

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO**

**EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE NA  
DETECÇÃO DE *OUTLIERS* EM PROCESSOS  
AUTORREGRESSIVOS E DE MÉDIAS MÓVEIS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Jean Paulo Guarnieri**

**Santa Maria, RS, Brasil  
2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE NA  
DETECÇÃO DE *OUTLIERS* EM PROCESSOS  
AUTORREGRESSIVOS E DE MÉDIAS MÓVEIS**

**por**

**Jean Paulo Guarnieri**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Área de Concentração em Gerência da Produção, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia de Produção**

**Orientador: Prof. Dr. Adriano Mendonça Souza**

**Santa Maria, RS, Brasil**

**2010**

**Universidade Federal de Santa Maria**  
**Centro de Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,  
aprova a Dissertação de Mestrado

**EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE NA DETECÇÃO DE  
OUTLIERS EM PROCESSOS AUTORREGRESSIVOS E DE MÉDIAS  
MÓVEIS**

elaborada por  
**Jean Paulo Guarnieri**

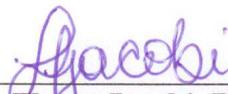
como requisito parcial para obtenção do grau de  
**Mestre em Engenharia de Produção**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**



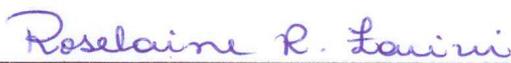
---

**Adriano Mendonça Souza, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)



---

**Luciane Flores Jacobi, Dra. (UFSM)**  
(Co-orientadora)



---

**Roselaine Ruviano Zanini, Dra. (UFSM)**



---

**Liane Werner, Dra. (UFRGS)**

Santa Maria, 15 de outubro de 2010.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, que me proporcionou a graça de viver, aprender e crescer, por ter me dado força para superar as longas jornadas de estudo e trabalho e por ter guiado meus passos.

A minha família, por depositarem confiança para a realização desta dissertação, em especial, aos meus pais, pela confiança, paciência, apoio e oportunidade concebida e aos meus irmãos, pelo companheirismo e motivação.

A minha namorada, pelo suporte, incentivo, motivação e compreensão dos momentos dedicados aos meus estudos.

Ao Prof. Dr. Adriano, por ter sido não somente um orientador, mas um amigo para todas as horas. Muito obrigado pela sua valiosa contribuição neste trabalho, pela disponibilidade em esclarecer quaisquer dúvidas e pelos conhecimentos transmitidos que serão de grande valia para minha vida pessoal e profissional.

A Profa. Dra. Luciane Flores Jacobi pela sua co-orientação neste trabalho, contribuindo para o aperfeiçoamento do mesmo e mostrando-se sempre disponível para prestar os esclarecimentos pertinentes.

Ao Prof. Dr. Alberto de Souza Schimdt que foi meu orientador no início do mestrado, sempre disposto a ajudar e a transmitir seus conhecimentos.

Aos membros da banca examinadora, que contribuíram significativamente para a melhoria desta pesquisa.

Aos amigos que fiz durante a realização do mestrado, pelas horas de estudo compartilhadas e pelo apoio mútuo.

Ao colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção por ter concedido prorrogação no prazo da defesa da minha dissertação, para que pudesse desenvolver um trabalho de qualidade, contribuindo para o meu crescimento e para o curso.

Enfim, a todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Dissertação de Mestrado  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção  
Universidade Federal de Santa Maria

### **EFICIÊNCIA DOS GRÁFICOS DE CONTROLE NA DETECÇÃO DE *OUTLIERS* EM PROCESSOS AUTORREGRESSIVOS E DE MÉDIAS MÓVEIS**

Autor: Jean Paulo Guarnieri

Orientador: Adriano Mendonça Souza, Dr.

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de outubro de 2010.

A presente pesquisa aborda a aplicação de modelos de previsão juntamente com a utilização de gráficos de controle de resíduos para a avaliação de processos produtivos com características de autocorrelação em suas amostras. O objetivo geral foi determinar a eficiência dos gráficos de controle de observações individuais (IMCC) e de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) quando aplicados aos resíduos de modelos da classe  $AR(1)$  ou  $MA(1)$ , para detecção de *outliers* em processos autocorrelacionados, além de evidenciar a influência da autocorrelação e da amplitude do *outlier* no poder de detecção dos gráficos. Foram simuladas 640.000 séries para cada modelo, variando a força e o sinal da autocorrelação. Após a verificação da estabilidade dos resíduos em cada série simulada, na série original, foram inseridos *outliers* com amplitudes variáveis em uma observação pré-determinada. As séries contaminadas pela observação anômala foram novamente modeladas e os resíduos foram grafados em gráficos de controle IMCC e EWMA, registrando-se os pontos detectados corretamente. Em cada gráfico, para o par de variáveis: parâmetro de autocorrelação e amplitude de *outlier*, gerou-se uma proporção de detecção, na qual foram aplicados testes de comparação não-paramétricos. O resultado obtido por meio dos testes evidenciou a superioridade do gráfico IMCC para ambos os modelos. Quanto ao estudo da influência do parâmetro de autocorrelação, referente ao sinal e a magnitude da mesma, para ambos os gráfico e modelos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , não se verificou diferença significativa. Dessa forma, comprovou-se a eficácia dos gráficos de controle IMCC em detectar *outliers* por meio de resíduos em processos industriais autocorrelacionados.

Palavras-chave: Séries temporais; Autocorrelação; Gráficos de controle de resíduos; *Outliers*.

## **ABSTRACT**

Master's Degree Thesis  
Post-Graduate Program in Production Engineering  
Federal University of Santa Maria

### **EFFICIENCY OF CONTROL CHARTS TO DETECT OUTLIERS IN AUTOREGRESSIVE AND MOVING AVERAGE PROCESS**

Author: Jean Paulo Guarnieri  
Supervisor: Adriano Mendonça Souza, Dr.  
Submission: Santa Maria, October 15<sup>th</sup>, 2010.

This research approaches the prediction models application along with the usage of residual control charts to evaluate productive processes with characteristics of autocorrelation in its samples. The overall objective was to determine the Individual Measurement Control Charts (IMCC) and the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) efficiency when applied to residuals of ARIMA class, to the outliers' detection in autocorrelated processes, as well as identifying the autocorrelation influence and the amplitude of the outlier concerning the charts detection capacity. To each AR(1) and MA(1), 640.000 series were simulated, with varying strength and autocorrelation signal. After each series simulated residual stability verification, in the original series, outliers were inserted with varying amplitudes in a pre-determined observation. The series contaminated by the anomalous observation were again modeled and the residual were inscribed in IMCC and EWMA control charts, correctly registering the detected points. In the detection proportions to the outlier's variant pair, autocorrelation parameter and amplitude, non parametric tests were applied. The result obtained through the tests presented the superiority of the IMCC chart for both models. To what concerns the study of the autocorrelation parameter influence, regarding its signal and magnitude to both charts and AR(1) and MA(1) models, no significant difference could be verified. Therefore, the efficacy of IMCC control charts in the outliers' detection through residuals in non independent processes could be confirmed.

Key words: Time series; Autocorrelation; Residual control charts; Outliers.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comportamento da FAC e FACP de um modelo $AR(1)$ .....	29
Figura 2 – Comportamento da FAC e FACP de um modelo $MA(1)$ .....	30
Figura 3 – Componentes do gráfico de controle.....	32
Figura 4 – Comparação do gráfico de controle com o teste de hipótese.....	34
Figura 5 – Representação gráfica: (a) Processo homocedástico e (b) processo heterocedástico. .....	39
Figura 6 – Gráfico $Q-Q Plot$ de dados que apresentam distribuição normal. ....	48
Figura 7 – FAC dos resíduos de um modelo $AR(2)$ juntamente com a estatística de Ljung-Box. .....	50
Figura 8 – Fluxograma representativo dos passos metodológicos da pesquisa.....	62
Figura 9 – <i>Outlier</i> inserido em uma série original de dados autorregressivos $AR(1)$ .....	67
Figura 10 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo $AR(1)$ utilizando o gráfico de controle IMCC. ..	69
Figura 11 – Comportamento de um <i>outlier</i> na construção da estatística EWMA, para valores de $\lambda$ igual a 0,05; 0,1 e 0,2. ....	71
Figura 12 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo $AR(1)$ utilizando o gráfico de controle EWMA, $\lambda = 0,2$ e $L = 2,86$ . ....	71
Figura 13 – Representação gráfica para modelo $AR(1)$ : (a) Gráfico $Q-Q Plot$ das proporções de detecção do gráfico IMCC e (b) Gráfico $Q-Q Plot$ das proporções de detecção do gráfico EWMA. ....	73
Figura 14 – Gráfico de dispersão das proporções de detecção, no eixo y, para um modelo $AR(1)$ .....	74

- Figura 15 – *Outlier* inserido em uma série de dados de um processo de média móvel  $MA(1)$ .  
 ..... 78
- Figura 16 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $MA(1)$  utilizando o gráfico de controle IMCC. . 80
- Figura 17 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $MA(1)$  utilizando o gráfico de controle EWMA,  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ . ..... 82
- Figura 18 – Representação gráfica para modelo  $MA(1)$  : (a) Gráfico  $Q-Q Plot$  das proporções de detecção do gráfico IMCC e (b) Gráfico  $Q-Q Plot$  das proporções de detecção do gráfico EWMA. .... 83
- Figura 19 – Gráfico de dispersão das proporções de detecção para um modelo  $MA(1)$ . ..... 84

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estimadores de $\mu$ e $\sigma$ do processo para cada tamanho de amostra ( $n$ ) com $m$ amostras.....	33
Tabela 2 – Resultados apresentados para cada gráfico de controle.....	64
Tabela 3 – Modelo de tabela para apresentação dos resultados. ....	64
Tabela 4 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos autorregressivos $AR(1)$ por meio do gráfico de controle de medidas individuais (IMCC). ....	68
Tabela 5 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos autorregressivos $AR(1)$ por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros $\lambda = 0,1$ e $L = 2,7$ . ....	69
Tabela 6 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos autorregressivos $AR(1)$ por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros $\lambda = 0,2$ e $L = 2,86$ . ....	70
Tabela 7 – Teste de normalidade para as proporções de detecção do modelo $AR(1)$ .....	74
Tabela 8 – Comparação da eficiência dos gráficos IMCC e EWMA na detecção de <i>outliers</i> , em processos $AR(1)$ . ....	75
Tabela 9 – Comparação das proporções de detecção para parâmetros de autocorrelação positivos e negativos, em processos $AR(1)$ .....	76
Tabela 10 – Comparação dos parâmetros de autocorrelação quanto ao poder de detecção de <i>outliers</i> em processos $AR(1)$ . ....	77
Tabela 11 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos de média móvel $MA(1)$ por meio do gráfico de controle de medidas individuais (IMCC). ....	79
Tabela 12 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos $MA(1)$ por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros $\lambda = 0,1$ e $L = 2,7$ ....	80
Tabela 13 – Proporção de detecção de <i>outliers</i> em processos $MA(1)$ por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros $\lambda = 0,2$ e $L = 2,86$ .....	81
Tabela 14 – Teste de normalidade para as proporções de detecção do modelo $MA(1)$ .....	83

Tabela 15 – Comparação da eficiência dos gráficos IMCC e EWMA na detecção de <i>outliers</i> , em processos $MA(1)$ . .....	85
Tabela 16 – Comparação das proporções de detecção para parâmetros de autocorrelação positivos e negativos, em processos $MA(1)$ .....	86
Tabela 17 – Comparação dos parâmetros de autocorrelação quanto ao poder de detecção de <i>outliers</i> em processos $MA(1)$ . .....	87
Tabela 18 – Comparação entre os modelos. ....	88

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANOVA – Análise de Variância

AO – *Outlier* Aditivo

AR – Modelo Autorregressivo

ARFIMA – Modelo Autorregressivo Fracionalmente Integrado e de Médias Móveis

ARIMA – Autorregressivo Integrado e de Médias Móveis

ARL – *Average Run Length*

ARMA – Modelo Autorregressivo e de Médias Móveis

CEnP – Controle de Engenharia de Processo

CEP – Controle Estatístico de Processo

CMS – Comprimento Médio da Sequência

CuSum – Soma Cumulativa

EPC – *Engineering Process Control*

EWMA – Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Ponderada

FAC – Função de Autocorrelação

FACP – Função de Autocorrelação Parcial

GL – Graus de Liberdade

*i.i.d.* – Independente e Identicamente Distribuída

IMCC – Gráfico de Controle de Medidas Individuais

IO – *Outlier* Inovador

JB – Estatística Jarque-Bera

LC – Linha Central

LIC – Limite Inferior de Controle

LS – Alteração de Nível Permanente

LSC – Limite Superior de Controle

MA – Modelo Médias Móveis

MNPL – Gráfico de Controle de Médias de Lotes

MQO – Mínimos Quadrados Ordinários

MR – Gráfico de Controle de Amplitude Móvel

MV – Máxima Verossimilhança

NMA – Número Médio de Amostras até o Sinal

$NMA_0$  – Número Médio de Amostras até o Sinal sob Controle

$NMA_1$  – Número Médio de Amostras até o Sinal fora de Controle

RB – Ruído Branco

SARIMA – Modelo Autorregressivo Integrado e de Médias Móveis Sazonal

TC – Alteração de Nível Temporária

## **LISTA DE ANEXOS**

ANEXO A – Fatores para construção de gráficos de controle.....	101
--	-----

## ÍNDICE

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>1.1 Tema da pesquisa.....</b>	<b>18</b>
<b>1.2 Justificativa e importância do trabalho.....</b>	<b>18</b>
<b>1.3 Problema da pesquisa.....</b>	<b>19</b>
<b>1.4 Objetivos.....</b>	<b>20</b>
1.4.1 Objetivo geral .....	20
1.4.2 Objetivos específicos.....	20
<b>1.5 Delimitação da pesquisa.....</b>	<b>21</b>
<b>1.6 Organização do trabalho.....</b>	<b>21</b>
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>22</b>
<b>2.1 Séries temporais univariadas.....</b>	<b>23</b>
2.1.1 Componentes básicos de uma série temporal.....	23
<b>2.2 Modelos ARIMA.....</b>	<b>27</b>
2.2.1 Modelo $AR(p)$ .....	28
2.2.2 Modelo $MA(q)$ .....	29
<b>2.3 Gráficos de controle.....</b>	<b>31</b>
2.3.1 Conceitos básicos sobre gráficos de controle.....	31
2.3.2 Suposições para aplicação dos gráficos de controle.....	37
2.3.3 Gráficos de controle para medidas individuais (IMCC) e amplitude móvel (MR).....	39
2.3.4 Gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) .....	42
<b>2.4 Testes de Diagnósticos .....</b>	<b>45</b>
2.4.1 Testes de normalidade .....	45
2.4.2 Teste para autocorrelação .....	48
2.4.3 Teste para homocedasticidade.....	50

<b>2.5 Outliers .....</b>	<b>51</b>
2.5.1 Modelos para detecção de <i>outliers</i> .....	51
<b>2.6 Estatística Experimental .....</b>	<b>54</b>
2.6.1 Teste U de Mann-Whitney para comparação de duas amostras .....	55
2.6.2 Teste Kruskal-Wallis para comparação de três ou mais amostras .....	57
<b>2.7 Comentários gerais do capítulo .....</b>	<b>59</b>
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>60</b>
<b>3.1 Banco de dados.....</b>	<b>61</b>
<b>3.2 Etapas metodológicas .....</b>	<b>61</b>
<b>3.3 Recursos computacionais .....</b>	<b>65</b>
<b>3.4 Comentários gerais do capítulo .....</b>	<b>65</b>
<b>4 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>66</b>
<b>4.1 Modelo autorregressivo AR(1) .....</b>	<b>66</b>
4.1.1 Testes estatísticos para modelo $AR(1)$ .....	72
<b>4.2 Modelo de médias móveis MA(1) .....</b>	<b>78</b>
4.2.1 Testes estatísticos para modelo $MA(1)$ .....	82
<b>4.3 Resumo da aplicação .....</b>	<b>87</b>
<b>4.4 Comentários gerais do capítulo .....</b>	<b>89</b>
<b>5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>90</b>
<b>5.1 Conclusões .....</b>	<b>90</b>
<b>5.2 Recomendações .....</b>	<b>92</b>
<b>6 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>93</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>100</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A qualidade nem sempre foi parte integrante da fabricação de produtos e da prestação de serviços ao longo da evolução da indústria mundial. No entanto, a conscientização de sua importância e a introdução de métodos formais para o controle e melhoria da qualidade tem apresentado um desenvolvimento evolutivo ao longo do último século, principalmente depois da Segunda Guerra Mundial. Após este período os conceitos e ferramentas até então desenvolvidos passaram a ser empregados exaustivamente pelas indústrias de bens e serviços, que focaram seus negócios na qualidade exigida pelo cliente para conquistar fatias maiores no mercado altamente competitivo (GARVIN, 1987).

Essa evolução, em grande parte, se deve ao surgimento do Controle Estatístico do Processo (CEP), que é um conjunto de ferramentas para a resolução de problemas na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade por meio da redução da variabilidade. Dentre estas ferramentas, destaca-se o desenvolvimento de gráficos de controle de processo, que foram propostos por Walter A. Shewhart do *Bell Telephone Laboratories*, em 1924, os quais possibilitavam determinar se a característica da qualidade que estava sendo monitorada apresentava um desvio do valor-alvo do processo. Esta forma de monitoração ainda é muito utilizada na indústria, pois permite a distinção entre causas especiais e causas comuns de variabilidade – as primeiras atribuídas a indivíduos e máquinas, e as outras de responsabilidade gerencial, como falhas das matérias-primas ou pequenos desajustes no processo –, identificar o instante em que o processo foi alterado, entender a causa raiz do desajuste e melhorar o processo prevenindo reincidências (CLARO et al., 2007).

Segundo Montgomery (2004), os gráficos de controle são utilizados, geralmente, para alcançar um estado de controle estatístico e para monitorar a produção em qualquer tipo de processo. Segundo o mesmo autor, há pelo menos cinco razões para a popularidade e importância dos gráficos de controle:

- a) são uma técnica comprovada para a melhoria da produtividade;
- b) são eficazes à prevenção de defeitos;
- c) evitam o ajuste desnecessário do processo;

- d) fornecem informação de diagnóstico;
- e) fornecem informação sobre a capacidade do processo.

Os gráficos de controle são habitualmente planejados e avaliados assumindo que observações consecutivas do processo sejam independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*). As observações também devem atender às suposições de normalidade, homocedasticidade (variância constante), e não apresentarem autocorrelação. Entretanto, segundo, Montgomery (2004), Costa et al. (2004) e Claro et al. (2007), a independência entre as observações é a suposição mais importante e é frequentemente violada na prática. Isso se deve ao fato de, os processos de manufatura em geral serem regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre as observações torna-se pequeno em relação a estas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo.

Construir gráficos de controle baseados em resíduos de modelos matemáticos ajustados aos dados e que incorporam na sua estrutura a autocorrelação dos mesmos, é a principal alternativa para evitar os problemas causados pela violação das suposições de não correlação entre as observações (DEL CASTILLO, 2002). É importante ressaltar que os resíduos gerados pelos modelos devem ser aproximadamente normais e independentes com média zero e variância constante, o que satisfaz plenamente as suposições do uso adequado de gráficos de controle.

Porém, a alternativa de ajuste do modelo matemático aos dados para eliminar a autocorrelação somente é válida para os casos em que a dependência serial na variável sob monitoramento é uma causa especial, devendo ser eliminada. Por outro lado, se ela é parte inerente da variabilidade resultante das causas comuns e não pode ser removida, deve-se levá-la em consideração no planejamento dos gráficos de controle, evitando estimativas incorretas nos seus parâmetros, que refletem em aumento da taxa de alarmes falsos ou no número de amostras necessárias para a detecção de deslocamentos na média do processo (LU e REYNOLDS, 1999).

Vários autores, entre eles Knoth e Amin (2003) e Ramos e Ho (2003), tem estudado alternativas de modificações nos métodos clássicos para obter limites naturais de tolerância e índice de capacidade que se adaptem à presença de correlação nas observações do processo, possibilitando a construção de gráficos de controle eficientes nestes casos. Outra solução reside na forma de monitoramento dos dados. Como em muitas aplicações, a dinâmica do processo faz com que observações consecutivas ou próximas tornem-se correlacionadas, e

uma forma de se evitar tal dependência é aumentar o intervalo de tempo entre as observações, com conseqüente desvantagem de não se aplicar o conceito de subgrupo racional (CLARO et al., 2007).

No final do século passado, foi desenvolvida a metodologia do Controle de Engenharia do Processo (*CEnP*), o qual utiliza medidas obtidas do processo que revelam o seu comportamento futuro, possibilitando, a partir daí, prescrever trocas nas variáveis de modo a torná-las o mais próximo possível do alvo desejado, o que até então não era possível com o tradicional CEP (SOUZA, SAMOBYL e MALAVÉ, 2004a).

De acordo com Del Castillo (2002), o *CEnP* tem a missão de entender o comportamento da autocorrelação em processos produtivos e, para isso, utiliza modelos matemáticos que podem antecipar uma futura causa de instabilidade neste processo. A utilização conjunta destas duas metodologias fornece uma forma eficaz de controlar a qualidade de produtos e serviços. Desta forma, o *CEnP* tem a função de entender os problemas de autocorrelação em esquemas tradicionais de controle de qualidade, assim como entender a dinâmica de uma variável de controle. Pesquisadores como Box, Hunter e Hunter (1978), Mac Gregor (1987), Box e Kramer (1992), Del Castillo (1996), Box e Luceño (1997a) têm apresentado diversos estudos de como esta metodologia deve ser empregada em processos produtivos.

Tanto no CEP quanto no *CEnP*, trabalha-se exaustivamente na monitoração e análise de dados, a fim de verificar a estabilidade do processo no primeiro e corrigir possíveis desvios do valor-alvo no segundo. Esta coleta dos dados sempre está sujeita a erros de medição, de execução ou na variabilidade inerente dos elementos da população. Se as observações coletadas apresentam um grande afastamento das restantes ou são inconsistentes com as mesmas, elas são consideradas *outliers* (FOX, 1972).

Estas observações discrepantes muitas vezes podem passar despercebidas em gráficos de controle de resíduos de processos com dados autocorrelacionados, pois segundo Chang (1982), o modelo matemático utilizado para remover a correlação serial pode incorporar o comportamento do *outlier* na sua estrutura, atenuando seu efeito na série de resíduos dificultando a detecção da observação anômala. Dessa forma, nesta pesquisa buscou-se utilizar a técnica de CEP, aplicada a 640.000 séries de dados univariados, de forma a caracterizar a influência da amplitude do *outlier* e do grau de autocorrelação da série, na eficiência de detecção de *outliers* em processos produtivos autorregressivos e médias móveis de primeira ordem.

## 1.1 Tema da pesquisa

Esta pesquisa aborda a aplicação de modelos de previsão juntamente com a utilização de ferramentas de controle de qualidade para a avaliação de processos produtivos com características de autocorrelação em suas amostras. O tema central da presente pesquisa busca verificar a eficiência de detecção de *outlier* pelos gráficos de controle de medidas individuais (IMCC) e de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) em processos autocorrelacionados.

## 1.2 Justificativa e importância do trabalho

A aplicação dos modelos autorregressivos (AR) e de médias móveis (MA) integrantes da classe de modelos autorregressivos integrados e de média móvel – ARIMA vem sendo utilizada frequentemente no controle da qualidade de processos industriais que apresentam autocorrelação em suas amostras. Estes modelos tratam a autocorrelação do processo, permitindo a aplicação de gráficos de controle em seus resíduos, podendo assim, monitorar a qualidade de interesse do produto a ser produzido.

Segundo Montgomery (2004) a utilização de modelos AR e MA surge frequentemente em instalações químicas e de processamento, onde a variável de interesse é uma saída não controlada do processo, ou seja, nenhuma ação de controle é exercida para manter a variável próxima ao valor-alvo, fazendo com que a mesma “vagueie” como se não houvesse um valor fixo para a média do processo. Aliado a isto, os modelos AR e MA têm ainda a vantagem de serem modelos univariados, onde o comportamento de um processo é simplesmente auto-explicativo e não depende de outras variáveis do sistema (MORETTIN e TOLOI, 2004).

Quando se necessita detectar *outliers* em processos industriais, oriundos de erros do operador ou falta de manutenção dos equipamentos, existem métodos estatísticos específicos, porém alguns destes apresentam uma complexa estrutura matemática, dificultando sua aplicação na indústria.

Ao realizar uma revisão de literatura sobre o assunto, verificou-se a não existência de estudos sobre o poder dos gráficos de controle de resíduos na detecção de *outliers* em

processos autocorrelacionados. A inovação desta pesquisa consiste em aliar um método de detecção de *outliers* às ferramentas do controle estatístico de processos amplamente difundidos na indústria.

A proposta desta pesquisa justifica-se por avaliar o poder de detecção de *outliers* em processos produtivos autocorrelacionados por meio dos gráficos de controle IMCC e EWMA aplicados aos resíduos dos modelos AR e MA. Além disso, será investigado qual gráfico é mais eficiente e qual a influência do parâmetro de autocorrelação das séries e da amplitude do *outlier* no poder de detecção.

Os resultados desta pesquisa fornecerão subsídios para as indústrias sobre qual gráfico de controle utilizar e qual a probabilidade de uma observação anômala do processo ser um *outlier*, a partir de uma autocorrelação pré-definida.

### 1.3 Problema da pesquisa

A problemática da pesquisa reside no fato de evidenciar cientificamente a eficiência dos gráficos de controle em detectar pontos discrepantes em processos produtivos autocorrelacionados, por meio da análise dos resíduos de um modelo de previsão ajustado ao processo. Logo, as seguintes questões suscitam:

- Qual a taxa de acerto de um gráfico de controle na presença de autocorrelação quando um processo tem características autorregressivas e/ou de médias móveis?
- Qual a influência dos parâmetros de correlação nos processos autorregressivos e/ou médias móveis na detecção dos *outliers*?
- Para quais amplitudes de *outlier* os gráficos de controle de resíduos possuem maior poder de detecção?
- Qual gráfico de controle de resíduos é mais indicado para detecção de *outliers* em processos autocorrelacionados, o gráfico IMCC ou o gráfico EWMA?

## 1.4 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa está descrito a seguir:

### 1.4.1 Objetivo geral

Determinar a eficiência dos gráficos de controle, IMCC e EWMA aplicados aos resíduos de modelos da classe AR e MA, na detecção de *outliers* em processos autocorrelacionados, além de evidenciar a influência da autocorrelação do processo e da magnitude da observação anômala no poder de detecção dos gráficos.

### 1.4.2 Objetivos específicos

Para o êxito do objetivo geral, os seguintes objetivos específicos deverão ser executados:

- Gerar séries representativas de processos produtivos utilizando um fator de autocorrelação de moderado a forte (séries autorregressivas e de médias móveis de primeira ordem);
- Realizar a análise de resíduos das séries, com e sem a introdução do *outliers*, por meio dos gráficos IMCC e EWMA;
- Obter as proporções de detecção de *outliers* para os gráficos IMCC e EWMA, para ambos os modelos utilizados,  $AR(1)$  e  $MA(1)$ ;
- Determinar se existe diferença significativa na detecção de *outliers* entre os modelos gerados e os diversos fatores de autocorrelação utilizados.

## 1.5 Delimitação da pesquisa

A pesquisa se delimita por diversos fatores, tais como a utilização apenas de modelos lineares puros, no caso AR e MA, não se realizando um estudo na modelagem mista. Também não se considera a utilização de modelos com séries não estacionárias ou com tendências, pois em processos produtivos e controlados, geralmente, as séries são estacionárias.

Além disso, se optou por trabalhar somente com gráficos de controle de Shewhart para medidas individuais (elevado poder de detecção em grandes mudanças no processo) e o gráfico EWMA (eficiente para pequenas mudanças no processo). O gráfico de controle de Soma Cumulativa (*CuSum*), apesar de também apresentar grande eficiência para a detecção de pequenas mudanças no processo não será abordado neste estudo.

## 1.6 Organização do trabalho

O trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos, os quais apresentam os seguintes assuntos para cumprimento do objetivo geral proposto.

O primeiro capítulo enfoca o tema da pesquisa, justificativa e importância do trabalho, problema da pesquisa, objetivos e a delimitação da pesquisa.

O segundo capítulo expõe a revisão de literatura que irá dar suporte para o desenvolvimento desta pesquisa.

O terceiro capítulo identifica a metodologia que conduziu o desenvolvimento desta pesquisa, elencando as etapas metodológicas para alcançar os objetivos propostos.

O quarto capítulo apresenta os resultados obtidos, procurando compreender os efeitos desses resultados para alcançar os objetivos deste trabalho.

O quinto capítulo aborda uma análise conclusiva da pesquisa através da verificação dos objetivos, demonstrando se foram atingidos e, em seguida, são feitas algumas recomendações.

No sexto capítulo, são especificadas as referências utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

O processo evolutivo industrial composto por rápidas mudanças e por grande oferta de bens e serviços tem promovido uma verdadeira “*seleção natural*” no setor produtivo mundial. Esta teoria proposta por Darwin, em 1842, para elucidar a evolução natural das espécies, onde somente os indivíduos mais fortes e aptos ao meio em que vivem têm mais chances de sobreviver e reproduzir, pode ser empregada sem nenhuma restrição ao cenário produtivo atual. Nessa concepção, somente as indústrias bem estruturadas, com foco na qualidade e aptas a atender as exigências do cliente, têm chances de sobreviver e multiplicar seus resultados. Por outro lado, as demais empresas tendem a um ciclo de vida extremamente curto, por não se adaptarem ao meio na qual estão inseridas.

Dessa forma, a busca incessante pela qualidade de bens e serviços, alinhada com a satisfação das necessidades dos clientes, devem ser os ingredientes principais para uma indústria assegurar uma boa imagem frente ao mercado. Garvin (1987) apresenta oito dimensões de qualidade: desempenho, confiabilidade, durabilidade, assistência técnica, estética, características, qualidade percebida e conformidade com especificações. Nesta pesquisa o foco está na última dimensão, onde através das ferramentas do Controle Estatístico do Processo (CEP), busca-se que os processos produtivos estejam em conformidade com as especificações do produto final.

Os itens abordados neste capítulo servem de embasamento teórico para o desenvolvimento desta pesquisa. A ordem dos assuntos, busca seguir sua utilização na metodologia proposta para facilitar a compreensão do trabalho. Inicialmente, são abordados alguns conceitos de séries temporais, na sequência introduz-se a metodologia dos gráficos de controle e testes diagnósticos para atendimento dos pressupostos de normalidade, independência e homocedasticidade, seguindo com técnicas de detecção de *outliers* e, finalizando com uma abordagem sobre testes estatísticos de comparação de duas ou mais amostras.

## 2.1 Séries temporais univariadas

Grande parte dos processos produtivos apresenta uma amostragem temporal com objetivo de verificar a estabilidade do mesmo ao longo do tempo. Estas observações constituem-se em uma série temporal, a qual pode ser analisada buscando identificar relações entre os dados, tendências, ciclos, entre outros. Nesse trabalho, os conceitos de séries temporais serão utilizados para representar processos produtivos não independentes, com posterior ajuste de um modelo matemático para captar a autocorrelação dos dados.

### 2.1.1 Componentes básicos de uma série temporal

Ao longo desta seção serão introduzidos conceitos para a compreensão e estudo de séries temporais. Um estudo mais detalhado e abrangente pode ser encontrado em Morettin e Toloí (2004), Enders (2003), Hamilton (1994) e Box, Jenkins e Reinsel (1994).

Uma série temporal é um conjunto de observações ordenadas em intervalos de tempos regulares de qualquer fenômeno aleatório. Sua análise consiste em procurar uma relação de dependência serial existente temporalmente nos dados, buscando encontrar o mecanismo gerador da série, o qual expresse as tendências, comportamentos cíclicos e sazonalidades existentes nas observações com objetivo de fazer previsões.

A notação utilizada para representar uma série temporal  $Z$ , no momento  $t$  será  $Z_t$ , em que  $t = 1, 2, \dots, n$  indica o tamanho da série.

As observações ordenadas no tempo que compõem a série temporal podem ser discretas, se as observações são amostradas espaçadas no tempo, ou contínuas, nos casos em que não exista uma defasagem temporal. É importante ressaltar, que muitas vezes séries temporais discretas são obtidas a partir de séries contínuas, acumulando-se a variável contínua por um determinado período de tempo.

Os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas. Denomina-se de processo estocástico como um conjunto de todas as possíveis curvas ou trajetórias que podem ser obtidas num determinado intervalo de tempo.

A definição formal de processo estocástico pode ser encontrada em Morettin e Tolo (2004), que diz:

**Definição:** *Seja  $T$  um conjunto arbitrário. Um processo estocástico é uma família  $Z = \{Z(t), t \in T\}$ , tal que, para cada  $t \in T$ ,  $Z(t)$  é uma variável aleatória.*

Nessas condições, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade. O conjunto  $T$  é normalmente considerado como o conjunto dos inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) ou conjunto dos reais ( $\mathbb{R}$ ).

Determinada a relação de dependência de  $Z_t$ , pode-se criar um modelo matemático que represente o processo gerador desta série, fazer previsões em função dos seus valores passados e descrever o seu comportamento. Como o nível de incerteza aumenta em proporção com o horizonte de tempo das previsões, é aconselhável a utilização de previsões de curto prazo. Contudo, se é desejável previsões para um longo período de tempo, as mesmas podem ser realizadas desde que atendam ao nível de incerteza do estudo.

Uma série temporal pode ser constituída por quatro componentes. A primeira é representada pela tendência, representa o comportamento crescente ou decrescente, correspondendo a um aumento ou declínio gradual da série. Quando uma tendência está presente, a série é considerada não estacionária. A não estacionariedade pode ser em relação a média e/ou em relação à variância dos dados.

Uma segunda componente muito frequente é a sazonalidade onde movimentos ondulatórios ocorrem regularmente em períodos fixos de tempo no decorrer do período de um ano.

Uma terceira componente, mas nem sempre presente nas séries temporais é o ciclo, o qual é semelhante à sazonalidade, porém indica padrões que se repetem em períodos de tempo superiores ao período de um ano.

Outra componente muito importante é o ruído aleatório ou ruído branco. Ao se estimar um modelo matemático que represente uma série temporal, busca-se por resíduos oriundos do processo de modelagem com características de ruído branco. Um ruído branco é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, com a média de seus componentes iguais a zero e variância constante, e que não necessariamente, mas usualmente apresentam

uma distribuição normal. Admitindo-se que o erro aleatório ( $\varepsilon_t$ ) seja um ruído branco, pode-se representá-lo, segundo Morettin e Tolo (2004), como:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (1)$$

Se todas as variáveis do processo forem independentes e tiverem a mesma distribuição de probabilidade, tem-se uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*).

Uma forma de verificar se um modelo matemático se ajusta ao comportamento de uma série temporal qualquer, consiste na verificação de seus resíduos. Se os mesmos forem *i.i.d.* é um indicativo que o modelo está bem ajustado ao comportamento dos dados.

Segundo Costa et al. (2004), Requeijo et al. (2005), Claro et al. (2007), Pylro (2008) entre outros autores, resíduos de modelos matemáticos que seguem uma distribuição normal, sendo independentes e identicamente distribuídos (*i.i.d.*), atendem todas as suposições necessárias para que possam ser construídos gráficos de controle, como será visto na seção pertinente a este assunto.

Conforme Bueno (2008), uma das suposições mais frequentes que se faz a respeito de uma série temporal é que ela seja estacionária, ou seja, desenvolve-se no tempo, aleatoriamente ao redor de uma média e com uma variância constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. A média e a variância de uma série temporal podem ser representadas conforme (2) e (3):

$$E[Z_t] = \mu_t \quad (2)$$

$$E(Z_t - \mu_t)^2 = E[Z_t^2] - [E[Z_t]]^2 = \sigma_t^2 \quad (3)$$

Enquanto que a covariância entre  $Z_t$  e  $Z_{t+h}$  está evidenciado em (4):

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) = E[(Z_t - \mu_t)(Z_{t+h} - \mu_{t+h})] \text{ para } h \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Normalizando a covariância, encontra-se a correlação que é dada por (5):

$$Cor(Z_t, Z_{t+h}) = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+h})}{\sqrt{\sigma_t^2 \sigma_{t+h}^2}} \text{ para } h \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Como se trata de medidas entre instantes de tempo de uma mesma série temporal, tendo o interesse na dependência de  $Z_t$  e seus valores passados defasados  $Z_{t-h}$ , a correlação é denominada de autocorrelação. A Função de Autocorrelação (FAC) é uma das ferramentas utilizadas na identificação de modelos de séries temporais, sendo nesses casos representada por:

$$\rho_j = \rho(j) = Cor(Z_t, Z_{t-h}) \quad (6)$$

Outra ferramenta utilizada conjuntamente com a FAC é a Função de Autocorrelação Parcial (FACP). A autocorrelação parcial deseja medir se  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$  estão relacionados, mas com os efeitos dos  $Z$ 's intermediários ( $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$ ) explicados. Por exemplo, deseja-se mostrar o relacionamento entre as componentes do par ( $Z_t, Z_{t-2}$ ) mantendo-se controlado o efeito de  $Z_{t-1}$  (mantido fixo) sobre  $Z_{t-2}$ , em seguida deseja-se mostrar o relacionamento entre as componentes do par ( $Z_t, Z_{t-3}$ ) controlando-se os efeitos de  $Z_{t-1}$  e  $Z_{t-2}$  sobre  $Z_{t-3}$ , e assim sucessivamente. Assim a autocorrelação parcial até a posição  $k$  é denotada por  $\phi_{kk}$ , e é representada por:

$$\phi_{kk} = Cor\left(\frac{Z_t, Z_{t-k}}{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}}\right) \quad (7)$$

onde  $\phi_{kk}$  é o coeficiente de correlação da distribuição de  $Z_t, Z_{t-k}$  condicional a  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-k+1}$ .

Embora se deseje estacionariedade nas séries temporais em estudo, muitas vezes as séries encontradas na prática possuem alguma forma de não-estacionariedade. A violação desta hipótese básica para o estudo de séries temporais pode ser decorrente de causas como mudanças na estrutura da série, sazonalidade, período de volatilidade, entre outras. Para resolver este problema, deve-se realizar uma transformação nos dados, recorrendo muitas vezes em tomar diferenças sucessivas na série original, até se obter uma série estacionária.

A  $d$ -ésima diferença é dada pela expressão:

$$\Delta^d Z_t = (1-L)^d Z_t \quad (8)$$

onde  $L$  é o operador de defasagem, sendo  $L^h Z_t = Z_{t-h}$ .

Dessa forma, a primeira diferença, ou diferença de ordem 1 ( $d=1$ ), e a segunda diferença ( $d=2$ ) de  $Z_t$ , pode ser melhor compreendida por (9) e (10), respectivamente.

$$\Delta Z_t = (1-L)Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad (9)$$

$$\Delta^2 Z_t = (1-L)^2 Z_t = (1-2L+L^2)Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad (10)$$

Na prática, costuma-se tomar uma ou duas diferenças para tornar a série estacionária (MORETTIN e TOLOI, 2004). Existem modelos que permitem utilizar diferenças fracionárias, no intervalo entre  $-1$  e  $1$ . Esses modelos são chamados de integração fracionária ou de memória longa.

## 2.2 Modelos ARIMA

Dentre os modelos estatísticos mais utilizados na literatura, devem-se ressaltar os modelos Autorregressivos Integrados e de Médias Móveis<sup>1</sup> (ARIMA) ou popularmente chamados modelos Box e Jenkins<sup>2</sup>, que são extremamente utilizados em análise de séries temporais.

A previsão é uma das principais razões da popularidade dos modelos Box e Jenkins, que segundo Werner e Ribeiro (2003), são modelos matemáticos que captam o comportamento da correlação seriada ou autocorrelação entre os valores da série temporal, e com base nesses comportamentos, possibilita realizar previsões futuras. Principalmente em curto prazo, estas previsões são melhores que as obtidas com base nos modelos econométricos tradicionais.

---

<sup>1</sup> Em inglês, *Autoregressive Integrated Moving Averages (ARIMA)*.

<sup>2</sup> Em homenagem aos professores George E. P. Box e Gwilym M. Jenkins mentores dos modelos ARIMA, em 1970.

Nos modelos ARIMA, a série temporal é gerada por um processo estocástico, cuja natureza pode ser representada através de um modelo. A notação utilizada para designar o modelo ARIMA é  $ARIMA(p, d, q)$ , em que  $p$  é o número de termos autorregressivos;  $d$ , o número de diferenciações para que a série torne-se estacionária e  $q$ , o número de termos de médias móveis. Os termos  $p$ ,  $d$  e  $q$  são todos inteiros maiores ou iguais a zero.

Segundo Fava (2000), os modelos ARIMA resultam da combinação de três componentes denominados “filtros”: o componente autorregressivo (AR), o filtro de integração (I) e o componente de médias móveis (MA). Uma série pode ser modelada pelos três filtros ou apenas um subconjunto deles, resultando nos modelos estacionários e não estacionários conhecidos.

A presente pesquisa abordará os modelos da classe ARIMA conhecidos como puros, ou seja, modelos  $AR(p)$ , onde somente a parte autorregressiva é importante para modelar a série em estudo, ou modelos  $MA(q)$  onde apenas as médias móveis são de interesse.

### 2.2.1 Modelo $AR(p)$

Segundo Bueno (2008), um modelo ou processo autorregressivo é utilizado quando observações passadas são importantes para explicar a série em estudo. Nesse modelo os parâmetros  $\phi$  representam a fração de influência das observações passadas no valor atual da série. A forma genérica de um processo  $AR(p)$ , onde  $p$  indica a ordem do modelo, ou seja, o número de observações passadas que explicam a atual é definido por:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + \varepsilon_t \quad (11)$$

onde  $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ ,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  são os parâmetros reais e  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , representa o erro aleatório. Utilizando o operador de defasagem  $L$ , onde  $L^h \tilde{Z}_t = \tilde{Z}_{t-h}$ , obtém-se:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) \tilde{Z}_t = \phi(L) \tilde{Z}_t = \varepsilon_t \quad (12)$$

O modelo autorregressivo de primeira ordem,  $AR(1)$ , é representado pela expressão:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13)$$

A identificação do modelo será feita por meio das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP), ilustrados na Figura 1. Segundo Ehlers (2007), num processo autorregressivo a FAC decai exponencialmente quando  $\phi_1$  é positivo, e decai exponencialmente com alternância de sinais positivos e negativos quando  $\phi_1$  é negativo. A FACP apresenta um corte abrupto no *lag* significativo, indicando a ordem do modelo.

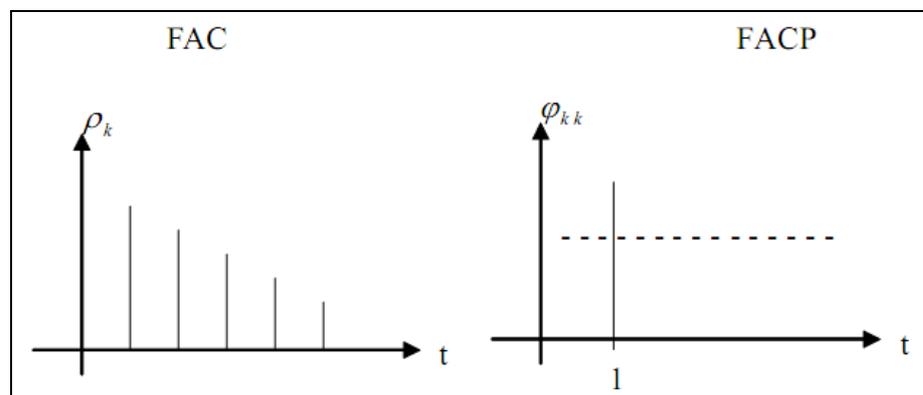


Figura 1 – Comportamento da FAC e FACP de um modelo  $AR(1)$ .

### 2.2.2 Modelo $MA(q)$

O nome do modelo vem do fato de que  $Z_t$  é uma soma algébrica ponderada dos  $\varepsilon_t$  que se movem no tempo. Um modelo de médias móveis de ordem  $q$ ,  $MA(q)$ , é definido pela equação:

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (14)$$

onde  $\mu, \theta_1, \dots, \theta_q$  são parâmetros reais e  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  é o erro aleatório.

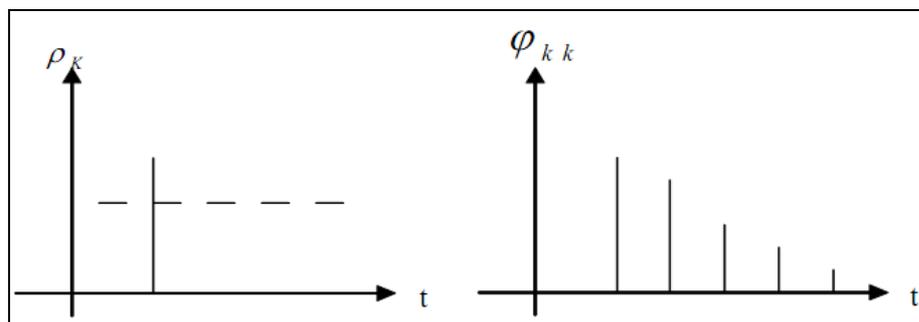
Utilizando-se o operador defasagem  $L^h \varepsilon_t = \varepsilon_{t-h}$ , obtém-se:

$$(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t = \theta(L) \varepsilon_t = Z_t - \mu \quad (15)$$

Em particular, para um processo  $MA(1)$ , tem-se a seguinte expressão:

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (16)$$

Neste caso, a FAC apresentará um corte rápido no *lag* significativo, indicando a ordem do modelo, enquanto que a FACP decairá exponencialmente, se todos os parâmetros forem positivos, ou formará uma senóide amortecida caso algum parâmetro seja negativo.



**Figura 2 – Comportamento da FAC e FACP de um modelo  $MA(1)$ .**

O processo de estimação dos parâmetros de um modelo ARIMA pode ser realizado pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), que é um método simples, ou através do método de Máxima Verossimilhança (MV). Segundo Gujarati (2006), o método MQO é o mais amplamente utilizado, e busca encontrar o melhor ajustamento dos parâmetros do modelo estimado para um conjunto de dados, de forma a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos oriundos da diferença entre a curva do modelo ajustado e os dados. Um requisito deste método é que os resíduos apresentem distribuição normal e características *i.i.d.*

Já o método MV consiste em determinar estimativas que tenham a maior eficiência, mas que não necessariamente sejam não tendenciosas. Uma característica desejável deste método é que, sob certas condições, os parâmetros estimados sejam normalmente distribuídos para grandes amostras. Segundo Silva (2006), o MV é superior ao MQO quando o tamanho da série é pequeno ou quando os resíduos são autocorrelacionados. O mesmo autor afirma que na presença de autocorrelação entre os resíduos sugere-se o uso de estimadores de MV, pois esses preservam a especificidade de consistência e, são assintoticamente equivalentes aos estimadores lineares não-tendenciosos.

## 2.3 Gráficos de controle

Nesta pesquisa os gráficos de controle ocupam um papel primordial, pois serão aplicados aos resíduos de um modelo matemático ajustado a dados autocorrelacionados, buscando verificar sua eficiência em identificar um *outlier* previamente inserido na série de dados originais. Para melhor compreensão da pesquisa, a seguir são apresentados alguns conceitos básicos relativos aos gráficos de controle, suposições para a sua aplicação e os tipos de gráficos utilizados nesta pesquisa.

### 2.3.1 Conceitos básicos sobre gráficos de controle

Os gráficos de controle propostos por Shewhart tinham o propósito de identificar avarias nos processos produtivos evitando a produção de itens fora das especificações. Novos tipos de gráfico de controle foram e continuam sendo desenvolvidos e, dentre estes, destacam-se o gráfico de Soma Cumulativa<sup>3</sup> (*CuSum* – *Cumulative Sum*) e o gráfico de Médias Móveis Exponencialmente Ponderadas<sup>4</sup> (*EWMA* - *Exponentially Weighted Moving Average*) que são capazes de identificar pequenas mudanças nos processos.

Existem dois tipos gerais de gráficos de controle de Shewhart, para atributos e para variáveis. O campo de estudo deste trabalho está inserido em gráficos de controle para variáveis, portanto somente serão apresentados os tipos de gráficos utilizados nesta pesquisa: gráfico de medidas individuais<sup>5</sup> (IMCC) e o gráfico EWMA para monitorar a média, e o gráfico de amplitude móvel<sup>6</sup> (MR) para monitorar a variabilidade.

O objetivo principal da aplicação dos gráficos de controle é indicar quando os processos de produção sofrem alterações e o quanto essas mudanças podem afetar a qualidade do produto. Também permitem verificar se o processo em análise é estatisticamente estável e se apresenta tendência de permanecer estável, indicando quando é necessário atuar sobre ele, possibilitando o aprimoramento contínuo do processo, mediante a redução de sua variabilidade (MONTGOMERY, 2004).

---

<sup>3</sup> Propostos inicialmente por Page em 1954.

<sup>4</sup> Desenvolvido por Roberts em 1959.

<sup>5</sup> Na literatura em língua inglesa é conhecido por *Individual Measurement Control Charts*.

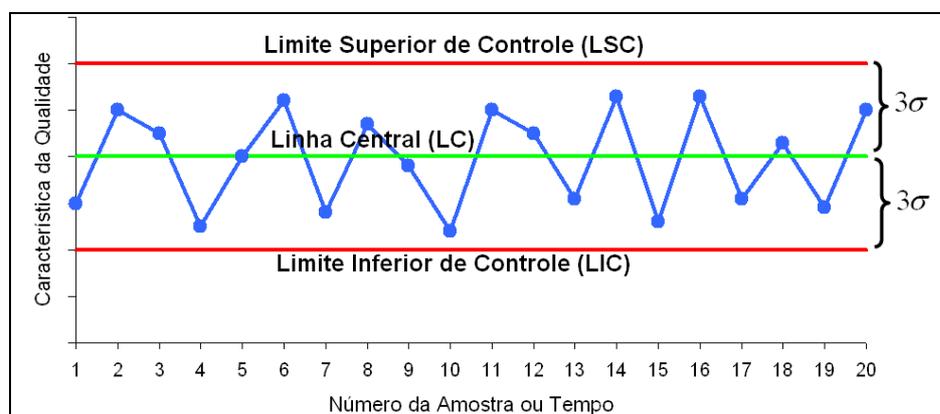
<sup>6</sup> Na literatura em língua inglesa é conhecido por *Moving Range*.

Em qualquer processo de produção, uma determinada quantidade de variabilidade inerente ou natural sempre existirá. As causas para ocorrência de variações em processos produtivos são classificadas em:

- **Causas comuns ou aleatórias:** pequenos efeitos no processo ou variabilidade natural que é impossível de ser eliminada;
- **Causas especiais ou assinaláveis:** que produzem grandes efeitos comprometendo a qualidade do produto. Pode deslocar a média e aumentar a variabilidade do processo.

Shewhart desenvolveu o gráfico de controle com o intuito de detectar a presença de causas especiais de variação em um dado processo. O gráfico de controle é baseado na idéia de que, caso o processo esteja em um estado de controle estatístico, ou seja, a variabilidade se mantém numa faixa estável, as observações futuras podem ser previstas baseadas em observações anteriores. Isso é possível graças à construção de certos limites e o cálculo da probabilidade de observações futuras caírem dentro desses limites (PYLRO, 2008).

De acordo com Costa et al. (2004), Montgomery e Runger (2003), Montgomery (2004), a representação de um gráfico de controle é realizada por três linhas horizontais: a linha central (LC) representa a média dos valores encontrados da característica investigada, e, as outras linhas, as quais estão simetricamente dispostas em relação à central, referem-se ao limite superior de controle (LSC) e ao limite inferior de controle (LIC). Os pontos amostrais assinalados no gráfico representam as médias dos subgrupos (amostras) ou as observações individuais grafadas em uma sequência temporal. A Figura 3 ilustra como é a configuração de um gráfico de controle.



**Figura 3 – Componentes do gráfico de controle.**

Suponha que, as observações sejam independentes e normalmente distribuídas, e que seu valor esperado  $\mu$  (representa a média do processo) e o seu desvio padrão ( $\sigma$ ) sejam

conhecidos, então, os valores dos LSC e LIC serão respectivamente  $\mu + L\sigma$  e  $\mu - L\sigma$ . Usando o teorema central do limite, espera-se que  $100(1 - \alpha)\%$  das amostras estejam dentro desses limites. Dessa forma, o valor  $L$ , o qual representa a constante padronizada  $Z_{\alpha/2}$ , é comumente escolhido como 3, o que representa uma probabilidade de 99,73% de que as observações grafadas estejam dentro dos limites de controle  $\mu \pm 3\sigma$ . Esses limites que são chamados limites de controle “três sigma”, e correspondem a uma probabilidade de 0,0027, ou 27 amostras em 10.000, apresentarem um sinal incorreto de fora de controle quando o processo esta sob controle.

Na prática, geralmente não se conhece  $\mu$  e  $\sigma$  do processo. Eles devem ser estimados a partir de amostras ou subgrupos preliminares, retirados quando o processo supostamente estava sob controle (COSTA et al., 2004). Segundo os mesmos autores, deve-se utilizar no mínimo 20 ou 25 amostras para que se tenham boas estimativas dos parâmetros do processo. Cada amostra é composta de  $n$  observações. Assim, os limites serão representados por  $\bar{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ , onde  $\bar{\bar{X}}$  é o estimador de  $\mu$  e representa a média das médias amostrais e  $\sigma_{\bar{X}}$  é o estimador de  $\sigma$  e representa o desvio padrão das médias amostrais. Na Tabela 1 observam-se os estimadores de  $\mu$  e  $\sigma$  para tamanho de amostra  $n = 1$  e  $n > 1$  com  $m$  amostras.

**Tabela 1 – Estimadores de  $\mu$  e  $\sigma$  do processo para cada tamanho de amostra ( $n$ ) com  $m$  amostras.**

Estimadores	$n = 1$	$n > 1$
$\mu$	$\bar{\bar{X}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$	$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$
$\sigma$	$\sigma_x$	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Segundo Pylro (2008), há uma relação muito próxima entre gráficos de controle e teste de hipóteses. Para elucidar, considera-se a média de uma amostra do processo  $\bar{X}$ . Se este valor se localizar entre os limites de controle, pode-se concluir que a média do processo  $\mu_1$  está sob controle, isto é, ela é igual a  $\mu_0$  que representa o valor alvo do processo. Por outro lado, se  $\bar{X}$  excede algum dos limites de controle, conclui-se que a média do processo está fora de controle, ou seja, ela é igual a um valor  $\mu_1 \neq \mu_0$ . Assim as hipóteses podem ser formuladas da seguinte maneira:

$H_0 : \mu_0 = \mu_1$  (Processo sob controle)

$H_1 : \mu_0 \neq \mu_1$  (Processo fora de controle)

Na Figura 4 se visualiza graficamente as regiões de aceitação e rejeição da hipótese  $H_0$  num gráfico de controle.

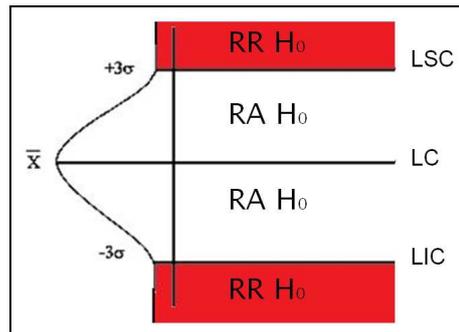


Figura 4 – Comparação do gráfico de controle com o teste de hipótese.

Analogamente ao teste de hipóteses, os erros possíveis ao se utilizar gráficos de controle são:

- **Erro do tipo I:** interpretar que o processo está fora de controle quando na verdade ele está em controle. Também conhecido por alarme falso. A probabilidade deste erro é denotada por  $\alpha$ .
- **Erro do tipo II:** interpretar que o processo está em controle quando na verdade ele está fora de controle. A probabilidade deste erro é denotada por  $\beta$ .

Pylyro (2008) ressalta que os limites de controle não podem ser confundidos com especificações ou tolerâncias de projeto. Tais limites unicamente refletem as variações aleatórias do processo impostas pelas chamadas causas comuns de variação, já que, as especificações ou tolerâncias referem-se a cálculos determinísticos de cunho de projeto.

Um conceito muito importante introduzido por Shewhart foi o de subgrupo racional. Segundo Costa et al. (2004), subgrupos racionais significa extrair subgrupos ou amostras produzidos sob as mesmas condições e selecionados de modo que, se estiverem presentes causas especiais, a chance de diferença entre os subgrupos será maximizada, enquanto a chance de diferenças devido a essas causas especiais dentro de um subgrupo será minimizada. Uma coleta de dados seguindo as condições de subgrupos racionais conduzirá a limites de

controle confiáveis, podendo ser usados para determinar o estado de controle estatístico do processo.

No planejamento de um gráfico de controle devem-se especificar duas variáveis: o tamanho da amostra e a frequência de amostragem. Quanto maior o tamanho da amostra, mais fácil pequenas mudanças no processo serão detectadas. Isso pode ser comprovado recorrendo ao estimador do desvio padrão presente na Tabela 1,  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ , pois quanto maior o valor de  $n$ , mais estreitos serão os limites de controle facilitando a detecção de pequenas variações. Quanto à frequência de amostragem, o ideal, porém não economicamente viável, seria grandes amostras o mais frequente possível. Dessa forma, dependendo do processo de fabricação deve-se procurar retirar grandes amostras a intervalos de tempo mais longos ou pequenas amostras com pouco espaçamento temporal.

A medida de desempenho mais comumente utilizada nos gráficos de controle é o Número Médio de Amostras até o Sinal<sup>7</sup> (NMA), que consiste no número médio de observações marcadas no gráfico de controle até ocorrer um ponto fora dos limites de controle (PYLRO, 2008). Quando o processo está sob controle, denomina-se  $NMA_0$  e expressa o número médio de observações até a primeira ocorrência de um falso alarme. Assim, o  $NMA_0$  deve ser inversamente proporcional a probabilidade de ocorrência de falso alarme ( $\alpha$ ). Quanto maior a probabilidade para este tipo de alarme espera-se um número menor de observações até que ele aconteça. No caso do gráfico de Shewhart com limites três-sigma,  $\alpha = 0,0027$  é a probabilidade de que um único ponto caia fora dos limites, quando o processo está sob controle. Assim o  $NMA_0$  será:

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0027} = 370 \quad (17)$$

Isso demonstra que, mesmo o processo estando sob controle, um sinal fora de controle será emitido a cada 370 amostras em média (MINGOTI e YASUKAWA, 2008). Para o caso de um processo fora de controle, o  $NMA_1$  (ou NMA fora de controle) consiste no número médio de observações, a partir da ocorrência de uma causa especial até a detecção da mesma. Pode ser representado por:

---

<sup>7</sup> Também chamado CMS (Comprimento Médio da Sequência). Na língua inglesa é conhecido por ARL, *Average Run Length*.

$$NMA_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (18)$$

onde  $\beta$  é a probabilidade de não se detectar um deslocamento no processo na primeira amostra subsequente. Dessa forma, percebe-se que  $NMA_0$  e  $NMA_1$  têm objetivos inversos. O  $NMA_0$  deve ser o maior possível, para que alarmes falsos não sejam muito frequentes, enquanto o  $NMA_1$  deve ser o menor possível, para que após um desajuste no processo o gráfico de controle possa detectá-lo o mais rapidamente.

No controle estatístico de processos, por meio de gráficos de controle, deve-se sempre monitorar a média e a variabilidade do processo. Assim, é imprescindível que se construam gráficos de controle para estas duas situações, pois como será visto no item 2.3.3, a partir do gráfico de controle de variabilidade é que se constroem os limites do gráfico de controle para a média.

Os principais gráficos de controle de Shewhart são: o gráfico de médias ( $\bar{X}$ ), gráfico de amplitude (R) e o gráfico de desvio padrão (S). Segundo Werner (1996 apud KORZENOWSKI, 2009) o gráfico  $\bar{X}$  busca observar o desempenho médio do processo acompanhando a variabilidade entre os sucessivos períodos de tempo, enquanto os gráficos R ou S buscam identificar a variabilidade do processo inerente a cada período de tempo, sendo que são utilizados em par com o gráfico  $\bar{X}$ . Para amostras relativamente pequenas pode-se utilizar o gráfico R. Já em amostras maiores, o desvio padrão fornece uma medida de acompanhamento mais robusta.

Como previamente abordado, quanto maior o tamanho da amostra, mais rápido se detecta alguma mudança no processo. Porém, existem processos produtivos em que não é viável a utilização de tamanhos de amostras maiores que a amostra unitária. Segundo Costa et al. (2004), isso pode ocorrer quando inspeção automática é utilizada, de modo que todas as unidades produzidas são inspecionadas ou quando a taxa de produção é muito lenta, sendo inconveniente acumular um tamanho de amostra maior que um para proceder à análise. Nesses casos, utilizam-se gráficos de controle para medidas individuais (IMCC) para monitorar a média. Para a variabilidade do processo usa-se o gráfico de amplitude móvel (MR) em conjunto com o IMCC.

Outros gráficos de controle foram desenvolvidos no intuito de identificar mudanças menores no nível da série como, por exemplo, os gráficos *CuSum* e EWMA (ALVES e

SAMOHYL, 2006). Estes gráficos ao contrário dos gráficos de Shewhart consideram a informação contida na sequência de pontos do processo, através de pesos ponderados.

A seguir serão discutidas as suposições para aplicação de gráficos de controle, a forma de construção dos gráficos IMCC, MR e EWMA, que serão empregados nesta pesquisa. No último item será abordado o assunto de gráficos de controle em processos autocorrelacionados, buscando mostrar formas de proceder nestes casos.

### 2.3.2 Suposições para aplicação dos gráficos de controle

Para que os resultados dos gráficos de controle sejam válidos, as seguintes suposições devem ser satisfeitas: as observações devem ser independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*), seguindo uma distribuição normal com média zero e variância constante, ou seja, homocedásticos. O não atendimento a essas suposições pode resultar em um significativo aumento de alarmes falsos, fator indesejado que, além de aumentar o custo de controle, induzirá a conclusões erradas e a consequente perda de credibilidade nos gráficos de controle por parte do operador (COSTA et al., 2004).

Em grande parte das análises estatísticas o maior problema é o atendimento a suposição de normalidade. Pylro (2008) afirma que moderados desvios frente à suposição de normalidade não necessariamente implicam em séria violação de sua suposição. Korzenowski (2009) demonstra que em gráficos de controle quanto maior for o desvio das observações em relação ao modelo de distribuição normal, maior será o aumento do número de alarmes falsos (aumento do erro de tipo I).

Quando se utiliza gráficos de controle para observações individuais, ao contrário dos outros gráficos, estes são bastante sensíveis à não-normalidade. Borrer, Montgomery e Runger (1999) estudaram o comportamento da não-normalidade nos gráficos IMCC, e descobriram que o verdadeiro valor de NMA sob controle ( $NMA_0$ ) é dramaticamente afetado por dados não normais. Uma abordagem para lidar com este problema seria transformar a variável original em uma nova variável que seja aproximadamente normal. Outra opção seria a utilização de gráficos de controle EWMA, que em estudo realizado pelos mesmos autores, mostrou-se robusto a desvios de normalidade. Segundo Montgomery (2004), o gráfico EWMA pode ser considerado quase um procedimento não-paramétrico, devido a sua grande eficiência mesmo com dados que se afastam de uma distribuição normal.

Dentre as suposições expostas a mais importante consiste na independência das observações. Essa suposição tem gerado grande discussão, pois na prática a maioria dos processos apresenta autocorrelação. Os processos de manufatura são regidos por elementos inerciais, e quando o intervalo entre as observações torna-se pequeno em relação a essas forças, elas se tornam correlacionadas ao longo do tempo (CLARO et al., 2007).

Segundo vários autores (PEDRINI et al., 2008; LU e REYNOLDS, 1999; ALWAN e ROBERTS, 1988), se a autocorrelação é uma causa especial, deve-se tentar eliminá-la. Mas se a autocorrelação é parte inerente da variabilidade resultante de causas comuns e não pode ser removida, deve-se levá-la em consideração no planejamento dos gráficos de controle, evitando assim um aumento na taxa de alarmes falsos ou número de amostras para detecção de deslocamentos na média do processo.

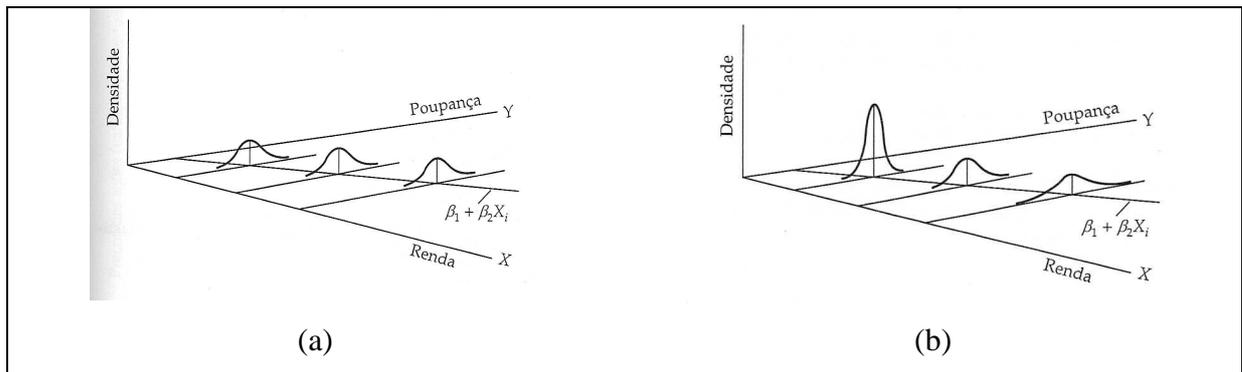
Wheeler (1995 apud PYLRO, 2008), declara que o efeito da autocorrelação nos limites de controle para dados individuais não é significativo se a autocorrelação de *lag 1* for menor que 0,7. Essa afirmação, segundo Pylro (2008) é contestada por outros autores que afirmam que a presença de autocorrelação, mesmo em pequena intensidade, já induzirá o aumento da frequência de alarmes falsos em gráficos convencionais. Isto pode ser comprovado no trabalho de Maragah e Woodall (1992) que mostraram que níveis muito menores do que 0,7 de autocorrelação podem ter um efeito substancial sobre o desempenho estatístico do gráfico.

Em Claro et al. (2007) algumas soluções para o caso de processos autocorrelacionados são citadas. Uma alternativa seria aumentar o intervalo de tempo entre observações, de forma a evitar que a dinâmica do processo torne as observações consecutivas muito próximas correlacionadas. Outra consiste na utilização de limites de controle “alargados”, através de fatores de correção nas constantes de construção dos gráficos de controle (VASILOPOULOS e STAMBOULIS, 1978).

Uma estratégia frequentemente utilizada consiste em ajustar as observações da característica de qualidade a um modelo de previsão apropriado, e monitorar o processo com gráficos de controle para os resíduos resultantes, onde se espera que estes devem ser não-autocorrelacionados (ALWAN e ROBERTS, 1988; MONTGOMERY e MASTRANGELO, 1991; BOX e LUCEÑO, 1997b; TESTIK, 2005).

Muitos artigos têm sido publicados na literatura com o objetivo de avaliar e tratar os efeitos da autocorrelação serial nos gráficos de controle. Para maiores detalhes, ver, por exemplo, Mingoti e Yassukawa (2008), Silva et al. (2007), Claro et al. (2007), Moreira Jr. e Ten Caten (2004) e Ramos e Ho (2003).

A terceira premissa pressupõe que os subgrupos sejam identicamente distribuídos. Quando trabalha-se com resíduos, é desejável que a variância dos resíduos do modelo estimado seja constante, ou seja,  $Var(\mu_i) = \sigma^2$ , conforme Figura 6(a). Caso isso ocorra, diz-se que os resíduos do modelo estimado são homocedásticos. A violação desse pressuposto revela que a variância irá diferir ao longo do tempo, isto é,  $Var(\mu_i) = \sigma_i^2$ , e os resíduos serão heterocedásticos, como mostrado na Figura 6(b).



**Figura 5 – Representação gráfica: (a) Processo homocedástico e (b) processo heterocedástico.**  
Fonte: Gujarati (2006).

Problemas de violação da suposição de homocedasticidade não são comumente referenciados na literatura, porém os modelos de previsão utilizados para resolver a questão da autocorrelação, em geral, apresentam esta suposição (KORZENOWSKI, 2009).

### 2.3.3 Gráficos de controle para medidas individuais (IMCC) e amplitude móvel (MR)

Existem inúmeras situações nas quais o tamanho da amostra para monitoramento do processo é  $n=1$ , isto é, a amostra consiste de uma única medida. Montgomery (2004) cita alguns exemplos de situações em que os gráficos de controle para medidas individuais são úteis:

- inspeção e medição automática em toda a unidade produzida;
- taxa de produção muito lenta, sendo inconveniente acumular amostras  $n > 1$ ;
- várias medidas são tomadas em uma mesma unidade do produto;
- nos resíduos de modelos matemáticos ajustados aos dados que possuíam autocorrelação.

Nestes gráficos, além de verificar a presença de autocorrelação e homocedasticidade, é muito importante, como visto previamente, verificar a hipótese de normalidade, pois os gráficos IMCC são muito sensíveis a desvios de normalidade. Como eles geralmente são aplicados aos resíduos de modelos matemáticos estimados, se o modelo estiver bem ajustado aos dados, seus resíduos satisfazem as suposições necessárias para aplicação do IMCC corretamente.

Esse tipo de gráfico geralmente utiliza a amplitude móvel de duas observações consecutivas como base para estimar a variabilidade do processo. É importante ressaltar que, primeiramente deve ser construído o gráfico de amplitude móvel, e se este estiver sob controle, será utilizado para a construção dos limites de controle do gráfico IMCC. A amplitude móvel ( $MR_i$ ) é definida como:

$$MR_i = |x_i - x_{i-1}| \quad (19)$$

A média das amplitudes móveis é encontrada por meio de:

$$\overline{MR} = \frac{MR_1 + MR_2 + \dots + MR_m}{m} \quad (20)$$

A média entre as amostras é definida por:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m} \quad (21)$$

onde  $m$  é o número de amostras de tamanho  $n=l$  e  $\overline{X}$  é a média dessas amostras.

Para o gráfico de amplitude móvel ( $\overline{MR}$ ), os limites de controle são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} LSC &= D_4 \overline{MR} \\ LC &= \overline{MR} \\ LIC &= D_3 \overline{MR} \end{aligned} \quad (22)$$

Estando o processo sob controle quanto à variabilidade pode-se construir o gráfico de medidas individuais, onde os limites de controle situados a três desvios padrão da média são estimados pela  $\overline{MR}$  e dados por:

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \\
LC &= \bar{X} \\
LIC &= \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}
\end{aligned} \tag{23}$$

As constantes  $d_2$ ,  $D_4$  e  $D_3$  encontram-se tabuladas no Anexo A, para  $n = 2$ , pois se utiliza uma amplitude móvel de duas observações.

Se o objetivo é monitorar resíduos ( $\varepsilon$ ), a amplitude móvel é expressa por  $MR_i = |\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}|$  e os limites de controle do gráfico IMCC, sabendo que a média dos resíduos é  $\bar{\varepsilon} = 0$ , são dados por:

$$\begin{aligned}
LSC &= \bar{\varepsilon} + 3 \frac{\overline{MR}_\varepsilon}{d_2} \rightarrow LSC = +3 \frac{\overline{MR}_\varepsilon}{d_2} \\
LC &= \bar{\varepsilon} \rightarrow LC = 0 \\
LIC &= \bar{\varepsilon} - 3 \frac{\overline{MR}_\varepsilon}{d_2} \rightarrow LIC = -3 \frac{\overline{MR}_\varepsilon}{d_2}
\end{aligned} \tag{24}$$

Costa et al. (2004) ressalta que não se deve utilizar testes de sequência no gráfico MR, pois as observações são correlacionadas e essa correlação pode induzir a um padrão de sequência ou ciclos no gráfico. Entretanto, no caso do gráfico IMCC, qualquer padrão não aleatório deve ser investigado através da utilização dos testes de sequência.

Quando ocorre um deslocamento da média do processo, o gráfico MR apresentará um pico no ponto onde ocorreu a mudança contribuindo na identificação exata do ponto a partir do qual o processo foi alterado. Caso exista um *outlier* nos dados observados, o mesmo gráfico apresentará um pico correspondente a observação discrepante e um pico na observação seguinte, caracterizando a indicação de um *outlier* e não de uma mudança permanente na média do processo.

O NMA sob controle ( $NMA_0$ ) do IMCC é muito menor do que o  $NMA_0 = 370$  do gráfico de Shewhart padrão quando o processo está sob controle, considerando limites três-sigma convencionais. Considerando o NMA fora de controle ( $NMA_1$ ), o gráfico IMCC apresenta menor desempenho que o gráfico de controle  $\bar{X}$  padrão, o que resulta em menor habilidade na detecção de pequenos deslocamentos na média do processo. Uma sugestão seria a utilização de limites de controle mais estreitos, mas isto poderia ocasionar a redução do

$NMA_0$  e o aumento da ocorrência de falsos alarmes. Assim, para pequenos deslocamentos na média recomenda-se a utilização do gráfico *CuSum* ou do gráfico EWMA.

#### 2.3.4 Gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA)

Os gráficos de controle baseados na estatística de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) foram primeiramente apresentados nos anos 50, como uma generalização dos gráficos de média móveis aritméticas (ROBERTS, 1959). Mais tarde, foram feitas comparações entre os gráficos EWMA, Médias Móveis Aritméticas, Shewhart, *CuSum* e outros gráficos univariados, verificando-se que o gráfico  $\bar{x}$  de Shewhart detectava desvios da média do processo acima de três desvios padrões mais rapidamente que os gráficos EWMA (LUCAS, 1973).

Segundo Souza, Samohyl e Malavé (2004b), esta estatística, além de ser um modelo simples, é frequentemente aplicada em processos que exibem uma acumulação contínua. Outro emprego desta estatística é na formação do algoritmo de controle, no Controle de Engenharia de Processo, pois ela proporciona a redução do erro quadrático médio em torno do alvo desejado, sempre que o processo possuir um comportamento que siga um modelo de primeira ordem e os resíduos apresentarem-se não-correlacionados.

O gráfico de controle EWMA possui um mecanismo que incorpora as informações de todas as observações anteriores mais a informação atual. Essas informações são ponderadas, possibilitando atribuir aos valores passados um determinado grau de importância, conforme desejado, sendo atualizado recursivamente como mostrado.

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \quad (25)$$

A série  $Z_i$  é suavizada através da constante de ponderação  $\lambda$ , que multiplica os valores da série original  $X_i$  mais o complemento da constante de ponderação vezes o valor de  $Z_{i-1}$ . Este valor inicial nunca é conhecido, então se pode utilizar o valor alvo do processo,  $Z_0 = \mu_0$ , ou às vezes estima-se pela média dos dados,  $Z_0 = \bar{X}$ .

O fator de ponderação  $\lambda$  deve estar sempre entre zero e um ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), podendo ser ajustado para fornecer maior ou menor ponderação às observações atuais, resultando em vários processos de suavização. Se o valor de  $\lambda$  for próximo de zero, as observações mais recentes recebem uma pequena ponderação, assemelhando-se com um gráfico *CuSum*, sendo útil para detectar pequenas mudanças no processo (LUCAS e SACCUCCI, 1990). Mas, por outro lado, se  $\lambda$  for igual a 1, o gráfico EWMA terá o mesmo efeito que o gráfico de Shewhart (HUNTER, 1986). Segundo Box e Luceño (1997b), a utilização do valor de  $\lambda = 0,2$  é considerado uma boa escolha, pois serve como regra prática para ser utilizada em diversas situações. Entretanto, Montgomery (2004) destaca que, para  $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ , proporciona bons resultados, e salienta que, uma boa estratégia para a escolha desse parâmetro seria utilizar valores pequenos de  $\lambda$  para detectar mudanças pequenas na média do processo.

Para a descrição dos limites de controle do gráfico EWMA, supõe-se que as observações  $X_i$  são variáveis aleatórias independentes, com variância  $\sigma^2$ . A variância de  $Z_i$  pode ser mostrada, conforme desenvolvida por Wasserman (1995):

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (26)$$

Os limites de controle superior, central e inferior para o gráfico de controle EWMA são calculados respectivamente por:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \\ LC &= \mu_0 \\ LIC &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \end{aligned} \quad (27)$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão das observações  $X_i$ 's, e  $L$  é o fator de “alargamento” dos limites de controle. Montgomery (2004) salienta que  $L = 3$  (usuais limites de controle  $3\sigma$ ) resulta em bons resultados principalmente se o valor de  $\lambda$  for grande, entretanto, quando  $\lambda$  for pequeno, há vantagens em reduzir os valores de  $L$  entre 2,6 e 2,8.

Pode-se observar que o fator  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$ , para  $i$  grande, tende à unidade, explicando-se assim o motivo pelo qual, após um determinado tempo, os limites de controle do gráfico *EWMA* convergem para um determinado valor e tornam-se paralelos à linha central.

Adaptando o gráfico de controle *EWMA* aos resíduos obtém-se:

$$Z_i = \lambda \varepsilon_i + (1 - \lambda) Z_{i-1} \quad (28)$$

onde  $\varepsilon_i$  é o resíduo resultante da  $i$ -ésima observação,  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ , isto é, possui distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a  $\sigma_\varepsilon$ .

Dessa forma, as limites de controle superior, central e inferior para monitoração dos resíduos são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} LSC &= L\sigma_\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)[1 - (1-\lambda)^{2i}]} \\ LC &= 0 \\ LIC &= -L\sigma_\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)[1 - (1-\lambda)^{2i}]} \end{aligned} \quad (29)$$

O processo será considerado sob controle se todos os pontos estiverem dentro dos limites estabelecidos pelas equações. Geralmente um controle combinado dos gráficos de Shewhart e *EWMA* é utilizado, sendo que o primeiro avalia o sistema por meio do  $\bar{X}$ , procurando por grandes variações e o segundo é usado para avaliar pequenas discrepâncias.

Para a construção do gráfico de controle *EWMA*, é necessário definir os valores de  $L$  e  $\lambda$ , que são os parâmetros do gráfico. Diversas combinações de deslocamentos de pontos da média e dos parâmetros  $\lambda$  e  $L$  são fornecidos para se escolher o valor do *NMA*, pois recomenda-se que, inicialmente, seja especificado este valor e a mudança no processo que se deseja detectar, para depois serem determinados os parâmetros. O valor do *NMA* sob controle, formado de um comprimento médio de 370 observações para o gráfico  $\bar{X}$  foi considerado como referência na escolha dos parâmetros do gráfico *EWMA*. Estes valores são baseados nas simulações feitas por Crowder (1987).

Como já citado anteriormente, é importante ressaltar a robustez do gráfico *EWMA* quando os dados apresentam um comportamento distante da distribuição normal. Conforme estudo realizado por Borrór, Montgomery e Runger (1999), este gráfico apresentou um *NMA*

sob controle muito superior ao NMA sob controle do gráfico de Shewhart para medidas individuais, quando utilizadas distribuições Gama para representar distribuições assimétricas, e distribuição  $t$ , para representar distribuições simétricas com caudas mais pesadas do que a distribuição normal.

## 2.4 Testes de Diagnósticos

Nesta pesquisa os testes diagnósticos que serão detalhados a seguir, serão utilizados com dois objetivos. O primeiro consiste em, validar se o modelo estimado para remover a autocorrelação dos dados fornece ruído branco. Dessa forma, se os resíduos, por meio dos testes diagnósticos, apresentarem distribuição normal e comportamento *i.i.d.* pode-se concluir que os parâmetros do modelo são boas estimativas para captar o comportamento da série em estudo. O segundo objetivo consiste em, verificar se as suposições para a construção dos gráficos de controle estão sendo atendidas. É importante salientar que as suposições para o desenvolvimento de um gráfico de controle e as características esperadas dos resíduos do modelo estimado são as mesmas. Assim, os testes serão aplicados uma única vez, cumprindo os dois objetivos.

### 2.4.1 Testes de normalidade

Em numerosas situações não é possível ter certeza quanto à normalidade dos dados. Dessa forma, deve-se recorrer a testes de normalidade, pois alguns métodos de inferência estatística partem deste pressuposto. Quanto mais os dados se aproximarem da distribuição normal, maior será a confiabilidade das análises e testes estatísticos, pois sua violação afeta as qualidades de não-tendenciosidade e variância mínima do método de mínimos quadrados ordinários.

Na literatura são encontrados vários testes estatísticos, cujo objetivo é avaliar se a suposição de normalidade está sendo atendida. Neste estudo será detalhado o teste Jarque-Bera e o gráfico *Q-Q plot*.

- Jarque-Bera

É uma estatística que tem a vantagem de ser simples na sua operacionalização, em termos de compreensão intuitiva e depende de dois parâmetros, assimetria e curtose, que podem ser calculados a partir dos dados históricos (GUJARATI, 2006).

O teste de normalidade de Jarque-Bera (JB) se baseia nos resíduos do método dos mínimos quadrados.

A estatística JB apresenta alta confiabilidade em detectar a presença de normalidade nos dados, aliada a facilidade de compreensão dos resultados. Porém, está sujeita a uma baixa probabilidade de incidência de Erro de Tipo II, ou seja, aceitar a hipótese de normalidade quando a hipótese alternativa de não-normalidade é a verdadeira. Sua construção segue uma distribuição Qui-quadrado com dois graus de liberdade, podendo-se calcular a estatística de teste, como em:

$$JB = n \left[ \frac{A_3^2}{6} + \frac{(K_4 - 3)^2}{24} \right] \sim \chi^2(\alpha = 5\%) \geq 5,99 \quad (30)$$

onde  $n$  é o tamanho da amostra,  $A_3$  é o coeficiente de assimetria e  $K_4$  é o coeficiente de curtose excessivo, que podem ser representados respectivamente por:

$$A_3 = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{s} \right)^3}{n} \quad (31)$$

$$K_4 = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{s} \right)^4}{n} \quad (32)$$

Como mostrado na Equação 30, num nível de significância de 5%, o valor da estatística de teste Qui-quadrado com dois graus de liberdade é 5,99.

Como uma distribuição normal ideal não apresenta assimetria e valor três de curtose, as hipóteses a serem testadas podem ser formuladas da seguinte forma:

**$H_0$  : Assimetria = zero e curtose = três, então a série é dita normal;**

**$H_1$  : Assimetria  $\neq$  zero e curtose  $\neq$  três, então a série é dita não-normal.**

O teste baseia-se nos coeficientes de assimetria e curtose. Se o valor da estatística JB for menor que o valor 5,99, correspondente a um nível de significância de 5%, não se rejeita a hipótese nula de normalidade.

- *Q-Q plot*

Segundo Thode (2002), o *Q-Q plot* representa um dos métodos gráficos mais utilizados na verificação da normalidade de séries temporais, uma vez que, somente pela visualização do gráfico pode-se saber se os dados possuem uma distribuição normal. Dessa forma, é utilizado na indústria por ser muito intuitivo. Apesar de ser simples, é uma ferramenta útil e consiste na comparação gráfica dos quantis teóricos da distribuição normal com os quantis dos dados amostrais.

Os passos para a construção do gráfico podem ser resumidos da seguinte forma:

- 1) Ordenar os  $n$  valores da  $j$ -ésima componente do vetor aleatório. Seja  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  as observações ordenadas. Os  $x_{(i)}$ 's são os quantis amostrais ( $i=1,2,\dots,n$ ).
- 2) Quando todos os quantis amostrais são distintos entre si, então exatamente  $i$  observações são menores ou iguais a  $x_{(i)}$ 's.
- 3) A proporção  $i/n$  da amostra à esquerda de  $x_{(i)}$  é frequentemente aproximada para  $(i-0,5)/n$  por conveniência analítica.
- 4) Para uma distribuição normal padrão, pode-se obter os quantis  $q_{(i)}$  tais que  $P(Z \leq q_{(i)}) = (i-0,5)/n$ .
- 5) A idéia será olhar os pontos  $(q_{(i)}, x_{(i)})$  com a mesma probabilidade acumulada  $(i-0,5)/n$ .
- 6) Se os dados, de fato, provêm de uma normal, os pares serão aproximadamente linearmente relacionados, pois o quantil esperado sob normalidade é aproximadamente  $\sigma q_{(i)} + \mu$ , com  $\sigma$  representando o desvio-padrão e  $\mu$  a média da distribuição.

Regra de decisão: quando pontos no gráfico seguem uma reta, ou seja, as duas distribuições são aproximadamente iguais e uma distribuição sobrepõe a outra, pode-se dizer que a série segue uma distribuição normal. Caso contrário, se os pontos estão dispersos, não apresentado uma configuração linear a distribuição não é normal.

A Figura 6 ilustra um gráfico *Q-Q Plot* e o comportamento dos dados quando os mesmos apresentam uma distribuição normal.

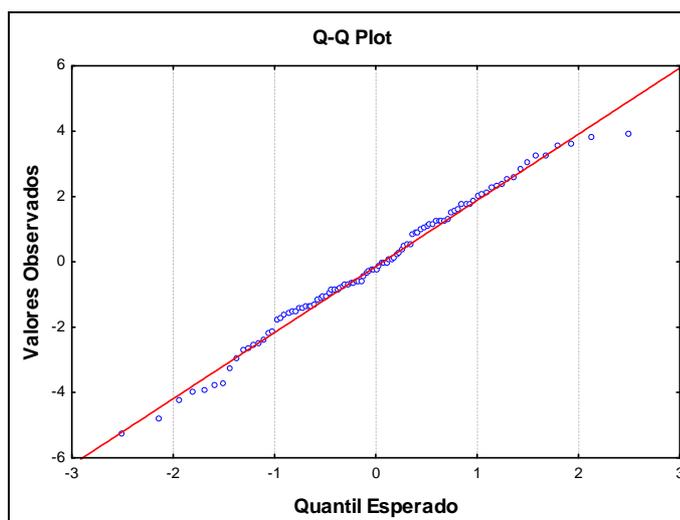


Figura 6 – Gráfico *Q-Q Plot* de dados que apresentam distribuição normal.

#### 2.4.2 Teste para autocorrelação

A autocorrelação indica se existe uma dependência temporal entre os valores sucessivos dos resíduos, ou seja, se os resíduos são correlacionados entre si. A presença de autocorrelação significa que as estimativas através do método de mínimos quadrados ordinários (MQO) dos parâmetros não são tão eficientes, ou seja, não apresentam variância mínima (MORETTIN e TOLOI, 2004). Segundo os mesmos autores, ela provoca um viés nos erros-padrão, conduzindo a testes e intervalos de confiança incorretos. No caso de gráficos de controle, a autocorrelação provoca aumento de alarmes falsos ou mascara o processo retardando o aparecimento de sinais fora de controle.

Nesta subsecção serão detalhados os testes de Box-Pierce e Ljung-Box para verificar a presença de autocorrelação.

##### - Estatística Box-Pierce e Ljung-Box

Segundo Ehlers (2007), ao invés de verificar as autocorrelações residuais individualmente, pode-se testar se um grupo de autocorrelações é significativamente diferente de zero através das chamadas estatísticas  $Q$ .

Box e Pierce (1970) sugeriram um teste de hipótese para as autocorrelações dos resíduos estimados que não detecta quebras específicas no comportamento de ruído branco,

mas permite indicar se as  $m$  primeiras funções de autocorrelação dos resíduos  $\rho_{\hat{\varepsilon}}$  apresentam valores absolutos elevados, que evidenciam a presença de dependência serial nos resíduos. Dessa forma, testa-se a hipótese nula, sendo que qualquer violação desta hipótese indica a presença de autocorrelação nos dados:

$$H_0 : \rho_{\hat{\varepsilon},1} = \rho_{\hat{\varepsilon},2} = \dots = \rho_{\hat{\varepsilon},m} = 0$$

Considerando um modelo do tipo  $AR(p)$ , a estatística de teste de Box e Pierce pode ser expressa como:

$$Q_{BP} = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon},k}^2 \quad (33)$$

onde a estatística têm distribuição assintótica  $\chi^2$  com  $m-p$  graus de liberdade,  $T$  representa o número de observações,  $\rho_{\hat{\varepsilon}}$  é a autocorrelação dos resíduos no *lag*  $k$  e  $m$  representa o número de *lags* que estão sendo testados.

Quando a estatística de teste de Box e Pierce exceder o valor crítico da tabela de  $\chi^2$  para determinado nível de significância, pode-se rejeitar a hipótese nula de que todos os  $(\hat{\rho}_{\varepsilon})$  são iguais a zero. Isso implica em aceitar a hipótese alternativa de que pelo menos uma autocorrelação  $(\hat{\rho}_{\varepsilon})$  é estatisticamente diferente de zero. Nesse caso, o resíduo não é ruído branco, não podendo ser utilizado para aplicação de gráficos de controle.

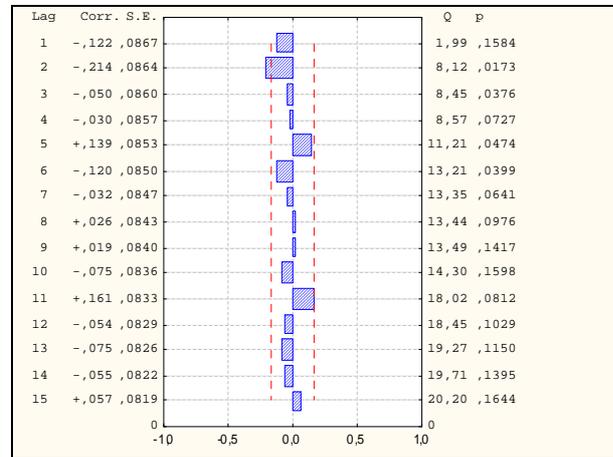
Como a estatística de Box e Pierce apresenta baixo desempenho para pequenas amostras, foi proposta por Ljung e Box (1978) uma estatística com melhor desempenho para todos os tamanhos de amostras, incluindo as pequenas. Esta estatística é representada por:

$$Q_{LB} = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon},k}^2}{T-K} \quad (34)$$

Esta estatística também apresenta uma distribuição  $\chi^2$  com  $m-p$  graus de liberdade, rejeitando a hipótese nula de ruído branco para grandes valores de  $Q_{LB}$ .

É muito comum em *softwares* estatísticos apresentar um correlograma da FAC juntamente com a estatística de Ljung-Box, para cada conjunto de *lags*, conforme visualizado na Figura 7. Esta figura exemplifica os dados residuais de um modelo  $AR(2)$ , onde verifica-se que apesar de o correlograma apresentar uma autocorrelação acima dos limites de

confiabilidade de 95% no segundo *lag*, a hipótese nula de que as 15 primeiras autocorrelações apresentam valor zero não é rejeitada, podendo os resíduos ser considerado ruído branco.



**Figura 7 – FAC dos resíduos de um modelo  $AR(2)$  juntamente com a estatística de Ljung-Box.**

#### 2.4.3 Teste para homocedasticidade

Uma forma mais simples de verificar a presença de homocedasticidade nos resíduos consiste em aplicar o teste de Ljung-Box descrito previamente na série dos resíduos quadráticos. Caso haja presença de autocorrelação na série quadrática dos resíduos é uma evidência de presença de heterocedasticidade.

Como na literatura, existem raros estudos sobre a influência da violação da homocedasticidade na construção dos gráficos de controle, nesta pesquisa os dados não foram testados quanto à homocedasticidade. Para maiores detalhes sobre os testes de White, ARCH-LM e Estatística F que visam detectar a presença de heterocedasticidade nos dados pode-se consultar Eagle (1982), Soares e Castelar (2003), Gujarati (2006) e Morettin e Tolo (2008).

Portanto, nesse trabalho visando à simplicidade de aplicação necessária na indústria, será utilizado o gráfico *Q-Q Plot* para verificação da normalidade. Caso exista alguma dúvida quanto a essa suposição, utiliza-se a estatística de Jarque-Bera para verificar a normalidade dos resíduos. O teste de Ljung-Box será aplicado aos resíduos para detectar a presença de alguma autocorrelação, validando o modelo proposto e atendendo a suposição para construção do gráfico de controle.

## 2.5 Outliers

Um *outlier* pode ser considerado uma observação que apresenta grande afastamento das restantes do processo, ou uma observação com um comportamento inconsistente em relação à variável sob estudo. Diversos autores têm estudado esses valores discrepantes, e a prática de excluí-los do estudo provoca muita divergência entre os mesmos.

Em geral, problemas que levam a estes *outliers* são de várias procedências, e entre elas citam-se: os erros de determinações analíticas, de cálculos, de transcrição de dados, de digitação, incluindo também equipamentos com manutenção e calibração precária e alterações inesperadas em certas condições de um sistema físico ou climático. É importante ressaltar que as causas que influenciam a presença de *outliers* não são conhecidas *a priori*, sendo necessário algum modelo de detecção de *outliers* para identificá-los.

Segundo Miranda (2001), na análise de séries temporais, frequentemente encontra-se *outliers* e mudanças estruturais que podem estar associados a acontecimentos inesperados ou incontroláveis. Estas observações discordantes podem comprometer os métodos usuais de análise de séries temporais. Segundo Palma (1999) uma presença aberrante pode enviesar seriamente as estimativas dos mínimos quadrados dos parâmetros de um modelo ARMA. Ainda segundo o mesmo autor, estudos sobre *outliers* em séries temporais são relativamente escassos, quando comparado aos estudos no domínio da regressão linear. Isso se deve à multiplicidade dos modelos ARIMA –  $AR(p)$ ,  $MA(q)$ ,  $ARMA(p,q)$ ,  $ARIMA(p,d,q)$  – necessitando ajustar diversos mecanismos de detecção e acomodação de *outliers* para cada modelo.

No próximo subitem serão abordados os tipos de *outliers* existentes e serão citados alguns modelos de detecção, recomendados na literatura.

### 2.5.1 Modelos para detecção de *outliers*

A detecção de *outliers* em série temporais foi inicialmente introduzida por Fox (1972), que propôs dois modelos paramétricos, um para *outlier* aditivo ( $AO$  – *additive outlier*) e outro para *outlier* inovador ( $IO$  – *innovational outlier*). A estes modelos de *outliers* podem-se adicionar as alterações da estrutura da série, que consistem em alterações de nível permanente

(*LS – level shift*) ou alterações de nível temporária (*TC – temporary change*). Para desenvolvimentos mais recentes pode-se consultar Tsay (1986, 1988), Chang, Tiao e Chen (1988) e Ljung (1993), onde são propostos métodos iterativos para detecção de diferentes tipos de *outliers* e alguns procedimentos para especificação dos respectivos modelos.

Os quatros modelos paramétricos para a detecção de *outliers* que podem ser caracterizados segundo os efeitos que produzem na série de dados, estão expostos a seguir:

- a) Modelo para um *outlier* aditivo (AO):** representa uma variável do tipo impulso, cujo efeito apenas ocorre em  $t = T$ , sendo nulo o efeito nos períodos restantes. É definido através do modelo:

$$Y_t = Z_t + \omega_{AO} I_t^{(T)} = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \varepsilon_t + \omega_{AO} I_t^{(T)} \quad (35)$$

onde  $Z_t$  representa a série sem a presença de *outliers*, que considera-se seguir um processo *ARMA(p,q)* invertível e estacionário,  $\phi_p(B)Z_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$ ;  $I_t^{(T)}$  é uma variável binária que indica a presença ou ausência de um *outlier* no momento T, através da relação:  $I_t^{(T)} = 1$  se  $t = T$  e  $I_t^{(T)} = 0$  se  $t \neq T$  e  $\omega_{AO}$  é uma constante que representa a magnitude ou impacto inicial do *outlier* aditivo.

- b) Modelo para um *outlier* inovador (IO):** traduz-se num choque na sucessão residual, cujo efeito faz-se sentir em todas as observações a partir do momento  $t(Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots)$  segundo a estrutura do sistema descrito por  $\theta_q(B)/\phi_p(B)$ . Descreve-se através da relação:

$$Y_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} (\varepsilon_t + \omega_{IO} I_t^{(T)}) = Z_t + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \omega_{IO} I_t^{(T)} \quad (36)$$

onde  $\omega_{IO}$  representa o impacto inicial do efeito do *outlier* inovador. Os *outliers* IO, ao contrário dos AO, transmitem o seu efeito as observações posteriores.

- c) **Modelo para uma alteração de nível permanente (LS):** Corresponde a uma variável do tipo degrau, cujo efeito ocorre em  $t = T$  e mantém atuante depois desse momento. Define-se através da expressão:

$$Y_t = Z_t + \frac{\omega_{LC}}{1-B} I_t^{(T)} = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \varepsilon_t + \frac{\omega_{LC}}{1-B} I_t^{(T)} \quad (37)$$

- d) **Modelo para uma alteração de nível temporária (TC):** Refere-se a um choque na série para  $t \geq T$ , cujo efeito tende a diminuir exponencialmente após um impacto inicial. Este *outlier* é definido através do modelo:

$$Y_t = Z_t + \frac{\omega_{TC}}{1-\delta B} I_t^{(T)} = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \varepsilon_t + \frac{\omega_{TC}}{1-\delta B} I_t^{(T)} \quad (38)$$

onde  $0 < \delta < 1$  representa o declínio exponencial do impacto inicial.

Segundo Miranda (2001), em situações práticas de análise de uma série temporal é comum que esta apresente vários tipos diferentes de *outliers*. Assim, para descrever a série observada com  $m$  *outliers* de diferentes tipos, pode-se utilizar o seguinte modelo:

$$Y_t = Z_t + \sum_{i=1}^m \omega_i \nu_i(B) I_t^{(T_i)} \quad (39)$$

onde  $Z_t = [\theta_q(B)/\phi_p(B)] \varepsilon_t$ ;  $\nu_i(B) = 1$  para *outlier* aditivo,  $\nu_i(B) = \theta_q(B)/\phi_p(B)$  para *outlier* inovador,  $\nu_i(B) = 1/(1-B)$  para mudança de nível permanente e  $\nu_i(B) = 1/(1-\delta B)$  para uma mudança de nível temporária; e  $I_t^{(T_i)} = 1$  se  $t = T_i$  e  $I_t^{(T_i)} = 0$  se  $t \neq T_i$ .

Existem diversas metodologias utilizadas para detecção de *outliers*, muitas das quais se derivam de estudos prévios realizados por outros autores. O primeiro método utilizado foi idealizado por Fox (1972) que propôs o uso de critérios de razão de verossimilhanças para detectar um *outlier* aditivo ou um *outlier* inovador numa série temporal, gerada por um modelo autorregressivo puro de ordem  $p$  conhecida. Chang (1982) estendeu os resultados de Fox a modelos ARIMA e propôs um procedimento iterativo para detectar e identificar *outliers*, aditivos e inovadores, quando o seu número e localização são desconhecidos. Este método de detecção foi adotado por Tsay (1986, 1988), entre outros e constitui uma etapa

fundamental em procedimentos iterativos de tratamento de dados de séries temporais com *outliers*. Tsay (1988) generalizou a utilização das estatísticas de teste, para detectar também alterações de nível temporárias e transitórias e Chen e Liu (1993) incorporaram o procedimento de Tsay no procedimento desenvolvido, para estimação conjunta dos efeitos dos *outliers* e dos parâmetros do modelo.

Neste trabalho será abordada uma alternativa para detecção de *outliers* do tipo aditivo em séries temporais, representadas por modelos  $AR(p)$  e  $MA(q)$ , por meio de gráficos de controle de resíduos. O principal objetivo é verificar a eficiência de detecção de *outlier*, não sendo abordadas metodologias para tratar o efeito desses pontos discrepantes.

Uma forma de tratar *outliers* em dados é por meio da análise de intervenção. Assim, após detectar a presença de um ou vários *outliers*, procede-se com a análise de intervenção, para que a influência destes pontos discordantes possa ser incorporada no modelo matemático estimado. Porém, segundo Caiado (2003), é importante saber a exata localização do *outlier*, pois os efeitos das intervenções em momentos desconhecidos ou em locais sem a presença de uma observação significativa podem causar distorções nas autocorrelações e nas autocorrelações parciais do modelo. Assim, os parâmetros do modelo ARMA, representativo do ruído no modelo de intervenção, podem ser enviesados.

## 2.6 Estatística Experimental

Nesta seção será apresentado o ferramental de planejamento de experimentos utilizado para determinar o grau de precisão, em que a autocorrelação é determinante na detecção de um ponto extremo por meio de gráficos de controle. Os testes utilizados serão importantes para prover significância estatística às observações oriundas da análise visual dos dados.

Segundo Souza et al. (2002), para uma melhor compreensão da experimentação alguns termos devem ser definidos:

**Unidade Experimental:** é cada unidade utilizada no experimento. Devem ser semelhantes, isto é, responder ao tratamento da mesma forma. É de cada unidade experimental que serão obtidos os dados experimentais.

**Tratamento:** refere-se a qualquer procedimento, ou conjunto de procedimentos, cujo efeito deverá ser avaliado e comparado com os outros.

**Variável Resposta:** é o que está sendo observado, medido ou contado.

**Repetição:** São unidades experimentais do mesmo grupo. Do ponto de vista estatístico, quanto mais repetições um experimento tiver, mais confiável será o resultado, pois apesar de as unidades serem semelhantes, elas e o próprio processo contêm efeitos de fatores não controlados.

A formulação de hipóteses tem sido muito empregada em pesquisas de diversas áreas do conhecimento. Para decidir se uma determinada hipótese é confirmada por um conjunto de dados, é necessário ter um procedimento objetivo para aceitar ou rejeitar a hipótese (SIEGEL e CASTELLAN, 2006).

Nos próximos subitens serão abordados os testes estatísticos utilizados para verificar se a hipótese de igualdade entre duas ou mais amostras é confirmada. Como nesta pesquisa as suposições de normalidade, homocedasticidade e independência dos dados da variável em estudo são violadas, não será possível a utilização de testes paramétricos. Dessa forma, serão detalhados os testes não-paramétricos U de Mann-Whitney e Kruskal-Wallis.

### 2.6.1 Teste U de Mann-Whitney para comparação de duas amostras

O teste U de Mann-Whitney é um teste não paramétrico utilizado alternativamente ao teste paramétrico *t-Student* para comparar duas amostras independentes (DESU e RAGHAVARAO, 2003).

Segundo Ferreira (1997), o único pressuposto exigido para a aplicação deste teste é que as duas amostras sejam independentes e aleatórias, e que as variáveis em análise sejam numéricas ou ordinais.

O teste apresenta as seguintes hipóteses:

$H_0$  : *As duas amostras têm distribuições idênticas*

$H_1$  : *As duas amostras têm distribuições diferentes*

A hipótese nula estabelece que as duas amostras possuem a mesma distribuição, e se tal acontecer, as médias e também as medianas das duas amostras não diferem.

Segundo Desu e Raghavarao (2003), a estatística de teste U é calculada como se descreve em seguida.

- 1) Sejam  $n_1$  e  $n_2$  os tamanhos das duas amostras. As observações das duas amostras são combinadas numa única variável de tamanho  $n_1+n_2$ , sendo identificadas as observações de cada amostra.
- 2) O conjunto de observações, constituído pela junção das duas amostras, é ordenado por ordem crescente, atribuindo o número de ordem 1 à observação menor e o número de ordem  $n_1+n_2$  à observação maior. Caso haja empates ou “ties”, a cada uma das observações empatadas é atribuído um número de ordem médio que estas observações teriam se não estivessem empatadas.
- 3) Em seguida, calculam-se as somas dos números de ordem das observações de cada amostra:

$W_1$ : soma dos números de ordem das observações da amostra 1;

$W_2$ : soma dos números de ordem das observações da amostra 2;

- 4) Calculam-se as quantidades:

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - W_2 \quad (40)$$

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - W_1 \quad (41)$$

- 5) A estatística de teste é:

$$U = \min(U_1, U_2) \quad (42)$$

Na literatura existem tabelas dos quantis da distribuição  $U$  de Mann-Whitney. Contudo, deve-se ter o cuidado de verificar a qual estatística  $U$  se refere à tabela. Isso se deve ao fato de alguns autores considerarem esta estatística como sendo a apresentada anteriormente ( $U = \min(U_1, U_2)$ ), outros autores consideram como sendo o valor  $W_1$  (ou  $W_2$ ), enquanto outros consideram ainda a estatística  $U = n_1 \cdot n_2 - U_1$  ou  $U = n_1 \cdot n_2 - U_2$  (ZAR, 1999).

Os programas *SPSS* e *Statistica* utilizam a estatística  $U = \min(U_1, U_2)$ . Já o programa *MINITAB* considera a estatística  $U = W_1$ .

O teste de Mann-Whitney pode ser aproximado à distribuição normal, por meio dos seguintes parâmetros para a média e variância:

$$\mu_U = \frac{n_1 \cdot n_2}{2} \quad (43)$$

$$\sigma_U^2 = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12} \quad (44)$$

Se existem empates ou “*ties*” nos números de ordem, deve-se fazer um ajuste no cálculo da variância. Sendo  $u_i$  a quantidade de números de ordem empatados, a expressão para o cálculo da variância deve ser:

$$\sigma_U^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{12} \times \frac{n^3 - n - \sum (u_i^3 - u_i)}{n^2 - n} \quad (45)$$

A estatística de teste é então:

$$Z = \frac{U - \mu_U}{\sqrt{\sigma_U^2}} \sim N(0,1) \quad (46)$$

onde para um nível de significância  $\alpha = 5\%$  e tratando-se de um teste bilateral, o quantil crítico da distribuição normal  $N(0,1)$  é  $Z_{0,05} = \pm 1.96$ .

### 2.6.2 Teste Kruskal-Wallis para comparação de três ou mais amostras

O teste não-paramétrico de Kruskal-Wallis ou análise de variância pelos números de ordem (“*ranks*”) é utilizado quando se deseja comparar três ou mais amostras. Este teste é equivalente ao teste paramétrico da ANOVA, e é utilizado quando são violadas as suposições para aplicação deste último (GOMES e GARCIA, 2002).

É importante ressaltar que quando  $k = 2$ , sendo  $k$  o número de amostras, o teste de Kruskal-Wallis é idêntico ao teste de U de Mann-Whitney.

Sejam  $k$  as amostras em análise (com  $k > 2$ ), cada uma com  $n_i$  repetições, e  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  o número total de observações. Pretende-se verificar se as  $k$  amostras (ou tratamentos) têm distribuições idênticas. As hipóteses a serem testadas são:

$H_0$  : As distribuições das  $k$  amostras são idênticas

$H_1$  : As distribuições das  $k$  amostras não são idênticas

A estatística de teste é:

$$H = \frac{12}{n.(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3.(n+1) \quad (47)$$

onde  $R_i$  é a soma dos números de ordem das  $n_i$  observações do grupo ou tratamento  $i$ .

Se existem números de ordem empatados, a estatística de teste deve ser corrigida para esta situação. Dessa forma, calcula-se um fator de correção:

$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (u_i^3 - u)}{n^3 - n} \quad (48)$$

onde  $u_i$  é o número de empates em cada grupo, e  $m$  é o número de grupos de números de ordem empatados.

A estatística de teste corrigida é:

$$H_c = \frac{H}{C} \quad (49)$$

É possível notar que  $H_c$  será pouco diferente de  $H$ , quando os  $u_i$  são pequenos comparativamente a  $n$ .

Para atribuir os números de ordem às observações, procede-se tal como no teste U de Mann-Whitney, isto é, juntam-se as observações de todos os tratamentos, e ordenam-se todas as observações. Quando existem observações iguais, empates ou “ties”, o número de ordem atribuído a cada uma das observações empatadas é o número de ordem médio dos números de ordem que essas observações teriam se não estivessem empatadas.

Os valores críticos da distribuição da estatística de teste  $H$  (ou  $H_c$ ) apresentam-se tabelados para  $k \leq 5$  amostras. Para grandes amostras, ou  $k > 5$  tratamentos, a estatística de teste  $H$  aproxima-se a uma distribuição  $\chi^2$  (qui-quadrado) com  $k - 1$  graus de liberdade.

## 2.7 Comentários gerais do capítulo

Neste capítulo apresentou-se o ferramental teórico necessário para o desenvolvimento desta pesquisa. A análise de séries temporais será útil para a geração dos modelos autorregressivos e de médias móveis que serão simulados, utilizando-se uma faixa de autocorrelação significativa para a estimação dos modelos.

Os gráficos de controle serão úteis para sinalizarem que tipo de modelo, autorregressivo ou de médias móveis, apresentam uma maior detecção de pontos fora de controle, e qual tipo de gráfico, IMCC ou EWMA, é mais recomendado em função da amplitude do *outlier* inserido.

Os testes diagnósticos serão utilizados para verificar as suposições dos gráficos de controle antes de sua construção. Tipos de *outliers* e técnicas de detecção foram apresentadas não com o intuito de esgotar todas as discussões e desenvolvimentos em relação a esse tema, mas sim para fornecer subsídios para melhor compreensão do trabalho e situá-lo em relação aos estudos existentes.

A avaliação conjunta levando-se em consideração os modelos de séries temporais, as faixas de autocorrelação e as amplitudes de *outlier* serão avaliadas por meio de testes não-paramétricos de comparação entre duas ou mais amostras.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a abordagem metodológica utilizada para verificar a eficiência dos gráficos de controle IMCC e EWMA na detecção de *outliers* em processos autorregressivo e de médias móveis. Será exposto o método da pesquisa, os dados utilizados, as etapas metodológicas e os recursos computacionais que contribuíram para o cumprimento dos objetivos específicos, e conseqüentemente, alcançando o objetivo geral dessa pesquisa.

Com base em seus objetivos a pesquisa pode ser caracterizada como descritiva, pois se busca descobrir uma relação entre as variáveis e seu efeito no experimento em estudo (SILVA e MENEZES, 2001). Segundo os mesmos autores, quanto à estratégia de pesquisa, classifica-se como experimental, uma vez que, consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, e definir as formas de controle dos efeitos que a variável produz no objeto.

O objeto de estudo será a detecção de *outliers* em processos autocorrelacionados, as variáveis capazes de influenciá-lo serão o grau de não independência da série, representada pelo coeficiente de autocorrelação e a amplitude do *outlier*, e as formas de controle dessa influência se dará por meio de gráficos de controle. Além disso, também é uma pesquisa quantitativa, pois segundo Malhotra (2001), procura quantificar os dados e aplica alguma forma de análise estatística.

Quanto ao método científico entende-se como indutivo, pois se trata de um estudo teórico aplicado a uma determinada situação, em que generalizações poderão ser frutos de constatações particulares da realidade (SILVA e MENEZES, 2001).

Este capítulo está dividido em quatro subseções. Na primeira serão descritos os dados utilizados e sua forma de obtenção. Na segunda subseção será apresentado um fluxograma dos passos da pesquisa, juntamente com uma descrição de cada etapa. Os recursos computacionais para aprimorar o tempo de execução dos passos da pesquisa e para análise dos dados serão comentados na subseção três. Por fim serão apresentados alguns comentários gerais do capítulo.

### 3.1 Banco de dados

Os dados utilizados nesta pesquisa não provêm de fontes externas. Os mesmos serão simulados por um *software* computacional, com o objetivo de representar diversos processos produtivos não independentes variando o grau de autocorrelação das observações.

Como a pesquisa aborda processos autorregressivos e de médias móveis, em cada modelo serão variados oito parâmetros de autocorrelação ( $\pm 0,5$ ;  $\pm 0,6$ ;  $\pm 0,7$  e  $\pm 0,8$ ) e oito amplitudes de *outliers*, a serem inseridos na posição 100 da série de dados original ( $1\sigma$ ;  $1,5\sigma$ ;  $2\sigma$ ;  $2,5\sigma$ ;  $3\sigma$ ;  $3,5\sigma$ ;  $4\sigma$  e  $4,5\sigma$ ), perfazendo um total de 64 combinações possíveis. Para cada combinação do parâmetro de autocorrelação e amplitude de *outlier* serão simuladas 10.000 séries, com objetivo de proporcionar maior robustez ao percentual de detecção de *outliers* pelos gráficos de controle. Dessa forma, para cada modelo,  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , serão simuladas 640.000 séries.

### 3.2 Etapas metodológicas

Para facilitar o entendimento da pesquisa, a Figura 8 expõe um fluxograma que compreende os doze passos que serão seguidos nesta pesquisa e as decisões que serão tomadas. Em seguida, cada passo descrito no fluxograma será detalhando proporcionando um melhor entendimento das ferramentas e das metodologias utilizadas.

Os passos P1 a P12 ilustrados na Figura 8 estão detalhados a seguir. Estas etapas metodológicas são utilizadas, tanto para modelos autorregressivos como para modelos de médias móveis:

- P1) Simular uma série temporal com 200 observações, com  $\mu_0 = 0$  e variância constante, por meio de um processo gerador tipo  $AR(1)$  ou  $MA(1)$ . Os parâmetros ( $\phi$  ou  $\theta$ ) devem apresentar autocorrelação positiva e negativa, com magnitude de 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8;
- P2) Modelar a série por meio dos filtros autorregressivos  $AR(p)$  e  $MA(q)$  utilizando a metodologia de Box e Jenkins (1970) para a obtenção dos resíduos;

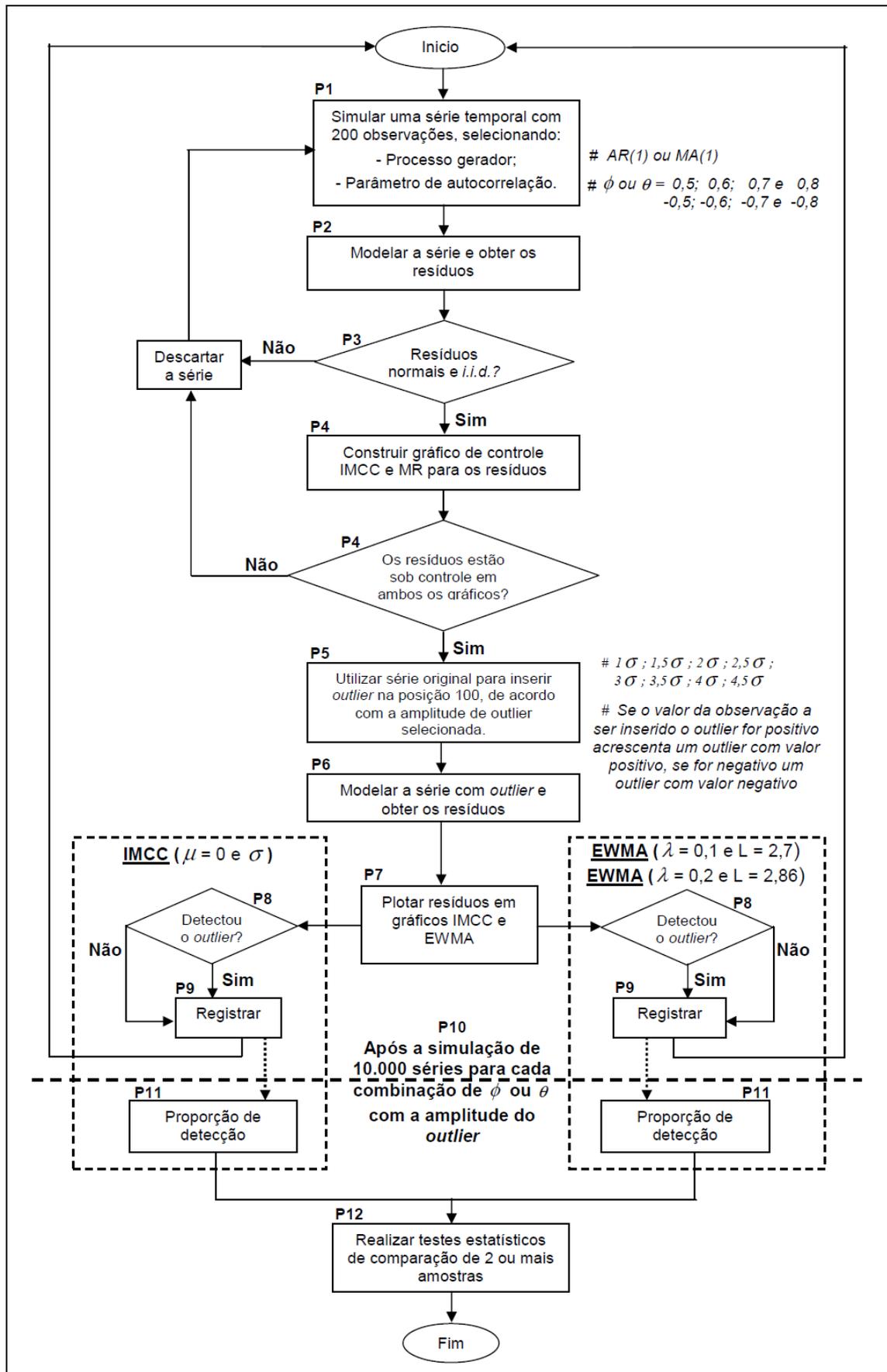


Figura 8 – Fluxograma representativo dos passos metodológicos da pesquisa.

- P3) Verificar se os resíduos atendem às suposições necessárias para a elaboração de gráficos de controle, por meio dos testes diagnósticos;
- P4) A validação dos resíduos se dará por meio da construção de um gráfico de controle de medidas individuais (IMCC) e amplitude móvel (MR) a partir dos resíduos obtidos pelos processos AR e MA. Se a série residual não apresentar nenhum ponto fora dos limites de controle, ou não seja identificado nenhum padrão especial, a série original será considerada estável e utilizada para os propósitos da pesquisa. Caso os resíduos não estejam sob controle estatístico a série original de dados deve ser descartada, e não válida para o estudo;
- P5) Após ser validada a série original para estudo, introduz-se um *outlier* na posição 100 da série de dados originais. A amplitude do *outlier* deve variar nas seguintes magnitudes:  $1\sigma$ ;  $1,5\sigma$ ;  $2\sigma$ ;  $2,5\sigma$ ;  $3\sigma$ ;  $3,5\sigma$ ;  $4\sigma$ ;  $4,5\sigma$  onde  $\sigma$  representa o desvio padrão obtido da série original de dados. Deve-se observar, para não viesar a análise, que se a observação da série original a ser introduzido o *outlier* apresentar um valor positivo, o valor do *outlier* a ser inserido deverá ser também positivo, acompanhando o movimento da série original. Caso a observação original seja negativa, o *outlier* a ser introduzido também será negativo;
- P6) Após a introdução do *outlier* a série será modelada com o intuito de eliminar o efeito da autocorrelação, e obter os resíduos que cumpram os pressupostos para a aplicação de gráficos de controle;
- P7) Construir um gráfico de controle IMCC e EWMA, com os resíduos da série original contaminada pelo *outlier*. Devem-se construir dois gráficos EWMA, um com parâmetros  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7$  e outro com parâmetros  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ , para verificar em qual parâmetro o poder de detecção é superior. Estes valores para o gráfico EWMA são sugeridos por Montgomery (2004), os quais representam valores de NMA igual a 370, sendo semelhante ao NMA do gráfico IMCC. Dessa forma, possibilita uma efetiva comparação entre os dois tipos de gráficos de controle.
- P8) Verificar se a observação assinalada com o *outlier* está fora dos limites de controle, sendo detectada pelos gráficos de controle;
- P9) Registrar a detecção do *outlier* pelo gráfico de controle para o cálculo da proporção de detecção;
- P10) Desenvolver os passos de P1 a P9 até que se obtenha 10.000 séries para cada combinação de parâmetro de autocorrelação ( $\phi$  ou  $\theta$ ) e amplitude de *outlier*;

P11) Após obter as 10.000 séries para cada combinação, calcular as proporções de detecção e apresentar os resultados para cada gráfico de controle conforme Tabela 2 e Tabela 3:

Tabela 2 – Resultados apresentados para cada gráfico de controle.

Modelos	Resultados
AR(1)	Proporções de detecção do gráfico IMCC
	Proporções de detecção do gráfico EWMA ( $\lambda = 0,1$ e $L = 2,7$ )
	Proporções de detecção do gráfico EWMA ( $\lambda = 0,2$ e $L = 2,86$ )
MA(1)	Proporções de detecção do gráfico IMCC
	Proporções de detecção do gráfico EWMA ( $\lambda = 0,1$ e $L = 2,7$ )
	Proporções de detecção do gráfico EWMA ( $\lambda = 0,2$ e $L = 2,86$ )

Tabela 3 – Modelo de tabela para apresentação dos resultados.

		IMCC ou EWMA								
	Parâmetro de Autocorrelação	( $\phi$ ou $\theta$ )	Amplitude do <i>Outlier</i>							
			$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
AR(1) ou MA(1)		0,5	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		0,6	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		0,7	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		0,8	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		-0,5	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		-0,6	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		-0,7	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries
		-0,8	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries	10.000 séries

P12) Realizar testes comparativos não-paramétricos, U de Mann-Whitney (para duas amostras) e Kruskal-Wallis (para mais de duas amostras), utilizando as proporções de detecção do gráfico IMCC e do gráfico EWMA que apresentar o melhor desempenho, buscando respostas com embasamento estatístico para os seguintes questionamentos:

- Qual gráfico de controle de resíduos, IMCC ou EWMA, é mais eficiente na detecção de um *outlier* com amplitude variável?
- Para cada gráfico, existe diferença significativa entre os parâmetros de autocorrelação positivos e negativos?

- Existe alguma influência significativa do valor de autocorrelação no poder de detecção dos gráficos, para cada amplitude de *outlier*?

### 3.3 Recursos computacionais

Devido à necessidade de manusear grandes quantidades de dados, uma vez que, para cada combinação de parâmetro de autocorrelação ( $\phi$  ou  $\theta$ ) e amplitude de *outlier* serão simuladas 10.000 séries de dados a partir dos filtros  $AR(p)$  e  $MA(q)$ , optou-se pelo desenvolvimento de um programa para aprimorar o tempo de execução dos passos P1 a P10 citados no item 3.2. O programa foi desenvolvido no *software* estatístico de código livre *R*.

Para a análise estatística dos dados (P12) utilizou-se o pacote de testes não-paramétricos do programa *Statistica 6.0*.

### 3.4 Comentários gerais do capítulo

Do que foi exposto anteriormente, pretende-se demonstrar os passos que foram utilizados no desenvolvimento da pesquisa. Dessa forma, interessados em reproduzir o trabalho com objetivo de verificar suas conclusões ou implementá-lo em futuros desenvolvimentos, poderão guiar-se pelo fluxograma desenvolvido.

A metodologia proposta pretende determinar o grau de influência da autocorrelação e do tipo de gráfico de controle utilizado na detecção de pontos extremos em processos produtivos não independentes. Sendo assim, evidencia-se que a análise de resíduos por meio destes gráficos passa a ser imperiosa na presença de autocorrelação.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a análise dos resultados mediante a aplicação da metodologia proposta utilizando séries de dados simuladas para os modelos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , onde os seus resíduos são analisados por gráficos de controle após a introdução de um *outlier*. Procura-se desta maneira verificar a eficiência dos gráficos de controle de medidas individuais (IMCC) e de médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA) na detecção deste ponto extremo.

De acordo com a metodologia detalhada no Capítulo 3, serão utilizadas técnicas de séries temporais para a modelagem das séries geradas por simulação para a obtenção da série de resíduos. Os gráficos de controle serão utilizados para detectar o *outlier* inserido num instante da série original que é conhecido previamente. O comportamento do *outlier* se refletirá nos resíduos oriundos da modelagem e deverá ser captado pelos gráficos de controle. Para verificar a influência dos parâmetros de autocorrelação e a eficiência do gráfico de controle na detecção serão utilizados testes não-paramétricos para comparação de amostras.

Este capítulo está dividido em três seções: primeiramente, abordará os modelos autorregressivos de primeira ordem, posteriormente apresentará os modelos de médias móveis de primeira ordem, e por fim, será apresentado um resumo da aplicação.

### 4.1 Modelo autorregressivo $AR(1)$

Conforme detalhado na metodologia, foram simuladas 640.000 séries com característica autorregressiva, cada uma composta por 200 observações. Nestas séries, o parâmetro de autocorrelação autorregressivo,  $\phi$ , teve seu valor variando de correlações moderada à forte, tanto para valores positivos quanto negativos apresentando magnitudes de 0,5; 0,6; 0,7 e 0,8. Do total de séries, para cada valor de  $\phi$  foram simulados 80.000 processos autorregressivos.

Em cada série, foi ajustado um modelo  $AR(1)$  verificando se os resíduos atendem aos pressupostos para a aplicação de gráficos de controle, como normalidade em sua distribuição, independência e homocedasticidade.

Após a verificação dos resíduos, em cada série original foi inserido um *outlier* com amplitudes variando de  $1\sigma$ ;  $1,5\sigma$ ;  $2\sigma$ ;  $2,5\sigma$ ;  $3\sigma$ ;  $3,5\sigma$ ;  $4\sigma$  e  $4,5\sigma$ , onde  $\sigma$  representa o desvio padrão da série original de dados. Assim, para cada combinação de amplitude de *outlier* e parâmetro de autocorrelação autorregressivo foram simuladas 10.000 séries. A Figura 9 exemplifica uma série autorregressiva com 200 observações, que foi contaminada com um *outlier* na posição 100.

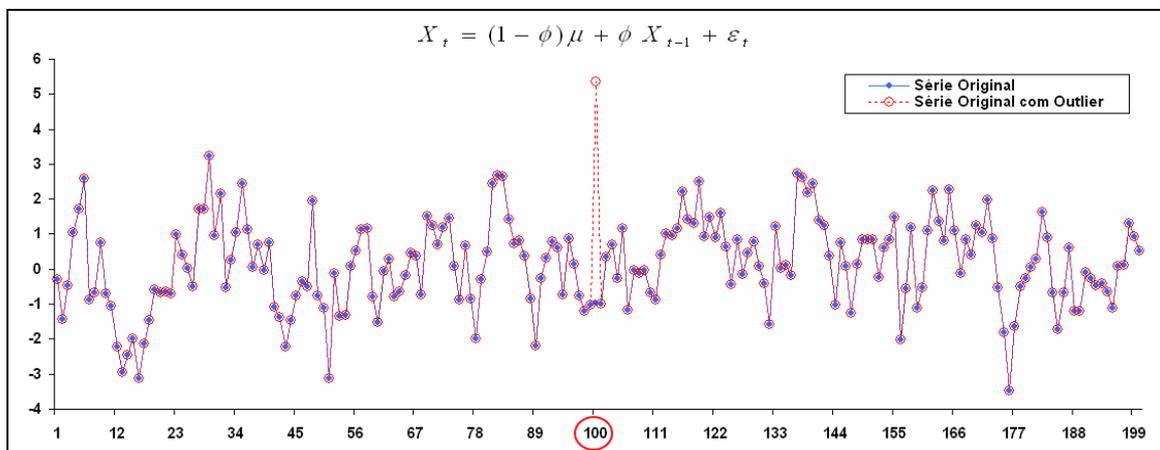


Figura 9 – *Outlier* inserido em uma série original de dados autorregressivos  $AR(1)$ .

As séries com as observações discrepantes foram novamente modeladas, e os resíduos oriundos do modelo foram aplicados em gráficos de controle. Dessa forma, foi verificado se os gráficos de controle são eficientes na detecção do *outlier* inserido previamente na série original, por meio da análise da série residual do modelo.

A Tabela 4 apresenta a proporção de detecção do *outlier* em um processo  $AR(1)$  pelo gráfico de controle IMCC. Os valores estão dispostos em função da variação do parâmetro de autocorrelação  $\phi$  e da amplitude do *outlier*. Os dados da tabela indicam, por exemplo, que para um parâmetro de autocorrelação de 0,5 e um *outlier* com amplitude de  $1\sigma$  o poder de detecção é de 0,0449, ou seja, das 10.000 séries simuladas em 449 séries foram detectadas o *outlier* pelo gráfico de controle, neste caso IMCC.

Tabela 4 – Proporção de detecção de *outliers* em processos autorregressivos  $AR(1)$  por meio do gráfico de controle de medidas individuais (IMCC).

		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0449	0,1324	0,2925	0,5531	0,8124	0,9533	0,9932	0,9996
	0,6	0,0430	0,1213	0,2851	0,5391	0,7778	0,9221	0,9826	0,9979
	0,7	0,0452	0,1256	0,2786	0,5040	0,7315	0,8925	0,9671	0,9957
	0,8	0,0386	0,1160	0,2622	0,4641	0,6891	0,8557	0,9500	0,9861
	-0,5	0,0397	0,1197	0,2826	0,5315	0,7944	0,9439	0,9896	0,9992
	-0,6	0,0380	0,1212	0,2787	0,5103	0,7601	0,9156	0,9797	0,9967
	-0,7	0,0398	0,1183	0,2660	0,4819	0,7143	0,8851	0,9638	0,9916
	-0,8	0,0389	0,1124	0,2587	0,4563	0,6654	0,8406	0,9381	0,9822

Pela análise visual dos dados da Tabela 4, observa-se que a autocorrelação influencia na detecção do *outlier* para o gráfico de controle IMCC, exceto para pequenas amplitudes de *outlier*,  $1\sigma$  e  $1,5\sigma$ , onde a proporção de detecção não apresenta grande variação com a magnitude da autocorrelação. Para autocorrelação moderada positiva de ordem  $\phi = 0,5$ , nota-se que os gráficos IMCC apresentam uma eficiência maior de detecção, declinando seu valor à medida que a autocorrelação passa de moderada a forte. O mesmo ocorre nas autocorrelações negativas, onde para valores moderados,  $\phi = -0,5$ , a eficiência é maior em comparação ao valor de  $\phi = -0,8$ , o qual representa uma autocorrelação forte.

Este comportamento pode ser explicado pelo fato de que, após a inserção do *outlier* na série original, a mesma é modelada novamente para obtenção dos resíduos. Dessa forma, o resíduo corresponde à diferença entre a observação original e a observação passada multiplicada pelo parâmetro de autocorrelação. Quanto maior o parâmetro de autocorrelação, menor a diferença e conseqüentemente menor o resíduo. Um resíduo de menor magnitude é mais dificilmente detectado pelos gráficos de controle.

A redução do poder de detecção com o aumento do parâmetro de autocorrelação é melhor visualizado pela Figura 10 onde, para cada amplitude de *outlier*, um gráfico da eficiência de detecção em função do parâmetro de autocorrelação é apresentado.

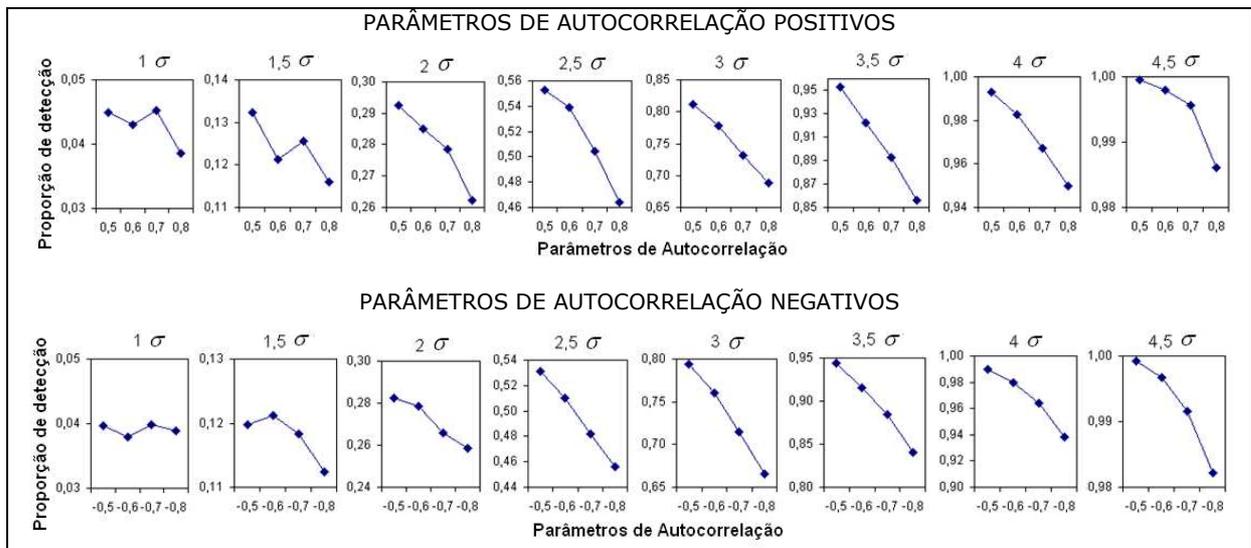


Figura 10 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $AR(1)$  utilizando o gráfico de controle IMCC.

Comparando a proporção de detecção entre as autocorrelações positivas e negativas, pode-se observar que o gráfico IMCC é mais eficiente para valores positivos de autocorrelação, uma vez que, as proporções de detecção nestes casos são ligeiramente superiores em relação aos parâmetros negativos, para cada amplitude de *outlier*.

A Tabela 5 e a Tabela 6 apresentam a proporção de detecção de *outlier* em processo  $AR(1)$  pelo gráfico de controle EWMA, com parâmetros  $\lambda = 0,1 / L = 2,7$  e  $\lambda = 0,2 / L = 2,86$ , respectivamente. Os valores estão dispostos em função da variação do parâmetro de autocorrelação  $\phi$  e da amplitude do *outlier*.

Tabela 5 – Proporção de detecção de *outliers* em processos autorregressivos  $AR(1)$  por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7$ .

		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0191	0,0179	0,0501	0,0756	0,1236	0,1670	0,2552	0,3021
	0,6	0,0117	0,0246	0,0437	0,0701	0,1128	0,1655	0,2246	0,3316
	0,7	0,0122	0,0326	0,0462	0,0803	0,1302	0,2099	0,2384	0,3418
	0,8	0,0123	0,0282	0,0439	0,0854	0,1354	0,1920	0,2620	0,3504
	-0,5	0,0113	0,0224	0,0306	0,0366	0,0776	0,0881	0,1160	0,1706
	-0,6	0,0130	0,0225	0,0202	0,0381	0,0664	0,0907	0,1185	0,1529
	-0,7	0,0071	0,0111	0,0241	0,0362	0,0519	0,0720	0,1186	0,1432
	-0,8	0,0052	0,0186	0,0271	0,0283	0,0597	0,0772	0,1011	0,1074

Tabela 6 – Proporção de detecção de *outliers* em processos autorregressivos  $AR(1)$  por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ .

		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0186	0,0397	0,0731	0,1380	0,2359	0,3526	0,5040	0,6313
	0,6	0,0187	0,0412	0,0789	0,1463	0,2407	0,3673	0,5153	0,6614
	0,7	0,0212	0,0405	0,0826	0,1521	0,2488	0,3711	0,5272	0,6851
	0,8	0,0192	0,0449	0,0819	0,1559	0,2497	0,3805	0,5366	0,6985
	-0,5	0,0124	0,0295	0,0554	0,0959	0,1521	0,2293	0,3166	0,4303
	-0,6	0,0120	0,0274	0,0512	0,0929	0,1429	0,2151	0,3044	0,4084
	-0,7	0,0143	0,0275	0,0475	0,0813	0,1338	0,2006	0,2867	0,3703
	-0,8	0,0113	0,0262	0,0442	0,0819	0,1272	0,1918	0,2739	0,3598

Comparando os dados da Tabela 5, que apresenta a proporção de detecção do *outlier* pelo gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7$ , com os da Tabela 6, em que os parâmetros do gráfico EWMA são  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ , observa-se visualmente que o gráfico construído com a segunda combinação de parâmetros apresenta valores superiores em relação ao primeiro, sendo assim, mais eficiente para detectar um *outlier* no processo. Porém deve-se destacar que o desempenho do gráfico EWMA é muito inferior ao do gráfico IMCC quando os mesmos são comparados.

O baixo desempenho do gráfico EWMA na detecção da observação extrema pode ser justificado pela reduzida ponderação dada ao resíduo atual pela constante  $\lambda$ , na construção da estatística EWMA,  $Z_i$ . Dessa forma, acaba-se “mascarando” o *outlier* quando os valores de  $Z_i$ 's são grafados no gráfico de controle. Uma alternativa consiste na utilização de valores maiores para  $\lambda$ , aumentando o peso dado à observação atual. Porém, isso implicaria num aumento do valor de  $L$ , “alargando” os limites de controle, fazendo-os se aproximar dos valores de limites de controle do gráfico IMCC. Segundo Montgomery (2004), os valores mais usuais para a constante de ponderação  $\lambda$  são 0,05; 0,1 e 0,2.

Na Figura 11, observa-se um processo empírico, com um *outlier* na observação 100 e a estatística EWMA para três valores de lambda. Observa-se que quanto menor o valor de lambda, mais difícil será distinguir a observação extrema após construir a estatística EWMA.

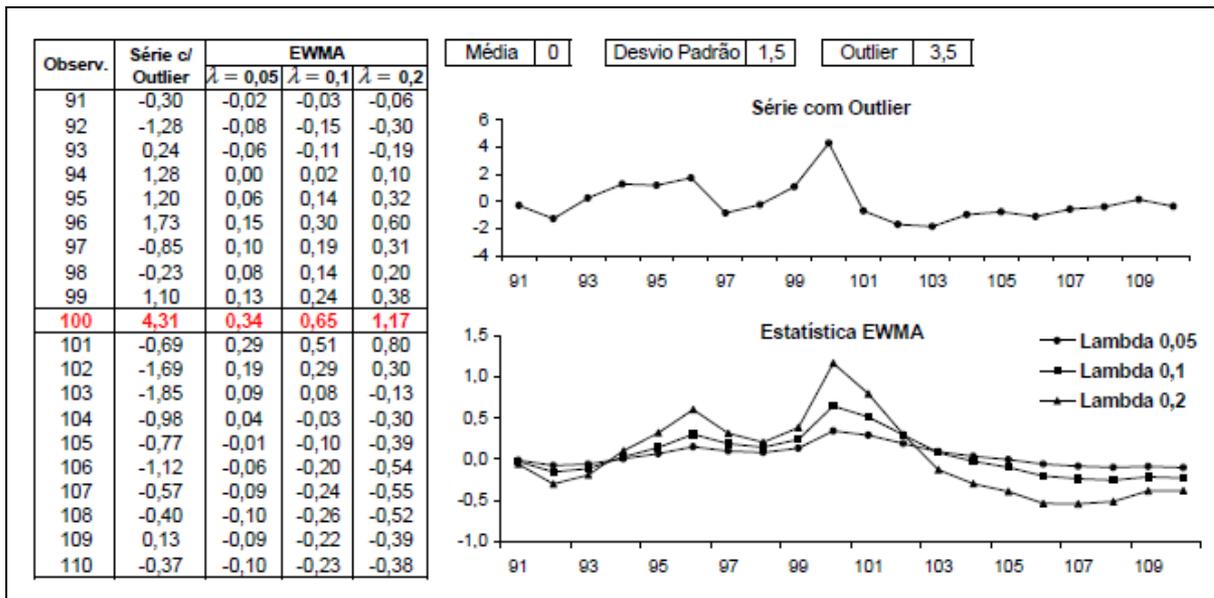


Figura 11 – Comportamento de um *outlier* na construção da estatística EWMA, para valores de  $\lambda$  igual a 0,05; 0,1 e 0,2.

Os dados da Tabela 6, com  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ , estão ilustrados graficamente na Figura 12, onde para cada amplitude de *outlier*, foi construído um gráfico da eficiência de detecção em função do parâmetro de autocorrelação.

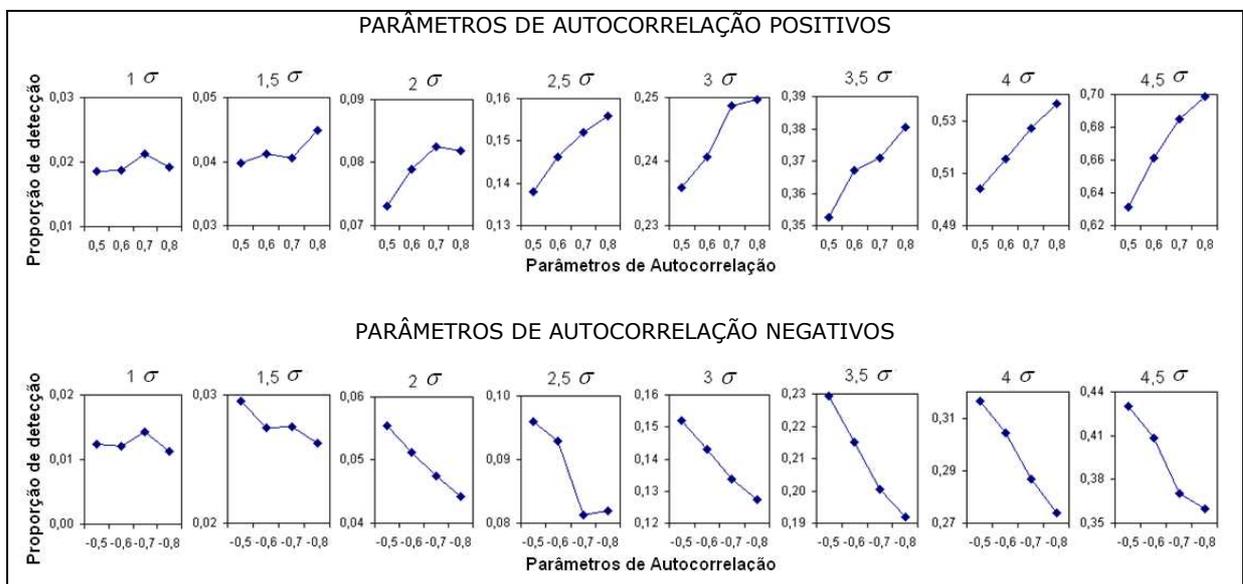


Figura 12 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $AR(1)$  utilizando o gráfico de controle EWMA,  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ .

Por meio da Figura 12, observa-se um comportamento distinto na detecção do *outlier* pelo gráfico de controle EWMA, quando comparados os parâmetros de autocorrelação positivos e negativos. Pode-se observar que para pequenas amplitudes de *outliers*,  $1\sigma$  e

$1,5\sigma$ , a proporção de detecção não apresenta grande variação com a magnitude da autocorrelação. Este comportamento é semelhante ao que ocorreu no gráfico IMCC. Para as demais amplitudes com autocorrelações positivas, nota-se um aumento do poder de detecção à medida que a correlação passa da moderada a forte, o mesmo comportamento não ocorrendo no gráfico IMCC, como visto previamente. Por outro lado, para autocorrelações negativas o comportamento é inverso, ou seja, à medida que a força da autocorrelação aumenta o poder de detecção apresenta uma redução.

Não foram encontradas explicações conclusivas para este fenômeno, porém uma hipótese seria a presença de heterocedasticidade nos resíduos, o que pode enviesar a construção da estatística EWMA. Uma proposta para futuras pesquisas consiste em testar se existe influência da heterocedasticidade na construção do gráfico de controle EWMA.

Pelos dados da Tabela 6 e pela visualização das escalas dos gráficos da Figura 12, observa-se que existe uma grande diferença na proporção de detecção entre os parâmetros positivos e negativos, para as mesmas amplitudes de discrepâncias. O mesmo efeito foi observado no gráfico IMCC, porém a magnitude da diferença apresentou um valor muito inferior.

Para comprovar as análises visuais que foram descritas, no próximo subitem serão aplicados alguns testes não-paramétricos para comparação de amostras utilizando os dados da Tabela 4 (IMCC) e Tabela 6 (EWMA com melhor desempenho). Dessa forma, os objetivos propostos do trabalho serão respondidos com um embasamento estatístico.

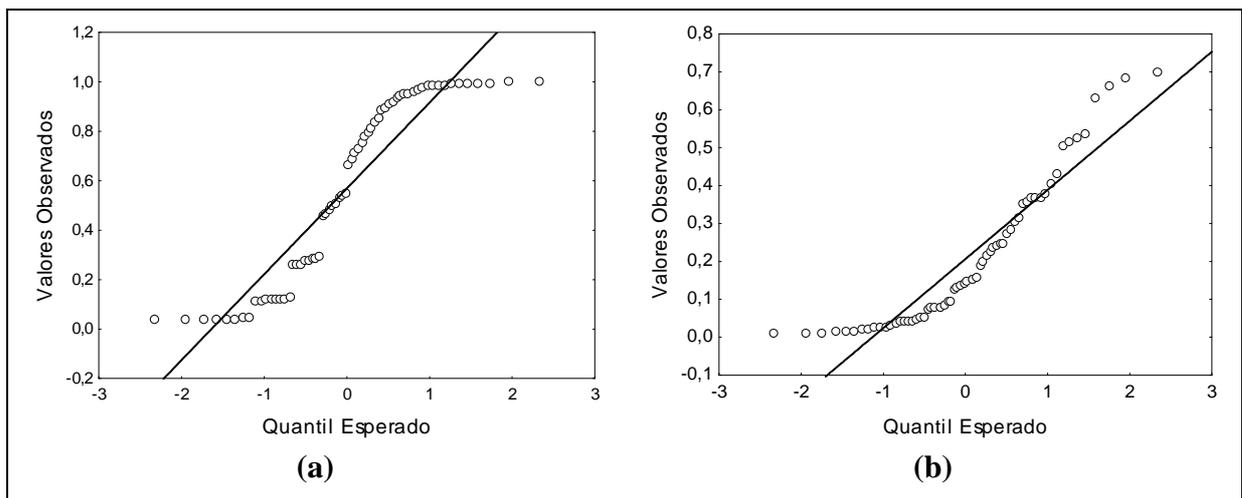
#### 4.1.1 Testes estatísticos para modelo $AR(1)$

Neste subitem, as análises visuais realizadas até o momento serão verificadas por meio de testes estatísticos, buscando uma comprovação para as conclusões apresentadas. Esta análise tem o intuito de responder as seguintes perguntas:

- Qual gráfico de controle de resíduos, IMCC ou EWMA, é mais eficiente na detecção de um *outlier* com amplitude variável?
- Para cada gráfico, existe diferença significativa entre os parâmetros de autocorrelação positivos e negativos?

- Existe alguma influência significativa do valor de autocorrelação no poder de detecção dos gráficos, para cada amplitude de *outlier*?
- Em caso de resposta afirmativa na pergunta anterior, para qual(is) parâmetro(s) de autocorrelação os gráficos apresentam melhor poder de detecção?

Os dados da Tabela 4 (IMCC) e Tabela 6 (EWMA com melhor desempenho) foram analisados quanto à normalidade por meio do gráfico *Q-Q Plot*. Pela Figura 13, verifica-se que as proporções de detecção de ambos os gráficos de controle não seguem uma distribuição normal, pois os pontos nos gráficos não seguem uma reta. Isso corresponde ao fato de, os quantis teóricos da distribuição normal não se sobreporem aos quantis dos dados amostrais, afastando-se da distribuição normal.



**Figura 13 – Representação gráfica para modelo  $AR(1)$  : (a) Gráfico *Q-Q Plot* das proporções de detecção do gráfico IMCC e (b) Gráfico *Q-Q Plot* das proporções de detecção do gráfico EWMA.**

Para comprovar a não normalidade observada nos dados por meio da análise do gráfico *Q-Q Plot*, recorreu-se ao teste de Jarque-Bera, descrito na Tabela 7, para verificar as hipóteses:

$H_0$  : Assimetria = zero e curtose = três, então a série é dita normal;

$H_1$  : Assimetria  $\neq$  zero e curtose  $\neq$  três, então a série é dita não-normal.

Tabela 7 – Teste de normalidade para as proporções de detecção do modelo  $AR(1)$ .

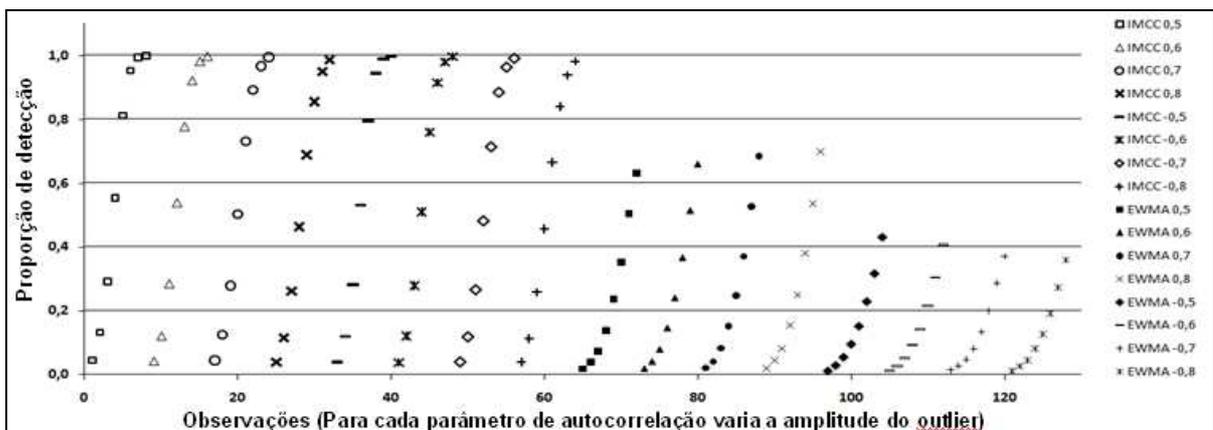
Teste	Variável	Resultado	Interpretação
Jarque-Bera	Proporção de detecção do gráfico IMCC	$A_3 = 1,3003$ * $K_4 = 1,7546$ * $JB = 13,857$ [0,000979] *	<b>Rejeita <math>H_0</math></b>
	Proporção de detecção do gráfico EWMA	$A_3 = 1,7238$ * $K_4 = 3,3472$ * $JB = 20,010$ [0,000045] *	<b>Rejeita <math>H_0</math></b>

\*  $A_3$  = coeficiente de assimetria,  $K_4$  = coeficiente de curtose e o valor entre colchetes representa o  $p$ -valor associado ao teste.

Pelos resultados apresentados na Tabela 7, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados, pois o valor da estatística JB é superior a 5,99, que representa o valor da estatística de teste Qui-quadrado com 5% de significância e dois graus de liberdade.

Para contornar o problema da não-normalidade, buscou-se utilizar transformações aos dados, dentre as quais podem-se citar, raiz quadrada, logaritmo de base neperiana e as transformações de Box-Cox, muito utilizadas na literatura como em Box e Cox (1964), Aguirre (1997), Mason et al. (2003) e Oliveira e Samohyl (1997). Contudo, os mesmos não alcançaram os objetivos propostos de aproximar a variável resposta a uma distribuição normal.

Quanto à variância dos dados, observa-se pela Figura 14 forte heterocedasticidade nas observações, a qual é resultante da variação da amplitude do *outlier* em cada valor do parâmetro de autocorrelação.

Figura 14 – Gráfico de dispersão das proporções de detecção, no eixo y, para um modelo  $AR(1)$ .

Devido à falta de homocedasticidade e a não normalidade dos dados, não se pode realizar uma ANOVA na variável em estudo para responder os questionamentos propostos.

Dessa forma, utilizaram-se testes comparativos não-paramétricos, U de Mann-Whitney para duas amostras independentes e o Kruskal-Wallis para três ou mais amostras independentes.

Para verificar qual gráfico é mais eficiente na detecção de um *outlier*, utilizou-se o teste U de Mann-Whitney, uma vez que, o objetivo é comparar se existe diferença significativa entre uma amostra com as proporções de detecção do gráfico IMCC e outra com a proporção de detecção do gráfico EWMA. A Tabela 8 apresenta o resultado dos testes de comparação geral, que considera todas as proporções de detecção de cada gráfico, e por blocos que considera as proporções de detecção para cada amplitude de *outlier*.

**Tabela 8 – Comparação da eficiência dos gráficos IMCC e EWMA na detecção de *outliers*, em processos *AR(1)*.**

TESTE U DE MANN-WHITNEY (significante para $p < 0.05$ )							
Geral							
Variável	Soma dos Postos IMCC	Soma dos Postos EWMA	U	Z	p-valor	Z Ajust.	p-Valor
Prop. Detecção	5278,5	2977,5	897,50	5,482800	0,000000	5,482839	0,000000
Por Blocos							
Blocos	Soma dos Postos IMCC	Soma dos Postos EWMA	U	Z	p-valor	Z Ajust.	p-Valor
1 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
1,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
2 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
2,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
3 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
3,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
4 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
4,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778

O resultado exposto na Tabela 8 evidencia que, para o teste geral, a hipótese nula de igualdade entre as duas amostras é rejeitada em um nível de significância de 5%. Portanto, existe diferença significativa entre os dois gráficos quanto ao poder de detecção de *outliers*. Analisando a soma de postos observa-se uma maior eficiência do gráfico IMCC em comparação ao EWMA para detectar um *outlier*. O mesmo teste foi aplicado por blocos, ou seja, para cada amplitude de *outlier* verificou-se qual gráfico era mais eficiente. Mais uma vez observou-se que para todas as amplitudes existe diferença significativa entre os gráficos ( $p\text{-valor} = 0,000778$ ) e que o gráfico IMCC é mais eficiente.

Esta conclusão vem ao encontro da análise visual realizada previamente, que observou um melhor desempenho do gráfico IMCC em relação ao gráfico EWMA.

Com o intuito de examinar a influência dos parâmetros de autocorrelação positivos e negativos na detecção do *outlier* pelos gráficos de controle IMCC e EWMA, recorreu-se ao teste U de Mann-Whitney. Neste caso existem duas amostras, uma com valores de detecção das autocorrelações positivas e outra com os valores de detecção das autocorrelações negativas. A Tabela 9 descreve os resultados dos testes de comparação geral, que considera todas as proporções de detecção com valores positivos e negativos e a comparação entre cada valor de autocorrelação.

**Tabela 9 – Comparação das proporções de detecção para parâmetros de autocorrelação positivos e negativos, em processos  $AR(1)$ .**

TESTE U DE MANN-WHITNEY (significante para $p < 0.05$ )							
IMCC							
Comparação	Soma dos Postos Aut. Positiva	Soma dos Postos Aut. Negativa	U	Z	p-valor	Z Ajust.	p-valor
-0,5 e 0,5	72,0	64,0	28,00	0,420084	0,674424	0,420084	0,674424
-0,6 e 0,6	72,0	64,0	28,00	0,420084	0,674424	0,420084	0,674424
-0,7 e 0,7	72,0	64,0	28,00	0,420084	0,674424	0,420084	0,674424
-0,8 e 0,8	71,0	65,0	29,00	0,315063	0,752714	0,315063	0,752714
EWMA							
Comparação	Soma dos Postos Aut. Positiva	Soma dos Postos Aut. Negativa	U	Z	p-valor	Z Ajust.	p-valor
-0,5 e 0,5	75,0	61,0	25,00	0,735147	0,462250	0,735147	0,462250
-0,6 e 0,6	76,0	60,0	24,00	0,840168	0,400815	0,840168	0,400815
-0,7 e 0,7	78,0	58,0	22,00	1,050210	0,293622	1,050210	0,293622
-0,8 e 0,8	78,5	57,5	21,50	1,102721	0,270149	1,103532	0,269797

Analisando primeiramente os dados do gráfico IMCC presentes na Tabela 9, observa-se que não existe diferença significativa entre a proporção de detecção para parâmetros positivos e negativos, quando comparado cada valor de autocorrelação individualmente, uma vez que, todos os *p-valores* são maiores que 5%. Partindo para a análise dos dados do gráfico EWMA, o teste de comparação também não evidenciou diferença significativa entre parâmetros positivos e negativos para todas as forças de autocorrelação. Porém, é importante ressaltar que quando observado os *p-valores* do gráfico EWMA, apesar de todos não serem significantes ao nível de 5%, à medida que se aumenta a força da autocorrelação ocorre uma redução nos *p-valores*, tendendo a se aproximar da região de rejeição da hipótese nula de diferença entre as proporções de detecção para autocorrelações positivas e negativas. Este comportamento não ocorre no caso do gráfico IMCC.

O resultado do teste estatístico demonstrou que a diferença visual observada na análise prévia não é significativa. Porém, pela análise dos *p-valores* observa-se que o gráfico EWMA

é mais afetado nas autocorrelações negativas, aumentando a diferença com o aumento da força da autocorrelação, conforme observado visualmente.

Respondendo ao questionamento sobre a influência do valor de autocorrelação, quando esta é variada de moderada a forte, utilizou-se o teste Kruskal-Wallis. Neste caso, foram comparadas quatro amostras que representam as proporções de detecção para cada autocorrelação. A Tabela 10 descreve os resultados dos testes de comparação das amostras representadas pelos parâmetros de autocorrelação. O teste foi aplicado para cada gráfico, IMCC e EWMA, para cada conjunto de valores de autocorrelação positiva e negativa.

**Tabela 10 – Comparação dos parâmetros de autocorrelação quanto ao poder de detecção de *outliers* em processos *AR(1)*.**

TESTE KRUSKAL-WALLIS (significante para $p < 0.05$ )						
IMCC						
Comparação	Param. Autocorrelação	Soma dos postos	Graus de Liberdade	n	H	<i>p-valor</i>
Autocorrelação Positiva	0,5	145,0	3	32	0,525568	0,9132
	0,6	134,0				
	0,7	131,0				
	0,8	118,0				
Autocorrelação Negativa	-0,5	144,0	3	32	0,463068	0,9269
	-0,6	135,0				
	-0,7	130,0				
	-0,8	119,0				
EWMA						
Comparação	Param. Autocorrelação	Soma dos postos	Graus de Liberdade	n	H	<i>p-valor</i>
Autocorrelação Positiva	0,5	120,0	3	32	0,394886	0,9413
	0,6	129,0				
	0,7	137,0				
	0,8	142,0				
Autocorrelação Negativa	-0,5	143,0	3	32	0,355113	0,9494
	-0,6	134,0				
	-0,7	130,0				
	-0,8	121,0				

Partindo dos resultados expostos na Tabela 9, em ambos os gráficos a hipótese nula de igualdade das amostras não foi rejeitada ao nível de significância de 5%. Dessa forma, conclui-se que estatisticamente não existe influência do parâmetro de autocorrelação no poder de detecção de um *outlier* pelos gráficos IMCC e EWMA.

O resultado obtido, a partir do teste estatístico, comprova que a variação do poder de detecção com a variação do parâmetro de autocorrelação, para cada amplitude de *outlier* conforme visualizado nas Figuras 10 e 12, não é significativa. Nestas ilustrações, observa-se que o poder de detecção diminui com o aumento da força da autocorrelação, exceto para os parâmetros positivos de autocorrelação do gráfico EWMA que apresenta comportamento

oposto. Isso pode ser verificado na soma dos postos da Tabela 10, onde os valores decaem para autocorrelação variando em módulo de 0,5 a 0,8, ocorrendo o inverso somente nas autocorrelações positivas do gráfico EWMA.

No item a seguir, são apresentados os resultados para o modelo de médias móveis  $MA(1)$ .

#### 4.2 Modelo de médias móveis $MA(1)$

Como nos modelos autorregressivos, nos modelos de média móvel foram simuladas 640.000 séries, cada uma composta por 200 observações. Nestas séries o parâmetro de autocorrelação de média móvel,  $\theta$ , teve seu valor variando de correlações moderada à forte, tanto para valores positivos quanto negativos apresentando magnitudes de 0,5; 0,6; 0,7; e 0,8. Do total de séries, para cada valor de  $\theta$  foram simulados 80.000 processos de médias móveis.

Para cada série, foi ajustado um modelo  $MA(1)$  aos dados, verificando se os seus resíduos atendem aos pressupostos para a aplicação de gráficos de controle, como normalidade em sua distribuição, independência e homocedasticidade.

Após a verificação dos resíduos, na série original foi inserido um *outlier* com amplitudes variando de  $1\sigma$ ;  $1,5\sigma$ ;  $2\sigma$ ;  $2,5\sigma$ ;  $3\sigma$ ;  $3,5\sigma$ ;  $4\sigma$  e  $4,5\sigma$ , onde  $\sigma$  representa o desvio padrão da série original de dados. Assim, para cada combinação de amplitude de *outlier* e parâmetro de autocorrelação de média móvel foram simuladas 10.000 séries. A Figura 15 exemplifica uma série de dados simulada por um modelo de média móvel com 200 observações, que foi contaminada por um *outlier* inserido previamente na posição 100.

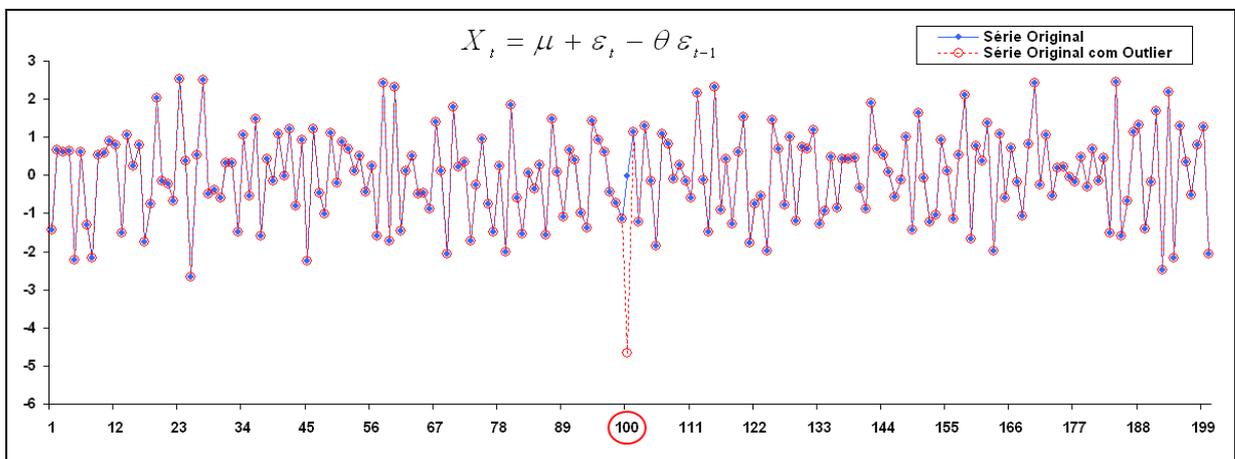


Figura 15 – *Outlier* inserido em uma série de dados de um processo de média móvel  $MA(1)$ .

As séries com as observações discrepantes foram novamente modeladas, e os resíduos oriundos do modelo foram aplicados em gráficos de controle. Dessa forma, foi verificado se os gráficos de controle são eficientes na detecção de um *outlier* inserido previamente na série original, por meio da análise da série residual do modelo.

A Tabela 11 apresenta a proporção de detecção do *outlier* em processos  $MA(1)$  pelo gráfico de controle IMCC. Os valores estão dispostos em função da variação do parâmetro de autocorrelação  $\theta$  e da amplitude do *outlier*. Os dados da tabela citada indicam, por exemplo, que para um parâmetro de autocorrelação de 0,5 e um *outlier* com amplitude de  $1\sigma$  o poder de detecção foi de 0,0407, ou seja, das 10.000 séries simuladas em 407 séries foram detectadas o *outlier* pelos gráficos de controle.

**Tabela 11 – Proporção de detecção de *outliers* em processos de média móvel  $MA(1)$  por meio do gráfico de controle de medidas individuais (IMCC).**

		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0407	0,1234	0,2917	0,5543	0,8227	0,9600	0,9948	0,9999
	0,6	0,0430	0,1200	0,2877	0,5482	0,8013	0,9431	0,9907	0,9990
	0,7	0,0403	0,1185	0,2856	0,5216	0,7787	0,9317	0,9857	0,9985
	0,8	0,0426	0,1185	0,2792	0,5102	0,7576	0,9139	0,9821	0,9975
	-0,5	0,0419	0,1157	0,2890	0,5395	0,8131	0,9568	0,9948	0,9996
	-0,6	0,0403	0,1150	0,2729	0,5204	0,7728	0,9307	0,9888	0,9992
	-0,7	0,0423	0,1148	0,2646	0,4924	0,7409	0,9126	0,9838	0,9980
	-0,8	0,0383	0,1080	0,2476	0,4611	0,7095	0,8795	0,9726	0,9950

Pela análise visual dos dados da Tabela 11, observa-se que a autocorrelação influencia na detecção do *outlier* pelo gráfico de controle IMCC, exceto para pequenas amplitudes de *outlier*,  $1\sigma$  e  $1,5\sigma$ , onde a proporção de detecção quase não apresenta variação com a magnitude da autocorrelação.

Para autocorrelação moderada positiva de ordem  $\theta = 0,5$ , nota-se que os gráficos IMCC são mais eficientes na detecção quando a amplitude do *outlier* varia de  $2,5\sigma$  a  $4,5\sigma$ , diminuindo seu valor à medida que se aumenta a força da autocorrelação. O mesmo ocorre nas autocorrelações negativas, onde para valores moderados,  $\theta = -0,5$ , a eficiência é maior em comparação ao valor de  $\theta = -0,8$ , que representa um processo autocorrelacionado fortemente negativo. Este comportamento é melhor compreendido pela Figura 16, onde para cada amplitude de *outlier*, um gráfico da eficiência de detecção em função do parâmetro de autocorrelação é ilustrado.

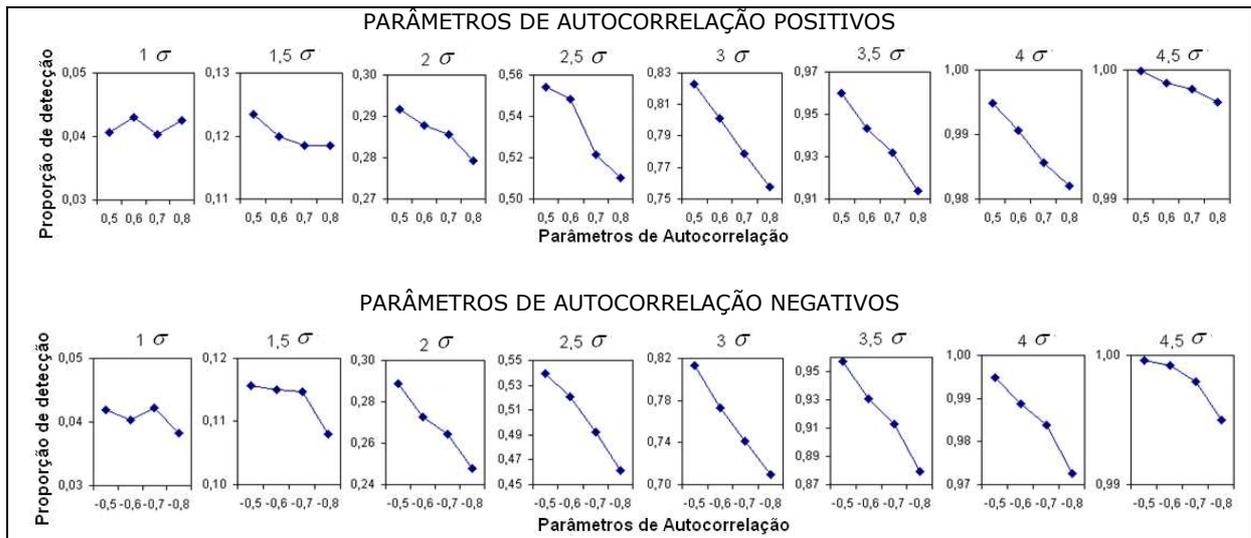


Figura 16 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $MA(1)$  utilizando o gráfico de controle IMCC.

Comparando a proporção de detecção entre as autocorrelações positivas e negativas, pode-se observar que o gráfico IMCC é um pouco mais eficiente para valores positivos de autocorrelação, exceto para a amplitude de  $1\sigma$ . Nesta amplitude não se pode afirmar que existe diferença significativa na proporção de detecção entre as autocorrelações positivas e negativas, sem uma análise estatística detalhada.

As Tabelas 12 e 13 apresentam a proporção de detecção do *outlier* em processos  $MA(1)$  pelo gráfico de controle EWMA, com parâmetros  $\lambda = 0,1 / L = 2,7$  e  $\lambda = 0,2 / L = 2,86$ , respectivamente. Os valores estão dispostos em função da variação do parâmetro de autocorrelação  $\theta$  e da amplitude do *outlier*.

Tabela 12 – Proporção de detecção de *outliers* em processos  $MA(1)$  por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7$ .

		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0091	0,0285	0,0422	0,0784	0,0888	0,1245	0,2439	0,2479
	0,6	0,0143	0,0300	0,0554	0,0765	0,0824	0,1352	0,2076	0,2736
	0,7	0,0039	0,0246	0,0464	0,0526	0,1277	0,1456	0,2192	0,2343
	0,8	0,0086	0,0175	0,0428	0,0799	0,0995	0,1598	0,2003	0,2112
	-0,5	0,0064	0,0053	0,0200	0,0305	0,0479	0,0704	0,0844	0,1624
	-0,6	0,0088	0,0092	0,0193	0,0242	0,0336	0,0596	0,0786	0,1055
	-0,7	0,0076	0,0102	0,0136	0,0193	0,0283	0,0502	0,0538	0,0796
	-0,8	0,0071	0,0069	0,0099	0,0066	0,0149	0,0131	0,0302	0,0328

Tabela 13 – Proporção de detecção de *outliers* em processos  $MA(1)$  por meio do gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ .

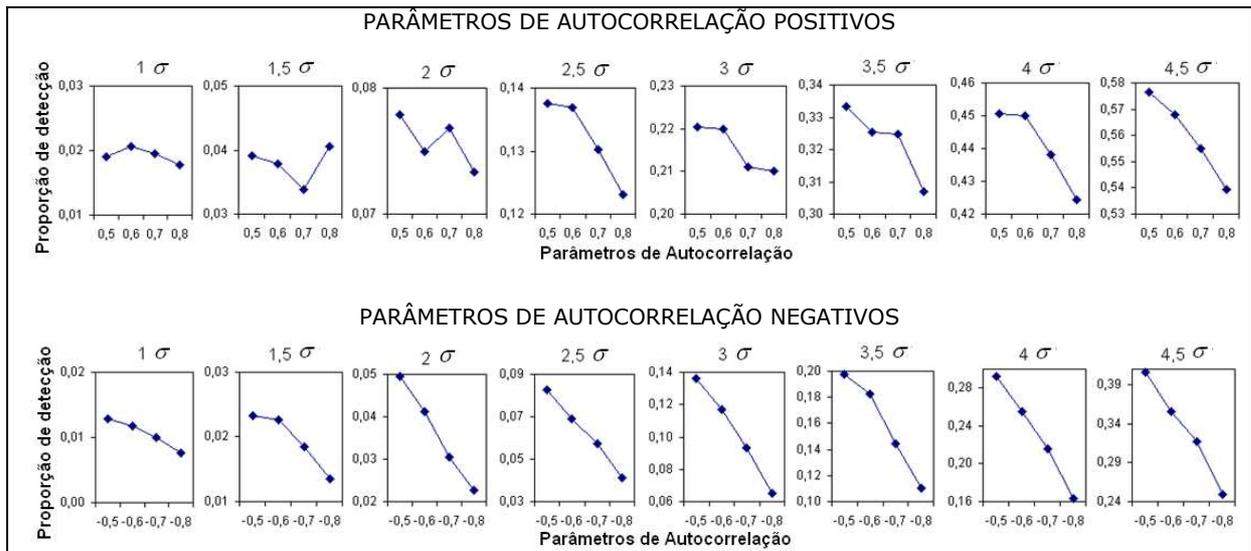
		Amplitude do <i>Outlier</i>							
		$1\sigma$	$1,5\sigma$	$2\sigma$	$2,5\sigma$	$3\sigma$	$3,5\sigma$	$4\sigma$	$4,5\sigma$
Parâmetro de Autocorrelação	0,5	0,0191	0,0391	0,0779	0,1376	0,2203	0,3332	0,4506	0,5764
	0,6	0,0206	0,0379	0,0750	0,1369	0,2199	0,3254	0,4501	0,5677
	0,7	0,0195	0,0339	0,0768	0,1303	0,2111	0,3247	0,4380	0,5550
	0,8	0,0178	0,0405	0,0733	0,1231	0,2100	0,3069	0,4245	0,5394
	-0,5	0,0129	0,0233	0,0495	0,0825	0,1362	0,1975	0,2919	0,4066
	-0,6	0,0118	0,0226	0,0413	0,0691	0,1168	0,1829	0,2556	0,3557
	-0,7	0,0100	0,0185	0,0304	0,0572	0,0934	0,1444	0,2162	0,3165
	-0,8	0,0076	0,0135	0,0226	0,0413	0,0653	0,1101	0,1635	0,2489

Comparando os dados da Tabela 12, que apresenta a proporção de detecção do *outlier* pelo gráfico de controle EWMA com parâmetros  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7$ , com os da Tabela 13, em que os parâmetros do gráfico EWMA são  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ , observa-se visualmente que o gráfico construído com os parâmetros de  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$  apresenta valores muito superiores em relação ao primeiro, sendo assim, mais eficiente para detectar um *outlier* no processo. Porém, deve-se destacar que o desempenho do gráfico EWMA é muito inferior ao do gráfico IMCC quando os mesmos são comparados.

Como já discutido no processo autorregressivo, o baixo desempenho do gráfico EWMA para detectar uma observação extrema, pode ser explicado pelo baixo peso dado ao resíduo atual pela constante de ponderação  $\lambda$ .

Os dados da Tabela 13 estão apresentados graficamente na Figura 17, onde para cada amplitude de *outlier* foi construído um gráfico da eficiência de detecção em função do parâmetro de autocorrelação.

Por meio da análise da Figura 17, observa-se que para as autocorrelações positivas não existe uma tendência bem definida do comportamento da proporção de detecção com o aumento da força da autocorrelação. Como já citado para o modelo AR, uma possível causa pode ser a heterocedasticidade dos resíduos, que influencia na construção do gráfico de controle EWMA. Quanto às autocorrelações negativas, para todas as amplitudes de *outlier*, o percentual de detecção apresenta um declínio quando a autocorrelação varia de -0,5 a -0,8.



**Figura 17 – Eficiência de detecção, no eixo y, em função do parâmetro de autocorrelação, no eixo x, para dados oriundos de um processo  $MA(1)$  utilizando o gráfico de controle EWMA,  $\lambda = 0,2$  e  $L = 2,86$ .**

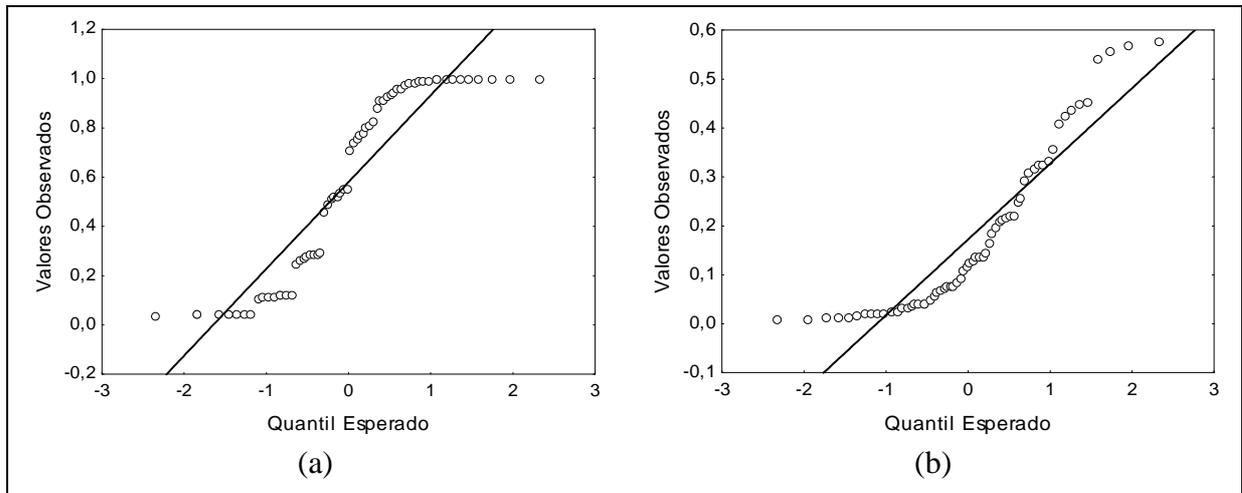
Pelos dados da Tabela 13 e pela visualização das escalas dos gráficos da Figura 17, observa-se que existe uma grande diferença na proporção de detecção entre os parâmetros positivos e negativos de autocorrelação, para as mesmas amplitudes de discrepâncias. O mesmo efeito foi observado no gráfico IMCC, porém a magnitude da diferença apresentou um valor muito inferior.

Para comprovar as análises visuais que foram descritas, no próximo subitem será apresentada uma análise estatística pertinente com os dados da Tabela 11 (IMCC) e Tabela 13 (EWMA com melhor desempenho).

#### 4.2.1 Testes estatísticos para modelo $MA(1)$

Neste subitem as análises visuais realizadas até o momento serão verificadas por meio de testes estatísticos, buscando uma comprovação para as conclusões apresentadas. Nesta análise serão respondidas as mesmas perguntas realizadas para o modelo  $AR(1)$ .

Os dados da Tabela 11 (IMCC) e Tabela 13 (EWMA com melhor desempenho) foram analisados quanto à normalidade por meio do gráfico  $Q-Q Plot$ . Pela Figura 18, verifica-se que as proporções de detecção de ambos os gráficos de controle não seguem uma distribuição normal, pois os pontos nos gráficos não seguem uma reta.



**Figura 18 – Representação gráfica para modelo  $MA(1)$  : (a) Gráfico  $Q-Q$  Plot das proporções de detecção do gráfico IMCC e (b) Gráfico  $Q-Q$  Plot das proporções de detecção do gráfico EWMA.**

Para comprovar a não normalidade observada nos dados por meio da análise do gráfico  $Q-Q$  Plot, recorreu-se ao teste de Jarque-Bera, descrito na Tabela 14, para verificar as hipóteses:

$H_0$  : Assimetria = zero e curtose = três, então a série é dita normal;

$H_1$  : Assimetria  $\neq$  zero e curtose  $\neq$  três, então a série é dita não-normal.

**Tabela 14 – Teste de normalidade para as proporções de detecção do modelo  $MA(1)$ .**

Teste	Variável	Resultado	Interpretação
Jarque-Bera	Proporção de detecção do gráfico IMCC	$A_3 = 1,2960$ * $K_4 = 1,7386$ * $JB = 13,850$ [0,000983] *	<b>Rejeita <math>H_0</math></b>
	Proporção de detecção do gráfico EWMA	$A_3 = 1,7336$ * $K_4 = 3,3564$ * $JB = 20,247$ [0,000040] *	<b>Rejeita <math>H_0</math></b>

\*  $A_3$  = coeficiente de assimetria,  $K_4$  = coeficiente de curtose e o valor entre colchetes representa o  $p$ -valor associado ao teste.

Pelos resultados apresentados na Tabela 14, rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados, pois o valor da estatística JB é superior a 5,99, que representa o valor da estatística de teste Qui-quadrado com 5% de significância e dois graus de liberdade.

Para contornar o problema da não-normalidade, buscou-se utilizar transformações aos dados, dentre as quais podem-se citar, raiz quadrada, logaritmo de base neperiana e as

transformações de Box-Cox. Contudo, os mesmos não alcançaram os objetivos propostos de aproximar a variável resposta a uma distribuição normal.

Quanto à variância dos dados, observa-se pela Figura 19 forte heterocedasticidade nas observações, a qual é resultante da variação da amplitude do *outlier* em cada valor do parâmetro de autocorrelação.

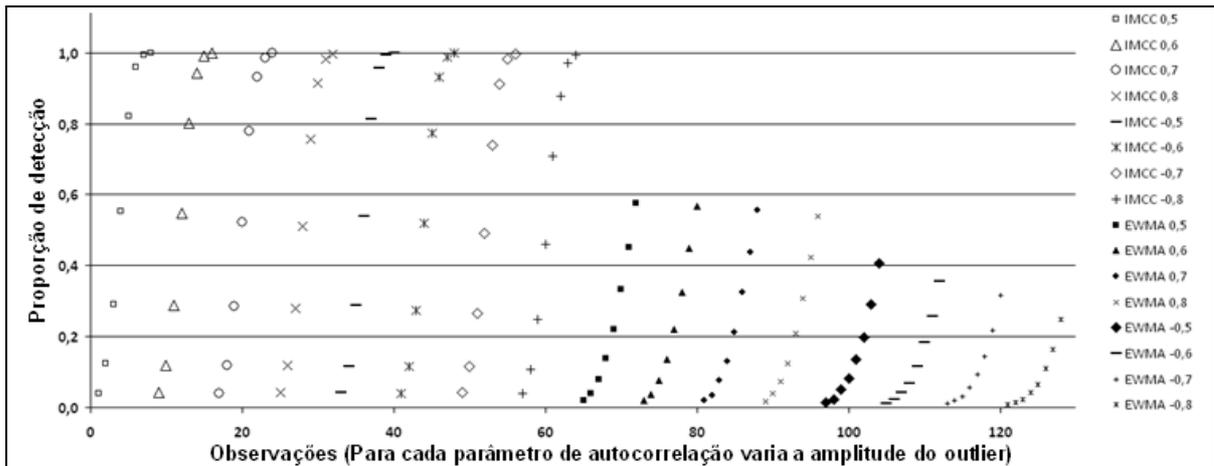


Figura 19 – Gráfico de dispersão das proporções de detecção para um modelo  $MA(1)$ .

Devido à falta de homocedasticidade e a não normalidade dos dados, não se pode realizar uma ANOVA na variável proporção de detecção para responder os questionamentos propostos. Dessa forma, utilizaram-se testes comparativos não-paramétricos, U de Mann-Whitney para duas amostras independentes e o Kruskal-Wallis para três ou mais amostras independentes.

Para verificar qual gráfico é mais eficiente na detecção de um *outlier*, utilizou-se o teste U de Mann-Whitney, uma vez que, o objetivo é comparar se existe diferença significativa entre uma amostra com as proporções de detecção do gráfico IMCC e outra com a proporção de detecção do gráfico EWMA. A Tabela 15 apresenta o resultado dos testes de comparação geral, que considera todas as proporções de detecção de cada gráfico, e por blocos que considera as proporções de detecção para cada amplitude de *outlier*.

Tabela 15 – Comparação da eficiência dos gráficos IMCC e EWMA na detecção de *outliers*, em processos *MA(1)*.

TESTE U DE MANN-WHITNEY (significante para $p < 0.05$ )							
Geral							
Variável	Soma dos Postos IMCC	Soma dos Postos EWMA	U	Z	P- valor	Z Ajust.	P-Valor
Prop. Detecção	5393,0	2863,0	783,00	6,028459	0,000000	6,028502	0,000000
Por Blocos							
Blocos	Soma dos Postos IMCC	Soma dos Postos EWMA	U	Z	P- valor	Z Ajust.	P-Valor
1 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,363146	0,000771
1,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,363146	0,000771
2 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
2,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
3 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
3,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778
4 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,363146	0,000771
4,5 DV	100,0	36,0	0,00	3,360672	0,000778	3,360672	0,000778

Analisando primeiramente os resultados expostos para o teste geral, na Tabela 15, conclui-se que existe diferença significativa entre o poder de detecção dos gráficos IMCC e EWMA. Esta conclusão se deve a rejeição da hipótese nula de igualdade entre as duas amostras em um nível de significância de 5%. Verificando a soma de postos do teste ou a média das observações, observa-se um melhor desempenho do gráfico IMCC em comparação ao gráfico EWMA em detectar um *outlier*.

Quanto a aplicação do teste U de Mann-Whitney por blocos, ou seja, para cada amplitude de *outlier*, mais uma vez observou-se que para todas as amplitudes existe diferença significativa entre os gráficos ( $p\text{-valor} = 0,000778$ ) e que o gráfico IMCC é mais eficiente.

Esta conclusão vem ao encontro da análise visual realizada previamente, que observou um melhor desempenho do gráfico IMCC em relação ao gráfico EWMA.

Com o intuito de examinar a influência dos parâmetros de autocorrelação positivos e negativos na detecção do *outlier* pelos gráficos de controle IMCC e EWMA, recorreu-se ao teste U de Mann-Whitney. Neste caso existem duas amostras, uma com valores de detecção das autocorrelações positivas e outra com os valores de detecção das autocorrelações negativas. A Tabela 16 descreve os resultados dos testes de comparação geral, que considera todas as proporções de detecção com valores positivos e negativos e a comparação entre cada valor de autocorrelação.

**Tabela 16 – Comparação das proporções de detecção para parâmetros de autocorrelação positivos e negativos, em processos  $MA(1)$ .**

TESTE U DE MANN-WHITNEY (significante para $p < 0.05$ )							
IMCC							
Comparação	Soma dos Postos Aut. Positiva	Soma dos Postos Aut. Negativa	U	Z	<i>p</i> -valor	Z Ajust.	<i>p</i> -valor
-0,5 e 0,5	70,5	65,5	29,50	0,262553	0,792896	0,262746	0,792747
-0,6 e 0,6	71,0	65,0	29,00	0,315063	0,752714	0,315063	0,752714
-0,7 e 0,7	71,0	65,0	29,00	0,315063	0,752714	0,315063	0,752714
-0,8 e 0,8	72,0	64,0	28,00	0,420084	0,674424	0,420084	0,674424
EWMA							
Comparação	Soma dos Postos Aut. Positiva	Soma dos Postos Aut. Negativa	U	Z	<i>p</i> -valor	Z Ajust.	<i>p</i> -valor
-0,5 e 0,5	76,0	60,0	24,00	0,840168	0,400815	0,840168	0,400815
-0,6 e 0,6	77,0	59,0	23,00	0,945189	0,344563	0,945189	0,344563
-0,7 e 0,7	80,0	56,0	20,00	1,260252	0,207579	1,260252	0,207579
-0,8 e 0,8	83,0	53,0	17,00	1,575315	0,115185	1,575315	0,115185

Analisando primeiramente os resultados para o gráfico IMCC expostos na Tabela 16, observa-se que não existe diferença significativa na proporção de detecção quando utilizados parâmetros de autocorrelação com sinais positivos e negativos. Aceitou-se a hipótese nula de igualdade entre as amostras, uma vez que, o *p*-valor encontrado em todas as comparações foi maior que 5%. Passando para a análise dos resultados do gráfico EWMA, verificou-se novamente que não existe diferença significativa na proporção de detecção quando utilizados parâmetros com sinais positivos e negativos. Porém ao analisar os *p*-valores dos testes verifica-se que os mesmos decaem com o aumento da força da autocorrelação, indicando uma tendência de se aproximar da região de rejeição da hipótese nula à medida que se aumenta o valor da autocorrelação. Este comportamento não ocorre no gráfico IMCC, onde todos os *p*-valores se mantêm aproximadamente constante.

O resultado do teste estatístico demonstrou que a diferença visual observada na análise prévia não é significativa. Porém, pela análise dos *p*-valores observa-se que o gráfico EWMA é mais afetado nas autocorrelações negativas, aumentando a diferença com o aumento da força da autocorrelação, conforme observado visualmente.

Respondendo ao questionamento sobre a influência do valor de autocorrelação, quando esta é variada de moderada a forte, utilizou-se o teste Kruskal-Wallis. Neste caso, foram comparadas quatro amostras que representam as proporções de detecção para cada autocorrelação. A Tabela 17 descreve os resultados dos testes de comparação das amostras representadas pelos parâmetros de autocorrelação. O teste foi aplicado para cada gráfico, IMCC e EWMA, para cada conjunto de valores de autocorrelação positiva e negativa.

Tabela 17 – Comparação dos parâmetros de autocorrelação quanto ao poder de detecção de *outliers* em processos  $MA(1)$ .

TESTE KRUSKAL-WALLIS (significante para $p < 0.05$ )						
IMCC						
Comparação	Param. Autocorrelação	Soma dos postos	Graus de Liberdade	n	H	<i>p</i> -valor
Autocorrelação Positiva	0,5	142,0	3	32	0,3487855	0,9506
	0,6	137,0				
	0,7	126,5				
	0,8	122,5				
Autocorrelação Negativa	-0,5	143,0	3	32	0,3948864	0,9413
	-0,6	135,0				
	-0,7	130,0				
	-0,8	120,0				
EWMA						
Comparação	Param. Autocorrelação	Soma dos postos	Graus de Liberdade	n	H	<i>p</i> -valor
Autocorrelação Positiva	0,5	141,0	3	32	0,2556818	0,9681
	0,6	135,0				
	0,7	129,0				
	0,8	123,0				
Autocorrelação Negativa	-0,5	150,0	3	32	1,349927	0,7173
	-0,6	141,0				
	-0,7	128,0				
	-0,8	109,0				

Partindo dos resultados expostos na Tabela 17, em ambos os gráficos a hipótese nula de igualdade das amostras não foi rejeitada ao nível de significância de 5%. Dessa forma, conclui-se que estatisticamente não existe influência do parâmetro de autocorrelação no poder de detecção de um *outlier* pelos gráficos IMCC e EWMA.

O resultado obtido a partir do teste estatístico comprova que a variação do poder de detecção com a variação do parâmetro de autocorrelação, para cada amplitude de *outlier* conforme visualizado na Figura 16 e Figura 17, não é significativa. Nestas ilustrações observa-se que o poder de detecção diminui com o aumento da força da autocorrelação. Isso pode ser verificado na soma dos postos da Tabela 17, onde os valores decaem para autocorrelação variando em módulo de 0,5 a 0,8.

#### 4.3 Resumo da aplicação

Para melhor compreensão dos testes realizados e possível comparação entre os modelos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , na Tabela 18 são apresentados os resultados de forma resumida.

Estão descritos o objeto de comparação, o teste utilizado, as estatísticas de cada teste, os *p*-valores e a respectiva conclusão, mostrando se a diferença das amostras comparadas é significativa ou não significativa em um nível de significância de 5%.

Comparando os resultados obtidos para os modelos *AR(1)* e *MA(1)*, observa-se que o comportamento quanto a eficiência de detecção de um *outlier* previamente inserido nesses modelos é o mesmo. Em ambos os modelos o gráfico IMCC apresentou eficiência superior ao gráfico EWMA na detecção de *outliers*. Quanto ao sinal da autocorrelação, para os gráficos IMCC e EWMA os dois modelos não apresentaram diferença significativa. Porém, no gráfico EWMA quando se aumenta a força da autocorrelação à estatística de teste se aproxima da região de rejeição da hipótese nula. Comparando a diferença entre os valores de autocorrelação, em ambos modelos e gráficos, não existe diferença na detecção de *outliers* ao variar o valor do parâmetro de correlação.

**Tabela 18 – Comparação entre os modelos.**

Comparação	Teste Utilizado	Gráfico	AR(1)	MA(1)
Diferença no poder de detecção entre os gráficos IMCC e EWMA	U de Mann-Whitney	-	<b>Significativa</b> Z = 5,4828 [0,0000]	<b>Significativa</b> Z = 6,0285 [0,0000]
Diferença no poder de detecção entre parâmetros de autocorrelação positivos e negativos	U de Mann-Whitney	IMCC	<b>Não Significativa</b>  0,5  Z = 0,4200 [0,6744]  0,6  Z = 0,4200 [0,6744]  0,7  Z = 0,4200 [0,6744]  0,8  Z = 0,3150 [0,7527]	<b>Não Significativa</b>  0,5  Z = 0,2627 [0,6744]  0,6  Z = 0,3150 [0,7527]  0,7  Z = 0,3150 [0,7527]  0,8  Z = 0,4200 [0,6744]
		EWMA	<b>Não Significativa</b>  0,5  Z = 0,7351 [0,4622]  0,6  Z = 0,8401 [0,4008]  0,7  Z = 1,0502 [0,2936]  0,8  Z = 1,1035 [0,2697]	<b>Não Significativa</b>  0,5  Z = 0,8401 [0,4008]  0,6  Z = 0,9451 [0,3445]  0,7  Z = 1,2602 [0,2075]  0,8  Z = 1,5753 [0,1151]
Diferença no poder de detecção entre os valores dos parâmetros de autocorrelação	Kruskal-Wallis	IMCC	<b>Não Significativa</b> (+) H = 0,5255 [0,9132] (-) H = 0,4630 [0,9269]	<b>Não Significativa</b> (+) H = 0,3487 [0,9506] (-) H = 0,3948 [0,9413]
		EWMA	<b>Não Significativa</b> (+) H = 0,3948 [0,9413] (-) H = 0,3551 [0,9494]	<b>Não Significativa</b> (+) H = 0,2556 [0,9681] (-) H = 1,3499 [0,7173]

\* (+) Autocorrelações positivas, (-) Autocorrelações negativas e o valor entre colchetes representa o *p*-valor. Todos os testes são significantes para *p*-valor < 0,05.

#### 4.4 Comentários gerais do capítulo

Neste capítulo realizou-se a parte prática da pesquisa, seguindo os passos metodológicos apresentados no Capítulo 3. Os dados foram simulados por meio de um programa desenvolvido para este fim. Os resultados obtidos por meio do *software* representam o poder de detecção de *outliers* de amplitude variável pelos gráficos de controle IMCC e EWMA, em processos autocorrelacionados de primeira ordem. Para comprovar estatisticamente os objetivos desta pesquisa foram utilizados testes de comparação não-paramétricos, uma vez que, os dados não apresentaram normalidade em sua distribuição.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Este capítulo faz o encerramento das idéias e análises desenvolvidas durante a pesquisa. Desta forma, inicialmente, serão apresentadas as conclusões, buscando responder aos questionamentos apresentados nos objetivos específicos com base nos resultados encontrados, alcançando assim o objetivo geral desta pesquisa. Em seguida, serão apresentadas recomendações relacionadas a possíveis desdobramentos para futuras pesquisas.

### 5.1 Conclusões

O objetivo desta pesquisa foi determinar a eficiência dos gráficos de controle, IMCC e EWMA, aplicados aos resíduos de modelos da classe ARIMA, na detecção de *outliers* em processos autocorrelacionados, além de evidenciar a influência da autocorrelação do processo e da magnitude da observação anômala no poder de detecção dos gráficos.

Primeiramente foram simuladas 640.000 séries para cada modelo  $AR(1)$  e  $MA(1)$  representativas de processos produtivos autocorrelacionados, variando a força e o sinal da dependência serial. Cada série simulada foi modelada, e seus resíduos foram analisados para verificar se o modelo aplicado aos dados estava bem ajustado. Após a verificação dos resíduos, na série original, foram inseridos *outliers* com amplitudes variáveis em uma observação pré-determinada. As séries novamente foram modeladas e os resíduos foram plotados em gráficos de controle de observações individuais (IMCC) e de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA). Foram registrados os pontos com *outliers* corretamente detectados pelos gráficos de controle, gerando para cada gráfico uma proporção de detecção para o par de variáveis, parâmetro de autocorrelação e amplitude de *outlier*.

Após obter um conjunto de dados com as proporções de detecção para cada variação de amplitude de *outlier* e parâmetro de autocorrelação, foram aplicados testes estatísticos não-paramétricos de comparação de amostras para comprovar os resultados obtidos pela análise

visual dos dados. Dessa forma, buscou-se atender os objetivos específicos e responder aos questionamentos levantados no item sobre problemas da pesquisa.

Os resultados mostraram que, para ambos os modelos AR e MA, o gráfico de controle IMCC é mais eficiente que o gráfico EWMA na detecção de *outliers*, inclusive para baixas amplitudes. Conforme, evidenciado por Montgomery (2004) o gráfico de controle EWMA é eficiente em detectar pequenas mudanças de nível permanente em processos, da ordem de  $1,5\sigma$  a  $2\sigma$ , enquanto o gráfico IMCC é mais eficiente para detectar mudanças maiores no nível do processo. Porém, como observado nesta pesquisa, quando se deseja detectar um *outlier* ou uma mudança abrupta de um processo, representada pela alteração de somente uma amostra do mesmo, o gráfico IMCC é mais eficiente para pequenas e grandes amplitudes.

Uma possível justificativa para o fraco desempenho do gráfico EWMA em detectar um *outlier* por meio dos resíduos reside no baixo peso dado ao resíduo atual pela constante de ponderação  $\lambda$ . Dessa forma, acaba-se “mascarando” o *outlier* quando se desenvolve a estatística EWMA a ser plotada no gráfico de controle. Um pico na série de dados original acarretará em uma perturbação na estatística EWMA, mas nos períodos subsequentes a interferência do *outlier* desaparece. Por outro lado, quando se tem uma mudança na média do processo, a estatística EWMA tende a aumentar nos períodos subsequentes até extrapolar os limites de controle. Devido a isso, o gráfico de controle EWMA é mais apropriado para detectar mudanças na média e não recomendado para detectar *outliers*.

Quando foi avaliado se existe diferença significativa no poder de detecção entre autocorrelações com parâmetros positivos e negativos, para os modelos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , tanto os gráficos de controle IMCC quanto o EWMA obtiveram resultados não significativos para a influência do sinal da autocorrelação no poder de detecção. Porém, é importante ressaltar que mesmo não sendo significante, o comportamento entre os parâmetros de autocorrelação positivo e negativo é diferente em cada gráfico, sendo que no gráfico EWMA existe uma diferença maior, uma vez que, o seu *p-valor* se aproxima mais da região de rejeição da hipótese nula do teste.

Comparando os valores dos parâmetros de autocorrelação, buscando verificar se o poder de detecção é influenciado quanto a variação dos parâmetros de moderado a forte, para os modelos  $AR(1)$  e  $MA(1)$ , em ambos os gráficos, os testes comparativos se mostraram não significantes. Apesar de os pesos das autocorrelações não influenciarem significativamente na proporção de detecção, pela análise visual dos dados observa-se visualmente uma pequena variação nos gráficos IMCC e uma variação mais expressiva nos gráficos EWMA. Outro

comportamento discrepante observado é quanto ao poder de detecção do gráfico EWMA, quando utilizado parâmetros positivos em processos  $AR(1)$ . Em todos os casos estudados, tanto para autocorrelações positivas quanto negativas, o poder de detecção decai com o aumento da força da autocorrelação de 0,5 a 0,8. Porém, no caso citado, o comportamento é oposto, registrando um aumento da eficiência de detecção quando os parâmetros de autocorrelação variam de 0,5 a 0,8.

Dessa forma, foi possível avaliar os gráficos de controle IMCC e EWMA, quanto à eficiência na detecção de *outliers* em processos com comportamento autorregressivo ou de médias móveis de primeira ordem. Como muitos processos industriais apresentam autocorrelação entre as observações, o uso de gráficos de controle para verificar a estabilidade do processo fica condicionado a aplicação de modelos matemáticos para remoção da autocorrelação, com posterior monitoração dos resíduos. Assim, caso as observações do processo apresentem um valor discrepante, seja por erro de leitura dos dados, por erros de digitação, ou por anomalias pontuais no processo, os gráficos IMCC apresentam grande eficiência em detectar estes *outliers* em uma extensa faixa de amplitudes.

## 5.2 Recomendações

Visando dar continuidade à proposta apresentada neste trabalho, algumas recomendações são feitas:

- Verificar a eficiência do gráfico de controle *CuSum*, como alternativa ao gráfico de controle EWMA, para detectar *outliers* em processos autocorrelacionados por meio de monitoração dos resíduos;
- Expandir a pesquisa para modelos com dois parâmetros de autocorrelação, como o  $AR(2)$ , o  $MA(2)$  e o modelo misto  $ARMA(1,1)$ ;
- Fazer um estudo detalhado das causas do comportamento distinto do poder de detecção do gráfico EWMA, quando utilizados parâmetros de autocorrelação positivos em processos autorregressivos  $AR(1)$ ;
- Comparar a eficiência em captar *outliers* pelos gráficos de controle estudados e os modelos de intervenção.

## 6 REFERÊNCIAS

AGUIRRE, A. **Uma nota sobre a transformação Box-Cox**. Belo Horizonte: UFMG/Cedeplar, 1997, 18p. (Texto para Discussão, 116).

ALVES, C. da C.; SAMOHYL, R. W. O monitoramento de processos industriais via gráficos de controle CUSUM, 2006. In: **Qualimetria**. Available at: <http://www.qualimetria.ufsc.br/artigos.htm> [Acessado em Abril 15, 2009].

ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. V. Times series modeling for statistical process control. **Journal of Business & Economics Statistics**, v. 6, n. 1, p. 87-95, 1988.

BORROR, C. M.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Robustness of the EWMA control chart to nonnormality. **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 3, 1999.

BOX, G. E. P.; COX, D. R. An analysis of transformations. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B**, v. 26, n. 2, p. 211-252, 1964.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time series analysis: forecasting and control**. San Francisco: Holden-Day, 1970.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time series analysis: forecasting and control**. 3.ed. San Francisco: Holden-Day, 1994.

BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A. Distribution of autocorrelations in autoregressive moving average models. **Journal of The American Statistical Association**, v. 65, p. 1509-1526, 1970.

BOX, G.E.P.; KRAMER, T. Statistical process control and automated process control – A discussion. **Technometrics**, August, v.34, pp.251-267, 1992.

BOX, G.E.P.; LUCEÑO, A. Discrete proportional-integral adjustment and statistical process control. **Journal of Quality Technology**, July v.29, n. 3, 1997a.

\_\_\_\_\_. **Statistical control by monitoring and feedback adjustment.** John Wiley & Sons, Inc. NY, 1997b.

BOX, G.E.P.; HUNTER, W.G.; HUNTER, J.S. **Statistics for experiments. An introduction to design, data analysis and model building.** John Wiley & Sons, Inc. NY. 1978.

BUENO, R. L. S. **Econometria de séries temporais.** São Paulo: Cengage Learning, 2008.

CAIADO, J. Modelação da taxa de juro do crédito a particulares em Portugal: uma abordagem ARIMA com análise de intervenção e detecção de outliers. **In: Gestin. – Idanha a Nova: Escola Superior de Gestão**, Ano 2, n. 2, p. 179-190, Dez. 2003.

CHANG, I. H. **Outliers in Time Series.** University of Wisconsin-Madison, Dept. of Statistics, 1982.

CHANG, I. H.; TIAO, G. C.; CHEN, C. Estimation of time series parameters in the presence of outliers. **Technometrics**, v. 30, p. 193-204, 1988.

CHEN, C.; LIU, L. M. Forecasting time series with outliers. **Journal of Forecasting**, v. 12, p. 13-35, 1993.

CLARO, F. A. E.; COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Gráficos de controle de EWMA e de X-barra para monitoramento de processos autocorrelacionados. **Revista Produção**, v. 17, n. 3, p. 536-546, set-dez. 2007.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico da qualidade.** São Paulo: Atlas, 2004.

CROWDER, S.V. A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts. **Technometrics**, November, v.29, n.4, pp.401-407, 1987.

DEL CASTILLO, E. A multivariate self-tuning controller for run-to-run process control under shift and trend disturbances. **IIE transactions**, v. 28, p. 1011 – 1021, 1996.

\_\_\_\_\_. **Statistical control adjustment for quality control.** Canadá: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

DESU, M. M.; RAGHAVARAO, D. **Nonparametric Statistical Methods for Complete and Censored Data.** Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2003.

ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometria**, v. 50, n. 4, p. 987-1008, 1982.

EHLERS, R. S. Análise de séries temporais. In: Notas de aula de séries temporais. São Paulo: USP, 2007. Disponível em: <<http://www.icmc.usp.br/~ehlers/notas/stemp.pdf>>. Acesso em: 10 Fev. 2010.

ENDERS, W. **Applied Econometric Time Series**. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley and Sons, Inc., New York. N.Y. 2003.

FAVA, V. L. **Manual de econometria**. In: VASCONCELOS, M. A. S.; ALVES, D. São Paulo: Editora Atlas, 2000.

FERREIRA, A. M. **Noções de delineamento experimental**. Castelo Branco: IPCB, ESA, 1997.

FOX, A. J. Outliers in time series. **Journal of the Royal Statistical Society**, Ser. B, v. 34, p. 350-363, 1972.

GARVIN, D. A. Competing on the eight dimensions of quality. **Harvard Business Review**, v. 65, n. 6, p. 101-9, Nov./Dec.1987.

GOMES, F. P.; GARCIA, C. H. **Estatística Aplicada a Experimentos Agrônomicos Florestais**. Piracicaba : FEALQ, 2002. 309p.

GUJARATI, D. N. **Econometria básica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

HAMILTON, J. D. **Time Series analysis**. Princeton University Press, Princeton – New Jersey, N.J. 1994.

HUNTER, J. S. The exponentially weighted moving average. **Journal of Quality Technology**, v. 18, p. 203-210, 1986.

KNOTH, S.; AMIN, R. W. Autocorrelation and tolerance limits. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 73, p. 467-489, 2003.

KORZENOWSKI, A. L. **Premissas e suposições para construção de gráficos de controle: Um framework para verificação**. 2009. 102f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

LJUNG, G. M. On Outlier Detection in Time Series. **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v. 55, p. 559-567, 1993.

LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, v. 65, n. 2, p. 297-303, 1978.

LU, C. W.; REYNOLDS, M. R. Jr. EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 166-188, 1999.

LUCAS, J. M. A modified V-mask control schemes. **Technometrics**, v.15, p. 833 – 847, 1973.

LUCAS, M. J.; SACCUCCI, M. S. Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements. **Technometrics**, February. v. 32. n. 1, p. 1 – 12, 1990.

MAC GREGOR, J. F. Interface between process control and on-line statistical process control. **Computational System Technology Division Communication**, v.10, pp.9-20, 1987.

MALHOTRA, N. K. **Pesquisa de Marketing: uma orientação aplicada**. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

MASON, R. L.; GUNST, R. F.; HESS, J. L. **Statistical Design and Analysis of Experiments: With Application to Engineering and Science**. 2 ed. Hoboken: John Willey & Sons, 2003.

MARAGAH, H. D.; WOODALL, W. H. The effect of autocorrelation on the retrospective X-chart. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 40, p. 29-42, 1992.

MINGOTI, S. A.; YASUKAWA, F. R. S. Uma comparação de gráficos de controle para a média de processos autocorrelacionados. In: **Revista Eletrônica Sistemas & Gestão**, 3:1, p. 55-73, 2008.

MIRANDA, C. F. **Modelação linear de series temporais na presença de outliers**. 2001. 63f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2001.

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. Hoboken: John Willey & Sons. 2001.

\_\_\_\_\_. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

MONTGOMERY, D. C.; MASTRANGELO, C. M. Some statistical process control methods for autocorrelated data. **Journal of Quality Technology**, July, v. 23, n. 3, p.179 – 204, 1991.

MOREIRA Jr., F. J. **Proposta de um método para o controle estatístico de processo para observações autocorrelacionadas**. 2005. 138f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

MOREIRA Jr., F. J.; TEN CATEN, C. S. Estudo sobre o efeito da autocorrelação de modelos AR(1) no controle estatístico de processo. In: XXIV ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 2004, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Associação Brasileira de Engenharia de Produção, 2004. p. 1705-1712.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

\_\_\_\_\_. **Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras**. São Paulo: Blucher, 2008.

OLIVEIRA, A.; SAMOHYL, R. W. A Normalização de Distribuições não-normais Através da Transformação de Box-Cox e alguns comentários sobre a Avaliação de Qualidade. In: I Congresso Internacional de Engenharia de Produção, 1997, Gramado. **Anais eletrônicos**, 1997.

PALMA, J. A. Estimção dos Parâmetros de Séries Temporais em Presença de *Outliers*. **Comunicação no âmbito da conferência EST/10 anos**, Escola superior de tecnologia de Setúbal, 1999.

PEDRINI, D. C.; TEN CATEN, C. S.; MOREIRA Jr., F. J. Proposal of an Alternative to Control Chart Based on Residuals. In: **Book of Abstracts**. Praha: ISBIS-2008.

PYLRO, A. S. **Modelo Linear Dinâmico de Harrison & Stevens Aplicado ao Controle Estatístico de Processos Autocorrelacionados**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

RAMOS, A. W.; HO, L. L. Procedimentos inferenciais em índices de capacidade para dados autocorrelacionados via bootstrap. **Revista Produção**, v. 13, n. 3, p. 50-62, 2003.

REQUEIJO, J. F. G.; MATOS, A. V.; PEREIRA, Z. L. SPC in Short Production Runs with Autocorrelated Data. In: **49<sup>th</sup> European Organization for Quality Congress**. Turquia, 2005.

ROBERTS, S. W. Control charts tests based on geometric moving averages. **Technometrics**, v. 1, p. 239 – 250, 1959.

SIEGEL, S.; CASTELLAN JR., N. J. **Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento**. 2. ed. Porto alegre: Artmed, 2006.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M.. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino à Distância da UFSC, 2001.

SILVA, V. F. **Volatilidade estatística determinística: uma avaliação para o retorno da ação "Vale do Rio Doce"**. 2006. 86f. Dissertação (Mestrado profissional em Economia aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

SILVA, W. V.; FONTANINI, C. A. C.; DEL CORSO, J. M. Garantia da qualidade do café solúvel com o uso do gráfico de controle de somas acumuladas. **Revista Produção on-line**, v. 7, n. 2, p. 43-63, 2007.

SOARES, I. G.; CASTELAR, I. **Econometria aplicada com o uso de EViews**. Fortaleza: UFC/CAEN, 2003.

SOUZA, A. M.; SAMOBYL, R. W.; MALAVÉ, C. O. Multivariate feedback control: an application in a productive process. **Computers & Industrial Engineering**, v. 46, p. 837-850, 2004a.

\_\_\_\_\_. Aplicação de um modelo paramétrico multivariado para o controle da temperatura de fornos de túnel. **Revista Produção**, v. 14, n. 2, p. 82-94, 2004b.

SOUZA, A. M.; ETHUR, A. B. N.; LOPES, L. F. D.; ZANINI, R. R. **Introdução a projetos de experimentos**: Caderno didático. Santa Maria, RS: UFSM, 2002.

TESTIK, M. C. Model Inadequacy and Residual Control Charts for autocorrelated processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 21, p. 115-130, 2005.

THODE, H. C. **Testing for normality**. New York: Marcel Dekker, 2002.

TSAY, R. S. Time Series models specification in the presence of outliers. **Journal of the American Statistical Association**, v.81, p.132-141, 1986.

\_\_\_\_\_. Outliers, level shifts, and variance changes in time series. **Journal of Forecasting**, v.7, p.1-20, 1988.

TSAY, R. S. Time Series models specification in the presence of outliers. **Journal of the American Statistical Association**, v.81, p.132-141, 1986.

VASILOPOULOS, A. V.; STAMBOULIS, A. P. Modification of control charts limits in the presence of data correlation. **Journal of Quality Technology**, v. 10, p.20-30, 1978.

WASSERMAN, G. S. An adaptation of the EWMA chart for short run SPC. **International Journal of Production Research**, v. 33, n. 10, pp. 2821– 2833, 1995.

WERNER, L.; RIBEIRO, J. L. D. Previsão de demanda: Uma aplicação dos modelos Box-Jenkins na área de assistência técnica de computadores pessoais. **Gestão & Produção**, v.10, n.1, p. 47-67, 2003.

ZAR, J. H. **Biostatistical analysis**. 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

## **ANEXOS**

---

**ANEXO A – Fatores para construção de gráficos de controle.**

Observações na Amostra, n	Gráfico para Médias						Gráficos para Desvios Padrão						Gráficos para Amplitudes					
	Fatores para Limites de Controle		Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle		Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle		Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle		Fatores para Linha Central			
	A	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	1/c <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	d <sub>2</sub>	1/d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>		
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267		
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575		
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282		
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115		
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004		
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924		
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864		
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816		
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777		
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744		
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717		
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693		
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672		
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653		
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637		
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622		
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608		
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597		
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585		
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575		
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566		
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557		
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548		
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541		

Para n > 25.

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad c_4 \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}}$$

$$B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)