**UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC**
**UNIDADE ACADÊMICA HUMANIDADES, CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA E EXTENSÃO**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**
**MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

**DAIANA SOUZA**

# SIGNIFICAÇÕES DO CONCEITO DE RADICIAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SÉCULO XX: EVIDÊNCIAS E AUSÊNCIAS

**CRICIÚMA, MARÇO DE 2010.**

**DAIANA SOUZA**

# SIGNIFICAÇÕES DO CONCEITO DE RADICIAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SÉCULO XX : EVIDÊNCIAS E AUSÊNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, Estado de Santa Catarina, em atendimento a uma das exigências legais para a obtenção do título de mestre em Educação.

**Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio**

**CRICIÚMA, MARÇO DE 2010.**

unesc
Universidade
do Extremo
Sul Catarinense

UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA E EXTENSÃO
UNIDADE ACADÊMICA DE HUMANIDADES, CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - MESTRADO

"Significações do Conceito de Radiciação nos Livros Didáticos do Século XX: Evidências e Ausências"

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Educação em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

APROVADO PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM 29/03/2010:

Prof. Dr. Ademir Damazio (Presidente e Orientador)

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti (Membro – UFSC)

Profa. Dra. Ledina Lentz Pereira (Membro – UNESC)

Prof. Dr. Celdon Fritzen (Suplente – UNESC)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
Coordenador - Adjunto do PPGE-UNESC

Daiana Souza

Daiana Souza
Mestranda

Criciúma, SC, março de 2010.

**Para Antonio e Vera, meus pais;**
**Marieli, minha irmã e**
**ao meu namorado Rodrigo.**

## AGRADECIMENTOS

Neste momento, registro meus agradecimentos às pessoas especiais que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Antonio e Vera e a Marieli, minha irmã, pela colaboração neste período, atendendo casa, família e os amigos nos momentos de minhas ausências e silêncios, além disso, oferecendo-me incentivos e apoio.

Ao meu namorado, Rodrigo, que soube entender a opção pelo estudo em tantas ocasiões; também, pela paciência, pelo apoio nas situações difíceis e por compreender minha ausência, apesar da presença.

Aos professores e colegas do curso de mestrado pelas reflexões e aprendizagens que nos proporcionaram.

Aos professores que participaram da banca de qualificação, como também de defesa deste trabalho, pela disponibilidade e pelas fundamentais contribuições dadas.

As amigas Viviane e Maria Aparecida (Léia) que me conduziram e incentivaram para a realização deste curso de mestrado.

Tão importante quanto todos os já citados, ao professor orientador Dr. Ademir Damazio, um carinho especial, pois além dos ensinamentos, apontou caminhos a serem percorridos e mostrou disponibilidade e compreensão quando alguns acontecimentos dificultaram minha caminhada e desempenho.

À Deus...

Por isso na impaciência
Desta sede de saber,
Como as aves do deserto
As almas buscam beber...
Oh! Bendito o que semeia
Livros... livros à mão cheia...
E manda o povo pensar!
O livro caindo n'alma
É germe — que faz a palma,
É chuva — que faz o mar.

(Castro Alves)

## RESUMO

A presente pesquisa analisa as significações do conceito de radiciação, mais especificamente a raiz quadrada, trazidas pelos livros didáticos do ensino fundamental no decorrer do século XX. Procuramos observar o momento que este conceito aparece pela primeira vez, verificando as significações que permanecem, desaparecem ou surgem e também como são tratadas didaticamente. A escolha pelo objeto de estudo foi decorrente da própria prática docente que nos proporcionou reflexões acerca da utilização do livro didático. A opção da análise do conceito de raiz quadrada é proveniente do seu caráter de novidade perante aos alunos. A pergunta diretriz foi: Quais as significações de radiciação, em sua especificidade a raiz quadrada, que os livros didáticos evidenciam quando apresentam pela primeira vez o referido conceito? Analisamos vinte e um livros didáticos do ensino fundamental com enfoque da pesquisa qualitativa, na modalidade de análise de conteúdo. Os resultados da pesquisa demonstram que o conceito de raiz quadrada constituiu um conteúdo de ensino aprendizagem no século XX, A sua definição e a exploração de métodos de extração foram as duas significações que se fizeram presente de uma forma ou de outra em todos os livros analisados. Dentre os algoritmos para a determinação da raiz quadrada de um número destacam-se: o método tradicional, de tentativas, calculadora, decomposição em fatores primos. Houveram livros que mencionaram as significações algébricas, aritméticas, geométricas, aspectos históricos, entre outros. As lacunas apresentadas nos livros didáticos nos remeteram as hipóteses de que são contempladas pelo professor em sala de aula ou apenas passam despercebidas em classe.

Palavras-Chave: Matemática; Livro Didático; Século XX; Raiz quadrada.

## ABSTRACT

This research analyzes the meanings of the concept of rooting, more specifically the square rooting, brought by school books of elementary education during the twentieth century. We researched in order to observe the moment that the concept showed up the first time, checking the meanings that appear, remain or disappear as well as on how they are treated didactically. The choice for this subject matter was the result of our own teaching practice which gave us ideas about the use of the school books. The option of analyzing the concept of square rooting is due to its characteristic surprise matter to the students. We analyzed 21 elementary school books by using a qualitative approach. The method used for the interpretation of results was the analysis of content. The guiding question was: What are the meanings of root in its specificity to the square root, that the textbooks when they present evidence for the first time such a concept? The survey results show that the concept of square root was in the content of learning in the twentieth century. Definition and exploration of resolving methods, in one way or another, made part of elements found in all the books analyzed. Among the algorithms for determining the square root of a number, the traditional method of trying out numbers, using the calculator and decomposition of prime factors stood out. There were books that mentioned the algebraic, arithmetic, geometric meanings, its historical aspects, among others. Gaps presented in the school books were referred to the hypotheses that they were addressed by the teacher in the classroom or just went by unnoticed in the classroom.


Keywords: Mathematics; Textbook; Century; Square root.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

# SUMÁRIO

## 1 – REFLEXÕES INICIAIS: O CONTEXTO DO OBJETO

O motivo do presente estudo foi produzido na própria prática docente que proporcionou algumas reflexões sobre o livro didático. Nas primeiras atuações no Ensino Fundamental, sentimos dificuldades no planejamento das aulas a serem ministradas. Essa ação da atividade docente sempre foi marcada por dúvidas, angústias, sensação de imperfeição. A timidez e o receio de sermos estigmatizados de “despreparados” profissionalmente para ensinar Matemática fez com que em vez de buscarmos orientação com outros professores ou pessoas da área pedagógica, recorrêssemos aos livros didáticos com a finalidade de amenizar tantas dúvidas sobre as decisões que se apresentavam. Depois de alguns anos, percebemos que para uma parte dos educadores, o livro didático é o seu único referencial. Para outros, ele não é um instrumento didático exclusivo, mas se faz presente em suas aulas, seja como fonte de exercícios, de pesquisas ou na elaboração de conceitos propriamente ditos.

A preocupação para não cairmos na dependência exclusiva do livro didático na organização das nossas aulas de Matemática passa a ser uma constante. Na época, despertava a consciência de que o seu uso exclusivo traduzia o nosso olhar apenas para um aspecto do processo pedagógico, qual seja, o ensino e, conseqüentemente, um abandono do outro elemento fundamental que é a aprendizagem. Isso significa que pensávamos mais em nós do que nos alunos. O conjunto de questionamentos, no entanto, era os primeiros indícios de que não queríamos compor no grupo daqueles professores que, segundo Uliano (2006), demonstra fidelidade ao livro adotado de uma forma que não percebem erros e incoerências conceituais e pedagógicas do autor.  Concordamos com a referida autora ao dizer que o livro didático tem seu valor desde que haja uma análise criteriosa de sua proposta e não se constitua um porto seguro para todas ações educativas.

Nascia, então, nova compreensão que também fora explicitada por Romanatto (2004): o livro didático, como qualquer outro recurso, tem sua importância desde que associada ao uso que o professor dele faça. O seu emprego correto tem como parâmetro os objetivos de ensino e aprendizagem a alcançar, que enfatizarão os seus pontos fortes e anularão seus pontos fracos. Isso requer a atenção do professor mesmo no momento de analisar e selecionar o livro didático. Só assim, revelará sua capacidade para o uso devido do referido instrumento pedagógico.

Portanto, o livro didático de Matemática do Ensino Fundamental se apresenta como tema e objeto de estudo da pesquisa de nossa dissertação. Entretanto, para a definição do problema necessário, se fez a recorrência a estudos realizados sobre o tema como precaução para não estarmos sobrepondo conhecimento com aqueles produzidos por outros pesquisadores.

Nos últimos anos, surgiram muitos estudos sobre o tema “livro didático” de Matemática que apresentam diferentes concepções e enfoques teórico-metodológicos. No entanto, nenhum deles tratou da temática e referencial teórico abordados na presente pesquisa. Para confirmar tal afirmação realizamos um levantamento preliminar que classificamos em três categorias: 1.ª – Dissertações; 2.ª – Artigos e 3.ª – Resumos publicados em anais.

Nesse sentido, dedicaremos o próximo capítulo para elucidar os estudos a partir de 2004 cuja temática foi o livro didático, porém, com foco distinto de nossas pretensões. A nossa pesquisa tem algo em comum com todos os estudos resenhados, concluídos e em andamento, por também analisar livros didáticos. Entretanto, a particularidade do presente estudo está na pretensão de analisar o tratamento didático-pedagógico do conceito de raiz quadrada, no decorrer dos tempos, com ênfase no movimento que traduz permanências, surgimento e desaparecimento de suas significações. A base teórica é a abordagem Histórico-Cultural que ressalta a importância da elaboração do conceito historicamente pelo homem, a partir de suas necessidades individuais e sociais.

Muitas razões poderiam ser destacadas que nos levaram à opção pelo referido conceito matemático, entretanto duas serão mencionadas. Uma delas é o seu caráter de "novidade" entre os alunos de 5.ª série (atualmente 6.º ano escolar) que nas primeiras aulas perguntavam: "Professora, quando vamos aprender raíz quadrada?" As suas expectativas eram geradas como conseqüência da ênfase, nas quatro séries iniciais, às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e, às vezes, potenciação. Essa rotina de estudar a "mesma coisa" leva os estudantes, ao chegarem na 5.ª série, serem alertados por seus colegas da 6.ª série (7.º ano ) que irão estudar uma "coisa nova: a raiz quadrada".

Dessa ansiedade dos alunos nasce, para nós, uma outra razão que é identificar os tratamentos didáticos que os livros dedicam a esse conceito "novo", uma vez que as ações pedagógicas convencionais parecem transformar as expectativas dos estudantes em frustrações.

Entre os múltiplos questionamentos, definimos como pergunta diretriz da pesquisa: Quais as significações de radiciação, em sua especificidade a raiz quadrada, que os livros didáticos evidenciam quando apresentam pela primeira vez o referido conceito? Contribuem para entender os propósitos do estudo outros questionamentos: Quais significações permanecem, desaparecem ou surgem? Como elas são tratadas didaticamente?

Com o intuito de responder ao referido problema e as perguntas auxiliares, foram analisados livros didáticos editados no século XX. Os livros focos do estudo têm como referência aqueles em que o conceito de raiz quadrada aparece pela primeira vez, independente da série escolar. A atenção voltou-se para: a sequência de ensino, as significações historicamente produzidas, o sistema conceitual que se insere e o movimento de exclusão-permanência-surgimento de significações.

Estabelecemos como objetivo geral: analisar as significações do conceito de radiciação trazidas pelos livros didáticos do Ensino Fundamental, no decorrer do século XX. Deste, desdobram-se objetivos específicos que, por sua vez, são indicativos de ações delimitadoras para atendimento de forma organizada aos propósitos da pesquisa:

- Identificar as significações historicamente produzidas referente ao conceito de radiciação no momento de sua primeira apresentação no livro didático;
- Caracterizar as significações em termos conceituais matemáticos (aritmético, geométrico e algébrico);
- Identificar e caracterizar os aspectos didáticos referentes ao conceito de radiciação.

# 2 – O LIVRO DIDÁTICO: BREVE HISTÓRICO E ESTUDOS A ELES RELACIONADOS

## 2.1. Breve histórico do livro didático no ensino brasileiro

Nessa seção faremos um breve histórico sobre a gênese do livro didático no Brasil. Acreditamos que os livros de uma forma geral têm o papel da transmissão de conhecimento, na forma impressa, para as novas gerações. Segundo Schubring (2003) o livro-texto tem história, uma função e influência ligadas à sociedade de sua época. Traz a intenção de alterar alguns aspectos, do modo pela qual essa sociedade é organizada. Portanto, ultrapassa os limites das concepções dos autores de ciência, cultura, ensino e aprendizagem. Dessa forma, segundo o autor, ele se constitui em um dos dois caminhos de transmissão do saber matemático, qual seja: textos escritos, uma vez que o outro é por comunicação pessoal ou oral.

A existência do livro de matemática – impresso – é recente, aproximadamente quinhentos anos, se considerarmos que a Matemática remonta há cinco mil anos. No Brasil, a denominação “livro didático” é restrita aos livros de uso escolar para o ensino básico – fundamental e médio – e “livro texto” aqueles de uso do ensino superior. (SCHUBRING, 2003)

Segundo Valente (2008), a história da criação do primeiro livro didático em nosso país, relaciona-se aos interesses da Coroa Portuguesa, em defender as conquistas aqui efetivadas. Por isso, em 1699, ela decide investir na formação dos militares, pela necessidade de treinar os oficiais no manuseio de equipamentos de artilharia e na aquisição de competência para a construção dos fortes. Neste momento, houve a criação da Aula de Artilharia e Fortificações. Com ela, surgiram as dificuldades pela falta de material impresso em português para a instrução dessas pessoas que mal sabiam ler. Os problemas foram amenizados quando Portugal enviou, ao Brasil, o militar Fernandes Pinto Alpoim para lecionar na referida corporação. Em 19 de agosto de 1738, o ensino militar se tornou obrigatório a todos os oficiais. Com isso, nenhum militar poderia ser promovido se não tivesse aprovação na Aula de Artilharia e Fortificações. Alpoim ministrou o curso no período entre 1738 até 1765 quando faleceu. Por acumular experiência como professor, escreveu duas obras que se tornaram os primeiros livros didáticos de matemática escritos no Brasil: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros.

O livro *Exame de Artilheiros* apresentava algumas ilustrações e foi escrito na forma de perguntas e respostas. Os conteúdos matemáticos antecediam ao estudo de conceitos de artilharia por serem considerados pré-requisitos. O livro dividia-se em três capítulos: Aritmética, Geometria e Artilharia. (ALVES, 2005)

Valente[1] (apud ALVES, 2005) pressupõe que os alunos para a qual Alpoim lecionava tinham em torno de 18 anos. Pelos textos apresentados, a aritmética era bastante enfatizada, o que levara à conclusão de que os estudantes desconheciam as quatro operações matemáticas fundamentais. A seqüência didática utilizada no livro consistia de: definição, explicação, exemplo numérico. Como era habitual para a época, o texto apresentava pouca notação matemática, ou seja, ausência de rigor matemático.

Alpoim não exigia dos alunos ingressantes pré-requisitos de conteúdos matemáticos, porém sempre enfatizava que a tabuada tinha que ser decorada. No final do capitulo de Aritmética e Geometria existia a seguinte tabuada:

---

[1] ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **Livro Didático de Matemática: Uma Abordagem Histórica (1943 – 1995).** 2005. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

**Figura 1: Ilustração utilizada por Alpoim, apresentada por Alves (2005).**

Segundo Alves (2005), não existem indícios nos textos de Alpoim de explicações da construção e utilização da tabuada. Porém, infere de que tais procedimentos didáticos eram incumbências dos professores no decorrer da aula.

O livro “Exame de Bombeiros” se traduziu numa extensão da obra anterior que emprestou muitas citações. Entretanto, esta segunda obra didática do ensino de matemática brasileiro foi proibida de circular no país, com a alegação de que o autor não respeitou a pragmática de tratamento das personalidades citadas, segundo o previsto nas leis e códigos em vigor.

Na seqüência cronológica do surgimento de livros didáticos no Brasil, Neves (2005) destaca que, no ano de 1809, foram realizadas várias traduções de textos europeus, sendo os primeiros: *Os Elementos de Geometria*, de Legendre, cujo tradutor foi Araújo Guimarães; *Tratado de Geometria*, também de Legendre; *Os Elementos de Álgebra*, de Leonardo Euler. Em 1810, foi lançado o *Tratado de Aritmética*, de Lacroix, traduzido por Silva Torres e, em 1812, os *Elementos de Geometria Descritiva*, de Gaspard Monge, cuja tradução foi feita por José Vitorino dos Santos e Souza.

Ramos (2006) cita alguns livros de matemática surgidos por volta do ano de 1830 no Brasil: *Marquês de Paranaguá - Elementos de Geometria*, *Aritmética*, *Matemáticas Elementares*, cujos autores são respectivamente: Francisco Vilela Barbosa, Candido Baptista de Oliveira, Francisco de Paula Leal, Pedro de Alcântra Bellegard. Estes autores foram influenciados pelas obras A Geometria de Legendre, Geometria de Bézout, Elementos de Geometria de Lacroix e Elementos de Euclides. Neste momento da história, a atuação do professor sofre grandes influências exercidas pela inserção do livro didático, pois passa a ser sua única ferramenta de trabalho disponível em sala de aula.

Nos anos 1900, nascem as editoras especializadas em livros didáticos, pois o mercado era atraente e próprio para as concorrências. Vários matemáticos editaram suas obras, dentre eles: Otto de Alencar, Amoroso Costa. Na seqüência, em 1907, Antonio Trajano, lança o seu livro didático Aritmética Elementar Ilustrada, para o ensino primário. Entre as décadas de 1920 a 1930, vale destacar as obras didáticas do livro de Euclides Roxo, professor do Colégio Pedro II, e precursor do movimento escolanovista[2] no ensino da matemática, no Brasil. Em 1942, novos livros passam a ser adotados pelas escolas como Curso de Matemática, de autoria de Algacyr Munhoz Maeder; Matemática de Ary Quintella, Matemática de F. Furquim de Almeida, João B. Castanho, Edison Farah e Benedito Castrucci.

Em 1950, surgem novos livros, com propostas novas de ensino dos conteúdos matemáticos, influenciados pelo movimento de renovação da matemática, que acontecia no exterior e foi amplamente divulgado e acatado por muitos autores brasileiros. Na década de 1960, Sangiorgi, decidiu divulgar uma nova linha de transmissão de conteúdos matemáticos com mais eficiência no desenvolvimento do aluno. Vários seguidores adotaram a proposta de Sangiorgi, com o objetivo de

[2] Movimento escolanovista: Movimento de renovação social, cultural e educacional. Novas propostas pedagógicas foram instaladas no Brasil, provocando uma ampla discussão na renovação da educação brasileira. O principio da atividade e o principio da introdução nas escolas de situações da vida real, provocaram uma mudança radical no ensino de Matemática. Uma Matemática desenvolvida no quadro negro passou a se constituir uma Matemática da atividade. (MEINICKE, 2005)

ajustar os livros a uma proposta de um curso moderno de matemática. O próprio Sangiorgi fez uma revisão nos seus livros, com o objetivo de torná-los mais atrativos, com acréscimo de ilustrações (figuras).

A partir da década de 1970, os livros aparecem com textos mais adequados à realidade dos alunos, ilustrativos e com diversidade de proposições metodológicas que atendem tanto as novas legislações de ensino, como tendências educativas. (NEVES, 2005). Além disso, segundo Damazio (2006), aumenta o número de autores que possibilita aos professores dispersão de suas opções que, em décadas anteriores, eram focadas em poucos nomes. A avaliação dos livros didáticos, por comissões de área de ensino designada pelo Ministério da Educação e Cultura, na década de 1990, se constitui em elemento decisivo na escolha dos livros didáticos. No momento da opção, os professores passam a ter como um dos critérios a classificação obtida pelo livro na referida avaliação.

Endossamos o pensamento de Ramos (2006) quando afirma que o livro didático é a modalidade de leitura mais adotada no país. A maioria do povo brasileiro, desde que tenha frequentado a escola, convive com ele, pois é um instrumento didático que compõe o processo pedagógico. O vínculo do aluno brasileiro com esse recurso de ensino-aprendizagem é rompido no momento da conclusão dos estudos ou evasão escolar.

É nesse contexto que o autor em referência diz que o livro didático se constitui num instrumento fundamental para o desenvolvimento social, político e econômico da nação e dos indivíduos. Além disso, sua história no sistema educacional brasileiro, a partir de 1930, é marcada por uma sequência de decretos, leis e medidas governamentais, sem a participação de partidos políticos, sindicatos, associação de pais e mestres, associações de alunos, equipes científicas, entre outros. Em 2010, completa 81 anos da sua primeira oficialização governamental. Anualmente, em 27 de fevereiro, é comemorado o Dia Nacional do Livro Didático.

A seguir apresentaremos um quadro com a sequência cronológica, adaptado do texto de Ramos (2006), com a evolução histórica da política do livro didático no Brasil, a partir de 1929.

| ANO | FATO |
|---|---|
| 1929 | Criação do INL – Instituto Nacional do Livro |
| 1938 | Instituída a CNLD – Comissão Nacional do Livro Didático |
| 1966 | Durante o Regime militar, criação da COLTED – Comissão do livro técnico e do livro didático |
| 1968 | Criação da FENAME – Fundação nacional do material escolar |
| 1971 | Extinta a COLTED e criação do PNLD – Programa Nacional do livro didático vinculado ao INL |
| 1976 | FENAME conduz o PNLD que até o momento estava vinculado ao INL, todos subordinados ao Ministério da Educação e Cultura – MEC |
| 1980 | Criação da vinculação da política governamental do livro didático à criança carente |
| 1983 | Lançamento do PLIDEF – Programa do livro didático – Ensino Fundamental; PLIDEM - Programa do livro didático – Ensino Médio; PLIDSU - Programa do livro didático – Ensino Supletivo. Surgimento da FAE – Fundação de Assistência ao Estudante e extinção da FENAME |
| 1985 | Extinção do PLIDEF e criação PNLD – Programa nacional do livro didático desvinculado do INL. |
| 1997 | Extinção da FAE e o PNLD passa a ser gerenciado pelo FNDE – Fundo Nacional para o Desenvolvimento de Ensino |
| 2000 | Distribuição pelo MEC de livros em braile |
| 2002 | Distribuição de livros de literatura para as 4.ª e 5.ª séries e dicionários para 1.ª, 5.ª e 6.ª séries do ensino fundamental |
| 2004 | Criação do PNLD para o ensino médio |

**Quadro 1: Evolução histórica da política do livro didático no Brasil**

O governo federal é o maior usuário (comprador) de livros didáticos no Brasil e, por isso, exerce influências na sua produção por meio de seus técnicos e assessores.

Segundo Valente (2008), o livro didático de matemática é um meio revelador para fonte de pesquisa da história da educação matemática. Por meio desse objeto cultural é possível estudar a concepção dos autores, o processo pelo qual passou ou sofreu até chegar às mãos de professores e alunos. Quando utilizados pelos professores, pode revelar heranças de práticas pedagógicas do ensino de matemática presentes no dia a dia escolar.

## 2.2. Estudos relacionados ao livro didático de matemática

Apresentamos nessa seção resenhas de alguns estudos relacionados ao livro didático de matemática, nos últimos anos, que constituíram dissertações, resumos e artigos em periódicos. Na categoria dissertações, iniciamos com a pesquisa de Oliveira (2004) que optou por verificar a presença de temas relacionados à cidadania nos livros didáticos de Matemática. Parte do princípio que este instrumento pedagógico ratifica a dicotomia entre o que se ensina e o que é necessário para o exercício da cidadania. A fonte do estudo foi algumas coleções de livros didáticos que apresentam o conteúdo de percentagens, que no entendimento de Oliveira, é propício para tratar de questões do tipo: Trabalho e Consumo. Conclui que alguns livros apresentam uma discussão tributária e estabelecem relações entre consumo e trabalho, porém de forma superficial que não subsidia a compreensão dos múltiplos fatores que as determinam.

Arruda (2004) pesquisou as práticas de cidadania que se manifestam e são incentivadas pelo livro didático de Matemática das séries iniciais. Analisou o quarto volume da coleção “Novo Tempo” por estar entre os três mais escolhidos em

16 das 29 regiões educacionais de Santa Catarina. A autora adotou dezenove critérios de análise, dentre eles: Apresenta o tema saúde como direito; Incentivo à propaganda; Presença da realidade. Na análise, recorreu a dados quantitativos articulados com quatro categorias. As conclusões indicam que o livro analisado é carregado de idéias matemáticas para uma sociedade ideal e pronta, em que os alunos precisam somente realizar cálculos e conhecer figuras geométricas para estarem preparados e adaptados à realidade.

Cruz (2005) tratou da forma que a noção de variável tem sido abordada pelos livros didáticos, segundo a ótica da organização praxeológica de Chevallard. Desenvolveu uma análise qualitativa e documental de quatro coleções de livros didáticos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Os critérios de escolha das quatro coleções de livros foram: serem aprovados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e escolhidos pela maioria dos professores do estado de São Paulo. A análise foi feita nos quatro volumes de cada coleção observando-se três aspectos: os PCN's e os livros didáticos, as abordagens para introduzir e desenvolver a álgebra e os diferentes usos da ideia de variável. De forma sucinta, como conclusão, a autora coloca que duas das coleções analisadas apresentaram o conceito de variável apenas no volume da 6ª série, quando os números passaram a ser substituídos por letras. As demais coleções apresentaram tais noções no volume da 5ª série. Em relação ao primeiro aspecto, apesar de dos livros estarem de acordo com as orientações dos PCN's, Cruz (2005) faz uma crítica para todas as coleções, no que diz respeito à resolução de problemas, pois os autores somente indicam esquemas que apenas servem de modelos a serem seguidos. O segundo aspecto, em todas as coleções, umas mais e outras menos, apresentam as abordagens da álgebra. O terceiro aspecto é contemplado pelas quatro coleções por apresentarem as variáveis nas suas diferentes formas, com predomínio inicial do significado de generalizadora de modelos. Entretanto, nem todas contemplam os diversos entendimentos e sentidos de variáveis em matemática. “Notamos que o trabalho com a Álgebra é apresentado enfatizando ora um aspecto, ora outro, não relacionando todos os diferentes usos dados à ideia de variável”. (CRUZ, 2005, p. 86)

O estudo de Trentin (2006) focou a relação que o professor de matemática estabelece com o livro didático. Partiu da caracterização da atuação docente como prática social e da trajetória de um professor de matemática em que o livro didático se constitui em um instrumento do processo pedagógico. Como conclusão, descreve que o professor pesquisado indica que, no início de sua participação na prática social docente, o livro didático era tido como dono de verdades indiscutíveis tanto sobre conceitos quanto sobre o ensino de Matemática. Porém, no decorrer do tempo, passou a ser entendido como um instrumento de apoio e de transposição didática. Entretanto, algumas das concepções do professor sobre a Matemática e o seu ensino foram influenciadas pelos livros didáticos.

Uliano (2006) fez reflexões sobre as concepções pedagógicas que permearam o ensino da potenciação nos livros didáticos. Traz a evolução do referido conceito nos livros didáticos, a partir de 1920. Examinou a forma de apresentação do conteúdo e o conjunto de atividades dirigidas aos alunos, para evidenciar os elementos que caracterizam as possíveis evoluções de concepções de matemática e de seu ensino. Em sua análise, considerou algumas categorias como, por exemplo: a proposta pedagógica, as ideias e significações do conceito de potenciação, contextualização e as proposições para o desenvolvimento do conceito. De uma maneira geral, a autora concluiu que o conceito de potenciação, nos livros didáticos pesquisados, tem apenas a significação de uma multiplicação de fatores iguais. Em todos os livros, praticamente, a seqüência metodológica é a mesma: título, definição, leitura, exemplos e propriedades. A questão dos expoentes zero é tratada pelos autores de maneira confusa. Enfim, não existe um processo de elaboração conceitual.

Jameli (2007) analisou a coleção chamada “Novo Praticando Matemática”. Seu objetivo foi verificar questões de método da Matemática, mais especificamente, situações que envolvem justificativas, provas, argumentações ou demonstrações com relação a alguns temas de Álgebra e Geometria. Sua expectativa foi identificar as características da abordagem de ensino que possam influenciar a compreensão dos alunos sobre a natureza e funções da prova/justificativa, em Matemática. Para responder ao objetivo proposto, a autora selecionou alguns temas, como por exemplo: múltiplos e divisores, decomposição de um número em fatores primos. Em álgebra e em geometria a referência foi: congruência de triângulos, retas paralelas cortadas por uma transversal, relações métricas no triângulo retângulo. A autora concluiu que a abordagem nos livros desta coleção é bastante clássica por não dar margem ao desenvolvimento do raciocínio por parte do aluno. Os exemplos e exercícios são, na sua maioria, práticos, e não solicitam provas e justificativas, o que impossibilita aos alunos a produção de suas próprias conjecturas.

Borges (2007) investigou a presença ou ausência da articulação entre polinômios e funções polinomiais em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. Analisou três das onze coleções do Ensino Médio aprovadas, em 2005, pelo PNL (Programa Nacional do Livro). O foco foi para a relação conteúdo/forma destes conteúdos de ensino e também ao tratamento didático sobre polinômio ou função polinomial dado no conjunto de exercícios. Somente em uma das coleções analisadas, o autor verificou a associação entre função polinomial e polinômio. Porém, de maneira pouco clara e compreensível, uma vez que apenas anuncia sem o devido desenvolvimento conceitual.

Na categoria artigos, iniciamos com a pesquisa de Ruggiero e Basso (2003) que trata do conceito de porcentagem presente no livro didático de 6ª série, da única coleção que obteve “três estrelas” da comissão de avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação e da Cultura. Adotaram, entre os critérios do Guia de Livros Didáticos (1999), aqueles de caráter eliminatório por tratar-se dos conteúdos e da metodologia. As autoras tomam a perspectiva teórica histórico-cultural como base de análise das razões epistemológicas dos autores do livro, bem como a relação entre a teoria contida no Manual e a prática expressa nas atividades propostas. O livro analisado tem como autores Imenes e Lellis (1997). Os resultados da pesquisa mostraram incoerências entre os aspectos teóricos anunciados e proposta do texto. As autoras destacam as seguintes restrições:

I. Desarticulação de conteúdos que possuem a mesma lógica conceitual na sua construção, mais especificamente: Porcentagem e Proporcionalidade. Para Ruggiero e Basso (2003), o conceito de porcentagem não chega a ser desenvolvido de forma sistematizada e articulada, como prevê o Guia de Livros Didáticos, de modo que se relacione com os conhecimentos espontâneos que os alunos possuem, por exemplo, proporcionalidade. Alegam que há fragmentação na construção do conceito, pela inexistência de referências e correlações.

II. A maneira como os autores distribuíram a ordem dos conteúdos no livro faz com que o estudo de porcentagem ocorresse antes do conceito de proporcionalidade sem o estabelecimento de vínculos entre ambos.

III. Não apresenta a sistematização do conceito, como também a explicitação do fundamento da lógica do conteúdo. Sendo assim, não garante a apropriação do conceito, uma vez que as relações estabelecidas no livro são apenas horizontais, ao contrário do que propõe a perspectiva histórico-cultural.

IV. A ausência de uma linguagem formal que impede o estabelecimento de relações entre grandezas, o que, segundo as autoras, é o verdadeiro objeto do conhecimento matemático.

Ruggiero e Basso (2003) finalizam o artigo deixando evidente que o objeto de ensino do livro didático é o cálculo. Este não é somente uma opção metodológica, mas também uma concepção de ensino. As análises ao se basearem em outra perspectiva teórica, possibilitaram a avaliar de forma não coincidente com aquela dos pareceristas do MEC.

Imenes e Lellis (2005) responderam as críticas de Ruggiero e Basso (2003) em um artigo denominado, “Crítica da crítica”. Os autores, ao lançar a segunda edição, em 2001, assumem que o livro analisado por elas, de publicação em 1997, continha imperfeições que foram revistas na nova edição. Entretanto, no que se refere ao conteúdo de porcentagem e proporções, as mudanças não foram exatamente nos elementos que as autoras criticaram. Justificam que as concepções que norteiam as suas proposições são diferentes das concepções de Ruggiero e Basso.

Segundo Imenes e Lellis (2005), as autoras esboçaram uma visão geral do seu trabalho, pois analisaram poucas páginas do livro. Além disso, elas têm em mente um tipo de manual didático que seria neutro em relação aos métodos de aprendizagem. Em contrapartida, o trabalho tem uma posição frente a concepções de aprendizagem, métodos de ensino e formas de transmissão de certas noções.

Para Imenes e Lellis (2005), os livros didáticos por eles elaborados, ao invés de se constituírem como uma “objetivação da experiência humana”, conforme o proposto por Ruggiero e Basso (2005), contém seqüências didáticas e roteiros de atividades para o aprendiz construir e se apossar desta experiência.

Imenes e Lellis (2005) esclarecem que a sistematização dos conteúdos ocorre não no capítulo analisado, mas em todo o livro. Sobre a apresentação dos conteúdos, a análise referida tem por base somente partes de um conjunto de abordagens que iniciaram antes e se completam nos volumes subseqüentes. Por estas razões, consideram o método de análise das autoras inadequado ao objeto de estudo.

A afirmação de Ruggiero e Basso (2003) de que há uma “desarticulação dos conteúdos que possuem a mesma lógica em sua construção”, Imenes e Lellis (2005) replicam, com o argumento: as autoras não observaram as conexões existentes entre os capítulos de um livro, bem como as existentes nos demais da coleção. Acrescentam: “Entretanto, não conseguem observar esses aspectos pelo fato de sua análise focalizar, essencialmente, apenas um único trecho de um único volume da coleção.” (IMENES e LELLIS, 2005, p. 9).

Imenes e Lellis (2005) afirmam que as autoras cometeram erros e imprecisões. Um dos exemplos dado é o de que elas utilizaram os mesmos critérios para analisar apenas um capítulo, enquanto o PNLD avalia toda a obra. Ou melhor, analisa os quatro volumes. Obviamente, a conclusão delas não seria a mesma daquela emitida pelos avaliadores do MEC. De acordo com Imenes e Lellis (2005, p.14): "Elas não explicitam uma definição, mas a ênfase na igualdade de razões mostra que sua concepção coincide com a abordagem tradicional adotada pelo livro didático padrão já descrito".

Os autores condenam a abordagem tradicional  inadequada para o ensino fundamental, por ser repleta de obstáculos para a aprendizagem, além de ser também ultrapassada do ponto de vista matemático. Concluem seu artigo com a observação sobre a maneira como foi realizada a crítica de seu trabalho: as autoras deveriam apreender a natureza dos conteúdos discutidos sob uma ótica mais abrangente e compreender o projeto que examinaram. Acrescentam: em Matemática e Educação Matemática existem vários caminhos e eles adotaram um deles. Entretanto, reconhecem que não resolveram adequadamente o problema de explicitar as concepções norteadoras, apesar de terem produzido um Manual Pedagógico bastante extenso. Por isso, consideram o artigo de Ruggiero e Basso (2003) muito importante, por discutir a natureza do livro didático, bem como conteúdos na Matemática da Educação Fundamental. Finalizam:

> Se artigos futuros enfocarem esses temas, eventualmente mostrando abordagens mais adequadas do que as que descrevemos, certamente estarão contribuindo para uma melhora, mesmo que pequena, na Matemática Escolar. (IMENES e LELLIS, 2005, p. 28)

Damazio (2006) analisa as características da apresentação dos conteúdos e das atividades propostas aos alunos, tendo como referência três categorias - conhecimento reprodutivo, conhecimento criativo-reprodutor e o conhecimento emancipador - traduzida nos livros de 5.ª e 8.ª séries, mais especificamente nos conceitos de potenciação e equação do 2.º grau.

Delimitou o estudo em livros didáticos adotados pelos professores nas dez escolas mais antigas da cidade de Criciúma – SC, a partir da década de 1960 até fins dos anos de 1990. Na década de 1960, os livros analisados foram de autorias de GALANTE (1962) e SANGIORGI (1966). Ambos, ao abordar o conceito de potenciação, tomaram como ponto de partida a concepção formalista clássica de matemática, isto é, conhecimento reprodutivo. O livro de SANGIORGI (1966) é o que apresenta uma transição do conhecimento matemático clássico para o moderno, pois começa a introduzir, superficialmente, a linguagem de conjuntos, porém, não faz nenhuma referência sobre as estruturas algébricas. Quanto ao estudo das equações do segundo grau, os livros mantêm o mesmo padrão. Ambos apresentam a definição em primeiro lugar, alguns exemplos e exercícios, na seqüência. Na definição e no enunciado dos exercícios, o segundo livro didático adota a linguagem da teoria dos conjuntos.

> Para Galante (1966), resolver uma equação é “determinar os valores que, atribuídos a x”, satisfazem à equação. Esses valores são as raízes da equação. Sangiorgi (1966) diz que resolver uma equação é “determinar o seu Conjunto-Verdade”. (DAMAZIO, 2006, p. 19)

Damazio (2006) constatou que nos livros da década de 1970 ocorrem poucas mudanças. Os conteúdos matemáticos continuam os mesmos, o que muda é o seu enfoque e a sua forma de apresentação. Os autores desta década recorrem ao estudo dirigido por acreditar que aumenta a capacidade de reflexão dos alunos e, ao mesmo tempo, oportuniza que façam conclusões e elaborem soluções das questões propostas.

Damazio (2006) verificou que na década de 1980, os livros seguem basicamente o mesmo padrão dos anteriores. Houve uma maior dispersão de livros, a escolha não ficou concentrada em apenas um ou dois autores como nas décadas anteriores. Chama a atenção de que nesse período surgem as pedagogias progressistas que se opõem às liberais ou conservadoras, surgindo novas categorias conceituais como, por exemplo: contextualização, historicidade, criticidade, oprimido/opressor, dialeticidade, construtivismo, etc. Porém, os livros didáticos não acompanharam esse contexto que era propício para a efetivação do conhecimento emancipador.

O livro “A Conquista da Matemática” de autoria de Giovani, Castruci e Jr., basicamente domina o contexto educacional, de 1986 até 1996 com a auto-denominação de promotor do novo e do criativo, porém continuava sendo a consolidação do conhecimento reprodutor.

Damazio (2006), ao concluir seu artigo, afirma que a troca de livro didático não responde ao desenvolvimento histórico do conhecimento matemático e nem do processo pedagógico. Caracteriza-se apenas como um desencargo de consciência por parte do professor para dizer-se atualizado, sem qualquer reflexão da sua prática docente. “É possível, pois, inferir a proposta educativa da Matemática que permeou e se faz presente nos meios escolares em questão como sendo eminentemente reprodutora.” (DAMAZIO, 2006, p. 24)

Na categoria resumos publicados em anais, fizemos a leitura de dois textos com publicação no VII Encontro Paulista de Educação Matemática 2004. Giani (2004) desenvolveu sua pesquisa com o objetivo de investigar os critérios que o professor faz valer ao proceder a escolha de livros didáticos de Matemática. Além disso, procurou identificar as concepções de Matemática, de seu ensino e aprendizagem. Para tanto, a autora entrevistou dez professores que lecionam Matemática no Ensino Fundamental em três diferentes escolas da rede pública estadual e municipal. Com base em entrevista previamente elaborada, a autora fez a textualização e aproxima os depoimentos segundo um determinado ponto de vista. Destacou várias unidades de análise. Uma delas é a Pluralidade de Textos, pois todos os professores mencionaram o uso de vários livros didáticos para complementar sua atividade pedagógica. A outra unidade diz respeito aos Pré-requisitos, pois alguns professores os mencionaram como condição para que os alunos aprendam novos conteúdos. Uma terceira foi o Processo de Escolha, em que os professores justificam suas opções. A Contextualização se constitui em unidade por ser citada pela maioria dos professores com o entendimento de que os conteúdos não podem ser ensinados desvinculados da realidade dos alunos. O Conteúdo Matemático caracteriza-se como unidade de análise no sentido de busca por outros meios para a sua transmissão como, por exemplo, as aulas práticas. Por fim, os Problemas, considerados relevantes para a execução da sua atividade docente. As conclusões não foram explicitadas pela autora, uma vez que a pesquisa estava em processo de construção.

Pereira e Vasconcelos (2004) analisaram os livros didáticos de matemática, após a avaliação do MEC, tendo como referência um conteúdo específico da geometria: Teorema de Tales. Identificaram os principais problemas da sua abordagem, principalmente, no que se refere à passagem do caso racional para o irracional. Ficou evidente que o conteúdo é abordado com algumas impropriedades conceituais e não proporciona oportunidades de desenvolvimento da capacidade de argumentação e dedução. Consequentemente, não desenvolve o raciocínio lógico do aluno.

No XI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM - em Curitiba/PR, tivemos oportunidade de estar em contato com pesquisadores iniciantes participantes, cujas pesquisas também focalizam o livro didático. Dentre eles, Daniel Romão da Silva, mestrando da USP, estuda os livros Paradidáticos de Matemática editados no Brasil. Pauta-se na importância das narrativas e da produção de livros Paradidáticos de Matemática, uma vez que, segundo o autor, reservam singularidades. Seu objetivo é demonstrar o percurso histórico destes livros e também estimular produções acadêmicas de novos títulos e coleções.

Denise Franco Capello Ribeiro, mestranda da PUC/SP, pretende responder a seguinte pergunta: “Como foi reconfigurada a matemática escolar para o Ensino Primário no Brasil, tendo como foco o estudo do ensino de Geometria, com a utilização de livros didáticos de Matemática como fontes de pesquisa no período compreendido entre 1850-1950?”

José Roberto Costa, da Universidade Estadual de Maringá, investiga se o professor de Matemática, ao realizar a transposição didática[3], se apóia no Manual do Professor ou apenas se sustenta em sua formação inicial.

Maria Fernanda Tavares de Siqueira Campos, da Universidade Federal de Minas Gerais, tem como proposta inicial de pesquisa os jogos encontrados nos livros didáticos de Matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental. Seu objetivo é analisar a utilização de jogos com vistas à formação sociocultural dos alunos.

---

[3] Transposição didática: Estudo das transformações por que passam os conteúdos da educação matemática, ou seja, é o estudo das prioridades que orientam a prática pedagógica tratando-se de um longo processo seletivo por quais passam os saberes. (Pais e Penteado, 2002).

## 3 - O CONCEITO DE RADICIAÇÃO

A leitura dos livros sobre história da Matemática referente ao conceito de radiciação será traduzida no presente capítulo. Procuramos evidenciar as ideias essenciais que o caracterizam, pois trata do conceito a ser analisado nos livros didáticos.

Historicamente o conceito de radiciação assume significações diferentes por povos diversos e por matemáticos que se destacaram em suas épocas. Segundo Eves (1995), o povo babilônico efetuava processos escritos por meio de tábulas. Das 400 tábulas, cerca de metade tratavam de conceitos matemáticos. As últimas envolvem a multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos e exponenciais. Algumas delas continham informações acerca de estimativas como $\frac{31}{8}$ para *pi*.

Perto do ano 2000 a.C., a aritmética babilônica apresentava uma álgebra retórica mais desenvolvida. Eram resolvidas equações cúbicas e biquadradas não só pela substituição numa fórmula geral ou completando-se quadrados, mas também num processo de discussão.

Outras aproximações além do número *pi*, dada pelos babilônios são referentes às raízes quadradas de números não quadrados perfeitos, como $\frac{17}{12}$ para $\sqrt{2}$ e $\frac{17}{24}$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eves (1995, p. 63) afirma que “talvez eles usassem a fórmula de aproximação: $( a^2 + b )^{1/2} = a + b/2a$".

Outra aproximação da $\sqrt{2}$ encontrada na tábula 7289 de Yale (1600 a.C.) é: $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1{,}4142155$ (EVES, 1995). Da mesma forma que

Eves(1995), Boyer (2001) afirma que os matemáticos babilônicos mostraram-se capazes no desenvolvimento dos processos algorítmicos, um deles para a extração da raiz quadrada. Contudo, tal procedimento, às vezes, é atribuído ao grego Arquitas (428-365 a.C.) ou a Heron de Alexandria (100 d.C aproximadamente); ocasionalmente é chamado algoritmo de Newton.

O processo babilônico para encontrar a raiz quadrada é considerado por Boyer (2001) como sendo simples e eficiente. Trata-se do seguinte procedimento: Se x $= \sqrt{a}$ é a raiz quadrada desejada, então $a_1$ é a primeira aproximação e $b_1$ uma segunda aproximação dada pela equação $b_1 = \frac{a}{a_1}$. Se $a_1$ é pequeno demais, $b_1$ é grande demais e vice-versa. Logo a média aritmética $a_2 = ½(a_1 + b_1)$ é uma aproximação admissível. Como $a_2$ é sempre grande demais, a seguinte, $b_2 = \frac{a}{a_2}$ será pequena demais e torna-se a média aritmética $a_3 = ½ (a_2 + b_2)$. Para se obter uma melhor resposta, este processo pode ser continuado indefinidamente.

“No algoritmo babilônico para raíz quadrada acha-se um processo iterativo que podia ter levado os matemáticos do tempo à descoberta de processos infinitos, mas infelizmente eles não levaram adiante os estudos destes problemas”. (BOYER, 2001, p. 19)

Assim, extrair a quadrada de 66 pelo método babilônico procede-se da seguinte maneira: primeiramente, é determinado o quadrado perfeito que mais se aproxima de 66.

$$5^2=25$$

$$6^2=36$$

$$7^2=49$$

$8^2=64$

$9^2=81$

O quadrado que mais se aproxima 66 é 64.

Na sequência, extraí-se a raiz do 64, no caso 8, que passa ser o $a_1$, isto é, uma primeira aproximação da raiz. Divide-se o número original por $a_1$: $\frac{66}{8}$ = 8,2

Então, 8,2 é $b_1$. Faz-se a média aritmética entre $a_1$ e $b_1$, gerando $a_2$ que seria a primeira aproximação admissível.

$$8 + 8{,}2 = 16{,}2$$

$$\frac{16{,}2}{2} = 8{,}1 \ (a_2)$$

Divide-se o número original a = 66 por $a_2$, e tem-se $b_2$.

$$66 : 8{,}1 = 8{,}148 \ (b_2)$$

A média aritmética de $a_2$ e $b_2$ é $a_3$.

$$\frac{8{,}1+8{,}148}{2} = 8{,}124 \ (a_3)$$

Logo, aproximadamente, $\sqrt{66}$ = 8,124. A continuidade deste processo indefinidamente levaria ao valor próximo. Porém, sem nunca atingir a exatidão, por se tratar de um número irracional, isto é, que não é exato e nem pode ser escrito em forma de fração.

Miguel (1993) traz três estudos sobre História e Educação Matemática, dentre eles uma discussão histórico-pedagógico-temática relacionada aos números irracionais e por extensão, ao conceito de raíz quadrada e alguns métodos para sua extração. Para esse autor, se a radiciação for encarada como uma nova operação de um conjunto numérico, então o resultado deve ser sempre um único número do conjunto. A partir deste esclarecimento, o autor apresenta a definição de raiz quadrada: “Chamamos raiz quadrada de um número a, real e positivo, ao número real e positivo b, que elevado ao quadrado produz a, isto é, $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$”. (MIGUEL, 1993, p. 45, cap. 4.)

Para o autor em referência, na história da humanidade, surgiram vários problemas que fizeram com que os homens sentissem a necessidade da extração de raízes com índices superiores a 2. Por isso, a necessidade da ampliação da operação de radiciação e o aparecimento de raízes cúbicas, quartas,..

Quanto aos métodos de extração de raiz quadrada, Miguel (1993) indica o Método Babilônico, mencionado anteriormente, o Método de Tehon de Smirna, o Método de Heron de Alexandria, o Método de Theon Alexandrino e o Método das Frações Contínuas.

Com relação ao método de Theon de Smirna, o autor explica que foi possível constatar em escritos de geômetras gregos a existência de valores aproximados para $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ etc. Porém, não existem registros dos procedimentos matemáticos adotados. Como as aproximações são significativas, alguns matemáticos levantaram hipóteses sobre os métodos de obtenção daqueles valores. Uma delas é de que os estudiosos gregos conheciam o conceito de séries infinitas e frações contínuas.

Porém, T. Dantzing[4] (apud MIGUEL, 1993) diz que os gregos não eram dotados destes conhecimentos modernos. Por isso, pode ter havido entre os pitagóricos conservadores a convicção de achar um valor racional para $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$. O pressuposto é que o número 2 pode ser representado por infinitas frações com denominador quadrado perfeito: $2 = \frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \ldots$ Se $\sqrt{2}$ fosse um número racional, a expansão dessa seqüência na forma fracionária poderia atingir um numerador que também fosse quadrado perfeito. Parece óbvio que não existe esta possibilidade, mas encontrou-se uma ótima aproximação para $\sqrt{2}$. Temos que $\frac{288}{144}$ = 2, enquanto $\frac{289}{144} = \left(\frac{17}{12}\right)^2$. Isto dá, para Theon de Smirna, a aproximação $\sqrt{2}$ = $1\frac{5}{12}$ = 1,416666..., que parece diferir pouco do valor real, porém teoricamente é bastante considerável. Esta hipótese explica o valor de que Aristarco se serviu ao resolver um problema astronômico, utilizando a tábua dos quadrados.

Os pitagóricos conheciam a fração $\frac{7}{5}$ = 1,4. Verifica-se que $\frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$ é a única fração possível cujos termos são quadrados menores que 100 e cujo numerador difere o dobro do denominador, de uma unidade por falta. Como é o quadrado perfeito fracionário cujo quociente é mais próximo de 2, por falta, logo sua raiz quadrada é $\frac{7}{5}$ (MIGUEL, 1993).

Neste mesmo momento da História, primeiro século, os chineses apresentavam uma regra para raízes quadradas e cúbicas que, segundo Boyer

[4] MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

(1974, p. 147) “facilitavam a decimalização das extrações”. São elas: $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{100a}}{10}$ e $\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{1000a}}{10}$ .

De acordo com Eves (1995), Herão de Alexandria foi um matemático que priorizou a aplicação da matemática. Seus escritos enfatizam mais as aplicações práticas do que teóricas e supõe-se que ele era de origem egípcia com formação grega. No seu livro, “O Método”, Herão mostra a intenção de aproximar a raiz quadrada de um inteiro que não é quadrado perfeito. Esse processo, atualmente, é utilizado nos computadores, qual seja: se n = ab, então $\frac{(a+b)}{2}$ é uma aproximação de $\sqrt{n}$, que melhora com a proximidade de a e de b. “Este método permite sucessivas aproximações. Assim, se $a_1$ é a primeira aproximação de $\sqrt{n}$, então $a_2$ = $\frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2}$ é a melhor aproximação”. (EVES, 1995, p. 205). Para Miguel (1993), o método de Herão de Alexandria é idêntico ao método babilônico.

Para calcular a Raíz quadrada de 2, Theon Alexandrino parte do problema de encontrar a medida do lado de um quadrado de área igual a 2, por meio de sucessivas aproximações. O primeiro passo é a construção de um quadrado de lado inteiro cuja área seja menor que 2.

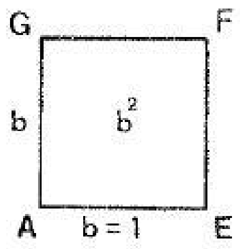



**Figura 2: Ilustração da Tese de MIGUEL (1993, p. 253).**

O segundo passo consiste na construção de um segundo quadrado com um acréscimo de um valor $\beta_0$ em um dos lados.

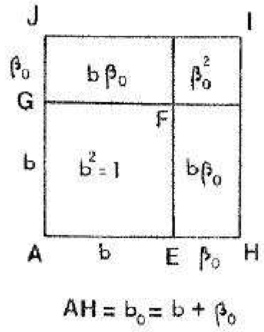



**Figura 3: Ilustração da Tese de MIGUEL (1993, p. 253).**

Para que a área do quadrado AHIJ seja 2, é necessário que a área da figura EHIJGF seja 1. Para isto, pode-se fazer um reajuste nos retângulos que compõem EHIJGF de modo a formarem somente um retângulo, cuja superfície equivale as três partes.

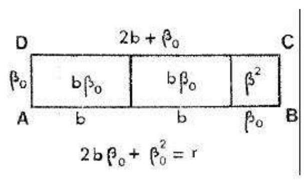



**Figura 4: Ilustração da Tese de MIGUEL (1993, p. 253).**

Um dos lados deste retângulo será $\beta_0$ e o outro será 2b + $\beta_0$. Ao dividir a área desse retângulo por 2b + $\beta_0$, obtém-se $\beta_0$.

$$\frac{2b\beta_0 + \beta_0^2}{2b+\beta_0} = \frac{\beta_0(2b+\beta_0)}{(2b+\beta_0)} = \beta_0$$

Porém, se a referida área for dividida por 2b, que é um valor menor que 2b + $\beta_0$, o seu valor (quociente) é maior que $\beta_0$. Logo, $\beta_0 < \frac{área}{2b}$. Como área = 1 e b = 1, então $\beta_0 < \frac{1}{2}$, isto é, $\beta_0 < 0,5$. Supondo que $\beta_0$ = 0,4, a área do retângulo será 2b$\beta_0$ + $\beta_0^2$ = 0,96. Como 0,96 < 1, então, existe um segundo retângulo de área $r_0$ e $r_0$ = r – (2b$\beta_0$ + $\beta_0^2$), isto é, $r_0$ = 1 – 0,96 = 0,04. Outra aproximação pode ser feita construindo-se um terceiro quadrado e, assim por diante, para obter o resultado de $\sqrt{2} = b + \beta_0 + \beta_1 + ....$ = 1,41.....

Miguel (1993) também apresenta o Método da Frações Contínuas, que considera x como sendo um número real positivo. Se $a_0$ é sua parte inteira, então, $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$, em que $x_1$ é maior que 1. Se $x_1$ é inteiro, considera-se que $x_1 = a_1$, caso não for, e $a_1$ seja sua parte inteira tem-se: $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$. Portanto, $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}$.

Utilizando o método para calcular $\sqrt{2}$ tem-se: 1 < $\sqrt{2}$ < 2, então é possível escrever: $\sqrt{2}$ = 1 + $\frac{1}{y}$. Por procedimentos algébricos: $\frac{\sqrt{2}y}{y} = \frac{y+1}{y}$, ou seja, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ = $\sqrt{2}+1$ e como $\sqrt{2}$ = 1 + $\frac{1}{y}$, temos y = 1 + $\frac{1}{y}$ + 1 , ou melhor, y = 2 + $\frac{1}{y}$.

Então, para Miguel (1993, p. 255): $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$. Ao calcular as aproximações, obtém-se:

$f_1 = 1+\frac{1}{2} = 1{,}5$

$f_2 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} = 1{,}4$

$f_3 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = 1{,}4166...$

$f_4 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = 1{,}41379...$

Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1180 – 1250), considerado o matemático mais talentoso da Idade Média, nos quinze capítulos de sua obra “Líber Abaci”, explica a leitura e a escrita dos novos numerais (hindu-arábico), métodos de cálculo com inteiros e frações, resolução de equações lineares e quadráticas e, também, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas (EVES, 1995).

Eves, 1995, faz uma leitura de Cardano, afirmando que o mesmo, deu contribuições significativas para a Matemática de seu tempo e deixou uma vasta obra que tratava, além da aritmética, da astronomia, física, medicina, entre outros. O livro “Ars Magna” é o primeiro em língua latina a tratar de álgebra, com ênfase nas raízes negativas de uma equação e no cálculo com números imaginários. Há nessa obra um método de obtenção do valor aproximado de uma raíz de uma equação de grau genérico que, necessariamente, recai em extração da raiz. Porém, Eves não apresenta os procedimentos citados.

Newton desenvolveu um método, que hoje leva seu nome, para aproximar os valores das raízes reais de uma equação numérica, que pode ser aplicado tanto em equações algébricas como transcendentes. Segundo Boyer (2001) e Eves (1995), tal método é idêntico aquele utilizado pelos babilônios, que demonstramos no inicio deste capítulo.

De acordo com Oliveira e Silva (1970), a palavra raiz designa o resultado da operação de radiciação e vem do latim radix. O símbolo para indicar uma raiz, conhecido pelo nome de radical, pode ter sido uma deformação da letra r. Leonardo de Pisa, por volta do ano 1220, usava um R gótico para indicar raiz quadrada. (Oliveira; Silva, 1970, p. 140).

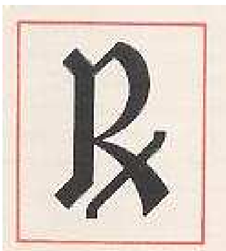


**Figura 5: Ilustração apresentada por OLIVEIRA & SILVA (1970, p. 140).**

Segundo Eves (1995), a expressão $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ poderia ser escrita por Pacioli como RV7 $\bar{p}$ R14, em que RV, a *radix univesalis*, indica-se que a raíz quadrada abrangerá toda a expressão da seqüência. Bombelli também poderia ter escrito a expressão assim R └7pR14┘,e o mesmo distinguia a raiz quadrada da cúbica, escrevendo Rq e Rc para cada uma delas, respectivamente.

Oliveira e Silva (1970) apresentam um procedimento para determinar a raiz quadrada de um número N, expresso na seguinte fórmula:

$\sqrt{N} = \dfrac{N+Q}{2.\sqrt{Q}}$ , com Q o quadrado perfeito mais próximo de N.

Por exemplo: $\sqrt{5} = \dfrac{5+4}{2\sqrt{4}}$

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Atualmente, este procedimento um tanto impreciso se considerarmos os valores a partir dos centésimos, uma vez que $\sqrt{5}$ é 2,23606797749...., ou seja, constitui-se em decimal não exato e nem periódico, um número irracional, que apresenta uma grande diferença para o número 2,25 exato.

Na atualidade, o conceito de radiciação é traduzido em definições por teóricos da Matemática. Por exemplo, Caraça (2003) diz que, assim como todas as operações matemáticas, a radiciação é a operação inversa da potenciação. Caraça (2003) define a radiciação como "uma operação pela qual, dado um número *a* e um número n, se determina um novo número b = $\sqrt[n]{a}$ , tal que a = $b^n$". Então a = $b^n$ $\Rightarrow$ b = $\sqrt[n]{a}$ Acrescenta: "ao número *a* chama-se radicando; ao sinal $\sqrt{\phantom{x}}$ chama-se sinal de radical, ao número n chama-se índice do radical; ao número b chama-se raíz". (CARAÇA, 2003, p. 23)

Caraça (1984) traz uma reflexão sobre as operações inversas. Segundo o autor, quando temos o resultado de uma determinada operação e um dos dados e procuramos encontrar o outro dado, devemos realizar uma nova operação, denominada de operação inversa. Com relação ao nosso estudo, o autor afirma que na potenciação, a inversão consiste em - "dada a potencia e um dos dados, base ou expoente, determinar o outro. Agora há de fato duas inversas, porque não existe comutatividade na potenciação.” (CARAÇA, 1984, p. 20).

A operação em que é dada a potência e o expoente e se determina a base, é chamada de radiciação. Aquela em que é fornecida a potência e a base e encontra-se o expoente, chama-se logaritmação. (Caraça, 1984)

Exemplificando temos: Para a potenciação: $5^2 = 25$, podemos escrever inversamente $\sqrt{25} = 5$. Neste caso, tínhamos a potência e o expoente e encontramos a base por meio da operação inversa radiciação. Porém, também poderíamos fazer outra operação inversa: $\log_5 25 = 2$, em que a potência e a base eram conhecidas, e determinamos o expoente por meio da operação inversa logaritimação.

Sobre a operação de radiciação que é o foco de nossa pesquisa, Caraça diz que ela é composta de possibilidades e de impossibilidades. Só é possível quando *a* é uma potência de expoente n de outro número. Exemplifica que é possível $\sqrt{4}$, mas não $\sqrt{5}$, no estudo dos racionais.

A impossibilidade da radiciação, conforme o autor, ocorre no campo racional quando o número b, da definição anteriormente dada, geralmente não existe, mas, no conjunto $Q^+_0$ faz uma repartição em duas classes: a classe A composta por todos os números racionais r tal que $r^n < a$; e outra classe B composta por todos os números racionais s tal que $s^n > a$. Estas duas classes constituem um corte (A,B), e definem um número real l. Em qualquer dos casos, no campo real, verifica-se o desaparecimento da impossibilidade de radiciação de números positivos.

Antunes (1978, p. 71), de um modo semelhante a Caraça, apresenta a seguinte definição: “Dado um número real a e o natural n, denomina-se raíz n-enésima de a ao número real b que, se existir, será indicado por $\sqrt[n]{a}$ , tal que $b^n$ = a”. Os números a e n são denominados, respectivamente, radicando e índice da raiz. Se n = 1, a raiz é o próprio radicando, se n= 2 a raiz é dita quadrada, se n = 3 é dita cúbica e assim por diante.

Antunes (1978) também alerta para as condições de existência da raiz no campo Real e estuda algumas delas. A primeira é no caso do radicando ser nulo e que o resultado da operação seria zero para qualquer que fosse o valor de n. Uma segunda condição é quando o índice for par e o número *a* positivo. Nesse caso, existem duas raízes reais simétricas, indicaríamos por *+b* e *–b*. Não havendo a necessidade de especificar ambos os valores é considerado apenas a raíz positiva, denominada de “raiz aritmética”. Quando o número *a* for negativo, não existirá nenhum número possível *b* que elevado a expoente par resulte em a < 0. A terceira situação é quando o índice n é ímpar. Neste caso, Antunes (1978, p. 72) diz que “a raíz sempre existe e é única no campo real, tendo o sinal do radicando”.

Em síntese, podemos perceber que ao longo do desenvolvimento histórico do conceito de raiz quadrada, houveram mudanças que evoluíram no decorrer dos tempos. Inicialmente esse conceito foi abordado pelos povos babilônicos que de forma muito simples encontraram um método que podemos classificar atualmente, como “rudimentar”, por apresentar aproximações muito distantes dos valores reais.

Os problemas, na história da humanidade, foram surgindo e fizeram com que os homens procurassem outras formas para resolvê-los, o que os obrigou a descoberta ou o desenvolvimento de novos métodos para extração de raízes quadradas, cúbicas, etc. Surgiram então, os métodos que apresentamos nos estudos de MIGUEL (1993), porém, podemos considerá-los trabalhosos, de difícil resolução e com uma aproximação que ainda dista da ideal. Teóricos mais recentes como ANTUNES (1978), CARAÇA (2003), que citamos neste capítulo, trazem uma explicação mais completa sobre o conceito de raiz quadrada, considerando suas definições, nomenclaturas, possibilidades de existência ou não dentro de alguns campos numéricos.

Podemos afirmar que algumas formas de abordagem do conceito foram conservadas, outras se perderam com o passar dos anos. Isto pode ser observado na análise de livros didáticos deste conceito calcado neste referencial produzido.

# 4 – PROCESSO DE FORMAÇÃO DOS CONCEITOS: UMA LEITURA VYGOTSKIANA

No presente capítulo, é abordado os principais pressupostos de Vygotsky sobre o processo de desenvolvimento conceitual por parte do ser humano.

A referência são quatro capítulos de obras de Vygotsky. Do livro "A Construção do Pensamento e da Linguagem" (VYGOTSKY, 2001), dois capítulos foram base para a construção deste texto: Estudo experimental do desenvolvimento dos conceitos e Estudo do Desenvolvimento dos Conceitos Científicos na Infância. De "Pensamento e Linguagem" (VYGOTSKY, 2000), o capítulo: Um estudo experimental da formação de conceitos. Das "Obras Escogidas IV" (VYGOTSKY, 1996), o décimo capítulo: El desarrollo del pensamiento del adolescente u la formación de conceptos.

A presença desta temática em nosso estudo é justificada pela necessidade de uma base teórica para respaldar a análise dos livros didáticos em sua especificidade as significações que eles representam do conceito de raiz quadrada para serem apropriadas pelos alunos. Portanto, os manuais didáticos apresentam uma proposta de ensino-aprendizagem, isto é, um processo de formação de conceito que será estudado à luz das proposições da psicologia histórico cultural.

### 4.1 A formação de conceitos

Vygotsky (2000) antes de tratar de seus procedimentos metodológicos para o estudo do processo de formação do conceito reporta aos métodos tradicionais, classificando-os em dois grupos de análise. O primeiro adota o método de definição, que investiga os conceitos formados pela criança por meio da definição verbal de seus conteúdos. Essa pesquisa, lida apenas com o resultado da formação de conceitos e não percebe a dinâmica, o desenvolvimento, o começo e o fim do processo; ou seja, enfatiza apenas o produto resultante do processo. Utiliza somente a palavra desvinculada do material sensorial, isto é, permanece num plano puramente verbal. Portanto, desconsidera a relação do conceito com sua realidade.

O segundo grupo compreende os métodos utilizados no estudo da abstração. Dizem respeito aos processos psíquicos que levam à formação de conceitos. Como procedimento, solicita-se à criança que descubra algum traço comum em uma série de impressões concretas, abstraindo-o de todos os outros traços aos quais está perceptualmente ligado. Para Vygotsky, o defeito deste grupo é o ignorar o papel da palavra e do símbolo.

Ambos os métodos tradicionais separam a palavra do material de percepção, operando ou com um ou com outro. Um grande passo foi dado quando se criou um novo método que combinou os dois procedimentos citados. Porém, para Vygotsky, ainda não foi suficiente. Ach[5] (apud Vygotsky, 2000) foi um desses estudiosos que em um de seus experimentos procurou introduzir palavras sem sentido e conceitos artificiais, ligando-as a uma determinada combinação de

---

[5] VIGOTSKI L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

atributos dos objetos para os quais não há nenhum conceito ou palavra prontos. A palavra *gatsun*, por exemplo, em seu experimento adquire o sentido de "grande e pesado". Este novo método centra sua investigação nas condições funcionais da formação de conceitos.

Rimat[6], (apud Vygotsky, 2000) em seu experimento, concluiu que a verdadeira formação de conceitos excede a capacidade dos pré-adolescentes e só tem início no final da puberdade.

Vygotsky (2001) discorda destes dois pesquisadores por também desconsiderarem a palavra nos seus experimentos, que tem o papel de "meio" na formação de um conceito. Além disso, eles não revelaram a verdadeira natureza do processo – genética, funcional e estrutural - do desenvolvimento conceitual.

Vygotsky aplicou o método da dupla-estimulação, que foi desenvolvido por um de seus colaboradores, Sákharov (Vygotsky, 2000), em que dois conjuntos de estímulos são apresentados ao sujeito observado: objetos e signos. Este método experimental foi desenvolvido com crianças, adolescentes e adultos, com a participação de mais de trezentas pessoas, o que possibilitou-lhe chegar às conclusões que descrevemos a seguir.

O desenvolvimento dos processos que resultam na formação de conceitos começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais, que numa combinação específica, formam a sua base psicológica, se configuram e se desenvolvem somente na puberdade. O processo de desenvolvimento conceitual, segundo as pesquisas de Vygotsky (2001), passa por três estágios básicos e cada um, dividida em várias fases.

---

[6] VIGOTSKI L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

O primeiro estágio é denominado de sincrético. Uma criança pequena dá seu primeiro passo para a formação de conceitos quando agrupa alguns objetos num “amontoado” para solucionar um problema. Nesse estágio, o significado das palavras denota, para a criança, nada mais do que um todo vago e sincrético de objetos isolados que, de uma forma ou de outra, aglutinaram-se numa imagem em sua mente. Devido à origem sincrética, essa imagem é extremamente instável.

Esse primeiro estágio compreende três fases distintas.

- 1 – Manifestação do estágio de tentativa e erro no desenvolvimento do pensamento: a criança escolhe objetos e quando verifica que estão errados, os substitui.
- 2 – Organização do campo visual da criança puramente sincrética: a criança se orienta pelos vínculos subjetivos que ela mesma percebe.
- 3 – A imagem sincrética compõe-se de elementos tirados de grupos ou amontoados diferentes que foram formados pela criança: ela atribui um único significado aos representantes de diferentes grupos, ou melhor, daqueles unificados em sua percepção.

O segundo estágio é denominado de Pensamento por Complexos em que os objetos isolados associam-se na mente da criança devido às relações que de fato existem entre eles. Seria uma nova aquisição, uma passagem a um nível mais elevado. Nesta fase, o universo dos objetos isolados torna-se organizado uma vez que são agrupados em famílias separadas, mutuamente relacionadas. Vygotsky (2001) observou a existência de cinco tipos de complexos:

- 1 – Complexo do tipo associativo em que um objeto é apresentado à criança com seu nome visível (núcleo) e ela associa outros objetos, por exemplo, que tenham mesma cor, forma, tamanho ou qualquer atributo que chame sua atenção. Os elementos são unidos ao núcleo pelos vínculos associativos concretos estabelecidos pela criança. As palavras, nessa fase, tornam-se nomes de família.

- 2 – Complexos Coleções caracterizados pela combinação de objetos ou das impressões concretas provocadas na criança, que formam grupos semelhantes a coleções. Os objetos são agrupados com base em alguma característica que os torna diferentes e, consequentemente, complementares entre si. Ela fará associações por contraste e não por semelhanças, ao contrário dos complexos associativos. "A coleção baseia-se em vínculos estabelecidos na experiência prática, direta e efetiva da criança" (VYGOTSKY, 2000, p. 184).

- 3 – Complexo em Cadeia, cuja observação experimental mostra que cada novo objeto incluído pela criança tem algo em comum com o outro elemento. Porém, os atributos passam por infinitas alterações, ou seja, ocorre a passagem de um traço para outro. Cada elo se une ao anterior por uma característica e, ao posterior, por outra diferente. Nessa fase "os significados da palavra se deslocam pelos elos da cadeia complexa" (Vygotsky, 2000, p. 185). Um exemplo dado por Vygotsky é o uso que uma criança faz da palavra *quá*. Primeiro a utiliza para designar um pato nadando em um lago, depois qualquer espécie de líquido, inclusive o leite de sua mamadeira; quando vê uma moeda com o desenho de uma águia, também é chamada de *quá*. A partir de então, qualquer objeto redondo semelhante a uma moeda também é reconhecido por *quá*. O complexo em cadeia não possui um núcleo, existem apenas relações entre os elementos isolados. Por isso, é considerado a modalidade mais pura do pensamento por complexos, pois é desprovido de qualquer centro.

- 4 – Complexo Difuso que se origina a partir do complexo em cadeia. São complexos indefinidos e sem limites por acrescentar ao grupo original mais e mais elementos. A própria maneira de associar, combinar os objetos, torna-se difusa e indefinida. Por exemplo, Vygotsky (2000) diz que a criança ao escolher como amostra um triângulo amarelo, associa trapézios, pois eles lhe lembram os triângulos. Aos trapézios juntam-se os quadrados, os hexágonos, os semicírculos e os círculos. Nesse caso, a forma tomada como traço básico se dilui. “Aqui, a criança ingressa em um mundo de generalizações difusas, onde os traços escorregam e oscilam, transformando-se imperceptivelmente uns nos outros” (VYGOTSKY, 2000, p. 189).

- 5 – Pseudoconceito em que a generalização formada na mente da criança, embora seja semelhante ao conceito dos adultos, é psicologicamente muito diferente do conceito propriamente dito; ou seja, em sua essência é ainda um complexo. Assim, se a amostra é um triângulo amarelo e a criança pega todos os triângulos do material experimental, é possível que se tenha orientado pela idéia ou conceito geral de um triângulo. Mas, a análise experimental mostra que na realidade a criança se orienta pela semelhança concreta visível, formando apenas um complexo associativo restrito a um determinado tipo de conexão perceptual. O processo pelo qual são obtidos não é de forma alguma o mesmo que no pensamento conceitual. Esse tipo de complexo é muito importante e representa um elo de transição entre o pensamento por complexos e a verdadeira formação de conceitos.

Um complexo carrega a semente que fará germinar um conceito. A comunicação verbal com os adultos torna-se um poderoso fator no desenvolvimento dos conceitos infantis. A partir dos seus experimentos, Vygotsky conclui que no estágio de complexos, o significado das palavras, da forma como é percebido pela criança, refere-se aos mesmos objetos que o adulto tem em mente, o que garante a compreensão entre eles. A criança pensa a mesma coisa, mas por meio de operações mentais diferentes.

> Mas a criança não pode assimilar de imediato o modo de pensamento dos adultos, e recebe um produto que é semelhante ao produto dos adultos porém obtido por intermédio de operações intelectuais inteiramente diversas e elaborado por um método de pensamento também muito diferente. É isto que denominamos de pseudoconceito. (VYGOTSKY, 2000, p. 193)

A comunicação mútua com o auxílio das palavras só e possível entre adultos e crianças porque os complexos infantis coincidem com os conceitos dos adultos, ou seja, são equivalentes. Como se sabe, o contato e a compreensão verbal entre adulto e criança acontecem muito cedo, fornecendo motivos para que estudiosos acreditem que os conceitos se formem na infância.

Vygotsky (2001) reporta a uma característica do pensamento primitivo que indica o pensamento por complexos em ação. Além disso, salienta as diferenças entre pseudoconceitos e conceitos que denomina de **participação.** Este termo aplica-se à relação de identidade parcial ou estreita interdependência estabelecida pelo pensamento primitivo entre dois objetos ou fenômenos que, na verdade, não tem nenhuma proximidade ou qualquer outra relação identificável.

Um exemplo do caso de Participação foi observado numa aldeia de índios bororos do Brasil que se orgulham de ser “papagaios vermelhos”. Para Vygotsky, a afirmação desses índios tem um significado diferente, pois, para eles, as palavras designam grupos de objetos, e não conceitos: a palavra que designa papagaio é a mesma que designa um complexo que inclui os papagaios e eles próprios, não designando que haja qualquer identidade.

O pensamento por complexos também é o fundamento real do desenvolvimento lingüístico. Ao mencionar “o vencedor de Jena” ou “o derrotado de Waterloo”, estamos nos referindo à mesma pessoa, mas o significado das expressões é diferente. As palavras que estão sendo formadas em nossa própria época constituem muitos exemplos do processo pelo qual se agrupam coisas heterogêneas. Quando falamos da “perna de uma mesa”, do “cotovelo de uma estrada”, do “pescoço de uma garrafa” e de um “engarrafamento” estamos agrupando coisas de um modo semelhante aos complexos (VYGOTSKY, 2001).

A passagem do pensamento por complexos para o pensamento por conceitos se dá de forma imperceptível para a criança, pois seus pseudoconceitos praticamente coincidem com os conceitos dos adultos. Os pseudoconceitos encerram o segundo estágio e inauguram o terceiro estágio, servindo como um elo entre eles.

O terceiro estágio compreende o processo de formação dos conceitos propriamente ditos. A primeira fase deste processo está ainda muito próxima aos pseudoconceitos, mas requer algo além da unificação. Para sua formação é necessário abstrair, isolar elementos. Quando a criança agrupa objetos com um grau máximo de semelhança ela dá o seu primeiro passo em direção à abstração. Para tal, tem sua atenção voltada mais para algumas características de um objeto do que para outras, dando-lhes um tratamento preferencial.

Na seqüência deste estágio, constituindo a segunda fase, o agrupamento passa a ser com a referência na máxima semelhança possível, ou seja, tem por base o agrupamento com apoio em único atributo: só os objetos redondos ou só achatados. Essas formações são chamadas de conceitos potenciais em que um traço abstraído não se perde facilmente entre os demais como ocorria no pensamento por complexos associativos.

A terceira fase deste processo se caracteriza quando a totalidade concreta dos traços foi destruída pela sua abstração. Cria-se a possibilidade de unificação dos traços em uma base diferente. O domínio da abstração juntamente com o pensamento por complexos numa fase mais avançada permite à criança progredir até a formação de conceitos verdadeiros, que constitui a quarta e última fase deste estágio. Esta é caracterizada pelo papel decisivo desempenhado pela palavra, signo, o que difere primordialmente do pensamento em complexo. As operações intelectuais realizadas por meio da palavra distinguem uma e outra forma do desenvolvimento conceitual.

As investigações de Vygotsky permitiram-lhe chegar à conclusão de que somente na adolescência é que ocorre o pensamento por conceitos, concluindo o terceiro estágio de evolução intelectual. Percebeu que, ao desenvolverem-se, os adolescentes apresentam as seguintes características: abandono das formas primitivas de pensamento (sincrética e por complexos), o emprego de conceitos potenciais desaparece para dar lugar ao uso dos conceitos verdadeiros. Porém, as formas mais elementares de pensamento não desaparecem por inteiro; elas continuam a se manifestar por muito tempo e "até mesmo o adulto está longe de pensar sempre por conceitos" (VYGOTSKY, 2001, p.228). Portanto, a adolescência é um momento de crise e amadurecimento e não de conclusões.

Nos seus experimentos com adolescentes, Vygotsky percebeu uma discrepância entre a capacidade de formar conceitos e a capacidade de definí-los. O adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará difícil expressá-lo em palavras. Da mesma forma, o adolescente e o adulto ao definir um conceito buscam diversos objetos concretos que apresentam teores que os caracterizam. A transição do abstrato para o concreto é tão difícil quanto a sua reciprocidade. A formação dos conceitos surge sempre no processo de resolução de algum problema que foi proposto para os adolescentes. Com a solução deste, surge o conceito.

Vigotski (2000) afirma que o processo de formação de conceitos quando examinado em sua complexidade, surge como um movimento do pensamento dentro da pirâmide de conceitos que oscila em duas direções: do particular para o geral e vice-versa. A palavra é parte integrante nesse processo de desenvolvimento.

A investigação teórica e a experiência pedagógica deram subsídios para Vigotski (2000) afirmar que o ensino direto de conceitos constitui-se vago e improdutivo. O professor que escolhe esta via de ensino consegue somente "uma assimilação vazia de palavras, um verbalismo puro e simples que estimula e imita a existência dos respectivos conceitos na criança, mas, na prática, esconde o vazio" (VYGOTSKY, 2000, p. 247).

Segundo Vygotsky (2001), os conceitos se dividem em dois tipos: conceitos cotidianos (espontâneos) e científicos. Ambos não se desenvolvem igualmente, pois existem diferenças entre os dois processos. Nesse sentido, Vygotsky desenvolveu experimentos para elaborar explicações teóricas cujos resultados foram organizados em quatro grupos. O primeiro grupo constituiu a experiência imediata. Conclui que a relação dos conceitos científicos com a experiência pessoal da criança difere da relação dos conceitos espontâneos. As motivações internas que servem como formadoras de conceitos científicos são diferentes daquelas que levam à formação dos conceitos espontâneos. Existe também uma força e uma fraqueza de ambos os conceitos. Quando o científico demonstra-se forte, o espontâneo demonstra-se fraco, e vice-versa. Por exemplo, o modo que a criança assimila o conceito da Lei de Arquimedes é diferente daquele que assimila o conceito de irmão. O desenvolvimento do conceito de irmão não decorreu, inicialmente, da explicação do pesquisador, nem pela formulação científica. Esse conceito é marcado de uma experiência pessoal da criança: "ele já transcorreu uma parcela considerável do seu caminho de desenvolvimento e, em certo sentido, já esgotou o conteúdo puramente fatual e empírico nele contido" (VYGOTSKY, 2000, p. 264). Estas palavras ditas por Vygotsky não podem ser aplicadas para o conceito da Lei de Arquimedes, o que legitima a dicotomia existente entre os dois tipos de conceitos.

O segundo grupo é constituído pelos dados teóricos. Para tal, Vygotsky cita a hipótese de Piaget segundo a qual garante que o pensamento da criança é mais original que a sua linguagem e, desta forma, admite que as formas mais elevadas do pensamento no que diz respeito à formação de conceitos científicos distinguem-se por uma originalidade ainda maior se comparada com as formas de pensamento que organizam os conceitos espontâneos. Vygotsky faz analogia do desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos com a língua estrangeira e materna.

> Vias diferentes de desenvolvimento, que transcorrem em condições diferentes, não podem levar a resultados absolutamente idênticos. Seria um milagre se o desenvolvimento de uma língua estrangeira, quando lecionada na escola, repetisse ou reproduzisse o caminho do desenvolvimento da língua materna. (VYGOTSKY, 2000, p. 266)

O terceiro grupo trata de reflexões heurísticas. Vygotsky diz que na investigação psicológica moderna existem duas modalidades de estudo de conceitos: uma se dá em função de métodos superficiais que operam com os conceitos reais da criança. A outra aplica procedimentos de análise e experimento somente com conceitos experimentais criados artificialmente e designados por palavras que não denotam sentido. Os conceitos científicos constituem um grupo especial que permite a combinação dos dois métodos existentes e empregando a "análise experimental do nascimento e do desenvolvimento do conceito que de fato existe na consciência da criança" (VYGOTSKY, 2000, p. 269).

O quarto, último grupo, é formado pelas reflexões acerca da natureza prática. De acordo com seus experimentos, pode-se estudar as complexas relações existentes entre os conceitos espontâneos e científicos, dentre elas, podemos citar: a tomada de consciência, a arbitrariedade dos conceitos e a existência de uma sistematização entre estes.

Vygotsky também manifestou sua posição acerca da relação existente entre aprendizado e desenvolvimento. Faz menção a três grandes posições teóricas:

1.ª) Os processos de desenvolvimento da criança são independentes do aprendizado, pois este é considerado algo externo. O aprendizado se utilizaria dos avanços do desenvolvimento não fornecendo um impulso para modificar o seu curso. Em alguns estudos experimentais com crianças em idade escolar, admite-se que os processos de dedução, compreensão, evolução das noções de mundo, o domínio das formas lógicas do pensamento, da lógica abstrata, se desenvolvem sem a influência do aprendizado escolar. Piaget e muitos outros autores comungam dessa posição teórica.

2.ª) O aprendizado é desenvolvimento. Nesse posicionamento centram-se várias teorias e uma delas é a que se baseia no conceito de reflexos. O desenvolvimento é visto como domínio dos reflexos condicionados, ou seja, o processo de aprendizado conflui-se com o desenvolvimento.

3.ª) Combinação das duas posições teóricas anteriores. Koffka (Vygotsky, 2001) demonstra que o desenvolvimento se baseia em dois processos diferentes, em que cada um influencia o outro. De um lado, a maturação que depende do desenvolvimento do sistema nervoso; e, de outro, o aprendizado que é um processo de desenvolvimento.

Vygotsky (2001) discorda dessas três posições teóricas, pois entende que deve-se levar em consideração os aspectos específicos da relação geral entre aprendizado e desenvolvimento quando a criança atinge a idade escolar. Nas suas investigações, ele apresentou uma questão nova para a psicologia moderna no que diz respeito ao desenvolvimento intelectual das crianças. Afirma que o aprendizado começa muito antes delas entrarem na escola. Qualquer situação de aprendizado que acontece na escola tem sempre uma história prévia. O aprendizado escolar e o pré-escolar são diferentes. No período em que a criança faz perguntas, assimila o nome de objetos ela está aprendendo. Sem dúvida nenhuma o aprendizado e o desenvolvimento estão inter-relacionados.

Para Vygotsky, falar nas dimensões do aprendizado escolar requer a observação de um novo conceito, ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal), que articula dois níveis. O primeiro, Nível de Desenvolvimento Real, em que as funções mentais da criança se estabeleceram como resultados de certos ciclos que foram completados.

Alguns estudos sobre o desenvolvimento mental infantil demonstram que existem problemas que elas conseguem resolver sozinhas, o que caracteriza o segundo nível, desenvolvimento real, que revela sua capacidade mental. Porém, existem problemas que as crianças necessitam da intervenção de alguém para ajudá-las na resolução – Nível de Desenvolvimento Proximal. Neste caso, a solução do problema não é vista como indicativo do seu desenvolvimento mental, mas revela suas possibilidades prospectivas.

Por exemplo, duas crianças que ingressaram na escola com 10 anos de idade cronológica. É possível que ambas tenham a mesma idade mental, pois lidam sozinhas com tarefas de grau de dificuldade padronizado para oito anos. Ao proporlhes a resolução de problemas com um grau superior ao de oito anos com o auxílio de outra pessoa, pode ocorrer que a primeira criança lide com situações até o nível de doze anos e a segunda somente com o nível de nove anos. Então duas crianças não possuem a mesma idade mental. Essa diferença entre doze e nove ou oito é o que Vygotsky denomina de ZDP.

A ZDP é distância entre o nível de desenvolvimento real, em que a criança realiza atividade sozinha e o nível de desenvolvimento potencial – que ocorre com a ajuda do outro. Só é possível determinar o estado de desenvolvimento mental de uma criança se forem revelados os dois níveis de desenvolvimento: real e ZDP.

Vygotsky (2000) alerta os professores para que se atentem ao fato de que o aprendizado orientado para os níveis de desenvolvimento atingidos é ineficaz. Em vez disso, deve-se dirigí-lo a um novo estágio do desenvolvimento. O aprendizado organizado adequadamente resulta em desenvolvimento mental, sem a coincidência de ambos. O desenvolvimento caminha de uma forma mais lenta, atrás do aprendizado. Esta diferença constitui a ZDP. Apesar da ligação direta entre os dois processos, eles nunca são realizados de forma igual.

> O ensino seria totalmente desnecessário se pudesse utilizar apenas o que já está maduro no desenvolvimento, se ele mesmo não fosse fonte de desenvolvimento e surgimento do novo. Por isso, a aprendizagem só é mais frutífera quando se realiza nos limites de um período determinado pela zona de desenvolvimento imediato. (VYGOTSKY 2000, p. 334)

Acrescenta: “a questão da aprendizagem e do desenvolvimento é o centro da análise da origem e da formação dos conceitos científicos” (VYGOTSKY 2000, p. 338). O desenvolvimento dos conceitos científicos supera os espontâneos, pois acontecem em vias opostas.

Damazio (2000), com base em Vygotsky, diz que os dois tipos de conceitos apresentam diferenças quanto aos caminhos que seguem e quanto a sua dinâmica, porém esses processos se acham interligados. Não há, pois, uma dependência direta entre esses conceitos. Existe, sim, uma relação de movimento entre ambos: os conceitos cotidianos se desenvolvem de forma ascendente, de baixo para cima, em direção aos conceitos científicos. Os conceitos científicos se desenvolvem de forma descendente, de cima para baixo, em direção aos conceitos cotidianos.

De acordo com Vygotsky (2001), os conceitos científicos iniciam sua vida pelo nível que o conceito espontâneo da criança ainda não atingiu em seu desenvolvimento. O conceito espontâneo deve atingir um determinado nível de consciência para que ela possa aprender o conceito científico. Como conseqüência para o processo pedagógico escolar, Damazio (2000) propõe que o professor deve elaborar atividades que detectem as significações que os alunos possuem dos conceitos cotidianos correspondentes ao conceito científico, sem enfatizá-los uma vez que os alunos deles se apropriaram em situações informais.

## 4.2 Formação dos Conceitos na Adolescência

Os estudos de Vygotsky sobre a formação de conceitos na idade de transição parte das afirmações de alguns autores da psicologia tradicional sobre o período da adolescência ou da maturação sexual de que não se produz nenhuma nova operação intelectual na esfera do pensamento se comparada com uma criança de três anos. Segundo a teoria tradicional, todos os processos pelos quais passam um adolescente são simplesmente uma acumulação quantitativa das peculiaridades existentes no pensamento de uma criança de três anos, o que não pode ser chamado de desenvolvimento. A característica fundamental nessa fase são as emoções.

Em discordância com tais posições, Vygotski (1996) afirma que, sem dúvida, uma criança é um ser com emoções que desempenham um papel fundamental. Porém, o adolescente é além de tudo um ser pensante no auge do desenvolvimento intelectual. A raiz principal do problema, de acordo com Vygotski, está pautada nas rupturas das formas e do conteúdo do pensamento ao longo do desenvolvimento da conduta. Ou seja, não se modifica apenas o conteúdo, mas também suas formas, pois surgem e se configuram novos mecanismos, novas funções e operações, como também modos de atividade que até a adolescência eram desconhecidos.

Conteúdo e forma, estrutura e função estão ligadas à aquisição de novos mecanismos de conduta. Um determinado conteúdo pode ser representado de maneira adequada com a ajuda de formas determinadas. Um exemplo é o domínio da álgebra moderna que não poderia ter surgido sem suas formas inaugurais e da própria aritmética.

Alguns autores defendem que a evolução das funções psíquicas superiores não acontece paralelamente ao desenvolvimento do cérebro, isto é, se realizam apenas por funções hereditárias. Vygotski discorda destas teses e afirma que as complexas sínteses que se produzem durante todo o processo do desenvolvimento cultural da criança e do adolescente baseiam-se na vida social, no desenvolvimento cultural e na atividade laboral.

O pensamento do adolescente não se caracteriza pela separação entre abstrato e concreto, mas pelo aparecimento de uma forma nova de relação entre ambos. Na adolescência, surgem formas novas e, graças a elas, se estruturam as velhas sobre bases totalmente diferentes. Segundo Vygotski (1996), o adolescente alcança um nível superior de pensamento e domina conceitos indicadores de formas novas de atividade intelectual e o conteúdo novo do pensamento. A tese de Vygotski é a de que a formação de conceitos é o núcleo fundamental que aglutina todas as mudanças que se produzem no pensamento do adolescente.

Com base em suas investigações, Vygotski (1996) destaca que na fase da adolescência acontece um importantíssimo avanço no desenvolvimento intelectual: a passagem do pensamento em complexos para o pensamento em conceitos propriamente ditos. O conceito é uma nova forma qualitativa de atividade intelectual, de modo de conduta e mecanismo intelectual. Todo o conteúdo do pensamento se renova e se reestrutura devido à formação de conceitos.

Uma das consequências fundamentais que se apresenta ao adolescente durante a passagem ao pensamento em conceitos é a de que tudo o que lhe era exterior – convicções, interesses, concepção de mundo, normas éticas, regras de conduta, inclinações, ideais – passa a ser interior, abrindo-lhe o mundo da consciência social objetiva, o mundo da ideologia social. A diferença entre a forma de pensar em conceitos da criança e do adolescente é a de que para aquela os conceitos não são assimilados de forma completa como o são para os adolescentes, que participam de maneira ativa e criativa nas diversas esferas da vida cultural que têm diante de si.

A função da formação de conceitos na idade de transição desempenha um papel decisivo, pois permite ao adolescente compreender sua realidade interior e o mundo de suas próprias vivências. A palavra não é apenas um meio para compreender a coisa em si e aos demais, mas também a si mesmo. Significa, pois, um meio para o adolescente se compreender, perceber as próprias vivências. É nesse nível de formação de conceitos que ele chega ao desenvolvimento da auto-percepção, auto-observação, ao conhecimento profundo da realidade interna. O conceito como um meio de conhecimento e compreensão, modifica o conteúdo do pensamento do adolescente. A palavra, como mencionamos, desempenha um papel fundamental, pois é a manifestação do conceito. O homem de posse do conceito com o auxilio das palavras que traduzem signos, descobre o mundo visível e as leis e nexos que contém.

Vygotski (1996) destaca que existem vínculos entre os conceitos. A inter-relação entre eles é um reflexo da transferência e vinculação dos fenômenos da realidade. Por conseqüência, cada conceito surge relacionado com todos os outros e uma vez formado determina um sistema de conceitos com aqueles anteriormente conhecidos.

A autoconsciência também surge na medida em que o homem passa a compreender-se com a ajuda da palavra, o que não é possível na infância, uma vez que a criança se compreende muito pouco. A autoconsciência se desenvolve lentamente e depende do desenvolvimento do pensamento. É graças ao pensamento em conceitos que compreendemos a realidade, os outros e a nós mesmos. Essa é a grande revolução que se produz no pensamento e na consciência do adolescente.

Sobre o papel da linguagem, Vygotski diz que ela não é um meio para expressar uma ideia formada, mas para criar; não é reflexo de uma concepção de mundo estruturada, e sim a atividade que a forma. A linguagem e a compreensão são inseparáveis uma vez que se manifestam no uso social como meio de comunicação e no seu emprego individual como meio de pensamento.

Também, no começo da adolescência o concreto ainda prevalece, porém, à medida que ocorre o desenvolvimento, o abstrato se configura como forma de pensamento para ler o mundo retrospectivamente e prospectivamente. Dessa forma, o conceito é o reflexo objetivo das coisas em seus aspectos essenciais e diversos. Portanto, resulta da elaboração racional das representações, do saber descoberto nos nexos e nas relações de um objeto com os outros. É uma atividade prolongada que contém uma série de atos de pensamento, juízos, dotada de certa unidade e especial estrutura psicológica no pleno e verdadeiro sentido da palavra. A estrutura do conceito se manifesta em um sistema de juízos, em um complexo de atos de pensamento que constituem uma formação integral, única, possuidora de suas próprias leis.

Em suma, para Vygotski (1996), é na adolescência que acontece a verdadeira formação de conceitos, caracterizada pela mudança do conteúdo e da forma do pensamento.

# 5 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo descrevemos o percurso metodológico seguido para delineamento da análise a que nos propomos. Ou seja, definiremos o tipo de pesquisa, a modalidade e os caminhos traçados para o alcance do objetivo proposto de analisar as significações do conceito de radiciação trazidas pelos livros didáticos do Ensino Fundamental, no decorrer do século XX.

Como iniciante na pesquisa, ou seja, inexperiente neste sentido, tive que recorrer a alguns autores a fim de esclarecer a finalidade da pesquisa, seus tipos, bem como as diferentes modalidades existentes em cada uma delas. Para tanto, retomamos as leituras indicadas em algumas das cadeiras cursadas durante o mestrado e também as sugestões por parte do orientador. Entre os teóricos que nos deram embasamento nesta etapa do estudo, podemos citar: Pedro Demo, Antonio Chizzotti, Laurence Bardin, Christian Laville e Jean Dionne, Maria Cecília de Souza Minayo, Roque Moraes, Augusto N. da S. Triviños.

Segundo Demo (1987), a pesquisa é a maior finalidade da ciência, sendo a metodologia uma preocupação instrumental que trata das formas de se fazer ciência e cuida dos procedimentos, formas e caminhos; além disso, capta e manipula a realidade assim como ela é.

Elegemos a pesquisa qualitativa por considerarmos que permite compreender os fenômenos inseridos numa relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. Envolve a obtenção de dados descritivos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, uma vez que:

> O conhecimento não se reduz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito-observador é parte integrante do processo

> de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo – lhe um significado. (CHIZZOTTI, 2001, p. 79)

Minayo (1994) diz que a pesquisa qualitativa se preocupa com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, trabalha com universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, isto é, um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos a variáveis. A “abordagem qualitativa aprofunda-se no mundo dos significados, das ações e relações humanas, um lado não perceptível e não captável em equações, médias e estatísticas” (MINAYO, 1994, p. 22).

No entanto, ao escolher a pesquisa qualitativa, o investigador pode seguir diferentes modalidades. Optamos, por se adequar ao nosso estudo, pela análise de conteúdo, por ser um método de tratamento e análise de informações, colhidas por meio de técnicas de coleta de dados que se aplicam ao estudo de textos escritos ou comunicações orais, gestuais ou visuais traduzidas à forma escrita ou documento (CHIZZOTTI, 2001).

Bardin (2003, p. 42) apresenta a definição de análise de conteúdo:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Para Laville e Dionne (1999), o princípio da análise de conteúdo consiste em desmontar a estrutura e os elementos do conteúdo dos documentos para esclarecer suas diferentes características e extrair sua significação.

Moraes (1999, p.15) diz que a análise de conteúdo é constituída de cinco etapas: preparação, unitarização, categorização, descrição, e interpretação.

Na primeira etapa, denominada preparação, identificam-se as amostras de informação a serem analisadas. Toma-se uma primeira decisão sobre quais materiais estão realmente de acordo com os objetivos da pesquisa, que devem cobrir o campo a ser investigado de modo abrangente. A partir daí, codificam-se estes materiais para que seja possível identificar rapidamente cada elemento da amostra.

Na segunda etapa, submetem-se os dados ao processo de “unitarização”. Primeiramente, deve ser realizada a releitura cuidadosa dos materiais, com o objetivo de definir as unidades de análise, que são os elementos unitários de conteúdo a ser submetido à posterior classificação. Definidas pelo pesquisador, as unidades de análise podem ser palavras, frases, temas ou mesmo documentos inteiramente. Para a definição da unidade de análise, pode-se optar por manter o material em sua forma integral ou dividí-lo em unidades menores. Esta decisão depende dos objetivos da pesquisa, da natureza do problema e do tipo de material a ser analisado. Num segundo momento, é necessário ler novamente, identificando as unidades de análise, estabelecendo códigos e associando-os àqueles elaborados anteriormente. Na seqüência, isola-se cada uma das unidades de análise, reescrevendo cada uma delas de modo a ficarem individualizadas e isoladas para que possam ser compreendidas fora do contexto original. Na última etapa do processo de unitarização, é preciso definir unidades de contexto que são unidades maiores que aquelas definidas anteriormente e, geralmente, contém diversas delas, e fixa-se os limites contextuais para interpretá-las.

A terceira etapa, a categorização, consiste em agrupar dados conforme os traços comuns. O estabelecimento das categorias necessita obedecer a um conjunto de critérios, a seguir descritos. Validade, pois elas devem ser adequadas aos objetivos de análise, à natureza do material e às questões a ser respondidas ao longo da pesquisa. Exaustividade por dar possibilidade à inclusão de todas as unidades de análise. Homogeneidade para que a organização das categorias seja fundamentada em um único principio ou critério de classificação. Se houver mais de um nível de análise, o critério de homogeneidade deve estar presente em todos.

A quarta etapa é a descrição, que comunicará o resultado do trabalho. Quando se tratar de uma abordagem qualitativa, para cada uma das categorias deve ser produzido um texto síntese no qual se expresse o conjunto de significados presentes nas diversas unidades de análise. Citações diretas deverão ser utilizadas para exemplificar as informações. Porém, a descrição é uma da partes mais importantes, mas não é suficiente. É preciso ir além, ou seja, proceder à interpretação, momento em que o pesquisador atingirá a compreensão mais aprofundada do conteúdo das mensagens.

No que se refere à interpretação, podem-se salientar duas vertentes: a primeira relaciona-se a estudos *a priori*, em que serão explorados os significados expressos nas categorias da análise em contraste com essa fundamentação. A segunda constitui a construção de uma teoria a partir das informações e categorias de análise. Nesse caso, a própria construção da teoria é uma interpretação.

Moraes (1999) diz que a interpretação é um passo indispensável em toda a análise de conteúdo, principalmente naquelas de natureza qualitativa. Acrescenta que a análise de conteúdo não é uma simples técnica, mas uma metodologia com várias possibilidades e em permanente revisão, o que possibilita o atendimento de várias necessidades de pesquisadores, principalmente aqueles voltados a uma abordagem qualitativa.

Definidos os marcos teórico-metodológicos, dedicamo-nos inicialmente a delimitação da amostra a ser analisada. Partimos para a seleção dos livros didáticos que compreenderiam nossa amostra.

Alves (2005) em sua pesquisa em livros didáticos adotou como ponto de partida a busca e seleção entre aqueles disponíveis em bibliotecas de colégios municipais de Pelotas. Mencionou Choppin (2002) que achamos conveniente também citá-lo por concordarmos com suas afirmações.

Segundo Choppin[7] (apud ALVES, 2005) existem impossibilidades do pesquisador de livros didáticos para encontrar determinados exemplares, o que leva-o, por obrigação material ou por escolha, a definir uma amostra para análise. Surge, então, a necessidade da determinação de critérios que justifiquem a seleção de determinada amostragem.

As orientações de Choppin foram providenciais para a definição do acervo a ser pesquisado nesse trabalho. A opção foi localizar os exemplares no Laboratório de Estudos em Educação Matemática da UNESC, por ter um acervo de livros didáticos, a maioria deles adotado em escolas da Região Sul de Santa Catarina.

Atendendo às determinações da análise de conteúdo, primeiramente a etapa de preparação, preocupamo-nos com três critérios iniciais: identificação dos livros didáticos dos séculos XX; correspondência com o atual ensino fundamental (quinta a oitava série); e década da publicação dos exemplares. Reiteramos o pensamento de Choppin, citado por Alves (2005), da necessidade de estabelecer critérios que justifiquem a reunião da amostra da pesquisa.

Na sequência, etapa da “unitarização”, procedemos à releitura minuciosa dos livros selecionados para definir a unidade de análise: o conceito de raiz quadrada em sua primeira aparição em uma determinada coleção, que se constitui o foco da pesquisa. Posteriormente, definimos as unidades de contexto de forma

[7] ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **Livro Didático De Matemática: Uma Abordagem Histórica (1943 – 1995).** 2005. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS.

articulada com o referencial, mais especificamente, a ideia de sistema conceitual. Assim, determinamos as seguintes unidades de contexto que traduzem as inter-relações do conceito de radiciação com radiciação e raiz quadrada. Nessas foram incluídas articulações com outros conceitos: potenciação, multiplicação, área e medida do lado do quadrado.

Essa etapa, unitarização, exigiu-nos um grande esforço e releitura dos capítulos que tratavam da temática adotada. Como forma de síntese, elaboramos dois quadros. No primeiro, são apresentados os dados técnicos e de identificação de cada obra analisada.

| Autor | Livro | Ano | Edição | Editora | Formação do autor |
|---|---|---|---|---|---|
| Nelson Benjamin Monção | Aritmética Elucidativa | 1925 | 8.ª | Não consta | Contabilista |
| Antonio Trajano | Arithmetica Progressiva | 1930 | 66.ª | Não consta | Não consta |
| José Theodoro de Souza Lobo | Segunda Aritmética | 1949 | 37.ª | Editora Globo | Engenheiro geógrafo |
| Carlos Galante e Osvaldo Marcondes dos Santos | Matemática | 1952 | 21.ª | Editora do Brasil | Licenciados em Matemática |
| Carlos Galante | Matemática | 1962 | 5.ª | Editora do Brasil | Licenciado em Matemática |
| NEDEM | Ensino Moderno de Matemática | 1967 | 14.ª | Editora do Brasil | Professores licenciados em Matemática |
| Osvaldo Sangiorgi | Matemática | 1972 | Não consta | Companhia Editora Nacional | Professor de Matemática |
| Antonio Sardella e Edison da Matta | Matemática | 1981 | Não consta | Editora Ática | Professor de Química e Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Miguel Assis Name, Cid A. Goretti e Ariodante M. Cilli | Matemática Funcional | 1983 | Não consta | Editora do Brasil S/A | Não informado |
| Álvaro Andrini | Matemática | 1984 | Não consta | Editora do Brasil S/A | Não informado |
| Oswaldo Marcondes | Curso de Matemática | 1985 | Não consta | Editora do Brasil S/A | Não informado |
| Antonio Sardella e Edison da Matta | Matemática | 1989 | 14.ª | Editora Ática | Não informado |
| José Jakubovic e Marcelo Lellis | Matemática na Medida Certa | 1990 | Não consta | Editora Scipione | Não informado |
| José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr. | Aprendizagem e Educação Matemática | 1990 | Não consta | Editora FTD | Não informado |
| Vicenzo Bongiovanni; Olímpio Rudinin Vissoto Leite e José Luiz Tavares Laureano | Matemática e Vida | 1990 | Não consta | Editora Ática | Licenciados em Matemática – Professores de Matemática de 1.º, 2.º e 3.º graus |
| José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e Jose Ruy Giovanni Jr. | A conquista da Matemática | 1992 | Não consta | Editora FTD | Não informado |
| Edwaldo Bianchini | Matemática | 1995 | 3.ª | Editora Moderna | Não informado |
| Iracema Mori<br>Dulce Satiko Onaga | Matemática: Idéias e Desafios | 1996 | 1.ª | Editora Saraiva | Licenciadas em Matemática |
| José Ruy Giovanni,<br>Benedito Castrucci<br>Jose Ruy Giovanni Jr. | A conquista da Matemática Nova | 1998 | Não consta | Editora FTD | Bacharel e Licenciado em Matemática;<br>Bacharel e Licenciado em Matemática;<br>Licenciado em Matemática respectivamente |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| José Jakubovic<br><br>Marcelo Lellis | Matemática na Medida Certa | 1998 | 7.ª | Editora Scipione | Não informado<br><br>Bacharel em Matemática |
| Luiz Márcio Imenes<br><br>Marcelo Lellis | Matemática | 1998 | 1.ª | Editora Scipione | Mestre em Educação Matemática<br><br>Bacharel em Matemática |

**Quadro 2: Dados técnicos dos livros analisados**

No quadro 2, são indicados os elementos referentes à abordagem conceitual:

| Livro | Nº de página destinado ao tema | Sistema conceitual | Campo matemático abrangido | Estrutura seqüencial | Série em que o conceito é apresentado |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 - Aritmética Elucidativa | 9 | Multiplicação;<br>Radiciação. | Aritmético | Definição;<br>Algoritmos<br>Exemplo;<br>Exercícios. | Volume único |
| 2 – Arithmetica Progressiva | **6** | Multiplicação;<br>Raiz Quadrada e Cúbica. | Aritmetico e geométrico | Definição;<br>Exemplos;<br>Algoritmos;<br>Exemplo;<br>Exercícios. | Volume único |
| 3 - Segunda Aritmética | **8** | Multiplicação;<br>Potenciação;<br>Raiz Quadrada e Cúbica. | Aritmético | Definição;<br>Exemplos;<br>Algoritmos;<br>Exemplos;<br>Exercícios. | 1.ª e 2.ª séries ginasiais |
| 4 – Matemática | 16 | Potenciação;<br>Raíz quadrada. | Aritmético | Definição;<br>Algoritmos;<br>Exemplos;<br>Exercícios. | 2.ª série do curso ginasial |
| 5 – Matemática | 17 | Potenciação;<br>Raíz Quadrada. | Aritmético | Definição;<br>Algoritmos;<br>Exemplos; | Curso ginasial |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Exercícios; Dados históricos. | |
| 6 - Ensino Moderno de Matemática | 7 | Multiplicação; Potenciação; Raiz Quadrada. | Aritmético | Idéia de operação inversa da potenciação; Definição de raiz quadrada; Exemplo; Exercícios. | Curso ginasial |
| 7 – Matemática | 1,5 | Potenciação; Radiciação. | Aritmético Geométrico. | Problematização com o objetivo de encontrar a operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; Exemplos; | 5.ª série |
| 8 – Matemática | 1 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Idéia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; exercícios. | 5.ª série |
| 9 - Matemática Funcional | 4 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Idéia de operação inversa da potenciação; Exemplos; Exercícios. | 5.ª série |
| 10 – Matemática | 2,5 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Idéia de operação inversa da | 5.ª série |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | potenciação; Exemplos; Exercícios. | |
| 11 - Curso de Matemática | 0,5 | Potenciação; Raiz Quadrada | Aritmético | Definição; Exemplos; Exercícios | 5.ª série |
| 12 – Matemática | 1 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; exercícios. | 5.ª série |
| 13 - Matemática na Medida Certa | 4 | Potenciação; Àrea e Volume; Raiz Quadrada | Geométrico; Aritmético; Algébrico | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de raiz quadrada; exercícios. | 5.ª série |
| 14 - Aprendizagem e Educação Matemática | Não há | Não há | Não há | Não há | 5.ª série |
| 15 - Matemática e Vida | 3 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; exercícios. | 5.ª série |
| 16 - A conquista da Matemática | 1 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Idéia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação | 5.ª série |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Exercícios. | |
| 17 – Matemática | 3 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; exemplos e Exercícios. | 5.ª série |
| 18 - Matemática: Ideias e Desafios | 1,5 | Multiplicação; potenciação; Raiz Quadrada. | Geométrico; algébrico ;Aritmético. | Problematização a partir do estudo de área do quadrado; Definição de radiciação; Exemplos e Exercícios. | 5.ª série |
| 19 - A conquista da Matemática Nova | 1 | Potenciação; Radiciação | Aritmético | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de radiciação; Exercícios. | 5.ª série |
| 20 - Matemática na Medida Certa | 5 | Potenciação; Representação geométrica das figuras: quadrado e cubo; Raiz Quadrada. | Geométrico; Aritmético; Algébrico. | Ideia de operação inversa da potenciação; Definição de raiz quadrada; Exercícios. | 5.ª série |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 – Matemática | 8,5 | Multiplicação;<br>Potenciação;<br>Área;<br>Volume;<br>Radiciação. | Geométrico;<br>Algébrico;<br>Aritmético. | Problematização a partir do estudo de área do quadrado;<br>Definição;<br>Exemplos;<br>Exercícios. | 7.ª série |

**Quadro 3: Elementos da abordagem conceitual**

Esse procedimento foi fundamental e se confundiu com a terceira etapa da análise de conteúdo, pois também propiciou a determinação das categorias de análise, quais sejam: significações conceituais; sistema conceitual em que se insere a raiz quadrada; estrutura da sequência de ensino; campos matemáticos abrangidos.

Apresentamos as definições de cada uma das categorias:

1- Significações conceituais se referem às produções históricas dos estudiosos matemáticos sobre o conceito de raiz quadrada. Leontiev (1978, p.94) define a significação como sendo "aquilo que num objeto ou fenômeno se descobre num sistema de ligações, de interações e de relações. É refletida e fixada na linguagem, o que lhe confere a sua estabilidade*"*. Vygotski (1996) afirma que a realidade em si não é apropriada pelo homem, mas sim as suas significações. Elas têm função mediadora no momento em que o homem absorve o reflexo do mundo, valendo-se da experiência da prática social.

Assim, por exemplo, consideramos as significações da raiz quadrada: as ideias caracterizam o referido conceito, as definições, os algoritmos, entre outros, como apresentados no capítulo dois do presente estudo. Como diz Vygotski (1996, p. 81), um conceito é o:

> reflexo objetivo das coisas em seus aspectos essenciais e diversos; se forma como resultado da elaboração racional das representações, como resultado da descoberta dos nexos e das relações de um determinado objeto com outros, inclui em si, portanto, um longo processo de pensamento e conhecimento que está concentrado nele.

2- Sistema conceitual em que se insere a raiz quadrada diz respeito às articulações com outros conceitos. De acordo com Vygotski, um conceito mantém vínculos com outros e no seu desenvolvimento exercem entre si ações transformadoras mútuas.

> A recíproca interrelação e transferência dos conceitos, que é um reflexo da recíproca transferência e vinculação dos fenômenos da realidade, traz por consequência que cada conceito surge relacionado com todos os restantes e uma vez formado vem a determinar, por assim dizer, seu lugar no sistema de conceitos anteriormente conhecidos. (VYGOTSKI, 1996, p. 71).

Dessa forma, raiz quadrada pode se inserir num sistema conceitual constituído por: potenciação (conceito operativo inverso) de base com expoente dois, multiplicação, área do quadrado e a respectiva medida do seu lado, adição e subtração sucessivas de um número, entre outros.

3- Estrutura da sequência de ensino se refere às características da organização do desenvolvimento do conceito com vistas aos objetivos de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, procuramos distinguir três concepções distintas, conforme Duarte (1987, p. 32). Uma delas é a sequência lógica de ensino por atender o seguinte princípio: o concreto sincrético do pensamento do aluno, como ponto de partida, por representar ainda uma imagem confusa e não terem vínculos com outros conceitos; o concreto síntese a ser atingido com a apropriação das significações históricas. Uma segunda concepção adota uma “seqüência em que as relações matemáticas se dão no conteúdo visto de uma maneira estática, isto é, enquanto um produto sem processo”. E a terceira é adoção de “uma sequência de ensino que seja uma cópia da seqüência cronológica de desenvolvimento daquele conteúdo". No que se refere a essa última, Duarte (1987), entende ser equivocada a denominação dada pelos propositores de uma seqüência histórica.

4- Campos matemáticos abrangidos que representam os diferentes enfoques dado aos conceitos referentes às significações aritméticas, geométricas e algébricas. Essa categoria tem fortes vínculos e proximidade com a primeira e segunda, anteriormente anunciadas e definidas, pois também trata de questões conceituais. Entretanto, sua contribuição maior está na possibilidade de analisar se os livros didáticos priorizam ou possibilitam indistintamente o desenvolvimento do pensamento aritmético, geométrico e algébrico. Nesse sentido, vale recorrer aos fundamentos teóricos ao dizer:

> A assimilação da álgebra eleva a um nível superior o pensamento aritmético, permitindo compreender qualquer operação aritmética como um caso particular de uma algébrica, proporcionando uma visão mais livre, mais abstrata e mais generalizada e, com isso, mais profunda e rica às operações com quantidades concretas. Da mesma forma, a álgebra libera o pensamento da criança do cativeiro das dependências numéricas concretas e o eleva ao nível de um pensamento mais generalizado. (VYGOTSKI, 1993, p. 198).

Davidov (1998) também alerta que a aritmética se caracteriza pelos vínculos com o conhecimento empírico. Por isso, pode se constituir em obstáculo ao desenvolvimento do pensamento teórico-matemático.

Por sua vez, o desenvolvimento do pensamento geométrico, conforme Galperin & Talizina (1967), compreende quatro parâmetros. O primeiro, Nível de Processo, constituído de três subníveis: 1) materializado, associado à presença de objetos físicos; 2) palavra oral, em que os componentes do pensamento têm correspondência com os critérios do conceito e ocorrem por meio de observações que são expressas oralmente; 3) intelectual, trata-se de um processo puramente mental. O segundo parâmetro, Grau de Generalização, em que são desenvolvidas as condições que permitem as distinções entre as propriedades essenciais e não essências de um conceito. O terceiro parâmetro, Grau Completo, caracterizado pelo pensamento analítico, por requerer um grupo maior de operações, que exige a reunião de diferentes propriedades aplicáveis a novos conceitos. O quarto parâmetro, Grau de Internalização, que diz respeito ao próprio ato do estudante e seu nível de abstração, bem como as possibilidades de dedução de fórmulas e criação de novos modelos teóricos.

A quarta e quinta etapas preconizadas pela análise de conteúdo, respectivamente, descrição e interpretação, foram tratadas conjuntamente e dedicamos o capítulo 7, a seguir.

# 6 O CONCEITO DE RAIZ QUADRADA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo constitui-se na etapa quatro da análise de conteúdo – descrição e interpretação – em que nos debrucemos na análise dos livros didáticos, no mínimo um de cada década do século XX. Vale salientar que a ênfase é para o conceito de radiciação, mais especificamente raiz quadrada, em consideração com as categorias de análise estabelecidas na etapa anterior, quais sejam: as significações conceituais, sistema conceitual em que se insere o conceito de raiz quadrada; estrutura da sequência de ensino; campos matemáticos abrangidos. O diálogo com o referencial teórico ocorrerá com foco para as questões relacionadas às possibilidades de desenvolvimento do pensamento conceitual, por parte dos estudantes, tendo como referência as significações historicamente produzidas e o sistema conceitual em que se insere.

A primeira obra analisada é datada de 1925. O livro intitula-se “Aritmética Elucidativa” de autoria de Nelson Benjamin Monção que, segundo o autor, destina-se aos professores e alunos das escolas primárias e dos cursos complementares, aos comerciantes, aos empregados de escritórios e às alunas do curso normal. Está dividido em três partes: Aritmética Elucidativa, Aritmética Comercial e Escrituração Mercantil. Os dois primeiros tópicos são abordados paralelamente. Existe uma divisão, que o autor chama de: Livro Um, Dois, Três e Quatro, organizados em lições numeradas que correspondem aos conteúdos. Cada vez que há a apresentação de um livro, o autor anuncia a quem se destina aquele determinado capítulo. Por exemplo, o conceito de raiz quadrada aparece no Livro Quatro, parte segunda, aplicável às classes dos comerciantes, guarda-livros, empregados de escritórios, escolas de comércio, escolas normais, ginásios.

O conceito de radiciação constitui a 180ª lição, juntamente com os conceitos de potenciação. O autor define Potência e Potenciação e, na seqüência, apresenta a seguinte definição:

> Radiciação é a operação que ensina a determinar a base de uma potência, cujo valor e grau se conhecem. A base que se procura determinar recebe o nome de raiz e o grau denomina-se índice. Ao quadrado corresponde Raiz quadrada, que se indica pelo sinal $\sqrt{\ }$ chamado radical; A radiciação tem por fim a extração das raízes em geral. (MONÇÃO, 1925, p. 405)

Mas a preocupação é com o conceito de raiz quadrada, pois imediatamente apresenta a sua primeira significação, isto é, a definição do quadrado de um número como sendo: “o produto desse número por si mesmo duas vezes, assim: 16 é o quadrado de 4 porque 4 x 4 = 16)” (MONÇÃO, 1925, p. 405)

Observa-se que a sequência de ensino proposta pelo autor prima pela objetividade por focar diretamente as definições seguidas de uma situação puramente aritmética. Embora, a lição intitulada “Radiciação” seja precedida pela lição “Potenciação”, não há inter-relação entre os dois conceitos. Em vez disso, a articulação conceitual ocorre com a multiplicação, pois, pela definição apresentada, o quadrado de um número é obtido pelo produto de dois fatores iguais que é próprio. A noção de operação inversa radiciação/potenciação só é anunciada na definição como um jogo de palavras, porém não é discutida no exemplo.

Sendo assim, para Monção, não importa a idéia de operação inversa, como apresentada por Caraça (2003), no caso específico radiciação e potenciação. Por isso, são eximidas as relações entre expoente e índice, expoente inteiro e fracionário, radicando e potência, entre outras.

Pelo modo que a seqüência de ensino foi organizada, a preocupação do autor é investir, imediatamente, no procedimento algorítmico. Por isso, passa a indicar que a extração da raiz quadrada deve ser realizada, conforme os passos a seguir especificados. Primeiramente, separar-se o número dado em classes de dois algarismos, a começar das unidades, podendo a última delas apresentar apenas um dígito. Em seguida, considera-se a primeira classe – formada pela unidade e dezena - e extrai-se a raiz quadrada, que se escreve no lugar destinado no algoritmo. Embora Monção não faça menção, este número corresponde à unidade da raiz do número proposto. Na sequência, eleva-se ao quadrado a raiz até então encontrada, e o produto encontrado subtrai-se da classe considerada. À direita do resto, junta-se a classe seguinte, separando por um ponto o último algarismo à direita da classe; divide-se o restante pelo dobro da raiz encontrada. O quociente pode ser o segundo algarismo (dezena) da raiz. De modo provisório, escreve-se o este valor à direita do dobro (como unidade) da raiz e multiplica-se por ele o número formado. Se o produto pode ser subtraído do número formado pelo dividendo e pelo algarismo separado, então o valor experimentado se constituirá na dezena da raiz buscada. Caso contrário, diminui-se sucessivamente de uma unidade até chegar-se a uma subtração possível. A partir daí, repetem-se as operações, com exceção do primeiro procedimento, até a obtenção de todos os algarismos que formarão o número da raiz procurada. Se o último resto não for zero, indica que o número dado não é quadrado perfeito (MONÇÃO, 1925). Em seguida, o autor apresenta o seguinte exemplo:

| | |
|---|---|
| Exemplo: 4. 61. 39. 38.<br>- 4<br>0 61<br>-41<br>20 39<br>- 16 96 | 2 1 4 8 Logar da raiz<br>DOBRO<br>2X2=4; 41<br>x 1<br>41 |
| 3 43 38<br>- 3 43 04<br>RESTO, 34 | DOBRO<br>2x21=42; 424<br>x 4<br>1696 |
| | DOBRO<br>2x214=428; 4288<br>x 8<br>34304 |
| Raiz Quadrada de 4613938 = 2148. Resto 34. | |

**Figura 6: Exemplo adaptado de MONÇÃO (1925), p. 406.**

É oportuno evidenciar que o intuito de Monção (1925) é levar os alunos ao domínio dos passos para obter a raiz quadrada de um número. Por isso, seu primeiro exemplo – 4.613.938 - é um valor que, na atualidade, qualquer proposição pedagógica ou tendência em Educação Matemática consideraria inapropriado para introduzir o ensino dessa temática.

Mas o autor é fiel ao seu entendimento de que estudar a lição de “raiz quadrada” é adotar procedimentos algoritmos que levem ao valor que se procura. Por isso, apresenta outro procedimento da extração da raiz de um número quadrado perfeito pela decomposição em fatores primos. Para tanto descreve: “1.º decompõe-se esse número em fatores primos; 2.º, dispõem-se esses fatores em pares, havendo dois fatores iguais em cada par; 3.º, o produto continuado de um fator de cada par será a raiz quadrada”. (MONÇÃO, 1925, p. 406). Exemplifica da seguinte maneira: $\sqrt{1600}$ :

$$\begin{array}{l|l} 1600 & 2 \\ 800 & 2 \\ 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Na sequência, de cada par toma-se um fator, ou seja, 2, 2, 2, 5 para, em seguida, multiplicá-los: 2 x 2 x 2 x 5 = 40 = $\sqrt{1600}$

O autor faz a seguinte observação: “Um número só será quadrado perfeito, se tiver um número par de fatores, ou se em cada par os dois fatores forem iguais” (MONÇÃO, 1925, p. 407)

Observa-se que Monção (1925) procura atender os objetivos que são concernentes aos princípios educativos e da aprendizagem que naquele momento – década de 1920 – predominavam na educação brasileira: “o formalismo clássico” (FIORENTINI, 1995). Por isso, sua abordagem didática tende focalizar a definição e o algoritmo para serem “decorados” pelos alunos. Para tal propõe um rol de “exercícios” como forma de levar o estudante a memorizar todos os passos que levam à obtenção da raiz.

Consequentemente, deixa de lado qualquer indício da origem do conceito e das múltiplas significações produzidas historicamente que constituem o movimento lógico caracterizador do referido conceito. Ou seja, os princípios pedagógicos não são os mesmos defendidos, atualmente, como por exemplo: a contextualização que contemple os aspectos históricos referentes aquele conceito e conexões com a realidade dos alunos.

Essas ausências conceituais levam-nos a alguns questionamentos: Será que ao abordar apenas a definição e um exemplo o aluno generaliza o conceito e os procedimentos de resolução? Os exercícios são apresentados após o único exemplo, sendo constituídos de perguntas e em número reduzido. Será que garantem a apropriação daquele conceito por parte do aluno?

Sendo assim, a abordagem adotada por Monção no ensino do conceito de raiz quadrada, dificilmente garante a compreensão e o aprendizado para uma pessoa que esteja em contato com este conteúdo pela primeira vez. As significações aritméticas foram priorizadas, as ideias geométricas que poderiam ampliar o pensamento conceitual não foram abordadas nem separadamente como também inter-relacionadas com os demais campos matemáticos. Enfim, poderíamos dizer que a seqüência de ensino adotada no livro se expressa da seguinte forma: definição $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$ algoritmo $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$ exercício. Esta habilita o aluno somente para a determinação da raiz quadrada.

O sistema conceitual é restrito ao próprio conceito com articulação com a multiplicação, não só no exemplo inicial como também nos dois algoritmos. Por sua vez, a potenciação é tangenciada na definição e indicada apenas em um dos passos do primeiro algoritmo de extração da raiz. Tal operação não é mencionada nem mesmo quando apresenta o cálculo da raiz de um número quadrado perfeito pela decomposição em fatores primos.

Um olhar na ótica da abordagem histórico-cultural sobre a proposta de Monção (1925) permite dizer que, mesmo com toda a sua boa intenção, exime o aluno de um processo de elaboração conceitual fundamentada na apropriação das múltiplas significações produzidas historicamente. A forma pedagógica de apresentar e desenvolver o conceito o conota como que se encerra em si mesmo. Contrariamente, as proposições histórico-culturais compreendem todos os conhecimentos em um processo dinâmico de construção ao longo da história por diversas culturas e vários homens movidos por necessidades concretas e pelas relações sociais.

O livro que localizamos da década de 1930 tem como autor Antonio Trajano. Primeiramente, estuda as Potências e na seqüência traz o capítulo intitulado Extração das Raízes. Imediatamente, define raiz de um número, como sendo “um dos fatores iguaes que produziram esse número” (TRAJANO, 1930, p. 214).

Faz comparação entre as raízes e as potências, que subsidia a afirmar que elas se distinguem pelo seu grau. Assim, tem-se: raiz quadrada ou segunda raiz, raiz cúbica ou terceira raiz, quarta raiz, quinta raiz, etc.

Após, apresenta as definições de raiz quadrada, cúbica e quarta.

> Raiz quadrada de um número é um dos dois factores iguaes desse número; assim a raiz quadrada de 25 é 5, porque 25 = 5 x 5.
> Raiz cúbica de um número é um dos três factores iguaes desse número; assim a raiz cúbica de 64 é 4, porque 64 = 4 x 4 x 4.
> A quarta raiz de um número é um dos quatro factores iguaes desse número; assim a quarta raiz de 81 é 3, porque 81 = 3 x 3 x 3 x 3. (TRAJANO, 1930, p. 215)

Pela citação é possível destacar a inexistência da inter-relação dos conceitos, potenciação e radiciação. A articulação ocorreu entre a definição de raízes com a multiplicação, da mesma forma que Monção (1925) o fez, apesar de que este primeiro autor abordou somente raízes quadradas.

Parte para as nomenclaturas específicas do conceito, quais sejam: $\sqrt{\ }$ chama-se sinal radical, que ao estar sobre um número indica que deve ser tomado na raiz indicada pelo índice; este é o numero escrito no ângulo do sinal radical, que dá o grau da raiz. Assim, para $\sqrt[2]{16}$ lemos raiz quadrada de 16. Para $\sqrt[3]{216}$, lemos raiz cúbica de 216 e, assim, sucessivamente.

Uma referência histórica é feita a respeito do sinal radical como sendo uma corrupção da letra r, inicial da palavra radix que significa raiz. Dessa forma, tem conformidade com Oliveira e Silva (1970), como visto anteriormente, o símbolo para indicar uma raiz, conhecido pelo nome de radical, pode ter sido uma deformação da letra r. Leonardo de Pisa, por volta do ano 1220, usava um R gótico para indicar raiz quadrada. (Oliveira; Silva, 1970, p. 140).

Esta nota histórica é uma significação que não fora tratada na primeira obra analisada. Um elemento novo é a informação de Trajano (1930) que, nas raízes quadradas, o índice 2 fica subentendido. Entretanto, não explica as razões lógicas de tal notação. Uma ausência nessa obra, como também na anterior e, vale adiantar, nas demais que serão estudadas na sequência é que seus autores, além de não apresentar as justificativas para a omissão do índice 2 sobre o sinal de radical, deixam de explicar os sentidos e os significados serem necessariamente, por definição, números naturais maiores e iguais a dois.

Trajano (1930) apresenta a seqüência de números quadrados perfeitos de 1 a 100 e suas respectivas raízes quadradas. Informa que, de 1 a 100, existem somente 10 quadrados perfeitos, que são resultados do produto de fatores iguais e, de 1 a 1000, somam 31, sendo os demais não quadrados. Daí originou-se a divisão de números inteiros em quadrados perfeitos e imperfeitos.

> Quadrado perfeito é o numero cuja raiz quadrada pode ser exactamente determinada; assim 64 é um quadrado perfeito, porque tem uma raiz quadrada exacta, que é 8.
> Quadrado imperfeito é o numero cuja raiz quadrada não pode ser exactamente determinada; assim a raiz quadrada de 10 é 3, 16222...., isto é um número inteiro e uma fracção. Esta raiz, por mais approximada que seja, multiplicada por si, não produzirá exactamente o número 10, e por isso tem o nome de raiz surda, para distinguí-la da raiz exacta dos quadrados perfeitos. (TRAJANO, 1930, p. 215)

Este autor foi o único que apresentou as definições de quadrados perfeitos e imperfeitos e trouxe um termo novo: raiz surda. Também é inusitado por relacionar a definição de quadrado perfeito e imperfeito diretamente ao conceito de raiz quadrada, o que nas outras obras não ocorreu, pois a relação direta foi a operação de multiplicação de fatores iguais.

Outro elemento conceitual ímpar na obra de Trajano (1930) é a enunciação de teoremas sobre alguns números quadrados perfeitos e imperfeitos. São eles:

> 1.º: Todo número terminado em 2, 3, 7, ou 8 não constituem quadrados perfeitos;

> 2.º: Todo número terminado por um número ímpar de cifras também não é quadrado perfeito;
> 3.º Todo número para que não for divisível por 4, não é quadrado perfeito;
> 4.º Todo número terminado em 5, e que, nas dezenas não tem algarismo 2, não é quadrado perfeito.

Após cada teorema, há um exemplo numérico como forma de provar a sua validade. Entretanto, não se trata de uma prova no sentido formal da palavra com seus três elementos básicos: hipótese, tese e demonstração. Sendo assim, tem mais características de regras que devem ser memorizadas pelos alunos do que um teorema.

Contudo, a proposta do livro tem marcas do formalismo clássico, pois focaliza a definição, os teoremas e os procedimentos algorítmicos a serem memorizados pelos alunos. A referência aos Teoremas e sua demonstração (mesmo que particular, traduzida em um exemplo numérico) são manifestações do modelo euclidiano, que de acordo com Fiorentini (1995), sistematiza a lógica do conhecimento matemático a partir de teoremas e corolários.

O procedimento algorítmico para a extração de raiz quadrada apresentada por Trajano (1930) é o mesmo descrito por Monção (1925); ou seja, dividir o número em classes de dois algarismos, e assim por diante. Porém, seu texto apresenta uma linguagem mais simples. Também aborda, da mesma maneira que Monção (1925), a extração de raiz quadrada de números quadrados perfeitos pelo processo de decomposição em fatores primos.

Outro destaque da obra de Trajano é significação geométrica da raiz quadrada, que poucos autores analisados exploraram didaticamente nos seus respectivos livros. Para tal, apresenta um diagrama, ou seja, a figura de um quadrado (figura 6, a seguir) pressupondo uma medida de 24 metros de lado, constituindo uma área de $576m^2$. Em seguida, sugere o raciocínio inverso, isto é, se a área de 576 metros, então a medida do lado do quadrado é obtido pela raiz quadrada deste número.

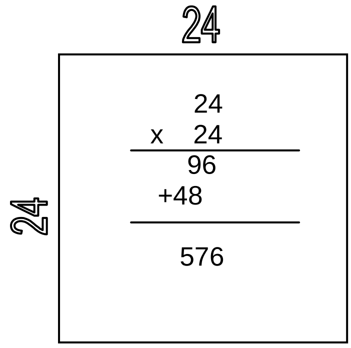



**Figura 7: (Adaptado de TRAJANO, 1930, p. 217)**

Na seqüência o autor coloca a demonstração geométrica expondo a decomposição desta figura em quatro superfícies: um quadrado de lado 20, dois retângulos de dimensões 20 por 4 e um quadrado de lado 4.

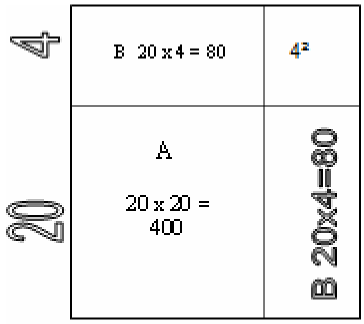



**Figura 8: (Adaptado de TRAJANO, 1930, p. 217)**

Neste momento Trajano (1930) descreve que a composição de um quadrado e a extração de sua raiz quadrada podem ser representadas geometricamente. Na Figura 8, temos a superfície *A* medindo 20 x 20 = 400 metros quadrados, representando o quadrado das dezenas. As superfícies *B* e *B*, medem cada uma 20 x 4 = 80 metros quadrados e, como são duas, temos 2( 20 x 4 ) = 160 metros quadrados, que representam duas vezes o produto das dezenas multiplicados pelas unidades. A superfície menor 4² mede 4 x 4 = 16 e representa o quadrado das unidades. Subtraindo do quadrado inteiro o quadrado das dezenas, que é a área A, restam as seguintes superfícies.

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 20 | 4 |

**Figura 9: (Adaptado de TRAJANO, 1930, p. 218)**

Para acharmos a área das duas superfícies B, basta multiplicarmos o seu comprimento (20 + 20 + 4 = 44), pela largura 4, ou seja: 44 x 4 = 176 metros quadrados, que é o valor da área que excede ao quadrado das dezenas, isto é, quanto 576 excede a 400.

Segundo o autor, nessa demonstração geométrica são evidenciadas as diversas partes ou elementos que constituem um quadrado e a relação que existe entre eles. Ou seja, está provado que: "O quadrado da soma de dois números é igual a soma do quadrado do primeiro número, mais duas vezes o produto do primeiro multiplicado pelo segundo, e mais o quadrado do segundo. Particularmente, $576 = 20^2 + 2. (20 . 4) + 4^2$.

Em síntese, Trajano (1930) abre o leque das significações do conceito de raiz quadrada a ser "aprendida pelos estudantes". Atribuiu significado e sentido aritmético e geométrico. É extremamente formalista clássico ao se preocupar com a exposição de definições, teoremas e algoritmo. Entretanto, esse aparato no próprio campo matemático se secundariza, pois se traduz em apenas elementos informativos para um bom desempenho na extração da raiz quadrada de um número. Portanto, são subsídios para uma melhor desenvoltura no manuseio algorítmico, em vez da apropriação das significações de modo que ocorra elaboração de um pensamento galgado na lógica caracterizadora do conceito.

De forma esquemática, a seqüência de ensino assim se apresenta: definição → exemplo → nomenclatura articulada com potenciação → nota histórica

$\rightarrow$ teorema com exemplo numérico $\rightarrow$ algoritmos exemplos $\rightarrow$ significado geométrico $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$ exercícios.

O sistema conceitual compõe-se, além da raiz quadrada, de anúncio de raiz cúbica e quarta, potenciação de expoente dois, multiplicação, área e medida do lado do quadrado, produtos notáveis.

Apesar de o autor não ter evidenciado as significações algébricas, mesmo assim elas aparecem implicitamente na relação entre as ideias aritméticas e geométricas. Também foi um dos poucos que utilizou o conceito de raiz quadrada para apresentar e justificar a regra do produto notável (quadrado da soma de dois números), além de fornecer alguns dados históricos. De acordo com Neves (2005) como base em Zamboni (1995), o livro de Trajano foi dedicado à mocidade brasileira, sendo um dos principais autores de livros didáticos que atingiram tantas gerações de crianças e jovens por um longo período.

Enfim, o livro de Trajano (1930) é um dos mais completos em termos de significações conceituais científicas. Sua aderência ao formalismo matemático prima especificamente pelo conceito científico, em detrimento a possíveis ideias de conceito cotidiano que os estudantes possam ter elaborados na informalidade. Como consequência, não há um diálogo, como proposto por Vigotski (1993), entre os dois tipos de conceitos – cotidianos e científicos – e nem a consideração ao movimento de ascendência e descendência entre ambos.

De acordo com Vygotski, esses conceitos se diferenciam no percurso e na dinâmica dos respectivos desenvolvimentos. Contudo, os dois processos se inter-relacionam, pois:

> o conceito cotidiano cria uma série de estruturas necessárias para que surjam as propriedades inferiores e elementares dos conceitos. Por sua vez, o conceito científico, depois de ter percorrido de cima para baixo certo fragmento de seu caminho, abre espaço para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos, preparando de antemão uma série de formações estruturais necessárias para dominar as propriedades superiores do conceito. (VYGOTSKI, 1993, p. 253).

Dessa forma, ao priorizar os conceitos científicos, o livro de Trajano deixa lacunas no processo de elaboração de conceitual e do próprio desenvolvimento intelectual dos estudantes. Além disso, essa preferência pode contribuir para que o aluno saiba utilizar o algoritmo e mesmo expressar a raiz quadrada dos números, porém não consiga utilizá-la para fazer leitura de situações de contexto histórico e do cotidiano.

O livro analisado da década de 1940 tem como autor José Theodoro de Souza Lobo, sendo 1949 o ano de publicação. Nesta obra, o conteúdo "Raízes Quadradas e Cúbicas" aparece pela primeira vez nas páginas finais do volume 1, após a abordagem de assuntos referentes à Matemática Financeira, como juros, obrigações e câmbio. É no capítulo XI que o autor anuncia Quadrado e raiz quadrada. Define o quadrado ou segunda potência de um número como sendo um produto de fatores iguais, ou seja, o produto desse número por si mesmo. Na seqüência, coloca que a raiz quadrada de um número é o valor que multiplicado por si mesmo ou elevado ao quadrado, reproduz o mesmo.

Parte para o exemplo de que 7 é a raiz quadrada de 49, pois 7 x 7 ou $7^2$ = 49. Segue com a indicação do sinal e das nomenclaturas. Diz que a extração de raízes é dada por meio de um sinal particular chamado radical. Faz a comparação de que as raízes bem como as potências têm graus indicados, respectivamente, pelos índices e expoentes.

"Índice de um radical é o numero que indica às vezes que a raiz entra como fator. Coloca-se na abertura deste sinal, assim, $\sqrt[2]{4};\sqrt[3]{9}$ , lê-se: raiz quadrada de 4 e raiz cúbica de 9". (LOBO, 1949, p. 295)

Além disso, o autor esclarece que não se costuma escrever o índice 2 para as raízes quadradas, e extração das raízes quadradas dos números inteiros requer o conhecimento dos nove primeiros números quadrados que são apresentados em seguida:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Raízes Quadradas: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quadrados: | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |

O autor faz a seguinte observação: Quando um valor inteiro não é quadrado, procura-se entre os quadrados, dois números consecutivos. Exemplifica com 58, que encontra-se entre o 49 e o 64, na seguinte posição: $49 < 58 < 64$. Logo sua raiz quadrada está entre o 7 e o 8, isto é, $7 < \sqrt{58} < 8$. O 7 por falta e o 8 por excesso.

O autor menciona que o quadrado de um número composto de dezenas e unidades consta de três partes: a primeira seria o quadrado das dezenas; a segunda compreenderia o dobro do produto das dezenas pelas unidades e a terceira seria o quadrado das unidades.

Assim, $36^2 = (30 + 6)^2 = 30^2 + 2(30 \times 6) + 6^2 = 900 + 360 + 36 = 1296$. Observa-se que Lobo tem preocupação com detalhes e as múltiplas significações aritméticas, inclusive com, o produto notável do quadrado da soma de dois termos, abordado geralmente, nas séries finais do ensino fundamental quando o foco são os conceitos da álgebra, mais especificamente expressões algébricas e polinômios.

Outra relação aritmética apresentada é a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos que é igual ao dobro do menor somado a 1. Exemplifica:

$27^2 = (26 + 1)^2 = 26^2 + 2\times 26 + 1^2$

$27^2 - 26^2 = 2 \times 26 + 1 = 729 – 676 = 53$.

O algoritmo para a extração da raiz quadrada no livro de Lobo (1949) é o mesmo da obra de Monção (1925), porém com algumas considerações. A primeira informa que, ao "baixar uma classe" o número formado (dividendo parcial) for menor que a raiz parcial (divisor), então o próximo algarismo que constituirá a raiz será zero. Para continuar, basta baixar a classe seguinte e seguir os passos do algoritmo.

A segunda informação indica: se o resto é zero, o número dado é quadrado. Caso contrário, a raiz encontrada representa aquela do maior quadrado contido no número dado, ou seja, é aproximada por falta.

A terceira consideração orienta que ao se extrair a raiz quadrada de um número, a menos de uma unidade fracionária estabelecida, basta multiplicá-lo pelo denominador da fração que indica a aproximação pedida. Na seqüência extrai-se a menos de uma unidade a raiz quadrada do produto e o resultado divide-se pelo denominador da fração dada. É dado o seguinte exemplo: Extrair a raiz quadrada de 41 a menos de $\frac{1}{5}$ por falta. $\sqrt{41} = \frac{\sqrt{41x5^2}}{5} = \frac{\sqrt{1025}}{5} = \frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5}$

A quarta consideração diz que, na extração da raiz quadrada a menos de $\frac{1}{2}$, conserva-se o último algarismo da raiz inteira, desde que o resto for menor do que a parte inteira ou a ela igual. Neste caso, a aproximação é a menos $\frac{1}{2}$ por falta. Mas se o resto for maior que a parte inteira, junta-se a esta unidade para obter a raiz quadrada aproximada a menos de $\frac{1}{2}$ por excesso.

Assim:

$\sqrt{268}$ é 16 a menos de $\frac{1}{2}$ por falta.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2.68}$ | 16 |
| 1 | 26 x 6 = 156 |
| 16.8 | |
| 15.6 | |
| 1 2 | Resto |

$\sqrt{1128}$ é 34 a menos de $\frac{1}{2}$ por excesso.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{1128}$ | 33 |
| 9 | 63 x 3 = 189 |
| 22.8 | |
| 18.9 | |
| 39 | |

Alguns exercícios semelhantes aos exemplos são propostos. O autor segue com a apresentação da raiz quadrada de números fracionários. De acordo com Lobo (1949), nas frações decimais, se o número de casas da dízima é par, basta calcular a raiz quadrada aproximada a menos de uma unidade. Para tal, abstrai-se a vírgula e adota-se o mesmo procedimento para um número inteiro. Ao término, coloca-se à direita do resultado, a metade das casas de dízima existentes na fração proposta.

Quando o número de casas for ímpar, torna-se primeiramente esta dízima par, com o acréscimo de um zero a sua direita e utiliza-se o mesmo procedimento descrito anteriormente.

Alguns exemplos são apresentados nas páginas 300 e 301:

1 - Calcular a $\sqrt{0{,}5987}$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{59.87}$ | 77 |
| 49 | 147 |
| 108.7 | |
| 102.9 | |
| ..5 8 | |

$\sqrt{0{,}5987}$ = 0, 77 a menos de um centésimo.

2 - Calcular a $\sqrt{0{,}57689}$ ou $\sqrt{0{,}576890}$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{0{,}576890}$ | 759 |
| 49 | 145 |
| 86.8 | 1509 |
| 72.5 | |
| 14.39.0 | |
| 13.58.1 | |
| 80.9 | |

$\sqrt{0{,}576890}$ = 0,759 a menos de um milésimo

Por fim, o autor aborda a extração de raízes quadradas de frações ordinárias. Apresenta três casos possíveis. O primeiro é quando ambos os termos da fração são quadrados perfeitos. Desta forma, basta extrair a raiz quadrada do numerador e denominador.

Exemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

No segundo caso, os termos da fração apresentam a seguinte característica: somente o denominador quadrado perfeito. Extrai-se a raiz quadrada a menos de uma unidade do numerador e raiz quadrada exata do denominador.

Exemplo: $\sqrt{\frac{29}{49}} = \frac{\sqrt{29}}{7} = \frac{5}{7}$ a menos de $\frac{1}{7}$ por falta.

O terceiro e último caso se refere aos dois termos não sendo quadrados, que devem ser multiplicados pelo denominador e seguir o raciocínio do algoritmo anterior.

Exemplo: $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7x11}{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{8}{11}$ a menos de $\frac{1}{11}$ por falta.

Observa-se que Lobo, mesmo se restringindo às significações aritméticas, é mais detalhista em relação ao primeiro livro analisado. Suas particularidades ou inovações são de ordem conceitual e dizem respeito:

1) à relação da composição de um número constituído de unidade e dezena com os produtos notáveis (quadrado da soma de dois números). Também, de procedimento de cálculo para determinar a diferença entre a raiz quadrada de dois números consecutivos. Entretanto, essas duas proposições conotam muito mais

ilustração do que uma significação do conceito, imprescindível ao desenvolvimento do pensamento conceitual, isto é, a aprendizagem matemática sobre a raiz quadrada. A afirmação do caráter elucidativo dessas duas relações pode ser respaldada pelos seus desaparecimentos na sequência de ensino, uma vez que o autor apresenta somente um exemplo e não propõe nenhum “exercício” para ser resolvido pelos alunos.

2) ao campo numérico, pois não se restringe somente aos números naturais, por tratar da extração das raízes de números fracionários e decimais. Além disso, enfoca a ideia de “aproximação” para esses números quando não são quadrados perfeitos.

Consequentemente, seu sistema conceitual é mais abrangente e se constitui de: raiz quadrada, potenciação (operação inversa), produtos notáveis, multiplicação, números naturais e fracionários.

Com toda a preocupação com pormenores, a proposta pedagógica de Lobo também tem como modelo: definição → exemplo →esclarecimentos → algoritmo →esclarecimentos → exemplo → exercício.

Entretanto, apresenta alguma ausência em relação ao conceito. Uma delas é a definição genérica da operação Radiciação e considera a raiz quadrada, um conceito separado. A segunda é o algoritmo da decomposição e fatores primos. Também, aspectos históricos não foram abordados.

Em todas as definições apresentadas e procedimentos para a extração das raízes quadradas em diferentes situações, enfatizou o algoritmo, o cálculo fundamentado em regras a serem memorizadas pelos alunos.

Seu texto matemático usa de uma linguagem bastante complexa, se considerarmos que se destinava a alunos do ensino ginasial, que deveriam exigir grandes intervenções do professor para que os estudantes a memorizassem.

O quarto livro analisado é de autoria de Galante e Santos (1952), segunda série ginasial. O primeiro capítulo trata do estudo das Potências. O capítulo II, inicialmente, apresenta algumas definições, que relacionam as operações inversas: potenciação e raiz quadrada. Os autores mostram que $5^2 = 25$ e, inversamente, a raiz quadrada de 25 é 5.

Imediatamente, apresentam a generalização, o que se constituem nos primeiros autores que aproximam aritmética e álgebra. Nesse sentido, expressam que: "a é a raiz enésima de b, e indicamos, como se vê, a = $\sqrt[n]{b}$ " (GALANTE & SANTOS, 1952, p. 28).Na seqüência, definem: "Raiz de um número dado é outro número que elevado a uma certa potência, é igual a este número." (GALANTE & SANTOS, 1952, p. 28)

Os autores reapresentam a generalização para destacar a nomenclatura de cada termo. Assim, em a = $\sqrt[n]{b}$ , *n* é denominado índice; $\sqrt{\phantom{x}}$ é chamado de radical; *b* o radicando ou quantidade subradical e *a* é a raiz. A operação por meio da qual se extrai a raiz é denominada de Radiciação. Fazem seguinte observação: "Quando o índice é 2, a raiz é dita quadrada e convencionou-se omitir o índice."

A partir daí, o capítulo foca exclusivamente a raiz quadrada, com a definição explanada anteriormente na p. 28, conforme mencionamos.

Exemplifica: 6 é a raiz quadrada de 36 porque $6^2 = 36$. A raiz quadrada exata é obtida pela extração da raiz de um número, quando elevado ao quadrado for igual aquele dado. Portanto, a definição se refere aos números quadrados perfeitos.

Há, pois, nessa parte inicial, uma semelhança na abordagem do conceito com os livros anteriormente analisados. Tem a definição, seguida de um exemplo e a relação entre as operações inversas potenciação e radiciação.

Na sequência, os autores tratam sobre: a definição de raiz quadrada aproximada; o resto da raiz quadrada de um número inteiro; o procedimento (algoritmo) para extração da raiz quadrada; o algoritmo da decomposição em fatores primos; a extração da raiz quadrada de frações ordinárias quando numerador e denominador são quadrados perfeitos, ou quando apenas um deles o é, raízes quadradas aproximadas a menos de uma unidade decimal e, por fim, a extração de raízes quadradas de números inteiros e decimais.

Nossos comentários e análise neste momento apontarão principalmente para aquilo que se diferencia dos outros livros analisados. Segundo os autores, quando um número não é quadrado perfeito, não possuirá raiz quadrada exata, logo, é aproximada. Estas aproximações podem ser por falta ou por excesso em relação à unidade.

A definição de resto da raiz quadrada de um número inteiro é apresentada como sendo a diferença entre o número e o maior quadrado inteiro que o contém. Exemplificam: o resto da raiz quadrada de 60 é 11, pois 60 – 49 = 11. Chamam a atenção de que o resto de uma raiz quadrada nunca pode ser maior que o seu dobro.

Após, apresentam uma tabela dos números quadrados perfeitos de 1 a 100. E, na seqüência, iniciam o desenvolvimento do algoritmo da extração de raízes quadradas de números superiores a 100, de forma minuciosa. O processo de decomposição em fatores primos também se repete como no primeiro livro analisado.

O novo que surge no livro de Galante & Santos é “Prova Real.” O procedimento para sua verificação é simplesmente definido, ou seja, é a síntese de todo o processo. De acordo com os autores “para tirar a prova real verificamos primeiramente se o resto não é maior do que o dobro da raiz, e em seguida, elevamos ao quadrado a raiz achada e somamos o resultado com o resto. Feito isso devemos encontrar o radicando”. (GALANTE & SANTOS, 1952, p. 29)

Ao abordarem a extração da raiz quadrada de frações ordinárias, eles expõem três possibilidades: O numerador e o denominador são quadrados perfeitos, somente o denominador é quadrado perfeito e o denominador não é quadrado perfeito.

O caso mais simples, segundo os autores, é o primeiro, pois basta extrair a raiz quadrada de cada termo da fração. No segundo caso, quando o denominador é quadrado perfeito, dizem que se extrai a raiz dele e se deixa o numerador no radical. Ou, ainda, dá-se o resultado da fração considerando a extração da raiz por falta ou por excesso. Desta forma teria-se que:

$$\sqrt{\frac{19}{81}} = \frac{\sqrt{19}}{9} = \frac{4}{9} \text{ (por falta)} = \frac{5}{9} \text{ (por excesso)}$$

No ultimo caso, multiplica-se ambos os termos da fração por um mesmo número, de forma que o produto dele pelo denominador seja um quadrado perfeito. O procedimento seguinte é o mesmo da resolução do caso anterior.

Exemplo: $\sqrt{\frac{7}{27}} = \sqrt{\frac{7x3}{27x3}}$ = $\frac{\sqrt{21}}{9} = \frac{4}{9}$ (por falta ) = $\frac{5}{9}$ ( por excesso)

Na seqüência, os autores discutem a extração de raízes quadradas aproximadas a menos de uma unidade decimal. Descrevem apenas as etapas que devem ser seguidas para tal cálculo, o que provavelmente visa à memorização por parte do aluno.

Transcrevemos suas indicações:

> 1.º Acrescentamos dois zeros a direita do radicando se a aproximação for de 0,1, quatro zeros se for de 0,01 seis zeros se for de 0,001 e assim por diante;
>
> 2.º Extraímos a raiz quadrada do número assim formado a menos de uma unidade;
>
> 3.º Separamos na raiz, com uma vírgula, tantos algarismos, a contar da direita para a esquerda, quantos forem os grupos de 2 zeros acrescentado aos radicando.(GALANTE & SANTOS, 1952, p. 38)

Propõem: Extrair a $\sqrt{3423}$ a menos do que 0,1.

Os procedimentos descritos anteriormente para a resolução são adotados, inclusive, numerando-os do mesmo modo:

I – Extrair a $\sqrt{3423}$ a menos de 0,1.

1.º) Acrescentamos 2 zeros ao radicando

$$\sqrt{342300}$$

2.º) Extraímos a raiz quadrada a menos de uma unidade

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{34.23.00} & 585 \\ \hline \underline{25} & \\ 923 & 108 \times 8 = 861 \\ \underline{864} & 1165 \times 5 = 5825 \\ 5900 & \\ \underline{5825} & \\ 75 & \end{array}$$

3.º) Separamos uma casa decimal na raiz

$$\sqrt{3423} = 58,5$$

**Figura 10: Adaptado de GALANTE & SANTOS, 1952, p.39.**

A última abordagem feita pelos autores é a de Raiz quadrada de um número Decimal. A lógica de apresentação não é diferente dos procedimentos anteriores que tratam do tema. Ou seja, descrevem apenas o que fazer para extração da raiz quadrada de números decimais. Segue o trecho do livro:

> Verificamos se o número de algarismos da parte decimal é par. Caso não seja, acrescenta-se-lhe um zero. Suprimimos a vírgula e extraímos a raiz quadrada do número inteiro assim obtido. Finalmente, colocamos uma vírgula na raiz, separando tantos algarismos, contando-os da direita para a esquerda, quantos são os grupos de 2 algarismos da parte decimal do radicando. (GALANTE & SANTOS, 1952, p. 38).

No fechamento do capítulo, o livro traz uma relação de exercícios numerados de 56 até 100 a serem resolvidos pelos alunos.

A maneira como o conceito de raiz quadrada foi apresentado tem o predomínio da reprodução da regra, como nas obras analisadas até o momento. A ênfase é para o procedimento aritmético em detrimento ao algébrico e ao geométrico. Ao aluno não é oferecido oportunidades para elaborar o entendimento e a compreensão acerca das significações produzidas pela humanidade ao longo do seu desenvolvimento. Não houve nenhuma abordagem histórica, apenas definições ou regras para serem adotadas e não contestadas.

Não pudemos visualizar até o momento de nossa análise vínculos mais fortes entre um conceito e outro como, por exemplo, compreende Vygotsky (1996) com sua ideia de que a aprendizagem se manifesta quando os alunos articulam os princípios dos conceitos que constituem o sistema. A inter-relação e transferência entre eles é um reflexo da transferência e vinculação dos fenômenos da realidade. Por conseqüência, cada conceito surge relacionado com todos os outros e uma vez formado determina um sistema com aqueles anteriormente conhecidos. Isto não ocorreu na abordagem adotada pelos autores dos livros referenciados das décadas de 1920 a 1950, pois a concepção de aprendizagem prioriza o desempenho na aplicação minuciosa dos algoritmos que conduz à raiz quadrada de um número.

Observa-se que os passos são indicados sem nenhuma referência às razões, princípios, definição e propriedades matemáticas que as fundamentam e as justificam. Portanto, não há uma preocupação com o desenvolvimento do pensamento conceitual, em vez disso, focam-se a linearidade de um sequência de etapas que parecem independentes conceitualmente da outra, porém devem ser seguidas piamente para chegar ao resultado correto. O máximo que fazem é dizer que toda operação possui uma inversa e, com a radiciação, isto não é diferente, exemplificada com apenas um valor numérico.

Com toda a preocupação com pormenores, a proposta pedagógica de Galante & Santos também tem como modelo: definição → exemplo → definição algébrica →nomenclatura → esclarecimentos → algoritmo →esclarecimentos → exemplo → exercício. As maiores diferenças se comparada com obras anteriormente comentadas são: por apresentar o conceito na segunda série ginasial e definir radiciação genericamente, isto é, com indícios algébricos.

A quinta obra analisada foi marcada pela prévia instigação por se tratar de uma publicação de um dos autores anteriormente analisado, Carlos Galante, e ser publicada uma década posterior, 1962. Nossas expectativas voltam-se para a identificação das mudanças e permanências na apresentação do conceito.

Entretanto, transcorrido o período dez anos, o autor trata o ensino da raiz quadrada, basicamente, com as mesmas definições e sequência de ensino. O conceito aparece pela primeira vez novamente no segundo capítulo, destinado exclusivamente ao estudo da raiz quadrada.

Indicaremos algumas mudanças realizadas, sendo uma delas referente ao resto da raiz quadrada introduzido pelo título: “Limite do Resto da Raiz quadrada”. Para explicá-lo, utiliza-se do exemplo de que o resto da raiz quadrada de 30 é 5. Acrescenta que é menor do que a diferença entre o quadrado da raiz de 30 por excesso e por falta, ou seja: $5< 6^2 – 5^2$, ou $5 < 36 – 25$. É, pois, menor que o resultado da subtração dos quadrados de dois números consecutivos. Reafirma que: “o resto da raiz quadrada de um numero é sempre menor que o dobro da raiz mais uma unidade”. (GALANTE, 1962, p. 23)

Outra modificação foi a posição dos tópicos dedicados à “Extração das raízes quadradas de frações ordinárias”, que neste livro apareceu em seguida do mesmo assunto referente aos números decimais”. Este abordado com enfoque algorítmico. No livro anterior, apareceu logo após a “Prova Real”.

Exercícios e exemplos são similares nas duas obras, pois só mudam os valores. A diferença em relação a todos os livros até agora analisados está na página conclusiva do capítulo, em que Galante faz breve referência histórica do surgimento dos métodos de extração da raiz quadrada.

O autor diz que as primeiras regras para a extração da raiz quadrada e cúbica foram adotadas pelo povo hindu. Acrescenta que Leonardo Fibonacci deu grandes contribuições na divulgação destes métodos após a publicação de seu livro Liber Abbaci. Outra menção histórica se refere ao sinal $\sqrt{\ }$, utilizado pelo alemão Cristóforo Rudolfo di Idnes, que representa a transformação da letra r - inicial da palavra raiz, do latim radix, a língua oficial dos trabalhos científicos.

A tímida tentativa de resgate histórico se caracteriza como ilustração, isto é, sem a pretensão de trazer à tona a evolução dos princípios, ideias e significações do conceito necessárias para que os alunos elaborem o pensamento da lógica conceitual. Apesar das pequenas mudanças evidenciadas nesta obra, as conclusões a respeito das significações e aos outros aspectos referentes ao conceito de radiciação observadas em comparação ao anterior, ficam inalteradas.

Analisamos ainda uma obra desta mesma década, mas de outra autoria. O livro é datado de 1967, intitulado “Ensino Moderno de Matemática” e organizado pelo Professor Osny Antonio Dacoln, juntamente com outros professores que compõem o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática - NEDEM.

O conceito de radiciação é tratado no Capitulo V: Operações com números naturais, números artificiais. O termo ‘números artificiais’ é utilizado para denominar os números diferentes dos naturais, como por exemplo, os negativos, irracionais. No entanto, nos surpreendeu, uma vez que durante nossa caminhada de estudantes ou profissional na docência de Matemática, nunca vimos referência a essa nomenclatura.

O livro apresenta o estudo das operações na seguinte ordem: adição, subtração, multiplicação, potenciação e divisão. Em seguida, discorre sobre expressões numéricas com essas cinco operações. Depois, é que aparece o conceito de raiz quadrada da seguinte maneira:

> Seja 9 o produto dos cardinais de dois conjuntos eqüipotentes. Achar o número de elementos de cada um dos conjuntos eqüipotentes:
>
> 
> 
>
> 9 = # A x # B
> $9 = 3 \times 3 = 3^2$
> O número de elementos de cada conjunto é 3 porque $3^2 = 9$. O cardinal dos conjuntos eqüipotentes que é 3, é chamado de raiz quadrada do produto que é 9. (NEDEM, 1967, P. 192).

O grupo NEDEM introduz a temática recorrendo a um dos conceitos básicos do Movimento da Matemática Moderna que é a teoria dos conjuntos. Observa-se, na citação anterior, que a raiz quadrada faz parte de um sistema conceitual em que são incluídos: conjunto, equipotência, cardinalidade, multiplicação e potenciação.

Nessa apresentação inicial, está implícito que a definição dada é restrita aos números naturais, uma vez que a raiz quadrada significa a cardinalidade de dois conjuntos equipontentes, ou seja, que tenham o mesmo número de elementos. Mesmo com essa restrição, é laudável tal referência dos autores por apresentar uma nova significação ao conceito de raiz quadrada, qual seja: cardinalidade. Também mostra que o grupo está atento e preocupa-se em difundir os preceitos do movimento internacional de modernização tanto da estruturação do conhecimento quanto do ensino da Matemática. Insere-se, portanto, numa tendência pedagógica que emergia nos meios educacionais brasileiros, a partir dos anos 1960, que Fiorentini (1995) denomina de Formalista Moderna.

Na seqüência, apresenta as nomenclaturas: radical, radicando e raiz. Como nos outros livros analisados, existe a ideia de operações inversas e traz a clássica definição da raiz quadrada de um número como sendo “outro número que elevado ao quadrado reproduz o número dado”.

Em seguida, com o mesmo raciocínio, define raiz cúbica e quarta. Mas imediatamente, volta ao cálculo de raiz quadrada não exata com o exemplo: Calcular a $\sqrt{12}$. Para tanto, recorre novamente à multiplicação entre conjuntos, ao evidenciar que: se o conjunto tiver 3 elementos, a multiplicação de seus cardinais dará 9 e se possuir 4 elementos, o produto será 16; logo o resultado é $\sqrt{12}$, cuja raiz é um número entre 3 e 4.

A ideia de conjunto, própria da Matemática Moderna, volta a ser explicitada, articulada com a propriedade de fechamento, na seguinte explicação: “A radiciação não goza da propriedade do fechamento no conjunto N, porque não existe um número natural que elevado ao quadrado seja igual a 12”. (NEDEM, 1967, p. 196)

Logo, segundo os autores do livro, devemos recorrer aos números artificiais, denominados agora, como irracionais. A explicação dada é que $\sqrt{12}$ é um número irracional, assim como e toda a raiz não exata de um número natural. Acrescentam que os racionais e os irracionais, formam o novo conjunto: Reais (R).

O procedimento para achar o resultado da $\sqrt{12}$ não é diferente dos demais livros analisados: seria 3 (por falta) ou 4 (por excesso).

Sobre os exercícios propostos, são similares aqueles adotados nos exemplos, no momento da apresentação do conceito. Também são semelhantes aos valores aos propostos nos demais livros. Como enunciado tem-se: “Calcular os valores das raízes quadradas”, “Calcular o valor aproximado por falta ou por excesso”, entre outros.

Os autores discutem, com apenas um exemplo, a propriedade - que denominam de distributiva - da multiplicação da raiz quadrada. Assim, 36 é o produto dos quadrados 9 e 4. Aplicando a referida propriedade temos: $\sqrt{36}=\sqrt{9\times 4}=\sqrt{9}\times\sqrt{4}=3\times 2=6$. E acrescentam a seguinte regra: “Para calcular a raiz quadrada usando a propriedade distributiva, deve-se escrever o radicando como um produto de quadrados e multiplicar separadamente as raízes quadradas destes quadrados.” (NEDEM, 1967, p. 197)

Por fim, surge a iniciativa de introdução da geometria relacionada ao conceito de radiciação. Isso ocorre rapidamente, em cinco linhas, ao fazer o seguinte anúncio: a raiz quadrada é usada principalmente para calcularmos o lado de um quadrado, quando conhecemos sua área; assim, um quadrado de área 81 m², seu lado mede 9 m.

A proposta do NEDEM (1967) se difere das demais tanto na sequência de ensino como conceitualmente. Seu sistema conceitual se amplia na primeira definição (com base na teoria dos conjuntos) e é acrescido no desenvolvimento do texto. Com isso, podemos caracterizá-lo como composto por: radiciação, multiplicação, potenciação, conjuntos eqüipotentes e numéricos (natural, racional, irracional e real), propriedades de fechamento e distributiva, medida da área e do lado do quadrado.

A sequência de ensino apresenta: definição com base na teoria do conjunto e aritmética $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$ nomenclatura $\rightarrow$ esclarecimentos $\rightarrow$ propriedade distributiva $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$ significado geométrico $\rightarrow$ exemplo $\rightarrow$exercício.

Suas inovações dão margem para ampliar o universo de significações, porém são tratadas rapidamente em um único exemplo, o que pode se traduzir numa preocupação de apenas memorização de informações para os alunos.

O livro de Sangiorgi (1972) “Matemática” é esteticamente colorido, apresenta ilustrações como forma de dirigir a atenção dos alunos. Porém, as figuras não têm relações lógicas do conceito. A operação de radiciação aparece após a potenciação, com o título que se traduz numa definição: “Operação Inversa da potenciação: radiciação; Resultado: raiz” (SANGIORGI, 1972, p. 56)

O texto inicia com a informação aos alunos de que vão aprender uma operação nova, utilizada em séries anteriores ao desfazer a 2.ª potência de um número, porém agora, aprenderão a técnica de cálculo. A rotina se confirma com um exemplo: Sejam 4 e 2. Considerando o primeiro como base e o segundo como expoente temos que $4^2 = 16$, graças à operação de potenciação que “manda” multiplicar o 4 pelo 4. Lança a seguinte pergunta: Mas qual será a operação inversa da potenciação? Ele mesmo responde: deve ser aquela que permite encontrar a base 4 quando o expoente é 2. (SANGIORGI, 1972)

É exposto um exemplo, denominado de “popular”, ao supor que é de conhecimento do aluno que a área de um quadrado é obtida pelo produto da medida de seu lado. Assim, se o lado medir 4m, a sua área será de 16m². Faz o seguinte questionamento: Se conhecemos a área, como encontraríamos o lado?

Ao fazer esta relação, instiga o aluno para identificar o número 4, pois 4 x 4 = 16. Conclui que a raiz quadrada de 16 é o valor da medida do lado do quadrado. Acrescenta: Esta operação é denominada de radiciação. Após, o autor apresenta os termos: radical, radicando, índice e a linguagem matemática: como se leem determinadas raízes.

Sangiorgi traz evidências de preocupações com determinadas características da aprendizagem ao fazer a seguinte observação relacionada aos equívocos conceituais: é comum confundir a operação de extração da raiz quadrada com a divisão por 2. Para tal, apresenta uma situação particular: se dividimos 16 por 2, encontramos 8, e um quadrado de lado 8 possui uma área de 64 que é muito longe de 16.

Ao abordar a técnica de cálculo para extração de raiz quadrada, alerta que as dificuldades aumentam conforme o grau da potência. Informa que em capítulo posterior será estudado um processo geral e simples para determinar a raiz de um número com base na fatoração. Conclui a abordagem do conceito com a alerta de que a operação de radiciação não possui a propriedade comutativa, pois $\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3}$ .

O autor dedicou apenas uma página e meia de seu livro para abordar este conceito. O tratamento didático dado à raiz quadrada em sua apresentação é sucinto. Mesmo assim, a síntese que podemos fazer da proposta é: informação da aprendizagem de uma nova operação inversa da potenciação de expoente dois $\rightarrow$

definição $\rightarrow$ questionamentos articuladores da relação potenciação/raiz quadrada $\rightarrow$ relação geométrica área/lado de um quadrado $\rightarrow$ alerta de equívocos conceituais $\rightarrow$ indicação técnica para o cálculo da raiz de um número pela sua decomposição em fatores primos $\rightarrow$ atenção da inexistência da propriedade comutativa.

Apesar de ter feito relação ao cálculo de área do quadrado, a aritmética continua sendo priorizada. Em comparação às análises anteriores, as permanências com relação ao conceito se deram ao indicar que: a potenciação e radiciação são operações inversas e menção à relação entre medida da área e medida do lado do quadrado e a similaridades entre exemplos e exercícios. Entretanto, observa-se que os procedimentos algorítmicos para extração da raiz quadrada desaparecem, a não ser a indicação que futuramente será apresentado o processo de decomposição e fatores primos.

Os próximos livros didáticos a serem analisados - décadas de 1980 e1990 – abrangem um número maior de exemplares, em função de maior disponibilidade e acesso aos mesmos. Contudo, não perdemos de vista as categorias de análise e os subsídios para alcançar o objetivo a que nos propomos. Por isso, o foco foi para exemplares que trouxessem diferenças, ou seja: diferentes proposições pedagógicas e significações conceituais.

Sardella e Matta (1981) apresentam a operação de Radiciação logo após o estudo da Potenciação. Da mesma forma que os autores das obras anteriores, recorrem novamente ao pensamento inverso da potência. Introduzem o conceito com a seguinte pergunta: “Qual é o número natural que elevado ao quadrado dá 9? A resposta é imediata: 3. Mas como chegamos a este resultado?” (SARDELLA E MATTA, 1981, p. 76). A resposta, dos próprios autores, é definição ao afirmar que a radiciação é a operação inversa da potenciação e recorrem ao exemplo: "$\sqrt{9} = 3$ porque 3² = 9, ou então $\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow$ 3² = 9". (SARDELLA E MATTA, 1981, p. 76). Na seqüência, propõem alguns exercícios de memorização do tipo: como se lê e complete.

É importante uma atenção para a convenção destacada neste livro, que também foi mencionada por alguns autores como Miguel (1993): $\sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow$ 3² = 9. Quando os autores usam o sinal de equivalência lógica $(\Leftrightarrow)$, afirmam que $\sqrt{9} = 3$, se e somente se, 3² = 9, porém a colocação provoca controvérsias, uma vez que (-3)² = 9 e, portanto, $\sqrt{9} = \pm 3$.

Apesar da edição deste livro ser posterior as décadas de 1960 e 1970 em que a matemática moderna teve seu auge de manifestações na escola brasileira, o livro de Sardella e Matta ainda traz noções conceituais e nomenclaturas relacionadas à teoria dos conjuntos. Assim, ao explicitar a definição Raiz Quadrada de um número natural como sendo "um outro numero natural que elevado a potência 2, reproduz o primeiro", acrescenta: "Ao par de números (9,2) a radiciação faz corresponder o número 3, pois 3² = 9". SARDELLA & MATTA, 1981, p. 77).

De forma semelhante, Name, Goretti e Cilli, autores do livro "Matemática Funcional" datado de 1984, trataram o conceito rapidamente, utilizando setas e desenhos sem muitas explicações. Em quadros coloridos, colocaram que a radiciação é a operação inversa da potenciação, então:

3 elevado ao quadrado dá 9 $\longrightarrow$ 3² = 9, então podemos escrever que $\sqrt[2]{9} = 3$.

Dispõem em uma figura a seguinte frase: "A potenciação faz e a radiciação desfaz". Após, apresentam outros esquemas coloridos que descrevem a nomenclatura de índice, radical, radicando. Na seqüência, fazem uma observação com a afirmação de que na raiz quadrada costuma-se não se escrever o índice 2.

Exercícios em forma de esquemas são apresentados, com flechas para ligar aos resultados, completar, e no final do capítulo mostram os números quadrados perfeitos como sendo os números que possuem a raiz quadrada exata.

De acordo com Damazio (2006) um dos livros mais adotado, durante anos 1980 na região educacional de Criciúma, por muitos professores de Matemática e bastante conhecido nos meios escolares é titulado de Matemática e tem como autor Álvaro Andrini. Sua edição de 1984 é caracterizada por listas enormes de exercícios repetitivos, o que pode se tornar algo mecânico e cansativo no processo de aprendizagem matemática dos alunos.

O conceito de radiciação é abordado em sequência à potenciação, assim como os livros analisados, desta década, até o momento. Inicia com uma pergunta, semelhante àquela proposta por Sardella e Matta (1981). Sua definição também relaciona como operação inversa da potenciação. Imediatamente, trata a nomenclatura dos termos, a forma de leitura das raízes, sem tratar de nenhum procedimento algoritmo. E fica por isso, pois segue uma lista de seis páginas de exercícios.

Analisamos um livro didático de mesma autoria, Sardella & Matta, datado de 1989, para estabelecer comparação com a edição de 1981, porém, não ocorreu nenhuma nova proposição, como também eliminações. Nas duas edições, o conceito de raiz quadrada tem um tratamento didático idêntico.

O livro Curso de Matemática (MARCONDES, 1985) se difere dos demais apenas na definição de forma generaliazada: “Um número r é a raiz quadrada exata de um outro número A quando o quadrado de r é igual a A. Ou seja, $r^2 = A$”

(MARCONDES, 1985, p. 47). Ademais, seu ritual pedagógico é o mesmo de Sardella e Matta; Name, Goretti e Cilli; e Andrini.

Uma comparação entre as obras consideradas desta década e as anteriores, foi possível perceber que não ocorreu nenhum salto qualitativo no que se refere à abordagem do conceito de radiciação. Na realidade, observamos que a ênfase dada ao conceito foi menor, as explicações são apenas aritméticas, com exceção de Marcondes (1985), causando uma impressão de que não é dada a merecida importância ao referido conteúdo curricular. A sequência de ensino basicamente segue a rotina: definição $\rightarrow$exemplo $\rightarrow$exercícios.

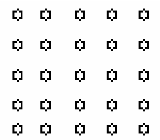
O esvaziamento de significações conceituais e uniformização da sequência de ensino instigam interrogações, uma vez que nessa década efervescia o debate pedagógico nos meios acadêmicos, científicos e escolares brasileiros. As pedagogias liberais conservadoras (LIBÂNEO, 2005 E MIZUKAMI, 1986) são questionadas por atender interesses das classes sociais minoritárias dominantes, em detrimento das possibilidades de melhores condições de vida da maioria da população menos favorecida. Em contraposição se apresentam as pedagogias progressistas defendendo igualdades de oportunidades de acesso aos bens culturais e econômicos a todos indistintamente.

Assim, nossa expectativa era de que os livros didáticos trouxessem manifestações dessas novas tendências. Contrariamente, eles aos poucos vão excluindo a matemática moderna e retornam à proposta formalista clássica ainda de forma bastante simplificada. Todavia, têm algo comum entre si: atendem, implícita ou explicitamente, o pressuposto teórico de Caraça (2003) ao afirmar que todas as operações matemáticas possuem suas inversas e, considera, a radiciação inversa da potenciação.

Os livros da década de 1990 têm maior disponibilidade por ser mais recentes. Por isso, analisamos oito obras publicadas no referido período, sendo algumas delas de mesma autoria, porém de anos diferentes como forma de identificar presenças e ausências em relação a anterior.

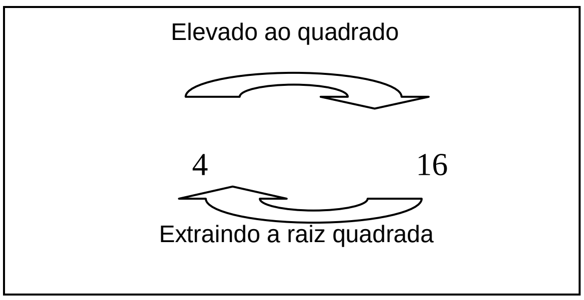
O livro Matemática na Medida Certa, Jakubovic e Lellis (1990), desenvolve o conceito de raiz quadrada como conteúdo independente da radiciação. Inicialmente, explica o conceito aritmeticamente partindo da potenciação. Isto significa dizer que, da mesma forma que os autores das décadas anteriores, traz a idéia de operação inversa.

Na relação com a potenciação, faz a representação aritmética e geométrica, porém, apenas como ilustração, sem evidenciar a raiz quadrada, conforme figura a seguir:

$5^2$  → $\sqrt{25}$ = 5 (não escrevem o número 5 como o lado da figura)

Posteriormente, aparece a definição: “A raiz quadrada de um número natural é um segundo número natural, que, elevado ao quadrado, resulta no primeiro. O símbolo da raiz quadrada é este $\sqrt{\ }$.”

Vale destacar que os autores mencionam a operação inversa, descrevendo-a e, em seguida, sugerem o caminho de ida e volta. No entanto, não mencionam que aplicam a prova real, como foi observado nas primeiras obras analisadas. Exemplo:



Assim, continua com os mesmos princípios didáticos e conceituais adotados pelos livros da década anterior. Opção até compreensível pela proximidade temporal. E, como tal, sua ênfase é a definição, por consequência os autores não apontam etapas do desenvolvimento histórico do conceito, atreladas as suas significações. Tampouco, são estabelecidas relações aritméticas, algébricas e geométricas. A prioridade é o campo numérico dos naturais evidenciado, por exemplo, ao comparar a seqüência destes números com o respectivo quadrado.

**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9...**

**0 1 4 9 16 25 36 49 64 81...**

Há referência, com apenas de um exemplo, sobre os números sem raiz quadrada no referido conjunto: “Há números naturais como 2 e 3 que não aparecem nessa segunda lista: esses não possuem raiz quadrada em N. Por exemplo, em N, não existe $\sqrt{10}$. Ou seja, não existe número natural que, elevado ao quadrado, dá 10.” (JAKUBOVIC & LELLIS, 1990, p. 71).

Os autores fazem uma espécie de comunicação aos leitores que naquele volume, a raiz quadrada não será estendida ao conjunto dos números racionais, que será estudado nas séries posteriores. E fica por isso, com a proposição de exercícios, sem indicação de procedimentos algoritmos para a extração da raiz.

Em 1998, Jakubovic e Lellis lançaram nova edição do seu livro “Matemática na Medida Certa”. Em comparação com a obra de 1990, a raiz quadrada recebe um tratamento didático um tanto resumido. Um dos aspectos não abordados foi o tratamento aritmético e geométrico do conceito. Em contrapartida, a definição dada utiliza uma linguagem algébrica, qual seja: “A raiz quadrada de um numero natural N é um número que, elevado ao quadrado, resulta em N. Indica-se a raiz quadrada de N assim: $\sqrt{N}$.” (JAKUBOVIC & LELLIS, 1998, p. 45).

Giovanni e Giovanni Jr. autores consagrados de livros didáticos da década de 90 e também dos anos subseqüentes. Segundo Damazio (2006) eles representam na região e, por extensão, no cenário nacional, uma das principais referências adotadas durante anos 1990, por escolas municipais, estaduais e particulares. Por isso, seus livros constituem objeto de nossa análise, em três exemplares, respectivamente, as edições datadas de 1990, 1992 e 1998.

O primeiro livro, “Aprendizagem e Educação Matemática” (1990), apresenta uma diferença, se comparado com aqueles já analisados, no que diz respeito à ordem sequencial dos conteúdos de ensino ou capítulos. Nesta obra, ao conceito de potenciação, segue as expressões numéricas e não faz menção ao conceito de raiz quadrada.

Assim, na concepção de “aprendizagem e educação matemática” dos autores (pai e filho), o conceito de radiciação não tem significação e sentido algum para o processo de formação do pensamento matemático do aluno. Portanto, não se insere em nenhum sistema conceitual de Vygotski (1996), fundamental no processo de desenvolvimento do pensamento em conceito. Da mesma forma, não compõe-se como elemento do pensamento reversível em relação à potenciação como a caracteriza Caraça (2003).

O livro lançado em 1992, “A Conquista da Matemática”, além de Giovanni, e Giovanni, também conta com a autoria de Castrucci. Nessa obra, os autores aderem à forma de apresentação dos livros que referenciamos, pois a raiz quadrada de números naturais é antecedida pelo estudo da potenciação. Também iniciam com a convencional pergunta dos livros dos anos 1980: Qual é o número que elevado ao quadrado dá 25? A resposta é dada imediatamente, que se verifica pela potenciação, pois 5 elevado ao quadrado tem como potência 25.

Nessa obra, diferentemente do que ocorreu na anterior, apontam a radiciação como uma nova operação; no caso particular, de vinte e cinco, indicada por $\sqrt{25} = 5$, em que lê-se "raiz quadrada de 25 é igual a cinco". Adotam o sinal de equivalência para estabelecer a relação entre as proposições: $\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$. Informam: "Para se determinar a raiz quadrada de um número natural, basta achar um segundo número natural que elevado ao quadrado seja igual ao número dado". (GIOVANNI, CASTRUCCI E GIOVANI JR, 1992, p. 79)

Finalizam as questões conceituais com os termos iniciais da sequência dos números quadrados perfeitos – 1, 4, 9, 16, ... - com o acréscimo de que somente eles possuem raiz quadrada exata. Adotam o 7 para exemplificar a existência de números que não se constituem quadrados. A lista de exercícios se assemelha aos exemplos dados.

Na obra de 1998, denominada de "A Conquista da Matemática Nova", a palavra "Nova" inspira possibilidade de encontrarmos um estudo com diferentes significações num contexto de uma sequência de ensino distinta. Essa possibilidade, porém, se frustra ao ser observado que nenhuma alteração ocorreu na forma de expor o conteúdo. Ele veio inserido no mesmo lugar que no livro anterior, com as ideias e exemplos idênticos. Apenas reduziu o número de exercícios, que de 6, passou para 4. Um deles, o aluno precisava identificar o número que elevado ao quadrado era igual a 81, e o que esse valor representava. O outro exercício excluído tinha o mesmo entendimento.

A esperança de livros didáticos com propostas que colocassem os alunos em constante processo de elaboração conceitual estimulava a busca de outros autores. Por isso, o retorno ao ano de 1990, no livro Matemática e Vida de autoria de Bongiovanni, Vissoto e Laureano. Nesta obra, o próprio título do capítulo da temática em estudo, posterior à potenciação, define a operação de radiciação, como no livro de Sangiorgi (1972): “Radiciação, uma operação inversa da potenciação”. O tratamento dado a esta operação se aproxima da proposta de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. A diferença está no final do capítulo, após os exercícios, onde é exposto um breve histórico, intitulada como “curiosidades”. É dito que o símbolo $\sqrt{\ }$ apareceu pela primeira vez em um livro denominado Algebra die cors, de autoria do matemático alemão Christoff Rudoff. Levantam a hipótese de tenha surgido a partir da letra r.  A princípio, sem muita aceitação, mas no século XVII passou a ser muito usado. Chega ao modelo usado atualmente, em 1637, por René Descartes no seu livro Geometre.

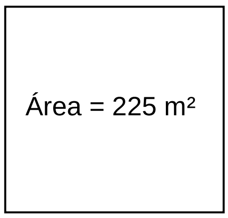
Bianchini lança o livro “Matemática”, em 1995. A maneira como apresenta o conceito de radiciação não é diferente dos autores desta década. Traz também a ideia de operação inversa da potenciação, a nomenclatura, a definição dos números quadrados perfeitos. Porém, os exercícios propostos são mais diversificados. Alguns, compostos de sentenças com equivalências para que o aluno complete e faça a relação direta de raiz quadrada ou cúbica às potências 2 e 3; outros para fixação da nomenclatura. De inaugural, é uma proposição de completar uma tábua com teor algébrico para diferenciar o quadrado do número, o dobro e a raiz quadrada, conforme disposto a seguir.

| A | $a^2$ | 2.a | $\sqrt{a}$ |
|---|---|---|---|
| 16 | | | |
| 25 | | | |
| 36 | | | |
| 100 | | | |

Desse modo, Bianchini traz indícios do pensamento algébrico numa concepção generalizadora da aritmética. Observa-se que tal feito ocorre no rol de exercícios sem nenhuma menção no momento da explicitação das significações conceituais e nas definições. Subjacente à proposição está a mesma preocupação de Sangiorgi de possíveis equívocos conceituais, por parte dos estudantes, dar o mesmo sentido ao dobro de um número com seu quadrado e, por extensão, a sua metade com a raiz quadrada.

Onaga e Mori (1996) abordam a operação radiciação logo após a apresentação da potenciação. Intitulam o capítulo de “RADICIAÇÃO”, mas apresentam diretamente a raiz quadrada, o que sugere que apenas ela compõe a operação. É o primeiro livro que parte de uma situação de análise e significação geométrica: “Paulo tem um terreno quadrado onde deseja construir sua casa. O terreno tem 225 metros quadrados de área. Quanto mede o lado do terreno que ele tem”? (ONAGA, MORI, 1996, p. 87)

Com base na figura, a seguir, explicam:




“Como o terreno é quadrado, ao multiplicarmos um lado pelo outro, encontramos sua área. Assim: Área = lado x lado, ou seja $l^2$, temos que $l^2 = 225$. Basta pensarmos qual é o número que elevado ao quadrado dá 225, que é o 15. Logo, o terreno de Paulo tem 15 metros de lado. A operação que efetuamos é a radiciação”. (ONAGA E MORI, 1996).

Observa-se que na apresentação do conceito, as autoras trazem mutuamente idéias geométricas e de operação inversa, em sua especificidade a raiz quadrada e potenciação de expoente dois. Apesar de iniciarem com uma abordagem diferentemente dos outros autores, na sequência, enfatizam a memorização do cálculo da área do quadrado e de seu lado.

O último livro analisado foi Matemática (IMENES E LELLIS, 1998), que recebeu uma das melhores avaliações da comissão designada pelo Ministério da Educação para este fim. Por isso, foi visada com emissão de opiniões divergentes. Uma que a aponta como um marco de mudanças por apresentar uma maneira diferente de tratamento aos conteúdos. Outra considera a forma como os autores abordam o desenvolvimento dos conceitos, que não contempla as capacidades de aprendizagem dos alunos, pois um mesmo conceito é explorado em diferentes partes do livro (RUGGIERO; BASSO, 2003).

Diferente de todos os livros analisados entre as décadas de 1950 a 1990, Imenes e Lellis (1998) abordam o conceito de raiz quadrada na 7.ª série do ensino fundamental, ou 8.º ano, enquanto os demais autores dedicavam a primeira apresentação deste conceito em livros de 5.ª série, ou 6.º ano.

O conceito também é inserido logo após a abordagem do estudo da potenciação, com o título: Raízes. Iniciam com o seguinte problema: “Qual é a área de um quadrado cujo lado é 7?” Abaixo desta indagação, duas figuras: um quadrado de lado l e área $l^2$, e um balão com a expressão $7^2 = 49$. Estas afirmações supõem a resposta dos alunos para o referido problema. Visto que nos livros anteriores de 5.ª e 6.ª séries, foram explorados os conceitos de área e perímetro das figuras geométricas, concordamos com os autores, ao pressupor a resposta dos alunos para o problema proposto.

Suas preocupações recaem na inter-relação entre potenciação de expoente dois e a raiz quadrada, isto é, operação inversa, pois na seqüência, como explicita a indagação que surge em seguida: “Qual é o lado do quadrado que tem área igual a 81?” E sugerem: “Temos que encontrar o número que elevado ao quadrado dá 81, ou seja, 9.”

Instigam o pensamento reversível, pois esclarecem que “o segundo problema é o inverso do primeiro: conhecendo a área do quadrado calcula-se o lado dele. Dizemos, na Matemática, que se calculou uma raiz quadrada”. (IMENES E LELLIS, 1998, p. 99). Adotam o exemplo para indicar a notação e sua leitura:

$\sqrt[2]{81} = 9 \longrightarrow$ A raiz quadrada de 81 é igual a 9.

Uma nova hipótese é considerada: - 9 ao quadrado também resulta em 81, ou seja, $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$. Posteriormente, dizem que as operações matemáticas sempre têm um resultado único e, como tal, convencionou-se que a raiz quadrada de 81 é o número positivo 9. Discordamos dessa afirmação por entendermos que ela pode ser aceita no campo dos naturais. Mas, é levantada a possibilidade de um número e seu oposto, ao serem elevado ao quadrado, determinam a mesma potência, não vemos razão de ser de que somente o valor positivo se constitui a raiz quadrada. Contudo, a convenção adotada tem respaldo teórico em Antunes (1978), quando se refere à condição de existência da raiz no campo Real e define: se o índice do radical for par e o radicando positivo, existem duas raízes reais simétricas, indicadas por +b e –b. Entretanto, ao dizer que não havendo a necessidade de especificar ambos os valores, é considerado apenas número positivo, denominado de “raiz aritmética”.

A abordagem dada por Imenes e Lellis se traduz em diferença em relação aos demais livros analisados, mesmo aqueles que desenvolveram o conceito pela primeira vez em séries diferentes que não fosse a 5ª do ensino fundamental ou a denominação anterior de primeira série ginasial. Essa possibilidade ocorreu, uma vez que o estudo dos números inteiros relativos ocorreu no decorrer desse volume, como na série anterior.

Da mesma forma, discutem a raiz cúbica, pois fazem relações com o volume, que também fora tema de estudo nos livros de séries anteriores. Prosseguem com as nomenclaturas de índice, radical e radicando. Exemplificam algumas raízes quadradas de frações e partem para casos que consideram mais difíceis para encontrar-se o resultado de uma raiz.

Apresentam duas extrações, uma dela é $\sqrt{40}$. Para resolvê-la recorrem a três multiplicações:

$$
\begin{array}{rrr}
6{,}2 & 6{,}3 & 6{,}4 \\
\times\ 6{,}2 & \times\ 6{,}3 & \times\ 6{,}4 \\
\hline
+\ \ 124 & +\ \ 189 & +\ \ 256 \\
372 & 378 & 384 \\
\hline
38{,}44 & 39{,}69 & 40{,}96
\end{array}
$$

Simulam a fala de um aluno: “Fiz todas as contas. Raiz quadrada de 40 é aproximadamente 6,3”. (IMENES E LELLIS, 1998, p. 100). Pelo exemplo anterior, os autores adotam o método da tentativa para encontrar o resultado mais próximo de uma raiz quadrada não exata.

Com o raciocínio de que a raiz é a busca de um número que fora multiplicado por si mesmo, Imenes e Lellis discutem a inexistência da raiz quadrada de um número negativo. Nesse sentido, toma como referência um número particular: $\sqrt{-9}$. Descrevem as tentativas: $(-3)^2 = 9$, assim como $(3)^2 = 9$. Concluem como sendo uma resolução impossível, o que se torna uma generalização, que entendemos como precipitada, pois tem por base apenas um valor.

A impossibilidade da resolução da raiz quadrada de um número negativo uma significação conceitual também trazida por Antunes (1978) em sua afirmação: quando o radicando for negativo, não existirá nenhum número possível, que elevado ao expoente par, resulte em a < 0.

Os exercícios propostos por Imenes e Lellis (1998) são diversificados. Sugerem problemas que requerem a compreensão do conceito de raiz, sejam elas quadradas, cúbicas, quartas, etc. Eles não são soltos e há uma articulação entre um e outro. Alguns deles estendem-se ao pensamento algébrico e relacionam a geometria e a aritmética, como no exercício de n.º 54, na página 102.

> Responda:
> a) Qual é o volume de um cubo cuja aresta mede 20 cm?
> b) Qual é o nome da operação que permite calcular esse volume?
> c) Quanto mede a aresta de um cubo cujo volume é 1000 $cm^3$?
> d) Qual é o nome da operação que permite calcular a medida desta aresta? (IMENES E LELLIS, 1998, p.102)

É possível observar que o desenvolvimento da proposição anterior requer do aluno um domínio de outros conteúdos escolares que foram referência de estudo em séries anteriores. Cita-se, por exemplo, o conceito de volume do cubo que pressupõem o conhecimento da figura e suas três dimensões delineadas por arestas (campo geométrico). A generalização que se traduz na fórmula de resolução, $V = a^3 = a \times a \times a$, que constitui a operação de potenciação é uma manifestação do pensamento algébrico. Assim também, a operação inversa para calcular a aresta do cubo, ou seja, a radiciação: $\sqrt[n]{a^n} = a$. Os resultados, ou melhor, os procedimentos de cálculo para determinar a raiz representam um transitar no campo aritmético.

É a partir daí que trazem alguns procedimentos para extração de raízes quadradas. Em um deles é proposto o uso da calculadora, como um recurso para encontrar o resultado de maneira rápida. Colocam a figura da calculadora e os botões a serem teclados. Outro é a decomposição do número em fatores primos, como visto em outras obras, com a ressalva que os autores detalham, apoiados em propriedades de radicais, a simplificação dos fatores primos.

Expõem dois exemplos, em um deles a raiz é exata: $\sqrt[3]{216}$.

| | |
|---|---|
| 216 | 2 |
| 108 | 2 |
| 54 | 2 |
| 27 | 3 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3.3^3} = \sqrt[3]{(2.3)^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

Afirmam que a raiz cúbica de seis ao cubo é seis, pois elevar ao cubo e extrair a raiz cúbica são operações inversas. Novamente, se evidencia que potenciação e radiciação são operações inversas.

O outro exemplo privilegia um número, cuja raiz não é exata. Para tal, expõem um procedimento até então não adotado por nenhum dos autores analisados, pois o resultado não é composto por uma parte inteira e outra decimal. Em vez disso, tem uma parte inteira e outra ainda raiz. Ou seja, deixa de ser um número racional para ser um irracional. O enunciado é uma pergunta: Qual o resultado de $\sqrt{44}$?

Pela decomposição em fatores primos e propriedades operatórias de radicais chega-se a $2\sqrt{11}$.

| | |
|---|---|
| 44 | 2 |
| 22 | 2 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

$\sqrt{44} = \sqrt{2^2.11} = 2\sqrt{11}$

Finalizam o estudo da radiciação com alguns exercícios que continuam com as mesmas ideias daqueles mencionados anteriormente, que vão além daqueles chamados de “normais” ou repetitivos, por exigir complexidade de inter-relações entre significações conceituais dos campos aritmético, algébrico e geométrico.

Imenes e Lellis trazem uma proposta de sequência de ensino que se afasta da lógica de estruturação de todos os livros que foram alvo do presente estudo, porém sem deixar contemplar as idéias conceituais tratadas pelos demais.

Situação de análise geométrica $\rightarrow$ diálogo conceitual potenciação/radiciação $\rightarrow$ duplicidade de raiz de número positivo $\rightarrow$ extração da raiz (exata e não exata) por tentativa $\rightarrow$ inexistência de raiz de número negativo quando o índice é par $\rightarrow$ exercícios que convidam ao desenvolvimento do pensamento conceitual por articular diversos conceitos e os campos matemáticos e generalizações $\rightarrow$ procedimentos de extração da raiz quadrada (calculadora e decomposição em fatores primos $\rightarrow$ exercícios com inter-relações de conceitos.

Seu sistema conceitual articula a radiciação com: potenciação, medidas de área e lado do quadrado, medidas de volume e aresta do cubo, números (naturais, inteiros relativos, racionais e irracionais), multiplicação e reversibilidade. É enfatizado a relação pensamento aritmético – geométrico e, de forma mais sutil, o pensamento algébrico, que não poderia se secundarizado uma vez que o estudo ocorre na sétima série, em vez da quinta série, como a maioria dos autores.

Vale dizer que a inserção de um conceito em sistema de forma articulada é tônica da proposta pedagógica dos autores em referência para todas as séries e conteúdos. Por isso, é uma constante que na abordagem de um determinado conteúdo apareça a referência e aprofundamento de conceitos anteriormente estudados. Isso se aproxima do pressuposto de Vygotski (1993, p. 236) da existência de um entrelaçamento entre os conceitos, isto é, eles formam um sistema. Não há um isolamento de um conceito, o que caracterizaria sua inexistência. O autor busca no pensamento matemático uma forma de exemplificar sua afirmação. Diz que, na escola, não é ensinado à criança o sistema decimal em si, mas ensina-lhe a escrever os números, agrupar, somar, multiplicar, resolver exemplos e problemas. No conjunto desse processo, é que se desenvolve o conceito geral de sistema decimal.

A proposta de Imenes e Lellis proporciona o desenvolvimento do pensamento conceitual sem apelar para a memorização mecânica, pois propicia que os alunos estejam em constante diálogo com uma rede de conceito e de relações. Contudo, parece ter precauções quanto à linguagem algébrica e, consequentemente, às generalizações que são a demonstração do nível de das elaborações dos alunos e a independência entre os conceitos. Segundo Vigotski (2000, p.368).

> Na medida em que se desenvolvem as relações de generalidade, amplia-se a independência do conceito em face da palavra, do sentido, da sua expressão, e surge uma liberdade cada vez maior das operações semânticas em si e em sua expressão verbal.

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um olhar para o conjunto de livros analisados, algumas evidências podem ser sintetizadas, como forma de elucidar respostas ao questionamento que deu base ao presente estudo. Uma delas é que o conceito de raiz quadrada se constituiu em conteúdo de ensino e aprendizagem no currículo escolar do século XX, pois se fez presente em todos os livros analisados. A diferença está na série em que é tratado pela primeira vez: maioria na correspondente quinta série da atualidade, outros na sexta e um na sétima série.

A afirmação tem respaldo empírico se considerarmos que os livros didáticos chegam, de algum modo, à sala de aula e ao aluno. Além disso, com algumas exceções, aqueles referenciados no nosso estudo foram adotados em escolas da região de Criciúma, uma vez que é critério para fazer par do acervo do Laboratório de Estudos em Educação Matemática da UNESC, onde os encontramos.

Estudar, aprender e ensinar a raiz quadrada, no período indicado, com base no livro didático é marcado por um movimento caracterizado por surgimento e abandonos de significações conceituais, como também na lógica da sequência de ensino. Nesse processo, no entanto, independente da época e proposta pedagógica é consenso, de forma enfática, uma permanência: a definição de raiz quadrada, que de uma forma ou outra é foco em todos os livros. Outra constância é a exploração de um ou mais método (algoritmo) de extração da raiz, dentre aqueles expostos pelos editores da Revista do Professor de Matemática (Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 21, p. 12, 1992), quais sejam:

a) Tradicional predominante nos livros de 1920 a 1960, que estabelece um conjunto de regras, aqui relembrada de forma sintética: $1^0$) divisão do número em classe de dois algarismo; $2^0$) extrair a raiz do maior quadrado contido na última classe à esquerda; etc.

b) O método das tentativas, desenvolvido em poucos livros dos anos 1980 e 1990.

c) Calculadora, indicado por apenas um livro da década de 1990.

d) Decomposição em fatores primos, que se fez presente na maioria das obras, individualmente, ou como opção além dos métodos tradicional e de tentativa.

É inconstante, pois há livros que as enfocam e outros não as mencionam, as significações: geométricas, algébricas, algoritmos, menções históricas, campo numérico de existência, entre outras. A permanência e ausência não são anunciadas ou justificadas, simplesmente há aspectos conceituais que aparecem sem um contexto que explicite a razão de ser no sistema, outros deixam de ser focado como se não tivesse nenhum valor formativo e mesmo informativo.

De um modo geral, os livros em voga, editados anteriormente a 1950, discutem a temática de forma objetiva e as idéias conceituais tratadas visam à aquisição da desenvoltura do aluno no algoritmo que determina a raiz quadrada de um número natural e decimal. Por isso, a preocupação é com as “regras” sem dar a menor importância às razões lógicas que as explicam. Os livros dos anos 1960 e 1970 têm como característica principal as significações do Movimento da Matemática Moderna, a expansão do número de exercício e o estudo dirigido. Nos anos 1980, a opção é por um tipo sintético de tratar o conceito. A marca principal das obras de 1990 é que suas propostas expandem o número de exercício, mas retraem-se na abrangência do sistema conceitual e as significações. A exceção, à primeira vista, parece ser o livro de Imenes e Lellis. Entretanto perde tal referência se considerarmos que eles propuseram as discussões sobre a temática somente na sétima série do ensino fundamental. Isso significa dizer que os alunos tiveram oportunidade de transitar por um processo de elaborações prévias que permitem-lhes o entendimento de relações e significações mais complexas e em diferentes campos numéricos.

Vivências de aprendizagem que não ocorreram com estudantes que tiveram na quinta ou sexta série tiveram as noções de raiz quadrada. Como diz Vigotski (2000), o processo colaborativo ou imitativo permite que possamos fazer mais do que sozinhos, desde que atendidos os limites determinados do estado de nosso desenvolvimento e potencialidades. Ou seja, aquilo que se encontra nas zonas das nossas possibilidades intelectuais. Exemplifica:

> Se eu sei aritmética, mas tenho dificuldade em resolver algum problema complexo, a mostra da solução pode me levar imediatamente à minha própria solução, mas se eu não sei matemática superior, a mostra da solução de uma equação diferencial não fará meu próprio pensamento dar um passo nesta direção. Para imitar, é preciso ter alguma possibilidade de passar do que eu sei fazer para o que eu não sei. (VIGOTSKI, 2000, 328).

Outro elemento interpretativo chamou-nos a atenção: alguns títulos dos livros são provocativos e geram expectativas de algo novo e promissor, como por exemplo: “Matemática na Medida Certa”, “Matemática e Vida”, “A Conquista da Matemática Nova”, “Aprendizagem e Educação Matemática”. No entanto, suas proposições frustram todas as perspectivas de algo novo, pois a abordagem do tema é basicamente a mesma dos livros com títulos diretos, ou até com uma simplificada sequência de ensino. Assim sendo, eles refletem uma falsa chamada para dizer que tem uma proposta que atenda os pressupostos de uma determinada tendência em Educação Matemática, em voga num determinado momento histórico.

Vale salientar que, exceto o livro de Imenes e Lellis, a finalidade dos “exercícios” é de fixar um determinado procedimento ou definição em vez da elaboração do pensamento conceitual com princípios que produzem a generalização, consequentemente, o diálogo com os diferentes conceitos do sistema.

Da mesma forma, a idéia geométrica, quando aparece, está vinculada ao pensamento reversível na relação potenciação-raiz quadrada. O foco inicial é para o desenho de uma superfície quadrada e a correspondente medida da área. A partir daí que, normalmente, lança-se a pergunta ou algo similar: Se a área do quadrado mede x unidades quadradas, quanto mede seu lado? Sendo assim, ausenta-se da representação no plano cartesiano que culmina com o valor da raiz (exata ou aproximada) na reta x, que, no mínimo, iniciaria o estudante ao conceito de número irracional.

Também, em termos de ausência ou não consideração de alguma significação conceitual historicamente produzida, não identificamos algo que extrapolasse a ideia (aritmética, algébrica e geométrica) de raiz quadrada como sendo a busca de um número que fora elevado a segunda potência, com base no princípio multiplicativo. Por consequência, ao aluno não é dado a oportunidade de elaborar pensamento matemático em que um quadrado perfeito e, por extensão, a sua raiz por ideias, respectivamente, aditiva e subtrativa. A titulo de ilustração mencionaremos duas delas.

a) A reciprocidade da adição e subtração de n números naturais ímpares, ou seja, $1 + 3 + 5 +7 + ... + 2n – 1 = n^2$ para quadrado perfeito e $n^2 – 1 – 3 – 5 – 7 - . . . – (2n – 1)= 0$ para a sua raiz. Assim, a quantidade de n números ímpares adicionados significa o seu quadrado. Inversamente, as subtrações sucessivas dão a raiz. Por exemplo: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$ e

$25 – 1 = 24$

$24 – 3 = 21$

$21 – 5 = 16$

$16 – 7 = 9$

$9 – 9 = 0$

Observa-se que o 25 fora obtido pela soma dos cinco (raiz quadrada) primeiros ímpares e, na subtração, o atingiu-se o zero pelas subtrações.

O mesmo raciocínio pode ser analisado geometricamente, conforme figura a seguir, em que os números ímpares adicionados são identificados por cores distintas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X |

b) A soma e diferença, respectivamente para o quadrado e sua raiz, de $1 + 2 + 3 + 4 + . . . + n + (n – 1) + (n -2) + . . . +[ n – (n – 1)] = n^2$ e $n^2 - 1 - 2 - 3 - 4 - . . . - n - (n – 1) - (n -2) - . . . -[ n – (n – 1)] = n$. Assim, por exemplo:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$

$25 – 1 = 24$

$24 – 2 = 22$

$22 – 3 = 19$

19 – 4 = 15

15 – 5 = 10

10 – 4 = 6

6 – 3 = 3

3 - 2 = 1

1 - 1 = 0

Do procedimento subtrativo, conclui-se que a raiz quadrada de 25 é 5, isto é, o maior subtraendo da sequência que aparece justamente na quinta subtração. A noção geométrica dessa significação pode se observar na figura a seguir, em que a sequência dos números adicionados ou subtraídos são apresentados pictoricamente por x de cores diferentes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | x |
| x | x | x | x | x |
| x | x | x | x | x |
| x | x | x | x | x |
| x | x | x | x | x |

Ainda, em relação aos procedimentos de extração raiz quadrada, nenhum livro enfocou: o “método das aproximações sucessivas”, que a partir de um valor arbitrário, atinge-se a raiz pela fórmula $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{n}{a_n})$; “método da tabela”, em que se recorre à tábua de logaritmo, pois $\sqrt{n} = \frac{1}{2}\log n$.

Também não foi identificado em nenhuma obra o pensamento trazido por Caraça (1984) sobre a existência de duas operações inversas da potenciação. Os livros focaram apenas a radiciação e potenciação como operações inversas, porém, não apresentaram a logaritmação.

A desconsideração com essas e outras significações numa sequência de ensino ou proposta pedagógica é omitir ideias e pensamentos humanos historicamente produzidos. Por sinal, a história das relações conceituais não se constitui elemento do ensino e da aprendizagem de raiz quadrada nos livros que fizeram parte da pesquisa. A referência histórica aludida em poucas obras se restringiram ao sinal $\sqrt{\ }$, como um desdobramento da letra r.

Mas o esquecimento dos autores, que pode acarretar em prejuízo ao desenvolvimento do pensamento conceitual de raiz quadrada dos alunos, é as suas significações algébricas que foram, no máximo, tangenciadas em poucos livros. A insistência rotineira em todas as décadas foi para o campo numérico, esporadicamente rudimentos da ideia geométrica e algumas inserções nas situações com teor da componente visual imaginativo do pensamento. Contudo, sem revelar conhecimento do pressuposto vygotskiano de que o desprendimento da vinculação ao campo numérico é uma operação que difere da libertação do campo visual.

Ao que parece, os autores insistem no campo aritmético com o entendimento de que - no momento em que apresentam o conceito (raiz quadrada) – as funções intelectuais dos alunos (5ª a 7ª série) estão em estado de maturação, que inviabiliza o processo de aprendizagem. Entretanto, conforme Vigotski (2000, p. 321) o aprendizado de qualquer conceito, aritmético ou algébrico, não tem início quando suas funções estão maduras. Pelo contrário, uma característica do processo de aprendizagem é imaturidade do pensamento no momento inicial. O aprendizado está adiante do desenvolvimento, o que abre a possibilidade do aluno adquirir habilidades e hábitos numa determinada área, mesmo antes de aprender a aplicá-los de modo consciente e arbitrário.

Sendo assim, as limitações impostas pelos livros didáticos ao campo numérico cria um mundo intelectual que impede as generalizações algébricas que são mais complexas que libertam o pensamento das amarras da imediaticidade ou da exclusividade empírica.

> A explicação do aumento da liberdade proporcional ao aumento das generalizações algébricas está na possibilidade de um movimento inverso do estágio superior para inferior, contido na generalização superior: a operação inferior já é vista como caso particular da superior.
> Uma vez que os conceitos algébricos se conservam inclusive quando aprendemos álgebra, surge naturalmente a questão de saber o que distingue o conceito aritmético do adolescente, que domina a álgebra, do conceito do aluno escolar. A investigação mostra: que há por trás dele um conceito algébrico; que o conceito aritmético é considerado como caso particular de um conceito mais geral; que a operação com ele é mais livre, por partir da fórmula geral por força da qual ela é independente de uma expressão aritmética determinada. (VIGOTSKI, 2000, p. 372).

A desatenção das propostas de ensino às noções e mesmo as significações algébricas do conceito de raiz quadrada deixa de oportunizar, conforme Vigotski (2000, p. 373), que os estudantes tomem consciência do conceito, ou seja, a generalização, que possibilita a ação arbitrária nele próprio e em outro sistema conceitual. O critério para tal está na passagem para qualquer outro sistema, uma vez que se constitui em generalização da raiz quadrada como um conceito amplo formado sobre os sistemas de cálculos. Além disso, como diz Talízina (1984, p. 164) “o grau de generalização expressa a relação entre as possibilidades objetivas de aplicação do conhecimento e as possibilidades subjetivas do indivíduo”.

Dessa forma, as lacunas dos livros levam a duas suposições. Uma prevê que elas são assumidas ou passam despercebidas, pois os professores seguem fielmente as determinações dos autores adotados. A outra é que os vazios são contemplados em sala de aula por significações e procedimentos metodológicos de ensino e aprendizagem elaborados e praticados pedagogicamente pelos docentes. O certo é que, de uma ou outra forma, os livro didáticos se traduzem em instrumentos ímpares de levar para a escola o conhecimento produzido historicamente sobre raiz quadrada. Seus autores os constróem numa lógica que pressupõe a forma de apreensão dos estudantes, a partir de suas concepções de ensino, aprendizagem, desenvolvimento, matemática e outros.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **Livro Didático De Matemática: Uma Abordagem Histórica (1943 – 1995).** 2005. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS.

ANDRINI, Álvaro. **Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1984.

ANTUNES, Ruy Donini. **Fundamentos de Matemática.** São Paulo: Ed. Atlas, 1978. 444 p.

ARRUDA, Joseane Pinto de. **Cidadania e Matemática no livro didático para as séries iniciais do Ensino Fundamental**. 2004. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2003.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 1995.

BLANCK, Guilhermo. Vygotsky: o homem e sua causa. In: Moll, Luis C. **Vygotsky e a Educação**. Porto Alegre, Rs: Artes Médicas, 1996. p. 31-51.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e Vida**. São Paulo: Editora Ática, 1990.

BORGES, Antonio José. **Polinômios no Ensino Médio: Uma investigação em livros didáticos**. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BOYER, Carl Benjamin. Tradução de Elza F. Gomide. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 2001. 488 p, 3.ª reimpressão.

CAMPOS, Maria Fernanda Tavares de Siqueira. Uso dos livros didáticos de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: a exploração dos jogos como um processo de aprendizagem sociocultural. In: EBRAPEM, XI, 2007, Curitiba. **Anais**.Curitiba: UFPR, 2007, p. 1- 9.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática.** 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática.** 1. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. São Paulo: Ed. Cortez, 2001.

COSTA, José Roberto. A Transposição Didática e o Papel do Manual do Professor de Matemática**.** In: EBRAPEM, XI, 2007, Curitiba. **Anais**. Curitiba: UFPR, 2007, p. 1-9.

CRUZ, Eliana da Silva. **A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica**. 2005. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DAMAZIO, Ademir. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático. **Revemat**, Florianópolis**,** V1.2, p. 14-25, UFSC, 2006. Seção.

DAMAZIO, Ademir. **O desenvolvimento de conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2000.

DAVYDOV, V.V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía**. Santiago, año XLVIII, N. 403, 197-199, junho, 1998.

DEMO, Pedro. **Introdução à metodologia da Ciência**. São Paulo: Atlas, 1987. Disponível em: http://www.redemat.mtm.ufsc.br/revemat_2006.htm. Acesso em: 21 dez. 2008.

DUARTE, Newton. **A relação entre o lógico e histórico no ensino da matemática elementar** (Dissertação de Mestrado). São Carlos, SP, UFSCAR, 1987.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Campinas, SP: UNICAMP, 1995. 843 p.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** Campinas, Ano 3, Nº 4, novembro de 1995.

GALANTE, Carlos. **Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, S/A, 1962.

GALANTE, Carlos; SANTOS, Osvaldo Marcondes dos. **Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1952.

GALLPERIN, P. Ya; TALYZINA, N. F. La formación de conceptos geométricos elementales y su dependência sobre la participación dirigida de los alumnos. In: **Psicología Soviética Conteporánea. Habana: Instituto Del libro**, série Ciencia e Tecnica, 1967.

GIANI, Letícia Maria Cordeiro de Campo. O livro didático de matemática: Considerações sobre as concepções dos professores. In: EPEM, 7, 2004, São Paulo. **Anais Eletrônicos**. São Paulo: USP, 2004. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteres/p027.doc. Acesso em: 20 dez. 2008.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR, José Ruy. **Aprendizagem e Educação Matemática**. São Paulo: FTD, 1990.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 1992.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy. **A Conquista da Matemática Nova**. São Paulo: FTD, 1998.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**. São Paulo: Editora Scipione Ltda, 1998.

IMENES, Luiz Márcio. LELLIS, Marcelo**.** Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma Crítica da Crítica. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 24, p. 1 - 30 , 2005.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa**. São Paulo: Editora Scipione Ltda, 1990.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa**. São Paulo: Editora Scipione Ltda, 1998.

JAMELLI, Sueli Maffei. **Abordagens no ensino da prova e argumentação na Matemática escolar: Análise de uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental.** 2007. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LAVILLE, Christian. DIONNE, Jean. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

LEONTIEV, Alexis. **O Desenvolvimento do Psiquismo.** Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LIBÂNEO, José Carlos. **A democratização da escola pública**. São Paulo: Loyola, 2005.

LOBO, José Theodoro de Souza. **Segunda Aritmética**. Porto Alegre: Editora Globo, 1949.

MARCONDES, Oswaldo. **Curso de Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1985.

MEINICKE, Rosemeire de Lourdes Oliveira. **O professor de Matemática e a prática reflexiva: Estudo com professores da sétima série do ensino fundamental.** 2005. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática**. 1993. 274 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicolleti. **Ensino: as abordagens do processo**. São Paulo: EPU - Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MONÇÃO, Nelson Benjamin. **Aritmética Elucidativa**. 8. ed. 1925.

MORAES, Roque. Análise de Conteúdo. **Educação**. Porto Alegre: PUCRS. V. 22 n. 37. P. 7-32. Março/1999.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: Idéias e Desafios**. São Paulo: Editora Saraiva, 1996.

NAME, Miguel Asis; GORETTI, Cid A.; CILLI, Ariodante M. **Matemática Funcional**. São Paulo: Editora do Brasil S/A, 1983.

NEDEM – Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática. São Paulo, SP: Editora do Brasil S.A., 1967.

NEVES, Edna Roséle da Conceição. **Uma trajetória pela história da atividade editorial brasileira: Livro didático de Matemática, autores e editoras.** 2005. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo.

OLIVEIRA, Antonio Marmo de. SILVA, Agostinho. **Biblioteca da Matemática Moderna**. 3. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1970. 391 p.

OLIVEIRA, Paulo Roberto Vieira de. **A cidadania no livro didático de Matemática: um diagnóstico a partir dos temas transversais de trabalho e consumo**. 2004. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ONAGA, Dulce Satiko. MORI, Iracema. **Matemática: Idéias e Desafios**. 1.ª ed. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 1996.

PAIS, Luis Carlos. PENTEADO, Miriam Godoy. **Didática da Matemática: uma analise da influencia francesa**. 2. Ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PEREIRA, Ana Carolina Costa. VASCONCELOS, Cleiton Batista. O teorema de tales nos livros didáticos de matemática após a avaliação do mec: uma comparação entre categorias. In: EPEM, 7, 2004, São Paulo. **Anais Eletrônicos**. São Paulo: USP, 2004. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0033.doc. Acesso em: 20 dez. 2008.

RAMOS, Fernando Carvalho. **O livro e os recursos didáticos no ensino de Matemática**. 2006. 239f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no ensino de Física e de Matemática) Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS.

RIBEIRO, Denise Franco Capello. A geometria e os livros didáticos: a reconfiguração da Matemática na escola de primeiras letras (1850 – 1950). In: EBRAPEM, XI, 2007, Curitiba. **Anais**.Curitiba: UFPR, 2007, p. 1-15.

ROMANATTO, Mauro Carlos. O Livro Didático: alcances e limites. In: EPEM, 7, 2004, São Paulo. **Anais Eletrônicos**. São Paulo: USP, 2004. Disponível em: www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc. Acesso em: 20 dez. 2008.

RUGGIERO, Marta Abdelnur ; BASSO, Itacy Salgado. A Matemática no livro didático: uma reflexão crítica na perspectiva histórico-cultural. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: v. 16, n. 20, p. 17- 36, 2003.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1972.

SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison da. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1981.
SARDELLA, Antônio; MATTA, Edison. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1989.

SILVA, Daniel Romão da. Um Estudo Sobre os Livros Paradidáticos de Matemática no Brasil. In: EBRAPEM, XI, 2007, Curitiba. **Anais**. Curitiba: UFPR, 2007, p. 1-9.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. O fascínio da raiz quadrada. **Revista do Professor de Matemática**, n. 21, p. 6-17, segundo quadrimestre,1992.

TALÍZINA, N. . **Conferencias sobre "Los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior"**. Habana: Universidad de la Habana, 1984.

TRAJANO, Antonio. **Arithmetica Progressiva**. Rio de Janeiro: livraria do Globo, 1930, 66.ª ed.

TRENTIN, Paulo Henrique. **O livro didático na constituição da prática social do professor de Matemática**. 2006. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade São Francisco, Itatiba.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo da Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais à pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Ed. Atlas, 1987.

ULIANO, Solange Muller. **O conceito de potenciação no ensino fundamental: evolução pedagógica nos livros didáticos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**, Campinas, SP: v. 16, n.º 30, p.149 – 171, 2008.

VIGOTSKI L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VIGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Ed. Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II: Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología.** Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas IV: Incluye Paidología del Adolescente, Problemas de la Psicología Infantil.** Madrid: Visor Distribuciones, 1996.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo