

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

Problema de Contato Para Sistemas Termoelásticos

Por

Milagros Noemi Quintana Castillo

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**PROBLEMA DE CONTATO PARA SISTEMAS
TERMOELÁSTICOS**

Milagros Noemi Quintana Castillo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Jaime E. Muñoz Rivera, D.Sc
(Presidente)

Prof. Antônio André Novotny, D.Sc.

Prof. Gustavo Perla Menzala, D.Sc.

Prof. Marcelo Cavalcanti, Ph.D

Prof. Mauro de Lima Santos, D.Sc.

Prof. Mauro Rincon, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 2010

Castillo, Milagros Noemi Quintana

C352p Problema de contato para sistemas termoelásticos / Milagros Noemi Quintana Castillo. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

XII, 78 p. : il.; 29 cm

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Dissertação (Mestre) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

1.Equções diferenciais hiperbólicas. 2. Problema de Signorini. 3. Elementos Finitos. I. Rivera, Jaime E. Muñoz. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 515.3535

e.pí.gra.fe

Pense no futuro. Viva o presente. Lembro do
passado

(Milagros Quintana Castillo)

Dedicatória

Dedico à minha mãe e ao meu irmão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e ao Senhor dos Milagres que me iluminaram durante este trabalho. Minha mãe, Luz Delicia Castillo, e meu irmão Jesus Andre Castillo pelo apoio e a compreensão estes anos do meu afastamento em prol dos meus estudos. Aos prof. Jaime Rivera e prof. Santana Arantes, orientadores, pelo estímulo, conselhos e críticas proporcionando o meu crescimento intelectual. Aos meus colegas e amigos de Petrópolis, em especial a Cristiano Collares, pela confiança e apoio emocional que precisei muito por estar longe de minha família. Aos meus colegas do LNCC, especialmente a Raque pela sua amizade e momentos em que estudamos juntas. Ao meu pai, Christian Quintana, pela ajuda sempre que precisei. Ao LNCC e funcionários, cujo suporte e ajuda viabilizaram o desenvolvimento deste trabalho, carinhosamente a Ana Neri. Este trabalho não seria possível sem o apoio financeiro do CNPq, a quem agradeço.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (Mestre)

PROBLEMA DE CONTATO PARA SISTEMAS TERMOELÁSTICOS

Milagros Noemi Quintana Castillo

Novembro , 2010

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera, D.Sc

Neste trabalho estuda-se o Problema de Contato num Sistema Termoelástico Unidimensional, como objeto de estudo é usado uma barra metálica que está no interior de uma viga. Primeiro, modela-se o sistema fisicamente e depois demonstra-se que o sistema possui solução através do Método Penalizado. Depois é feita a discretização numérica para fazer as simulações gráficas com os dados de quatro materiais pesquisados. Os resultados obtidos nos testes dos diferentes materiais foram satisfatórios já que foi mostrado que o comportamento de um sistema acoplado é válido para materiais com coeficiente diferentes e depende da relação entre a energia e diferença de temperatura.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (Mestre)

CONTACT PROBLEM FOR THERMOELASTIC SYSTEM

Milagros Noemi Quintana Castillo

November, 2010

Advisor: Jaime E. Muñoz Rivera, D.Sc

The following work studies the problem of contact in a one-dimensional thermoelastic bending system, as the object of study we use the metal bar that is within the beam. First is modeled after the system physically and shows that the system has solution through the Penalized Method. After the discretization is done in order to make numerical simulations with graphical data from four materials researched. The results of tests on different metals were satisfactory since it was demonstrated the behavior of each bar for the energy temperature.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelo	5
2.1	Dedução do Modelo	5
3	Resolução Matemática	13
3.1	Existência de Solução para o Problema de Contato	14
3.1.1	O Problema de Signorini	32
3.1.2	Decaimento Exponencial	40
4	Solução Numérica	49
4.1	Formulação do Problema	49
4.2	Simulações Gráficas	54
4.2.1	Dado I(Ferro e Alumínio)	56
4.2.2	Dado II (Aço Inoxidável (AISI 302) e Cobre)	60
4.2.3	Dado III (Ferro, Alumínio, Aço Inoxidável (AISI 302) e Cobre)	64
4.3	Conclusão	72
	Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

Figura

2.1	Representação de deslocamento	5
3.1	Barra Termoelástica	13
4.1	Ferro I	56
4.2	Ferro II	57
4.3	Ferro III	57
4.4	Alumínio I	58
4.5	Alumínio II	59
4.6	Alumínio III	59
4.7	Aço Inoxidável I	60
4.8	Aço Inoxidável II	61
4.9	Aço Inoxidável III	61
4.10	Cobre I	62
4.11	Cobre II	63
4.12	Cobre III	63
4.13	Ferro IV	64
4.14	Alumínio IV	65
4.15	Aço Inoxidável IV	65
4.16	Cobre IV	66
4.17	Ferro V	67
4.18	Alumínio V	67
4.19	Aço Inoxidável V	68

4.20 Cobre V	68
4.21 Ferro VI	69
4.22 Alumínio VI	70
4.23 Aço Inoxidável VI	70
4.24 Cobre VI	71

Lista de Tabelas

Tabela

4.1	Valores dos parâmetros utilizados nas simulações.	54
4.2	Valores específicos do ferro utilizados nas simulações.	54
4.3	Valores específicos do alumínio utilizados nas simulações.	54
4.4	Valores específicos do aço inoxidável (AISI 302) utilizados nas simulações.	55
4.5	Valores específicos do cobre utilizados nas simulações.	55

Capítulo 1

Introdução

De acordo com Ericksen (1991) sistemas termodinâmicos são processos dependentes do tempo, as variáveis necessárias para descrever a situação com sólidos requer algumas medidas de tensão e temperatura.

Uma aplicação freqüente é no campo da engenharia. Mazorche (2006) diz que o problema de contato é um assunto muito relevante em Mecânica dos Sólidos, em particular na mecânica de múltiplos corpos onde a transmissão de forças acontece através do contato entre eles. Como exemplo, os problemas de contato são muito presentes onde se observa barras metálicas chocando-se com um obstáculo. Com a mudança de temperatura ao longo do dia - pela manhã o Sol batendo direto numa construção a temperatura desta se eleva, enquanto que a noite a temperatura vai diminuindo, grande mudança térmica que ocorre em menos de vinte e quatro horas - estes materiais vão se dilatando e contraindo de forma diferente. A barra metálica possui um coeficiente de dilatação diferente do concreto.

A expansão e a contração são devidas aos efeitos térmicos do corpo, ou seja, segundo Gao e Rivera (2002) são como se fosse uma pequena deformação longitudinal ao longo do eixo de uma haste unidimensional. Problemas termoelásticos de contato surgem naturalmente em muitas situações (Ver Day (1986) e Carlson (1972)) e se dividem em três partes: estática, dinâmica e quase-estática. Os casos quase-estático e estático com várias condições têm sido amplamente estudados por Andrews K. T. e Wright (1993), Carlson (1972), Copetti

e Elliot (1993), Day (1986), Gilbert R. P. e Shillor (1994), Shi P. e L. (1991), Shi e Shillor (1990), Shi e Shillor (1993) tanto no aspecto numérico como no teórico. O problema dinâmico é completamente diferente do caso quase-estático. O sistema quase-estático pode ser visto como sendo um problema do tipo parabólico-elíptico, enquanto o processo dinâmico é do tipo hiperbólico-parabólico. Este último é mais complicado e temos apenas alguns resultados sobre a existência e unicidade das soluções.

Um caso particular desse tipo de problema de contato unilateral que vai ser tratado aqui é o Problema de Signorini onde, estuda-se um modelo que representa o contato entre um corpo elástico, inserido num meio térmico, e um obstáculo fixo rígido. Matematicamente o Problema de Signorini é caracterizado por existir dois conjuntos de condições de contorno: uma que são as igualdades e as outras desigualdades. Até os dias de hoje mostrou-se que o problema de Signorini dinâmico possui solução, mas ainda não foi provado que ela é única, diferente do estático-onde mostrou-se a existência e unicidade. O presente trabalho desenvolvido busca medir as deformações longitudinais devido a dilatação ocorrida como consequência da diferença de temperatura entre o meio ambiente e a barra metálica chocando-se com um obstáculo rígido ao passar do tempo.

O estudo desta dissertação começa com a explicação física do sistema acoplado. A primeira equação é baseada no momento linear e as tensões exercidas na barra e a segunda equação está baseada na conservação de energia, considerando o trabalho (ao deslocar-se) e o calor.

A resolução matemática foi desenvolvida fazendo a solução fraca do problema(formulação fraca). Evans (1998) explica que as soluções fracas são importantes porque muitas equações diferenciais encontradas na modelagem de fenômenos do mundo real não admitem soluções suficientemente regulares matematicamente e, então, a única forma de resolver tais equações é através da formulação fraca. Mesmo em situações em que uma equação não tem soluções diferenciáveis, muitas vezes é conveniente primeiro provar a existência de soluções

fracas e depois mostrar que essas soluções são de fato bastante aceitáveis. Segundo Rivera e Oliveira (1997), já que o problema ocorre para uma dimensão, o deslocamento e a diferença térmica são funções escalares. Por este motivo, é possível mostrar que a taxa de decaimento é uniforme, como foi provado em Kim (1992) e Rivera (1992).

Por outro lado, para gerar as simulações gráficas, foi utilizado o método de Diferenças Finitas com relação ao tempo. Levy e Lessman (1992) explicam que as Diferenças Finitas é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas pela fórmula de aproximação da série de Taylor da função derivada. Com relação ao cálculo da função no espaço o método utilizado foi o do Elementos Finitos. Robert D. Cook e Plesha (1981) explica que normalmente o problema em questão é muito complicado de ser resolvido de forma satisfatória por métodos clássicos. O problema pode ser de análise de tensões, condução de calor, ou qualquer uma das outras áreas. Os resultados são raramente exatos, no entanto, o erro é diminuído pelo tratamento de mais equações. E resultados precisos o suficiente para fins de engenharia são obtidos a um custo razoável. Elementos finitos também são usados para analisar os problemas de transferência de calor, fluxo de fluidos, lubrificação, campos elétrico e magnéticos, e muitos outros. Problemas que antes eram completamente intratáveis agora são resolvidos rotineiramente. Em geral, os modelos de elementos finitos possuem uma estrutura como um conjunto de pequenas peças (elementos). Cada elemento é de simples geometria e, portanto, é muito mais fácil de analisar a sua estrutura, aproximar uma solução complicada por um modelo que consiste numa solução simples.

Estudos feitos por Rivera e Andrade (1999) e por Santana (2001) que analisaram o comportamento do deslocamento de uma barra unidimensional devido a diferença de temperatura e simulações gráficas do comportamento serviram de base para a presente pesquisa. Portanto, o trabalho desenvolvido busca medir as deformações longitudinais devido a dilatação ocorrida como consequências da

diferença de temperatura entre o meio ambiente e a viga com um obstáculo rígido ao passar do tempo.

Capítulo 2

Modelo

2.1 Dedução do Modelo

Neste capítulo será mostrado a dedução física das equações acopladas a serem estudadas a partir de conceitos físicos.

Segundo Tiang e Racke (2000), seja o corpo B definido num conjunto Ω , aberto, limitado do \mathbb{R}^n com fronteira regular quando $n = 1, 2, 3$.

Definamos como o deslocamento a função $u(t_1, x) = X(t_1, x) - X(t_0, x)$.

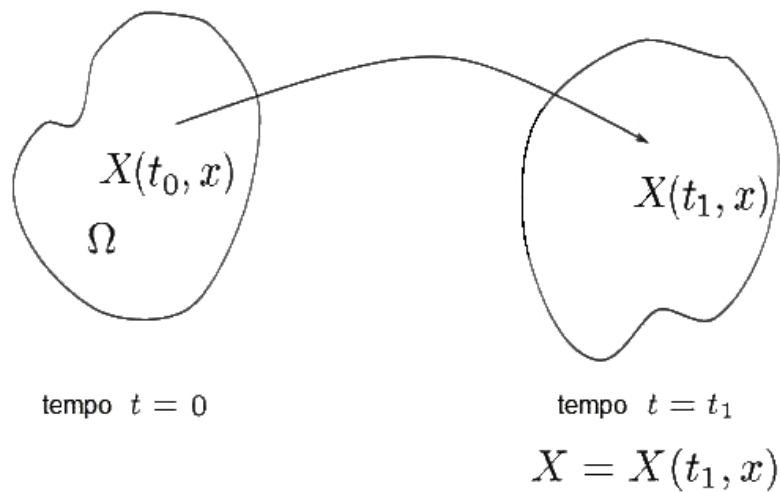


Figura 2.1: Representação de deslocamento

Na figura (2.1), t é o tempo e X é a função que descreve a posição da partícula.

A deformação ocorre com a mudança da temperatura $T = T(t, x)$ e vice-versa.

Primeiro, deve-se saber o conceito de momento linear. Segundo Halliday et al. (1996b) o momento linear, ou movimento linear é uma grandeza física vetorial, com direção e sentido, cujo módulo é o produto da massa pelo módulo da velocidade, onde a direção e o sentido são os mesmos da velocidade. O momento linear de uma partícula é um vetor \vec{p} definido através da equação

$$m \cdot \vec{v} = \vec{p},$$

onde m é a massa do corpo. Logo, para uma partícula

$$\rho \cdot \vec{v} = \vec{p}$$

ρ é a massa específica do corpo e $v \equiv X_t$ é a velocidade da mesma.

De acordo com Paul a quantidade de movimento total de um conjunto de objetos permanece inalterada, a não ser que uma força externa seja exercida sobre este sistema. Esta propriedade foi percebida por Newton e publicada na obra *Philosophial Naturalis Principle Mathematica*, onde Newton define a quantidade de movimento e demonstra sua conservação. Na verdade, Newton formulou a sua segunda lei em termos de momento

“A taxa de variação do momento de uma partícula é proporcional à resultante das forças que agem sobre ela ”

Quando expressa em forma de equação, esta Lei se torna

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

onde a força resultante $\sum \vec{F}$ é denotado por f . Então

$$f = \frac{d}{dt}(\rho \vec{X}_t) = \rho \frac{d\vec{X}_t}{dt} = \rho X_{tt}.$$

O corpo estudado, neste caso é uma barra, ao dilatar-se encontra um obstáculo, então ocorre uma tensão na fronteira da barra que está em contato com o obstáculo devido ao choque. Segundo Lai W. M. e E. (1974), a tensão que atua na fronteira do corpo é o tensor de Piola-Kirchhoff, \tilde{S} , que é definido por

$$\tilde{S} = \frac{\vec{G}}{A}$$

onde \vec{G} é a força que é contrária ao movimento do corpo, e A é a área em que a força é aplicada. Assim, de acordo com Marsden e Tromba (1988) o balanço de fluxo por unidade de volume resulta em

$$\frac{\partial \tilde{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{S}_z}{\partial z} = \text{div} \tilde{S}.$$

Como a tensão atua na direção contrária ao movimento do corpo, então o momento linear expressa-se por

$$\rho X_{tt} - \text{div} \tilde{S} = f. \quad (2.1)$$

Segundo Tiang e Racke (2000) este sistema de equações essencialmente descreve a parte elástica. Na verdade, se \tilde{S} não depender da temperatura, ela pode representar uma equação diferencial parcial puramente elástica.

Para modelar a equação de energia a qual surge da forma local da Primeira Lei da Termodinâmica, também conhecida como Lei de Conservação da Energia num sistema fechado, diz

$$\Delta \varepsilon_{int} = \varepsilon_{int, f} - \varepsilon_{int, i} = (\text{Calorquadrecebido}) - (\text{Trabalhoquadexercido}),$$

onde, $\Delta \varepsilon_{int}$ é a energia específica interna resultante, $\varepsilon_{int, f}$ é a energia específica interna final do corpo, $\varepsilon_{int, i}$ é a energia específica interna inicial do corpo,

Lembrando de Halliday et al. (1996a), o calor é a energia transferida entre um sistema e seu ambiente devido a uma diferença de temperatura entre eles.

A energia também pode ser trocada entre um sistema e seu ambiente através de um trabalho (W), que sempre associamos a uma força agindo sobre um sistema durante um deslocamento do mesmo.

O objeto de estudo, a viga, troca energia com o meio ambiente com o passar do tempo. Pelo balanço de fluxo de calor por unidade de volume, o calor resultante expressa-se por $div\ q$. Assim, chega-se à

$$\underbrace{\varepsilon_t}_{energia} + \underbrace{div\ q}_{calor} - \underbrace{tr\{\tilde{S}F_t\}}_{trabalho} = \underbrace{r}_{energia} \quad (2.2)$$

sendo ε_t a energia interna da viga, q o fluxo do calor, r calor externo fornecido e F o gradiente de deformação definido por Tiang e Racke (2000) segundo a seguinte expressão, $F^{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} X_i$.

Para continuar o estudo é necessário conhecer o conceito de entropia segundo Elliott e Lira (1998): a entropia foi um termo cunhado por Clausius da Grécia para “transformação”. Esta fornece uma medida de desordem de um sistema, o que leva a reduzir a capacidade para realizar trabalho útil. Assim, o conceito de Energia livre de Helmholtz, que é um potencial termodinâmico que mede a “energia útil” de um sistema é definido por

$$\psi = \varepsilon - T\xi, \quad (2.3)$$

onde ξ é a entropia, ε a energia interna do sistema e T a temperatura.

De Tiang e Racke (2000), os termos que definem um sistema elástico em termoelástico são: \tilde{S} , q , ψ e ξ , que são funções de F , T e ∇T . Assumindo sempre que são funções suaves e que

$$detF \neq 0, \quad T > 0.$$

De acordo com a forma local da segunda lei de termonidâmica

$$\xi_t \geq -div\left(\frac{q}{T}\right) + \frac{r}{T},$$

então

$$\begin{aligned} -\xi_t - \operatorname{div} \left(\frac{q}{T} \right) + \frac{r}{T} &\leq 0 \\ -T\xi_t - T \operatorname{div} \left(\frac{q}{T} \right) + r &\leq 0. \end{aligned}$$

Derivando (2.3) em relação ao tempo, obtém-se

$$\xi_t = \psi_t + T_t \xi + T \xi_t.$$

Assim, substituindo a equação acima em (2.2)

$$\psi_t + T_t \xi + T \xi_t - \operatorname{tr}\{\tilde{S}F_t\} + \operatorname{div} qr = r. \quad (2.4)$$

Lema 2.1

i) As soluções das funções \tilde{S} , ξ e ψ são independentes do gradiente da temperatura

$$\tilde{S} = \tilde{S}(F, T), \quad \psi = \psi(F, T), \quad \xi = \xi(F, T).$$

ii) ψ determina em \tilde{S} a relação da tensão

$$\tilde{S}(F, T) = \frac{\partial \psi}{\partial F}(F, T)$$

e ξ em relação à entropia

$$\xi(F, T) = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(F, T).$$

Usando estas relações (2.2) é reescrito na forma

$$\underbrace{\psi_t + T_t \xi + T \xi_t}_{\varepsilon_t} - \operatorname{tr}\{\tilde{S}F_t\} + \operatorname{div} q = r. \quad (2.5)$$

Do Lema (2.1)-(i) e da regra da cadeia

$$\psi_t = \left(\frac{\partial \psi}{\partial F} \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) (F_t, T_t) \quad \Rightarrow \quad \psi_t = \text{tr}\{\tilde{S}F_t\} + \xi T_t$$

substituindo em (2.5), chega-se a

$$\text{tr}\{\tilde{S}F_t\} - \xi T_t + T_t \xi + T \xi_t - \text{tr}\{\tilde{S}F_t\} + \text{div } q = r$$

onde

$$T \xi_t + \text{div } q = r. \tag{2.6}$$

Do Lema (2.1)-(ii) e da regra da cadeia, obtém-se

$$\xi_t = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial F \partial T} \quad -\frac{\partial \psi}{\partial T^2} \right) (F_t, T_t)$$

Substituindo em (2.6), segue

$$T \left\{ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} T_t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial F \partial T} F_t \right\} + \text{div } q = r. \tag{2.7}$$

A equação (2.1) é essencialmente um sistema hiperbólico para X e a equação (2.7) é principalmente uma equação parabólica para T .

Para facilitar os estudos em vez de X , a variável $U = (X - X_0)$ é frequentemente usada e em vez de T a diferença de temperatura é expressa como $\theta = T - T_0$, onde T_0 é uma constante de referência de temperatura. Então, $\psi(F, T) = \psi(\nabla U, \theta)$ com o mesmo símbolo ψ . Analogamente, para outra solução da função.

O problema é encontrar U e θ considerando as condições iniciais

$$U(t = 0) = U^0, \quad U_t(t = 0) = U^1, \quad \theta(t = 0) = \theta^0.$$

Por exemplo, se o corpo for rígido e a diferença de temperatura na borda for a

mesma do ambiente, então

$$U = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

onde $\partial\Omega$ denota a existência de contorno de Ω .

A busca de equações linearizadas vão desempenhar um papel importante. Elas surgem de (2.1), (2.6) e assumindo que

$$|\nabla U|, |\nabla U_t|, |\theta|, |\theta_t|, |\nabla\theta|,$$

sejam pequenas. De acordo com Tiang e Racke (2000), usando a expansão de Taylor, por exemplo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial F \partial T}(\nabla U, \theta, x) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial F \partial T}(0, 0, x) + \mathcal{O}(|\nabla U|, |v|,)$$

chega-se à $T_0 = 1$ (sem perda de generalidade) e

$$\rho U_{tt} - D' S D U + D' M \theta = f$$

$$c \theta_t - \nabla' K \nabla \theta + M' D U_t = r,$$

onde ρ representa massa específica; $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$, positiva definida, contendo o módulo de elasticidade, M é um vetor de coeficientes determinando a expansão térmica, c é o calor específico e K é o tensor de condutividade térmica. Todas estas funções são assumidas suaves e D é uma abreviação generalizada para o gradiente.

Para o caso unidimensional, isotrópico, escreve-se

$$D = \partial_1 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Assim, a matriz S é uniformemente positiva definida. Neste caso simples de

meio homogêneo o qual é isotrópico defini-se

$$S = \eta \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

O vetor de expansão térmica neste caso simples define-se por m o tensor de condutividade térmica por k . Assim, o sistema se reduz em uma dimensão da seguinte forma

$$\rho U_{tt} - \eta U_{xx} + m\theta_x = f$$

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + mU_{xt} = r.$$

Para melhor compreensão será usado u em vez de U e as funções $u(x, t)$ e $\theta(x, t)$ serão descritas da forma $u(t, x)$ e $\theta(t, x)$.

No seguinte capítulo será mostrado que este sistema possui solução.

Capítulo 3

Resolução Matemática

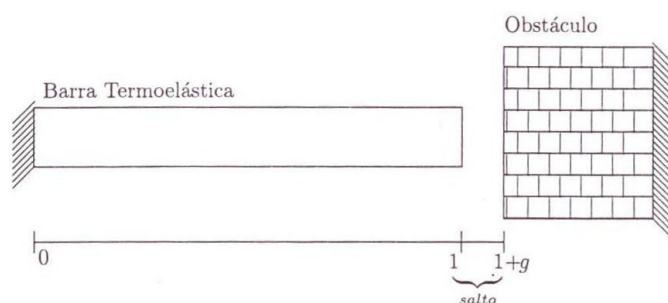


Figura 3.1: Barra Termoelástica

Segundo Rivera (1998) resolve-se, inicialmente, o problema de existência de solução utilizando o método variacional, ou seja, considerando o problema variacional do sistema termoelástico com condições de contato unilateral.

Para isso a equação desse sistema é penalizada e encontramos a solução para o problema penalizado, usando o Método de Galerkin, depois é passado o limite no problema penalizado para encontrar a solução do problema original. Esse método é conhecido como método de Penalização.

Finalmente, estuda-se o comportamento assintótico das soluções desse sistema, provando que a energia associada ao sistema decai numa taxa exponencial.

Seja considerado o problema de contato onde o obstáculo não é rígido, ou seja, quando a barra ultrapassa a posição do obstáculo. Segundo (Rivera e Andrade,

1999) as equações são

$$\rho u_{tt} - (\eta u_x)_x + (m\theta)_x = f \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$c\theta_t - (k\theta_x)_x + mu_{xt} = h \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T) \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad (3.3)$$

$$\theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t) \quad (3.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (3.5)$$

onde ρ é a massa específica, c é o calor específico, η é o “modulo” da elasticidade, k é a condutividade térmica, m é o coeficiente de expansão térmica, u é o deslocamento, θ é a temperatura, f é a densidade de força exercida na barra e g é a distribuição de calor sobre a viga.

A condição onde é dado o contato é a seguinte

$$\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) = -d[(u(1, t) - g)^+]^\mu - b[(u(1, t) - g)^+]^l u_t(1, t) \quad (3.6)$$

onde g representa a distância entre o obstáculo e a fronteira ($x = 1$), μ e l são constantes reais.

Supondo que β é o coeficiente de transferência de calor, então a correspondente condição de contorno para θ é

$$k\theta_x(1, t) = -\beta\theta(1, t). \quad (3.7)$$

O Problema de Signorini, que será visto adiante, difere pela condição onde é dado o contato.

3.1 Existência de Solução para o Problema de Contato

Mostra-se a existência de soluções fracas para o problema termoelástico de contato (3.1)-(3.3), com as condições (3.6)-(3.7).

Para provar a existência das soluções fracas considere o sistema com as

condições de contorno nulas e o sistema regular dado por

$$\rho v_{tt} - \eta v_{xx} + m\Psi_x = H \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.8)$$

$$c\Psi_t - k\Psi_{xx} + mv_{xt} = G \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.9)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0 \quad \Psi(x, 0) = 0 \quad \text{em }]0, 1[\quad (3.10)$$

$$\Psi_x(0, t) = \lambda\Psi(0, t) \quad (3.11)$$

$$v(0, t) = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \eta v_x(1, t) - m\Psi(1, t) &= -d[(v(1, t) - g)^+]^\mu - b[(v(1, t) - g)^+]^l v_t(1, t) \\ &\quad - \epsilon v_t(1, t) - \epsilon b v_t^3(1, t) \end{aligned}$$

$$k\Psi_x(1, t) = -\beta\Psi(1, t).$$

H e G são, respectivamente, a resultante de forças e calor do sistema. O termo ϵv_t é introduzido para regularizar a solução no contorno. Já o termo $\epsilon b v_t^3(1, t)$ é introduzido para garantir a estimativa de segunda ordem para a expressão $b[(v(1, t) - g)^+]^l v_t(1, t)$. Para encontrar a solução fraca do sistema considere o seguinte lema.

Lema 3.1

Sejam $H, G \in H^1(0, T; L^2(0, 1))$ e $g > 0$, então existe o par (v, Ψ) , tal que

$$\begin{aligned} v &\in L^\infty(0, T; H^2(0, 1)) & \Psi_t &\in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \\ v_t &\in L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) & \Psi_t &\in L^2(0, T; H^2(0, 1)) \\ v_{tt} &\in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \end{aligned}$$

que é solução de (3.8)-(3.9) com condições (3.10)-(3.12).

Demonstração

A demonstração será feita de modo similar ao trabalho de (Pinedo, 1990), mas para o caso acoplado.

Esta demonstração será feita pelo Método de Galerkin.

Sejam $W_\tau = \{w_1, w_2, \dots, w_\tau\}$ e $Z_\tau = \{z_1, z_2, \dots, z_\tau\}$, sub-espços formados por vetores linearmente independentes e gerados pelos primeiros τ vetores prprios do espço de dimensão infinita $H^2(0, 1)$ e considere $h_{i\tau}$ e $g_{i\tau}$ com $i = 1, \dots, \tau$ funoes de modo que

$$v^\tau(\cdot, t) = \sum_{i=1}^{\tau} h_{i\tau}(t)w_i(\cdot) \quad \text{em } V_\tau$$

e

$$\Psi^\tau(\cdot, t) = \sum_{i=1}^{\tau} g_{i\tau}(t)z_i(\cdot) \quad \text{em } Z_\tau.$$

Assim, o sistema regular aproximado se torna

$$\rho v_{tt}^\tau - \eta v_{xx}^\tau + m \Psi_x^\tau = H \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.13)$$

$$c \Psi_t^\tau - k \Psi_{xx}^\tau + m v_{xt}^\tau = G \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.14)$$

$$v^\tau(x, 0) = 0, \quad v_t^\tau(x, 0) = 0, \quad \Psi^\tau(x, 0) = 0 \quad \text{em }]0, 1[$$

$$\Psi_x^\tau(0, t) = \lambda \Psi^\tau(0, t)$$

$$v^\tau(0, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \eta v_x^\tau(1, t) - m \Psi^\tau(1, t) &= -d[(v^\tau(1, t) - g)^+]^\mu - b[(v^\tau(1, t) - g)^+]^l v_t^\tau(1, t) \\ &\quad - \epsilon v_t^\tau(1, t) - \epsilon b(v_t^\tau(1, t))^3 \end{aligned}$$

$$k \Psi_x(1, t) = -\beta \Psi(1, t).$$

Multiplicando (3.13) por $w_j \in W_\tau$ e integrando de 0 a 1, obtm-se

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau w_j dx - \int_0^1 \eta v_{xx}^\tau w_j dx + \int_0^1 m \Psi_x^\tau w_j dx = \int_0^1 H w_j dx. \quad (3.15)$$

Em (3.14) multiplica-se por $z_j \in Z_\tau$ e integra de 0 a 1, para obter

$$\int_0^1 c \Psi_t^\tau z_j dx - \int_0^1 k \Psi_{xx}^\tau z_j dx + \int_0^1 m v_{xt}^\tau z_j dx = \int_0^1 G w z_j dx \quad (3.16)$$

Integrando por partes (3.15)

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau w_j dx - \eta v_x^\tau w_j \Big|_0^1 + \int_0^1 \eta v_x^\tau w_{j,x} dx + m \Psi^\tau w_j \Big|_0^1 = \int_0^1 H w_j dx.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau w_j dx - \eta v_x^\tau(1,t) w_j(1) + \eta v_x^\tau(0,t) w_j(0) + \int_0^1 \eta v_x^\tau w_{j,x} dx \\ + m \Psi^\tau(1,t) w_j(1) - m \Psi^\tau(0,t) w_j(0) - \int_0^1 m \Psi^\tau w_{j,x} dx = \int_0^1 H w_j dx. \end{aligned}$$

Assim, chega-se à

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau w_j dx + \int_0^1 \eta v_x^\tau w_{j,x} dx - \int_0^1 m \Psi^\tau w_{j,x} dx = \int_0^1 H w_j dx \\ - d[(v^\tau(1,t) - g)^+]^\mu w_j(1) - b[(v^\tau(1,t) - g)^+]^l v_t(1,t) w_j(1) \\ - \epsilon v_t^\tau(1,t) w_j(1) - \epsilon b v_t^3(1,t) w_j(1) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando a equação (3.16) e integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 c \Psi_t^\tau z_j dx - k \Psi_x^\tau z_j \Big|_0^1 + \int_0^1 m v_{xt}^\tau z_j dx = \int_0^1 G w z_j dx \\ \int_0^1 c \Psi_t^\tau z_j dx - k \Psi_x(1,t) z_j(1) + k \Psi_x(0,t) z_j(0) + \int_0^1 k \Psi_x^\tau z_{j,x} dx \\ + \int_0^1 (m v_{xt}) z_j dx = \int_0^1 G z_j dx. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^1 c \Psi_t^\tau z_j dx + \beta \Psi(1,t) + k \lambda \Psi(0,t) z_j(0) + \int_0^1 k \Psi_x^\tau z_{j,x} dx \\ + \int_0^1 (m v_{xt}) z_j dx = \int_0^1 G z_j dx. \end{aligned}$$

Donde chega-se

$$\int_0^1 c\Psi_t^\tau z_j dx + \int_0^1 k\Psi_x^\tau z_{j,x} dx + \int_0^1 (mv_{xt})z_j dx = \int_0^1 Gz_j dx - \beta\Psi(1,t) - k\lambda\Psi(0,t)z_j(0). \quad (3.18)$$

Por outro lado, seja $A = (a_{ij}) = \int_0^1 w_i w_j dx$. Afirmação: A é uma matriz positiva definida.

De fato, consideremos $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\tau)$. Então

$$\begin{aligned} \vec{x}A\vec{x}^t &= \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} x_i a_{ij} x_j \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} x_i x_j \int_0^1 w_i w_j dx \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \int_0^1 x_i w_i dx \int_0^1 x_j w_j dx \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} \int_0^1 x_i w_i dx \sum_{j=1}^{\tau} \int_0^1 x_j w_j dx \end{aligned}$$

como w_i são linearmente independentes, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\tau} \int_0^1 x_i w_i dx \sum_{j=1}^{\tau} \int_0^1 x_j w_j dx &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\tau} x_i^2 w_i w_i dx \\ &= \int_0^1 \vec{x}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Analogamente se denotar $B = (b_{ij}) = \int_0^1 z_i z_j dx$, obtém-se que B é uma matriz positiva definida.

Então substituindo A em (3.17) e B em (3.18), resulta

$$\begin{cases} \rho AU_{tt} + \eta A'U &= \bar{H} \\ cBO_t + kB'O &= \bar{G} \end{cases} \quad (3.19)$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} h_{1\tau}(t) \\ h_{2\tau}(t) \\ \vdots \\ h_{\tau\tau}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{bmatrix} g_{1\tau}(t) \\ g_{2\tau}(t) \\ \vdots \\ g_{\tau\tau}(t) \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema (3.19) consiste em resolver duas EDOs.

Como foi provado anteriormente A e B são positivas definidas, logo são inversíveis.

Portanto (3.19) tem solução e isto significa que a aproximação das soluções v^τ e Ψ^τ é garantida, porém estas soluções são válidas para os intervalos $(0, x_\tau) \subset [0, 1]$.

Agora, será mostrado que a derivada de primeira ordem é limitada.

Primeiro conhecendo a função de energia do sistema que é dado por

$$E(t; v; \Psi) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho v_t^2 + \eta v_x^2 + c\Psi^2) dx + \frac{d}{\mu + 1} [(v(1, t) - g)^+]^{\mu+1}.$$

Assim, multiplicando a equação (3.13) por $h'_{j,\tau} w_j$ e integrando em $(0, 1)$, obtém-se

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau h'_{j,\tau} w_j dx - \int_0^1 \eta v_{xx}^\tau h'_{j,\tau} w_j dx + \int_0^1 m \Psi_x^\tau h'_{j,\tau} w_j dx = \int_0^1 H h'_{j,\tau} w_j dx.$$

Somando em j e usando $v_t^\tau(\cdot, t) = \sum_{i=1}^\tau h'_{j,\tau}(t) w_j(\cdot)$, segue

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx - \int_0^1 \eta v_{xx}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 m \Psi_x^\tau v_t^\tau dx = \int_0^1 H v_t^\tau dx,$$

ou seja

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx - \int_0^1 \eta v_{xx}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 m \Psi_x^\tau v_t^\tau dx - \int_0^1 H v_t^\tau dx = 0.$$

Multiplicando a equação (3.14) por $g_{i\tau}$ e integrando em $(0, 1)$, chega-se à

$$\int_0^1 c \Psi_t^\tau g_{j,\tau} z_j dx - \int_0^1 (k \Psi_{xx}) g_{j,\tau} z_j dx + \int_0^1 (m v_{xt}) g_{j,\tau} z_j dx = \int_0^1 G g_{j,\tau} z_j dx.$$

Somando em i e usando $\Psi^\tau(\cdot, t) = \sum_{i=1}^{\tau} g_{i,\tau}(t) z_i(\cdot)$, segue

$$\int_0^1 c \Psi_t^\tau \Psi^\tau dx - \int_0^1 k \Psi_{xx} \Psi^\tau dx + \int_0^1 (m v_{xt}) \Psi^\tau dx = \int_0^1 G \Psi^\tau dx,$$

o que implica em

$$\int_0^1 c \Psi_t^\tau \Psi^\tau dx - \int_0^1 (k \Psi_{xx} \Psi^\tau dx + \int_0^1 (m v_{xt}) \Psi^\tau dx - \int_0^1 G \Psi^\tau dx = 0.$$

Com as duas equações iguais a zero.

$$\int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx - \int_0^1 \eta v_{xx}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 m \Psi_x^\tau v_t^\tau dx - \int_0^1 H v_t^\tau dx = 0.$$

$$\int_0^1 c \Psi_t^\tau \Psi^\tau dx - \int_0^1 (k \Psi_{xx} \Psi^\tau dx + \int_0^1 (m v_{xt}) \Psi^\tau dx - \int_0^1 G \Psi^\tau dx = 0.$$

Integrando por partes cada uma destas duas últimas equações e usando as condições iniciais observa-se que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 \eta v_x^\tau v_{xt}^\tau dx - \int_0^1 m \Psi^\tau v_{xt}^\tau dx &= \int_0^1 H v_t^\tau dx + [\eta v_x^\tau(1, t) \\ &- m \Psi(1, t)] v_t^\tau(1, t) - \eta v_x^\tau(0, t) v_t^\tau(0, t) + m \Psi(0, t) v_t^\tau(0, t) \\ &- \int_0^1 c \Psi_t^\tau \Psi^\tau dx - \int_0^1 (m v_{xt}) \Psi^\tau dx = k \Psi_x^\tau(1, t) \Psi^\tau(1, t) \\ &- k \Psi_x^\tau(0, t) \Psi^\tau(0, t) - \int_0^1 k \Psi_x^\tau \Psi_x^\tau dx + \int_0^1 G \Psi^\tau dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 \eta v_x^\tau v_{xt}^\tau dx - \int_0^1 m \Psi^\tau v_{xt}^\tau dx &= \int_0^1 H v_t^\tau dx \\ &- d[(v^\tau(1, t) - g)^+]^\mu v_t^\tau(1, t) - b[(v^\tau(1, t) - g)^+]^l |v_t^\tau(1, t)|^2 \\ &- \epsilon |v_t^\tau(1, t)|^2 - \epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^4, \end{aligned} \tag{3.20}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 c\Psi_t^\tau\Psi^\tau dx + \int_0^1 m\Psi^\tau v_{xt}dx &= -\beta|\Psi^\tau(1,t)|^2 - \lambda k|\Psi^\tau(0,t)|^2 \\ &- \int_0^1 k|\Psi_x^\tau|^2 dx + \int_0^1 G\Psi^\tau dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Somando (3.20) e (3.21)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 \eta v_x^\tau v_{xt}^\tau dx + \int_0^1 c\Psi_t^\tau\Psi^\tau dx + d[(v^\tau(1,t) - g)^+]^\mu v_t^\tau(1,t) \\ = - \int_0^1 k|\Psi_x^\tau|^2 dx - b[(v^\tau(1,t) - g)^+]^l |v_t^\tau(1,t)|^2 - \epsilon |v_t^\tau(1,t)|^2 \\ - \epsilon b |v_t^\tau(1,t)|^4 - \beta |\Psi^\tau(1,t)|^2 - \lambda k |\Psi^\tau(0,t)|^2 + \int_0^1 H v_t^\tau dx \\ + \int_0^1 G \Psi^\tau dx. \end{aligned}$$

Note que o lado esquerdo da igualdade é equivalente à $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t; v^\tau; \Psi^\tau)$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t; v^\tau; \Psi^\tau) &= - \int_0^1 k|\Psi_x^\tau|^2 dx - d[(v^\tau(1,t) - g)^+]^\mu v_t^\tau(1,t) \\ &- b[(v^\tau(1,t) - g)^+]^l |v_t^\tau(1,t)|^2 - \epsilon |v_t^\tau(1,t)|^2 - \epsilon b |v_t^\tau(1,t)|^4 \\ &- \beta |\Psi^\tau(1,t)|^2 - \lambda k |\Psi^\tau(0,t)|^2 + \int_0^1 H v_t^\tau dx + \int_0^1 G \Psi^\tau dx, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Segundo Rivera e Andrade (1999), usando a desigualdade de Gronwall na expressão acima chega-se a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho v_{tt}^\tau v_t^\tau dx + \int_0^1 \eta v_x^\tau v_{xt}^\tau dx + \int_0^1 c\Psi_t^\tau\Psi^\tau dx + d[(v^\tau(1,t) - g)^+]^\mu v_t^\tau(1,t) \\ = E(t; v^\tau; \Psi^\tau) \leq \left\{ \int_0^T \int_0^1 [|H|^2 + |G|^2] dx dt \right\} e^{ct} \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, surge

v^τ é limitada em $L^\infty([0, T]; H^1(0, 1)) \cap W^{1,\infty}([0, T]; L^2(0, 1))$

Ψ^τ é limitada em $L^\infty([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2([0, T]; H^1(0, 1))$,

então

$v_t^\tau(1, t)$ é limitada em $L^4([0, T])$

$\Psi_t^\tau(1, t)$ é limitada em $L^2([0, T])$.

Agora para a estimativa de segunda ordem diferencia-se as equações (3.17) e (3.18)

com relação ao tempo para obter

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho v_{ttt}^\tau w_j dx + \int_0^1 \eta v_{xt}^\tau w_{j,x} dx - \int_0^1 m \Psi_t^\tau w_{j,x} dx = \int_0^1 H_t w_j dx \\
& - d[(v^\tau(1, t) - g)]_t^\mu w_j(1) - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_t(1, t) w_j(1) \\
& - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_{tt}(1, t) w_j(1) - \epsilon v_{tt}^\tau(1, t) w_j(1) \\
& - 3\epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^2 v_{tt}^\tau(1, t) w_j(1)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 c \Psi_{tt}^\tau z_j dx + \int_0^1 k \Psi_{xt}^\tau z_{j,x} dx + \int_0^1 (m v_{xtt}^\tau) z_j dx = \int_0^1 G_t^\tau z_j dx \\
& - \beta \Psi_t^\tau(1, t) z_j - \lambda k \Psi_t(0, t) z_j(0).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Multiplicando a equação (3.22) por $h_{j,\tau}''$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \rho v_{ttt}^\tau h_{j,\tau}'' w_j dx + \int_0^1 \eta v_{xt}^\tau h_{j,\tau}'' w_{j,x} dx - \int_0^1 m \Psi_t h_{j,\tau}'' w_{j,x} dx = \int_0^1 H_t h_{j,\tau}'' w_j dx \\
& - d[(v^\tau(1, t) - g)]_t^\mu h_{j,\tau}'' w_j(1) - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_t(1, t) h_{j,\tau}'' w_j(1) \\
& - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_{tt}(1, t) h_{j,\tau}'' w_j(1) - \epsilon v_{tt}^\tau(1, t) h_{j,\tau}'' w_j(1) \\
& - 3\epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^2 v_{tt}^\tau(1, t) h_{j,\tau}'' w_j(1),
\end{aligned}$$

somando em j e usando $v_{tt}^\tau(\cdot, t) = \sum_{j=1}^{\tau} h_{j\tau}''(t)w_j(\cdot)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho v_{ttt}^\tau v_{tt}^\tau dx + \int_0^1 \eta v_{xt}^\tau v_{ttx}^\tau dx - \int_0^1 m \Psi_t v_{ttx}^\tau dx &= \int_0^1 H_t v_{tt}^\tau dx \\
+ d[(v^\tau(1, t) - g)]_t^\mu v_{tt}^\tau(1, t) - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_t(1, t) v_{tt}^\tau(1, t) \\
- b[(v(1, t) - g)]_t^l v_{tt}(1, t) v_{tt}^\tau(1, t) - \epsilon v_{tt}^\tau(1, t) v_{tt}^\tau(1, t) \\
- 3\epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^2 |v_{tt}^\tau(1, t)|^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Multiplicando (3.23) por g'_j , somando em j e usando $\Psi_t^\tau(\cdot, t) = \sum_{j=1}^{\tau} g'_{j,\tau}(t)z_j(\cdot)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 c \Psi_{tt}^\tau \Psi_t^\tau dx + \int_0^1 k \Psi_{xt}^\tau \Psi_{tx}^\tau dx + \int_0^1 m v_{ttx}^\tau \Psi_t^\tau dx &= \int_0^1 G_t^\tau \Psi_t^\tau dx \\
- \beta(v^\tau(1, t))_t \Psi_t^\tau(1, t) - \lambda k \Psi_t^\tau(0, t) \Psi_t^\tau(0, t),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

somando (3.24) e (3.25), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \rho v_{ttt}^\tau v_{tt}^\tau dx + \int_0^1 \eta v_{xt}^\tau v_{ttx}^\tau dx + \int_0^1 c \Psi_{tt}^\tau \Psi_t^\tau dx &= -k \int_0^1 |\Psi_{xt}^\tau|^2 dx \\
+ d[(v^\tau(1, t) - g)]_t^\mu v_{tt}^\tau(1, t) - b[(v(1, t) - g)]_t^l v_t(1, t) v_{tt}^\tau(1, t) \\
- b[(v(1, t) - g)]_t^l v_{tt}^\tau(1, t) v_{tt}^\tau(1, t) - \epsilon |v_{tt}^\tau(1, t)|^2 \\
- 3\epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^2 |v_{tt}^\tau(1, t)|^2 - \beta(v^\tau(1, t))_t \Psi_t^\tau(1, t) - \lambda k |\Psi_t^\tau(0, t)|^2 \\
+ \int_0^1 H_t v_{tt}^\tau dx + \int_0^1 G_t \Psi_t^\tau dx.
\end{aligned}$$

Ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \rho |v_{tt}^\tau|^2 dx + \int_0^1 \eta |v_{xt}^\tau|^2 dx + \int_0^1 c |\Psi_t^\tau|^2 dx \right] &= d[(v^\tau(1, t) - g)]_t^\mu v_{tt}^\tau(1, t) \\
\underbrace{-b[(v^\tau(1, t) - g)]_t^l v_t^\tau(1, t) v_{tt}^\tau(1, t)}_I &- b[(v^\tau(1, t) - g)]_t^l |v_{tt}^\tau(1, t)|^2 - \epsilon |v_{tt}^\tau(1, t)|^2 \\
- 3\epsilon b |v_t^\tau(1, t)|^2 |v_{tt}^\tau(1, t)|^2 - \underbrace{\beta(v^\tau(1, t))_t \Psi_t^\tau(1, t)}_{II} &- \lambda k |\Psi_t^\tau(0, t)|^2 \\
+ \int_0^1 H_t v_{tt}^\tau dx + \int_0^1 G_t \Psi_t^\tau dx.
\end{aligned}$$

Usando o fato que v^τ é limitado por $L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$, conclui-se que existem constantes positivas c e C , tal que para I e II ocorre

$$\begin{aligned} \beta'(v^\tau(1, t))v_t^\tau(1, t)\Psi_t^\tau(1, t) &\leq c|v_t^\tau(1, t)|^2 + \frac{\lambda k}{2}(0)|\Psi_t^\tau(1, t)|^2 \\ b[(v(1, t) - g)^+]^\mu v_t^\tau(1, t)v_{tt}^\tau(1, t) &\leq b\mu[(v^\tau(1, t) - g)^+]^{\mu-1} \text{sign}(v^\tau(1, t) - g) \\ &\quad |v_t^\tau(1, t)|^2 v_{tt}(1, t) \\ &\leq \frac{C}{\epsilon}|v_t^\tau(1, t)|^4 + \frac{\epsilon}{2}|v_{tt}^\tau(1, t)|^2 \end{aligned}$$

onde sign é a função

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} -1, & \text{quando } a < 0, \\ 0, & \text{quando } a = 0, \\ 1, & \text{quando } a > 0. \end{cases}$$

Segundo Rivera e Andrade (1999) da equação (3.17) e usando $v^\tau(x, 0) = v_t^\tau(x, 0) = 0$

$$\int_0^1 |v_{tt}^\tau(x, 0)|^2 dx \leq C \int_0^1 [|H|^2 + |G|^2] dx,$$

de ambas as relações e usando a Desigualdade de Gronwall chega-se à

$$\begin{aligned} v^\tau &\rightharpoonup v \quad \text{em } L^2(0, T; H^2(0, 1)) \\ v_t^\tau &\rightharpoonup v_t \quad \text{em } L^2(0, T; H^1(0, 1)) \\ v_{tt}^\tau &\rightharpoonup v_{tt} \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(0, 1)). \end{aligned}$$

□

Ambas as convergências são suficientes para passar o limite nas equações (3.13) e (3.14).

O seguinte passo é considerar o caso para o dado inicial é não nulo. Seja

$$\rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x = f \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.26)$$

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} = g \quad \text{em }]0, 1[\times]0, \infty[\quad (3.27)$$

com as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \text{em }]0, 1[$$

$$\begin{aligned} \eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) = & -d[(u(1, t) - g)^\mu] - b[(u(1, t) - g)^+]^l u_t(1, t) \\ & - \epsilon u_t(1, t) - \epsilon b u_t^3(1, t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$k\theta_x(1, t) = -\beta\theta(1, t) \quad (3.29)$$

$$\theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t) \quad (3.30)$$

$$u(0, t) = t \quad \text{com } t > 0. \quad (3.31)$$

Para obter uma solução forte para ambos os problemas deve-se impor uma condição compatível nos dados iniciais. Esta condição é obtida fazendo $t \rightarrow 0$ na relação (3.28) e assumindo que $u_0, \theta_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ e $u_1 \in H_0^1(0, 1)$.

Então

$$u_{0,x}(1) = 0, \quad \theta_0(1) = 0, \quad \theta_{0,x}(0) = 0. \quad (3.32)$$

Assumindo inicialmente que

$$u_{1,x}(1) = 0. \quad (3.33)$$

Nestas condições, se definir

$$U = u - tu_1 - u_0,$$

$$\Theta = \theta - \theta_0.$$

obtem-se

$$U(x, 0) = u_0 - u_0 = 0, \quad U_t(x, 0) = u_t(x, 0) - u_1 = u_1 - u_1 = 0$$

e

$$\theta(x, 0) = \theta_0 - \theta_0 = 0.$$

Logo U e θ satisfazem as equações (3.8)-(3.9).

Teorema 3.1

Supondo $f, h \in H^1(0, T; L^2(0, 1))$ e considerando os dados iniciais, tais que

$$\theta_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

$$u_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

$$u_1 \in H_0^1(0, 1).$$

Assim, estes dados iniciais satisfazem as equações (3.32)-(3.33). Então, existe uma solução do problema (3.26)-(3.27), tal que

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(0, 1))$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

$$\theta_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

$$\theta \in L^2(0, T; H^1(0, 1)).$$

O próximo passo é mostrar a unicidade da solução. Pelos resultados de Rivera (1998), demonstra-se o seguinte Lema.

Lema 3.2

Suponha $b = 0$ e $f, h \in H^1(0, T; L^2(0, 1))$ com condições iniciais satisfazendo

$$\theta_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

$$u_0 \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$$

$$u_1 \in H_0^1(0, 1).$$

Então, o sistema (3.26)-(3.31) admite uma única solução.

Demonstração

Sejam (u^1, θ^1) e (u^2, θ^2) duas soluções do sistema (3.1)-(3.2)

$$u = u^1 - u^2$$

$$\theta = \theta^1 - \theta^2.$$

Então de (3.26) e (3.27) obtém-se respectivamente

$$\rho u_{tt}^1 - \eta u_{xx}^1 + m\theta_x^1 = f$$

$$c\theta_t^1 - k\theta_{xx}^1 + mu_{xt}^1 = g$$

e

$$\rho u_{tt}^2 - \eta u_{xx}^2 + m\theta_x^2 = f$$

$$c\theta_t^2 - k\theta_{xx}^2 + mu_{xt}^2 = g.$$

Subtraindo as respectivas equações acima e tomando $u = u^1 - u^2$, $\theta = \theta^1 - \theta^2$, segue-se

$$\rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x = 0 \tag{3.34}$$

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} = 0 \tag{3.35}$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned}\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) &= -\epsilon u_t(1, t) - \frac{1}{\epsilon} d_1 \\ -k\theta_x(1, t) &= d_2\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}d_1 &= ([u^2(1, t) - g]^+)^{\mu} - ([u^1(1, t) - g]^+)^{\mu} \\ d_2 &= \beta(u^2(1, t)\theta^2(1, t) - u^1(1, t)\theta^1(1, t)).\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.34) por u_t e integrando de 0 a 1, segue-se

$$\int_0^1 \rho u_{tt} u_t dx - \int_0^1 \eta u_{xx} u_t dx + \int_0^1 m \theta_x u_t dx = 0.$$

Integrando por partes o segundo membro da igualdade acima $u_{xx} u_t dx$, tem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho u_{tt} u_t dx - \eta u_x u_t \Big|_0^1 + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx + \int_0^1 m \theta_x u_t dx &= 0 \\ \int_0^1 \rho u_{tt} u_t dx - \eta u_x(1, t) u_t(1, t) + \eta u_x(0, t) u_t(0, t) + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx \\ + \int_0^1 m \theta_x u_t dx &= 0.\end{aligned}$$

Integrando por partes a terceira expressão do lado esquerdo da igualdade acima, segue

$$\begin{aligned}\int_0^1 \rho u_{tt} u_t dx - \eta u_x(1, t) u_t(1, t) + \eta u_x(0, t) u_t(0, t) + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx + m\theta(1, t) u_t(1, t) \\ - m\theta(0, t) u_t(0, t) - \int_0^1 m\theta u_{xt} dx &= 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^1 \rho u_{tt} u_t dx + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx - u_t(1, t)(\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)) - \int_0^1 m\theta u_{xt} dx = 0.$$

Multiplicando a equação (3.35) por $-\theta$ e integrando de 0 a 1

$$-\int_0^1 c\theta_t\theta dx + \int_0^1 k\theta_{xx}\theta dx - \int_0^1 mu_{xt}\theta dx = 0.$$

Integrando por partes, segue-se

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 c\theta_t\theta dx + k\theta_x\theta \Big|_0^1 - \int_0^1 k\theta_x^2 dx - \int_0^1 mu_{xt}\theta dx = 0 \\ & -\int_0^1 c\theta_t\theta dx + k\theta_x(1,t)\theta(1,t) - k\theta_x(0,t)\theta(0,t) - \int_0^1 k\theta_x^2 dx - \int_0^1 mu_{xt}\theta dx = 0. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho u_{tt}u_t dx + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx - u_t(1,t)(\eta u_x(1,t) - m\theta(1,t)) - \int_0^1 m\theta u_{xt} dx = \\ & -\int_0^1 c\theta_t\theta dx + k\theta_x(1,t)\theta(1,t) - k\theta_x(0,t)\theta(0,t) - \int_0^1 k\theta_x^2 dx \\ & - \int_0^1 mu_{xt}\theta dx = 0. \end{aligned}$$

Essa expressão equivale a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho u_{tt}u_t dx + \int_0^1 \eta u_x u_{xt} dx + \int_0^1 c\theta_t\theta dx = - \int_0^1 k\theta_x\theta_x dx + u_t(1,t)(\eta u_x(1,t) \\ & - m\theta(1,t)) - \lambda k|\theta(0,t)|^2 + k\theta_x(1,t)\theta(1,t). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (\rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + c|\theta|^2) dx &= - \int_0^1 k|\theta_x|^2 dx - \epsilon|u_t(1,t)|^2 - \frac{1}{\epsilon}u_t(1,t)d_1 \\ & - \lambda k|\theta(0,t)|^2 + k\theta_x(1,t)\theta(1,t). \end{aligned}$$

Denotando $I(t) = \int_0^1 (\rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + c|\theta|^2) dx$, segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} I(t) = - \int_0^1 k|\theta_x|^2 dx - \epsilon|u_t(1,t)|^2 - \frac{1}{\epsilon}u_t(1,t)d_1 - \lambda k|\theta(0,t)|^2 - \theta(1,t)d_2.$$

Desde que as funções $x \mapsto |x|$ e β são de Lipschitz e u é uniformemente limitada

sobre $]0, 1[\times]0, T[$, então existem constantes positivas C_0 e C_1 satisfazendo

$$\begin{aligned}
|d_1| &= |([u^1(1, t) - g]^+)^{\mu} - ([u^2(1, t) - g]^+)^{\mu}| \leq C_0 |u(1, t)| \\
|d_2| &= |\beta(u^2(1, t)\theta^2(1, t)) - \beta(u^1(1, t)\theta^1(1, t))| \\
&= |\beta(u^2(1, t))\theta^2(1, t) - \beta(u^2(1, t))\theta^1(1, t) + \beta(u^2(1, t))\theta^1(1, t) \\
&\quad - \beta(u^1(1, t))\theta^1(1, t)| \\
&= |\beta(u^2(1, t))(\theta^2(1, t) - \theta^1(1, t)) + [\beta(u^2(1, t)) - \beta(u^1(1, t))]\theta^1(1, t)| \\
&\leq |\beta(u^2(1, t))(\theta(1, t))| + |[\beta u(1, t)]\theta^1(1, t)| \\
&\leq |\beta(u^2(1, t))(\theta(1, t))| + |k|u|\theta^1(1, t)| \\
&\leq C_1\{|u(1, t)| + |\theta(1, t)|\}.
\end{aligned}$$

Então, existe um $C > 0$ tal que para $C = \max\{C_0, C_1\}$

$$\frac{d}{dt}I(t) \leq C \{|u(1, t)|^2 + |\theta(1, t)|^2\} \leq CI(t),$$

de acordo com Rivera (1998) usando o Lema de Gronwall chega-se que $I(t) \equiv 0$ o que implica $u^1 = u^2$, $\theta^1 = \theta^2$ e graças a regularidade das condições iniciais disto segue a unicidade do problema. \square

Usando a unicidade pode-se estender a solução para $T = \infty$. A seguir, será enunciado um Lema que é de grande importância para sua demonstração ver (Kim, 1989).

Lema 3.3

Dada v^τ uma sequência de funções satisfazendo

$$\begin{array}{lll}
v^\tau \rightarrow v & \text{fraco estrela em} & L^\infty(0, T; H^\beta(0, L)) \\
v_t^\tau \rightarrow v_t & \text{fraco em} & L^\infty(0, T; H^\alpha(0, L))
\end{array}$$

onde $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Então,

$$v^\tau \rightarrow v \quad \text{forte em } C([0, T]; H^s(0, L))$$

para qualquer $s < \beta$.

Nestas condições, é possível demonstrar a existência de resultado para soluções fracas.

Segundo Coddington e Levinson (1995), pelo Teorema de Caratheodory pode-se estender as soluções aproximadas em cada subintervalo $(0, x_\tau)$ para todo o intervalo $(0, 1)$.

Teorema 3.2

Dado o sistema

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x &= f \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} &= g \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1, \quad \theta(x, 0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) &= -d[(u(1, t) - g)^\mu] - b[(u(1, t) - g)^+]^l u_t(1, t) \\ k\theta_x(1, t) &= -\beta(u(1, t))\theta(1, t) \\ \theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t), \quad u(0, t) = 0 & \quad t > 0 \end{aligned}$$

existe, pelo menos, uma solução fraca satisfazendo

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) \\ u_t &\in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \\ \theta &\in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1)) \end{aligned}$$

Demonstração

3.1.1 O Problema de Signorini

Para prosseguir os estudos com o Problema de Signorini deve-se considerar o seguinte Lema.

Lema 3.4

Seja $f \in H^1(0, T, L^2(\gamma, \vartheta))$ e $h \in C^4(\gamma, \vartheta)$. Então, para uma função $v \in H^2(0, T; L^2(\gamma, \vartheta)) \cap L^2(0, T; H^2(\gamma, \vartheta))$, b e a funções que dependem de x , satisfazendo

$$bv_{tt} - (av_x)_x = f, \quad (3.36)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_tv_x dx &= \int_{\gamma}^{\vartheta} hv_x f dx + \frac{1}{2} (b(\vartheta)h(\vartheta)|v_t(\vartheta, t)|^2 + a(\vartheta)h(\vartheta)|v_x(\vartheta, t)|^2) \\ &- \frac{1}{2} (b(\gamma)h(\gamma)|v_t(\gamma, t)|^2) - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\vartheta} [(bh)_x |v_t|^2 + \left(\frac{h}{a}\right)_x |av_x|^2] dx. \end{aligned}$$

Demonstração

Multiplicando (3.36) por hv_x e integrando no intervalo $[\gamma, \vartheta]$, obtemos

$$\int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_{tt}v_x dx = \int_{\gamma}^{\vartheta} a_x hv_x v_x dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} ahv_{xx}v_x dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} fhv_x dx$$

ou seja

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_{tt}v_x + \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_tv_{xt} &= \int_{\gamma}^{\vartheta} \rho hv_tv_{xt} + \int_{\gamma}^{\vartheta} ha_x v_x v_x dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} \frac{h}{a} av_x av_{xx} dx \\ &+ \int_{\gamma}^{\vartheta} a_x hv_x v_x dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} fhv_x dx \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_t v_x dx &= \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\vartheta} bh \frac{d}{dx} |v_t|^2 dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} \frac{h}{a} (av_x) av_{xx} dx \\ &+ \int_{\gamma}^{\vartheta} \frac{h}{a} (av_x) a_x v_x dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} hv_x f dx \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_t v_x dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\vartheta} bh \frac{d}{dx} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\vartheta} \frac{h}{a} \frac{d}{dx} |av_x|^2 dx + \int_{\gamma}^{\vartheta} hv_x f dx$$

integrando por partes, vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\gamma}^{\vartheta} bhv_t v_x dx &= \int_{\gamma}^{\vartheta} hv_x f dx + \frac{1}{2} b(\vartheta) h(\vartheta) |v_t(\vartheta, t)|^2 - \frac{1}{2} b(\gamma) h(\gamma) |v_t(\gamma, t)|^2 \\ &- \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\vartheta} (bh)_x |v_t|^2 dx - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

De acordo com Rivera e Andrade (1999), segue a seguinte observação.

Observação 3.1 Como consequência do Lema (3.4) qualquer solução v de (3.36), que satisfaz

$$v_x, v_t \in L^{\infty}(0, T; L^2(0, 1))$$

com a energia limitada pela constante C , verifica-se que

$$\int_0^T \int_{1-\delta}^1 \{|v_x(x, t)|^2 + |v_t(x, t)|^2\} dx dt + \int_0^T \int_0^{\delta} \{|v_x(x, t)|^2 + |v_t(x, t)|^2\} dx dt \leq C\delta,$$

para uma constante positiva C .

Agora prova-se a existência de solução fraca do Problema de Signorini

$$\rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x = f \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T)$$

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + m u_{xt} = g \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(1, t) &\leq g \\ \eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) &\leq 0 \\ (u(1, t) - g)[\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)] &= 0 \end{aligned}$$

e as condições

$$\begin{aligned} \eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) &= -d[(u(1, t) - g)^+]^\mu - b[(u(1, t) - g)^+]^l u_t(1, t) \\ k\theta_x(1, t) &= -\beta(u(1, t))[\theta(1, t)]. \end{aligned}$$

com um limite quando $d \rightarrow \infty$ e $b = 0$. Para esse fim, introduz-se as notações a seguir

$$\begin{aligned} H_E^1(0, 1) &= \{\varphi \in H^1(0, 1); \varphi(0) = 0\} \\ K &= \{\varphi \in H_E^1(0, 1); \varphi(1) \leq g\}. \end{aligned}$$

Semelhante à Rivera (1998).

Observação 3.2

O par (u, θ) é uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.2) com as condições de contorno

$$u(1, t) \leq g \tag{3.37}$$

$$\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) \leq 0 \tag{3.38}$$

$$(u(1, t) - g)[\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)] = 0 \tag{3.39}$$

$$k\theta_x(1, t) + \beta\theta(1, t) = 0, \tag{3.40}$$

quando

$$\theta \in L^2(0, T; H_E^1(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

$$u \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; K).$$

Estas são as condições que definem o Problema de Contato de Signorini, ou seja, quando o obstáculo é rígido. Além de (3.37)-(3.40) considere, também, as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad u(0, t) = 0 \quad (3.41)$$

$$\theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t), \quad t > 0 \quad (3.42)$$

e as seguintes relações

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 -\rho u_t(v_t - u_t) + \eta u_x(v_x - u_x) - m\theta(v_x - u_x) dx dt \\ & \geq - \int_0^1 \rho u_t(T)(v(T) - u(T)) dx + \int_0^1 \rho u_1(v(\cdot, 0) - u_0) dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 -c\theta w_t + k\theta_x w_x - mu_t w_t dx dt + \int_0^T \beta\theta(1, t)w(1) dt \\ & = \int_0^1 c\theta_0(x)w(x, 0) dx + \int_0^1 mu_0(x)w(x, 0) dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\forall v \in H^1((0, 1) \times (0, T)) \quad \forall w \in H^1(0; T; H_E^1(0, 1)),$$

tal que $v(\cdot, t) \in K \forall t$ e $w(\cdot, T) = 0$

Neste problema é usado a condição inicial para θ diferente de Rivera (1998) que considera $\theta_x(0, t) = 0$ e $\theta \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$.

Observação 3.3

Devido ao Lema 3.3 temos

$$u \in C([0, T], T; H^{\frac{1}{2}}(0, 1)).$$

Desde que a relação (3.43) implica

$$\rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x = 0$$

no sentido das distribuições, segue-se que

$$u_{tt} \in C([0, T], T; H^{-1}(0, 1)).$$

Usando o Lema 3.3, obtém-se ainda que

$$u_t \in C([0, T], T; H^{-\frac{1}{2}}(0, 1)).$$

Daí, o termo

$$\int_0^1 u_t(T)(v(T) - u(T))dx$$

faz sentido como uma dualidade entre os espaços

$$H^{-\frac{1}{2}}(0, 1) \quad \text{e} \quad H^{\frac{1}{2}}(0, 1).$$

Rivera e Andrade (1999) afirmam que é possível mostrar quando a solução é regular que o problema (3.41)-(3.44) é equivalente ao sistema (3.1)-(3.2) com os valores de contorno (3.37)-(3.40).

Agora existem condições de demonstrar a existência de solução fraca do Problema de Signorini.

Teorema 3.3

Sejam

$$T > 0, \quad \theta_0 \in L^2(0, 1), \quad u_0 \in K, \quad u_1 \in L^2(0, 1)$$

e

$$\beta \text{ satisfazendo } 0 < \beta_0 \leq \beta(\cdot) \leq M \quad \text{e} \quad |\beta| \leq M.$$

(Já que β é uma função constante satisfaz esta condição) Então, (3.41)-(3.44) admite, pelo menos, uma solução fraca.

Demonstração

Note que para $\mu = 1$, $d = 1/\varepsilon$ e $b = 0$, o Lema 3.1 garante a existência da solução do sistema

$$\rho u_{tt}^\varepsilon - (\eta u_x^\varepsilon)_x + (m\theta^\varepsilon)_x = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T) \quad (3.45)$$

$$\theta_t^\varepsilon - k\theta_{xx}^\varepsilon + mu_{xt}^\varepsilon = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, T), \quad (3.46)$$

satisfazendo as condições de contorno

$$\eta u_x^\varepsilon(1, t) = m\theta^\varepsilon - 1/\varepsilon(u^\varepsilon(1, t) - g)^+ - \varepsilon u_t(1, t)$$

$$k\theta_x^\varepsilon(1, t) = -\beta\theta^\varepsilon(1, t)$$

$$\theta_x^\varepsilon(0, t) = \lambda\theta^\varepsilon(0, t)$$

$$u^\varepsilon(0, t) = 0$$

com as condições iniciais

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0, \quad u_t^\varepsilon(x, 0) = u_1, \quad \theta^\varepsilon(x, 0) = \theta_0(x).$$

Note que

$$(u_t^\varepsilon, u_x^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \rightarrow (u_t, u_x, \theta) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \times L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \times L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

e que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(u^\varepsilon(1, t) - g)^+ \text{ é limitada em } L^2(0, T).$$

Isto significa que se $\varepsilon \rightarrow 0$, então $(u^\varepsilon(1, t) - g)^+ \rightarrow 0$.

Desde que u^ε converge uniformemente para $u \in]0, 1[\times]0, T[$, então

$$u(1, t) - g \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Agora deve-se provar que a desigualdade (3.43) é satisfeita.

Multiplicando a equação (3.45) por $(v - u^\varepsilon)$ com $v \in K$ e integrando por partes, segue

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^T \int_0^1 -\rho u_t^\varepsilon (v_t - u_t^\varepsilon) + \eta u_x^\varepsilon (v_x - u_x^\varepsilon) - m\theta (v_x - u_x^\varepsilon) dx}_{J} \\ &= - \int_0^1 \rho u_t^\varepsilon(T) (v(T) - u^\varepsilon(T)) dx + \int_0^1 \rho u_t^\varepsilon(0) (v(0) - u_0^\varepsilon) dx \\ & \quad - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (u^\varepsilon(1, t) - g)^+ (v - u^\varepsilon(1, t)) dt}_{\geq 0} - \varepsilon \int_0^T u_t^\varepsilon(1, t) (v - u^\varepsilon(1, t)) dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Note que

$$J = \int_0^T \int_0^1 [-\rho u_t^\varepsilon v_t + \eta u_x^\varepsilon v_x - m\theta^\varepsilon (v_x - u_x^\varepsilon)] dx dt + \int_0^T \int_0^1 (\rho |u_t^\varepsilon|^2 - \eta |u_x^\varepsilon|^2) dx dt.$$

Para mostrar que u é a solução da equação de (3.41)-(3.44), deve-se provar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^1 (\rho |u_t^\varepsilon|^2 - \eta |u_x^\varepsilon|^2) dx dt = \int_0^T \int_0^1 (\rho |u_t|^2 - \eta |u_x|^2) dx dt. \quad (3.48)$$

Do Lema da divergência de Rivera e Andrade (1999)

$$\rho |u_t^\varepsilon|^2 - \eta |u_x^\varepsilon|^2 \rightarrow \rho |u_t|^2 - \eta |u_x|^2$$

no sentido das distribuições.

Usando a observação 3.3, segue

$$\int_0^T \int_{1-\delta}^1 (\rho |u_t^\varepsilon|^2 - \eta |u_x^\varepsilon|^2) dx dt + \int_0^T \int_0^\delta (\rho |u_t^\varepsilon|^2 - \eta |u_x^\varepsilon|^2) dx dt \leq \delta CE(0).$$

Denotando por Ψ uma função teste, tal que $\Psi(x) = 1$ em $[\delta, 1 - \delta]$, para $\delta \in (0, 1)$ e $\Psi \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_0^1 (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2 - \rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2) dxdt \right| \\
& \leq \left| \Psi \int_0^T \int_0^1 (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2 - \rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2) dxdt \right| \\
& + \underbrace{\left| \int_0^T \int_{1-\delta}^1 (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2) dxdt + \int_0^T \int_0^\delta (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2) dxdt \right|}_{\leq C_1 \delta E(0)} \\
& - \underbrace{\left| \int_0^T \int_{1-\delta}^1 (\rho|u_t|^2 - \eta|u_x|^2) dxdt + \int_0^T \int_0^\delta (\rho|u_t|^2 - \eta|u_x|^2) dxdt \right|}_{\leq C_2 \delta E(0)} \\
& + \underbrace{(1 - \Psi)}_{\leq 1} \int_0^T \int_{1-\delta}^\delta (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2 - \rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2) dxdt \Big|.
\end{aligned}$$

Logo existe uma constante positiva $C > 0$, tal que

$$\left| \int_0^T \int_0^1 (\rho|u_t^\varepsilon|^2 - \eta|u_x^\varepsilon|^2 - \rho|u_t|^2 + \eta|u_x|^2) dxdt \right| \leq C\delta \quad \forall \delta > 0,$$

o que implica a relação (3.48). De onde chega-se a

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^1 -(\rho u_t^\varepsilon(v_t - u_t^\varepsilon) + \eta u_x^\varepsilon(v_x - u_x^\varepsilon) - m\theta^\varepsilon(v_x - u_x^\varepsilon)) dxdt \\
& = \int_0^T \int_0^1 (-\rho u_t(v_t - u_t) + \eta u_x(v_x - u_x) - m\theta(v_x - u_x)) dxdt. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

De (3.47) e da relação acima

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 (-\rho u_t^\varepsilon(v_t - u_t^\varepsilon) + \eta u_x^\varepsilon(v_x - u_x^\varepsilon) - m\theta^\varepsilon(v_x - u_x^\varepsilon)) dxdt \\
& \geq - \int_0^1 \rho u_t^\varepsilon(x, T)(v(x, T) - u^\varepsilon(x, T)) dx + \int_0^1 \rho u_t^\varepsilon(x, 0)(v(x, 0) - u^\varepsilon(x, 0)) dx \\
& \quad - \varepsilon \int_0^T u_t^\varepsilon(1, t)(v(1, t) - u^\varepsilon(1, t)) dt \\
& = - \int_0^1 \rho u_t^\varepsilon(x, T)(v(x, T) - u^\varepsilon(x, T)) dx + \int_0^1 \rho u_1^\varepsilon(v(x, 0) - u_0^\varepsilon) dx
\end{aligned}$$

$$-\varepsilon \int_0^T u_t^\varepsilon(1, t)(v(1, t) - u^\varepsilon(1, t))dt.$$

Por hipótese $\varepsilon \rightarrow 0$, então

$$\varepsilon \int_0^T u_t^\varepsilon(1, t)(v(1, t) - u^\varepsilon(1, t))dt \rightarrow 0.$$

Usando a convergência (3.49) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que a relação (3.43) é satisfeita.

A relação (3.44) sempre é satisfeita, basta fazer a integração por partes.

Portanto, das relações serem satisfeitas isto significa que existe solução para o Problema de Signorini. \square

3.1.2 Decaimento Exponencial

Provaremos que a solução do problema de contato (3.1)-(3.7) para $b = 0$, assim como a solução do Problema de Signorini decai exponencialmente a zero quando o tempo tende para o infinito.

A razão de tomar $b = 0$ é porque é provada a unicidade para este caso. Para simplificar assume-se que $f = h = 0$.

Observe que o mesmo resultado também é válido para f e g satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1 decaindo exponencialmente a zero.

Primeiro será provado que a energia associada ao problema penalizado decai exponencialmente a zero quando o tempo tende ao infinito. Assim, da convergência da solução $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$, que já foi provada no Teorema 3.3, conclui-se que a solução do Problema de Signorini, também, decai exponencialmente para zero quando o tempo tende ao infinito.

Para simplificar omiti-se o índice ε .

Primeiramente considerar o problema penalizado na sua formulação

variacional

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\rho u_{tt}v + \eta u_x v_x - m\theta v_x) dx &= -d([u(1,t) - g]^+)^\mu v(1,t) - \varepsilon u_t v(1,t) \quad (3.50) \\ \int_0^1 (c\theta_t w - k\theta_x w_x + m u_{xt} w) dx &= -\beta(u(1,t))\theta(1,t)w(1,t) \\ &\quad - \lambda k\theta(0,t)w(0,t) \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\forall v \in H_0^1((0,1) \times (0,T)) \text{ com } v(0,t) = 0 \text{ e } \forall w \in H^1(0,T, H_0^1(0,1)).$$

Introduzindo a energia associada ao problema penalizado

$$\hat{E}(t, u, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho |u_t|^2 + \eta |u_x|^2 + c |\theta|^2) dx + \frac{d}{\mu + 1} |(u(1,t) - g)^+|^{\mu+1}.$$

Fazendo

$$v = u_t \quad \text{em (3.50)}$$

$$w = \theta. \quad \text{em (3.51).}$$

Então em (3.50) e (3.51) segue-se, respectivamente

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\rho u_{tt} u_t + \eta u_x u_{xt} - (m\theta) u_{xt}) dx &= 0 = - \int_0^1 (c\theta_t \theta - k\theta_x \theta_x - m u_{xt} \theta) dx \\ -d([u(1,t) - g]^+)^\mu u_t(1,t) - \varepsilon |u_t(1,t)|^2 &- \beta(u(1,t)) |\theta(1,t)|^2 - \lambda k |\theta(0,t)|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \{\rho |u_t|^2 - \eta |u_x|^2 + c |\theta|^2\} dx &+ \frac{d}{\mu + 1} ([u(1,t) - g]^+)^{\mu+1} \\ &= - \int_0^1 k |\theta_x|^2 dx - \varepsilon |u_t(1,t)|^2 - \beta |\theta(1,t)|^2 - \lambda k |\theta(0,t)|^2. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \hat{E}(t, u, \theta) = - \int_0^1 k |\theta_x|^2 dx - \varepsilon |u_t(1,t)|^2 - \beta (u(1,t)) |\theta(1,t)|^2 - \lambda k |\theta(0,t)|^2$$

Sem perda de generalidade, supondo que $\rho = c = 1$.

Para obter o decaimento exponencial da solução, introduz-se as funções φ e p dadas por

$$\begin{aligned} -\varphi_x &= u, & \varphi(0, t) &= \varphi_x(1, t) = 0 \\ -p_{xx} &= \frac{1}{m}\theta, & p_x(0, t) &= p_x(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Sob essas condições segue o seguinte Lema.

Lema 3.5

Para qualquer $\delta > 0$, existe uma constante positiva C_δ , tal que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx + C_\delta \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \delta \int_0^1 |u_x|^2 dx + \frac{\eta_0 \delta}{8} |u_x(1, t)|^2.$$

Demonstração

Dado que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx = \int_0^1 \frac{1}{m} \theta_t \varphi_{xt} dx + \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xtt} dx.$$

Multiplicando a equação (3.46) por $\frac{1}{m} \varphi_{xt}$ e integrando de 0 a 1, obtém-se

$$\int_0^1 \frac{1}{m} \theta_t \varphi_{xt} dx - \int_0^1 \frac{1}{m} k \theta_{xx} \varphi_{xt} dx + \int_0^1 \frac{1}{m} u_{xt} \varphi_{xt} dx = 0.$$

Da equação acima chega-se

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{m} k \theta_{xx} \varphi_{xt} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{m} u_{xt} \varphi_{xt} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xtt} dx}_{I_3}.$$

Usando $-\varphi_{xt} = u_t$ e considerando a desigualdade que Rivera e Andrade (1999) usam, obtém-se as expressões a seguir.

$$\int_0^1 k \theta_{xx} \frac{1}{m} \varphi_{xt} dx \leq c \left(\int_0^1 |\theta_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\varphi_{xt}|^2 dx \right) \leq c \left(\int_0^1 |\theta_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u_t|^2 dx \right)$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Assim, para $C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 |u_t|^2 dx - \frac{1}{m} k\theta_x(0)\varphi_{xt}(0) \\
I_2 &= - \int_0^1 |u_t|^2 dx \\
I_3 &= - \int_0^1 p_{xx}\varphi_{xtt} dx \\
&= -p_x\varphi_{xtt}(1, t) + p_x\varphi_{xtt}(0, t) + \int_0^1 p_x\varphi_{xxtt} dx \\
&= \int_0^1 p_x u_{tt} dx \\
&= \int_0^1 p_x [(\eta u_x) - (m\theta)]_x dx \\
&= [\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)]p_x(1, t) - \int_0^1 \frac{1}{m} \eta u_x \theta dx + \int_0^1 |\theta|^2 dx.
\end{aligned}$$

Das expressões I_1, I_2, I_3 encontra-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx &\leq C \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 |u_t|^2 dx - \frac{1}{m} k\theta_x(0)\varphi_{xt}(0) - \int_0^1 |u_t|^2 dx \\
&\quad + \int_0^1 |\theta|^2 dx - \int_0^1 \frac{1}{m} \eta u_x \theta dx + [\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)]p_x(1, t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx &\leq -\frac{3}{4} \int_0^1 |u_t|^2 dx - \frac{1}{m} k\theta_x(0)\varphi_{xt}(0) + C \int_0^1 |\theta_x|^2 dx \\
&\quad - \int_0^1 \frac{1}{m} \eta u_x \theta dx + [\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)]p_x(1, t). \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Holder e as Desigualdades de Sobolev encontradas em Adams (1975) para cada termo de (3.52). Existe uma constante positiva C , tal que

$$\begin{aligned}
- \int_0^1 \frac{1}{m} \eta u_x \theta dx &\leq C \left(\int_0^1 |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
[\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t)]p_x(1, t) &\leq C \int_0^1 |\theta_x|^2 + |\theta|^2 dx + C \left(\int_0^1 |\theta_x|^2 + |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |u_x(1, t)|
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m}k\theta_x(0)\varphi_{xt}(0) = -\frac{1}{m}\lambda k\theta(0)\varphi_{xt}(0) \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |u_t|^2 dx + C \int_0^1 |\theta_x|^2 + |\theta|^2 dx.$$

Juntando as desigualdades e substituindo em (3.52) resulta a demonstração. \square

Observação 3.4

Aplicando o Lema 3.4 na equação

$$u_{tt} - \eta u_{xx} = -m\theta_x$$

e tomando $h = x - \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, $\vartheta = 1$, $b = 1$, η e a funções constantes, segue-se

$$\begin{aligned} \frac{-d}{dt} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) u_t u_x dx &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) u_x (-m)\theta_x dx \\ &\quad - \frac{1}{4} |u_t(1, t)|^2 - \frac{1}{4} \eta |u_x(1, t)|^2 - \frac{1}{4} |u_t(0, t)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta |u_x(0, t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right) |u_t|^2 + |u_x|^2 \right\} dx \\ &\leq -\frac{1}{4} \{ \eta |u_x(0, t)|^2 + \eta(1) |u_x(1, t)|^2 + |u_t(1, t)|^2 \} \\ &\quad + C \int_0^1 \{ |u_x|^2 + |u_t|^2 + |\theta_x|^2 \} dx, \end{aligned}$$

para uma constante positiva C .

Ambas as desigualdades implicam, em particular, que para qualquer solução ambas as equações satisfazem

$$\int_0^T |u_x(0, t)|^2 + |u_x(1, t)|^2 + |u_t(1, t)|^2 dt \leq CE(0).$$

Agora, introduzindo o funcional $L(t)$

$$L(t) = NE(t) + \int_0^1 \theta \frac{\varphi_{xt}}{m} dx - \delta_0 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) u_t u_x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u_t u dx$$

onde $\delta_0 > 0$ é uma constante pequena e $N \in \mathbb{N}$ que será fixado depois. Rivera e Andrade (1999) afirmam que existem constantes positivas c_0 e c_1 , tais que

$$c_0 E(t) \leq L(t) \leq c_1 E(t).$$

A seguir será mostrado o decaimento exponencial da solução.

Teorema 3.4

Existe uma constante positiva γ , tal que a solução do sistema

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x &= f & \text{em } (0, 1) \times (0, T) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} &= g & \text{em } (0, 1) \times (0, T), \end{aligned}$$

com $f = g = 0$ e com condições de contorno dadas por

$$\eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) = -d[(u(1, t) - g)^+]^\mu - b[(u(1, t) - g)^+]^l u_t(1, t)$$

$$k\theta_x(1, t) = -\beta(u(1, t))\theta(1, t)$$

$$\theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t)$$

$$u(0, t) = 0 \quad t > 0$$

satisfaz

$$E(t) \leq E(0)e^{-\gamma t}.$$

Demonstração

Dos Lemas 3.5, 3.4 e a observação 3.4 implica em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 \theta \frac{\varphi_{xt}}{m} dx - \delta_0 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) u_t u_x dx \right\} &\leq -\frac{1}{2} \int_0^1 |u_t|^2 dx & (3.53) \\ + C_\delta \int_0^1 |\theta_x|^2 + |\theta|^2 dx - \frac{\delta_0}{8} \{ \eta |u_x(0)|^2 + \eta |u_x(1)|^2 + |u_t(1)|^2 \} \\ &+ \delta_0 \int_0^1 (|u_x|^2 + |u_t|^2 + |\theta_x|^2) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando (3.45) por u e integrando entre 0 e 1, segue

$$\int_0^1 u_{tt} u dx - \int_0^1 \eta u_{xx} u dx + \int_0^1 m\theta_x u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u_t u dx - \int_0^1 |u_t|^2 dx - \eta u_x u \Big|_0^1 + \int_0^1 \eta |u_x|^2 dx + m\theta u \Big|_0^1 - \int_0^1 m\theta u_x dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u_t u dx = \int_0^1 |u_t|^2 dx - \int_0^1 \eta |u_x|^2 dx + \int_0^1 m \theta u_x dx + u(1, t) [\eta u_x(1, t) - m \theta(1, t)]$$

Usando

$$\sigma(1, t) = \eta u_x(1, t) - m \theta(1, t),$$

então

$$\begin{aligned} u(1, t) \sigma(1, t) &= u(1, t) [\eta u_x(1, t) - m \theta(1, t)] \\ &= -d |(u(1, t) - g)^+|^{\mu+1} - \varepsilon u(1, t) u_t(1, t) \\ &\quad + dg [(u(1, t) - g)^+]^\mu. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t u dx &\leq \int_0^1 |u_t|^2 dx - \frac{\eta}{2} \int_0^1 |u_x|^2 dx - d |(u(1, t) - g)^+|^{\mu+1} \\ &\quad - d |(u(1, t) - g)^+|^{\mu+1} - \varepsilon u(1, t) u_t(1, t) + C \int_0^1 |\theta|^2 dx. \end{aligned}$$

Inserindo a desigualdade acima em (3.53), vem

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{m} \theta \varphi_{xt} dx - \varepsilon \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) u_t u_x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u u_t dx + \frac{\varepsilon}{2} |u(1, t)|^2 \right\} \\ &\leq -\frac{1}{4} \int_0^1 |u_t|^2 dx - \frac{\eta}{8} \int_0^1 |u_x|^2 dx - \frac{\delta_0}{8} \{ \eta |u_x(0)|^2 + \eta |u_x(1)|^2 + |u_t(1)|^2 \} \\ &\quad C_\varepsilon \int_0^1 \{ |\theta_x|^2 + |\theta|^2 \} dx. \end{aligned}$$

De acordo com Rivera e Andrade (1999) desde que

$$\int_0^1 |\theta|^2 dx \leq c_0 \left\{ |\theta(1, t)|^2 + \int_0^1 |\theta_x|^2 dx \right\}$$

e lembrando a definição do funcional $L(t)$

$$L(t) = NE(t) + \int_0^1 \theta \frac{\varphi_x^t}{m} dx - \delta_0 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) u_t u_x dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u_t u dx$$

temos que existe uma constante positiva γ , tal que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\gamma L(t) \quad \Rightarrow \quad L(t) \leq L(0)e^{-\gamma t}$$

e de $c_0E(t) \leq L(t) \leq c_1E(t)$, isto implica o resultado, ou seja $E(t) \leq E(0)e^{-\gamma t}$. \square

Foi provado o decaimento exponencial do sistema formado pela sequência de funções. O seguinte teorema diz que a energia também decai no problema de Signorini (3.1)-(3.2) com as condições de contorno (3.37)-(3.40).

Já que no problema de Signorini quando $\varepsilon \rightarrow 0$ $(u(1, t) - g)^+ \rightarrow 0$, isto é, o termo $\frac{d}{\mu + 1}[(u(1, t) - g)^+]^{\mu+1} \rightarrow 0$, então basta considerar a parte $\int_0^1 (|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + |\theta|^2) dx$ como será visto no Teorema a seguir.

Teorema 3.5

Seja (u, θ) uma solução de (3.41)-(3.44). Então, existe uma constante positiva C e γ independentes de t , tal que

$$\int_0^1 (|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + |\theta|^2) dx \leq CE(0, u, \theta)e^{-\gamma t}.$$

Demonstração

Do teorema 3.4 segue-se

$$\int_0^1 (|u_t^\varepsilon|^2 + \eta|u_x^\varepsilon|^2 + |\theta^\varepsilon|^2) dx \leq CE(0, u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)e^{-\gamma t}.$$

Segundo Brézis (1984) se $(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ convergir fracamente

$$(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \rightharpoonup (u, \theta),$$

então

$$(u, \theta) \leq \liminf(u^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$$

isto quer dizer que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + |\theta|^2) dx &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 (|u_t^\varepsilon|^2 + \eta|u_x^\varepsilon|^2 + |\theta^\varepsilon|^2) dx \\ &\leq CE(0, u, \theta)e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Solução Numérica

4.1 Formulação do Problema

Seguindo os procedimentos vistos em Liu e Rincon (2003) e Owen e Hinton (1980). Quando se começa a examinar as soluções em elementos finitos para problemas de condução de calor, estas são calculadas basicamente pelo procedimento de Galerkin ou Rayleigh-Ritz.

Se um dos dois métodos é aplicado no problema, então a temperatura, e neste caso, o deslocamento são aproximados por uma combinação linear, pode ser semelhante ao usado na resolução matemática. Para a solução numérica deste sistema, será aplicado o Método de Galerkin de Elementos Finitos Semidiscreto de modo usual como em Hughes (1987) com relação ao espaço e o Método de Euler Implícito de Diferenças Finitas com relação ao tempo. Considere a forma bilinear

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx$$

e os espaços

$$V = \{u \in H^2(0, 1); u(0) = u_x(0) = 0\}$$

e

$$E = H^2(0, 1).$$

Suponha que β é uma função constante e $\mu = 1$ e lembre que

$$\sigma(1, t) = -d[u(1, t) - g]^+ - \varepsilon u_t(1, t).$$

O sistema original a ser resolvido, tomando $d = -\frac{1}{\varepsilon}$ (o mesmo valor usado para o problema de Signorini) é o seguinte.

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x &= 0 && \text{em } (0, 1) \times (0, T) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} &= 0 && \text{em } (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) &&& \text{em } (0, 1) \\ u(0, t) = 0, \quad \theta_x(0, t) = \lambda\theta(0, t) &&& \text{em } (0, T) \\ \sigma(1, t) = \eta u_x(1, t) - m\theta(1, t) = -\frac{1}{\varepsilon}[u(1, t) - g]^+ - \varepsilon u_t(1, t) &&& \text{em } (0, T). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Começando com a discretização temporal, para isso usa-se o Método de Euler Implícito de Diferenças Finitas para as aproximações de u_t , u_{tt} e θ_t que são dados por

$$u_t(x, t_j) = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta t},$$

$$u_{tt}(x, t_j) = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta t^2},$$

$$\theta_t(x, t_j) = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta t}.$$

Agora, com relação a discretização do espaço. Já foi visto que as formulações variacionais de (4.1)₁ e (4.1)₂ são, respectivamente

$$\int_0^1 \rho u_{tt} v dx + \int_0^1 \eta u_x v_x dx - \int_0^1 m\theta v_x dx = \sigma(1, t)v(1, t), \quad \forall v \in V$$

e

$$\int_0^1 c\theta_t w dx + \int_0^1 k\theta_x w_x dx + \int_0^1 m u_{xt} w dx = -\beta\theta(1, t)w(1, t) - \lambda k\theta(0, t)w(0, t), \quad \forall w \in E.$$

E definindo os espaços aproximados de elementos finitos V_h e E_h , por

$$V_h = \{v_h \in V; v_h^e \in P^3(\Omega^e)\} \subset V$$

e

$$E_h = \{w_h \in E; w_h^e \in P^3(\Omega^e)\} \subset E,$$

onde Ω^e denota o interior do elemento genérico "e" e $\bar{\Omega}^e$ seu fecho. O parâmetro da malha é dado por $h = \max h_e, e = 1, 2, \dots, N_e$, onde h_e é o diâmetro do elemento e . Os elementos v_h^e e w_h^e são, respectivamente, as restrições de v_h e w_h ao elemento "e" e $P^3(\Omega^e)$ é o conjunto de polinômios cúbicos de Hermite definidos em Ω^e . Logo, para o problema aproximado, deve-se encontrar $u_h \in V_h$ e $\theta_h \in E_h$, tais que as formulações variacionais acima sejam satisfeitas para u_h e θ_h , ou seja, encontrar as funções aproximadas de u e θ .

Por simplicidade daqui para frente será omitido o índice h dos termos u , v , θ e w .

Assim, substituindo as aproximações temporais u_t , u_{tt} e θ_t , definidas anteriormente, nas formulações variacionais acima, chega-se às seguintes equações aproximadas

$$\frac{\rho}{\Delta t^2} \langle u_{j+1}, v \rangle - \frac{\rho}{\Delta t^2} \langle 2u_j - 2u_{j-1}, v \rangle + \eta \langle u_x, v_x \rangle - m \langle \theta, v_x \rangle = \sigma(1, t)v(1, t), \quad \forall v \in V$$

e

$$\begin{aligned} \frac{c}{\Delta t} \langle \theta_j, w \rangle - \frac{c}{\Delta t} \langle \theta_{j-1}, w \rangle + k \langle \theta_x, w_x \rangle + \frac{m}{\Delta t} \langle (u_x)_j - (u_x)_{j-1}, w \rangle \\ = \beta\theta(1, t)w(1, t) + \lambda k\theta(0, t)w(0, t), \quad \forall w \in E. \end{aligned}$$

Ou equivalentemente

$$\frac{\rho}{\Delta t^2} \langle u_{j+1}, v \rangle + \eta \langle u_x, v_x \rangle = \sigma(1, t)v(1, t) + \frac{\rho}{\Delta t^2} \langle 2u_j - 2u_{j-1}, v \rangle + m \langle \theta_j, v_x \rangle \quad (4.2)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{c}{\Delta t} \langle \theta_j, w \rangle + k \langle \theta_x, w_x \rangle &= \beta \theta(1, t)w(1, t) + \lambda k \theta(0, t)w(0, t) \\ &+ \frac{c}{\Delta t} \langle \theta_{j-1}, w \rangle - \frac{m}{\Delta t} \langle (u_x)_j - (u_x)_{j-1}, w \rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\forall v \in V$ e $\forall w \in E$. Com as condições iniciais dadas por

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (4.4)$$

Assim, o problema (4.2)-(4.4) encontra-se completamente discretizado. Para encontrar a solução numérica, procedemos da seguinte forma, usando o algoritmo abaixo.

4.1.0.1 Algoritmo para Solução Numérica

Como em (4.4) são dados u_0 , u_1 e θ_0 , divide-se o tempo em N partes iguais, para $j = 1, \dots, N$ e o objetivo é encontrar $\theta_j \in E$ e $u_{j+1} \in V$, da seguinte forma.

- Para $j = 1$, de (4.3) é encontrado o valor de θ_1 como segue

$$\begin{aligned} c \langle \theta_1, w \rangle + \Delta t k \langle \theta_x, w_x \rangle &= \Delta t k \beta [\theta(1, t)w(1, t)] + \Delta t \lambda k [\theta(0, t)w(0, t)] + c \langle \theta_0, w \rangle \\ &- m \langle (u_x)_1 - (u_x)_0, w \rangle. \end{aligned}$$

Usando o valor de θ_1 encontrado acima, de (4.2) encontra-se o valor de u_2

$$\rho \langle \mathbf{u}_2, v \rangle + \Delta t^2 \eta \langle u_x, v_x \rangle = \Delta t^2 \sigma(1, t)v(1, t) + \rho \langle 2u_1 - 2u_0, v \rangle - \Delta t^2 m \langle \theta_1, v_x \rangle.$$

- Para $j = 2$, usando o valor de u_2 encontrado anteriormente, de (4.3) é

encontrato o valor de θ_2

$$c \langle \theta_2, w \rangle + \Delta t k \langle \theta_x, w_x \rangle = \Delta t k \beta [\theta(1, t) w(1, t)] + \lambda k [\theta(0, t) w(0, t)] + c \langle \theta_1, w \rangle - m \langle (u_x)_2 - (u_x)_1, w \rangle.$$

Usando o valor de θ_2 encontrado acima, de (4.2) encontramos o valor de u_3

$$\rho(\mathbf{u}_3, v) + \Delta t^2 \eta(u_x, v_x) = \Delta t^2 \sigma(1, t) v(1, t) + \rho(2u_2 - 2u_1, v) - \Delta t^2 m(\theta_2, v_x).$$

- E assim sucessivamente até $j = N$.

Para a implementação computacional do problema, foi usado o código em Fortran 90 encontrado em Hughes (1987) e graficou-se a solução do problema na extremidade da barra usando o Matlab.

4.2 Simulações Gráficas

Os testes foram feitos com quatro materiais: cobre, ferro, alumínio e aço.

Para ambos os casos foram usados os mesmos valores de Santina (2001) na tabela abaixo.

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações.

Parâmetro de penalização	$\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$
Espessura	$e = 5 \times 10^{-3}m$
Diâmetro externo	$D = 1 \times 10^{-5}m$

Considerando o tempo t em segundos e a distância entre o final da barra e o obstáculo, gd , é dado em metros.

Os dados de cada material estão nas tabelas abaixo. Para o ferro

Tabela 4.2: Valores específicos do ferro utilizados nas simulações.

Massa específica (ρ)	$7,870 \times 10^3 kg/m^3$
Calor específico (c)	$4,49 \times 10^2 J$
Coefficiente de elasticidade (η)	$210GPa$
Difusividade térmica (k)	$0,8 \times 10^2 W$
Coefficiente de expansão térmica (constante de acoplamento) (m)	$0,0118 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^{\circ}C} \right)$

Dados retirados de htt (a) e Peterson (1994).

Para o alumínio.

Tabela 4.3: Valores específicos do alumínio utilizados nas simulações.

Massa específica (ρ)	$2,7 \times 10^3 kg/m^3$
Calor específico (c)	$9,04 \times 10^2 J$
Coefficiente de elasticidade (η)	$70GPa$
Difusividade Térmica (k)	$2,37 \times 10^2 W$
Coefficiente de expansão térmica (constante de acoplamento) (m)	$0,0231 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^{\circ}C} \right)$

Dados retirados de htt (b) e Peterson (1994).

Para o aço inoxidável.

Tabela 4.4: Valores específicos do aço inoxidável (AISI 302) utilizados nas simulações.

Massa específica (ρ)	$7,9 \times 10^3 kg/m^3$
Calor específico (c)	$4,77 \times 10^2 J$
Coeficiente de elasticidade (η)	$193 GPa$
Difusividade Térmica (k)	$0,149 \times 10^2 W$
Coeficiente de expansão térmica (constante de acoplamento) (m)	$0,01728 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{^\circ C} \right)$

Dados retirados de htt (c) e Peterson (1994).

Para o cobre.

Tabela 4.5: Valores específicos do cobre utilizados nas simulações.

Massa específica (ρ)	$8,92 \times 10^3 kg/m^3$
Calor específico (c)	$3,85 \times 10^2 J$
Coeficiente de elasticidade (η)	$130 GPa$
Difusividade Térmica (k)	$4,01 \times 10^2 W$
Constante de acoplamento (coeficiente de expansão térmica) (m)	$0,0165$

Os dados foram retirados de htt (d) e Peterson (1994).

A apresentação dos resultados computacionais e a análise está dividida em três etapas. **Etapa 1**, onde considera-se os materiais ferro e alumínio em três diferentes distâncias para gd , mantendo o mesmo tempo e as mesmas condições iniciais. **Etapa 2**, toma-se outras condições iniciais e considera os outros dois materiais, aço e cobre, e usa-se o mesmo tempo e as mesmas distâncias de gd do caso anterior. **Etapa 3**, considera-se novas condições iniciais para todos os materiais: ferro, alumínio, aço e cobre. Aqui, diferentemente dos dois casos anteriores, a distância gd é mantida constante e varia-se o tempo em três instante diferentes. Nas três etapas são feitas comparações e análise entre os resultados obtidos.

4.2.1 Dado I(Ferro e Alumínio)

Considere $\lambda = 10^{-5}$ e a função $\beta \equiv 0,2$ constante com as condições iniciais

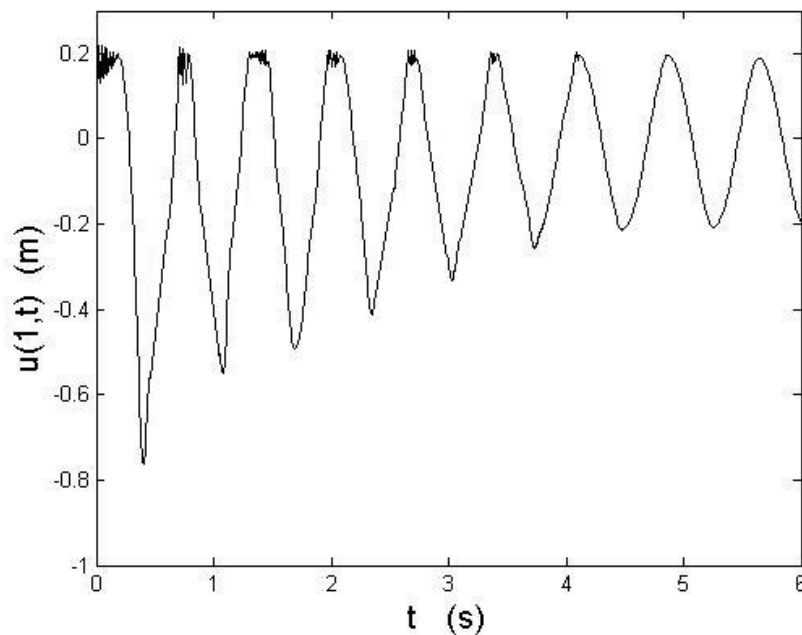
$$u(x, 0) = 0$$

$$u_t(x, 0) = -10x$$

$$\theta(x, 0) = 5 \times 10^{-5}(x + 10^5)$$

4.2.1.1 Caso i

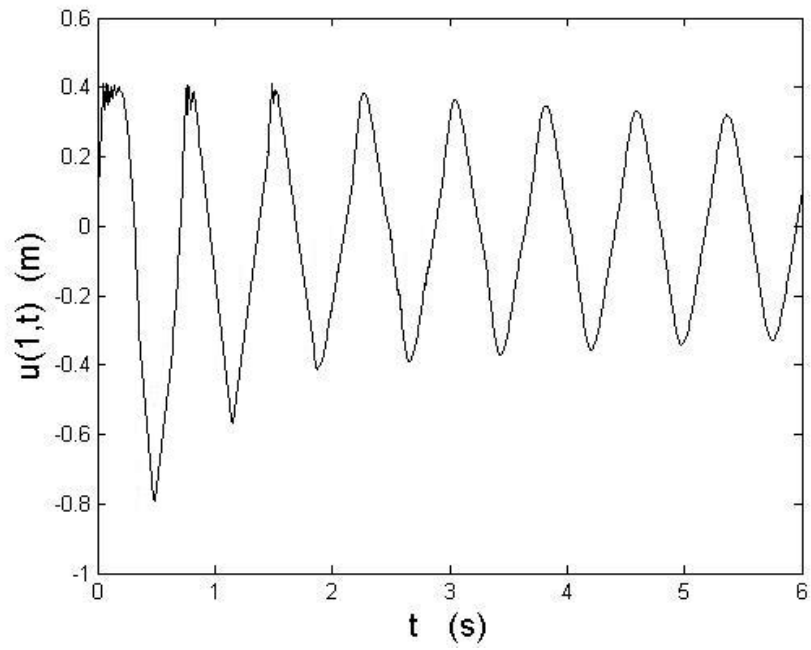
Começando a análise o material ferro. Considerando o mesmo tempo e variando a distância gd , seguem-se os gráficos.



$t_f=6$ s, $gd=0.2$ m

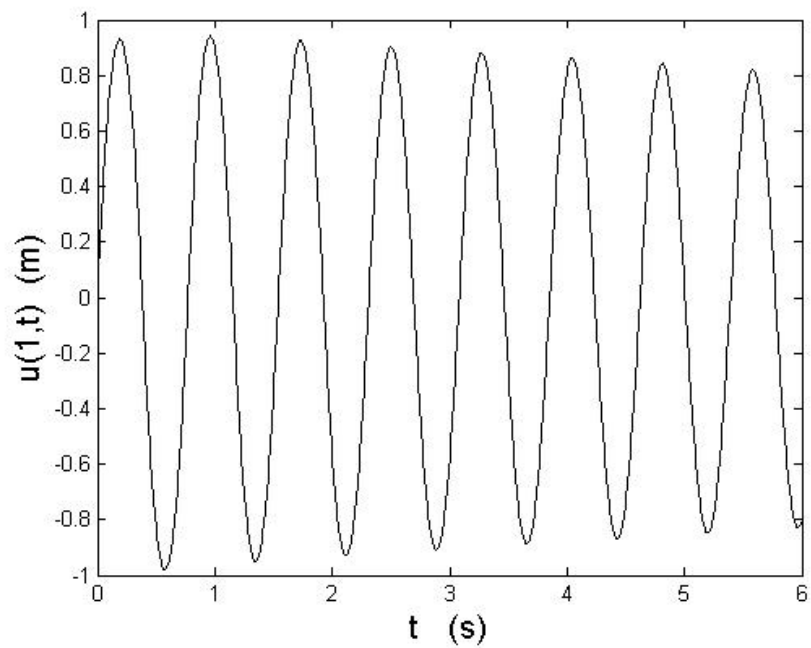
Figura 4.1: Ferro I

Observe através dos gráficos 4.1-4.3 quanto menor é a distância da barra até o obstáculo, a barra ao se chocar com o obstáculo apresenta comportamento irregular, devido ao efeito de inércia da ; mas barra com o passar do tempo, a solução começa a decair e a barra não atinge mais o obstáculo e conseqüentemente apresenta um comportamento regular. Por outro lado, conforme aumenta-se a



$tf=6$ s, $gd=0.4$ m

Figura 4.2: Ferro II



$tf=6$ s, $gd=1$ m

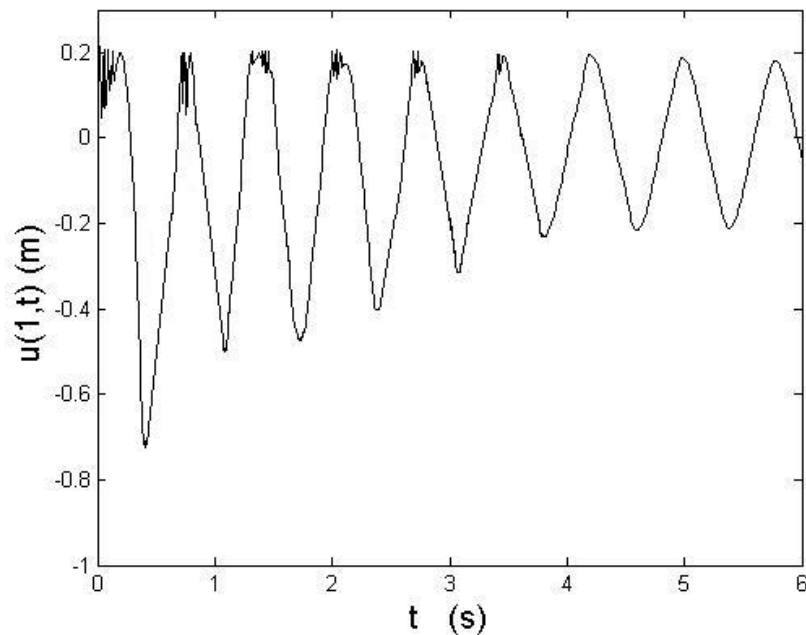
Figura 4.3: Ferro III

distância gd a barra atinge menos o obstáculo (ver 4.2) e aumentando mais ainda a distância gd (ver gráfico 4.3), a barra não alcança mais o obstáculo e sempre

apresenta um comportamento regular. Note que, quando a barra não toca mais o obstáculo seu decaimento é muito lento, quase imperceptível e ,também, quanto maior o aumento da distância gd a barra apresenta um número menor de oscilações.

4.2.1.2 Caso ii

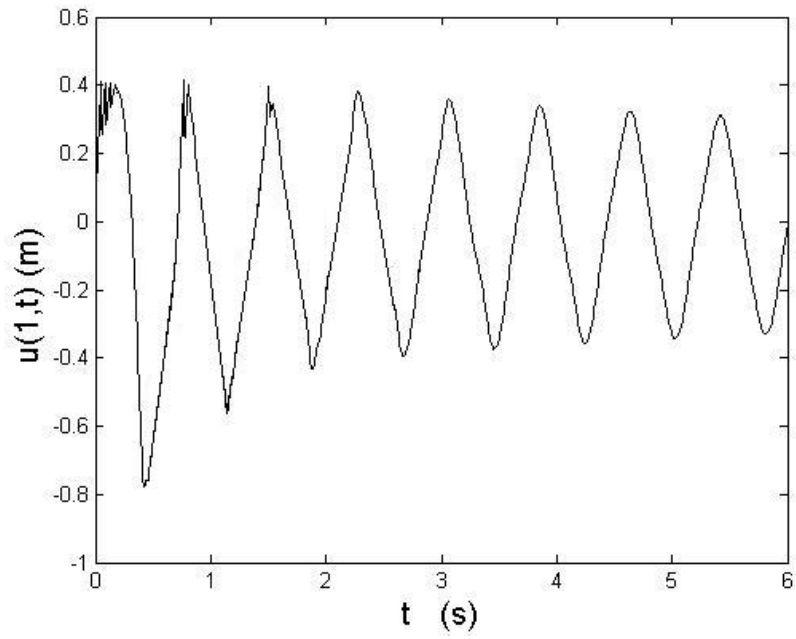
Utilizando os mesmos dados iniciais para fazer a análise com o alumínio, surgem os gráficos. Com este material as oscilações da barra apresentam um



$$t_f=6 \text{ s}, g_d=0.2 \text{ m}$$

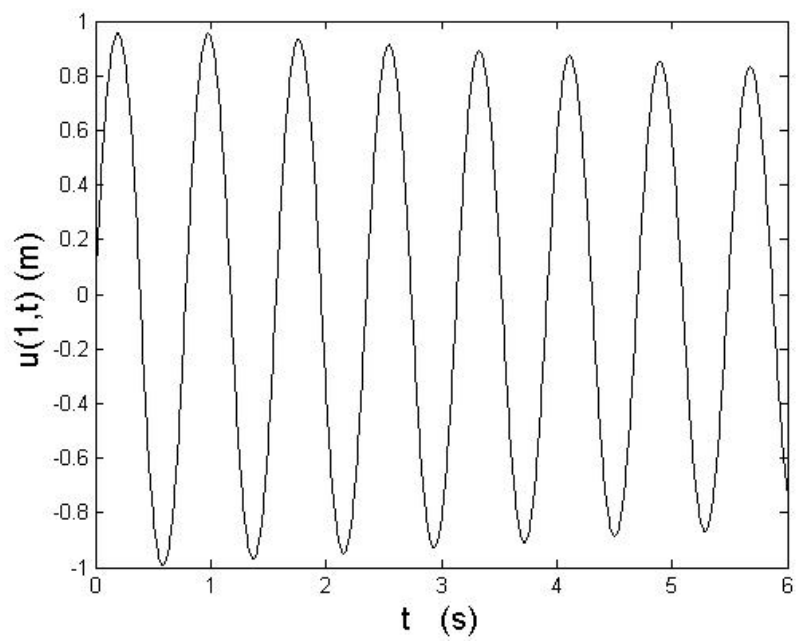
Figura 4.4: Alumínio I

comportamento similar ao material ferro, tanto quando a b toca o obstáculo quanto quando não o encontra mais. Comparando 4.1 com 4.4 e 4.5, a viga de alumínio atinge o obstáculo com maior intensidade, causando maior irregularidade ao se chocar com o obstáculo. Comparando agora 4.1 com 4.4, 4.2 com 4.5 e 4.3 com 4.6, as dilatações e as contrações que a barra apresenta são análogas para os dois materiais (ferro e alumínio), assim como o número de oscilação e o decaimento exponencial.



$tf=6$ s, $gd=0.4$ m

Figura 4.5: Alumínio II



$tf=6$ s, $gd=1$ m

Figura 4.6: Alumínio III

4.2.2 Dado II (Aço Inoxidável (AISI 302) e Cobre)

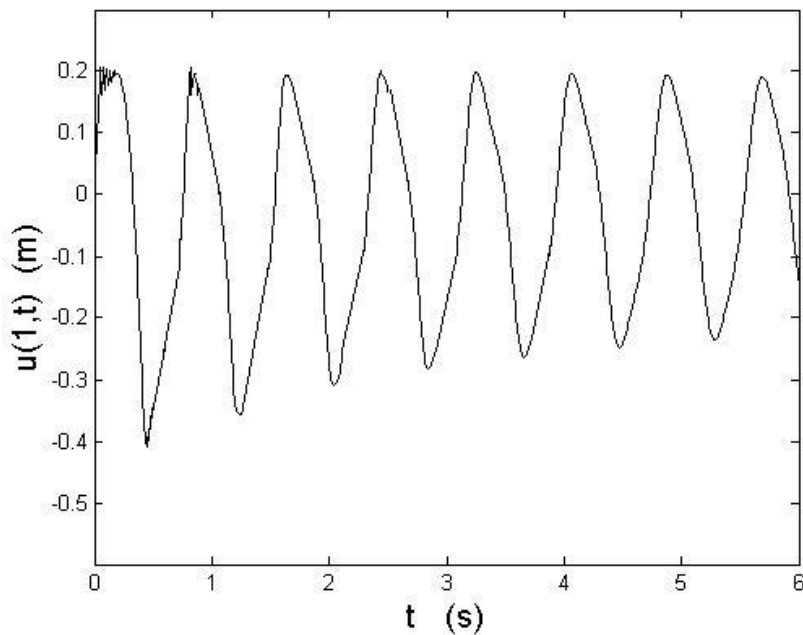
Considere $\lambda = 10^{-3}$ e a função $\beta \equiv 0,2$ constante com as condições iniciais

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0 \\u_t(x, 0) &= -\left[4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3\right] \\ \theta(x, 0) &= 5 \times 10^{-3}(x + 10^3)\end{aligned}$$

Nesta etapa é considerado o mesmo tempo e três diferentes distâncias para gd , como na etapa anterior.

4.2.2.1 Caso i

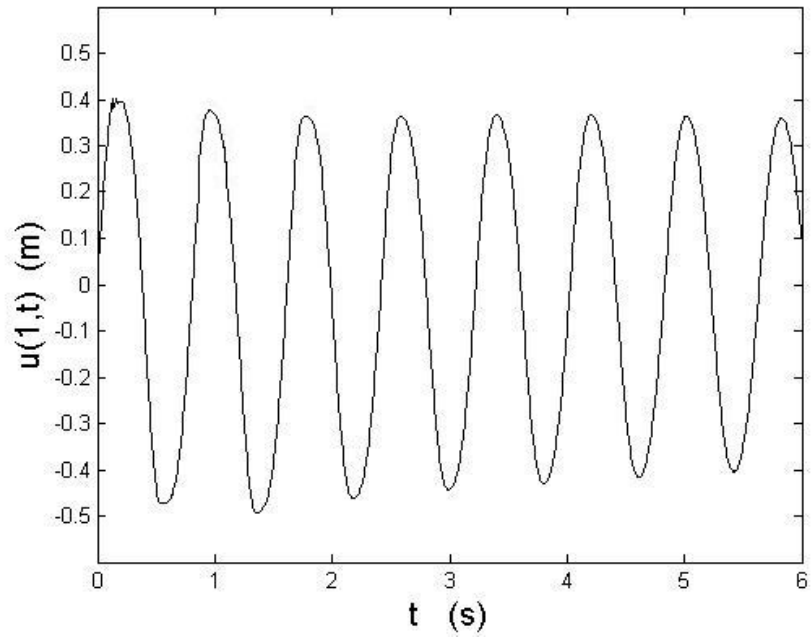
Usando o aço, seguem os gráficos.



tf=6 s, gd=0.2 m

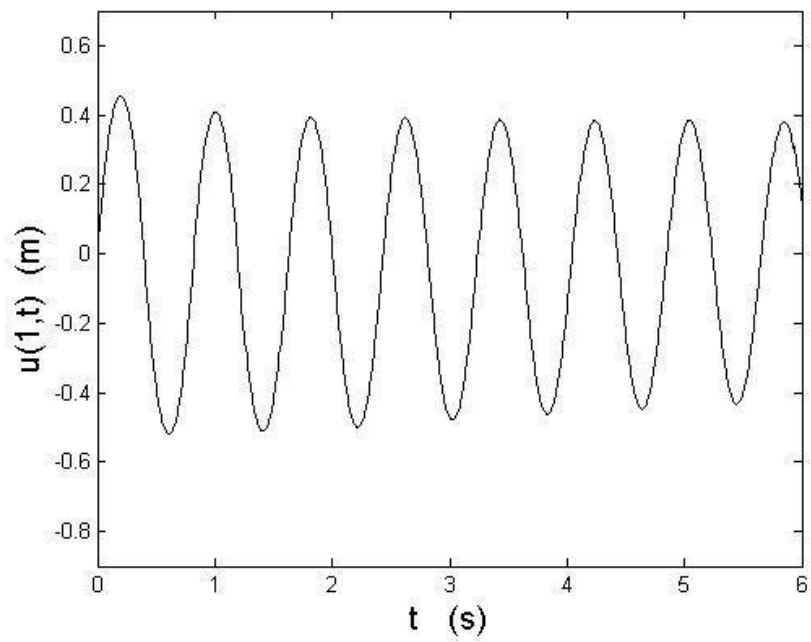
Figura 4.7: Aço Inoxidável I

Conforme varia a distância gd , a barra se comporta analogamente aos materiais da Etapa 1, ferro e alumínio, apresentando uma pequena diferença (para menos) no número de oscilações e estas oscilações atingem o obstáculo com uma



tf=6 s, gd=0.4 m

Figura 4.8: Aço Inoxidável II



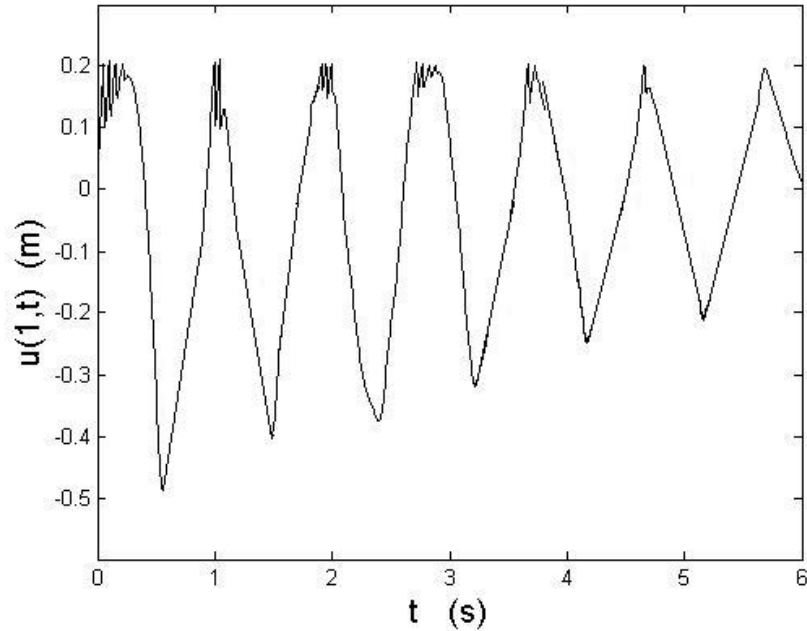
tf=6 s, gd=1 m

Figura 4.9: Aço Inoxidável III

intensidade e quantidade menor de vezes. No entanto, o número de oscilações do aço quase não muda variando a distância gd . $5 \times 10^{-3}(x + 10^3)$

4.2.2.2 Caso ii

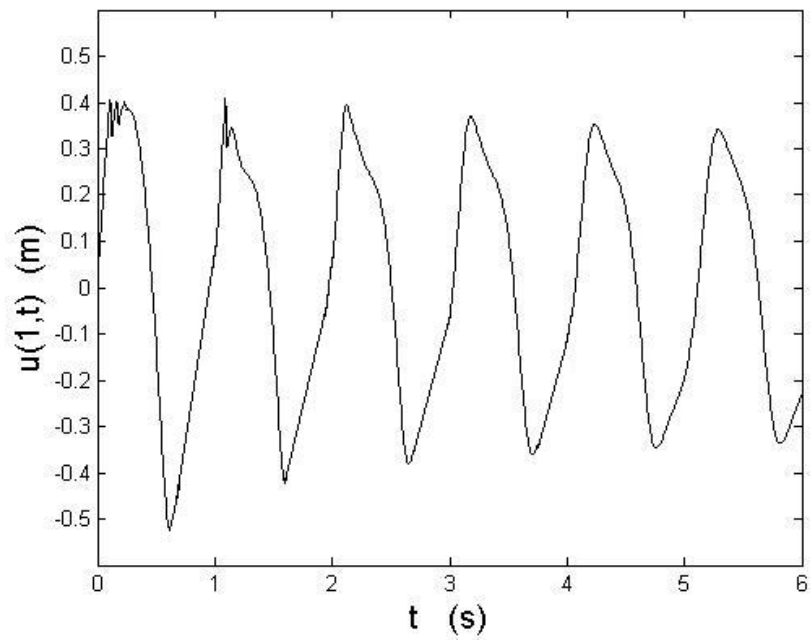
Agora, as simulações com o cobre.



$tf=6$ s, $gd=0.2$ m

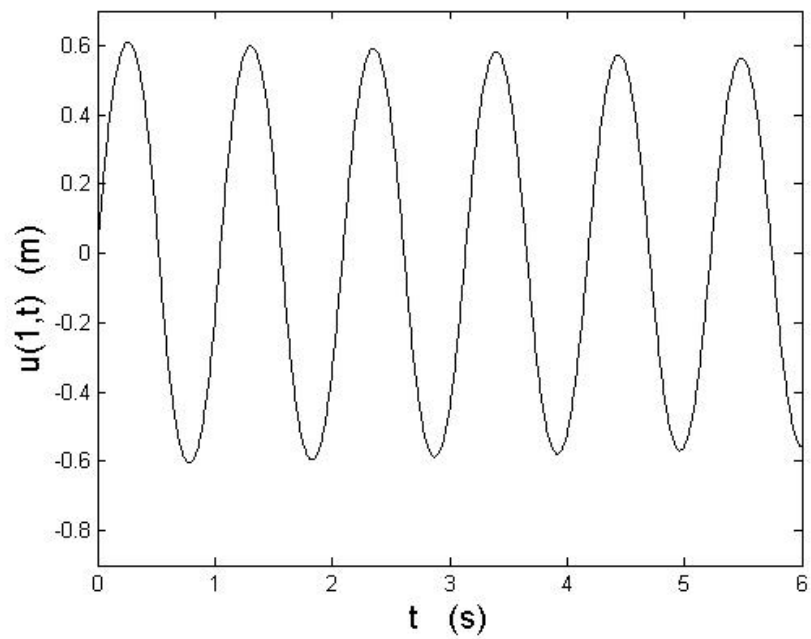
Figura 4.10: Cobre I

Neste caso, também, com o aumento da distância gd a barra se comporta de maneira análoga com os outros três materiais analisados anteriormente. Agora, comparando este material, cobre com o aço, é possível observar claramente que o cobre apresenta oscilações que o aço para cada distância gd . Ainda percebe-se também que usando somente o cobre e variando apenas a distância, gd , o número de oscilações quase não muda. a principal e notória diferença entre o cobre e o aço é que para o cobre é que para o cobre quando a barra choca-se com o obstáculo ocorre com maior intensidade e por mais tempo, compare os gráficos 4.7 com 4.10 e 4.8 com 4.11.



tf=6 s, gd=0.4 m

Figura 4.11: Cobre II



tf=6 s, gd=1 m

Figura 4.12: Cobre III

4.2.3 Dado III (Ferro, Alumínio, Aço Inoxidável (AISI 302) e Cobre)

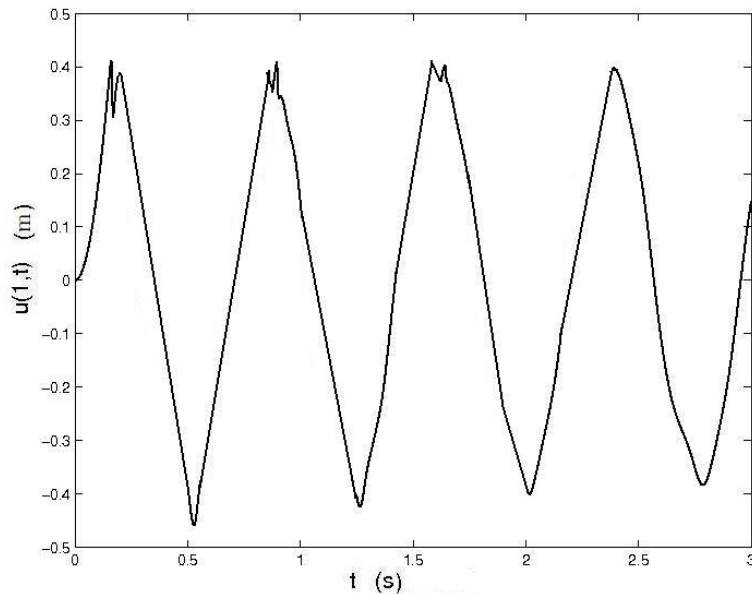
Agora considerando a função $\beta \equiv 0.1$, e as condições iniciais

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0 \\u_t(x, 0) &= -5 \left[1 - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 \right] \\ \theta(x, 0) &= 2,5(x + 2)\end{aligned}$$

As simulações foram realizadas usando os quatro materiais: ferro, alumínio aço e cobre; para poder compará-los entre eles já que possuem constantes diferentes. Desta vez foi mantida a mesma distância gd variado o tempo em três instantes diferentes.

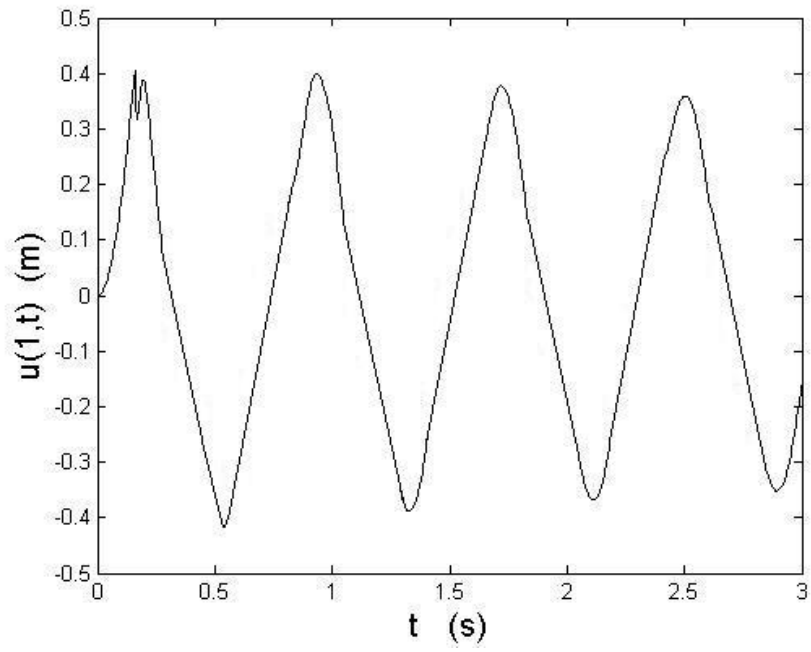
4.2.3.1 Caso i

Considerando o tempo final de 3 segundos para cada um dos materiais, tem o seguinte.



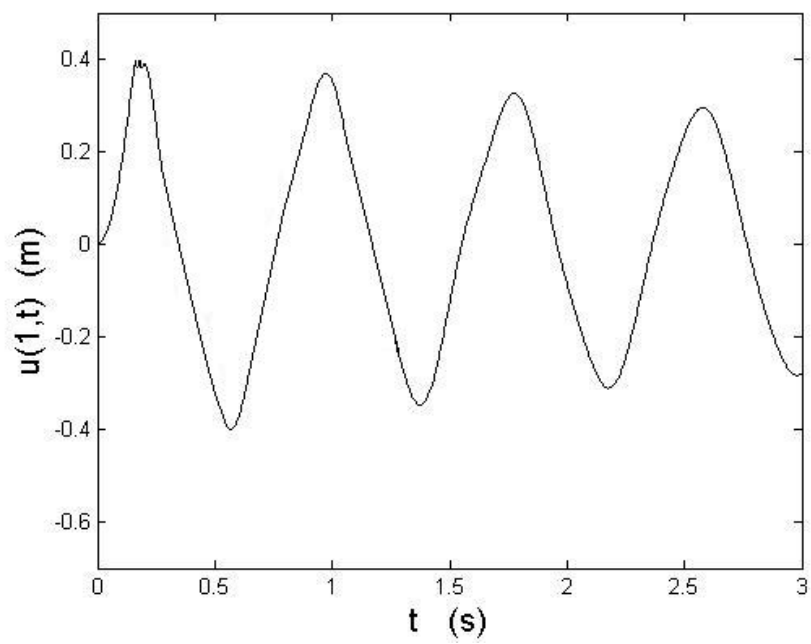
tf=3 s, gd=0.4 m

Figura 4.13: Ferro IV



tf=3 s, gd=0.4 m

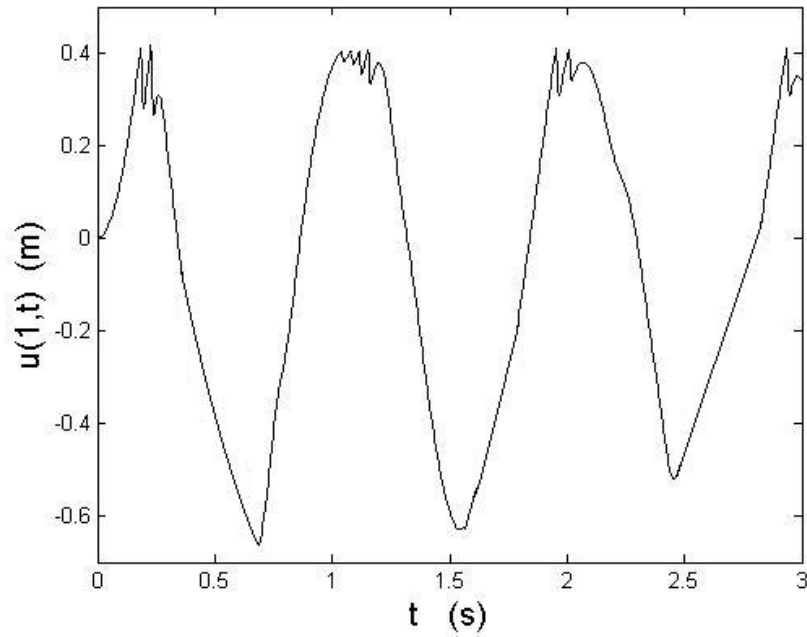
Figura 4.14: Alumínio IV



tf=3 s, gd=0.4 m

Figura 4.15: Aço Inoxidável IV

Analisando os gráficos 4.15-4.16 é possível observar que o aço possui menor dilatação e contração que todos os outros materiais, pois é o que se choca com o



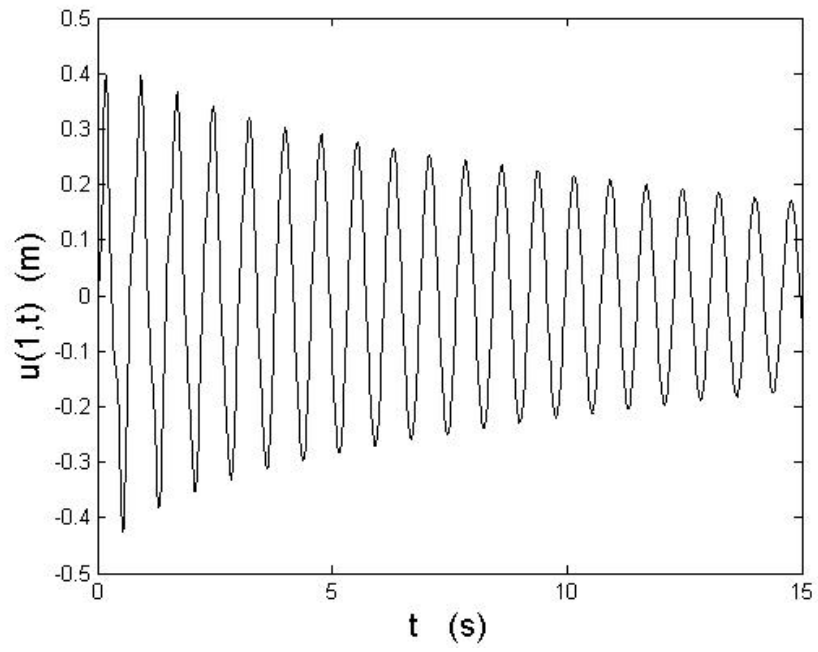
$t_f=3$ s, $g_d=0.4$ m

Figura 4.16: Cobre IV

obstáculo com menor intensidade. Por outro lado, o cobre é que apresenta maior intensidade ao se chocar com o obstáculo, além de ser o que atinge o obstáculo por mais tempo, conseqüentemente é o material que mais se dilata e se contrai. Quanto ao ferro e o alumínio, 4.13 e 4.14, suas dilatações e contrações ocorrem quase na mesma amplitude, não sendo notória as diferenças para este tempo.

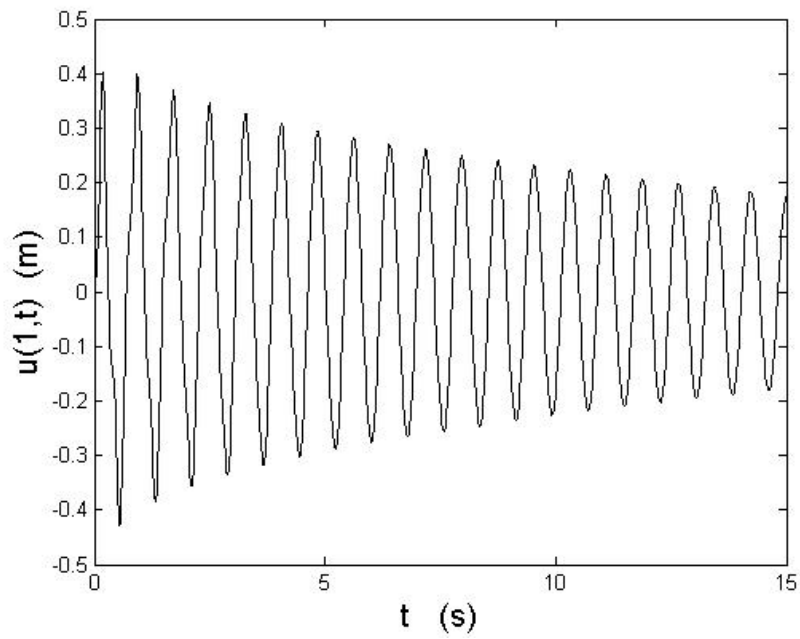
4.2.3.2 Caso ii

Tomando, agora, o tempo de 15 segundos.



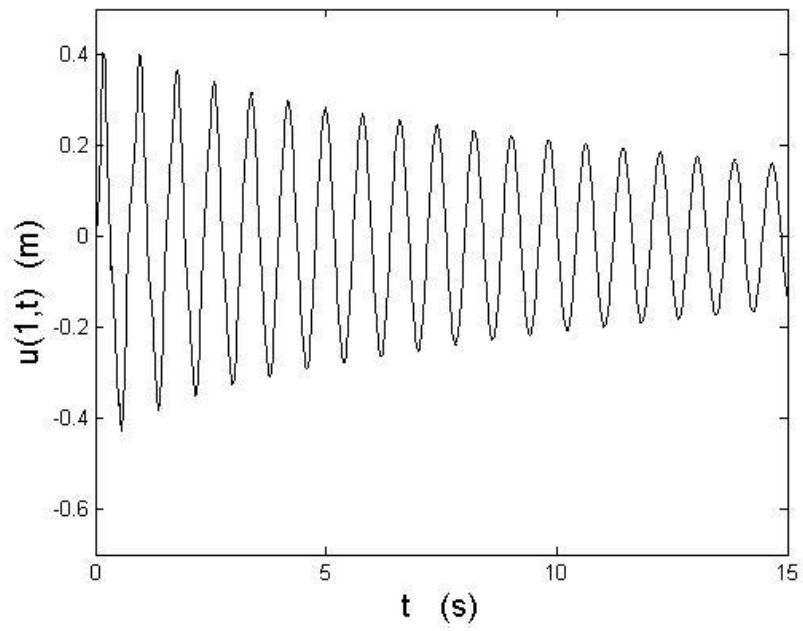
tf=15 s, gd=0.4 m

Figura 4.17: Ferro V



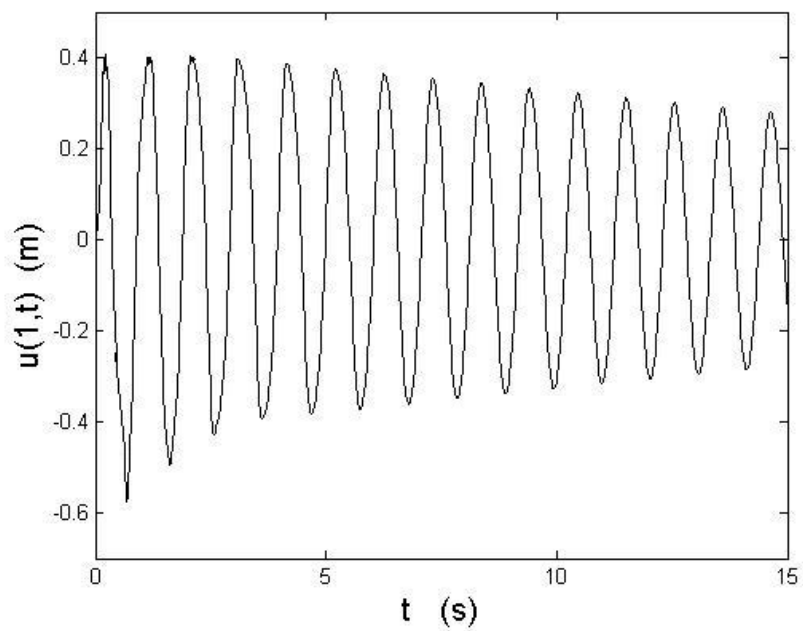
tf=15 s, gd=0.4 m

Figura 4.18: Alumínio V



$tf=15$ s, $gd=0.4$ m

Figura 4.19: Aço Inoxidável V



$tf=15$ s, $gd=0.4$ m

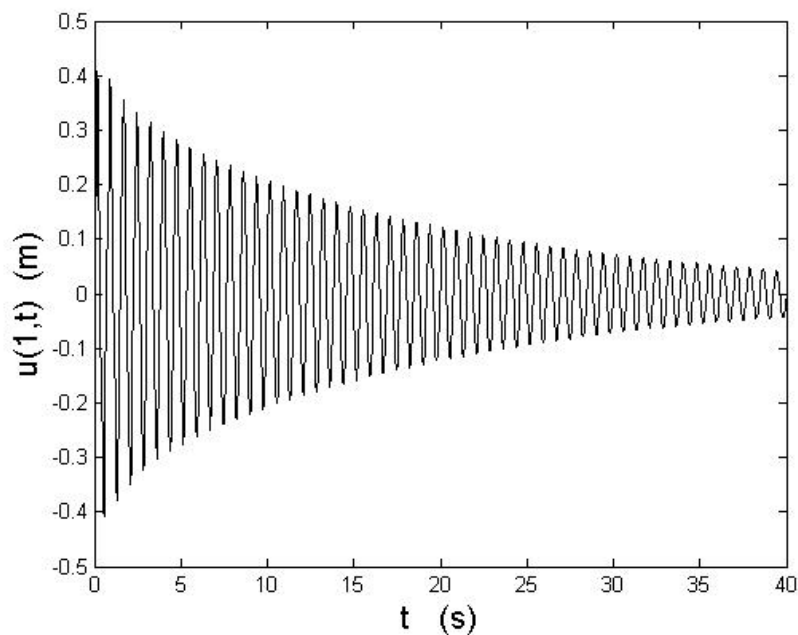
Figura 4.20: Cobre V

Com este tempo maior de 15 segundos, fica evidente que o decaimento da solução. Comparando estes quatro gráficos, 4.17-4.20, neste tempo maior, $tf = 15$,

com os gráficos anteriores, 4.13-4.16, no tempo $tf = 3$ observa-se que toda a análise para é análoga para ambos os casos. Ainda por existir um número grande de oscilações, no momento do choque da barra com o obstáculo não se percebe as irregularidades causadas pelo choque. Contudo, claramente que para nenhum material a viga ultrapassa a posição do obstáculo.

4.2.3.3 Caso iii

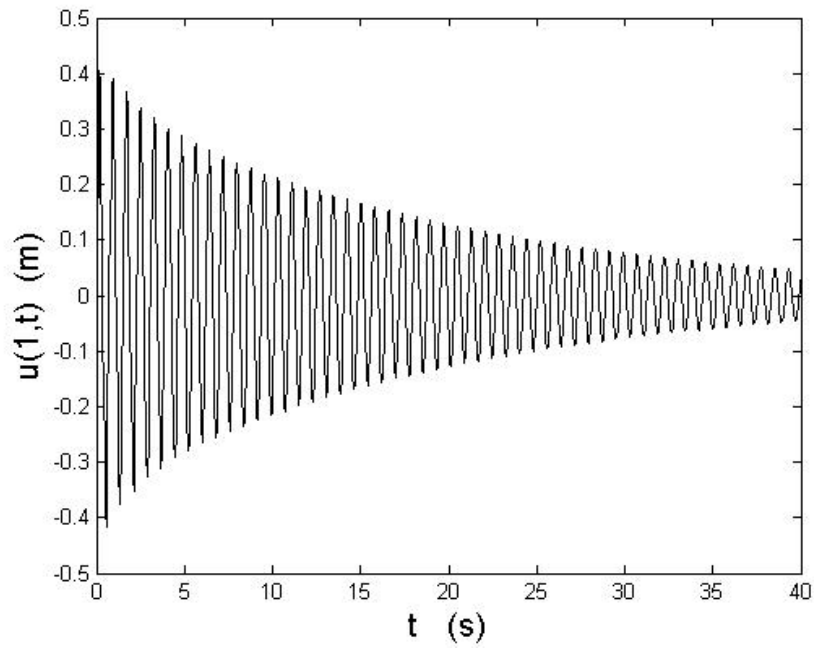
Finalmente, usando o tempo final, tf , de 40 segundos.



$tf=40$ s, $gd=0.4$ m

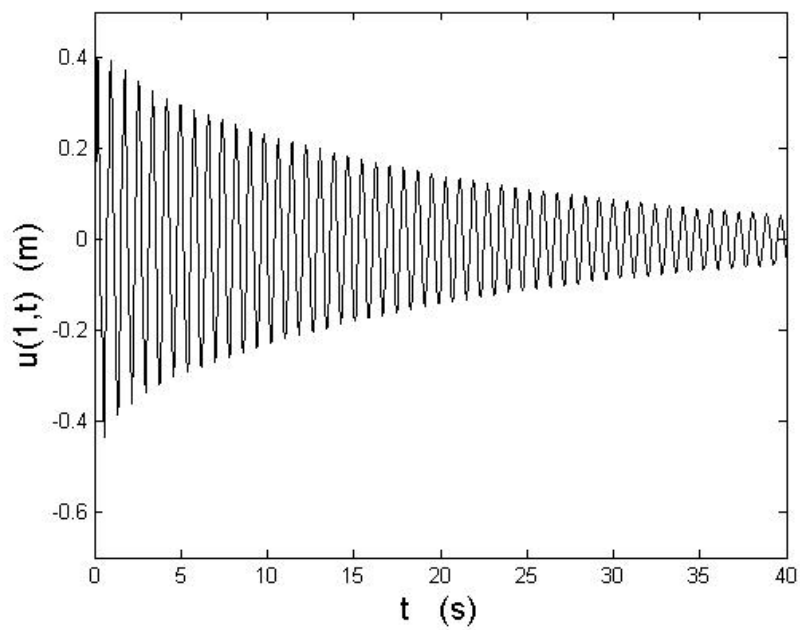
Figura 4.21: Ferro VI

Observando os resultados para este caso em que se aumenta ainda mais o tempo, o comportamento é análogo para os quatro materiais. Entretanto nota-se mais claramente o decaimento da solução, 4.21-4.24. Além disso pelo problema ser acoplado ocorre uma diminuição na amplitude das oscilações à medida que o tempo passa, ou seja, isto se deve ao equilíbrio de temperatura da barra com o meio ambiente. Assim, quando a diferença de temperatura tende a ser nula, pelo equilíbrio térmico, a barra tende a estabilizar o seu tamanho. Graficamente à



tf=40 s, gd=0.4 m

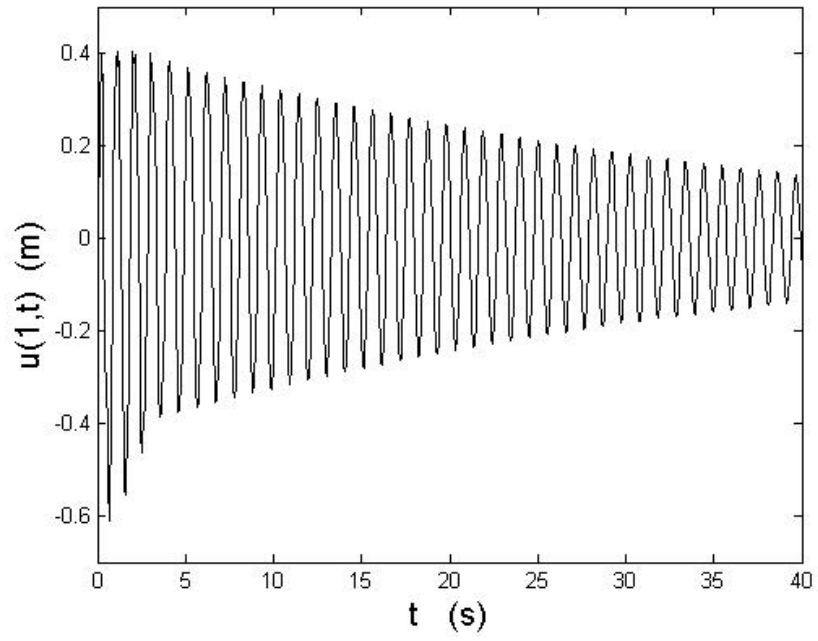
Figura 4.22: Alumínio VI



tf=40 s, gd=0.4 m

Figura 4.23: Aço Inoxidável VI

medida que o tempo passa em vez das oscilações o gráfico tende a apresentar uma reta superposta ao eixo das abscissas ($u(1, t) = 0$).



tf=40 s, gd=0.4 m

Figura 4.24: Cobre VI

4.3 Conclusão

Através deste estudo alcançou-se os objetivos propostos que era deduzir fisicamente o problema acoplado através de duas leis: Segunda Lei de Newton, e Conservação de Energia. Analisando o comportamento de uma barra metálica ao se deparar com um obstáculo. Encontrou-se a solução e unicidade para o problema de contato, quando a barra ultrapassa o obstáculo. É uma das soluções para o Problema de Signorini, quando a barra choca-se com o obstáculo rígido, não ultrapassando-o, gerando desigualdade nas condições iniciais. Também verificou-se o decaimento exponencial da solução em diferentes situações, primeiro mantendo o tempo fixo e variando a posição do obstáculo- usando condições iniciais diferentes para a análise dos materiais ferro e alumínio, aço e cobre. Posteriormente, manteve-se a distância do obstáculo fixo variando o tempo em três instantes para cada um dos quatro materiais. Em todos os casos foi verificado a convergência numérica do método e chegou-se ao resultado esperado, os quais já haviam sido provados analiticamente. Comparando os resultados obtidos nas Etapa 1 e Etapa 2 (onde variou-se apenas a distância gd) com os resultados da Etapa 3 (onde o tempo foi variado) fica evidente a concordância dos resultados obtidos, uma vez que o em todas as etapas, ora variando gd , ora variando t , todos os resultados numéricos estão de acordo com a teoria condizentes com o esperado. Com as simulações numéricas considerando o caso do Problema de Signorini pôde ser verificado graficamente o deslocamento devido à diferença de temperatura com o meio ambiente. O comportamento da barra ao se chocar usando dados de materiais diferentes e que a solução decai rapidamente quando esta encontra o obstáculo. Assim, é possível concluir que a metodologia desenvolvida na presente pesquisa permitiu mostrar desde a modelagem, a resolução matemática e analisar na prática os resultados esperados: uma solução encontrada para o Problema de Signorini, o decaimento de energia. Este trabalho serve de base para estudar futuramente o comportamento de uma barra ao se deslocar tanto verticalmente como longitudinalmente, ou seja em diagonal, que é o movimento real de uma

dilatação. Além de estender para o caso bidimensional.

Referências Bibliográficas

- a. URL http://www.deboni.he.com.br/dic/quim1_026.htm.
 - b. URL http://www.deboni.he.com.br/dic/quim1_013.htm.
 - c. URL <http://www.acosboixareu.pt/PDF/DatosTecnicosPORT.pdf>.
 - d. URL http://www.deboni.he.com.br/dic/quim1_029.htm.
- R. Adams. **Sobolev Spaces**. Acad. Press, 1975.
- Shillor M. Andrews K. T., Shi P. e S. Wright. Thermoelastic contact with barber's heat exchange condition. **App. Math, Opt**, páginas 11–48, 1993.
- Haïm Brézis. **Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, 1984.
- D. E. Carlson. **Linear thermoelasticity**, volume 2. C. Truesdell, 1972.
- E. A. Coddington e N. Levinson. **Theory of ordinary differential equations**. Ma.Graw-Hill, 1995.
- M. M. Copetti e C. M. Elliot. A one dimensional quasi-static contact problem in linear thermoelasticity. **Eur. J. Appl. Math** 4, páginas 151–174, 1993.
- W. A. Day. **Heat Conduction within Linear Thermoelasticity**. Pergamon, Oxford, 3ª edição, 1986.
- J. Richard Elliott e Carl T. Lira. **Introductory Chemical Engineering Thermodynamics**. Prentice Hall, 1998.

- J. L. Ericksen. **Introduction to the Thermodynamics of Solids**. Chapman & Hall, 1ª edição, 1991.
- Lawrence C. Evans. **Partial Differential Equations**, volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- Hongjun Gao e Jaime E. Muñoz Rivera. Global existence and decay for the semilinear thermoelastic contact problem. **Journal of Differential Equations**, páginas 52–68, 2002.
- P. Shi Gilbert R. P. e M. Shillor. A quasistatic contact problem in linear thermoelasticity. **Nonlinear Analysis**, **23**, páginas 883–898, 1994.
- David Halliday, Robert Resnick, e Jearl Walker. **Gravitação, ondas e termodinâmica**, volume 2 of **Fundamentos de Física 1**. LTC, 4ª edição, 1996a.
- David Halliday, Robert Resnick, e Jearl Walker. **Mecânica**, volume 1 of **Fundamentos de Física 1**. LTC, 4ª edição, 1996b.
- Thomas J. R. Hughes. **Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. The Finite Element Method. PRENTICE-HALL, 1987.
- J. U. Kim. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. **Comm. Partial Diff. Equation**, 14:1011–1026, 1989.
- J. U. Kim. On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plates. **SIAM J. Math. Anal** **23**, páginas 889–899, 1992.
- Rubin D. Lai W. M. e Krempl E. **Introduction to Continuum Mechanics**. Pergamon Press Inc, 1974.
- H. Levy e F. Lessman. **Finite Difference Equations**. 1992. ISBN 0-486-67260-3.
- I-Shih Liu e Mauro A. Rincon. **Introdução ao Método de Elementos Finitos**. Análise e Aplicação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2ª edição, 2003.

Jerrold E. Marsden e Antony J. Tromba. **Vector Calculus**. W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York, 3^a edição, 1988.

Sandro Rodrigues Mazorche. Proceedings of the xxvii iberian latin american congress on computational methods in engineering. In: **ALGORITMOS DE COMPLEMENTARIDADE PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR COM CONTATO SEM ATRITO**, página 13, Belem- Pará, Brasil, 2006.

D. R. Owen e E. Hinton. **A Simple Guide to Finite Element**. Pineridge Press Limited, 1980.

A. Tripler Paul. **Física**, volume 1. Livros Técnicos e Científicos, 4^a edição.

George P. Peterson. **An Introduction to Heat Pipes**. John Wiley & Sons, INC., 1994.

Christian José Quintana Pinedo. Sobre uma equação não linear da viga. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - Instituto de Matemática, 1990.

Jaime Edilberto Muñoz Rivera. Energy decay rates in linear thermoelasticity. **Funkcial. Ekvac 35**, páginas 19–30, 1992.

Jaime Edilberto Muñoz Rivera. **Tópicos em Termo e Visco Elasticidade**. Monografias do LNCC: Séries de Textos Avançados. LNCC, 1998.

Jaime Edilberto Muñoz Rivera e Doherty Andrade. Existence and exponential decay for contact problems in thermoelasticity. **Applicable Analysis**, 72:253–273, 1999.

Jaime Edilberto Muñoz Rivera e Milton de Lacerda Oliveira. Exponential stability for a contact problem in thermoelasticity. **IMA Journal of Applied Mathematics**, 58:71–82, 1997.

- David S. Malkus Robert D. Cook e Michael E. Plesha. **Concepts and applications of Finite element analysis**. John Wiley & Sons, 2^a edição, 1981.
- Fátima Arantes Santana. Controle ótimo aplicado a problemas de poluição e estabilização de vigas termoelásticas com condições de signorini, 2001. Tese de Doutorado.
- P. Shi e M. Shillor. Uniquess and stability of the solution to a thermoelastic contact problem. **Euro. J. Appl. Math**, **1**, páginas 371–387, 1990.
- P. Shi e M. Shillor. A quasistatic contact problem in thermoelasticity with a radiation condition for the temperature. **J. Math. Anal. Appl.** **1972 (1)**, páginas 147–165, 1993.
- Shillor M. Shi P. e Zou X. L. Numerical solution to the dimensional problems of thermoelastic contact. **Comput. Math. Appl.** **22 (10)**, páginas 65–78, 1991.
- Song Tiang e Reinhard Racke. **Evolution Equations in Thermoelasticity**. CHARMAN & HALL / CRC, 2000.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)