Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

CONTROLE NA FRONTEIRA PARA UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DE ONDAS

Juliano de Andrade

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Dezembro - 2010

JULIANO DE ANDRADE

Controle na Fronteira Para um Sistema de Equações de Ondas

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio
Professor Adjunto
Orientador
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr Juan Amadeo Soriano Palomino
Professor Associado Doutor
UEM - Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 13 de Dezembro de 2010

A minha amada esposa,
Lucineide
aos meus pais,
Dauro e Margarida
e aos meus queridos irmãos,
Celso, Mauricio, Maria
Cristina e Regiane
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela oportunidade e força para realização deste trabalho, pois sem ele nada eu teria feito.

Agradeço também ao professor Dr. Adalberto Spezamiglio, pela orientação e por compartilhar conosco parte de seu conhecimento matemático.

Aos meus pais que me ajudaram em todos os momentos da minha vida, que me ensinaram, instruiram e formaram o caráter do homem que sou hoje.

Quero agradecer em especial a minha esposa Lucineide Keime Nakayama de Andrade, que eu admiro muito pela inteligência e capacidade, e que me apoiou e insentivou a minha vinda para o mestrado aqui na Unesp de São José do Rio Preto.

Aos professores da Unesp de São José do Rio Preto, que colaboraram em minha formação acadêmica.

À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos professores Alagacone Sri Ranga e Maria Gorete Carreira Andrade da Unesp de São José do Rio Preto pelo incentivo, e aos professores Marcelo Escudeiro Hernandes e Ryuichi Fukuoka da UEM que me incentivaram a fazer o mestrado aqui nesta instituição, ao professor Doherty Andrade que me orientou em projetos de pesquisas na graduação pela UEM.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado nesta etapa de minha vida. Enfim quero agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram na realização deste trabalho.

Resumo

Um problema de controle exato na fronteira para um sistema de equações de ondas acopladas é considerado em um retângulo do plano. Obtém-se controle de quadrado integrável para estados iniciais de energia finita.

Palavras chave: Espaços de Sobolev, Equação de onda, Decaimento de Energia, Controle Exato na Fronteira.

Abstract

We are concerned with a problem of exact boundary controllability for a coupled sistem of wave equations in a rectangle of the plane. We obtain square integrable control for initial state with finite energy.

Key words: Sobolev Spaces, Wave equation, Energy Decay, Exact Bondary Control.

Andrade, Juliano de.
Controle na fronteira para um sistema de equações de ondas / Juliano de Andrade. – São José do Rio Preto: [s.n.], 2010.
43 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Adalberto Spezamiglio
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equação de onda. 4. Espaço de Sobolev. I. Spezamiglio, Adalberto. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.95

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Sumário

Introdução

Sejam $R \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo aberto com fronteira denotada por ∂R e $H^m(R)$ o espaço de Sobolev das funções de $L^2(R)$ com derivadas distribucionais até a ordem m em $L^2(R)$, $m \in \mathbb{N}$.

Neste trabalho dedicamos a mostrar a existência de um tempo $T > 0$ e funções controles f, g em $L^2(\partial R \times [0,T])$, tais que para qualquer $(u_0, u_1, v_0, v_1) \in \mathcal{H}(R) = H^1(R) \times L^2(R) \times H^1(R) \times L^2(R)$, a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = 0 & em \ R \times]0, T[\\ v_{tt} - \Delta v + \alpha(v - u) = 0 & em \ R \times]0, T[\\ u = f, \quad v = g & em \ \partial R \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 & em \ R \\ v(\cdot, 0) = v_0, \quad v_t(\cdot, 0) = v_1 & em \ R \end{cases} \tag{1}$$

satisfaz

$$u(\cdot, T) = u_t(\cdot, T) = v(\cdot, T) = v_t(\cdot, T) = 0 \ \ em \ \ R$$

Como se pode ver em [13], a interpretação física é dada por um sistema de duas membranas retangulares paralelas conectadas por uma camada elástica de Winkler sem massa e linear. É suposto que as membranas sejam finas, homogêneas e perfeitamente elástica e têm espessura constante. As membranas são uniformemente apertadas adequadamente por tensão constante na fronteira e são submetidas arbitrariamente por distribuições de cargas contínuas. Se o sistema é submetido a pequenas vibrações devemos achar funções controles sobre a fronteira tal que num determinado tempo $T > 0$, as vibrações param completamente.

Esse problema é considerado em [2] em um domínio chamado polígono curvo. A organização deste trabalho é a seguinte:

No capítulo 1 apresentamos resultados preliminares necessários ao desenvolvimento do estudo feito ([1],[4],[5],[6],[16],[17]). No capítulo 2 foram postos os principais resultados a serem usados no capítulo 3, que são teoremas sobre decaimento local de energia para equações do tipo $w_{tt} - \Delta w + \lambda w = 0$, onde $\lambda \geq 0$. Usamos aqui a teoria do capítulo 1 para esses teoremas, que foram tiradas de ([2],[3],[4],[15]). No capítulo 3 foi trabalhado o problema (1) apenas para uma equação na seção 3.1, onde os principais resultados usados foram dados no capítulo 2, formulamos nosso problema na seção 3.2 e por fim o teorema principal na seção 3.3, e cuja demonstração é feita usando os resultados da seção 3.1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, colocaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

1.1 Norma de uma Transformação Linear e o Teorema de Neumann

Sejam W e V espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Sejam $\| \cdot \|_W$ e $\| \cdot \|_V$ normas em W e V respectivamente. Uma transformação linear $T : W \to V$ é limitada se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| Tw \|_V \leq C \| w \|_W,$$

para todo $w \in W$.

A transformação linear T é limitada se, e somente se, T é contínua (ver [8]). Se T é limitada, a norma de T é definida por

$$\| T \| = \inf\{C > 0; \| Tw \|_V \leq C \| w \|_W, w \in W\},$$

que é equivalente a

$$\| T \| = \sup_{\|w\|_W = 1} \| Tw \|_V = \sup_{w \neq 0} \frac{\| Tw \|_V}{\| w \|_W}.$$

Um espaço vetorial normado completo é chamado de espaço de Banach. Se a norma de um espaço de Banach é proveniente de um produto interno então esse espaço é chamado de espaço de Hilbert.

Seja $T : W \to W$ uma transformação linear e $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por T^n a composição com n fatores $T \circ T \circ ... \circ T$. Se T é limitada então T^n é limitada e vale

$$\| T^n \| \leq \| T \|^n .$$

Seja $I : W \to W$ o operador identidade. O teorema a seguir, devido a Neumann [17], estabelece uma condição para a invertibilidade de $I - T$.

Teorema 1.1. *Sejam W um espaço de Banach e $T : W \to W$ uma transformação linear limitada. Se*

$$\| T \| < 1$$

então $I - T$ admite inversa e vale

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad T^0 = I.$$

Demonstração: [17]

1.2 Distribuições e Espaços Funcionais

1.2.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuirem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto, onde o suporte de φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se e somente se existe um subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset \mathcal{K}, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre $\mathcal{K}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando a sequência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido dessa noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Uma distribuição em Ω é uma forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ contínua, isto é;

i) T é linear

ii) $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}(\Omega), \varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T_{\varphi_\nu} \to T_\varphi$ em $\mathbb{K}$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$. Dizemos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$(\int_{\mathcal{K}} |u|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

sobre cada compacto $\mathcal{K}$ de Ω.

Uma sucessão $\{u_\nu\}$ de funções em $L^p_{loc}(\Omega)$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $\lim\limits_{\nu \to +\infty} (\int_{\mathcal{K}} |u_\nu|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$, para todo compacto $\mathcal{K}$ de Ω.

Seja $\{u_\nu\}$ uma sucessão de funções de $L^p_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Dizemos que $\{u_\nu\}$ converge para u em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $\{(u_\nu - u)\}$ converge para zero em $L^p_{loc}(\Omega)$.

De posse dessas definições estamos aptos a entender um novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir. Quando Ω é um aberto limitado define-se $C^m(\overline{\Omega})$ como:

$C^m(\overline{\Omega}) = \{f = g\mid_{\overline{\Omega}}; g \in C^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad D^\alpha f \quad \text{é} \quad \text{limitado} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega},\ \ |\alpha| \leq m\}.$

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira $\partial\Omega$ é regular. Suponhamos que $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Se u ou v se anula sobre $\partial\Omega$, da integração por partes obtemos,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco num aberto Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. A função v é a derivada fraca de u em relação a x_k, denotada por $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Embora tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada nesse sentido. No intuito de sanar esse tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Sejam T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ uma função que possui derivada fraca $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ e seja T_u a distribuição definida por $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Temos

$$\langle D^\alpha T_u, \varphi \rangle = -\langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle$$

que se reduz a

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \varphi(x) dx.$$

Logo, $D^\alpha T_u$ coincide neste caso com a derivada fraca $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ definida anteriormente. Veremos (proposição 1.3) que T_u é definida univocamente para toda $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1.2.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, com norma.

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.2. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existe uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to+\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [9].

Proposição 1.3. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, e seja T_u a distribuição definida por $\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver [12].

Dessa proposição tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.4. *Seja $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$. Se $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$. Então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [12].

1.2.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções

$u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach (ver [12]).

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por essa razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

E também define-se o subespaço $H_0^m(\Omega)$ de $H^m(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

ou seja, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

Proposição 1.5. *Seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e Ω um aberto tal que $\mathcal{K} \subset \Omega$. Então existe uma função $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \theta \equiv 1 & em & \mathcal{K} \\ 0 \leq \theta \leq 1 & em & \mathbb{R}^n \\ supp(\theta) \subset \Omega & & \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver [3]

Proposição 1.6. *Dado $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, seja o operador*

$$\beta : H^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$u \mapsto \beta(u) = \theta u.$$

Então β é linear e limitado.

Demonstração: Ver [4]

1.3 Extensões e Traços em Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $F(\Omega)$ um espaço vetorial normado cujos elementos são funções reais definidas em Ω. Um operador extensão para $F(\Omega)$ é uma transformação linear limitada

$$E : F(\Omega) \to F(\mathbb{R}^n)$$

tal que $(Ef)\mid_{\Omega} = f$ para todo $f \in F(\Omega)$. A limitação é expressa por:

$$\| Ef \|_{F(\mathbb{R}^n)} \leq C \| f \|_{F(\Omega)},$$

para toda $f \in F(\Omega)$ e alguma constante $C > 0$.

Um exemplo de operador extensão é aquele que estende as funções de $L^p(\Omega)$ para $\mathbb{R}^n$ como sendo nulas no complementar de Ω. Neste caso temos:

$$\| Ef \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \| f \|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$.

Lema 1.7. *Seja $R =]a,b[\times]c,d[$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$ e $u \in H^1(R)$ uma função. Seja u^* definida em $\widetilde{R} =]a,b[\times]2c-d,d[$ por*

$$u^*(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & se \quad c < y < d \\ u(x,2c-y) & se \quad 2c-d < y < c \end{cases} \tag{1.2}$$

Então $u^* \in H^1(\widetilde{R})$ e

$$\| u^* \|_{H^1(\widetilde{R})} \leq 2 \| u \|_{H^1(R)} .$$

Demonstração: ver [3]

Observação: $\widetilde{R}$ é obtido refletindo R em torno do eixo $y = c$. O lema acima permite estender por reflexão, funções definidas em retângulos.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, usaremos a notação Ω_ε para designar a vizinhaça aberta de Ω definida por

$$\Omega_\varepsilon = \Omega + B(0, \varepsilon)$$

onde $B(0, \varepsilon)$ é a bola aberta de centro na origem e raio $\varepsilon > 0$.

O teorema a seguir dá uma extensão para as funções de $H^1(R)$ com $R =]a, b[\times]c, d[$.

Teorema 1.8. *Seja $R =]a, b[\times]c, d[$, e $\varepsilon > 0$. Existe um operador extensão E de $H^1(R)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$suppEu \subset R_\varepsilon$$

para todo $u \in H^1(R)$

Demonstração: Refletindo o retângulo em torno de $y = c$ e usando o lema (1.7), estende-se as funções de $H^1(R)$ para $]a, b[\times]2c - d, d[$. Usando o mesmo lema e reflexões consecutivas em torno dos demais lados de R obtém-se extensões de funcões de $H^1(R)$ para o retângulo $\widetilde{R} =]2a-b, 3b-2a[\times]2c-d, 3d-2c[$. Desta forma constrói-se uma transformação linear limitada

$$e : H^1(R) \to H^1(\widetilde{R})$$

tal que

$$eu\mid_R = u,$$

$$\| eu \|_{H^1(\widetilde{R})} \leq C \| u \|_{H^1(R)}$$

para todo $u \in H^1(R)$ e alguma constante $C > 0$. Seja $\delta > 0$ tal que $R_\delta \subset \widetilde{R}$ e $R_\delta \subset R_\varepsilon$. A proposição (1.5) nos dá uma função $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\theta = 1$ em $\widetilde{R}$, (em particular $\theta = 1$ em R) e $supp\,\theta \subset R_\delta$. Para cada $u \in H^1(R)$, $\theta eu \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$supp\,\theta eu \subset R_\varepsilon.$$

Definindo $E = \theta e$ obtemos a extensão desejada.

Um outro tipo de extensão que consideraremos é o seguinte:

Seja X um espaço vetorial normado, Y um espaço de Banach e $D \subset X$ subespaço vetorial de X.

Proposição 1.9. *Seja uma aplicação linear $T : D \to Y$. Se T é limitada então existe uma única transformação linear limitada $\widehat{T}$ definida em todo $\overline{D}$, que estende T e $\| T \| = \| \widehat{T} \|$.*

Demonstração: Ver [1].

Em $\mathbb{R}^2$, as funções de $H^1(\Omega)$ nem sempre são contínuas sobre o fecho de Ω, como mostra o exemplo a seguir.
Seja $\Omega_\circ$ o disco aberto do $\mathbb{R}^2$ dê centro na origem e raio $R < 1$. Isto equivale a dizer que

$$\Omega_\circ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < R\}, \quad 0 < R < 1.$$

A função

$$v(x) = (\log(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}))^k, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

pertence a $H^1(\Omega_\circ)$ para $0 < k < \frac{1}{2}$. De fato, considerando-se coordenadas polares, encontra-se:

$$\| v \|^2_{L^2(\Omega_\circ)} = \int_{\Omega_\circ} v^2(x)dx = \int_{\Omega_\circ} (\log(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}))^{2k} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R (\log(\frac{1}{r}))^{2k} r dr d\theta = 2\pi \int_0^R (\log \frac{1}{r})^{2k} r dr < \infty,$$

e

$$\| grad \ v \|^2_{L^2(\Omega_\circ)} = \int_{\Omega_\circ} (\log(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}))^{2k-2} \frac{k^2}{x_1^2 + x_2^2} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k^2}{r^2} (\log(\frac{1}{r}))^{2k-2} r dr d\theta = 2\pi k^2 \int_0^R (\log \frac{1}{r})^{2k-2} \frac{dr}{r} < \infty.$$

Isto prova que $v \in H^1(\Omega_\circ)$. Entretanto, v não é contínua porque possui uma singularidade na origem.

Em virtude desse exemplo, é necessário fazer uma análise mais cuidadosa com o objetivo de dar uma definição precisa do que se entende por restrição de v à fronteira $\partial\Omega$ de Ω. De modo vago, a técnica usada consiste no prolongamento ao fecho de certas formas lineares. Faremos no caso em que Ω é um semi-espaço.

Se Ω é um aberto, representa-se por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a restrição a $\overline{\Omega}$ das funções $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Indica-se com $\mathbb{R}^n_+$ o semiespaço:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\},$$

sendo $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}.)$ Representa-se por Γ a variedade linear de $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$\Gamma = \{x = (x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Lema 1.10. *$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.*

Demonstração: ver [11].

De posse do lema (1.10), define-se no caso particular $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ o que se entende por traço de uma função v de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ sobre Γ. De fato, dada $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. faz sentido falar em sua restrição a Γ, que identifica-se ao $\mathbb{R}^{n-1}$. Considere a restrição

$$\gamma : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$$

definida por

$$\gamma v(x', x_n) = v(x', 0).$$

A etapa seguinte é estender γ como uma aplicação de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ no espaço $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Sendo γ uma aplicação linear de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ em $L^2(\Gamma)$, para estendê-la ao fecho é suficiente demonstrar que ela é limitada, o que será feito a seguir:
Seja $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Tem-se:

$$v(x', 0)^2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n} v^2(x', x_n) dx_n \leq$$

$$\leq 2\int_0^\infty \| v(x',x_n) \| \| \frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n) \| \, dx_n \leq$$

$$\leq 2(\int_0^\infty \| v(x',x_n) \|^2 \, dx_n)^{1/2} (\int_0^\infty \| \frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n) \|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \| v(x',x_n) \|^2 \, dx_n + \int_0^\infty \| \frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n) \|^2 .$$

Integrando ambos os membros sobre o $\mathbb{R}^{n-1}$, obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \| v(x',0) \|^2 \, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\int_0^\infty \| v(x',x_n) \|^2 \, dx_n) dx' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\int_0^\infty \| \frac{\partial}{\partial x_n} v(x',x_n) \|^2 \, dx_n) dx' \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \| v(x',x_n) \|^2 \, dx + \Sigma_{\nu=1}^n \int_{\mathbb{R}^n_+} \| \frac{\partial}{\partial x_\nu} v(x) \|^2 \, dx.$$

Dessa desigualdade resulta

$$\| \gamma v \|_{L^2(\Gamma)} \leq \| v \|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)},$$

isto é, a aplicação

$$\gamma : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \to L^2(\Gamma)$$

é linear contínua. Portanto, γ admite uma extensão, representada por γ_0, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\Gamma).$$

A aplicação linear contínua γ_0 denomina-se traço sobre Γ.

Assim, olha-se γ_0 como uma generalização da operação de restrição de uma função regular em $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ à variedade $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}$.

Com base na demonstração acima temos provado o teorema seguinte.

Teorema 1.11. *Existe um operador linear limitado*

$$\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1}).$$

tal que $\gamma_0 v = v \mid_\Gamma$ *para todo* $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *e*

$$\| \gamma_0 u \|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \| u \|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)},$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Capítulo 2

Decaimento de energia

O objetivo deste capítulo é apresentar teoremas sobre decaimento local de energia para equações do tipo $w_{tt} - \Delta w + \lambda w = 0$, onde $\lambda \geq 0$, que são os principais resultados a serem utilizados no capítulo 3, e cujas demonstrações não serão feitas aqui. O interessado nas demonstrações pode ver em [2].

Para $t_0 \in \mathbb{R}$ sejam $w(\cdot, t_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $w_t(\cdot, t_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ as funções que a cada $x \in \mathbb{R}^2$ associam $w(x, t_0)$ e $w_t(x, t_0)$ respectivamente.

Definição 2.1. *Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \geq 0$. Uma função $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ é solução com energia finita do problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \lambda w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) = u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) = v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

se existe uma sequência $\{w_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ tal que

i) $\lim\limits_{\nu \to \infty} w_\nu = w$ *em* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$,

ii) $(w_\nu)_{tt} - \Delta w_\nu + \lambda w_\nu = 0$ *em* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, *para todo* $\nu = 1, 2, \ldots$,

iii) $\lim\limits_{\nu \to \infty} w_\nu(\cdot, t_0) = u$ *em* $H^1(\mathbb{R}^2)$,

iv) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \dfrac{\partial}{\partial t} w_\nu(\cdot, t_0) = v$ *em* $L^2(\mathbb{R}^2)$,

Observamos que o problema de Cauchy (2.1) tem uma única solução com energia finita $w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ (ver [2] e [4]).

Lema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e Ω_δ uma vizinhança aberta de Ω. Sejam $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ funções com suportes compactos em Ω_δ e $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

com $\lambda \geq 0$.

Para cada $T_0 > diam(\Omega_\delta)$, existe $K_1 = K_1(\lambda, T_0, \Omega_\delta) > 0$ tal que para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$, tem-se

$$|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t)| \leq \frac{K_1}{t}\{\| f \|_{H^1(\Omega_\delta)} + \| g \|_{L^2(\Omega_\delta)}\}$$

para todo $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$.

Demonstração: Ver [2] ou [4].

Corolário 2.3. *Nas mesmas hipóteses de lema (2.2) vale a seguinte estimativa:*
$\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{t^2}(\|g\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|f\|^2_{H^1(\Omega_\delta)})$
onde $K > 0$.

Demonstração: Usando o lema (2.2) temos
$|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t)|^2 \leq \frac{K_1^2}{t^2}\{\| f \|_{H^1(\Omega_\delta)} + \| g \|_{L^2(\Omega_\delta)}\}^2 =$
$\frac{K_1^2}{t^2}\{\| f \|^2_{H^1(\Omega_\delta)} + \| g \|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + 2\|f\|_{H^1(\Omega_\delta)}\|g\|_{L^2(\Omega_\delta)}\}$

$\leq \frac{2K_1^2}{t^2}\{\| f \|^2_{H^1(\Omega_\delta)} + \| g \|^2_{L^2(\Omega_\delta)}\}.$

Chamando $2K_1^2 = K'$ obtemos

$$|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t)|^2 \leq \frac{K'}{t^2}\{\| f \|^2_{H^1(\Omega_\delta)} + \| g \|^2_{L^2(\Omega_\delta)}\}$$

com $K' > 0$. Agora, escrevendo as quatros desigualdades para todos os multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^3$ com $|\alpha| \leq 1$ e somando temos

$$\|u_{x_1}\|^2 + \|u_{x_2}\|^2 + \|u_t\|^2 + \|u\|^2 \leq 4\frac{K'}{t^2}\{\| \ f \ \|^2_{H^1(\Omega_\delta)} + \| \ g \ \|^2_{L^2(\Omega_\delta)}\}.$$

Integrando esta última desigualdade em relação a x em Ω_δ obtém-se

$$\|u_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leq 4|\Omega_\delta|\frac{K'}{t^2}(\|g\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|f\|^2_{H^1(\Omega_\delta)})$$

e chamando $4|\Omega_\delta|K' = K$ temos o desejado.

Lema 2.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $\lambda \geq 0$ e Ω_δ uma vizinhança aberta de Ω. Sejam $(\widetilde{v_0}, \widetilde{v_1}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ funções com suportes compactos em Ω_δ. Para cada $T_0 > diam(\Omega_\delta)$ existe uma constante $K = K(\lambda, T_0, \Omega_\delta) > 0$, independente de $(\widetilde{v_0}, \widetilde{v_1})$, tal que a solução $\widetilde{v} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ do problema de cauchy*

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{tt} - \Delta\widetilde{v} + \lambda\widetilde{v} = 0 & em \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{v}(x,0) = \widetilde{v_0}(x) & em \ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{v}_t(x,0) = \widetilde{v_1}(x) & em \ \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

satisfaz

$$\|\widetilde{v}_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{t^2}(\|\widetilde{v_1}\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v_0}\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}) \tag{2.4}$$

para cada $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$.

Demonstração: Como Ω é um domínio limitado e os suportes de $\widetilde{v_0}$ e $\widetilde{v_1}$ estão contidos em Ω_δ, temos $\widetilde{v_0} \in H^1_0(\Omega_\delta)$ e $\widetilde{v_1} \in L^2(\Omega_\delta)$.

Pelo fato de $C^\infty_0(\Omega_\delta)$ ser denso em $H^1_0(\Omega_\delta)$ e $L^2(\Omega_\delta)$, existem sequências

$$\{\widetilde{v_n}^0\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega_\delta), \quad \{\widetilde{v_n}^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega_\delta)$$

tais que

$$\lim \widetilde{v_n}^0 = \widetilde{v_0} \quad em \quad H^1(\Omega_\delta) \tag{2.5}$$

e

$$\lim \widetilde{v_n}^1 = \widetilde{v_1} \quad em \quad L^2(\Omega_\delta) \tag{2.6}$$

Para cada n podemos olhar $\widetilde{v_n}^0$ e $\widetilde{v_n}^1$ definidas em todo $\mathbb{R}^2$ (nulos fora de Ω_δ). Portanto para cada n temos $\widetilde{v_n}^0, \widetilde{v_n}^1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, ambas com suporte no domínio limitado Ω_δ.

A sequência $\{\widetilde{v_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ de soluções dos problemas de Cauchy

$$\begin{cases} (\widetilde{v_n})_{tt} - \Delta\widetilde{v_n} + \lambda\widetilde{v_n} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{v_n}(x,0) = \widetilde{v_n}^0(x) & em\ \mathbb{R}^2 \\ (\widetilde{v_n})_t(x,0) = \widetilde{v_n}^1(x) & em\ \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

converge para a solução $\widetilde{v}$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{tt} - \Delta\widetilde{v} + \lambda\widetilde{v} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{v}(x,0) = \widetilde{v_0}(x) & em\ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{v}_t(x,0) = \widetilde{v_1}(x) & em\ \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ (ver demonstração em [4]). E

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{v_n}(\cdot,t) = \widetilde{v}(\cdot,t) \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^2) \tag{2.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\widetilde{v_n})_t(\cdot,t) = (\widetilde{v})_t(\cdot,t) \quad em \quad L^2(\mathbb{R}^2), \tag{2.10}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver [4]).

Agora, aplicando o corolário (2.3) a $\widetilde{v_n}$ temos

$$\|(\widetilde{v_n})_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v_n}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \le \frac{K}{t^2}(\|\widetilde{v_n}^1\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v_n}^0\|^2_{H^1(\Omega_\delta)})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t > T_0$.

Passando o limite quando $n \to \infty$ nesta última desigualdade e usando (2.5), (2.6), (2.9) e (2.10) obtemos (2.4).

Lema 2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $\lambda \ge 0$ e Ω_δ uma vizinhança aberta de Ω. Sejam $(\widetilde{v_0}, \widetilde{v_1}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ funções com suportes compactos em Ω_δ. Para cada $T_0 > diam(\Omega_\delta)$ existe uma constante $K = K(\lambda, T_0, \Omega_\delta) > 0$, independente de*

$(\widetilde{v}_0, \widetilde{v}_1)$, *tal que a solução* $\widetilde{v} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ *do problema de cauchy generalizado*

$$\left\{\begin{array}{ll} \widetilde{v}_{tt} - \Delta \widetilde{v} + \lambda \widetilde{v} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{v}(x,T) = \widetilde{v}_0(x) & em\ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{v}_t(x,T) = \widetilde{v}_1(x) & em\ \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \tag{2.11}$$

satisfaz

$$\|\widetilde{v}_t(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v}(\cdot,0)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{T^2}(\|\widetilde{v}_1\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v}_0\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}) \tag{*}$$

para cada $x \in \Omega_\delta$ *e* $T > T_0$.

Demonstração: Seja $\widetilde{V} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} \widetilde{V}_{tt} - \Delta \widetilde{V} + \lambda \widetilde{V} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{V}(x,0) = \widetilde{v}_0(x) & em\ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{V}_t(x,0) = -\widetilde{v}_1(x) & em\ \mathbb{R}^2. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Fazemos $\tau = T - t$ e observamos que

$$\widetilde{V}(\cdot, T-t) = \widetilde{v}(\cdot, t),$$

$$\widetilde{V}_\tau(\cdot, T-t) = -\widetilde{v}_t(\cdot, t).$$

Agora, usando o lema (2.4) obtemos a seguinte estimativa:

$$\|\widetilde{v}_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v}(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \leq \frac{K}{(T-t)^2}(\|\widetilde{v}_1\|^2_{L^2(\Omega_\delta)} + \|\widetilde{v}_0\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}),$$

sempre que $T - t > T_0$.

Pelo fato de $T > T_0$, fazendo t=0 segue (*).

2.1 O Problema de Valor Inicial e Fronteira

Definição 2.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$, $\lambda \geq 0$ *e* $T > 0$ *números reais. Sejam* $h \in L^2(\partial\Omega \times [0,T])$, $u \in H^1(\Omega)$ *e* $v \in L^2(\Omega)$. *Uma função* $w \in H^1(\Omega \times]0,T[)$ *é solução do problema de valor inicial e fronteira*

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \lambda w = 0 & em\ \Omega \times]0, T[\\ w(x,0) = u(x) & em\ \Omega \\ w_t(x,0) = v(x) & em\ \Omega \\ w(x,t) = h(x,t) & em\ \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{2.13}$$

se existe uma sequência $\{w_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ *satisfazendo as seguintes condições:*

i) $\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = w$ *em* $H^1(\Omega \times]0,T[)$

ii) $(w_\nu)_{tt} - \Delta w_\nu + \lambda w_\nu = 0$ *em* $\Omega \times]0,T[, \quad \nu = 1, 2, ...,$

iii) $\lim_{\nu\to\infty} w_\nu(\cdot, 0) = u$ *em* $H^1(\Omega)$,

iv) $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} w_\nu(\cdot, 0) = v$ *em* $L^2(\Omega)$,

v) $\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = h$ *em* $L^2(\partial\Omega \times [0,T])$.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo aberto, chamando $\Omega = R$ então $R \times]0,T[$ é um paralelepípedo cujo a base é R e superfície lateral é $\partial R \times [0,T]$. Cada face de $\partial R \times [0,T]$ pode ser identificada com um retângulo e portanto um domínio de $\mathbb{R}^2$. Uma função h está em $L^2(R \times]0,T[)$ se h restrita a cada uma das faces de $\partial R \times [0,T]$ é função de quadrado integrável no correspondente retângulo.

Proposição 2.7. *Dado um retângulo* $R \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\lambda \geq 0$, *sejam* $f \in H^1(R)$ *e* $g \in L^2(R)$ *funções dadas. Seja* $\widetilde{w} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ *a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{tt} - \Delta \widetilde{w} + \lambda \widetilde{w} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{w}(x,0) = \widetilde{f} & em\ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{w}_t(x,0) = \widetilde{g} & em\ \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $\widetilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *e* $\widetilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *são extenções de* f *e* g *respectivamente, com suportes em alguma vizinhança* R_δ *de* R.

Seja $\widetilde{W}$ *a restrição de* $\widetilde{w}$ *ao paralelepípedo* $R \times]0,T[$ *onde* $T > 0$.

Então:

a) $\widetilde{W}$ *tem traço de quadrado integrável em* $\partial R \times [0,T]$.

b) Denotando por $\widetilde{h}$ o traço de $\widetilde{W}$ em $\partial R \times [0,T]$, $\widetilde{W}$ satisfaz o problema de valor incial e fronteira

$$\begin{cases} \widetilde{W}_{tt} - \Delta \widetilde{W} + \lambda \widetilde{W} = 0 & em\ R \times]0,T[\\ \widetilde{W}(x,0) = f & em\ R \\ \widetilde{W}_t(x,0) = g & em\ R \\ \widetilde{W}(x,t) = \widetilde{h} & em\ \partial R \times [0,T]. \end{cases} \tag{2.15}$$

Demonstração: a) Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ uma função tal que $\varphi \equiv 1$ em alguma vizinhaça aberta de $\overline{R} \times [0,T]$. Em particular, $\varphi \equiv 1$ numa vizinhaça aberta de $\partial R \times [0,T]$. A função $\varphi \widetilde{w}$ está em $H^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ e coincide com $\widetilde{W}$ em $\overline{R} \times [0,T]$. Assim, o traço de $\varphi \widetilde{w}$ em $\partial R \times [0,T]$ será o traço de $\widetilde{W}$ aí. Para ver que $\varphi \widetilde{w}$ tem traço de quadrado integrável em $\partial R \times [0,T]$, fixemos uma face Γ_0 de $\partial R \times [0,T]$ e provemos que $\varphi \widetilde{w}$ tem tal traço em Γ_0. Seja Π o plano que contém Γ_0 e seja $\sum$ o semiespaço que contém $R \times [0,T]$. Podemos identificar $\sum$ com $\mathbb{R}^3_+$. A restrição de $\varphi \widetilde{w}$ a $\sum$ é vista como uma função de $H^1(\mathbb{R}^3_+)$. Logo, pelo teorema (1.11), segue que $\varphi \widetilde{w}$ tem traço de quadrado integrável em Π, e portanto o mesmo vale em Γ_0, uma vez que $\Gamma_0 \subset \Pi$.

Pelo fato de podermos fazer isso em cada uma das faces, segue que $\varphi \widetilde{w}$ tem traço em $L^2(\partial R \times [0,T])$. Assim $\widetilde{W}$ tem traço em $L^2(\partial R \times [0,T])$.

Seja $\widetilde{h}$ o traço de $\widetilde{W}$ em $\partial R \times [0,T]$. Então, para toda sequência $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{R} \times [0,T])$ com

$$\lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu = \widetilde{W} \quad em \quad H^1(R \times]0,T[),$$

tem-se

$$\lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu|_{\partial R \times [0,T]} = \widetilde{h} \quad em \quad L^2(\partial R \times [0,T]).$$

b) Seja $\{w_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ uma sequência satisfazendo a definição (2.1) de solução do problema de Cauchy (2.14). Usando $R \times]0,T[$, a condição i) da definição

(2.1) fornece

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = \widetilde{w} \ \ em \ \ H^1(R\times]0,T[).$$

Como $\widetilde{W}$ é a restrição de $\widetilde{w}$ a $R\times]0,T[$, temos então a condição i) da definição (2.6) satisteita.

Como $(w_\nu)_{tt} - \Delta w_\nu + \lambda w_\nu = 0$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ para todo ν, o mesmo valerá em $R\times]0,T[$. Portanto vale a condição ii) da definição (2.6). As condições iii) e iv) da definição (2.6) seguem imediatamente das respectivas condições na definição (2.1), tomando-se $t_0 = 0$, e f, g em vez de u, v.

Seja agora $\psi_\nu = \varphi w_\nu$, onde φ foi definida em a). Como $\varphi \equiv 1$ em $\overline{R} \times [0,T]$ temos:

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu = \lim_{\nu\to\infty} w_\nu = \widetilde{w} = \widetilde{W} \ \ em \ \ H^1(R\times]0,T[).$$

Logo

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi w_\nu|_{\partial R\times[0,T]} = \widetilde{h} \ \ em \ \ L^2(\partial R \times [0,T]).$$

Como $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança aberta de $\partial R \times [0,T]$, o último limite pode ser escrito assim:

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu \,|_{\partial R\times[0,T]} = \widetilde{h} \ \ em \ \ L^2(\partial R \times [0,T]).$$

Logo a condição v) da definição (2.6) está satisfeita.

Portanto $\widetilde{W} = \widetilde{w}\,|_{R\times]0,T[}$ é solução do problema de valor inicial e fronteira (2.15) no sentido da definição (2.6).

Capítulo 3

O Problema de controle

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de controle exato na fronteira para um sistema de equações de ondas num retângulo aberto $R \subset \mathbb{R}^2$. Em nosso estudo usaremos a teoria exposta nos capítulos anteriores para exibir os detalhes da demonstração do teorema principal deste trabalho.

Teorema 3.1. *Sejam um retângulo aberto $R \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira denotada ∂R e $\lambda \geq 0$. Existe $T > 0$ tal que, para cada $u \in H^1(R)$, $v \in L^2(R)$ dados, existe $h \in L^2(\partial R \times [0,T])$ de modo que a solução do problema de valor inicial e fronteira*

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \lambda w = 0 & em\ R \times]0,T[\\ w(x,0) = u(x) & em\ R \\ w_t(x,0) = v(x) & em\ R \\ w(x,t) = h(x,t) & em\ \partial R \times [0,T] \end{cases} \tag{3.1}$$

satisfaz a condição

$$w(\cdot,T) = w_t(\cdot,T) = 0 \ \ em \ \ R$$

Demonstração: Sejam $\delta > 0$ e $R_\delta = R + B(0,\delta)$ uma vizinhaça aberta de R. Suponhamos que existam extensões $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ de u e v respectivamente tais que

$$\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \widetilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

$$supp\widetilde{u}, \quad supp\widetilde{v} \subset R_\delta,$$

e que a solução do do problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{tt} - \Delta y + \lambda y = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ y(\cdot, 0) = \widetilde{u} & em\ \mathbb{R}^2 \\ y_t(\cdot, 0) = \widetilde{v} & em\ \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

satisfaz a condição

$$y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0 \quad em \quad R.$$

Chamando de w a restrição de y ao paralelepípedo $R \times]0, T[$, da proposição (2.7) segue que w tem traço h sobre $\partial R \times [0, T]$ com $h \in L^2(\partial R \times [0, T])$ e satisfaz o teorema. Logo, para provarmos o teorema, basta acharmos $T > 0$ tal que cada par de dados iniciais $(u, v) \in H^1(R) \times L^2(R)$ possui uma extenção $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$ com a propriedade de que a solução y do problema de Cauchy (3.2) tenha seus dados identicamente nulos no instante T.

Do teorema (1.8) do capítulo 1 segue que existe um operador extensão

$$E : H^1(R) \times L^2(R) \to H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$(f, g) \mapsto (\widetilde{f}, \widetilde{g})$$

linear, que satisfaz

$$supp \widetilde{f}, supp \widetilde{g} \subset R_\delta$$

e

$$\| \widetilde{f} \|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \| \widetilde{f} \|^2_{H^1(R_\delta)} \leq C \| f \|^2_{H^1(R)}$$

$$\| \widetilde{g} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \| \widetilde{g} \|^2_{L^2(R_\delta)} = \| g \|^2_{L^2(R)}$$

para alguma constante $C > 0$. Desta forma, E é linear e limitado. Sejam $(f, g) \in H^1(R) \times L^2(R)$ e $(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = E(f, g)$ e seja $\widetilde{w} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{tt} - \Delta\widetilde{w} + \lambda\widetilde{w} = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \widetilde{w}(x,0) = \widetilde{f} & em\ \mathbb{R}^2 \\ \widetilde{w}_t(x,0) = \widetilde{g} & em\ \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Agora, para $T_0 > diam(R_\delta)$ e $T > T_0$, definimos o operador linear

$$S_T : H_0^1(R_\delta) \times L^2(R_\delta) \to H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) \mapsto (\widetilde{w}(\cdot, T), \widetilde{w}_t(\cdot, T))$$

onde $\widetilde{w}$ é a solução de (3.3).

Sabemos que S_T é limitado. Observe que

$$(\widetilde{w}(\cdot, T), \widetilde{w}_t(\cdot, T)) = S_T(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = S_T E(f, g). \tag{3.4}$$

Pelo lema (2.4) temos

$$\| \widetilde{w}(\cdot, T) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \widetilde{w}_t(\cdot, T) \|^2_{L^2(R_\delta)} \leq \frac{K}{T^2}\{\| \widetilde{f} \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \widetilde{g} \|^2_{L^2(R_\delta)}\} \tag{3.5}$$

para todo $T > T_0$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ com $\varphi \equiv 1$ em R e $supp\varphi \subset R_\delta$. Consideremos agora o problema de Cauchy retrógrado

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z + \lambda z = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ z(\cdot, T) = \varphi(x)\widetilde{w}(x, T) & em\ \mathbb{R}^2 \\ z_t(\cdot, T) = \varphi(x)\widetilde{w}_t(x, T) & em\ \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{3.6}$$

cuja solução z está em $H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$.

Consideremos $y \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + \lambda y = 0 & em\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ y(\cdot, 0) = \widetilde{f}(x) - z(x, 0) & em\ \mathbb{R}^2 \\ y_t(\cdot, 0) = \widetilde{g}(x) - z_t(x, 0) & em\ \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observe que $\widetilde{w} - z$ satisfaz (3.7). De fato: usando (3.3) e (3.6) temos

$(\widetilde{w} - z)_{tt} - \Delta(\widetilde{w} - z) + \lambda(\widetilde{w} - z) =$

$= (\widetilde{w}_{tt} - \Delta\widetilde{w} + \lambda\widetilde{w}) - (z_{tt} - \Delta z + \lambda z) = 0$

e

$(\widetilde{w} - z)(x, 0) = (\widetilde{w}(x, 0) - z(x, 0)) = \widetilde{f}(x) - z(x, 0),$

$(\widetilde{w} - z)_t(x, 0) = (\widetilde{w}_t(x, 0) - z_t(x, 0)) = \widetilde{g}(x) - z_t(x, 0).$

Logo, $y = \widetilde{w} - z$ e

$$y(x, T) = \widetilde{w}(x, T) - z(x, T) = (1 - \varphi(x))\widetilde{w}(x, T),$$

$$y_t(x, T) = (1 - \varphi(x))\widetilde{w}_t(x, T).$$

Como $\varphi \equiv 1$ em R temos

$$y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0 \quad em \quad R.$$

Assim, a restrição y ao paralelepípedo $R\times]0, T[$ resolverá o problema de controle se T, f e g forem escolhidos de tal forma que

$$\widetilde{f} - z(\cdot, 0) \quad \text{é uma estensão de} \quad u$$

$$\widetilde{g} - z_t(\cdot, 0) \quad \text{é uma estensão de} \quad v$$

ao plano.

Seja S_T^* o operador linear definido por

$$S_T^* : H_0^1(R_\delta) \times L^2(R_\delta) \to H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$(z(\cdot, T), z_t(\cdot, T)) \to (z(\cdot, 0), z_t(\cdot, 0))$$

onde z é a solução de (3.6). S_T^* é limitado, logo

$(z(\cdot, 0), z_t(\cdot, 0)) = S_T^*(z(\cdot, T), z_t(\cdot, T)) = S_T^*(\varphi(\cdot)\widetilde{w}(\cdot, T), \varphi(\cdot)\widetilde{w}_t(\cdot, T))$

$= S_T^*[\varphi(\cdot)(\widetilde{w}(\cdot, T), \widetilde{w}_t(\cdot, T))]$

$= S_T^*[\varphi(\cdot)S_T(\widetilde{f},\widetilde{g})]$
$= S_T^*[\varphi(\cdot)S_T E(f,g)]$
$= (S_T^*\varphi S_T E)(f,g).$

Denotando por X a restrição de $(S_T^*\varphi S_T E)$ a R, a condição

$$f - z(\cdot,0)\mid_R = u \quad e \quad f - z_t(\cdot,0)\mid_R = v$$

pode ser escrita na forma

$$[I - (XS_T^*\varphi S_T E)](f,g) = (u,v)$$

onde I denota o operador identidade.

Seja $K_T = XS_T^*\varphi S_T E$. Assim,

$$K_T : H^1(R) \times L^2(R) \to H^1(R) \times L^2(R)$$

é um operador linear limitado e

$$(z(\cdot,0), z_t(\cdot,0)) = K_T(f,g) \quad \text{em} \quad R.$$

Para concluirmos a demonstração devemos provar que existe $T > 0$ tal que para todo $(u,v) \in H^1(R) \times L^2(R)$, a equação

$$(I - K_T)(f,g) = (u,v) \tag{3.8}$$

tem solução $(f,g) \in H^1(R) \times L^2(R)$. Para isso provaremos que tomando $T > 0$ suficientemente grande, o operador K_T é uma contração. Pelo teorema (1.1) do capítulo 1 teremos que $I - K_T$ é invertível e assim existirá tal solução para a equação (3.8).

Agora utilizaremos as estimativas de decaimento local de energia obtidas no capítulo 2.

Seja $T > T_0$ e $\widetilde{w} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy (3.3). Do lema (2.4) temos

$$\| \widetilde{w}(\cdot, T) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \widetilde{w}_t(\cdot, T) \|^2_{L^2(R_\delta)} \leq \frac{K}{T^2}[\| \widetilde{f} \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \widetilde{g} \|^2_{L^2(R_\delta)}]$$

$$\leq (C+1)\frac{K}{T^2}[\| f \|^2_{H^1(R)} + \| g \|^2_{L^2(R)}]. \tag{3.9}$$

Como $\| K_T \|^2_{H^1(R)\times L^2(R)} = \| z(\cdot, 0) \|^2_{H^1(R)} + \| z_t(\cdot, 0) \|^2_{L^2(R)}$, usando o lema (2.5) para a solução z do problema (3.6) temos

$$\begin{aligned}
&\| K_T(f,g) \|^2_{H^1(R)\times L^2(R)} \leq \| z(\cdot, 0) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| z_t(\cdot, 0) \|^2_{L^2(R_\delta)} \\
&\leq \frac{K}{T^2}[\| z(\cdot, T) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| z_t(\cdot, T) \|^2_{L^2(R_\delta)}] \\
&= \frac{K}{T^2}[\| \varphi(\cdot)\widetilde{w}(\cdot, T) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \varphi(\cdot)\widetilde{w}_t(\cdot, T) \|^2_{L^2(R_\delta)}] \\
&\leq \Gamma(\varphi)\frac{K}{T^2}[\| \widetilde{w}(\cdot, T) \|^2_{H^1(R_\delta)} + \| \widetilde{w}_t(\cdot, T) \|^2_{L^2(R_\delta)}]
\end{aligned}$$

onde $\Gamma(\varphi)$ é uma constante que depende dos valores máximos de φ e suas derivadas em R_δ. Usando a desiqualdade (3.9) concluímos

$$\| K_T(f,g) \|^2_{H_1(R)\times L^2(R)} \leq \frac{(1+C)\Gamma(\varphi)K^2}{T^4}[\| f \|^2_{H^1(R)} + \| g \|^2_{L^2(R)}],$$

ou seja,

$$\| K_T(f,g) \|^2_{H_1(R)\times L^2(R)} \leq \frac{\zeta^2}{T^4}[\| f \|^2_{H^1(R)} + \| g \|^2_{L^2(R)}] \tag{3.10}$$

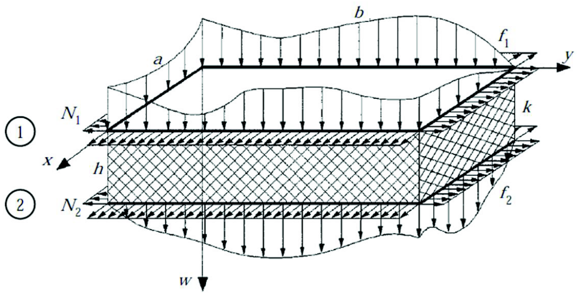
para todo $(f,g) \in H^1(R) \times L^2(R)$, onde $\zeta = K\sqrt{(1+C)\Gamma(\varphi)}$.
De (3.10) segue que

$$\| K_T \| = \sup_{(f,g)\in H^1(R)\times L^2(R), f\neq 0, g\neq 0} \frac{\| K_T(f,g) \|_{H_1(R)\times L^2(R)}}{\| (f,g) \|_{H^1(R)\times L^2(R)}} \leq \frac{\zeta}{T^2}.$$

Assim, para $T > \sqrt{\zeta}$, tem-se $\| K_T \| < 1$. Escolhendo $T > T_0$ e $T > \sqrt{\zeta}$ temos o desejado.

3.2 Formulação do Problema

O modelo mecânico do sistema de vibrações em consideração é composto de duas membranas retangulares paralelas conectadas por uma camada elástica de Winkler sem massa e linear. É suposto que as membranas são finas, homogêneas e perfeitamente elásticas e têm espessura constante. As membranas são uniformemente apertadas adequadamente por tensão constante na fronteira e são submetidas arbitrariamente por distribuições de cargas contínuas.



As equações diferenciais que regem as vibrações transversais do sistema de duas membranas têm a seguinte forma:

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1 - N_1\Delta w_1 + k(w_1 - w_2) = f_1, \\ m_2\ddot{w}_2 - N_2\Delta w_2 + k(w_2 - w_1) = f_2, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde $w_i = w_i(x, y, t)$ é o deslocamento transversal da membrana, $f_i = f_i(x, y, t)$ é a distribuição de cargas, (x, y) e t são pares ordenados e o tempo respectivamente; k é o módulo da rigidez de uma camada elástica de Winkler, m_i é a massa, N_i é a constante de tensão uniforme por unidade de comprimento,

$$\dot{w}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \Delta w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \quad i = 1, 2.$$

Este problema é trabalhado por Oniszczuk [13] e [14]. O teorema principal do nosso trabalho é um tipo particular do sistema (3.11), onde $f_1 = f_2 \equiv 0$.

3.3 Teorema Principal

Notação:$\mathcal{H}(R) = H^1(R) \times L^2(R) \times H^1(R) \times L^2(R)$

Teorema 3.2. *Sejam um retângulo aberto $R \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira denotada ∂R e $\lambda \geq 0$. Existe $T > 0$ tal que para todos $(u_0, u_1, v_0, v_1) \in \mathcal{H}(R)$ existe controles $f, g \in L^2(\partial R \times [0,T])$ de modo que a solução de*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \lambda(u - v) = 0 & em\ R\times]0,T[\\ v_{tt} - \Delta v + \lambda(v - u) = 0 & em\ R\times]0,T[\\ u = f, \quad v = g & em\ \partial R \times [0,T] \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad u_t(\cdot,0) = u_1 & em\ R \\ v(\cdot,0) = v_0, \quad v_t(\cdot,0) = v_1 & em\ R \end{cases} \tag{3.12}$$

satisfaz a condição final

$$u(\cdot,T) = u_t(\cdot,T) = v(\cdot,T) = v_t(\cdot,T) = 0 \ \ em\ \ R$$

Demonstração: Fazendo a mudança de variáveis $z = u + v$ e $w = u - v$, temos $u = \dfrac{z+w}{2}$ e $v = \dfrac{z-w}{2}$, que substituindo na equação (3.12) nos dão

$$\begin{cases} (\frac{z+w}{2})_{tt} - \Delta(\frac{z+w}{2}) + \lambda(\frac{z+w}{2} - \frac{z-w}{2}) = 0 \\ (\frac{z-w}{2})_{tt} - \Delta(\frac{z-w}{2}) + \lambda(\frac{z-w}{2} - \frac{z+w}{2}) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} (z+w)_{tt} - \Delta(z+w) + \lambda[(z+w) - (z-w)] = 0 \\ (z-w)_{tt} - \Delta(z-w) + \lambda[(z-w) - (z+w)] = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z + (w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w) = 0 \\ z_{tt} - \Delta z - (w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

e como

$w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = (u-v)_{tt} - \Delta(u-v) + 2\lambda(u-v)$

$= u_{tt} - v_{tt} - \Delta u + \Delta v + \lambda(u-v) - \lambda(v-u)$

$= [u_{tt} - \Delta u + \lambda(u-v)] - [v_{tt} - \Delta v + (v-u)] = 0,$

substituindo em (3.13) obtemos

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0 \\ w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

De (3.14) e (3.12) devemos encontrar $T > 0$ e controles $F, G \in L^2(\partial R \times [0,T])$ tais que

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0 & em \ R \times]0,T[\\ z(\cdot,0) = u_0 + v_0, & em \ R \\ z_t(\cdot,0) = u_1 + v_1 & em \ R \\ z = F & em \ \partial R \times [0,T] \end{cases} \tag{3.15}$$

e

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = 0 & em \ R \times]0,T[\\ w(\cdot,0) = u_0 - v_0, & em \ R \\ w_t(\cdot,0) = u_1 - v_1 & em \ R \\ w = G & em \ \partial R \times [0,T] \end{cases} \tag{3.16}$$

satisfazendo $z(\cdot,T) = z_t(\cdot,T) = w(\cdot,T) = w_t(\cdot,T) = 0$ em R.

Para $\lambda = 0$, usando o teorema (3.1), existe $T_1 > 0$ e controle $F \in L^2(\partial R \times [0,T_1])$ tal que a solução do problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0 & em \ R \times]0,T_1[\\ z(\cdot,0) = u_0 + v_0, & em \ R \\ z_t(\cdot,0) = u_1 + v_1 & em \ R \\ z = F & em \ \partial R \times [0,T_1] \end{cases} \tag{3.17}$$

satisfaz

$$z(\cdot,T_1) = z_t(\cdot,T_1) = 0 \quad em \quad R.$$

Na demonstração do teorema (3.1) vimos que para todo $T > T_1$,

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0 & em \ R \times]0,T[\\ z(\cdot,0) = u_0 + v_0, & em \ R \\ z_t(\cdot,0) = u_1 + v_1 & em \ R \\ z = F & em \ \partial R \times [0,T] \end{cases} \tag{3.18}$$

satisfaz

$$z(\cdot,T) = z_t(\cdot,T) = 0 \quad em \quad R.$$

Pelo mesmo teorema (3.1) usando $\lambda > 0$, existe $T_2 > 0$ e controle $G \in L^2(\partial R \times [0,T_2])$ tal que a solução do problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = 0 & em \ R \times]0,T_2[\\ w(\cdot,0) = u_0 - v_0, & em \ R \\ w_t(\cdot,0) = u_1 - v_1 & em \ R \\ w = G & em \ \partial R \times [0,T_2] \end{cases} \tag{3.19}$$

satisfaz

$$w(\cdot, T_2) = w_t(\cdot, T_2) = 0 \;\; em \;\; R.$$

Analogamente para $T > T_2$ tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = 0 & em \; R\times]0, T[\\ w(\cdot, 0) = u_0 - v_0, & em \;\; R \\ w_t(\cdot, 0) = u_1 - v_1 & em \;\; R \\ w = G & em \;\; \partial R \times [0, T] \end{array} \right. \tag{3.20}$$

satisfaz

$$w(\cdot, T) = w_t(\cdot, T) = 0 \;\; em \;\; R.$$

Tomando $T > máx\{T_1, T_2\}$ temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{tt} - \Delta z = 0 & em \; R\times]0, T[\\ z(\cdot, 0) = u_0 + v_0, & em \;\; R \\ z_t(\cdot, 0) = u_1 + v_1 & em \;\; R \\ z = F & em \;\; \partial R \times [0, T] \end{array} \right. \tag{3.21}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_{tt} - \Delta w + 2\lambda w = 0 & em \; R\times]0, T[\\ w(\cdot, 0) = u_0 - v_0, & em \;\; R \\ w_t(\cdot, 0) = u_1 - v_1 & em \;\; R \\ w = G & em \;\; \partial R \times [0, T] \end{array} \right. \tag{3.22}$$

satisfazendo $z(\cdot, T) = z_t(\cdot, T) = w(\cdot, T) = w_t(\cdot, T) = 0 \;\; em \;\; R.$

Agora, substituindo $z = u + v$ em (3.21) e $w = u - v$ em (3.22) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (u + v)_{tt} - \Delta(u + v) = 0 \\ (u - v)_{tt} - \Delta(u - v) + 2\alpha(u - v) = 0, \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + v_{tt} - \Delta v = 0 \\ (u_{tt} - \Delta u + 2\lambda u) - (v_{tt} - \Delta v + 2\lambda v) = 0. \end{array} \right.$$

Somando as duas últimas equações obtemos

$$2u_{tt} - 2\Delta u + 2\lambda(u - v) = 0,$$

ou seja,

$$u_{tt} - \Delta u + \lambda(u - v) = 0.$$

Substituindo essa equação na equação $(u_{tt} - \Delta u + 2\lambda u) - (v_{tt} - \Delta v + 2\lambda v) = 0$ obtém-se

$$-v_{tt} + \Delta v + \lambda(u - v) = 0$$

ou seja,

$$v_{tt} - \Delta v + \lambda(v - u) = 0.$$

Também, de $u = \dfrac{z + w}{2}$ e $v = \dfrac{z - w}{2}$ temos:

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = [(u_0 + v_0) + (u_0 - v_0)]/2 = 2u_0/2 = u_0 \;\; em \;\; R \\ u_t(\cdot, 0) = [(u_1 + v_1) + (u_1 - v_1)]/2 = 2u_1/2 = u_1 \;\; em \;\; R \\ v(\cdot, 0) = [(u_0 + v_0) - (u_0 - v_0)]/2 = 2v_0/2 = v_0 \;\; em \;\; R \\ v_t(\cdot, 0) = [(u_1 + v_1) - (u_1 - v_1)]/2 = 2v_1/2 = v_1 \;\; em \;\; R. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \lambda(u - v) = 0 \quad em \; R\times]0, T[\\ v_{tt} - \Delta v + \lambda(v - u) = 0 \quad em \; R\times]0, T[\\ u = \frac{F+G}{2}, \quad v = \frac{F-G}{2} \quad \text{em } \partial R \times [0, T] \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad em \;\; R \\ v(\cdot, 0) = v_0, \quad v_t(\cdot, 0) = v_1 \quad em \;\; R \end{cases} \tag{3.23}$$

que satisfaz

$$\begin{cases} u(\cdot, T) = (z(\cdot, T) + w(\cdot, T))/2 = 0 \;\; em \;\; R \\ u_t(\cdot, T) = (z_t(\cdot, T) + w_t(\cdot, T))/2 = 0 \;\; em \;\; R \\ v(\cdot, T) = (z(\cdot, T) - w(\cdot, T))/2 = 0 \;\; em \;\; R \\ v_t(\cdot, T) = (z_t(\cdot, T) + w_t(\cdot, T))/2 = 0 \;\; em \;\; R. \end{cases}$$

Como $L^2(\partial R \times [0, T])$ é um espaço vetorial temos que $\dfrac{F + G}{2}, \dfrac{F - G}{2} \in L^2(\partial R \times [0, T])$. Chamando $\dfrac{F + G}{2} = f$ e $\dfrac{F - G}{2} = g$ temos o desejado.

Bibliografia

[1] BACHMAN G. end NARICI L. **Functional Analysis**. New York: Polytechnic of Brooklyn,1966.

[2] BASTOS W.D , SPEZAMIGLIO A. On the Controllability for Second Order Hiperbolic Equations in Curved Polygons. **TEMA**, Tend. Mat. Apl. Comput., v.8,N.2 (2007), p 169-179, 2007.

[3] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1984.

[4] DELGADO, M.A.J, **Controle de Ondas Bidimensionais.** Dissertação (mestrado em matemática)- UNESP IBILCE, São José do Rio Preto, 2004.

[5] EVANS,L.C **Partial Differential Equations**. Berkeley: American Mathematical Society, 2000.

[6] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications.** New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.

[7] KREYSZIG E. **Introductory Functional Analysis With Applications**. New York: John Wiley and Sons, 1978.

[8] LIMA, E.L. **Espaços métricos.** Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Impa,2007.

[9] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ. Textos e Métodos Matemáticos 18, 1989.

[10] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ. 2000.

[11] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais** . Rio de Janeiro: IM-UFRJ. 1989.

[12] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ. Textos e Metodos Matemáticos 9, 1977.

[13] ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of elastically connected rectangular double-membrane compound system. **Journal of Sound and Vibration** 221, 235-250, 1999.

[14] ONISZCZUK, Z. Transverse vibrations of elastically connected rectangular double-string complex system. **Journal of Sound and Vibration** 232, 355-366, 1999.

[15] RUSSEL, D.L Unified Boundary Controllability Theory For Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations. **Studies in Applied Mathematics.** v.II, p189-211, 1973.

[16] SOBOLEV, S.L. **Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics**. Providence: AMS, 1963.

[17] YOSHIDA, K., **Functional Analysis,** Sixth edition. Berlin: Springer-Verlag, 1980.