



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



# IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLANTA DE CORRENTE DE UM MOTOR DE INDUÇÃO UTILIZANDO REDES DE BASE RADIAL

**JOILSON BATISTA DE ALMEIDA RÊGO**

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente da  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação da  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte como  
parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de  
MESTRE EM CIÊNCIAS.

Orientador: Prof. Dr. Allan de Medeiros Martins – UFRN – CT – DEE.

Co-Orientador: Prof. Dr. Adrião D. Dória Neto – UFRN – CT – DCA.

NATAL – RN

2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**JOILSON BATISTA DE ALMEIDA RÊGO**

**IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLANTA DE CORRENTE DE  
UM MOTOR DE INDUÇÃO UTILIZANDO REDES DE BASE  
RADIAL**

Orientador:

**Allan de Medeiros Martins**

Co-Orientador:

**Adrião D. Dória Neto**

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente da  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação da  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte como  
parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de  
MESTRE EM CIÊNCIAS.

NATAL – RN

2010

Divisão de Serviços Técnicos

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central  
Zila Mamede

Rêgo, Joilson Batista de Almeida.

Identificação de uma planta de corrente de um motor de indução utilizando redes de base radial / Joilson Batista de Almeida. – Natal, RN, 2010.

105 f. : il.

Orientador: Allan de Medeiros Martins.

Co-Orientador:Adrião D. Dória Neto.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Identificação de sistemas – Dissertação. 2. Função de base radial – Dissertação. 3. Sistemas não-lineares – Estabilidade - Dissertação. I. Martins, Allan de Medeiros. II. Dória Neto, Adrião Duarte. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 681.5.015(043.3)

# Identificação de uma planta de corrente de um motor de indução utilizando redes de base radial.

**JOILSON BATISTA DE ALMEIDA RÊGO**

Dissertação de Mestrado aprovada em 30 de julho de 2010 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Allan de Medeiros Martins, D.Sc., Orientador

---

Prof. Adrião Duarte Dória Neto, D.Sc., Co-Orientador

---

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc., Examinador Interno

---

Prof. Guilherme de Alencar Barreto, D.Sc., Examinador Externo

NATAL, RN - Brasil  
Julho de 2010

*May the force be with you*  
*Star wars.*

# AGRADECIMENTOS

---

A meu orientador prof. Allan Medeiros, por seu apoio e por tudo o que ele representa como Educador, Pesquisador, Professor e Amigo.

Ao Prof. Adrião Duarte por me acolher na chegada ao programa de pós-graduação e pelo conhecimento passado ao longo deste período.

Ao Prof. Samaherni Moraes Dias, pela amizade, estímulo e incentivo durante esta jornada.

Aos professores que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho através da transmissão do conhecimento que auxiliou na construção desta pesquisa.

Aos meus queridos familiares, em especial minha esposa Hânia pelo constante estímulo, meus pais que não mediram esforços para promover educação aos filhos e aos meus queridos filhos Pável e Dinah, fonte de inspirações e motivo de tanto esforço e dedicação. Um abraço especial à Samantha, Joilda, Jonilson e os amigos do LACI.

Não posso deixar de dizer o quão é difícil nominar apenas algumas pessoas a quem tenho que agradecer, afinal são tantos que se fosse escrever não caberia nas páginas subseqüentes, então fica aqui um abraço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste.

Aos demais professores, funcionários e amigos da UFRN e da UnP.

# RESUMO

---

O presente trabalho descreve a utilização de uma ferramenta matemática na solução de problemas decorrentes da teoria de controle, incluindo a identificação, a análise do retrato de fase e a estabilidade, bem como a evolução temporal da planta de corrente do motor de indução. A identificação de sistemas é uma área da modelagem matemática que tem como objetivo o estudo de técnicas que possam determinar um modelo dinâmico na representação de um sistema real. A ferramenta utilizada na identificação e análise do sistema dinâmico não linear será as Funções de Base Radial (RBF). O processo ou a planta que será utilizada possui um modelo matemático desconhecido, mas pertence a uma determinada classe que contém uma dinâmica interna que pode ser modelada. Será apresentada como contribuições a análise da estabilidade assintótica da RBF. A identificação utilizando Funções de Base Radial é demonstrada através de simulações computacionais a partir de um conjunto de dados reais obtidos da planta de corrente do motor de indução.

**Palavras-Chave:** Identificação de sistemas, funções de base radial, sistemas não lineares, estabilidade.

# ABSTRACT

The present work describes the use of a mathematical tool to solve problems arising from control theory, including the identification, analysis of the phase portrait and stability, as well as the temporal evolution of the plant's current induction motor. The system identification is an area of mathematical modeling that has as its objective the study of techniques which can determine a dynamic model in representing a real system. The tool used in the identification and analysis of nonlinear dynamical system is the Radial Basis Function (RBF). The process or plant that is used has a mathematical model unknown, but belongs to a particular class that contains an internal dynamics that can be modeled. Will be presented as contributions to the analysis of asymptotic stability of the RBF. The identification using radial basis function is demonstrated through computer simulations from a real data set obtained from the plant.

**Keywords:** Identification systems, radial basis functions, nonlinear systems, stability.

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO .....	14
1.1 – Motivação da pesquisa .....	15
1.2 – Objetivos da pesquisa .....	16
1.3 – Problema abordado .....	16
1.4 – Contribuições .....	16
1.5 – Organização do texto.....	17
CAPÍTULO 2 – IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS .....	18
2.1 – Sistemas Lineares .....	19
2.1.1 – Sistemas monovariáveis e multivariáveis .....	20
2.1.2 – Sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto .....	20
2.1.3 – Descrição matemática de sistemas lineares .....	21
2.1.4 – Sistemas determinísticos e estocásticos .....	22
2.1.4 – Mínimos quadrados para a identificação de sistemas lineares. ....	23
CAPÍTULO 3 – SISTEMAS NÃO LINEARES .....	31
3.1 – Introdução .....	31
3.2 – Conceitos básicos .....	32
3.3– Sistemas de segunda ordem. ....	34
3.4 – Estabilidade e pontos de equilíbrio .....	39
3.4.1 – Definições de estabilidade .....	39
3.4.2 – Pontos de equilíbrio. ....	40
3.5 – O motor de indução. ....	46
3.5.1 – O acionamento do motor de indução. ....	48
CAPÍTULO 4 – REDES DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL – RBF. ....	50
4.1 – Introdução .....	50
4.2 – Funções de base .....	51
4.2.1 – Funções de base radial gaussianas .....	53
4.3 – O problema de interpolação exata .....	55
CAPÍTULO 5 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	65
5.1 – Introdução .....	65
5.2 – Aquisição dos dados. ....	66

5.2.1 – Escolha das variáveis de entradas e saídas. . . . .	67
5.2.2 – Escolha do período de amostragem. . . . .	69
5.3 – Determinação da estrutura do modelo . . . . .	69
5.4 – Determinação dos parâmetros da RBF . . . . .	71
5.5 – Validação do modelo. . . . .	72
5.5.1 – Simulações. . . . .	73
CONCLUSÃO . . . . .	98
REFERÊNCIAS . . . . .	100

# LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1 – Representação do princípio da superposição de um sistema linear. , sendo $u$ a variável de entrada do sistema e $y$ a variável de saída. . . . .	19
Figura 2 – aproximação dos dados observados através do método de mínimos quadrados. . . . .	27
Figura 3 – aproximação dos dados observados acrescido de ruído e aproximados. . . . .	27
Figura 4 – Etapas de um processo de identificação. . . . .	29
Figura 5 – Criando um retrato de fase . . . . .	37
Figura 6 – Gráfico do retrato de fase da equação de Van der Pol com $\mu = 0,5$ . . . . .	38
Figura 7 - Exemplos do comportamento de um sistema dinâmico linear. . . . .	42
Figura 8 - Possíveis comportamentos de um sistema dinâmico linear de 2ª ordem . . . . .	44
Figura 9 – Retrato de fase para o sistema não linear de 2ª ordem. . . . .	45
Figura 10 – Trajetórias linearizadas. . . . .	46
Figura 11 – Diagrama simplificado do inversor de frequência. . . . .	48
Figura 12 – Exemplos de funções de base. . . . .	51
Figura 13 – Exemplo da topologia de uma RBF. . . . .	52
Figura 14– Imagem ilustrativa do mapeamento dos dados de entrada para um espaço oculto gaussiano. . . . .	53
Figura 15 (a)– Exemplos de uma função de base radial bidimensional. . . . .	54
Figura 15(b) – Exemplos de uma função de base radial tridimensional. . . . .	54
Figura 16 – Exemplos de uma aproximação utilizando RBF com funções de base gaussianas. . . . .	59
Figura 17 – Exemplos de uma aproximação utilizando RBF com funções de base gaussianas para a função $y = \text{sen}(10x)$ . . . . .	60
Figura 18 – Exemplos de um dos problemas apresentados durante a fase de Treinamento de uma RBF no caso um <i>underfitting</i> . . . . .	61
Figura 19– Exemplo de um problema de sobre-ajuste. . . . .	62
Figura 20– O erro médio quadrático do conjunto de treinamento. . . . .	64
Figura 21 – Diagrama representando todos os passos do presente trabalho, desde a aquisição e coleta de dados até a validação e apresentação dos . . . . .	67

resultados obtidos.

Figura 22 – Obtenção dos dados de entrada / saída do processo.. . . . .	67
Figura 23 – sinal senoidal aplicado na planta em função do número de amostras . . . . .	68
Figura 25 – Sinal de saída da planta. . . . .	68
Figura 24 – Estrutura implementada para a obtenção do vetor de pesos $w$ . . . . .	71
Figura 26 – Modelo de uma RBF	72
Figura 27 – Validação do modelo.	73
Figura 28 – Validação do modelo, o gráfico foi ampliado na região de tempo discreto 2000 a 3000	73
Figura 29 – Análise da dinâmica da planta a partir da RBF	74
Figura 30 - Identificação de um sistema dinâmico linear através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.	81
Figura 31 - Identificação de um sistema dinâmico não linear (equação de Van der Pol) através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.	84
Figura 32 – O circuito Chua	85
Figura 33– Atrator dupla volta	86
Figura 34– Resposta temporal do atrator dupla	86
Figura 35 - Identificação de um sistema dinâmico não linear (circuito Chua) através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.	88
Figura 36 - O diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução.	91
Figura 37 - diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução e da RBF	92
Figura 38– O diagrama de fase da rede RBF após a identificação da planta de corrente do motor de indução e sua generalização	94
Figura 39– Campo de atuação em que o domínio da variável $x$ é confinado por um círculo de raio definido pela norma euclidiana	95
Figura 40– Aproximação de uma rede RBF para um sistema linear instável	97
Figura 41– Estabilidade inerente a uma rede RBF	98
Figura 41– Sistema inerentemente estável	99

# LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

---

*SISO – Single Input Single Output*

*MIMO – Multiple Input Multiple Output*

RBF – Redes de funções de base radial

CA – Corrente Alternada

CV – Cavalo Vapor

Rpm – rotações por minuto

V – Volts

A – Ampère

Exp - Exponencial

Y(s) – Transformada de Laplace da saída

U(s) – Transformada de Laplace da Entrada

G(s) – Função de Transferência

$\Theta$  – Vetor de parâmetros

$\mathbf{W}$  – Vetor de pesos

$\Phi^+$  - Matriz de Moore-Penrose

AD – Conversor analógico / Digital

DA – Conversor Digital / Analógico

Matlab® - *MATrix LABORatory*

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

---

No período compreendido entre 1809 – 1960 vários conceitos estatísticos essenciais usados em sistemas de identificação foram desenvolvidos. Entre os desenvolvimentos deste período destacamos: mínimos quadrados, regressão linear, método de máxima verossimilhança, aproximação estocástica, análise por série temporais e o método das variáveis instrumentais.

Na década de 1960 - 1970 surgiram às equações a diferenças lineares básicas para as relações entrada / saída, que podem ser escritas como uma regressão linear, permitindo a aplicação do método dos mínimos quadrados. Surgiram também, técnicas espectrais e de correlação com aplicação em séries temporais e o desenvolvimento de diversos paradigmas de convolução e expansão de funções de resposta ao impulso.

No entanto, na década de 80 a teoria de identificação de sistemas passou por desenvolvimentos significativos, principalmente a identificação de sistemas não lineares. Podemos destacar nesta etapa os métodos de subespaço para modelos espaço de estados, aplicações e análise de dados no domínio da frequência [Juang, 1994], as representações polinomiais propostas por Leontaritis e Billings(1985) e o uso das redes neurais na identificação de sistemas proposto por Narendra e Parthasarathy(1990). As redes neurais artificiais representam uma alternativa à solução de problemas em identificação e controle, principalmente em sistemas não lineares.

Atualmente, o aumento da complexidade e das incertezas presentes nos sistemas dinâmicos tem levado a comunidade científica a buscar ferramentas matemáticas capazes de tratar eficientemente os problemas de análise em tais sistemas (planta ou processo), desde que o mesmo possa ser identificado. No entanto, muitos sistemas práticos não lineares apresentam comportamentos dinâmicos mais complexos, por exemplo: podem apresentar uma mudança de comportamento em diferentes pontos de operação, o que dificulta a aplicação de ferramentas de identificação e controle linear. Esta impossibilidade cria a necessidade de aplicação de ferramentas inerentemente não lineares e com grande poder de adaptação, dentre as quais destacamos as redes de funções de base radial (RBF) [Hunt et al., 1992].

O conhecimento de modelos e a dinâmica de sistemas reais são de fundamental importância a diversas áreas científicas. Na Engenharia, modelos são necessários para a concepção ou análise de processos já existentes. Avançadas técnicas de projeto de controladores, supervisão, otimização e diagnósticos de falhas são baseadas em modelos [Nelles 2001]. Estes podem ser obtidos por análise teórica ou experimental.

A teórica é baseada em *modelo caixa branca* por causa de sua transparência, ou seja, o conhecimento das leis físicas que descrevem o sistema. Na modelagem experimental, *caixa-preta* ou empírica, o modelo é construído a partir de um conjunto de dados medidos, uma vez que neste geralmente se tem pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema. O *modelo caixa-cinza* incorpora de alguma forma, um conhecimento prévio, combinando, deste modo, a modelagem caixa-preta e caixa-branca [Aguirre 2007].

## **1.1 - Motivações da pesquisa**

Embora existam diversas maneiras de se representar um modelo para um determinado sistema dinâmico, a literatura nos mostra que modelos matemáticos são os mais utilizados. Como exemplos para sistemas não lineares podemos citar: os modelos de Hammerstein e Wiener, séries de Volterra e polinômios de Kolmogorov – Garbor onde, a partir de algumas variáveis, podemos inferir um modelo baseado em dados observados do sistema.

No entanto, em alguns sistemas, o comportamento dos mesmos pode dificultar a identificação e levar a modelos matemáticos que não refletem o comportamento real daqueles, acarretando uma simplificação ou limitação da realidade observada.

A principal motivação para a resolução de um problema de identificação se deve a facilidade em se adquirir dados de um processo, onde o avanço tecnológico na área de controle e automação nos permite o acesso a medições a uma alta taxa de amostragem. No entanto, estas informações precisam ser entendidas e processadas de alguma forma e, neste ponto, entra a identificação de sistemas que tem se mostrado uma ferramenta valiosa na engenharia, principalmente na análise dinâmica de plantas e processos, na detecção, diagnóstico, prognóstico de falhas e no processamento de sinais. Sendo esses fatores fonte de motivação para nos remeter a uma ferramenta matemática não convencional: as RBF, objetivando obter um modelo que

procure descrever e analisar o comportamento de uma planta de corrente de um motor de indução. As redes RBF são aproximadores universais, ou seja, possuem a capacidade de aproximação universal de dados dispersos em várias dimensões. Do ponto de vista teórico de aproximação de funções, as redes RBF possuem a propriedade de melhor aproximação, tal como definido por Chebyshev, ou seja, há sempre uma RBF que fornece o erro mínimo para uma determinada função a ser aproximada [Haykin 1999].

## **1.2 - Objetivos da pesquisa**

Este trabalho foi desenvolvido levando-se em conta os seguintes objetivos:

- Identificação de uma planta de corrente de um motor de indução não linear utilizando RBF;
- Analisar a representação em espaço de estados do sistema identificado com redes RBF e a realização de vários testes com diferentes modelos e análise dos resultados obtidos;
- O estudo sobre a estabilidade de sistemas identificados com redes RBF.

## **1.3 - Problema abordado**

O problema aqui abordado será: encontrar um modelo computacional que reproduza o comportamento dinâmico de uma planta de corrente de um motor de indução trifásico, utilizando redes RBF.

## **1.4 - Contribuições**

As principais contribuições deste trabalho são:

- A análise do desempenho das funções de base radial na identificação de uma planta de corrente de um motor de indução;
- Promover testes, uma vez identificado o sistema, para validação e análise do modelo obtido a partir da rede RBF utilizando-se a representação em espaço de estados.

- Verificar, a partir da análise dos resultados obtidos através de simulações, a existência de uma condição de estabilidade inerente às funções de base radial gaussianas.

## **1.5 - Organização do texto**

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No presente capítulo é feita uma breve introdução abordando um pouco do histórico sobre o desenvolvimento da identificação de sistemas, a motivação e o objetivo para o desenvolvimento desta pesquisa, o problema abordado e as principais contribuições.

Os principais conceitos de identificação de sistemas são apresentados no capítulo 2; no capítulo 3 tratamos das funções de base radial; no capítulo 4, é feita uma breve descrição de sistemas não lineares. O capítulo 5 mostra as etapas de um processo de identificação de sistemas, e a apresentação dos resultados previamente obtidos, bem como os devidos comentários; e finalmente serão apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

## CAPÍTULO 2

# IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

---

A teoria de identificação de sistemas dinâmicos avançou significativamente, dando ênfase tanto a aspectos conceituais quanto técnicos. A parte mais desenvolvida desta teoria diz respeito aos modelos lineares devido a sua simplicidade e a facilidade em obtê-los, sendo utilizados na aproximação do comportamento de sistemas em determinadas faixas de operação. No entanto, as maiorias dos sistemas reais são em algum grau não-lineares, limitando a utilização de modelos lineares. Para o caso em que não é possível obter uma boa aproximação do modelo devido à complexidade e a não linearidade do sistema, devemos utilizar um modelo não linear [Aguirre 2007 – vol. III].

A utilização de representações matemáticas dos modelos impulsionou a análise de sistemas dinâmicos (planta ou processo), desde que o sistema possa ser adequadamente descrito por uma aproximação. Representar um sistema físico por meio de uma equação matemática ainda é um grande desafio, mesmo para pesquisadores modernos que dispõem de recursos computacionais em abundância. Como alternativa, procuram-se construir modelos a partir de dados observados ou medidos.

Um *modelo* pode ser entendido como uma expressão ou um conjunto de regras que procuram descrever o comportamento dinâmico do sistema. Sendo *sistema* um objeto em que variáveis de diferentes tipos interagem e fornecem sinais observáveis, denominados *saídas*. As variáveis internas, denominadas de *estados*, representam a evolução temporal do sistema e são estimuladas através das *entradas* (acessíveis) e *perturbações* (não acessíveis).

É importante o entendimento de que o modelo desenvolvido na identificação de um determinado sistema representa uma aproximação do mesmo, ou seja, o que se pretende é conseguir um modelo matemático que represente o máximo de características do sistema físico real. A procura por tais modelos é uma necessidade para a grande maioria dos processos industriais, pois ao conhecermos o sistema poderemos controlá-lo adequadamente, daí o surgimento e a necessidade do processo de identificação de sistemas [Aguirre 2007 – vol. II].

Em identificação de sistemas geralmente estão disponíveis duas fontes de informações sobre o sistema a ser identificado: o conhecimento *a priori* e os dados medidos. Dependendo do nível de conhecimento sobre o sistema, o problema de identificação pode ser abordado de diferentes formas.

Se a identificação é baseada exclusivamente no conjunto de dados obtidos a partir de medições e assumindo que não se tem nenhum conhecimento sobre a dinâmica do sistema, o processo de identificação é conhecido como *modelagem caixa-preta*, no entanto, se as leis físicas que regem o processo são usadas para construir um modelo fenomenológico do sistema, temos a *modelagem caixa-branca*.

No entanto, se certo nível de conhecimento sobre o sistema é conhecido e utilizado para melhorar a modelagem empírica, temos uma *modelagem caixa-cinza*. Contudo, algum entendimento do sistema pode facilitar a identificação, tais como: a ordem do sistema, resposta, período de amostragem, estabilidade, faixa de operação, atraso de transporte, grau de linearidade, e características básicas da não linearidade [NØrgaard et al. 2003].

Em muitos casos usamos técnicas de identificação para a obtenção de modelos que descrevem o comportamento de um sistema. O que se procura descrever com tais modelos é a relação causa / efeito entre as variáveis de entrada / saída.

A motivação para o estudo de técnicas de identificação de sistemas nasce do fato de que geralmente não conhecemos as equações que descrevem a dinâmica de tal sistema e levantar essas equações dependendo da complexidade do sistema seria impraticável, por limitações de tempo e recursos [Aguirre, 2007].

## **2.1. Sistemas lineares**

Um sistema é dito linear se satisfizer o princípio da superposição (i.e. se atender as propriedades da *aditividade* e da *homogeneidade*), assumindo que o estado inicial é supostamente nulo.

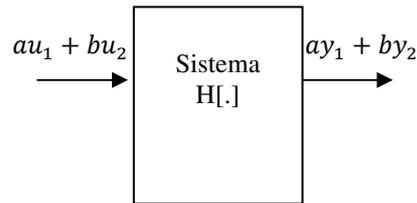


Figura 1 – Representação do princípio da superposição de um sistema linear, sendo  $u$  a variável de entrada do sistema e  $y$  a variável de saída.

Se o sistema não atender qualquer uma dessas propriedades o mesmo é dito *não-linear*. Ou seja, sistemas não-lineares são sistemas cuja saída é uma função não linear de sua entrada.

Muitos dos sistemas físicos reais são não-lineares, em maior ou menor grau, sendo que uma parte não desprezível desses admite uma representação de suas propriedades em termos lineares [Nelles, 2001].

O sistema linear é dito invariante no tempo quando um deslocamento temporal na entrada provoca o mesmo deslocamento na saída. E causal, se a saída num determinado instante não depende de entradas futuras.

### 2.1.1. Sistemas monovariáveis e multivariáveis

*Sistemas monovariáveis*, também conhecidos como sistemas SISO (*Single Input Single Output*), são aqueles que possuem apenas uma entrada e uma única saída. Por sua vez; *sistemas multivariáveis*, também conhecidos como sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), são aqueles que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas.

### 2.1.2. Sistemas de tempo contínuo e de tempo discreto

Em um *sistema de tempo contínuo* os estados, as entradas e as saídas são definidas para todo instante de tempo  $t \in \mathbb{R}$ . Enquanto em um *sistema de tempo discreto* os estados, as entradas e as saídas são sinais discretos no tempo. Na figura seguinte temos um exemplo de uma função de tempo contínuo (figura a) e tempo discreto figura (b):

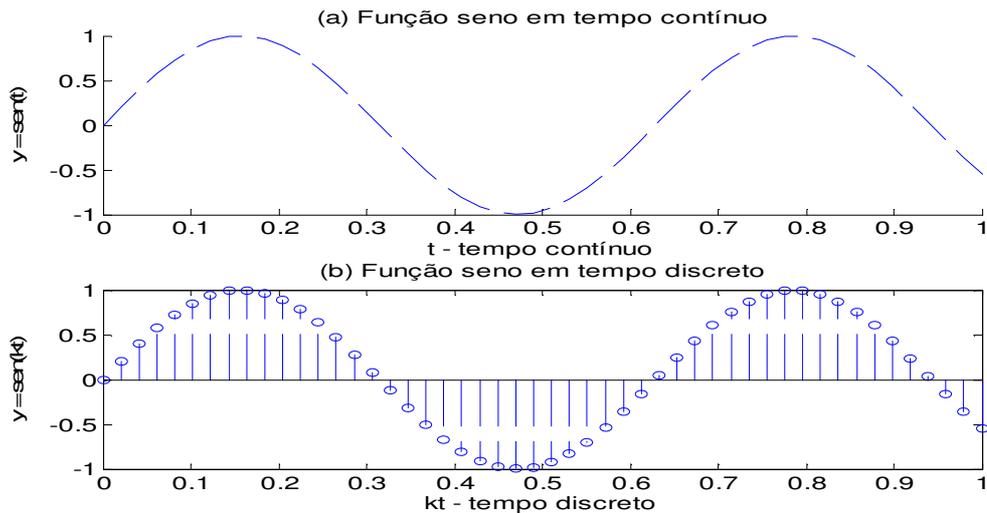


Figura 2 – Um exemplo da função  $y = \text{sen}(x)$  sendo representada em tempo contínuo e em tempo discreto.

### 2.1.3. Descrição matemática de sistemas lineares

Existem duas descrições matemáticas básicas para sistemas lineares, a saber, a *função de transferência* e a representação em *espaço de estados*. É possível converter da representação de função de transferência para a de espaço de estado e vice-versa com facilidade, bem como converter de tempo contínuo para tempo discreto e vice-versa [Aguirre, 2007].

A função de transferência de um sistema linear contínuo é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, mantida todas as condições iniciais nulas. Ou seja, a função de transferência de um sistema representa a relação que descreve a dinâmica de tal sistema [Dorf & Bishop, 1998].

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1)$$

onde  $Y(s)$  representa a transformada de Laplace da saída e  $U(s)$  a transformada de Laplace da entrada.

Têm-se também a representação de sistemas dinâmicos lineares em modelos discretos, onde a função de transferência discreta é a relação entre a transformada  $Z$  da saída pela transformada  $Z$  da entrada [Coelho & Coelho, 2004]. Ou seja:

$$G(z) \triangleq \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (2.2)$$

onde  $Y(z)$  representa a transformada  $Z$  da saída e  $U(z)$  a transformada  $Z$  da entrada.

Para o caso discreto, a representação em espaço de estados de um sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sendo que  $\mathbf{x}(k) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado  $n$ -dimensional no instante  $k$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor de entradas no instante  $k$ ,  $\mathbf{y}(k) \in \mathfrak{R}^p$  é o vetor  $p$ -dimensional das saídas no instante  $k$  e  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  e  $\mathbf{H}$  são matrizes constantes de dimensões definidas [Aguirre, 2007].

A seqüência de entrada  $u(k)$  e a de saída  $y(k)$ , são medidas específicas a cada período de amostragem. Em modelos discretos, deve-se selecionar um período de amostragem específico  $T_s$ , para cada aplicação em particular. A estabilidade de um sistema discreto é determinada pelos autovalores da matriz  $\mathbf{\Phi}$ . Se os valores destes forem menores do que a unidade o sistema é dito estável.

#### 2.1.4. Sistemas determinísticos e estocásticos

Um sistema é classificado como *determinístico* se, as variáveis e parâmetros são tratados como sendo determinísticos, ou seja, não são variáveis aleatórias. A desvantagem deste tipo de sistema é que, no caso de valores médios, não se consegue observar ou considerar o impacto individual que cada valor do dado provoca no sistema,

e isto pode ser bastante significativo. Por outro lado, os sistemas *estocásticos* lidam com diversas fontes de incerteza por meio do uso de variáveis aleatórias como entradas, as quais levam a saídas aleatórias.

Em geral sistemas estocásticos são analisados em função das propriedades estatísticas dos sinais, em sendo assim, as saídas de sistemas estocásticos devem ser tratadas como estimativas estatísticas das características reais do mesmo (tais como: a média e a variância). Normalmente são mais complexos que os modelos determinísticos, pois a presença de ruídos pode fazer com que um sistema estocástico, submetido a um mesmo sinal de entrada, possa apresentar saídas distintas [Aguirre, 2007].

A identificação de sistemas é fundamentada a partir de dados obtidos em observações ou experimentos realizados no sistema real a ser modelado. No caso em que o modelo é baseado em um vetor de parâmetros o *método dos mínimos quadrados* — desenvolvido por Gauss — permite a estimação desse vetor.

A motivação para resolução de um problema linear, utilizando o método dos mínimos quadrados, é detalhada após a introdução de alguns conceitos básicos.

### 2.1.5. Método dos Mínimos quadrados para a identificação de sistemas lineares

Em geral num problema de mínimos quadrados, a saída de um modelo linear  $y$  é dada por uma expressão do tipo:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 + b_1 u(k-d) + b_2 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad (2.4)$$

A partir da equação anterior, podemos tirar a seguinte relação:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 + b_1 u(k-d) + b_2 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad (2.5)$$

Assumindo o conjunto de dados medido entrada / saída na forma vetorial por:

$$(2.6)$$

$$\varphi(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n), u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]^T$$

sendo  $\varphi(k) \in \mathfrak{R}^{n+m}$  o vetor de regressão ou de regressores.

Para simplificar a notação, define-se:

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]^T \quad (2.7)$$

como o vetor de parâmetros que possui dimensão  $(n+m) \times 1$ . De forma que se tem  $(n+m+1)$  parâmetros a estimar, e para determinar os  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m$ ), devemos utilizar as medidas de entrada e saída do processo.

Considerando-se o modelo mostrado, e admitindo-se a realização de  $N$  medidas suficiente para determinar o vetor de parâmetros  $\theta(k)$ , têm-se:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^T(0) \\ \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N-1) \end{bmatrix} [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad \dots \quad b_m] \quad (2.8)$$

A representação matricial simplificada da equação anterior é:

$$\bar{y} = \Phi \theta \quad (2.9)$$

Onde a matriz de observação é:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(-1) & -y(-2) & \dots & -y(-n) & u(-d) & u(-d-1) & \dots & u(-d-m) \\ -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-n) & u(1-d) & u(-d) & \dots & u(1-d-m) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-n) & u(2-d) & u(1-d) & \dots & u(2-d-m) \\ \vdots & \vdots \\ -y(N-2) & -y(N-3) & \dots & -y(N-n-1) & u(N-d-2) & u(N-d-3) & \dots & u(N-d-m) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Sendo  $d = n + m$  o atraso de transporte da planta, e o vetor saída é dado por:

$$\bar{y}(k) = [y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1)]^T \quad (2.11)$$

Para estimar o vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta$ , é necessário que  $N \geq m + n$ . Se a matriz  $\Phi$  for quadrada e não singular, ou seja, admitir inversa, então podemos resolver o sistema através de:

$$\theta = \Phi^{-1}\bar{y} \quad (2.12)$$

No entanto, geralmente  $N$  é maior do que  $n+m$ , indicando que temos mais observações do que parâmetros de ajuste. Neste caso uma solução exata que satisfaz a todas as  $m$  equações não é possível. Então em vez de encontrarmos uma solução exata podemos encontrar uma solução aproximada,  $(\theta = \hat{\theta})$  minimizando a *soma do erro médio quadrático* definido como:

$$J(\theta) = e^T e = (y - \Phi\theta)^T (y - \Phi\theta) \quad (2.13)$$

Sendo  $e = y - \Phi\theta$  o vetor erro produzido por uma escolha específica de  $\theta$ , e a função custo  $J(\theta)$  uma função quadrática com um mínimo, quando  $\theta = \hat{\theta}$ .

Assumindo a função custo como uma função quadrática, então a previsão ideal, para um novo valor do vetor de parâmetros estimados será dada pela minimização do funcional:

$$J(\theta) = e^T e$$

Derivando  $J$  em relação a  $\theta$  e igualando-se a zero, temos:

$$-y\Phi^T - y\Phi^T + 2\Phi^T\Phi\theta = 0 \Rightarrow 2\Phi^T\Phi\theta = 2y\Phi^T \quad (2.14)$$

Cujo resultado é:

$$\theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y \quad (2.15)$$

onde:

$\theta = \hat{\theta}$ : representa o vetor dos parâmetros estimados e  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T = \Phi^+$  a matriz de Moore-Penrose ou pseudo inversa.

Veremos mais adiante como a rede RBF utiliza o método dos mínimos quadrados para a determinação de seu vetor de pesos.

Para exemplificar o método dos mínimos quadrados, podemos considerar um processo definido pelo seguinte modelo matemático, o qual expressa a relação entre o comprimento de uma mola e uma força aplicada:

$$y = \theta_0 + \theta_1 u \quad (2.16)$$

onde  $\theta_0$  representa o sistema em repouso e  $\theta_1$  (a constante da mola) representa a mudança no comprimento quando uma força é aplicada. Para identificarmos os parâmetros  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , aplicamos duas forças distintas e, ao observarmos o comprimento da mola, obtivemos a seguinte tabela:

Experimento	Força (N)	Comprimento da mola (cm)
1	1,1	1,5
2	1,9	2,1
3	3,2	2,5
4	4,4	3,3
5	5,9	4,1
6	7,4	4,6
7	9,2	5,0

Tabela 1 – Dados de treinamento para o exemplo da mola acima.

O principal objetivo é estimar  $\theta_0$  e  $\theta_1$  de forma a minimizar a função custo  $J(\theta) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ , de forma que temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1,1 \\ 1 & 1,9 \\ 1 & 3,2 \\ 1 & 4,4 \\ 1 & 5,9 \\ 1 & 7,4 \\ 1 & 9,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,1 \\ 2,5 \\ 3,3 \\ 4,1 \\ 4,6 \\ 5,0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\Phi \cdot \theta = y$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{bmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \begin{bmatrix} 1,20 \\ 0,44 \end{bmatrix}$$

A figura seguinte mostra a reta que minimiza o erro quadrático.

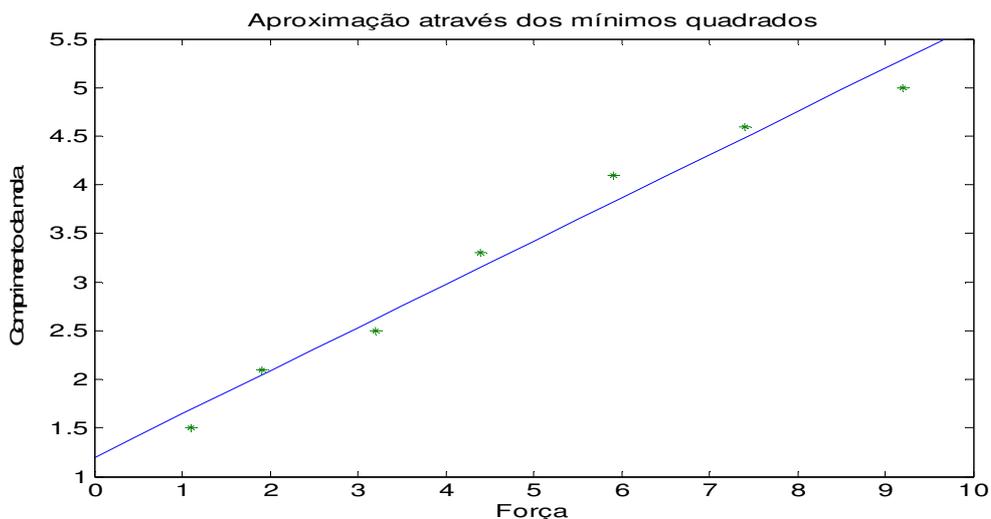


Figura 3 – aproximação dos dados observados através do método de mínimos quadrados. O gráfico representa o comprimento da mola (representado no eixo vertical) em função da força aplicada (representada no eixo horizontal).

Podemos concluir, a partir desse exemplo, que se aumentarmos o número de dados obtidos ou se os mesmos apresentarem ruídos de medição, o estimador encontrado fica susceptível a erros (conforme figuras abaixo). Uma forma de minimizar o erro é aumentando a ordem do estimador, ou seja, o número de regressores, de forma

que, ao aplicarmos um conjunto de teste, possa ser verificada uma capacidade de generalização por parte deste.

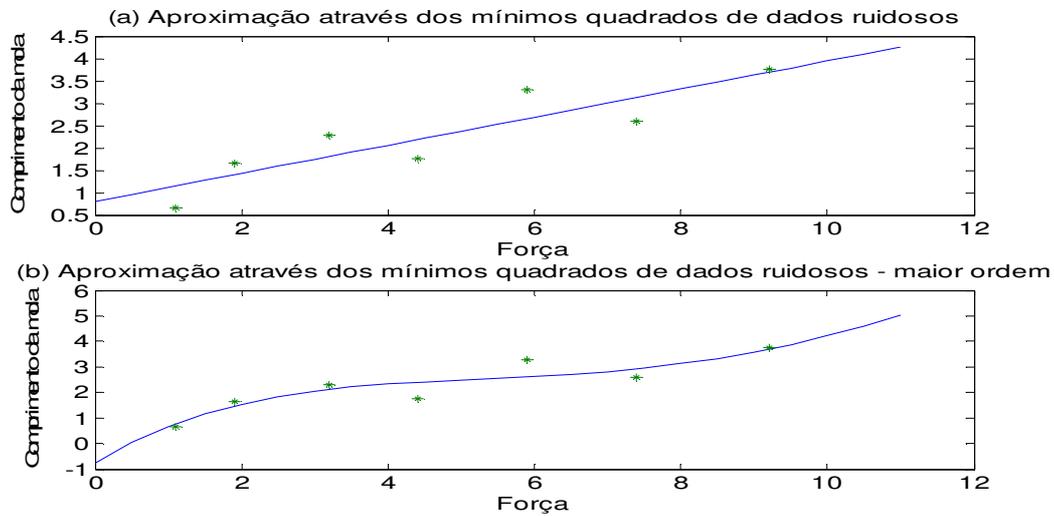


Figura 4 – aproximação dos dados observados acrescido de ruído e aproximados através do estimador anterior (a) e através de um estimador de 3ª ordem (b) através dos mínimos quadrados. Os gráficos representam respectivamente, o comprimento da mola (representado no eixo vertical) em função da força aplicada (representada no eixo horizontal).

A principal propriedade do modelo apresentado é que o mesmo é uma função linear nos parâmetros  $\theta_0, \dots, \theta_n$ . Embora os modelos lineares tenham um papel importante na identificação de sistemas — justamente devido a sua simplicidade e à sua forma de obtenção — aqueles modelos possuem determinadas limitações e não respondem eficientemente a determinados problemas [Jang, 1997].

O campo da engenharia na identificação de sistemas avançou significativamente com alguns trabalhos tais como: Åström (1971), Eykhoff(1974), Box & Jenkins (1976), Tikhonov & Arsenin (1977). Nesse período tivemos também o desenvolvimento de técnicas espectrais e de correlação aplicadas a análise de séries temporais, e ainda a expansão de funções de resposta ao impulso. No entanto, Billings, em um trabalho publicado em 1980, apresentou a necessidade da representação mais precisa das formas não lineares dos sistemas reais, dentre elas: os métodos de séries funcionais, séries de Volterra e técnicas no domínio da frequência, bem como os clássicos modelos de Wiener e Hammerstein.

Billings chama a atenção da dificuldade de se identificar sistemas não-lineares quando apenas um conjunto de informações está disponível, bem como a impossibilidade de recomendar apenas uma técnica capaz de fornecer soluções gerais e aceitáveis.

Apesar dessas dificuldades a identificação de sistemas não-lineares pode ser realizada de duas formas básicas: matematicamente de forma *analítica* ou através de implementações computacionais.

A *identificação analítica* tem como ponto de partida encontrar uma equação diferencial ou a diferença que governa o sistema dinâmico.

A *identificação computacional de sistema* envolve coleta estatística das características de entrada-saída da planta e sua utilização na determinação de um modelo que aproxime o comportamento observado. Esta tarefa pode ser representada pelas seguintes quatro etapas básicas:

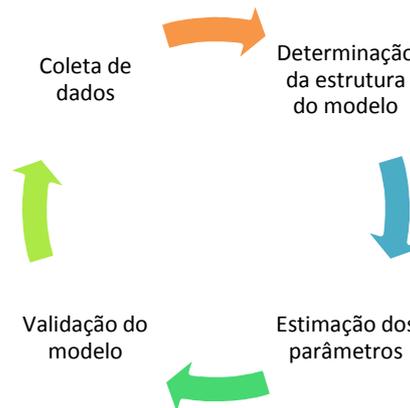


Figura 5 – Etapas de um processo de identificação.

A *coleta de dados* constitui a primeira etapa de uma identificação de sistemas, visto que propicia a aquisição do conjunto de medidas do processo. Nesta etapa devemos atentar para alguns problemas que estão diretamente relacionados, tais como: o período de amostragem, a escolha dos sinais de excitação e a correta execução dos testes, dentre outros.

Na etapa seguinte temos a *determinação da estrutura ou do modelo* adequado ao sistema observado, nesta fase é importante algum conhecimento *a priori* sobre o sistema que será identificado.

A *estimação dos parâmetros* pode ser formulada como um problema de otimização, onde o melhor modelo é o que se adapta a determinados critérios. Geralmente começa com a escolha do algoritmo que será utilizado, e finalmente temos a *validação*, em que devemos saber se o modelo escolhido atende aos requisitos. Neste caso, podemos utilizar a comparação entre a resposta do sistema real e a resposta obtida do modelo estimado.

Avançando na teoria de identificação de sistemas no período compreendido entre 1970 a 1985 tivemos uma consolidação da teoria e da prática em identificação; com o surgimento do computador, passou-se ao desenvolvimento de *softwares* específicos para o tratamento de problemas na área [coelho & Coelho, 2004]

Na década de 80, com o desenvolvimento da teoria de aproximação de funções, foram apresentadas funções matemáticas derivadas da teoria de regularização de Tikhonov, chamadas de funções de base radial (RBF) [Poggio & Girosi, 1990], as quais possuem a capacidade de serem aproximadores universais de funções.

No presente estudo iremos investigar e analisar a identificação de um sistema não-linear utilizando uma rede RBF.

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos introdutórios sobre a teoria de identificação de sistemas, bem como a utilização do método dos mínimos quadrados para a identificação de modelos lineares. A extensão destes conceitos para modelos não lineares será explanada no capítulo seguinte. Nos capítulos subsequentes apresentaremos como uma RBF utiliza mínimos quadrados no ajuste dos seus parâmetros na fase de treinamento.

# CAPÍTULO 3

## SISTEMAS NÃO LINEARES

---

### 3.1 – Introdução

Primeiramente apresentaremos de forma resumida as principais características dos sistemas não lineares, principalmente o comportamento dinâmico desses. Em seguida abordaremos alguns conceitos básicos, os quais serão úteis na compreensão textual apresentada ao longo deste capítulo e dos seguintes. Finalmente, descreveremos a planta não linear a ser identificada, utilizando a rede de função de base radial descrita no capítulo seguinte.

De modo geral, analisar e interpretar sistemas dinâmicos não-lineares envolve a combinação de equações lineares, não lineares e componentes externos agindo sobre o sistema, formando um modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico deste.

A representação de sistemas dinâmicos através de modelos matemáticos está presente em diversas áreas, principalmente a tecnológica. Em capítulos anteriores abordamos a representação de sistemas lineares, porém, existem determinadas situações onde a utilização de modelos lineares não apresenta um resultado satisfatório à resposta dinâmica de um sistema, devido principalmente à complexidade envolvida ou pela necessidade de um modelo mais sofisticado. Nesses casos, modelos não lineares devem ser utilizados [Aguirre 2007 – vol. III].

As técnicas em análise de modelos não lineares ainda carecem de uma teoria geral e unificada. Dependendo do tipo de não linearidade, e do modelo, poderemos ter diversas técnicas e métodos de análise. No entanto, apesar de não podermos representar todos os sistemas não lineares por meio de uma expressão matemática, tal como a função de transferência, existem algumas propriedades gerais do comportamento de tais sistemas que poderemos analisar, tais como: retrato de fase, equilíbrio e estabilidade, ciclo limite, teoria da variedade central, dentre outros [ Vukic et al., 2003].

Se estivermos dispostos a aceitar essas informações *qualitativas*, em vez de fórmulas fechadas, existe uma quantidade considerável de informações que podemos aprender utilizando técnicas elementares.



pode conter informações apenas de uma vizinhança em torno deste, de forma que não prediz o comportamento global dos estados do sistema; a segunda limitação, é que a dinâmica de um sistema não linear é muito mais abrangente do que a de um sistema linear - existem fenômenos essencialmente não lineares que podem ocorrer apenas na presença da não-linearidade, tais como: tempo de escape finito, múltiplos e isolados pontos de equilíbrio, ciclos limite, caos, dentre outros e que, portanto, não podem ser descritos por modelos lineares. [Khalil, 2002].

Considerando o sistema definido em (3.1), ele deve satisfazer as seguintes condições para viabilizar a aplicação de boa parte das ferramentas de análise a serem apresentadas:

- Existência: deve existir pelo menos uma solução para o sistema;
- Unicidade local: deve existir apenas uma solução para todo valor suficientemente pequeno de  $k$ ;
- Unicidade global: deve existir apenas uma solução para todo  $k > 0$ ;
- Bom condicionamento: deve existir apenas uma solução para todo  $k > 0$ , e esta solução deve depender continuamente da condição inicial.

A existência e a unicidade de soluções da função não são garantidas se algumas limitações não forem impostas à mesma. A limitação requerida é que os vetores-colunas  $n$ -dimensionais de funções não-lineares sejam localmente Lipschitz.

Uma função  $f$  é definida localmente Lipschitz se para uma variável  $x(k)$  em torno do ponto  $x(0) = x_0$  satisfizer o critério de Lipschitz:  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$  em uma vizinhança de  $x_0$ , onde  $L$  é uma constante positiva conhecida como “Constante de Lipschitz” e a norma é euclidiana. É importante destacar que o critério de Lipschitz garante que a função é limitada e possui uma única solução para uma determinada condição inicial  $x(0) = x_0$  [ Vukic et. al., 2003].

### 3.3. Sistemas de segunda ordem

Neste capítulo vamos nos concentrar em equações não-lineares da forma:

$$x(k+2) = f(x(k), x(k+1)) \quad (3.4)$$

Na equação anterior é comum chamarmos os valores de  $x$  de estados, e suas equações a diferenças as quantidades que em cada instante caracterizam as fases ou evolução do sistema; o plano determinado por essas duas variáveis é chamado de *plano* ou *retrato de fase*.

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Um sistema desse tipo, se a variável tempo não é explicitada, é chamado de *sistema autônomo*. Assume-se que  $f_1$  e  $f_2$  sejam continuamente diferenciáveis, ou seja, possuem derivadas parciais de primeira ordem em todo o plano. Além disso, assumindo a existência de soluções para sistemas em que o tempo inicial for um número qualquer, sendo  $(x_1(0), x_2(0))$  qualquer ponto no plano de fase, então existe uma única solução do tipo:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Da equação (3.5) tal que  $x_1(k_0) = x_1(0)$  e  $x_2(k_0) = x_2(0)$  Se as funções  $x_1(k)$  e  $x_2(k)$  resultantes não forem constantes, então a equação (3.6) definirá uma curva no plano de fase a qual chamamos de *trajetória* do sistema.

Como resultado dessas considerações, no máximo uma trajetória passa por cada ponto do plano de fase. Além disso, a direção induzida por um aumento em  $k$  ao longo de uma dada trajetória é a mesma para todas as parametrizações. Uma trajetória é uma curva orientada e sua orientação é intrínseca. Usaremos ao longo do presente trabalho um campo vetorial para indicar a direção na qual cada trajetória é percorrida conforme o sistema evolui.

A única exceção será o ponto onde  $f(x(k)) = x(k)$ . Esses pontos são chamados de pontos fixos. Em tais pontos o teorema de unicidade garante apenas que a solução única é a solução  $x_1(k) \equiv x_1^*(k)$  e  $x_2(k) \equiv x_2^*(k)$ . Uma solução constante não define uma trajetória e portanto nenhuma trajetória passa por um ponto fixo.

Para o esboço da evolução de um sistema dinâmico não-linear devemos analisar as trajetórias próximas aos seus pontos de equilíbrio, ou seja, a análise das soluções correspondentes a determinadas condições iniciais próximas a determinados pontos  $x^*$ . Em determinadas situações práticas estas trajetórias são de significativo interesse, conforme será visto na análise dos resultados obtidos. [Vidyasagar, 1993 & Wiggins, 1990].

A principal motivação para a determinação dos pontos de equilíbrio do sistema é devido ao fato de que o comportamento de um sistema não-linear, próximo aos seus pontos de equilíbrio, é aproximado por um sistema linear. Este sistema linear corresponde à expansão em série de Taylor do sistema (3.5) em torno de  $x = x^*$ , desprezando-se os termos não-lineares resultantes:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \\ f_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_i(x + \Delta x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \text{termos de ordem superior}$$

Desprezando-se os termos de ordem superior, tem-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{x} \tag{3.7}$$

Sendo  $\mathbf{J}$  conhecida como matriz *Jacobiana*:

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad (3.8)$$

Como  $\Delta \mathbf{x}$  representa a mudança do vetor  $\mathbf{x}$  na próxima iteração, temos:

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x}(k) = f(\mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{x}(k)) - f(\mathbf{x}(k)) \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{J}(k)$  e  $f(\mathbf{x}(k))$  são conhecidos na iteração  $k$ .

Outro importante conceito que utilizaremos no presente trabalho é o plano de fase, que é caracterizado como uma alternativa gráfica para análise do comportamento de sistemas lineares e não-lineares. O plano de fase consiste de um diagrama que representa as possíveis posições de um sistema, e as setas (vetores) indicam a mudança ou a direção a cada iteração, ou seja, o campo vetorial está sendo submetido a uma transformação imposta pela função  $f$ .

As características mais notáveis do plano de fase são as seguintes:

- Os pontos críticos, que são os pontos onde temos apenas uma solução para o sistema;
- A configuração geométrica das trajetórias em torno dos pontos críticos;
- A estabilidade ou instabilidade dos pontos críticos; isto é, se a evolução do sistema na vizinhança de tal ponto permanece próxima ao ponto crítico ou se afasta para outra parte do plano;
- Trajetórias fechadas, as quais correspondem a soluções periódicas;
- O fenômeno de ciclos limite, dentre outros.

Essas características são componentes essenciais do chamado plano de fase [Simmons, 2008]. Nosso objetivo, supondo que não possamos resolver explicitamente sistemas e equações não-lineares, é deduzir o máximo de informações possíveis sobre o plano de fase com base nas propriedades de  $f_1$  e  $f_2$ .

Como num plano de fase temos o mapeamento de muitos pontos, devemos ter uma idéia de seu movimento e evolução ao longo do tempo. Podemos pensar o retrato de fase como um campo de força, onde cada seta representa uma força empurrando o estado do sistema no sentido da seta (figura 5).

Suponha para a construção do plano de fase as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k+1) &= f_1(x_2(k)) \\ \Delta x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k))\end{aligned}\tag{3.10}$$

Podemos observar os sinais das funções  $f_1$  e  $f_2$  em diferentes regiões do plano. Note que se a função for positiva, então a sua derivada será positiva, de forma que a função será crescente. Assim, temos uma força apontando na direção de crescimento da função neste ponto. Ao mesmo tempo, podemos ter uma função negativa em determinado ponto, de forma que sua derivada é negativa e a função é decrescente. Assim, no mesmo ponto, podemos ter uma função crescente e uma função decrescente, cuja resultante será a evolução do sistema.

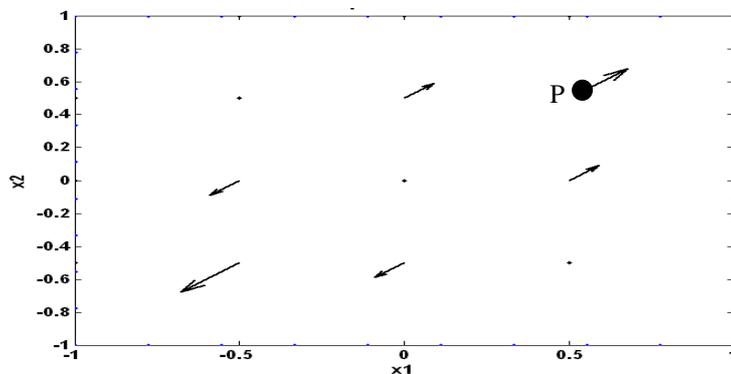


Figura 6 – Criando um retrato de fase. No ponto P, temos a resultante do somatório das duas forças, este processo pode ser repetido para qualquer ponto no plano de fase.

Como exemplo do raciocínio que iremos desenvolver, podemos analisar  $x(k)$ , como uma solução periódica de uma equação dinâmica, implica que sua derivada também será periódica. Portanto, a trajetória correspondente no sistema será uma solução fechada. Como um exemplo concreto da afirmação, podemos mostrar a equação

de Van der Pol que apresenta uma única solução periódica (se  $\mu > 0$ ) mostrando que seu sistema autônomo equivalente tem uma única trajetória fechada.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\mu(x_1^2(k) - 1)x_2(k) - x_1(k) \end{cases} \quad (3.11)$$

Essa equação representa um oscilador harmônico simples que depende da posição  $x$  de maneira não-linear [Monteiro,2006].

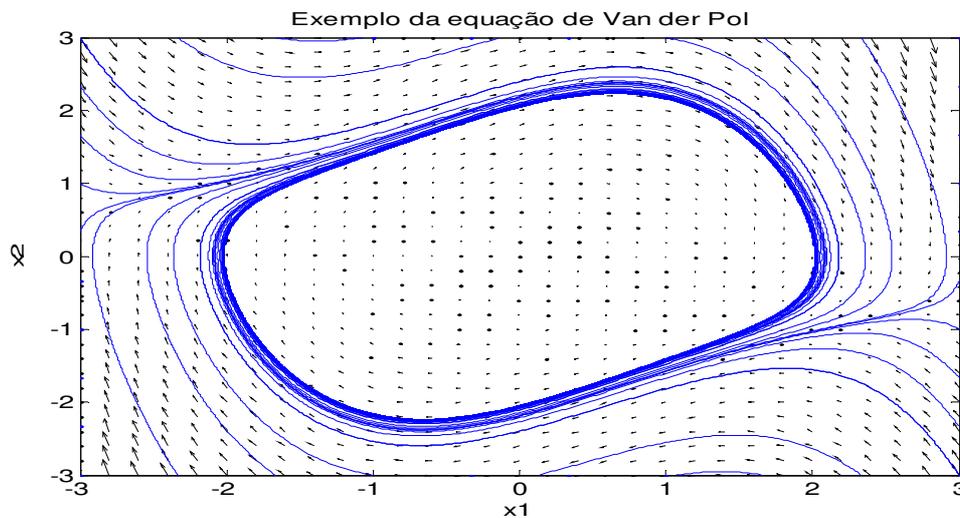


Figura 7 – Gráfico do retrato de fase da equação de Van der Pol com  $\mu = 0,5$ .

Todos os conceitos apresentados podem ser visualizados através deste exemplo. Na figura acima podemos ver o campo vetorial (setas) mostrando a evolução do sistema. Podemos também observar a solução periódica da equação através das linhas em azul e podemos ainda visualizar um fenômeno inerente aos sistemas não lineares: os ciclos limites, os quais, de acordo com Poincaré, tratam-se de uma trajetória fechada e isolada que pode aparecer no retrato de fase de sistemas não-lineares. As trajetórias próximas a um ciclo limite devem se aproximar ou se afastar dele.

O ciclo limite pode ser assintoticamente estável quando as trajetórias vizinhas, internas ou externas, se aproximam. Se as trajetórias vizinhas se afastam, o ciclo limite é instável. No entanto, se as trajetórias se aproximam por um lado, mas se afastam pelo outro, o ciclo é considerado semi-estável [Kalil, 1996].

Por se tratar de um sistema não-linear e apresentar comportamentos próprios de tais sistemas, conforme pode ser visto na figura 7. No entanto, para nossa análise, precisamos de outros conceitos envolvendo sistemas lineares e não-lineares, como os apresentados a seguir.

### 3.4. Estabilidade e pontos de equilíbrio.

Agora que abordamos os conceitos de plano de fase podemos apresentar o comportamento e a evolução dinâmica dos sistemas dinâmicos lineares que podem ser classificados em 08 (oito) categorias: 5 (cinco) casos não degenerados e 3 (três) degenerados.

#### 3.4.1 – Definições de estabilidade.

Conforme observamos, a linearização das equações no espaço de estados provêem algumas informações importantes sobre *estabilidade local* de um ponto de equilíbrio. No entanto, para investigarmos a estabilidade de um sistema não linear precisamos de algumas definições sobre estabilidade e convergência em um sistema estável.

No contexto de um sistema dinâmico autônomo não linear com pontos (estados) de equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$ , as definições de estabilidade e convergência são as seguintes [Khalil, 1992]:

- O estado de equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$  é dito *uniformemente estável* se, para uma determinada constante positiva  $\alpha$ , existirem outras constantes positivas  $\delta = \delta(\alpha)$  tal que a condição:  $\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$  implicar em  $\|\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}\| < \alpha \quad \forall k > 0$ . Esta definição nos afirma que a trajetória de um sistema ficará em torno de uma vizinhança de um ponto (ou estado) de equilíbrio.
- O estado de equilíbrio do sistema  $\bar{\mathbf{x}}$  é dito *convergente* se existir uma constante positiva, tal que a condição  $\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$  implicar em  $\mathbf{x}(k) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Esta definição nos diz que a evolução do vetor de estados  $\mathbf{x}(k)$  tende ao equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$  quando o tempo discreto  $k$  tende ao infinito.

- O estado de equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$  é dito *assintoticamente estável* se ele for estável e convergente.
- O estado de equilíbrio  $\bar{\mathbf{x}}$  é dito *globalmente assintoticamente estável* se ele for estável e todas as trajetórias do sistema convergirem para  $\bar{\mathbf{x}}$  quando  $k$  tende ao infinito. Esta definição implica que o sistema não possui outros estados de equilíbrio e todas as trajetórias do sistema são limitadas para  $k > 0$ , ou seja, o sistema evolui todos os seus estados para um estado estacionário a partir de qualquer escolha de condições iniciais.

### 3.4.2 – Pontos de equilíbrio

O ponto de equilíbrio de um sistema linear pode ser classificado de acordo com a topologia do plano de fase e sua estabilidade. Essas classificações são realizadas em função dos sinais dos autovalores, os quais são expressos a partir do traço e do determinante da matriz  $\mathbf{A}$  abaixo [Arrowsmith & Place, 1992]

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (3.12)$$

**Casos não degenerados:** Considere os sistemas lineares autônomos.

**Caso 1:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  possuem parte real negativa ( $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$ ) neste caso temos um *nó estável*, conforme podemos observar na figura 8-a.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

**Caso 2:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  possuem parte real positiva ( $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ ) neste caso temos um *nó instável*, conforme podemos observar na figura 8-b.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

**Caso 3:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são complexos conjugados e possuem parte real negativa ( $\lambda_1 = -2 + j2.64, \lambda_2 = -2 - j2.64$ ), temos um *foco estável*, conforme podemos observar na figura 8-c.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

**Caso 4:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são complexos conjugados e possuem parte real positiva ( $\lambda_1 = 1 + j2, \lambda_2 = 1 - j2$ ), temos um *foco instável*, conforme podemos observar na figura 8-d.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

**Caso 5:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são reais positivo e negativo ( $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ ), neste caso, temos um *ponto de sela*, conforme podemos observar na figura 8-e.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

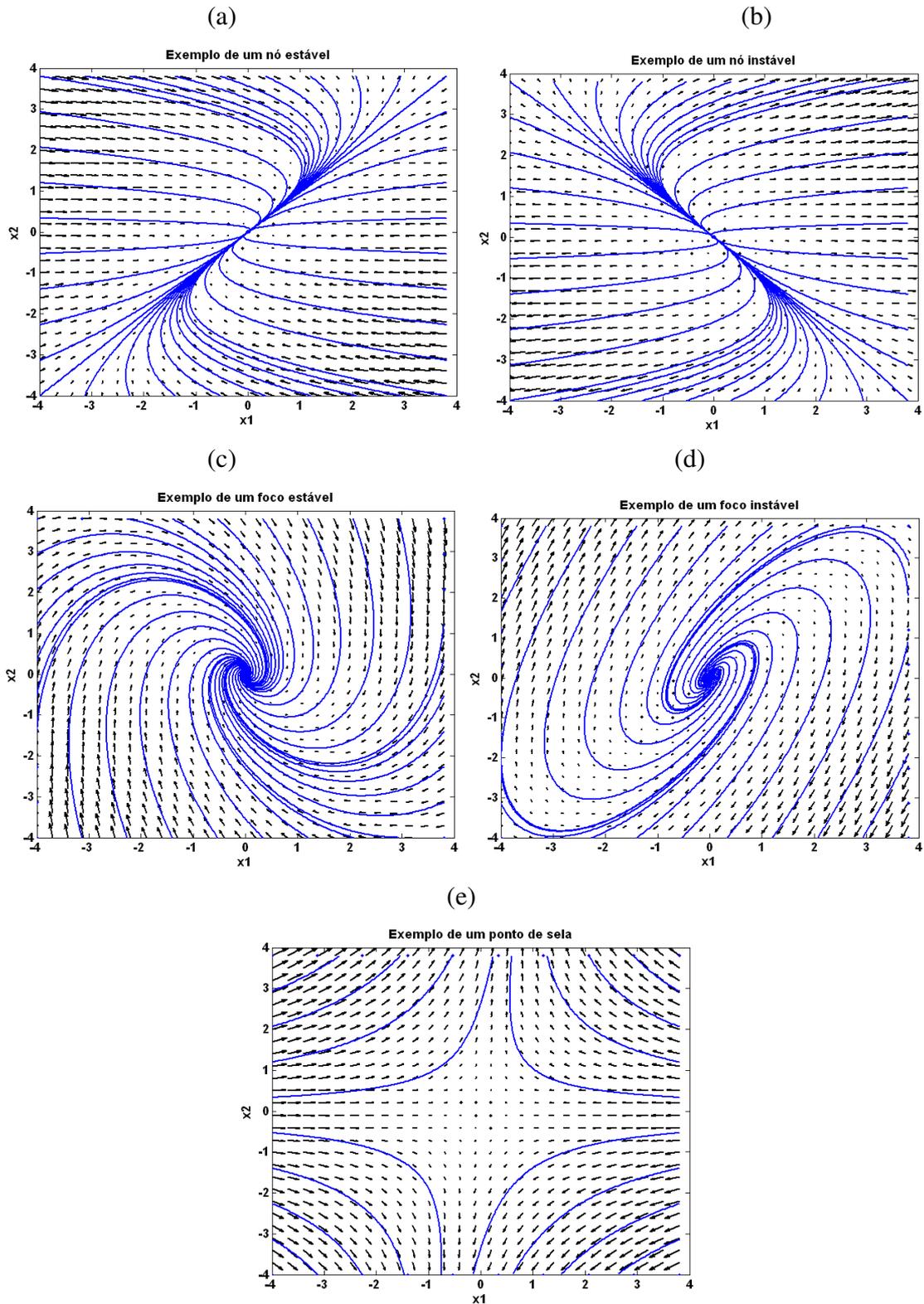


Figura 8 - Nas figuras, temos exemplos do comportamento de um sistema dinâmico linear de 2ª ordem, de acordo com os autovalores da matriz  $A$  em (3.12). Casos não-degenerados. Na figura

(a) temos um exemplo de um nó estável, na (b) um exemplo de um nó instável, na (c) um foco estável, na (d) um foco instável e finalmente, na figura (e), um exemplo de um ponto de sela.

Quando o ponto de equilíbrio (ou ponto crítico) é do tipo nó, todas as trajetórias se aproximam (se o nó é assintoticamente estável) ou se afastam (se o nó é instável) do ponto de equilíbrio do sistema.

Quando o ponto de equilíbrio é do tipo foco, todas as trajetórias se aproximam (se o foco é assintoticamente estável) ou se afastam (se o foco é instável) do ponto de equilíbrio do sistema.

No caso de um ponto de sela, as trajetórias tendem a se aproximar (autovalor negativo) e a se afastar (autovalor positivo).

Os dois autovalores definem a estabilidade do ponto de equilíbrio, e também, a forma das trajetórias na sua vizinhança, através dos autovetores associados no plano de fase [Zill, 2003]

**Casos degenerados:** Considere o sistema linear autônomo.

**Casos 1 e 2:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são iguais e positivos ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ) temos um *nó impróprio estável*, conforme podemos observar na figura 09-a (neste caso, podemos ter um nó impróprio estável ou instável, dependendo do traço da matriz  $\mathbf{A}$  se o mesmo for negativo; teremos um nó próprio estável e instável, em caso contrário). Podemos observar nas figuras 09-a e 09-b, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

**Caso 3:** Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são puramente complexos conjugados ( $\lambda_1 = j2, \lambda_2 = -j2$ ) temos um centro, onde as trajetórias formam elipses em torno do ponto de equilíbrio e a condição inicial determina a elipse que será percorrida pelo sistema. Podemos observar na figura 09-c.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

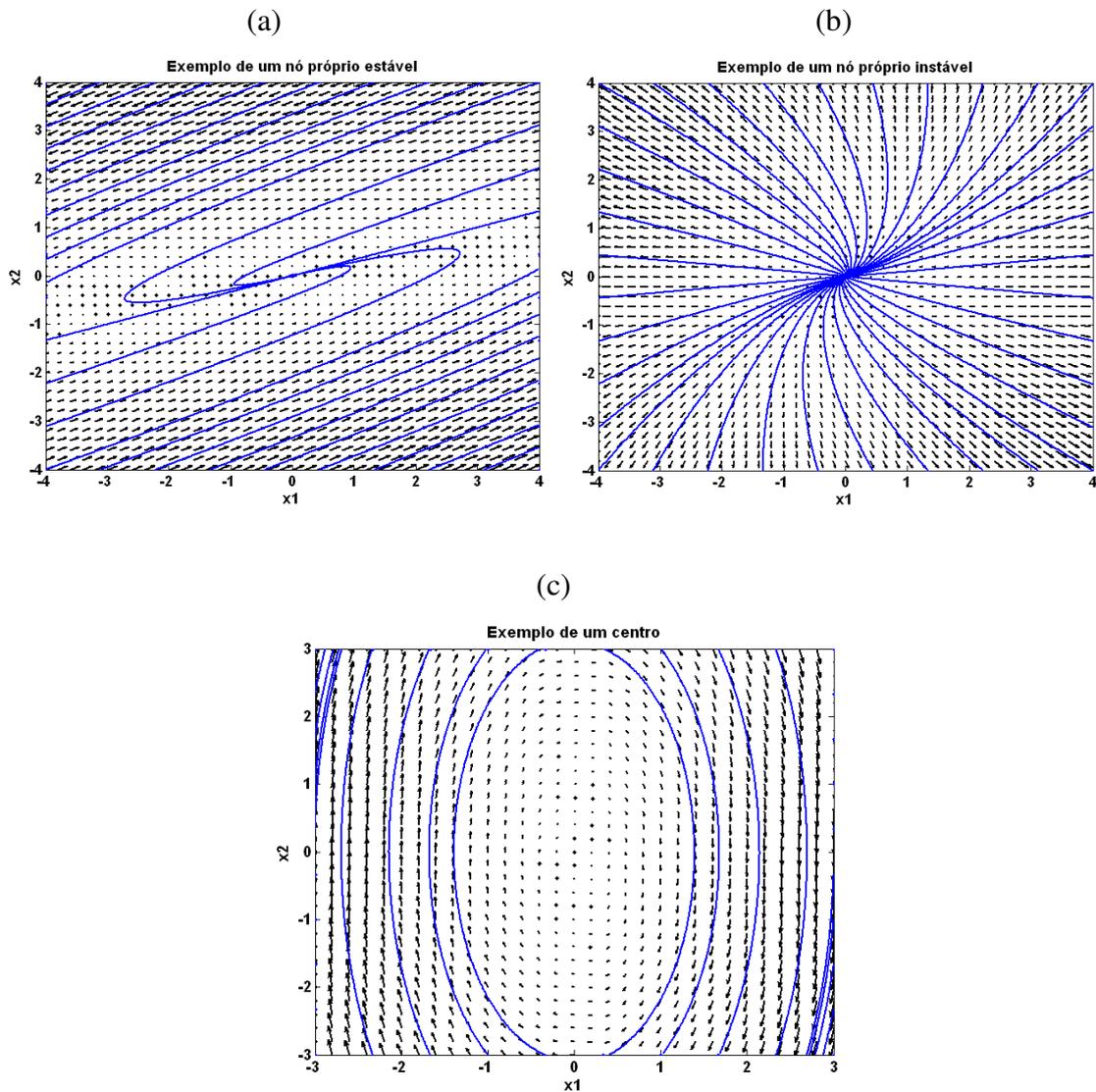


Figura 9 - Nas figuras acima, podemos observar os possíveis comportamentos de um sistema dinâmico linear de 2ª ordem, de acordo com os autovalores da matriz A. Casos degenerados. Na figura (a) temos um exemplo de um nó próprio estável, na (b) um nó próprio instável e finalmente, na figura (c), um exemplo de um comportamento de centro.

Conforme mencionado, o comportamento dinâmico de um sistema não-linear é bem mais complexo do que um sistema linear, embora o mesmo se comporte como um sistema linear próximo ao(s) ponto(s) de equilíbrio(s). Na figura 10 podemos observar o

comportamento do sistema (3.20) e podemos analisar algumas curvas geralmente chamadas de *separatrizes*, pois separam regiões de comportamentos diferentes e interceptam um dos eixos em dois pontos críticos (-2,0) e (2,0). Estes juntamente com o outro ponto crítico (0,0) são os únicos pontos críticos onde o sistema pode permanecer em repouso [Edwards & Penney, 1995].

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) = f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) &= -5x_1(k) - 2x_2(k) + \frac{5}{4}u^3(k) = f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

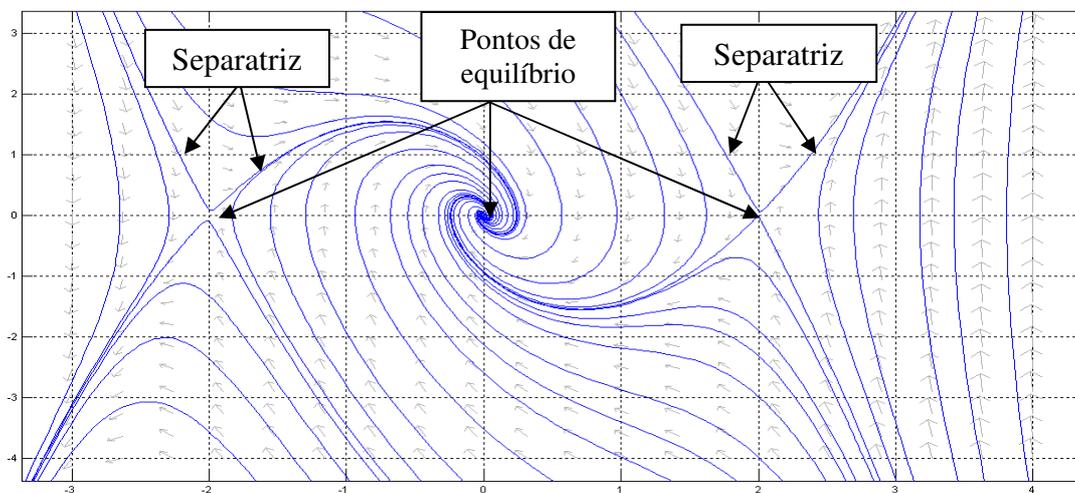


Figura 10 – Retrato de fase para o sistema não linear de 2ª ordem (3.20).

Ao linearizarmos o sistema (3.20), utilizando os conceitos apresentados em (3.10), ou seja, utilizando o conceito da matriz *Jacobiana* avaliada no ponto de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -4x_1(k) + u^3(k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A figura seguinte mostra o comportamento do sistema linearizado próximo aos seus pontos de equilíbrio.

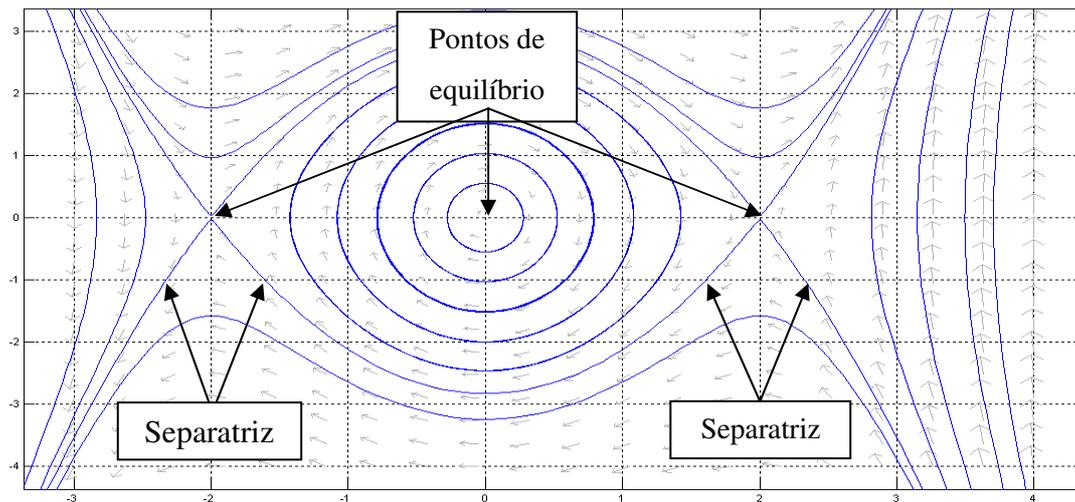


Figura 11 – Trajetórias linearizadas do sistema apresentado em (3.21).

No entanto, o principal objetivo aqui foi apresentar os conceitos básicos de análise de sistemas lineares e não-lineares através do retrato de fase. Estes conceitos serão extremamente importantes na análise do comportamento das funções de base radial, utilizadas para a identificação do sistema proposto.

### 3.5 – O motor de indução

O motor de indução é o motor de corrente alternada: CA mais utilizado, devido principalmente a sua simplicidade, construção robusta e baixo custo de fabricação. Estas características do motor de indução resultam do fator de ser o rotor uma unidade auto-suficiente que não necessita de conexões externas. O nome motor de indução é derivado do fato de serem *induzidas* correntes alternadas no circuito do rotor, pelo campo magnético do estator.

A construção do estator do motor de indução é praticamente igual à do estator do motor síncrono, mas os seus rotores são completamente diferentes. O rotor do motor de indução é um cilindro laminado, com ranhuras na superfície. Os enrolamentos colocados nessas ranhuras podem ser de dois tipos: *gaiola*, em que barras de cobre são unidas em cada extremidade por um anel de cobre ou de bronze, colocando o rotor em curto circuito; e o *bobinado*, em que bobinas são colocadas nas ranhuras. O entreferro entre o rotor e o estator é muito pequeno, para se obter a máxima intensidade de campo.

Em qualquer tipo de rotor, o princípio básico de funcionamento é o mesmo: o campo magnético girante, gerado no estator, induz uma força eletromotriz induzida, estabelecendo um campo magnético e gerando uma ação mútua entre os dois campos, fazendo o rotor girar [Valkenburgh & Neville vol. 5, 1983].

No motor de indução trifásico, o enrolamento trifásico é responsável pelo campo girante, o rotor sofre indução do campo e tenta acompanhá-lo. No estator são montados grupos de bobinas para cada fase, posicionadas de modo que tenham uma defasagem de 120° entre si [Nascimento Júnior, 2007].

O surgimento de novas tecnologias em eletrônica de potência e em processadores digitais de sinais, tem viabilizado a implementação de estratégias de controle cada vez mais sofisticadas para os motores de indução [Leonhard, 1996]. Estas novas técnicas procuram atender desempenhos dinâmicos cada vez mais exigentes mas, invariavelmente, sua implementação necessita que os parâmetros elétricos do motor sejam conhecidos. Além disso, a precisão dos controles, calculados a partir dos dados de placa, não é suficiente para a maioria das aplicações. Por isso, tem sido problemático combinar um inversor de um fabricante com um motor de indução de outro [Bünte & Grotstollen, vol 5, 1993]. Esse fato tem exigido que os inversores comerciais tenham incorporado a capacidade de identificação do motor, ou seja, a estimação de seus parâmetros elétricos.

A identificação dos parâmetros do motor pode ser efetuada nas formas *off-line* e *on-line*. A identificação *on-line* pressupõe que o motor esteja girando, o que leva a modelos não lineares bastante complexos e exige que a velocidade do motor seja medida com grande precisão [Borsting, Knudsen & Vadstrap, vol 1, 1995]. Por outro lado, os métodos *off-line* podem ser realizados com o motor parado, evitando as incertezas devidas à medição de velocidade e levando a modelos bastante simples, o que permite a aplicação de métodos padrão de identificação de sistemas.

Visando a identificação da planta de corrente de um motor de indução, utilizaremos o inversor de frequência como elemento de excitação do motor, ou seja, o sinal que alimenta o motor é modulado por largura de pulsos (PWM - Pulse Width Modulation).

### 3.5.1 – O acionamento do motor de indução:

O módulo de acionamento pode ser dividido em duas partes:

- Motor de indução;
- Conversor de frequência.

#### Motor de indução

O motor de indução da plataforma possui as seguintes características:

Motor de indução trifásico marca WEG;

Potência: 1,5 CV;

Número de Pólos: 4;

Velocidade: 1720 rpm;

Rendimento: 79,5 %;

Fator de Serviço 1,15;

Fator de Potência: 0,84;

Tensão: 220 V / 380 V

Corrente: 4,43 A / 1,56 A

#### Conversor de frequência

O Conversor de frequência é composto de cinco partes: retificador, filtro capacitivo, circuito de pré carga, drivers e inversor, conforme é apresentado na Figura 12.

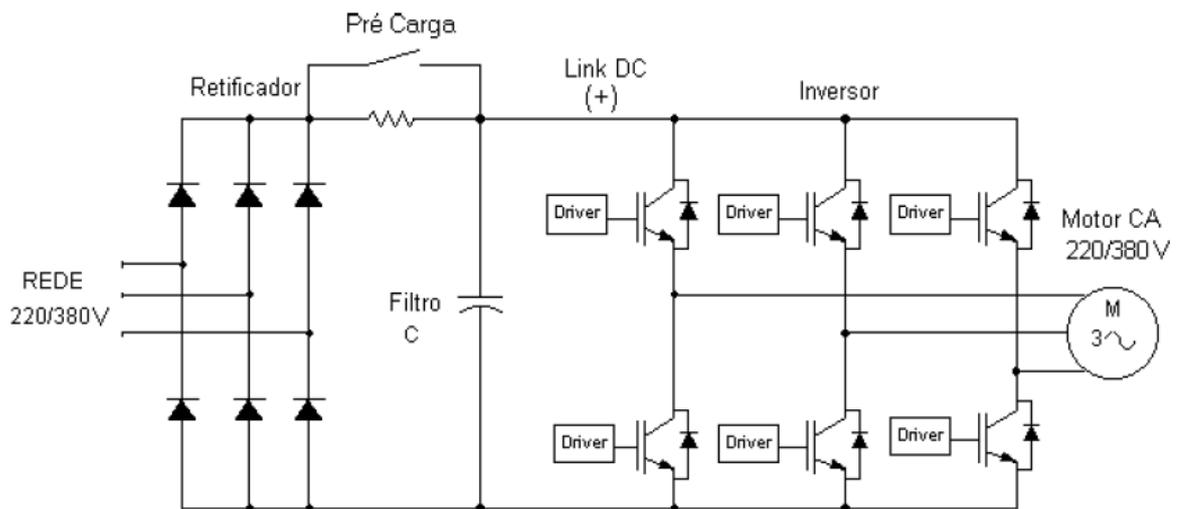


Figura 12 – Diagrama simplificado do inversor de frequência

O retificador realiza a transformação da tensão alternada trifásica (que alimenta o módulo) para tensão contínua, a qual é filtrada pelo banco de capacitores. O circuito de pré carga permite a redução do pico de corrente na carga inicial dos capacitores do filtro, por meio da conexão de uma resistência em série, a qual é depois curto circuitada para operação normal do conversor de frequência. A plataforma está configurada para trabalho em 220 V, operando com o motor em ligação triângulo. O Inversor PWM é composto por um módulo contendo IGBTs (*Insulated Gate Bipolar Transistor*), os quais recebem o comando de acionamento por meio da modulação PWM gerada pela interface.

O sistema de aquisição de medidas é composto por uma placa de conversão de sinal analógico – digital, que permite a aquisição das medidas de diversos sinais necessários na utilização da identificação proposta.

Os sinais medidos são: correntes e tensões trifásicas do estator. As medidas das correntes são realizadas na plataforma através de sensores de modelo ADAM-3968 de fabricação Advantech. Estes sensores fornecem em sua saída um valor em tensão proporcional à corrente medida. Na plataforma, esses sensores são utilizados para a aquisição das correntes das fases do motor de indução.

Neste capítulo foram apresentadas as principais características dos sistemas lineares e não lineares, tais como: retrato de fase, ponto fixo, linearização, dentre outros.

Apresentamos a construção do plano de fase de vários exemplos, onde cada variável é desenhada ao longo de seu eixo; determinamos também a estabilidade dos estados de equilíbrio através da análise dos gráficos apresentados e uma breve introdução teórica sobre a planta a ser modelada, bem como suas principais características técnicas. Descrevemos ainda, o conversor de frequência utilizado no acionamento do motor de indução.

No capítulo seguinte, descreveremos a ferramenta matemática que será utilizada na aproximação da função que descreve a planta de corrente do motor de indução.

# CAPÍTULO 4

## REDES DE FUNÇÕES DE BASE RADIAL - RBF

---

### 4.1 – Introdução

Métodos de regressão e aproximação de funções têm conquistado mais atenção recentemente, não somente na matemática, mas em diversas áreas do conhecimento tais como: engenharias, geofísica, processamento de sinais e imagens, computação gráfica, teoria de aprendizagem de máquina, redes neurais, mineração de dados, dentre outras.

A teoria de aproximação de funções consiste em aproximarmos uma função multivariada  $f(.)$  por uma função de aproximação  $\hat{f}(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ , dado um número fixo de parâmetros  $\mathbf{w}$ , onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores. Sendo assim, existem dois aspectos importantes do modelo a serem definidos: a função  $\hat{f}(\cdot)$  e os parâmetros do vetor  $\mathbf{w}$ .

Escolhida uma função  $\hat{f}$  específica, o problema se reduz a determinar o vetor de parâmetros  $\mathbf{w}$  que fornecem uma melhor aproximação da função  $f(.)$  para um conjunto de dados  $\mathbf{x}$ .

Sendo assim, o problema se resume a coletar dados de entrada e saída do modelo a ser identificado e aplicá-los no processo de definição dos parâmetros  $\mathbf{w}$  do modelo de aproximação.

A motivação no uso das funções de base radial na teoria de aproximação de funções e modelagem de dados, nasce do fato de podermos utilizar uma determinada classe de funções por meio da combinação linear de um conjunto de funções não lineares, conhecidas como *funções de base*, para predizer o valor de uma ou mais variáveis objetivo, dado um vetor  $d$ -dimensional de variáveis de entrada [Bishop, 2006].

No entanto, sabemos que modelos lineares possuem limitações, principalmente para problemas envolvendo um espaço de entrada de dados não lineares e de alta dimensionalidade, todavia, aqueles possuem propriedades analíticas e formam a base para modelos mais sofisticados que serão discutidos adiante.

Antes de discutir qualquer dos fundamentos teóricos das funções de base radial, devemos ter uma idéia geral do que elas representam. As funções de base radial podem ser vistas como uma estrutura matemática cujo objetivo é aproximar dados dispersos em várias dimensões com precisão, sendo freqüentemente aplicadas na teoria de aproximação moderna [Buhmann, 2003]. Esta habilidade é muito útil na modelagem e identificação de sistemas não-lineares.

Neste capítulo serão apresentados conceitos sobre funções de base radial e sua aplicação na identificação de sistemas.

## 4.2. Funções de base

Em análise funcional e nas suas aplicações, um espaço gerado a partir de funções de base pode ser visto como um espaço vetorial de dimensão infinita, cujos vetores-base são funções e não vetores. Isto significa que cada função no espaço funcional pode ser representada como uma combinação linear das funções de base [Buhmann, 2004].

Existem vários tipos de funções de base, tais como: multiquádricas, Cauchy, Gaussianas, dentre outras [Bishop, 2006].

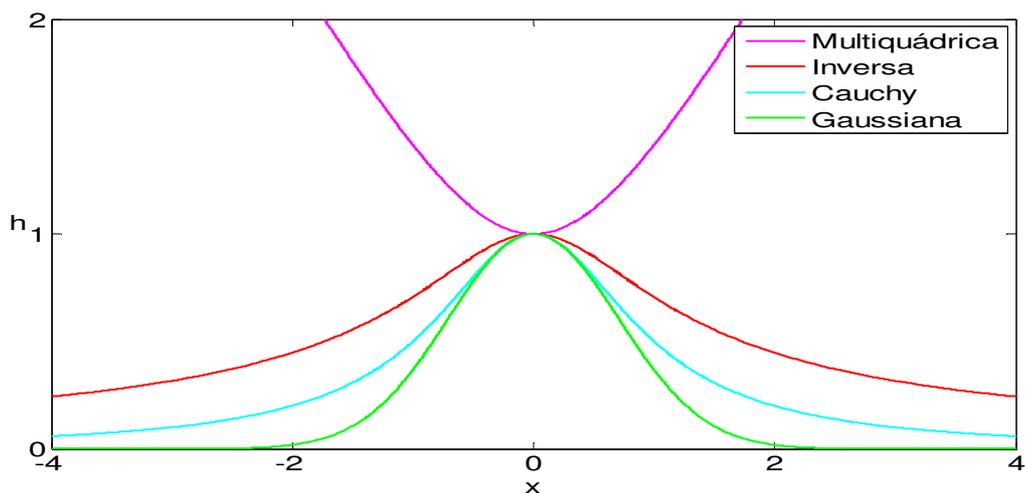


Figura 13 – Exemplos de funções de base.

Iremos agora abordar alguns conceitos sobre a utilização de um tipo especial de estrutura denominada de RBF – redes de funções de base radial.

Como afirmamos que as funções de base que serão utilizadas neste trabalho serão radiais, então podemos definir uma função  $\Phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  como radial se existir uma função *univariada*  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad \text{onde } r = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \quad (4.1)$$

Sendo  $\|\cdot\|$  a norma euclidiana. Em outras palavras, podemos dizer que o valor de  $\Phi$  em qualquer ponto possui uma distância fixa à origem (ou outro ponto fixo denominado de centro  $\mathbf{c}$ ) constante. Portanto,  $\Phi$  é radialmente (ou esfericamente) simétrica em torno do centro.

Na definição (4.1) utilizamos uma função baseada na distância euclidiana para abordarmos outro caso de função de base radial, que será mostrada a seguir [Fasshauer, 2007].

As redes de funções de base radial podem ser representadas através da seguinte topologia:

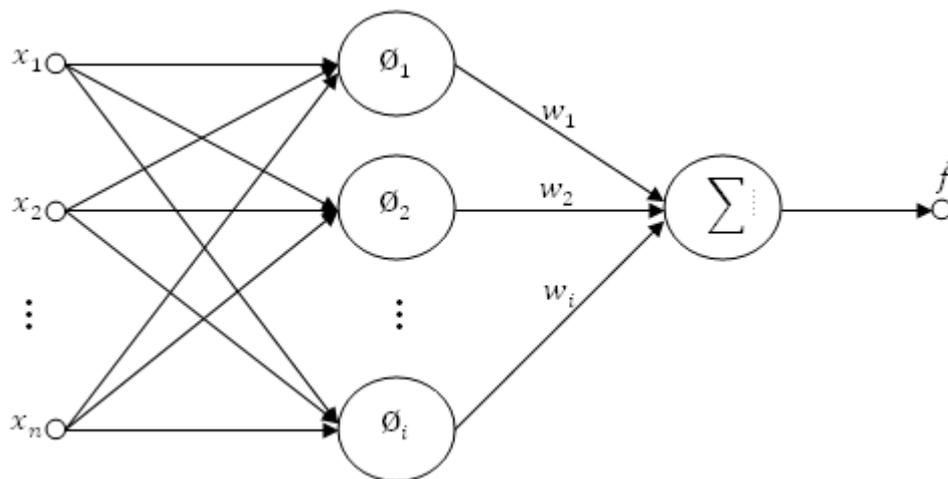


Figura 13 – Exemplo da topologia de uma RBF em que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  representam os dados de entrada,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i$  as funções de base,  $w_1, w_2, \dots, w_i$  os parâmetros do modelo e finalmente a função aproximada  $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$

#### 4.2.1. Funções de base radial gaussiana

As funções gaussianas são funções locais e amplamente utilizadas na teoria de aproximação de funções multivariadas, geralmente expressas da seguinte forma:

$$\phi(r) = g(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.2)$$

Neste tipo de função o parâmetro  $\sigma$  corresponde à largura da função gaussiana, ou seja, define a distância euclidiana média (raio médio) que mede o espalhamento dos dados representado pela função de base radial em torno de seu centro [Haykin, 2009]. O parâmetro  $\sigma$  representa o quão rapidamente o valor da função de base radial cai a zero, à medida que os dados de entrada se afastam do centro.

As redes utilizando funções de base radial gaussianas realizam um mapeamento não-linear do espaço de entrada para um espaço de características, geralmente de alta dimensionalidade, seguido de um mapeamento linear do espaço oculto para o espaço de saída. A transformação não linear acima é definida pelas funções de base radial, e a transformação linear é definida pelo conjunto de pesos.

As figuras seguintes mostram exemplos de uma função de base radial gaussiana, centrada na origem.

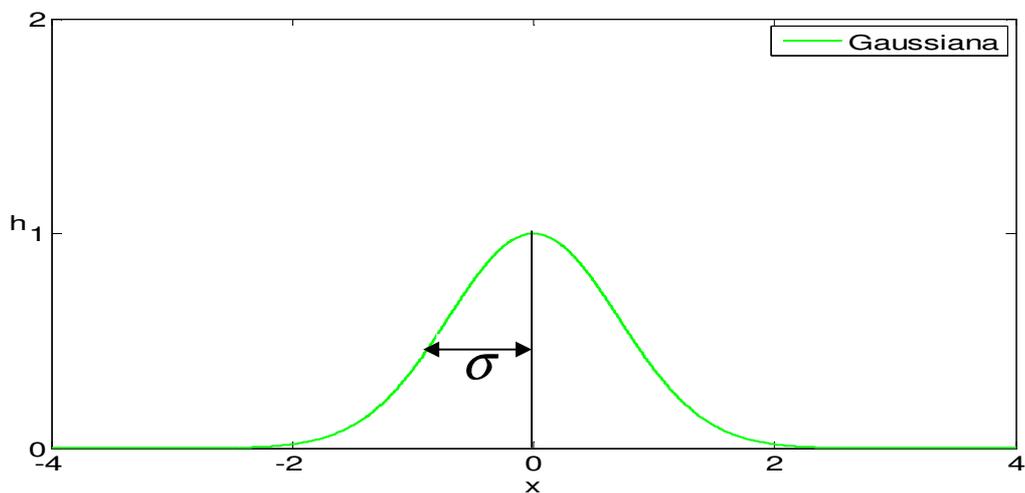


Figura 15 (a)– Exemplos de uma função de base radial unidimensional com um  $\sigma$  qualquer, centrada na origem, em que o eixo  $x$  do gráfico representa os dados, e o eixo  $h$  os valores da função gaussiana.

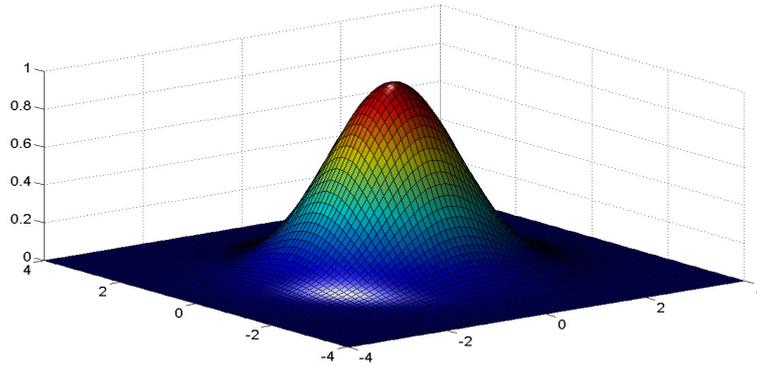


Figura 15(b) – Exemplos de uma função de base radial bidimensional com  $\sigma = 1,6$ , centrada na origem.

Ao analisarmos as figuras acima, podemos observar que as funções de base gaussianas são funções localizadas crescentes de  $x = -\infty \rightarrow x = 0$ , e decrescente de  $x = 0 \rightarrow x = \infty$ .

Outro conceito extremamente importante com relação às funções de base radial gaussianas é que as mesmas são funções definidas positivas para cada parâmetro  $\sigma > 0$ . Uma função é definida positiva se a forma quadrática:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G(x_i - c_j) > 0 \quad (4.3)$$

Para  $n$  pares distintos de diferentes pontos  $x_1, \dots, x_n$  e  $c_1, \dots, c_n$  [Fasshauer, 2007].

Após estes conceitos introdutórios, podemos observar que o projeto de uma rede utilizando funções de base radial pode ser visto como um problema de ajuste de curva, onde a aprendizagem é equivalente a encontrar uma superfície em um espaço multidimensional do mapeamento que resulta no melhor ajuste a um conjunto de dados de treinamento, sendo a generalização correspondente a interpolação dos dados nesta superfície multidimensional [Haykin, 2009].

### 4.3 – O problema da interpolação exata

O problema da interpolação exata originou o método definido anteriormente e denominado como redes de funções de base radial, onde um conjunto de dados de entrada é mapeado exatamente a um conjunto de dados objetivo [Powell, 1987].

Assumindo um conjunto de dados de treinamento, precisamos estimar uma função  $\hat{f}$  a mais próxima possível da função objetivo  $f$  utilizando uma rede RBF, conforme será demonstrado a partir do seguinte problema:

Considerando um modelo de regressão linear para aproximar uma função  $f$  através de:

$$f(\cdot) \cong \hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = w_0 + w_1 x_1 + \dots + w_n x_n \quad (4.4)$$

Onde:  $\hat{f}$  representa a função aproximada através do modelo de regressão linear acima, sendo  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  o vetor de entrada e  $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_n]^T$  o vetor de parâmetros do modelo. Podemos observar a partir desse que o fato do mesmo ser linear para as variáveis de entrada  $x_i$  impõe certa restrição ao modelo (admitindo dados de entrada não-lineares).

No entanto, podemos estendê-lo a uma combinação linear de funções não lineares aplicadas aos dados de entrada:

$$\begin{aligned} f_1 &= w_1 \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_1}{2\sigma^2}\right] + \dots + w_n \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_n}{2\sigma^2}\right] \\ f_2 &= w_1 \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{c}_1}{2\sigma^2}\right] + \dots + w_n \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{c}_n}{2\sigma^2}\right] \\ &\vdots \\ f_n &= w_1 \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_1}{2\sigma^2}\right] + \dots + w_n \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_n}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Onde  $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$  representa o vetor de centros escolhidos a partir do conjunto dos dados de entrada, as equações acima podem ser escritas de forma resumida como:

$$\begin{cases} g_{11}w_1 + g_{12}w_2 + \dots + g_{1n}w_n = f_1 \\ g_{21}w_1 + g_{22}w_2 + \dots + g_{2n}w_n = f_2 \\ \vdots \\ g_{n1}w_1 + g_{n2}w_2 + \dots + g_{nm}w_n = f_n \end{cases} \quad (4.6)$$

Sendo  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  funções de base radial gaussianas,  $w_i$  os parâmetros de ponderação do modelo e  $f_i$  os valores desejados, o sistema de equações acima escrito na forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} = \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_1}{2\sigma^2}\right] & \cdots & g_{1n} = \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_n}{2\sigma^2}\right] \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} = \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_1}{2\sigma^2}\right] & \cdots & g_{nn} = \exp\left[-\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{c}_n}{2\sigma^2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{21} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Na forma compacta, temos:

$$\mathbf{G} \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (4.8)$$

Onde a matriz do sistema  $\mathbf{G}$  possui entradas  $g_{ij}$  e  $\mathbf{w}$  representa o vetor dos coeficientes (pesos) desconhecidos, no entanto, da álgebra linear, sabemos que o sistema de equações terá solução se a matriz de interpolação  $\mathbf{G}$  for não singular.

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{w} \quad (4.9)$$

Entretanto, Micchelli em 1986 estabeleceu uma relação entre interpolação de dados dispersos e funções definidas positivas. Micchelli demonstrou que, para uma classe de funções radial de base, a matriz de interpolação  $\mathbf{G}$  é não-singular desde que os dados sejam distintos. Isto é tudo que é exigido para a não-singularidade da matriz de interpolação [Haykin, 2009].

Há várias funções de base radial que são cobertas pelos estudos apresentados por Micchelli, dentre elas a gaussiana, a qual nos leva a concluir que, se tivermos *funções de*

*base gaussianas* gerando uma matriz de interpolação  $\mathbf{G}$ , a mesma será uma matriz positiva definida tendo como consequência uma matriz não-singular [Wendland, 2005].

Pode ocorrer o caso em que a matriz de interpolação  $\mathbf{G}$  não seja quadrada, onde o número de linhas desta é diferente do número de colunas, neste caso, é necessária a utilização da matriz pseudo-inversa na solução do problema de ajuste por meio dos mínimos quadrados. Neste caso,

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^+ \mathbf{f} \quad (4.10)$$

Onde  $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$  representa a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{G}$

Podemos ainda acrescentar um parâmetro  $\lambda$  para evitar problemas de condicionamento na matriz de interpolação, ou seja:

$$\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (4.11)$$

De forma que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}^+ \mathbf{f}, \text{ para } \lambda = 0 \quad (4.12)$$

Quando o parâmetro de regularização  $\lambda$  se aproxima de zero, o vetor de pesos  $\bar{\mathbf{w}}$  converge para a solução de norma mínima do vetor de erro, ou seja, a pseudo-inversa do problema de ajuste por meio dos mínimos quadrados [Broomhead & Lowe, 1988].

Usando funções de base não lineares, permitimos que a função  $\hat{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}})$  seja uma função não linear a partir dos dados de entrada. A grande vantagem de funções da forma (4.5) ou (4.6), que são lineares em  $\bar{\mathbf{w}}$ , é a simplicidade do modelo, ou seja, a possibilidade de obtermos uma combinação linear de forma fechada, por meio da aplicação de técnicas de solução baseadas em mínimos quadrados. O mesmo não se aplica, na maioria dos casos, a modelos não-lineares, os quais requerem processos numéricos iterativos para a obtenção da solução.

A escolha das funções de base é feita *a priori*, de modo que apresente um bom comportamento ao problema de regressão, ou seja, a sua resposta deve decrescer

monotonamente com a distância em relação ao centro. O principal problema em uma rede RBF é a escolha dos centros e outros parâmetros, inerentes a estrutura, para a obtenção do melhor conjunto de pesos.

Na construção de uma rede RBF, devemos levar em conta alguns parâmetros:

- O raio das gaussianas  $\sigma$ ;
- O número de centros;
- O vetor de entrada  $\vec{x}$ ;
- O valor dos pesos  $\vec{w}$ .

Os três primeiros requisitos: a determinação do parâmetro  $\sigma$ , o número de centros e a determinação do conjunto de entradas, são baseados em heurísticas, enquanto que a determinação de  $\mathbf{w}$  é feita através da minimização da função custo, definida no capítulo 2. Todos os parâmetros devem ser escolhidos para minimizar o erro de treinamento através do ajuste de  $\mathbf{w}$  [Vapnik, 2000].

Durante a fase de aprendizagem, um conjunto de dados de treinamento é utilizado tanto para obter uma estimativa do vetor de parâmetro  $\vec{w}$  quanto para determinar a distribuição, *a posteriori*, desse vetor. Os dados de treinamento são então descartados e as previsões para as novas entradas são baseadas puramente no vetor de parâmetros  $\mathbf{w}$  [Bishop, 2006].

No estudo em questão, a escolha dos centros foi feita a partir de um conjunto de dados extraídos do conjunto de entrada e o parâmetro  $\sigma$  foi ajustado de forma empírica, e admitimos o mesmo igual para todas as gaussianas individualmente.

Apesar das redes RBF projetadas desta forma serem restritas, elas ainda possuem a capacidade de aproximadores universais [Haykin, 2009].

A capacidade de aproximação das RBF pode ser ilustrada na figura seguinte, onde temos um conjunto de gaussianas, que embora estejam com raios diferentes, ao somarmos todas as gaussianas, obtemos uma aproximação da função desejada.

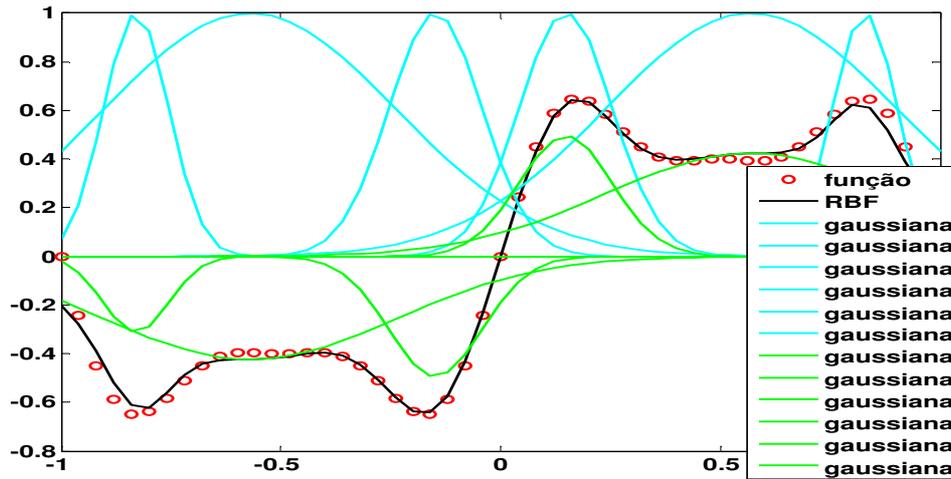


Figura 16 – Exemplos de uma aproximação utilizando RBF com funções de base gaussianas.

Para validar as afirmações iremos utilizar a rede RBF para o seguinte exemplo. Exemplo 1: dada uma função  $y = \text{sen}(10x) + \varepsilon$  onde  $\varepsilon$  representa um ruído branco e  $\bar{x}$  o vetor de entrada. Podemos observar, por meio do gráfico abaixo, a capacidade de generalização de uma RBF, ou seja, podemos observar uma resposta aproximada e satisfatória para a saída da RBF em relação à função desejada  $y = \text{sen}(10x)$ .

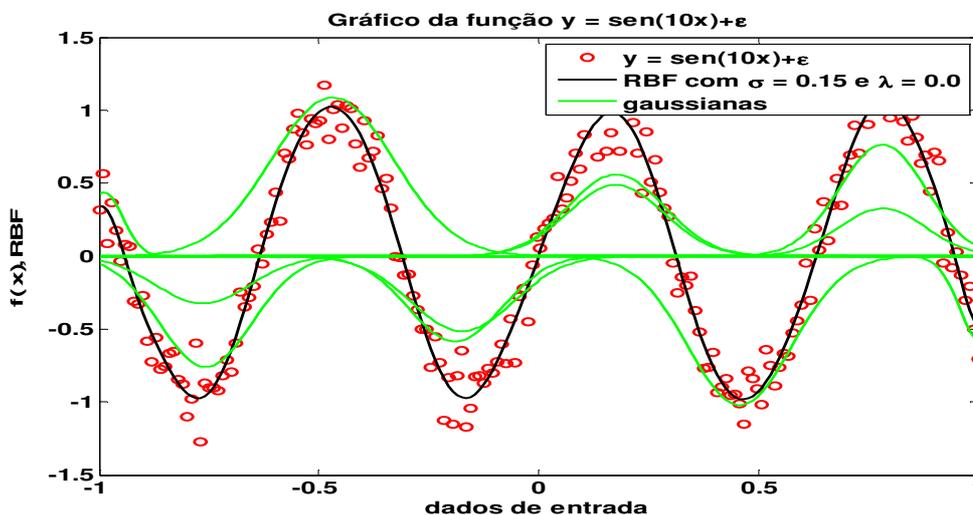


Figura 17 – Exemplos de uma aproximação utilizando RBF com funções de base gaussianas para a função  $y = \text{sen}(10x)$ . No gráfico podemos observar a função objetivo acrescida de ruído, a aproximação executada pela RBF e o conjunto de funções de base gaussianas, cujo somatório promove a aproximação proposta.

O processo de treinamento da rede RBF acima foi baseado no ajuste dos parâmetros das funções de base a partir dos dados de entrada e o conjunto de centros, o vetor de pesos foi encontrado utilizando o método dos mínimos quadrados.

Vale destacar que, embora as funções de base radiais sejam não-lineares, a rede RBF implementa uma combinação linear daquelas. Os centros, o raio e a forma da função de base radial são os parâmetros do modelo, sendo que o desvio padrão  $\sigma$  controla a suavidade da interpolação. Todos os testes foram feitos sem a utilização do parâmetro de regularização  $\lambda$  definido em (4.11).

É importante observar que uma única função básica gerou todas as funções de base que foram utilizadas na expansão (4.4). A vantagem é que, em vez de ter que lidar com várias funções de base, pode-se trabalhar com a mesma função para todas as opções de espaços.

Quando se faz a correspondência entre todos os dados de entrada e os centros pode-se, em alguns casos, obter matrizes muito grandes e mal-condicionadas. Para superar estas dificuldades computacionais a complexidade do mapeamento deve ser reduzida, de forma a evitarmos alguns problemas inerentes à generalização dos dados, tais como: sub-ajuste (*underfitting*), sobre-ajuste (*overfitting*) e “maldição da dimensionalidade” (*curse of dimensionality*).

**Sub-ajuste (*underfitting*):** Basicamente, se uma rede RBF gerar superfícies menos complexas do que o requisitado pelo problema abordado, teremos um problema de generalização, pois a complexidade da superfície de decisão de uma RBF é proporcional ao número de parâmetros livres (componentes do vetor  $\mathbf{w}$ ) que ela possui, ou seja, o número de parâmetros utilizados para a determinação das superfícies de decisão. No entanto, quando o número de parâmetros livres é pequeno ou a largura das funções de base radial for muito alta, a rede RBF tende a se adaptar a detalhes específicos da base de treinamento, ou seja, a rede suaviza demais sua resposta, o que pode causar uma redução da taxa de acerto. Esse fenômeno é conhecido como *underfitting* (sub-ajuste) e pode ser visualizado na figura abaixo:

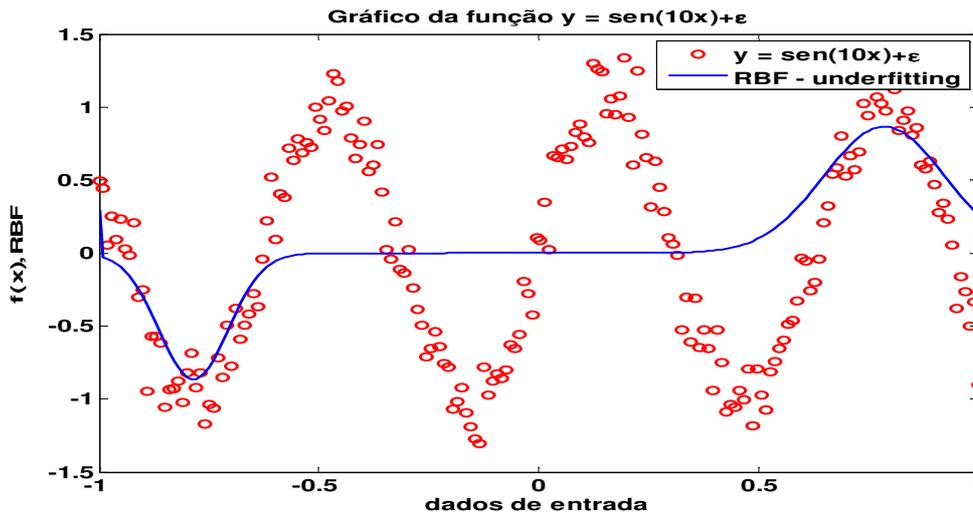


Figura 18 – Exemplos de um dos problemas apresentados durante a fase de treinamento de uma RBF no caso um *underfitting* (sub ajuste) em que a RBF não consegue uma boa generalização dos dados.

Para evitar o *underfitting*, devemos aumentar o número de parâmetros da rede RBF, o que equivale a aumentar o número de funções de base, bem como utilizar o parâmetro de regularização  $\lambda$ .

**Sobre-ajuste (*Overfitting*):** Uma característica deste problema de sub-ajuste é o fato de ambos serem causados pela adaptação da RBF às peculiaridades específicas do conjunto de treinamento. Mas, no caso de sobre-treinamento, o problema ocorre quando a RBF é treinada com um conjunto muito grande de exemplos de padrões com pequena variação (no caso estatístico) ou com muitas iterações de treinamento (no caso de redes neurais). A consequência desse fato é que a capacidade de generalização do sistema é reduzida, proporcionando muitas falhas quando esse é utilizado para identificar funções que não pertencem ao conjunto de treinamento. No caso de redes neurais, esse problema ocorre quando são realizadas muitas iterações de treinamento com pares de entrada e saída. Na figura abaixo, temos um exemplo de um típico problema de *overfitting*. [Theodoridis, 1999].

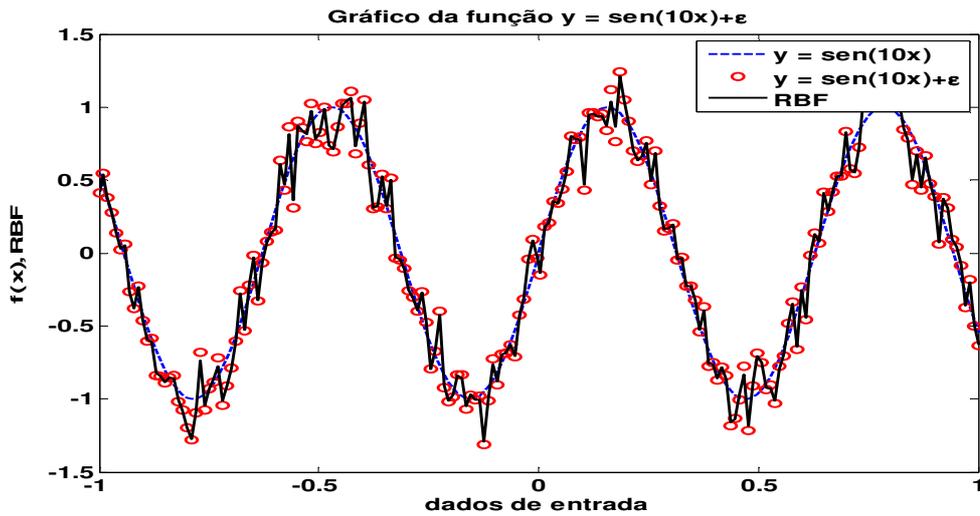


Figura 19– Exemplo de um problema de sobre-ajuste em que a RBF passa por praticamente todos os pontos utilizados para treinamento de forma que o erro de treinamento tende a zero, mas a RBF não consegue uma boa aproximação da função alvo  $y = \text{sen}(10x)$ .

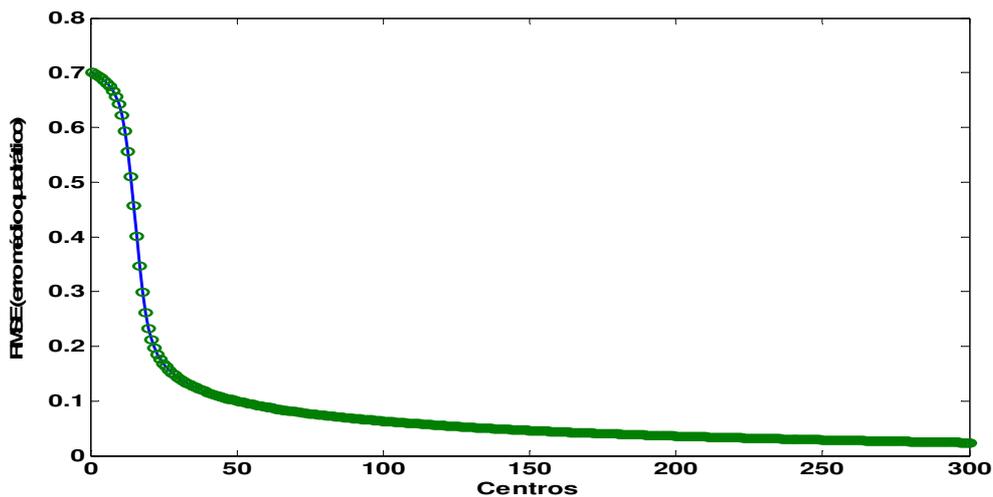


Figura 20– O erro médio quadrático do conjunto de treinamento da figura anterior ilustrando que, embora o erro tenda a zero, a RBF não consegue uma boa aproximação da função objetivo  $y = \text{sen}(10x)$ .

Em aplicações práticas a interpolação exata não é desejável, pois implica um ajuste exato em dados ruidosos; a solução é obter uma função que aproxime os dados desejados.

**Maldição da Dimensionalidade:** Segundo Valiant em “*A theory of the Learnable*” (1984), o número de exemplos necessários para se aprender certo conceito cresce exponencialmente de acordo com o número de atributos.

A maldição da dimensionalidade definida por Bellman [Haykin, 1999] – pág. 321 nos mostra que, independente da técnica de interpolação ou aproximação de funções, se a suavidade da curva de interpolação permanecer constante, o número de parâmetros necessários para a função aproximativa manter certo grau de precisão (permanecer dentro de uma tolerância definida) cresce exponencialmente com a dimensionalidade do espaço de entrada. Haykin, também afirma que o espaço das funções aproximativas que podem ser alcançados por uma rede RBF torna-se restrito na medida em que ocorre um aumento na dimensionalidade da entrada. Como resultado, temos que a maldição da dimensionalidade não pode ser quebrada por uma rede RBF.

As RBF possuem as seguintes características:

- São aproximadores universais;
- Possuem complexidade moderada em termos de computação e memória.

O presente capítulo abordou essencialmente os conceitos básicos sobre as redes de funções de base radial – RBF, demonstrando alguns tipos, a topologia da rede, um tipo especial de funções de base – as gaussianas, o treinamento destas e alguns problemas inerentes a essa fase. Concluímos, demonstrando através de um exemplo, a capacidade de aproximação e a facilidade no uso de tais funções.

# CAPÍTULO 5

## APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

---

### 5.1 – Introdução

O presente capítulo apresenta e discute a aplicação da técnica de identificação proposta (RBF) na análise de um sistema dinâmico real (a planta de corrente do motor de indução) baseada em dados observados. Inicialmente, para validação e análise do modelo foram utilizados os dados obtidos da planta e em seguida algumas equações não lineares conhecidas na literatura. Os dados reais usados no processo de identificação foram coletados no LACI – Laboratório de acionamento Controle e Instrumentação da UFRN, através dos sensores descritos em capítulo anterior.

A planta de corrente é um sistema dinâmico de tempo discreto com dados discreto e não linear, Supomos que a não linearidade do sistema é desconhecida.

A ferramenta utilizada no processo de identificação é uma rede de funções de base radial gaussiana que cresce gradualmente para englobar o espaço adequado e suficiente de forma a fornecer uma aproximação para o sistema.

As abordagens apresentadas no presente capítulo possuem as seguintes características:

- São representações em tempo discreto, isto é, são formadas por operadores matemáticos que mapeiam uma seqüência de números (sinais em tempo discretos, eventualmente obtidos através de amostragem de sinais contínuos) em outra seqüência de números;
- É voltada primordialmente à identificação caixa preta; e
- São representações monovariáveis ou SISO – *Single Input Single Output*, embora todos os casos possam ser estendidos para mais de uma entrada e/ou saída.

Sistemas dinâmicos não-lineares podem apresentar algumas peculiaridades, tais como: comportamentos dinâmicos mais complexos, com mudanças qualitativas de comportamento para diferentes pontos de operação com muito mais flexibilidade em sua evolução temporal e a dificuldade na formulação de uma teoria sistemática e geral, aplicável a projetos de identificação e controle não-linear.

Esta impossibilidade atual de recorrer a ferramentas lineares efetivas, ou não-lineares genéricas, cria a necessidade de utilizarmos ferramentas dedicadas, inerentemente não-lineares e com grande poder de adaptação, dentre as quais: as funções de base radial [Hunt et al., 1992].

As RBF apresentam-se como uma ferramenta alternativa para a solução de problemas desafiadores em identificação e controle, principalmente àqueles que envolvem não linearidades.

## 5.2 – A aquisição dos dados

A figura seguinte procura ilustrar todo o processo desde a aquisição (coleta) dos dados executados na planta e as etapas subseqüentes na identificação do sistema.



Figura 21 – Diagrama representando todos os passos do presente trabalho, desde a aquisição e coleta de dados até a validação e apresentação dos resultados obtidos.

O processo de aquisição dos dados é feita por uma placa que possui um conversor analógico / digital - AD, já mencionado em capítulos anteriores. Este conversor fornece em sua saída um valor em tensão proporcional à corrente medida.

### 5.2.1– Escolha das variáveis de entradas e saídas

Ao se procurar identificar um determinado modelo que de alguma forma relaciona duas variáveis de um sistema físico, presumimos a existência de uma correlação significativa entre tais variáveis, ou seja, uma relação de causa e efeito. Ao escolhermos as variáveis de entrada / saída do modelo, estamos supondo que o sinal de saída é o efeito causado a partir de um sinal de entrada ou excitação. No entanto, o fato de duas variáveis estarem correlacionadas não implica necessariamente uma relação de causa e efeito [Aguirre, 2007].

No presente trabalho foi utilizado um computador interligado a um conversor A/D para a aquisição dos dados reais, a figura abaixo, procura ilustrar de forma resumida o processo.

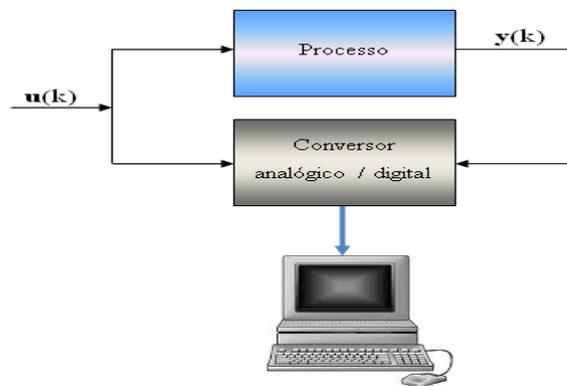


Figura 22 – Obtenção dos dados de entrada / saída do processo.

Vale à pena comentarmos que as características dinâmicas e estáticas de um sistema surgirão a partir do seu sinal de excitação, neste caso a faixa de frequências de um sinal deve ser cuidadosamente escolhida quando o objetivo é excitar a dinâmica linear ou não linear de um determinado sistema. Por outro lado, a amplitude, ou excursão de um sinal, é o que leva um sistema não linear a atingir diferentes pontos de operação, revelando as características não lineares do mesmo. Utilizamos como entrada um sinal senoidal conforme demonstrado na figura 23:

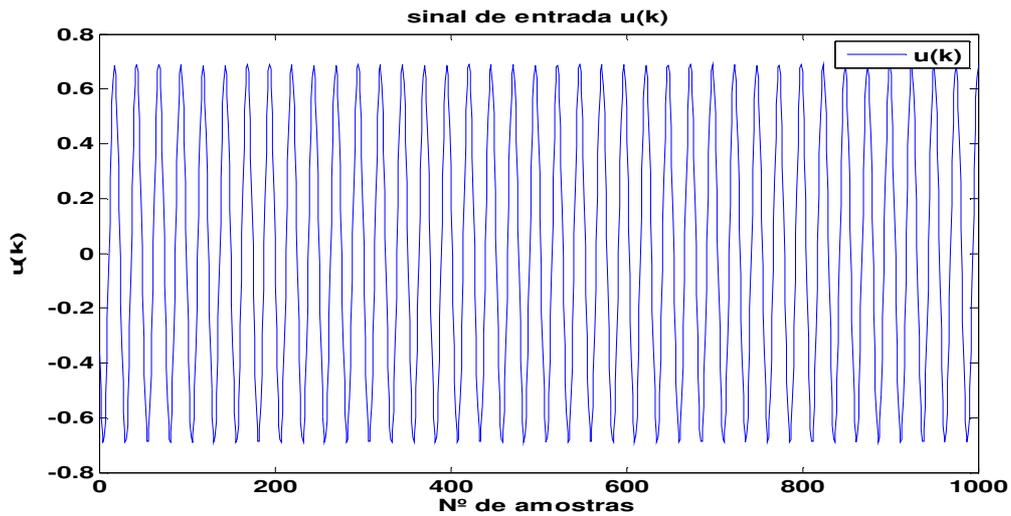


Figura 23 – sinal senoidal aplicado na planta em função do número de amostras, neste caso para uma melhor visualização foram utilizadas 1000 amostras na geração do gráfico.

E obtivemos o sinal de resposta mostrado na figura 24:

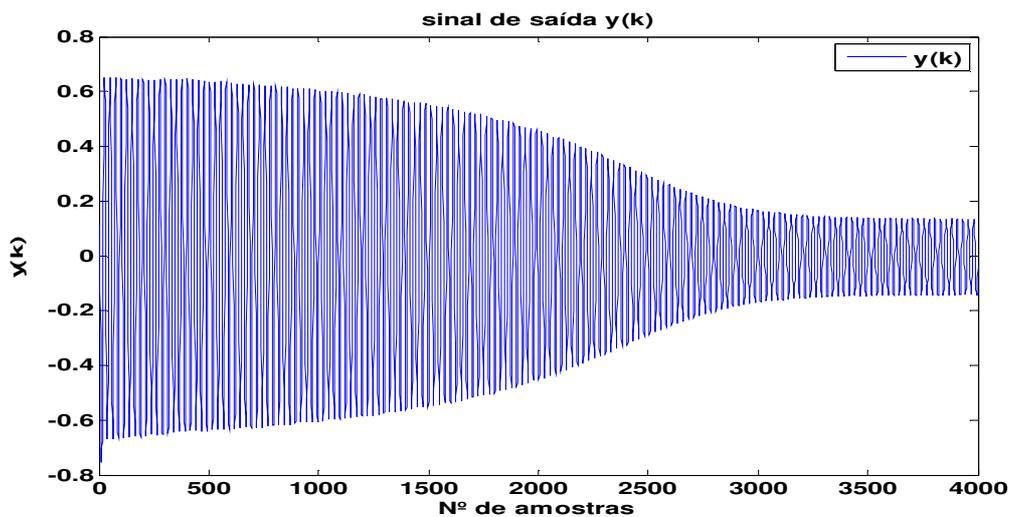


Figura 24 – sinal de resposta da planta. , neste caso para uma melhor visualização foram utilizadas 4000 amostras para a geração do gráfico.

Uma observação importante a ser feita com relação às figuras acima é que mesmo excitando a planta com um sinal de uma única frequência, o sinal de saída pode apresentar características não lineares. Assim em alguns casos basta um simples sinal,

de amplitude e frequência bem definidas, para excitar um sistema não linear razoavelmente [Aguirre, 2007].

### 5.2.2– Escolha do período de amostragem.

A grande maioria dos sistemas reais são processos contínuos no tempo, no entanto na maioria das aplicações científicas e tecnológicas atuais, é necessário o registro de variáveis contínuas de forma discreta no tempo. Então tais variáveis devem ser amostradas e o período entre duas destas amostras é chamado de período de amostragem. Vale salientar que para um sinal reter características fundamentais do sinal original, é necessário que o período de amostragem evite o falseamento do sinal (*aliasing*).

Do ponto de vista numérico se o período de amostragem for insuficiente, podemos ter um mau condicionamento na estimativa correta dos parâmetros de ajuste do modelo matemático.

No presente trabalho o período de amostragem escolhido e que gerou uma boa resposta foi de 250ms (milissegundos).

### 5.3 – Determinação da estrutura do modelo.

Se considerarmos a planta como uma função não linear definida por:

$$y(k + 1) = f[y(k), y(k - 1), \dots, y(k - n + 1), u(k), u(k - 1), \dots, u(k - m + 1)] \quad (5.1)$$

onde  $[u(k), y(k)]$  representa o par de entradas-saída da planta SISO no instante de tempo  $k$ . Este é um modelo geral em que a saída para qualquer instante, neste caso, é uma função não-linear dos valores passados das entradas e saídas.

A representação discreta dos estados do sistema pode ser definida como:

$$x(k + 1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (5.2)$$

onde  $f : \mathfrak{X}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{X}$  é uma função desconhecida e não linear nos parâmetros  $x$  e  $u$ . Se a função  $f$  for diferenciável em torno de um ponto de equilíbrio arbitrário, então o sistema não linear definido em (5.1) pode ser aproximado por uma rede RBF.

A determinação da estrutura da rede RBF é uma parte importante no nosso problema de identificação. Baseado em nossos estudos, propomos um simples, porém eficaz algoritmo *off-line* que pode estabelecer a estrutura da rede RBF para uma boa aproximação da função não linear gerada da resposta da planta de corrente do motor de indução. A partir de agora iremos descrever os detalhes da rede RBF e suas implicações em todo o processo.

Recentes resultados na teoria de aproximação de funções obtidos por Powell em 1987, Wendland em 2005, indicam que as redes RBF possuem a propriedade de serem aproximadores universais de funções. Mais precisamente, para uma determinada tolerância  $\varepsilon$  admitida para um erro e uma função arbitrária não linear  $f(\cdot)$ , existirá um vetor de parâmetros  $\mathbf{w}$  e uma matriz  $\mathbf{G}$ , tal que:

$$\max |f(x) - \mathbf{w}^t \mathbf{G}| \leq \varepsilon \quad (5.3)$$

Este resultado é a base para justificar o uso da RBF em problema de identificação de sistemas não lineares. Conforme comentado, a propriedade de aproximação universal das RBF garante a existência deste vetor de pesos (parâmetros)  $\mathbf{w}$  que promove a minimização do erro médio entre a resposta do sistema e a resposta da RBF, de tal forma que o sistema possa ser representado por:

$$y(k+1) \cong f_{RBF}(x_i, c_j, \mathbf{w}, \sigma) \quad (5.4)$$

Sendo:  $\mathbf{x} = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-m+1), y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1)]$  o vetor de entrada da RBF,  $\mathbf{c}$  o vetor de centros escolhido do conjunto de entrada e  $\sigma$  a largura das funções de base utilizadas.

O principal problema do algoritmo de identificação é encontrar o vetor de parâmetros  $\mathbf{w}$  e a função que irá construir o modelo aproximado para (5.1). Neste trabalho trabalharemos o problema de identificação em duas tarefas distintas:

Primeiramente iremos encontrar o vetor  $\mathbf{w}$  que promova a melhor aproximação da função desejada, através do treinamento da RBF utilizando mínimos quadrados, em seguida analisaremos o comportamento dinâmico da mesma.

Para o problema de identificação ser bem definido, a não linearidade da função desconhecida definida em (5.1) deve atender a três requisitos: a primeira é que a mesma admita a existência de unicidade e solução para determinadas condições iniciais e para uma seqüência de entradas limitadas. Segundo, que a função esteja dentro de um conjunto discreto e compacto, pois este requisito, juntamente com um sinal limitado em  $\mathbf{u}(k)$  (entradas) é necessário para estabelecer a propriedade de aproximação universal das redes RBF. E finalmente, ao aplicarmos um conjunto de dados de entrada / saída limitados às redes RBF, garantimos uma região de operação para o sistema não linear identificado.

#### 5.4 – Determinação dos parâmetros da RBF

Para identificar a planta, um modelo é escolhido baseado em algum conhecimento *a priori* sobre a mesma, no presente estudo estaremos considerando esta como sendo um sistema de 2ª ordem. O objetivo nesta fase é determinar os pesos da RBF utilizando o método dos mínimos quadrados já definido.

A partir de funções de base radial gaussianas com centros fixos e retirados do conjunto de treinamento, sendo que o número de centros irá determinar o número de funções de base, além do raio ou largura  $\sigma$ . Implementaremos a seguinte estrutura:

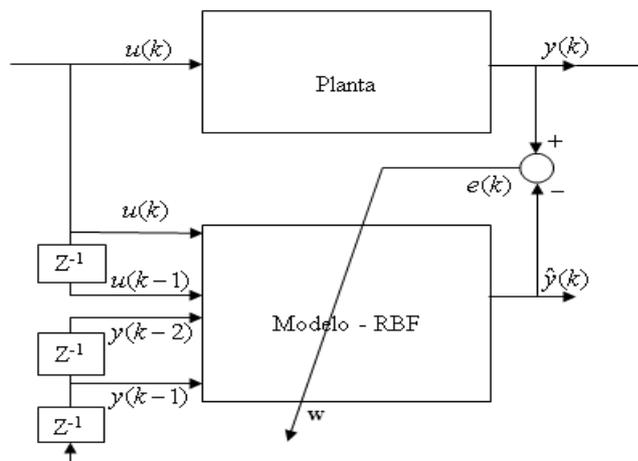


Figura 25 – Estrutura implementada para a obtenção do vetor de pesos  $\mathbf{w}$ .

Analisando a estrutura acima, vemos que os dados apresentados à rede RBF são os dados provenientes da planta, em seguida é feita uma comparação entre a saída estimada da RBF e a saída da planta, para o cálculo do erro médio utilizado no ajuste dos parâmetros livres da rede RBF, este processo de treinamento é baseado no método dos mínimos quadrados.

Para uma melhor visualização e compreensão do modelo de uma rede RBF, podemos observar a figura abaixo:

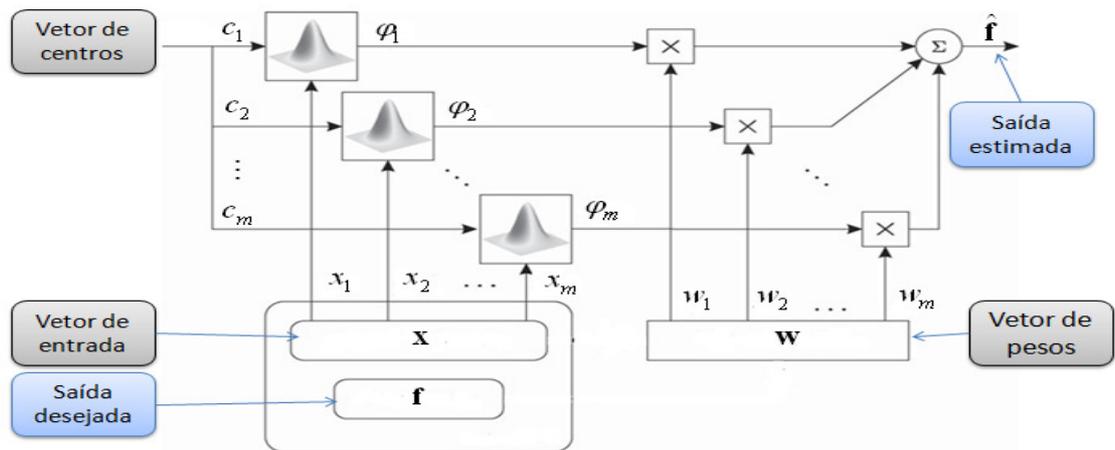


Figura 26 – Modelo de uma rede RBF

A saída estimada é uma função da ponderação entre os pesos  $w_i$  e as funções de base radial  $\varphi_i$  que executam um mapeamento dos dados de entrada.

## 5.5 – Validação do modelo.

Na validação, a questão-chave é saber se o modelo escolhido é válido ou não, é sabido, que nenhum modelo representará um sistema real em todos os aspectos. Portanto, já que o modelo representa alguns aspectos do sistema, ele será considerado válido se incorporar as características do sistema que serão fundamentais para a aplicação em questão [Aguirre, 2007]. No nosso caso, como a finalidade é de se fazer predições, então o modelo será válido se a soma do erro médio quadrático for suficientemente pequena, para  $n$  passos recursivos.

### 5.5.1 – Simulações.

A comparação do modelo obtido com os dados medidos é provavelmente a forma mais usual de validação de um modelo. Nesse caso, desejamos saber se o modelo reproduz ao longo do tempo os dados observados.

Na figura abaixo, fizemos uma comparação entre a saída obtida na planta com a saída obtida da rede RBF a partir da estrutura mostrada na figura 26.

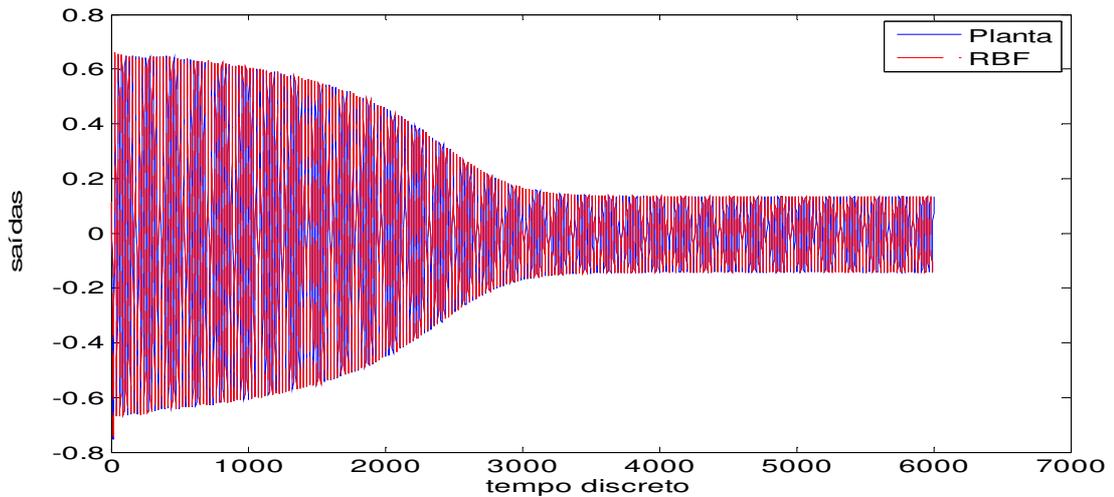


Figura 27 – Validação do modelo.

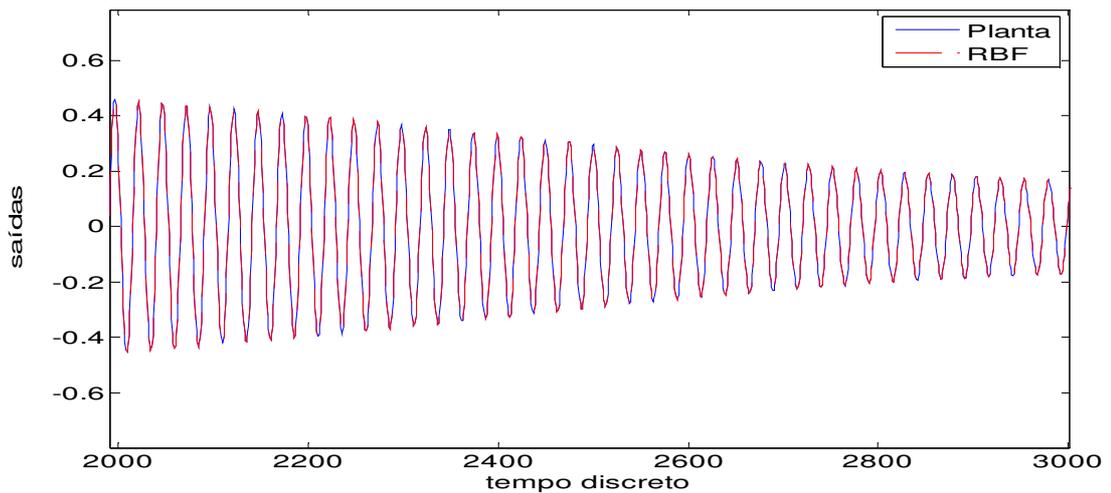


Figura 28 – Validação do modelo, o gráfico foi ampliado na região de tempo discreto 2000 a 3000.

Em ambos os gráficos apresentados, o traço contínuo representa os dados medidos na saída da planta e o tracejado indica a simulação do modelo identificado, ou seja, a saída da RBF.

Após uma série de testes conseguimos os melhores resultados com os seguintes parâmetros:

Raio ( $\sigma$ )	Erro médio quadrático	Número de centros ( $c$ )
	$J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$	
$\sigma = 0,75657$	$e = 3,085e-006$	Nº Centros = 100

Nesta etapa um cuidado básico que devemos ter é não usarmos os dados utilizados no treinamento para validarmos o modelo. Pois, dado um modelo obtido a partir de um determinado conjunto de dados, desejamos saber quão geral é o modelo. Em outras palavras, deseja-se saber se o modelo serve para explicar outro conjunto de dados observado do mesmo sistema. Ou seja, se o modelo possui a capacidade de *generalização*. Então, executamos dois testes distintos, nos quais o sistema é observado dividindo-se, assim, os dados em dois conjuntos. Um para identificar o modelo e o outro para a validação. Os resultados podem ser visualizados nas figuras 27 e 28.

Como o sistema identificado é não linear, os dois testes foram executados com o sistema operando em condições semelhantes, ou seja, com o mesmo conjunto de pesos obtidos durante a fase de treinamento.

Uma vez identificado o sistema e validado o modelo, podemos desprezar os dados obtidos da planta e passarmos a analisar a dinâmica da mesma a partir de testes executados na estrutura mostrada na figura 29:

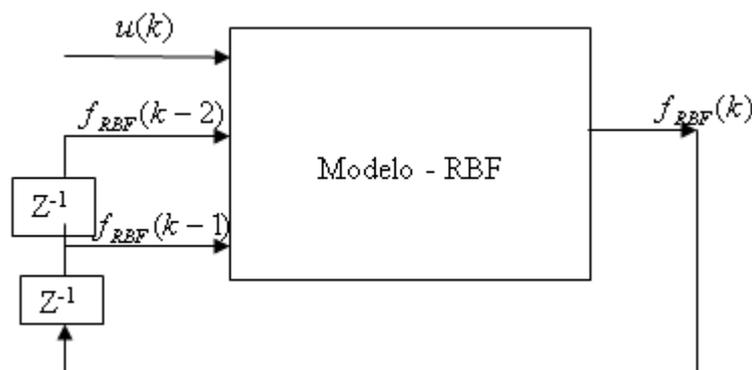


Figura 29 – Análise da dinâmica da planta a partir da rede RBF.

As principais características do modelo acima são:

- Possibilidade de representar o comportamento não linear dos fenômenos responsáveis pela geração dos dados de entrada;
- Habilidade na aproximação de qualquer mapeamento entrada / saída;
- Capacidade de aprendizado, a qual foi atingida através de uma seção de treinamento com exemplos de entrada / saída representativos do sistema a ser identificado;
- Capacidade de generalização, a qual permite que a RBF tenha um desempenho satisfatório em resposta a dados não pertencentes ao conjunto de treino;
- Tolerância a falhas, o qual permite à RBF continuar a apresentar resultados aceitáveis em caso de ruídos nos dados.

O modelo apresentado na figura 29 é geralmente referenciado na literatura com um modelo de predição recursiva, ou seja, modelos em que utilizamos memórias associativas (entradas atuais e passadas). Desta forma podemos descrever o modelo como:

$$x(k+1) \cong f_{RBF}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \mathbf{w}, \sigma) = f(y(k-1), y(k-2), \mathbf{u}(k), \mathbf{c}_i, \mathbf{w}, \sigma) \quad (5.5)$$

As noções de estados desempenham um papel essencial na formulação matemática de sistemas dinâmicos, onde um estado representa a quantidade atual de informações sobre o efeito de entradas passadas aplicadas ao sistema e que são suficientes para descrever a evolução futura do mesmo.

A partir de agora, abordaremos as RBF como um sistema dinâmico não linear, em que iremos enfatizar o problema de estabilidade. Pois a presença da estabilidade sempre implica em alguma forma de coordenação entre as várias partes individuais do sistema [Haykin, 2009].

Se considerarmos o modelo descrito em (5.5) como um modelo de estados e adicionarmos e subtrairmos um parâmetro constante e positivo  $a$  ao mesmo. Temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= -a\mathbf{x}(k) + a\mathbf{x}(k) + f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ &= -a\mathbf{x}(k) + h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))\end{aligned}\quad (5.6)$$

onde  $h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = a\mathbf{x}(k) + f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ . Desta forma podemos afirmar que os estados estimados da rede RBF podem ser descritos como:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = -a\hat{\mathbf{x}} + \hat{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \sigma), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (5.7)$$

Sendo  $\hat{\mathbf{x}}_i$  os estados da RBF,  $c_i$  e  $\sigma$  os parâmetros de ajuste, e considerando a função  $h$  da seguinte forma:

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) = \sum_{i=1}^M w_i \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \sigma) \quad (5.8)$$

E supondo que conheçamos os pesos ideais, temos:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = -a\hat{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^M w_i \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \sigma) \quad (5.9)$$

Se considerarmos  $a = -1$ , temos:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \sum_{i=1}^M w_i \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}_i, \sigma) \quad (5.10)$$

Ao considerarmos a função de base radial gaussiana, teremos a seguinte representação:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{w}(k) \sum_{i=1}^M \exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i) / 2\sigma^2) \quad (5.11)$$

Na equação anterior é comum chamarmos os valores de  $\mathbf{x}$  de estados estimados e suas equações diferenças as quantidades que em cada instante caracterizam as fases ou evolução do sistema. Podemos agora estender os conceitos abordados a uma representação geométrica mais interessante, *o campo vetorial*.

Um campo vetorial em  $\mathfrak{R}^n$  é uma função  $\mathbf{F} : D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , definida em um subconjunto  $D$ , que a cada ponto  $x$  em  $D$  associa um vetor  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  em  $\mathfrak{R}^n$ . Como toda função, um campo vetorial possui gráficos, conjunto de níveis, etc. Contudo, a representação geométrica mais interessante de um campo vetorial é aquela que, para cada ponto  $x$  em  $D$ , representa  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  como um vetor com extremidade inicial em  $x$  [Simmons, 2008].

Para a construção do campo vetorial do sistema podemos considerar o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k) &= x_1(k+1) - x_1(k) \\ &= f_1(x_1(k), x_2(k), u(k)) - x_1(k) \quad \text{e} \\ \Delta x_2(k) &= x_2(k+1) - x_2(k) \\ &= f_2(x_1(k), x_2(k), u(k)) - x_2(k)\end{aligned}\tag{5.12}$$

Sendo  $\Delta = x(k+1) - x(k)$  a variação direcional do ponto no plano, e o plano determinado por essas duas variáveis é chamado de *plano ou retrato de fase*. No caso da *RBF*, podemos defini-lo como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(k+1) &= f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_2(k+1) &= f_{RBF}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{w}, \mathbf{c}, \mathbf{u}, \sigma)\end{aligned}\tag{5.13}$$

Primeiramente iremos treinar e simular a rede RBF em alguns sistemas conhecidos para analisarmos o comportamento e a resposta desta. O principal objetivo aqui é apresentar a resposta da RBF a diferentes sistemas (lineares e não lineares) e tirarmos algumas conclusões sobre a interpretação dos gráficos.

### Sistema discreto linear

Considerando o sistema definido por:

$$y(k+2) + by(k+1) + cy(k) = 0 \rightarrow y(k+2) = -by(k+1) - cy(k)$$

Fazendo :

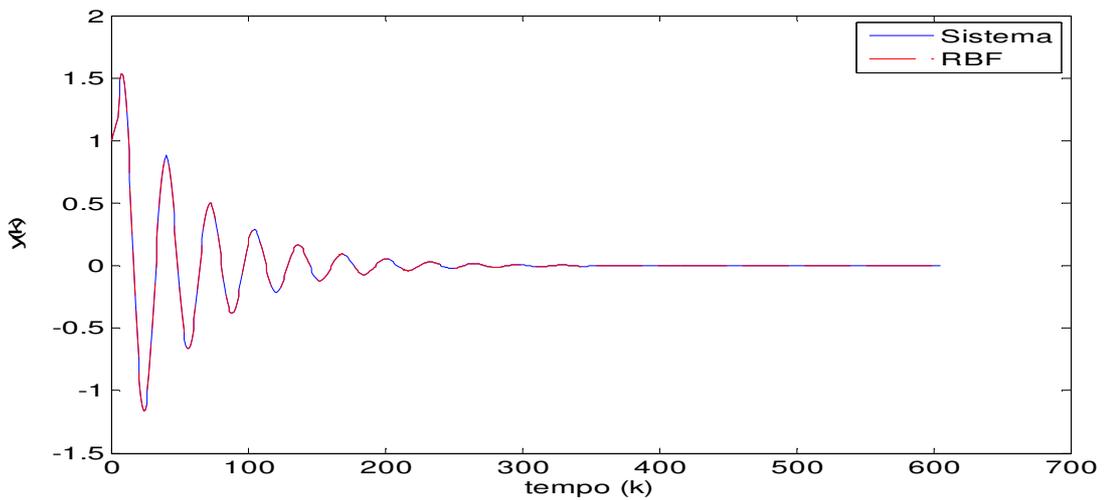
$$\begin{aligned}
 x_1(k) = y(k) &\rightarrow x_1(k+1) = y(k+1) \rightarrow x_1(k+1) = x_2(k) \quad \text{e} \\
 x_2(k) = y(k+1) &\rightarrow x_2(k+1) = y(k+2) \rightarrow x_2(k+1) = -by(k+1) - cy(k) \Rightarrow \\
 x_2(k+1) &= -bx_2(k) - cx_1(k)
 \end{aligned}$$

Que escrito em espaço de estados na forma vetorial, fica:

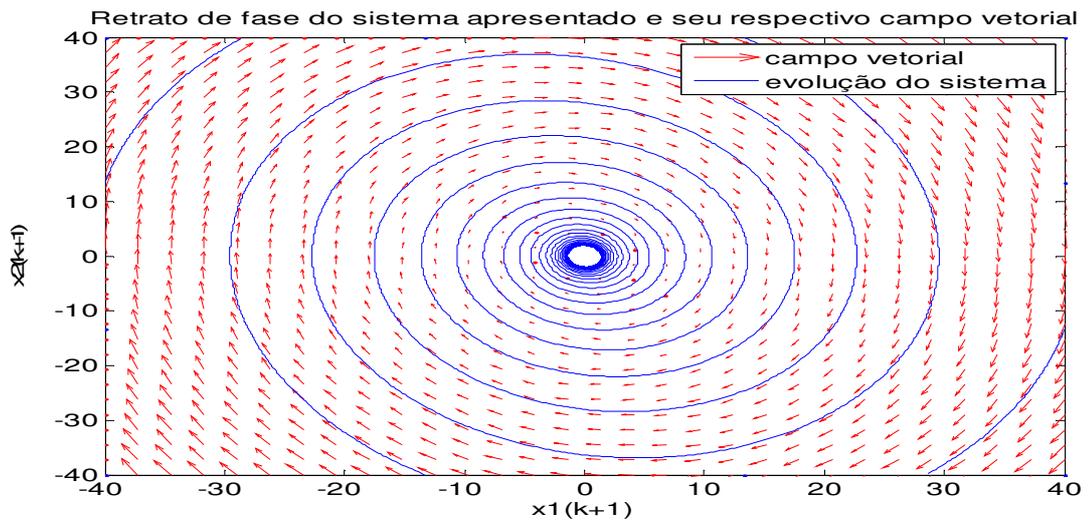
$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{x}_2(k) \\
 \mathbf{x}_2(k+1) &= -b\mathbf{x}_2(k) - c\mathbf{x}_1(k)
 \end{aligned}$$

Ao identificarmos o sistema linear acima utilizando uma RBF e considerando  $b = 0,25$  e  $c = 2$ , obtivemos a seguinte resposta para um ponto de equilíbrio definido na origem e condições iniciais em -1 e 1.

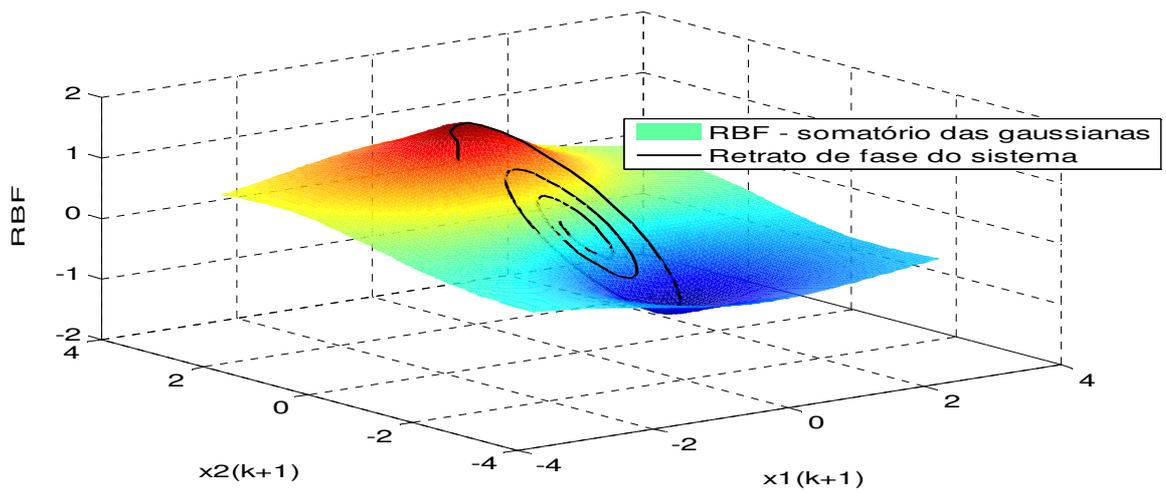
(a)



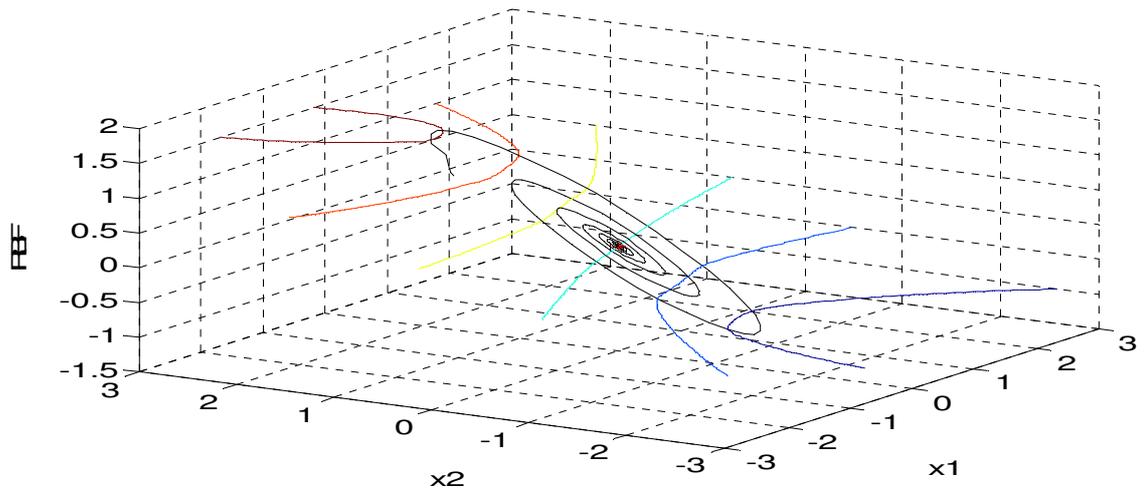
(b)



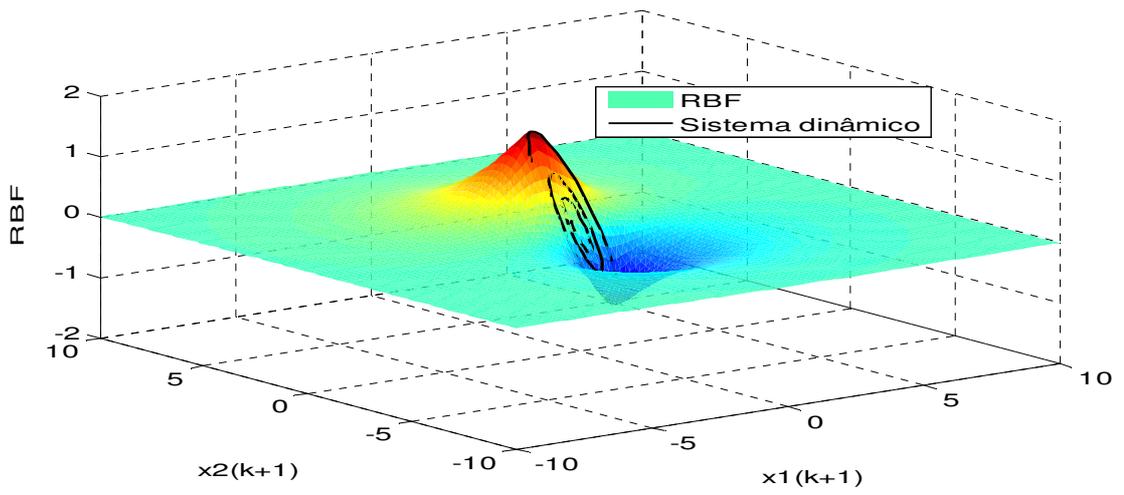
(c)



(d)



(e)



(f)

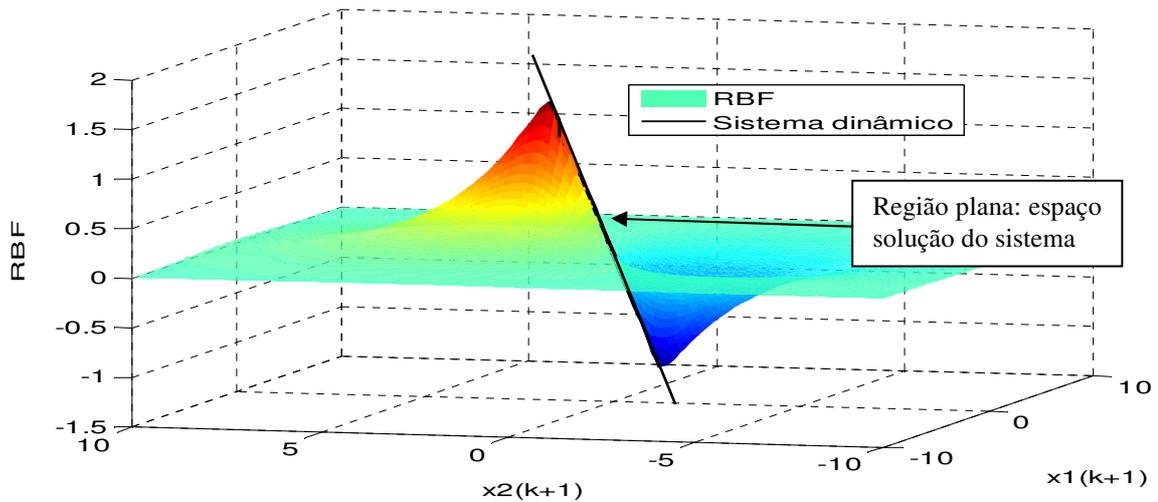


Figura 30 – Identificação de um sistema dinâmico linear através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.

O nosso objetivo ao apresentar o conjunto de figuras acima é discutir os conceitos teóricos apresentados até o presente.

Na figura 30(a) temos a resposta temporal da equação de diferenças em função do tempo discreto ao ser aplicado um impulso no sistema, que após um determinado tempo volta à condição de repouso, ou seja, seu estado de equilíbrio.

Na figura 30(b) não precisamos representar explicitamente o tempo discreto, isto é possível graças à reconstrução do espaço de estados do sistema, onde podemos observar a configuração geométrica das trajetórias em torno do ponto fixo do sistema, bem como a estabilidade do citado ponto apresentando-se como um *foco estável*.

Na figura 30(c) podemos observar as bacias de atração do sistema proveniente e geradas pela RBF. Na figura 30(d), temos o mesmo gráfico anterior apresentado na forma de contornos das gaussianas, para uma melhor visualização da região de atração do sistema.

Na figura 30(e) temos o gráfico ampliado para mostrar uma característica inerente às funções de base radial gaussianas, ou seja, na medida em que não temos mais uma dinâmica no sistema as gaussianas tendem a zero. E, finalmente na figura (f) podemos observar uma característica dos sistemas lineares, a presença da não

linearidade é caracterizada como uma região plana na dinâmica do sistema, ou seja, o espaço solução do sistema é um plano.

Seguindo nossa análise, iremos agora investigar a estrutura do espaço de fase de alguns sistemas físicos modelados por equações diferenças de baixa ordem a partir de uma rede RBF. Nosso interesse maior está centrado na estrutura e organização global de órbitas periódicas e caóticas presentes nestes sistemas. Nosso foco aqui é dar uma abordagem sobre a estabilidade inerente às redes RBF. Concentramos nossas investigações em alguns sistemas físicos presentes na literatura de sistemas não lineares, bem como na planta de corrente do motor de indução.

A grande vantagem no uso das RBF na análise deste tipo de estrutura se deve ao fato das mesmas oferecerem um baixo custo computacional na implementação de tais modelos.

A metodologia que utilizaremos na análise dos diagramas de fases de tais sistemas é baseada nas RBF, a novidade introduzida aqui será mostrarmos a estabilidade de estruturas utilizando RBF na análise de tais sistemas. A grande vantagem dessa simples análise é visualizarmos facilmente as região de não linearidade dos sistemas.

Para a construção dos diagramas as equações diferenças dos sistemas são aproximadas pela rede RBF, através de (5.13). A seguir iremos expandir nossa análise a sistemas discretos não lineares.

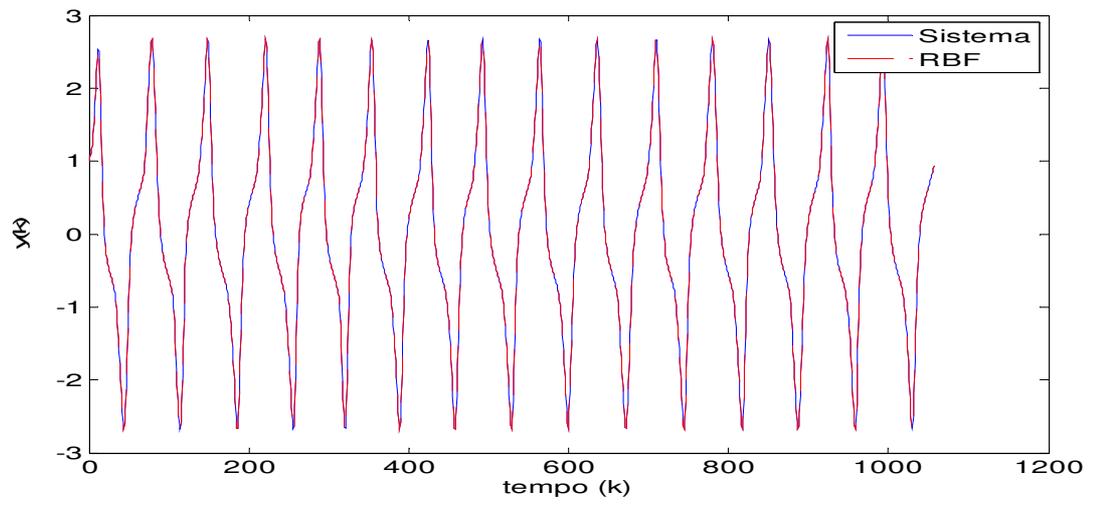
### **Sistema discreto não linear**

Iremos agora demonstrar a identificação por parte da rede RBF e posterior análise do diagrama de fase de um sistema não linear bastante conhecido na literatura: a equação de Van der Pol (descrita no capítulo 3), temos:

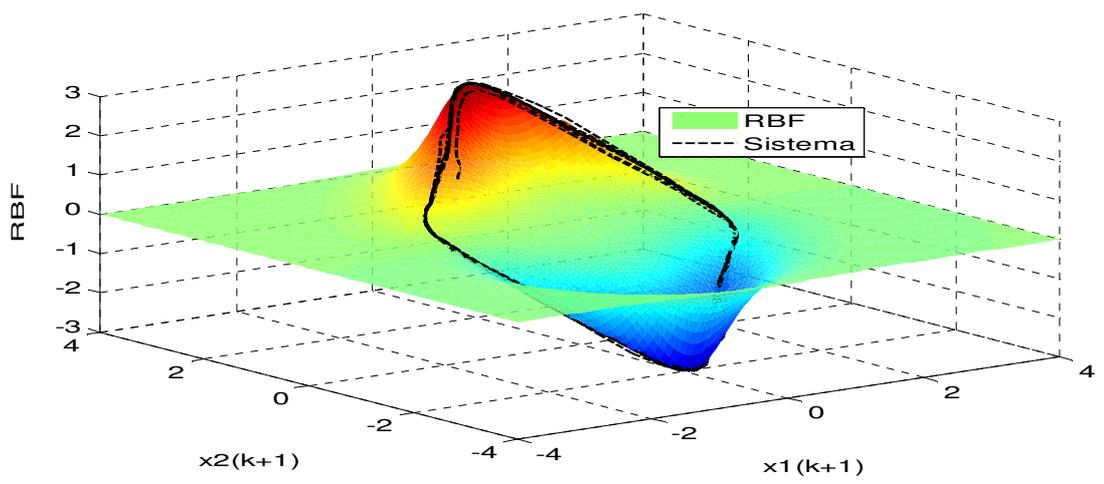
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2(k+1) &= -\mu(\mathbf{x}_1^2 - 1)\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

Ao identificarmos o sistema não linear acima utilizando uma RBF e considerando  $\mu = 1$ , obtivemos a seguinte resposta.

(a)



(b)



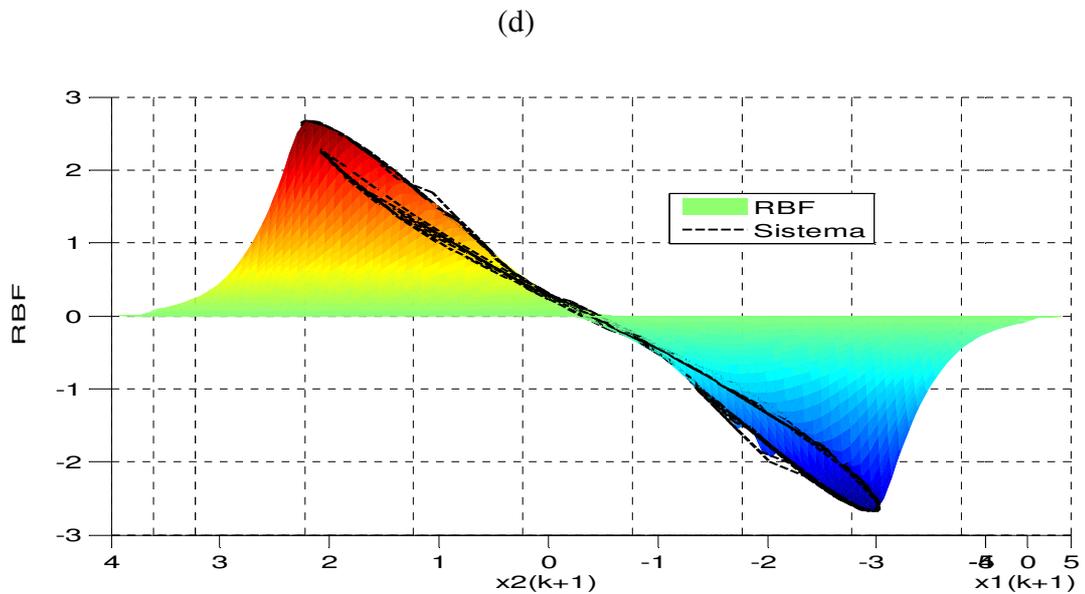
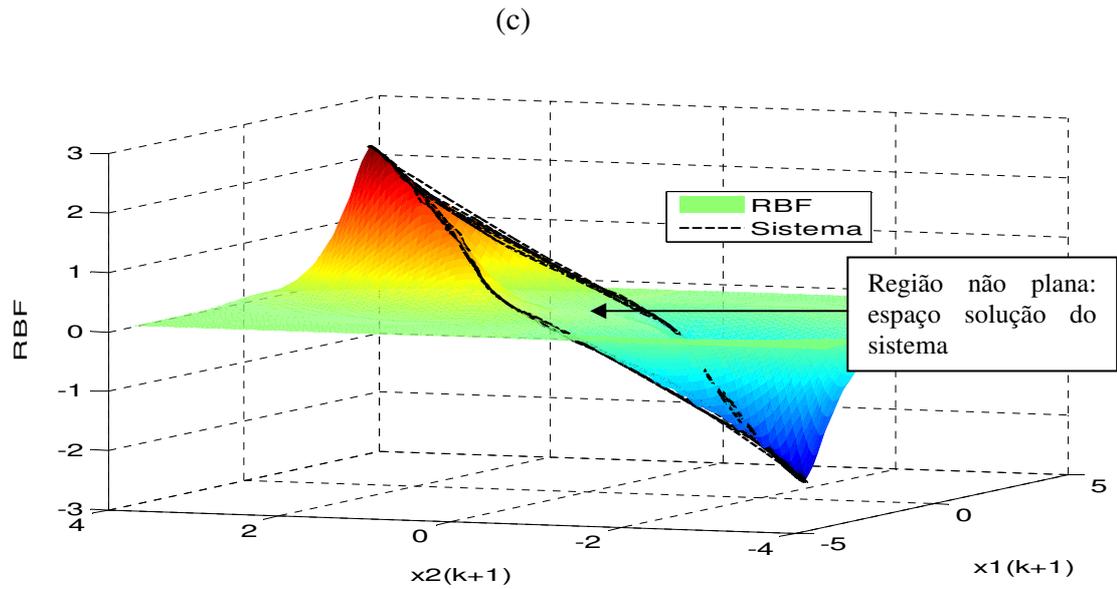


Figura 31 – Identificação de um sistema dinâmico não linear (equação de Van der Pol) através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.

Na figura 31(a) temos a resposta temporal da equação de Van der Pol em função do tempo discreto.

Na figura 31(b) podemos observar as bacias de atração do sistema proveniente e geradas pela RBF. Bem como um comportamento inerente a sistemas não lineares: o *ciclo limite*. Na figura 31(c) podemos observar uma característica dos sistemas não lineares, a presença da não linearidade é caracterizada como uma região não plana na dinâmica do sistema, ou seja, o espaço solução do sistema apresenta não linearidades. a figura 31(d) corresponde a figura 31(c) vista através de outro ângulo de rotação.

Para finalizarmos nossos testes com sistemas conhecidos vamos validar um oscilador caótico. Para a validação de sistemas dinâmicos não lineares com dinâmica caótica, o fundamental é encontrar características fundamentais de tais sistemas que possam ser utilizados para validar os modelos obtidos. Para exemplificar um sistema dinâmico caótico, iremos utilizar o circuito Chua, que é um dos sistemas mais utilizados na atualidade como paradigma para o estudo e análise de dinâmica não linear e caos. O circuito em si está mostrado na figura 32. Tal circuito têm resistência negativa e é o elemento que confere energia ao sistema permitindo, assim, manter o circuito oscilando. No circuito, a não linearidade é devida à presença do diodo de Chua.

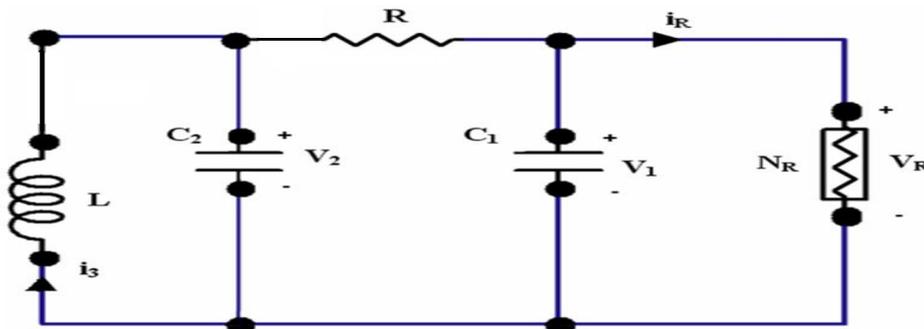


Figura 32 – O circuito Chua.

Um exemplo de regime caótico é mostrado na figura 33. Essa figura mostra os dados imersos no plano de fase. Tal recurso é extremamente útil na análise de sistemas caóticos, uma vez que a variável tempo não é representada no plano ou retrato de fase. Nesse plano, a ênfase é dada pela representação dos diversos padrões dinâmicos envolvidos [Aguirre,2007].

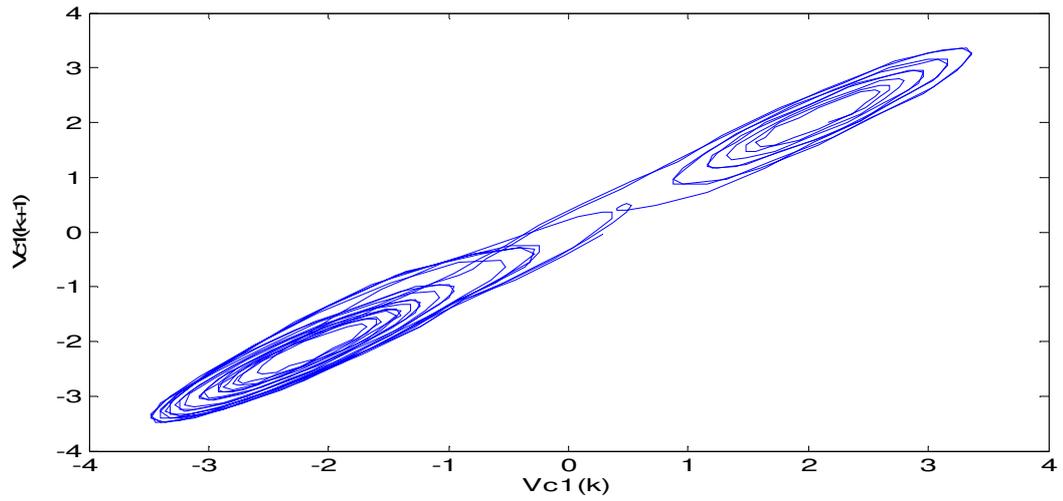
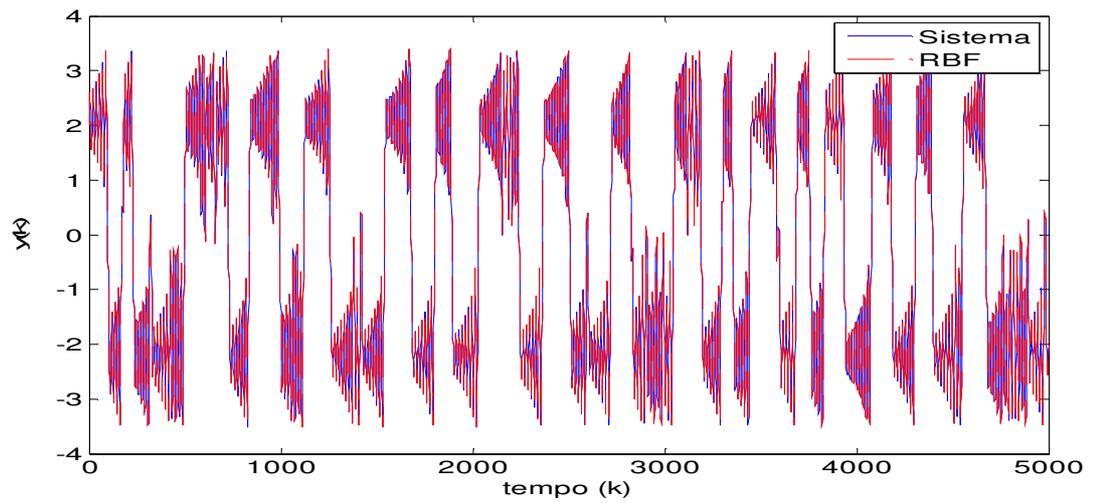


Figura 33– Atrator dupla volta, obtido a partir de observações da tensão sobre o capacitor  $C_1$  do circuito de Chua. As unidades dos eixos são volts.

(a)



(b)

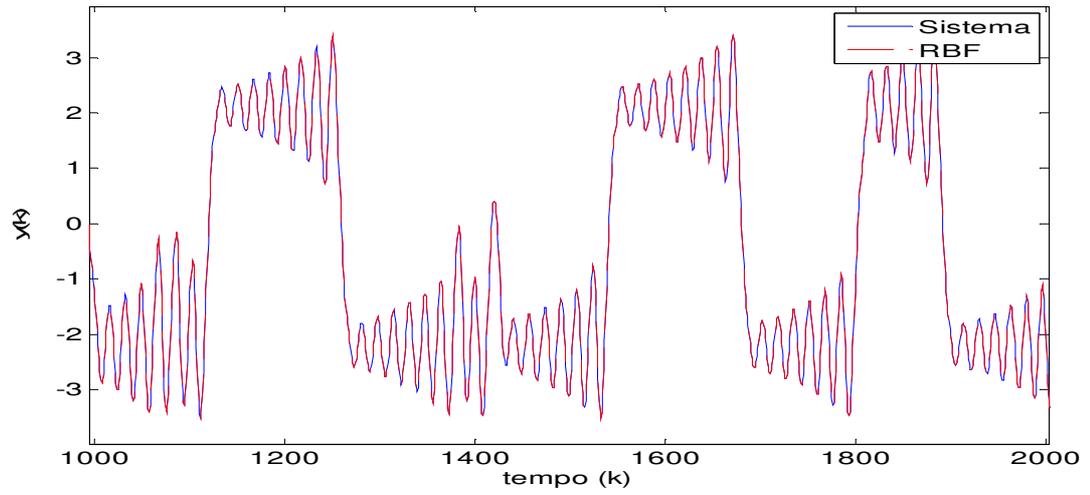
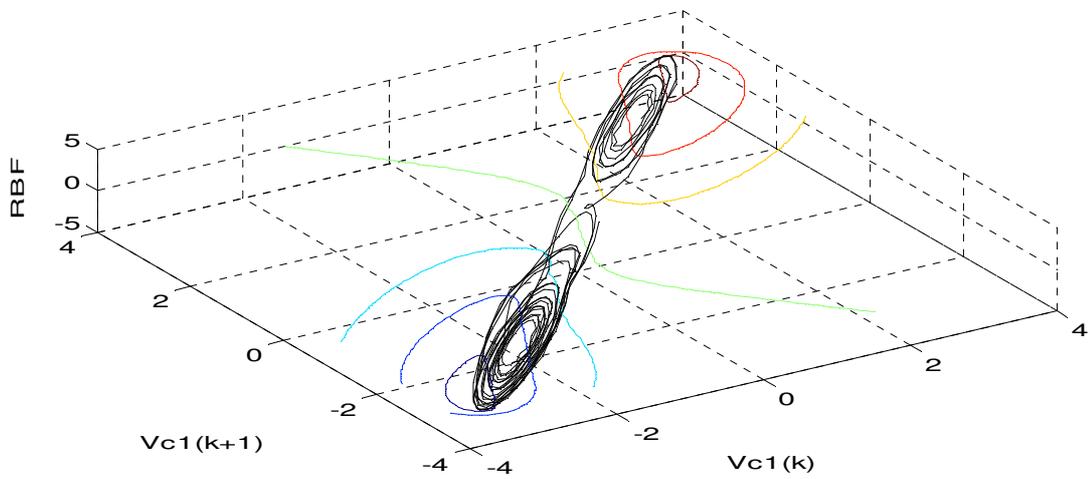


Figura 34— Resposta temporal do atrator dupla volta e o respectivo modelo identificado pela RBF. Nota-se que devido as oscilações do modelo serem caóticas a análise por resposta temporal torna-se difícil.

(a)



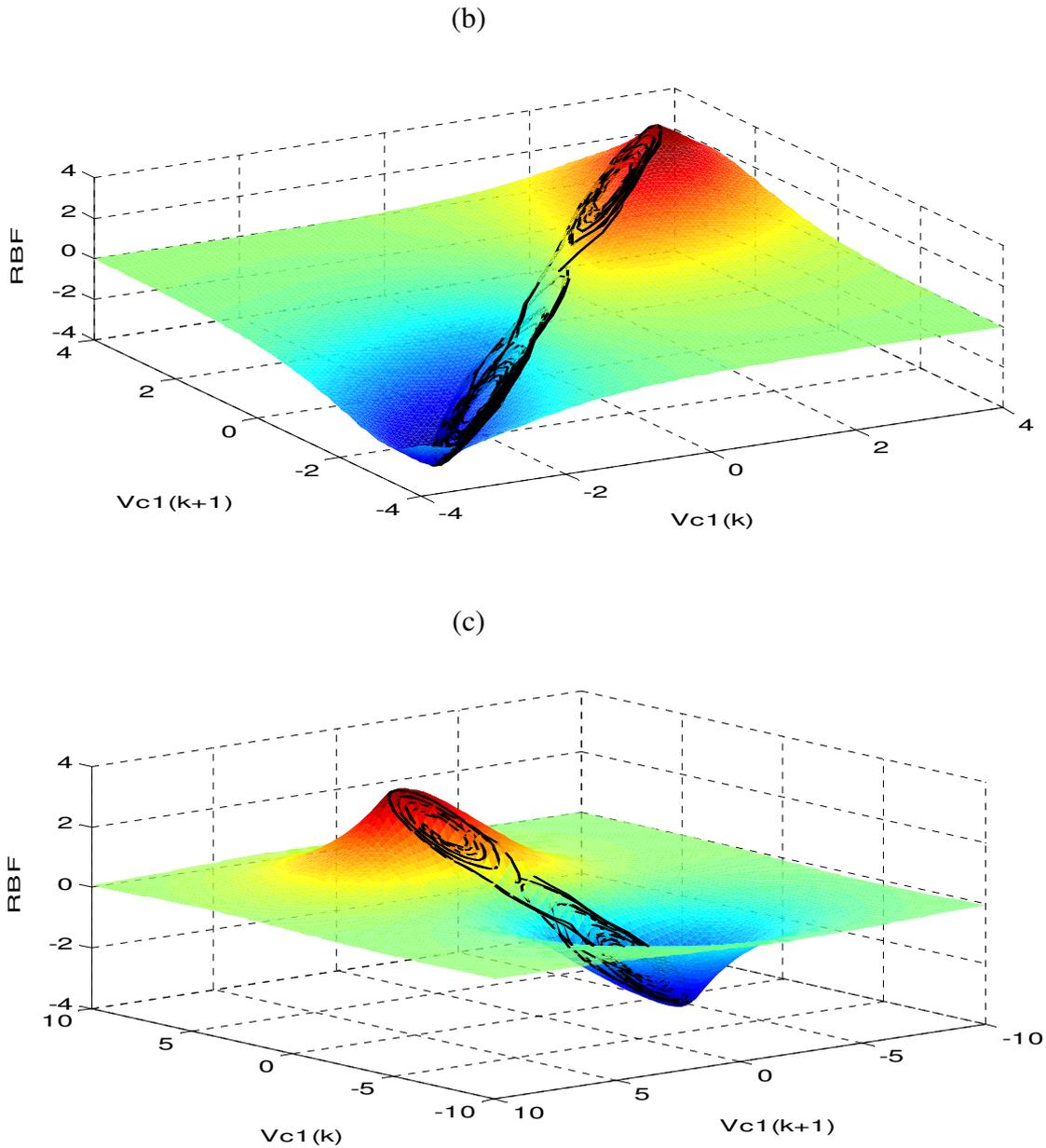


Figura 35 – Identificação de um sistema dinâmico não linear (circuito Chua) através de uma rede RBF e seus diferentes gráficos gerados para análise dos resultados obtidos.

Na figura 35(a) temos as curvas de contorno da RBF mostrando as bacias de atração do sistema para o diagrama de fase do circuito de Chua.

Na figura 35(b) podemos observar as bacias de atração propriamente ditas bem como o diagrama de fase do circuito de Chua, mostrando que a rede RBF aprendeu a dinâmica caótica de tal sistema. Na figura 35(c) podemos observar a figura anterior

rotacionada em outro ângulo, os eixos dos gráficos representam a tensão sobre o capacitor  $C_1$  em função da resposta obtida pela rede RBF.

É importante ressaltar que todos os comportamentos dinâmico dos sistemas físicos foram simulados pela rede RBF, então nas legendas das figuras onde se lê RBF, na verdade representa as bacias de atração do sistema representadas pelo somatório das gaussianas e os diagramas de fase são provenientes da rede RBF, depois da fase de treinamento e aprendizagem do sistema físico, todas as simulações foram executadas pela estrutura da figura 29, ou seja, uma vez que a RBF aprende o comportamento do sistema a ser identificado a mesma possui a capacidade de representá-lo bem.

### **Sistema discreto não linear – a planta de corrente do motor de indução**

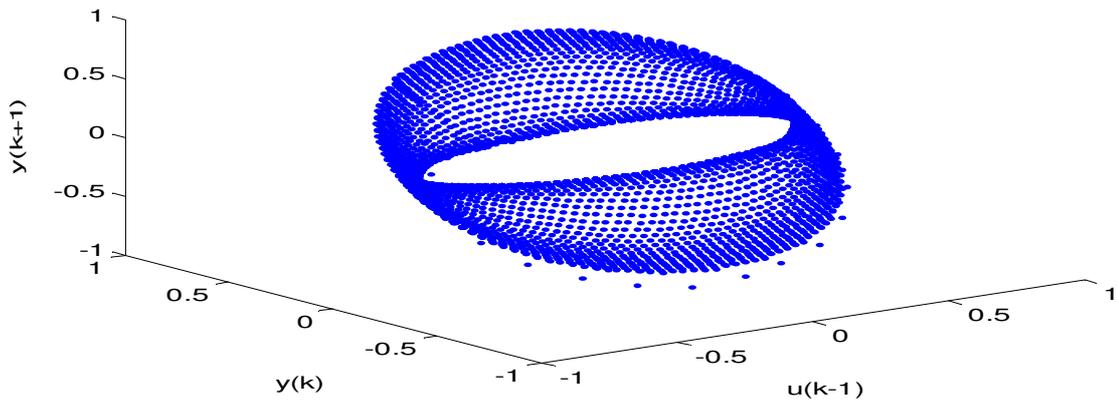
Após uma série de testes com sistemas conhecidos para ilustrar a robustez da rede RBF em processos de identificação de sistemas, iremos utilizá-la para a análise da dinâmica do problema proposto inicialmente, ou seja, a identificação de uma planta de corrente de um motor de indução.

Após a etapa de treinamento e validação do modelo, para a obtenção do vetor de parâmetros (pesos) utilizaremos a estrutura mostrada na figura 29 para analisarmos toda a dinâmica do processo.

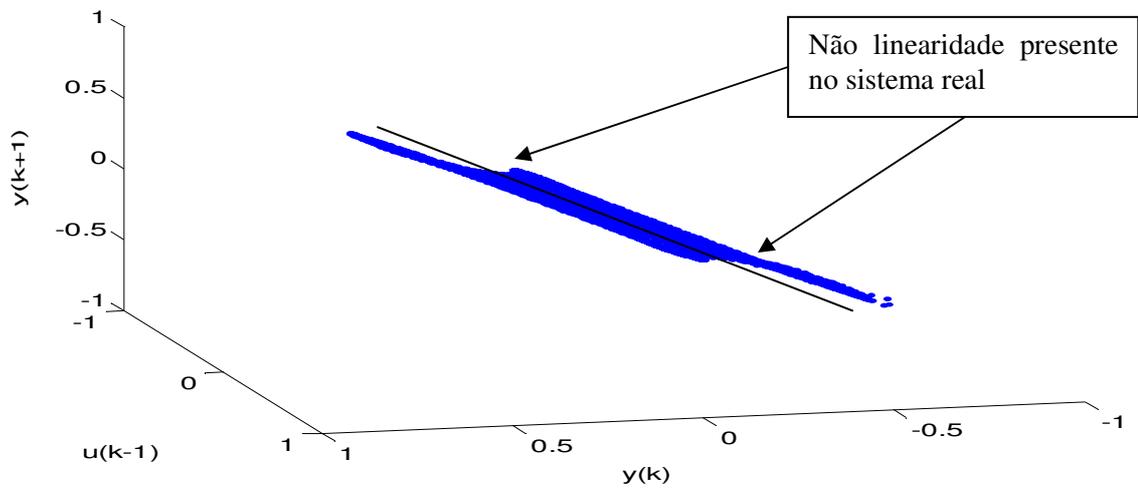
Nos testes seguintes iremos desconsiderar a predição temporal, uma vez que uma pequena perturbação nas condições iniciais ou nos parâmetros do modelo resulta em predições temporais completamente distintas [Aguirre, 2007]. Uma forma de contornarmos essa dificuldade é trabalharmos com um espaço onde o tempo não seja explicitado como já foi comentado anteriormente. De forma que uma seqüência vetorial de pontos no espaço pode ser representada como uma trajetória ou evolução do sistema, ou do modelo imerso no espaço de estados criado pela rede RBF. A importante observação a ser feita é que se duas seqüências temporais forem produzidas pelo mesmo sistema, nas mesmas condições, ainda que apresente comportamento caótico, ou seja, ainda que as duas seqüências sejam distintas no tempo, ao serem inseridas no espaço de estados ambas as trajetórias estarão sob o mesmo objeto, no caso os atratores criados pela rede RBF. A maioria dos atratores no espaço de estados são robustos a pequenas

perturbações nas condições iniciais e nos parâmetros e ,portanto, se prestam para validar modelos não lineares com ou sem dinâmica caótica.

(a)



(b)



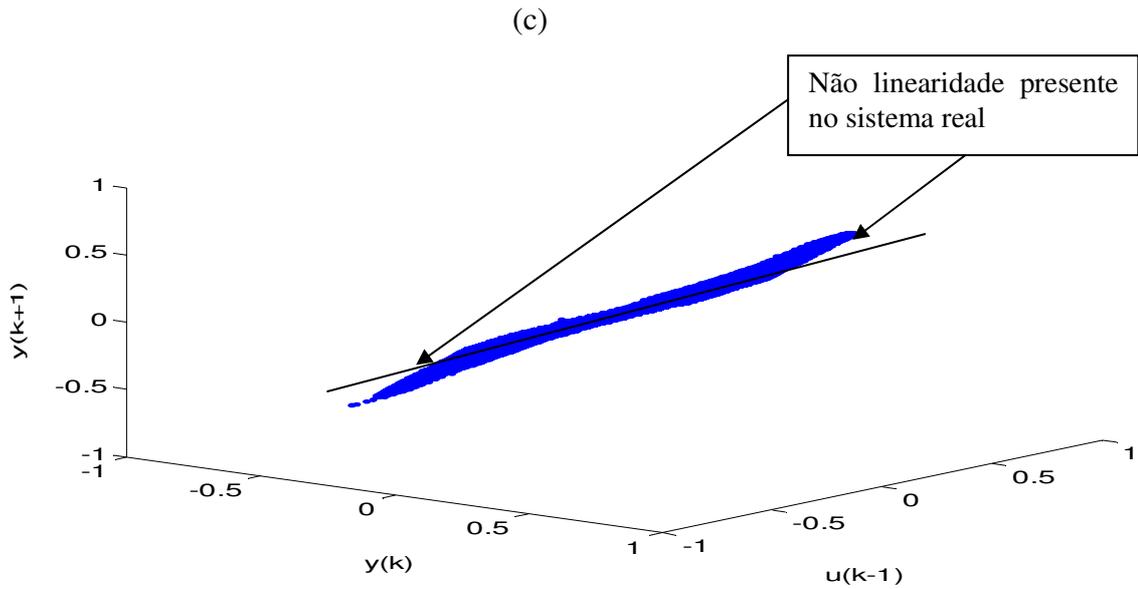
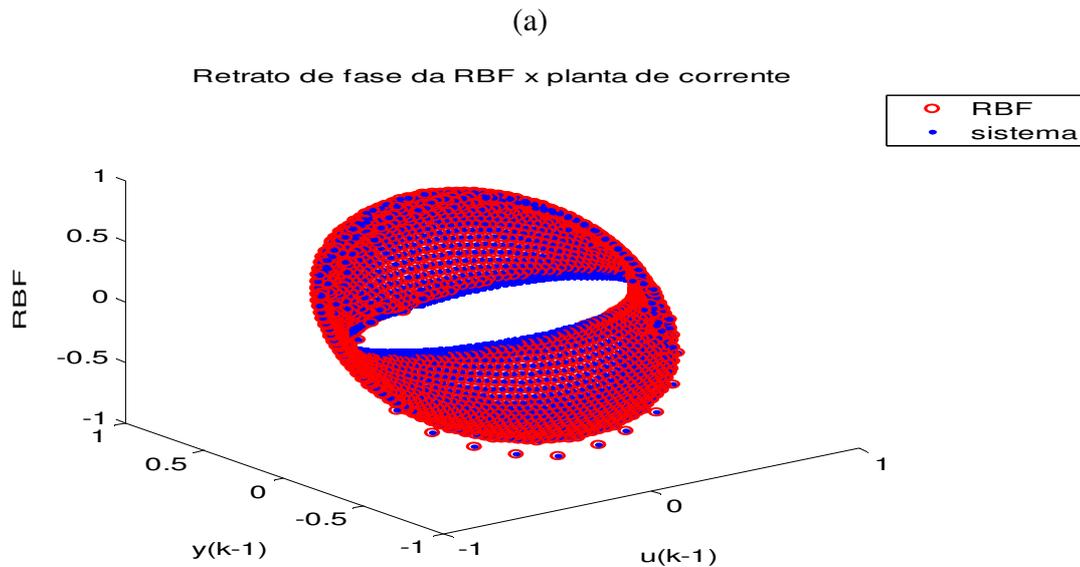


Figura 36 - o diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução.

Na Figura 36(a) temos as o diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução. Na figura 36(b) podemos observar a região de não linearidade do sistema, para comparação foi colocado uma reta interceptando o diagrama de fase de forma a ressaltar a não linearidade do sistema. Na figura 36(c) podemos observar a figura anterior rotacionada, ressaltando a região de não linearidade.

A seguir serão apresentados os gráficos de resposta da rede RBF juntamente com o diagrama de fase da planta de corrente.



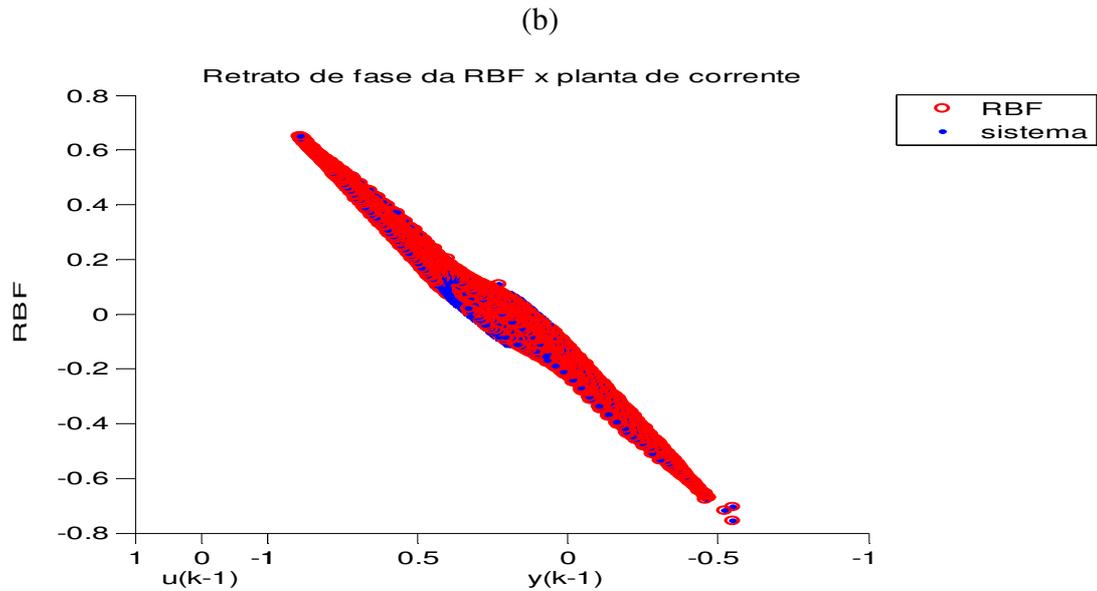
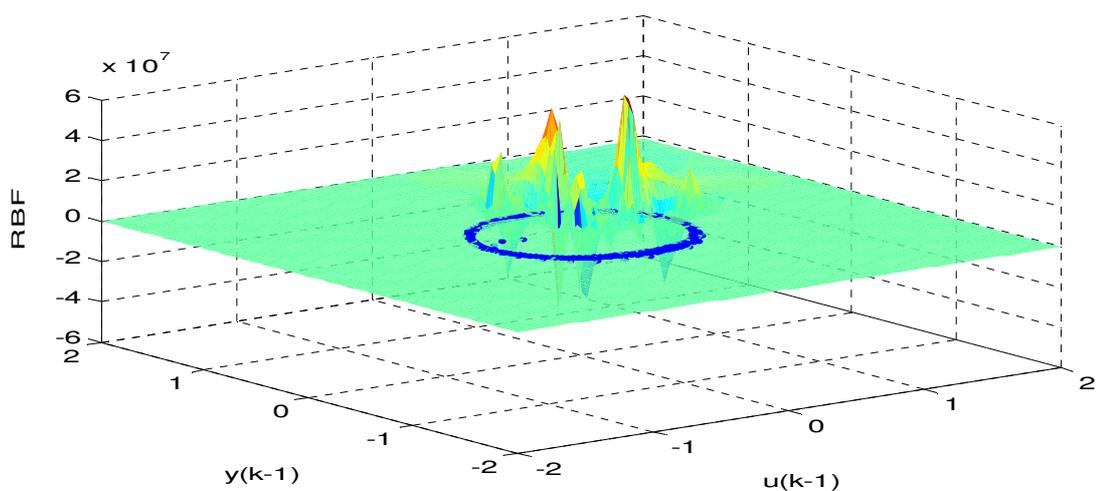


Figura 37 - o diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução e da rede RBF.

Na figura 37(a) temos as o diagrama de fase da planta de corrente do motor de indução e da rede RBF. Na figura 37(b) podemos observar a região de não linearidade do sistema e da rede RBF.de forma a ressaltar a não linearidade do processo.

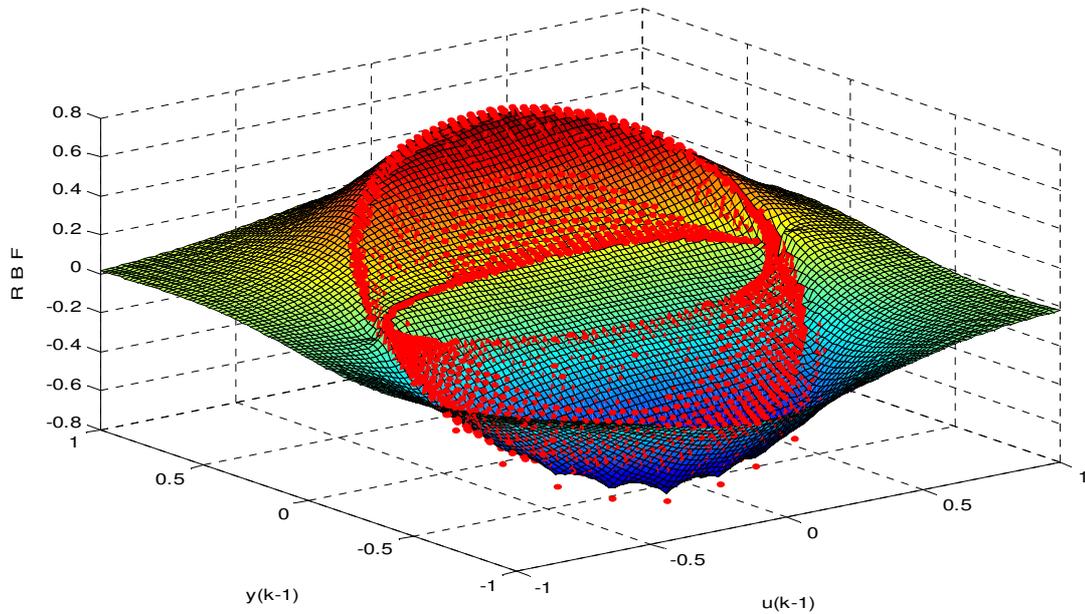
Os gráficos seguintes levam em conta apenas os dados obtidos da rede RBF, ou seja, a análise será feita a partir da estrutura apresentada na figura 29.

O gráfico abaixo representa a importância de escolhermos os centros utilizados nas funções de base a partir do conjunto de treinamento, ou seja, escolhidos dos dados reais da planta.

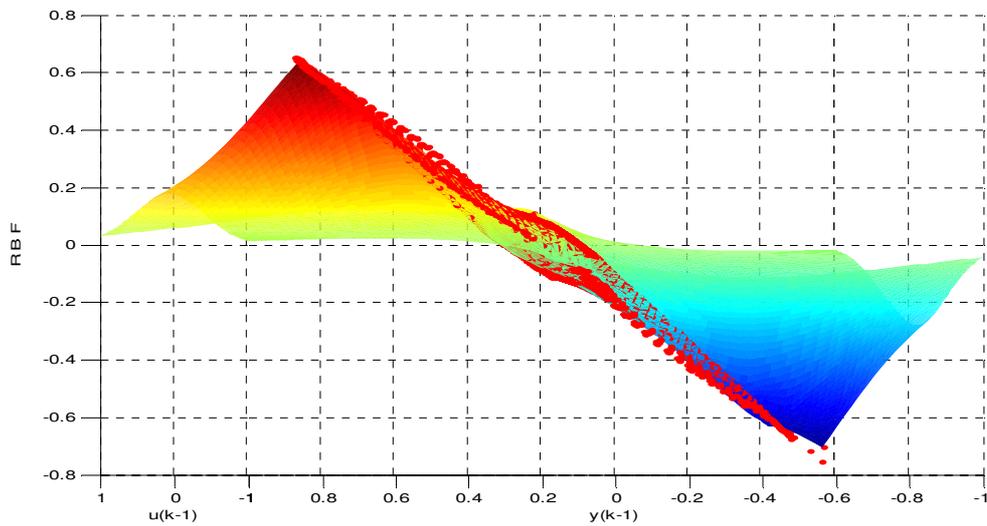


Ao observarmos a figura anterior podemos visualizar que quando escolhemos os centros de forma errada o sistema não convergirá para o espaço solução e tampouco irá apresentar uma resposta satisfatória. No entanto, uma boa escolha de centros e dos demais parâmetros de regulação irá promover uma boa generalização da RBF.

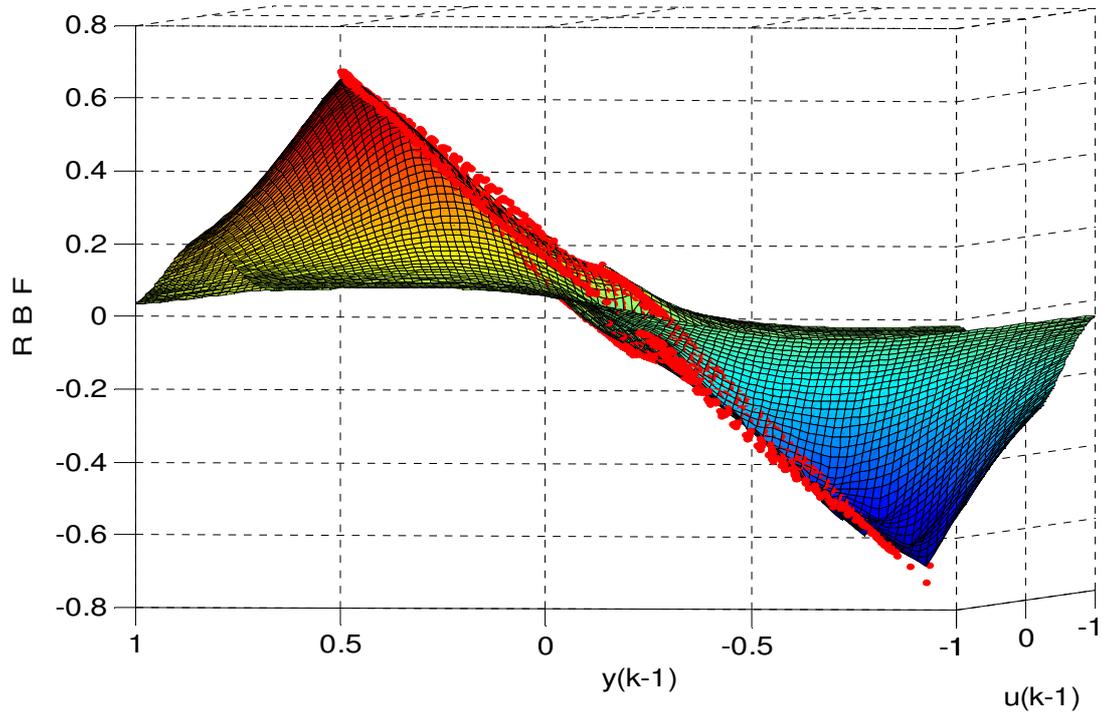
(a)



(b)



(c)



(d)

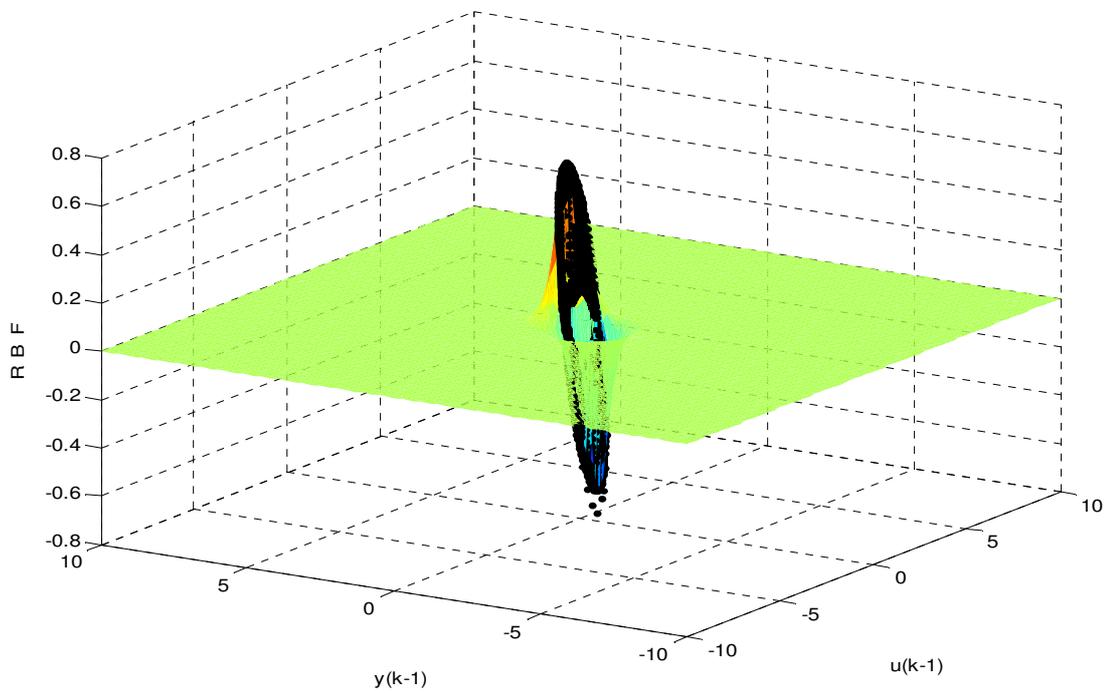


Figura 38 - O diagrama de fase da rede RBF após a identificação da planta de corrente do motor de indução e sua generalização.

Ao analisarmos os gráficos da figura 38, podemos observar algumas propriedades da dinâmica da rede RBF, primeiramente ao analisarmos a figura 38(a) podemos visualizar a região de atração do sistema e nas figuras subseqüente 38(b) e 38(c) podemos observar a representação da não linearidade do sistema real sendo simulada pela rede RBF, sem a presença de dados reais. Ou seja, a comprovação de que a RBF não somente aprendeu a dinâmica do sistema como possui a capacidade de generalização. No entanto ao analisarmos os resultados do gráfico apresentado na figura 38(d), começamos a observar uma característica inerente às redes RBF, ou seja, à medida que os estados do sistema tendem ao infinito as funções gaussianas tendem a ficarem nulas de forma que a representação em espaço de estados proposto em (5.13) fica:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &\cong 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como visto acima, quando os estados do sistema de identificação tendem ao infinito para tornar o sistema instável, a RBF garante que os parâmetros ajustáveis são limitados. No esquema de identificação estudado as funções de base geram uma área de influência determinada pelos centros e pela norma euclidiana. Definida por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x_i - c_j\|^2\right) - a \Rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x_i - c_j\|^2\right) = a \\ -\frac{1}{2\sigma^2}\|x_i - c_j\|^2 &= \log a \Rightarrow \|x_i - c_j\|^2 = 2\sigma^2 \log \frac{1}{a} \Rightarrow \|x_i - c_j\| = \sigma \sqrt{2\log\left(\frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

E representada graficamente como:

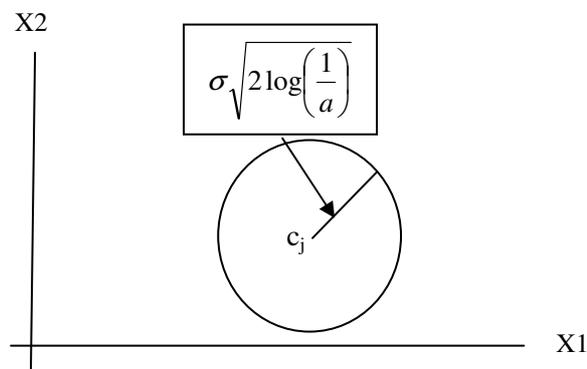
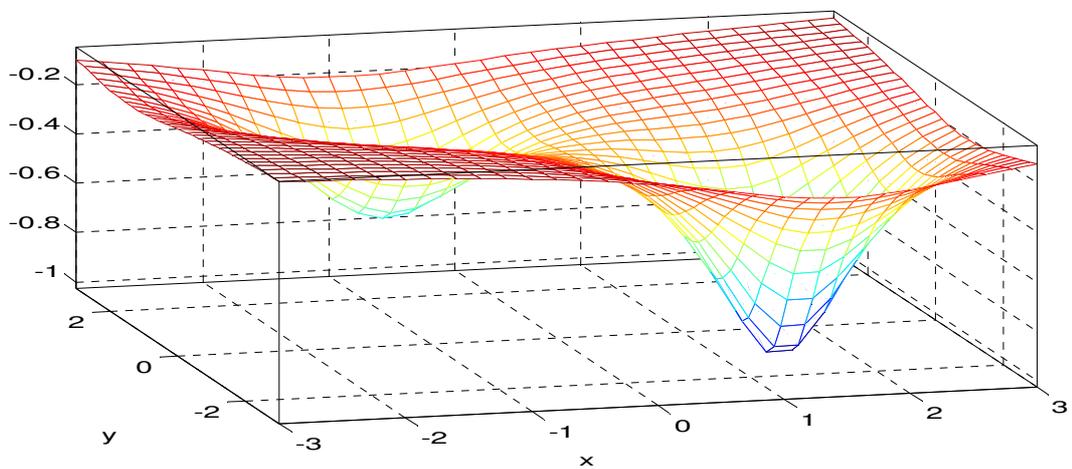


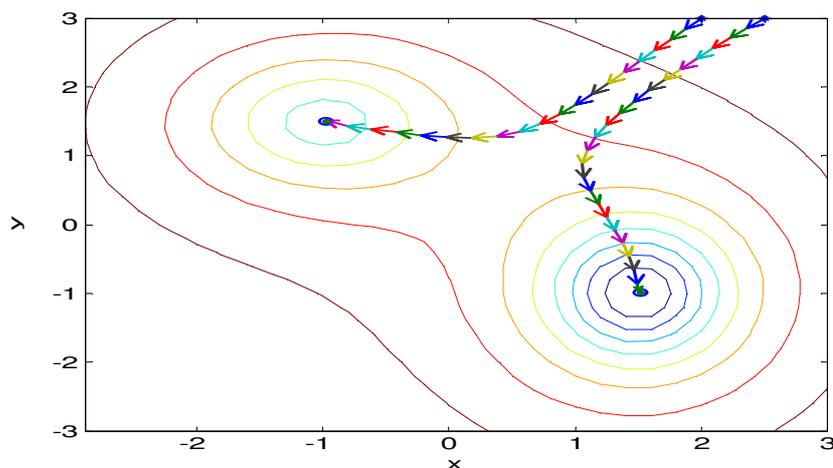
Figura 39– Campo de atuação em que o domínio da variável  $x$  é confinado por um círculo de raio definido pela norma euclidiana.

no entanto ao analisarmos o que foi exposto, podemos concluir que a medida que a função a ser aproximada se afasta de uma função de base gaussiana, a contribuição dessa diminui, justamente devido ao fato de que à medida que aumenta-se a norma euclidiana entre os vetores de entrada e os centros, as exponenciais diminuem, fazendo com que a rede RBF em no máximo dois passos volte a dinâmica do sistema, tornando-a uma estrutura inerentemente estável, conforme pode ser visualizado nas figuras seguintes. As figuras abaixo (a) e (b) nos dão uma idéia visual do processo. A contribuição máxima de uma função de base radial para aproximar uma função é quando a norma é nula, de forma que  $\exp(0) = 1$  [[Liu, et al. ,1996].

(a)



(b)



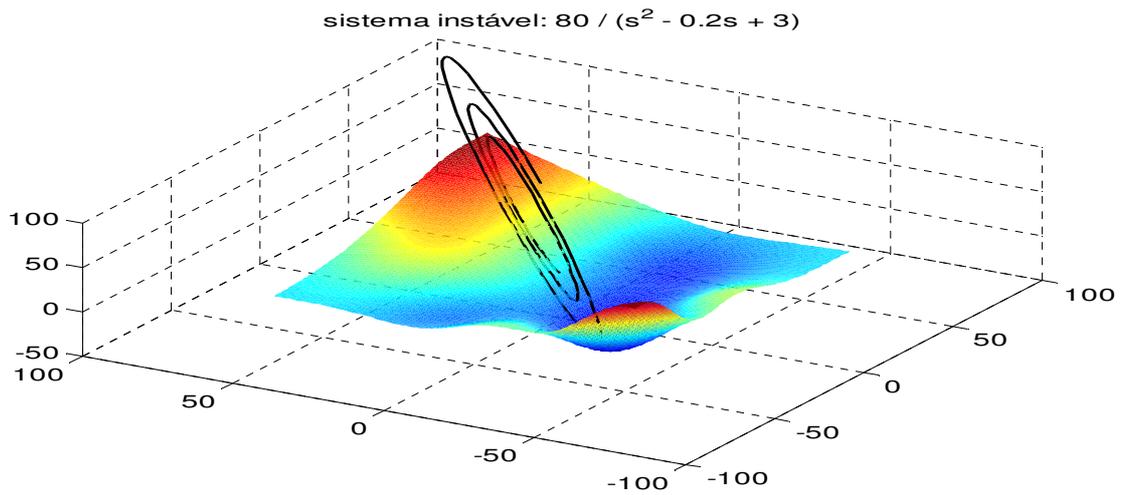


Figura 40– Aproximação de uma rede RBF para um sistema linear instável.

Se analisarmos a figura 40, vemos a simulação de um sistema linear instável (raízes do polinômio característico complexas conjugadas com parte real positiva:  $-0.1000 + 1.7292i$  e  $0.1000 - 1.7292i$ ), no entanto, ao analisarmos os gráfico podemos ver que embora o sistema tenda a evoluir para a instabilidade a RBF não permite que os estados do sistema fujam do controle. Caracterizando a estabilidade inerente da RBF.

As figuras 41 e 42 complementam as afirmações.

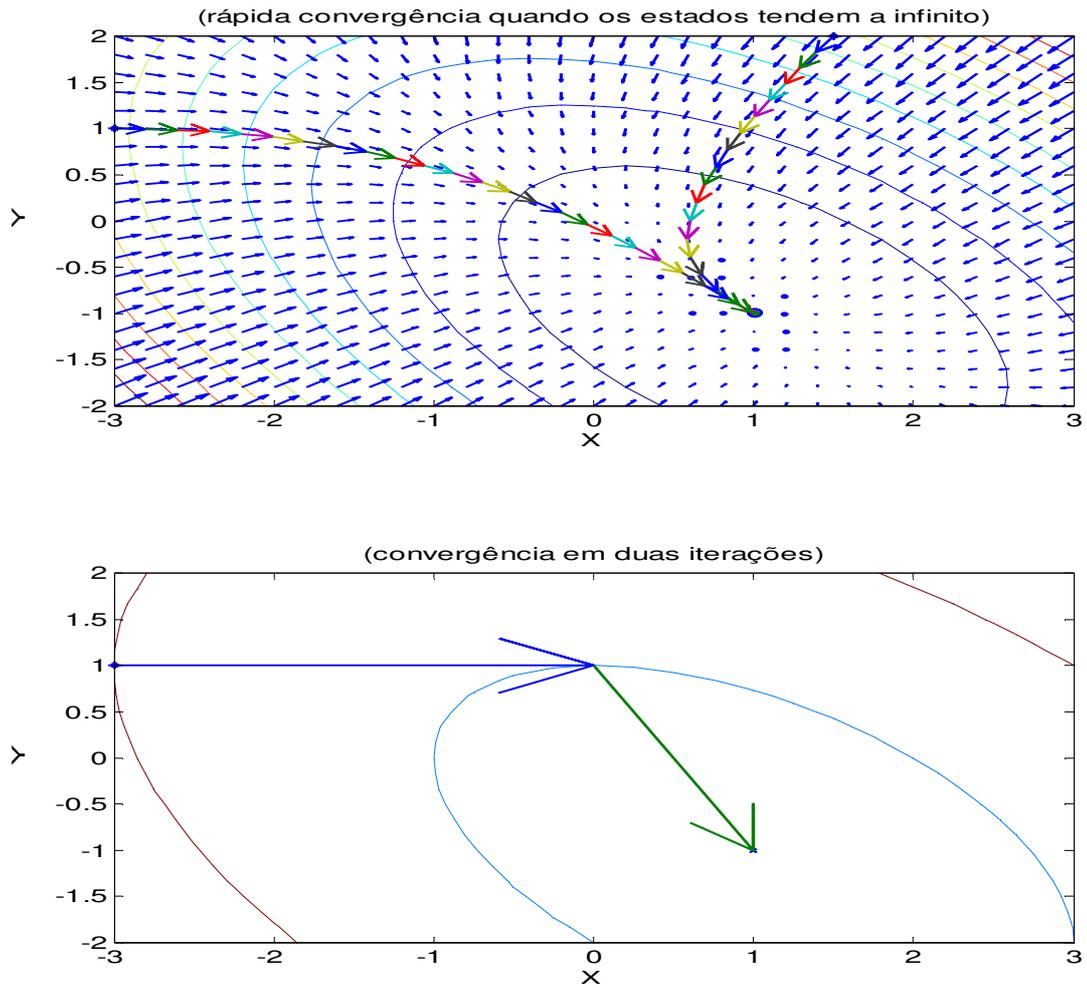


Figura 41– Estabilidade inerente a uma rede RBF.

Para comprovarmos a estabilidade assintótica da RBF, podemos analisar a expressão (5.12). em que:

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k+1) &= x_2(k) - x_1(k) \\ \Delta x_2(k+1) &= f_{RBF} - x_2(k)\end{aligned}$$

Se a função RBF tende a zero, a matriz *jacobiana* do sistema fica:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao analisarmos o traço da matriz *jacobiana* e o seu determinante, temos o traço negativo e o determinante positivo, eis um típico sistema inerentemente estável, conforme diagrama de fase abaixo:

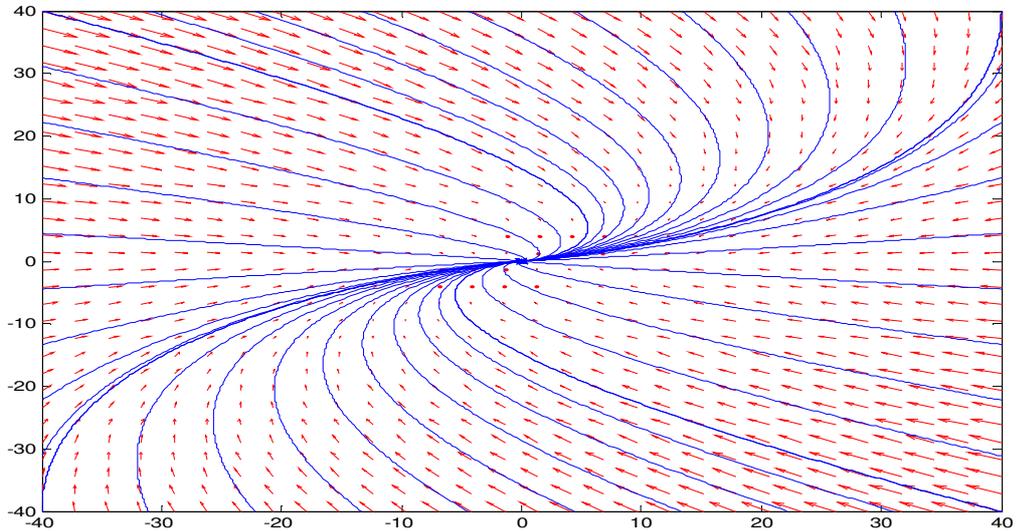


Figura 42– Sistema inerentemente estável.

Depois de analisarmos todos os gráficos, concluímos a presença de uma estabilidade assintótica inerente às funções de base radial gaussianas, caracterizando a grande contribuição deste trabalho, conforme demonstrado ao longo do texto e dos vários gráficos apresentados.

# CONCLUSÃO

---

A ferramenta matemática proposta e implementada computacionalmente no Matlab® durante o desenvolvimento da pesquisa e apresentada ao longo desta dissertação, dentre outras potencialidades, mostrou-se eficiente na resolução de um dos problemas da engenharia moderna: a modelagem de uma planta, supostamente desconhecida e com características não-lineares significativas, empregando recursos matemáticos manipuláveis algebricamente e em computador, de modo a permitir testes e uma análise do comportamento dinâmico da rede RBF a partir de dados obtidos da planta de corrente do motor de indução, sem provocar a instabilidade do sistema e ao mesmo tempo otimizando algum critério de desempenho formulado.

Esta dissertação aborda a análise e a síntese das funções de base radial gaussianas em um típico problema de aproximação de funções. Uma característica peculiar destas mostrada ao longo do texto é o fato das mesmas serem aproximadores universais com uma arquitetura simples e capaz de representar complexos mapeamentos não lineares, utilizando funções de base não lineares e parâmetros de ajuste, ou seja, as redes RBF podem ser vistas como uma estrutura matemática de aproximação multivariada, sendo freqüentemente aplicada em teoria de aproximação moderna, o que a torna uma ferramenta que pode ser utilizada na modelagem e identificação de sistemas não lineares.

As contribuições deste estudo estão concentradas principalmente no capítulo 05. Sendo que os capítulos anteriores oferecem os conceitos básicos para o posicionamento e as justificativas apresentadas neste.

Como trabalhos futuros, deveremos testar a estrutura em outros modelos não lineares, e num conjunto maior de dados com outros sinais de entrada, e não somente uma entrada senoidal, para obtermos uma maior abrangência e uma consolidação do modelo, bem como testar a mesma com alterações em seus parâmetros de regulação para as mais diversas situações.

Devemos dar um maior embasamento teórico ao conceito de estabilidade inerente das redes RBF apresentado.

Quanto ao método de análise, observa-se que o mesmo mostrou-se eficiente e preciso.

Como continuidade desta pesquisa, sugere-se a análise de outros sistemas em diferentes situações com funções de base radial e com outras funções de base para uma análise comparativa de diversos métodos na resolução de um mesmo problema, bem como *heurísticas* na escolha dos centros utilizados na fase de treinamento.

## REFERÊNCIAS

---

Aguirre, L.A. (2007), *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais – 3ª Edição*. Editora da UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Aguirre, L.A. & editores (2007), *Enciclopédia de automática controle & Automação – vol. II*. Editora Blucher, São Paulo, SP, Brasil.

Aguirre, L.A. & editores (2007), *Enciclopédia de automática controle & Automação – vol. III*. Editora Blucher, São Paulo, SP, Brasil.

Arrowsmith,D.,Place,C.M. (1992), *Dynamical systems : Differential equations, maps and chaotic behavior*, Chapman Hall, London, UK.

Bishop, C. M. (2006), *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, New York, NY, USA.

Bishop, C. M. (1995), *Neural Networks for pattern recognition*, Clarendon Press, Oxford,UK.

Broomhead, Lowe D.,(1988), *Multivariable functional interpolation and adaptive networks – complex systems*, vol 01, pag. 321-355.

Buhmann, M. D., (2003), *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press (Cambridge).

Coelho, A.A.R., Coelho, L.S.(2004), *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*, Editora da UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

Dorf, R.C.,Bishop,R.H.(2001),*Sistemas de controle moderno – 8ª Edição*, LTC – Livros técnicos e científicos, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Edwards, C.H. Jr., Penney, D. E. (1995), *Equações Diferenciais Elementares com problemas de contorno – 3ª edição*, Prentice Hall, Rio de Janeiro, RJ – Brasil.

Fasshauer, G. E., (2008), *Meshfree Approximation Methods with MATLAB® - Interdisciplinary Mathematical Science – vol. 6* – Mainland Press, Singapore.

Franklin, G.F.; Powell, J.D.; Emami-Naeini, A. (1994) – *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3a. edição, Addison-Wesley.

Haykin, S. (1999), *Redes Neurais – Princípios e prática 2ª Edição*, Bookman, Porto Alegre, RS- Brasil.

Haykin, S. (2009), *Neural Networks and Learning Machines 2ª Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey- USA.

Hunt, K. J., Hass, R. and Murray Smith, R. (1996), *Extending the functional equivalence of radial basis function network and fuzzy inference systems*, IEEE Trans. Neural Networks 7, pp.776 – 781.

Isermann, R. (1992), *Identification of Dynamical Systems: An Introduction With Applications*, Springer-Verlag, New York, USA.

Jang, Jyh-Shing Roger, *Neuro – Fuzzy and soft computing : a computational approach to learning and machine intelligence*, Prentice Hall, 1997, Upper Saddle River, New Jersey- USA.

Kalil, Hassan K. (1996), *Nonlinear systems, 2st edition*, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Ljung, L. (1987), *System Identification – Theory for the user, 2st edition*, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Ljung, L. Söderström, T. (1987), *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT PRESS, USA.

Liu, G. P., Kadiramanathan, V., Billings, S. A.( 1996) *Stable sequential identification of continuous nonlinear dynamical systems by growing radial basis function networks - International Journal of Control* vol. 65 pag. 53-69, Taylor & Francis.

Monteiro, L. H. A.(2006), *Sistemas Dinâmicos – 2ª Edição*, Editora livraria da física, São Paulo, SP - Brasil

Nelles, O. (2001), *Nonlinear system Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*, Springer – Verlag, Berlin, Germany.

NØrgaard, M., Ravn, O. ,Poulsen, N.K., Hansen, L.K.(2003), *Neural Networks for modeling and control of Dynamic systems*, Springer – Verlag, London, UK.

Poggio, T. and Girosi, F. (1990), *Networks for approximation and learning*, Proc. IEEE 78, pp. 1481-1497.

Powell, M. J. D. (1987), *Radial Basis Functions for multivariable interpolation: a review*, in *Algorithms for the approximation of Functions and Data*, Oxford Univ. Press (Oxford), pp. 143-167

Principe J.C., Neil, R., Lefebvre, W. Curt.(2000), *Neural and Adaptive Systems-Fundamentals Through Simulations*, John Wiley & sons, New York, USA.

Simmons, George F. (2008), *Equações diferenciais: teoria, técnica e prática*, MCGRAW-Hill interamericana do Brasil LTDA, São Paulo, SP, Brasil.

Theodoridis, S.(1999), *Pattern Recognition - 1st edition*. Academic Press, USA.

Vapnik, V.N.,(2000), *The Nature of Statistical Learning Theory – 2st edition*, Springer – Verlag, New York, NY, USA.

Vapnik, V.N.,(1998), *Statistical Learning Theory*, John Wiley & Sons, Canada.

Vukic, Z., Kuljaca, L., Donlagic, D., Tesnjak, S. (2003), *Nonlinear control systems*, Marcel Dekker, Inc., Basel, NY, USA.

Wendland, H.(2005), *Scattered Data Approximation*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge , UK.

Zill, D.G.(2003), *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, SP – Brasil.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)