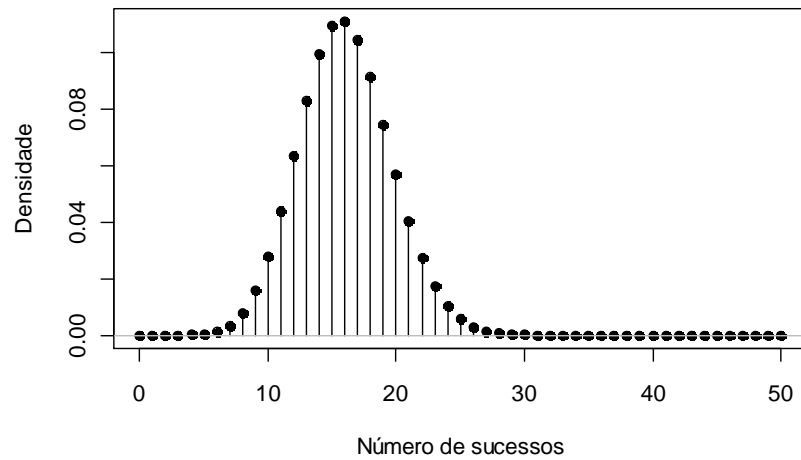
APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 7)Atividade 8Tarefa 2:

1) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .



APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 8)Atividade 8Tarefa 2:

2) Dado o gráfico abaixo, determine n e estime os valores de $E(X)$, p e q .



APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 9)Atividade 8Tarefa 3:

Em qual gráfico da tarefa 2 o valor da probabilidade “p” está “mais próximo” de 0,5? Justifique pelos valores encontrados e pela análise gráfica.

APÊNDICE 9 - Atividade 8 (Ficha 10)Atividade 8Tarefa 4:

Qual gráfico da tarefa 2 apresenta o maior número de tentativas?
Justifique.

APÊNDICE 10

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O presente estudo, intitulado *Distribuição Binomial: um experimento de ensino utilizando o software R com foco na exploração de registros de representação semiótica*, tem por objetivo investigar as produções dos estudantes diante de uma abordagem diferenciada do conteúdo distribuição Binomial que prevê a inclusão de recurso computacional e a exploração de diversos registros, em especial o gráfico, visando criar um material de apoio para o ensino deste tópico. A metodologia dos *Design Experiments* de Cobb et al. (2003) balizará a construção e a condução do experimento.

Para o bom desempenho desta pesquisa, contamos com sua colaboração no sentido de participar de um experimento de ensino sobre distribuição Binomial. Os dados serão coletados da seguinte forma: gravação das falas, captura das telas dos computadores, coleta do material escrito e entrevistas. A intenção é avaliar o impacto de uma abordagem diferenciada sobre o conteúdo de distribuição Binomial.

Ao participar deste estudo, você estará consentindo que seus dados sejam utilizados apenas para fins desta pesquisa. Ressalta-se que há garantia de preservação de identificação. Desde já agradeço sua contribuição, a qual será de extrema importância para que os objetivos deste trabalho sejam atingidos.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu,, portador do RG, residente na, com número de telefone e e-mail, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supracitada, sob a responsabilidade de Monica Karrer e Verônica Yumi Kataoka, professoras do curso de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN e de Pedro Marques Corrêa Neto, mestrando do mesmo curso.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

- a) o objetivo da pesquisa é verificar se uma nova abordagem favorece a compreensão dos conceitos.
- b) a realização desta pesquisa é fundamental para o progresso na Educação Matemática no Brasil, para que ações possam ser implementadas para a melhoria do ensino desta disciplina.
- c) a minha participação no estudo limita-se ao experimento de ensino sobre distribuição Binomial.
- d) assim que a pesquisa terminar poderei ter acesso aos resultados globais do estudo.
- e) estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação nesta pesquisa.
- f) meus dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada e apresentação dos resultados em eventos nacionais e internacionais.
- g) poderei entrar em contato com a pesquisadora responsável, Dra. Monica Karrer, pelo e-mail mkarrer@uol.com.br ou pelo telefone xxxx-xxxx sempre que julgar necessário.
- h) obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa.
- i) este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com a pesquisadora responsável.

São Paulo, de de 2010.

Participante

Prof. Pedro Marques Corrêa Neto

Profa. Dra. Monica Karrer

APÊNDICE 11

TERMO DE RESPONSABILIDADE DA INSTITUIÇÃO

Eu,, diretor(a) dos cursos de Engenharia da, declaro ter conhecimento da pesquisa “*Distribuição Binomial: um experimento de ensino utilizando o software R com foco na exploração de registros de representação semiótica*”, sob a responsabilidade da Profa. Dr^a Monica Karrer e da Prof^a. Dr^a. Verônica Yumi Kataoka e autorizo sua realização com alunos do 4º e do 5º semestres das turmas de Engenharia desta instituição, no ano de 2010.

Assinando esta autorização, estou ciente de que os alunos participarão de um experimento de ensino sobre distribuição Binomial e de que poderei entrar em contato com a pesquisadora responsável, Dra. Monica Karrer, pelo e-mail mkarrer@uol.com.br ou pelo telefone (11) xxxx-xxxx.

Fui informada de que esta pesquisa está sendo desenvolvida por um aluno de mestrado acadêmico em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, sob a orientação da Prof. Dra. Monica Karrer.

Assinatura do Diretor

São Paulo, ____ de _____ de 2010.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)