UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ENUMERAÇÃO DE ESPECTRO DE DISTÂNCIAS DE ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA EM TRELIÇA EMPREGANDO CODIFICAÇÃO TURBO

Aline Farias Gomes de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Humberto César Chaves Fernandes

NATAL – RN

Junho de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ENUMERAÇÃO DE ESPECTRO DE DISTÂNCIAS DE ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA EM TRELIÇA EMPREGANDO CODIFICAÇÃO TURBO

Aline Farias Gomes de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Humberto César Chaves Fernandes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e da Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

NATAL – RN

Junho de 2010

Divisão de Serviços Técnicos

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Sousa, Aline Farias Gomes de.

Enumeração de espectro de distâncias de esquemas de modulação codificada em treliça empregando codificação turbo / Aline Farias Gomes de Sousa. – Natal, RN, 2010.

85 f. il.

Orientador: Humberto César Chaves Fernandes.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós- Graduação em Engenharia Elétrica.

1. Sistema de comunicação – Dissertação. 2. Modulação codificada em treliça – Dissertação. 3. Códigos turbo – Dissertação. 4. Técnica de perfuração - Dissertação. I. Fernandes, Humberto César Chaves. II. Título.

RN/UF/BCZM CDU 621.391(043.3)

ENUMERAÇÃO DE ESPECTRO DE DISTÂNCIAS DE ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA EM TRELIÇA EMPREGANDO CODIFICAÇÃO TURBO

ALINE FARIAS GOMES DE SOUSA

Dissertação de Mestrado aprovada em 14 de junho de 2010 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profº. Drº. Humberto César Chaves Fernandes (Orientador) ..... UFRN

Profª. Drª. Suzete Élida Nóbrega Correia (Examinadora Externo) ..... IFPB

Profº. Drº. Cláudio Rodrigues Muniz (Examinador Interno) ..... UFRN

Profº. Msc. Luiz Guedes Caldeira (Examinador Externo) ..... IFPB

“Á minha mãe, em quem sempre me inspirei, por sua garra e por seu carinho, a quem sou eternamente grata, por ter me dado a base necessária para mais uma realização e ao meu esposo, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão que me fortaleceram e me conduziram para mais uma conquista.”

"O homem tem ciência das coisas da terra

mas a sabedoria é dom de DEUS."

Jó: 28.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS pela saúde, perseverança e iluminação, inteligência suprema que sempre me ajudou e ensinou.

Aos meus pais, Josefa Farias e Jessé Pedro, e ao meu irmão Jessé Júnior, pelo amor, pelo carinho e pelo apoio que sempre me dedicaram, que me ajudaram a terminar mais essa etapa.

A minha irmã, em especial, porque além de ser minha irmã foi também amiga e companheira durante todo o mestrado, me acompanhou nas horas difíceis e me ajudou sempre que podia, compartilhando seus conhecimentos científicos.

Ao meu esposo e amigo Ageu Cordeiro, pelo carinho, pelo apoio, pela ajuda e dedicação exclusiva, pela paciência que teve comigo em todos os momentos difíceis, por compartilhar toda a minha ansiedade durante a realização deste trabalho.

Ao professor Humberto César, pelo apoio, pela orientação e por todos os conselhos que me deu durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Luiz Guedes Caldeira, que tive o prazer de ter como colaborador em todo o desenvolvimento deste trabalho, pela dedicação, pelas cobranças e por ter me presenteado com sua amizade e confiança, sempre se mostrando disponível e paciente nos momentos de necessidade.

Aos professores e amigos do PPGEEC-UFRN e do IFPB que contribuíram para o sucesso desta dissertação.

Aos meus amigos Roberto Rannieri, Bruna Alice, Adelson, Jannayna, Náthelee e Luciano, pela sincera amizade que começou no mestrado e que durará por toda a vida.

Aos grandes amigos do grupo TECFOTON, Leonardo Caetano, Hugo Michel, João Kleber, Marinaldo Sousa e George Dennes, que tive o prazer de compartilhar o dia a dia na UFRN.

À Capes e ao CNPQ pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho é feita uma análise de desempenho de esquemas de transmissão empregando modulação codificada turbo em treliça. Em geral, a análise de desempenho de tais esquemas é guiada pelo cálculo da probabilidade de erro destes esquemas. O cálculo exato desta probabilidade é muito complexo e ineficiente sob o ponto de vista computacional, uma alternativa muito utilizada é o emprego de limitante da união da probabilidade de erro, por ser de fácil implementação computacional e produzir limitantes que convergem rapidamente. Por se tratar do limitante da união, este deve utilizar de expurgo de alguns elementos do espectro de distâncias do código para a obtenção de um limitante apertado. A principal contribuição deste trabalho é que a enumeração proposta é realizada a partir da perfuração a nível de símbolo e não a nível de bit como na maioria dos trabalhos da literatura. O principal motivo do uso da perfuração a nível de símbolo reside no fato que a função enumeradora do esquema turbo é obtida diretamente das seqüências complexas de sinais através da treliça e não de forma indireta a partir da seqüências binárias que exigem posterior mapeando binário para complexo, como proposto por trabalhos anteriores. Assim, podem ser aplicados algoritmos completamente matriciais a partir da matriz adjacência, que é obtida a partir do cálculo das distâncias das seqüências complexas da treliça e não das seqüências binárias. Neste trabalho também são apresentados dois algoritmos matriciais de redução de estados do codificador bem como do cálculo da função de transferência deste. Os resultados apresentados em forma de comparações dos limitantes obtidos utilizando a técnica proposta com alguns códigos turbo da literatura corroboram com a proposição deste trabalho que os limitantes expurgados obtidos são apertados e os algoritmos completamente matriciais são facilmente implementados em qualquer *software* de programação simbólica.

Palavras chave: Modulação Codificada em Treliça, Códigos Turbo, Função de Transferência, Espectro de Distancias, Técnica de Perfuração.

ABSTRACT

In this work, a performance analysis of transmission schemes employing turbo trellis coded modulation. In general, the performance analysis of such schemes is guided by evaluating the error probability of these schemes. The exact evaluation of this probability is very complex and inefficient from the computational point of view, a widely used alternative is the use of union bound of error probability, because of its easy implementation and computational produce bounds that converge quickly. Since it is the union bound, it should use to expurge some elements of distance spectrum to obtain a tight bound. The main contribution of this work is that the listing proposal is carried out from the puncturing at the level of symbol rather than bit-level as in most works of literature. The main reason for using the symbol level puncturing lies in the fact that the enummerating function of the turbo scheme is obtained directly from complex sequences of signals through the trellis and not indirectly from the binary sequences that require further binary to complex mapping, as proposed by previous works. Thus, algorithms can be applied through matrix from the adjacency matrix, which is obtained by calculating the distances of the complex sequences of the trellis. This work also presents two matrix algorithms for state reduction and the evaluation of the transfer function of this. The results presented in comparisons of the bounds obtained using the proposed technique with some turbo codes of the literature corroborate the proposition of this paper that the expurgated bounds obtained are quite tight and matrix algorithms are easily implemented in any programming software language

***Key words**: Trellis Coded Modulation, Turbo Codes, Transfer Function, Distance Spectrum, Puncturing Technique.*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS

ASK - *Amplitude shift keyning*

BER - *Bit error rate*

BPSK - B*inary phase shift keyning*

DE - Diagrama de Estados

DSE - Diagrama de super estados

ED - Espectro de distâncias

FER - *Frame error rate*

FSM - F*inite state machine*

FT - Função de Transferência

IOWEF - *Input output weigth enumeration function*

MAP - *Maximum a posteriori*

MIMO - *Multiple input*, *multiple output*

PSK - P*hase shift keyning*

QAM - *Quadrature amplitude modulation*

QPSK - *Quadrature phase shift keyning*

RAGB - Ruído aditivo Gaussiano branco

SISO - *Soft-input*, *soft-output*

SNR - *Signal to noise ratio*

SOVA - S*oft-output Viterbi algorithm*

TCM - *Trellis coded modulation*

TTCM - *Turbo trellis coded modulation*

B - Matriz adjacência

B' - Matriz adjacência reduzida

B* - Matriz adjacência reduzida e aberta

$\mathbf{B}_{BB}$ - Sub matriz entre os estados (ruim, ruim)

$\mathbf{B}_{BG}$ - Sub matriz entre os estados (ruim, bom)

$\mathbf{B}_{GB}$ **-** Sub matriz entre os estados (bom, ruim)

$\mathbf{B}_{GG}$ - Sub matriz entre os estados (bom, bom)

$\mathbf{B}^*_{punct}$ - Matriz adjacência reduzida com efeito da perfuração

$\mathbf{C}^{(j)}$ - Vetor de entrada do codificador

D - Matriz adjacência divergente

M - Matriz adjacência convergente

P - Matriz adjacência paralela

$\mathbf{V}^{(j)}$ - Vetor de saída do codificador

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A história da codificação de canal, para controle de erro, data desde a teoria de Shannon (SHANNON, 1948), que afirmava que se a informação for transmitida a uma taxa menor que a capacidade do canal podem ser empregados códigos corretores de erro de forma a obtermos uma probabilidade de erro zero ou tão pequena quanto se queira. A partir da década de 50 muitos esforços foram concentrados em pesquisas para a produção de bons códigos corretores de erro, sendo que a classe de códigos de bloco lineares pioneira foram introduzidas por Hamming em 1950 (HAMMING, 1950). A partir de então as pesquisas foram divididas basicamente em duas vertentes: i) códigos de blocos lineares onde o ponto forte são as estruturas algébricas e ii) codificação seqüencial cujo ponto forte é a decodificação probabilística. A segunda vertente é o objeto de estudo deste trabalho, onde estão incluídos os códigos convolucionais.

Recentemente, as pesquisas em teoria de códigos têm proposto estruturas poderosas objetivando maximizar o compromisso entre melhor desempenho e baixa complexidade.

Dentre as técnicas de codificação propostas, os códigos turbo (BERROU et. al., 1993) têm sido de grande atratividade para os pesquisadores, pelo seu excelente desempenho em faixas de relação sinal ruído baixa, até então pouco exploradas pela codificação clássica, bem como pela sua atrativa decodificação iterativa.

Embora inicialmente os códigos turbo tenham sido propostos na forma binária, ultimamente têm sido propostos esquemas de codificações poderosos que associam a codificação turbo com transmissão em altas taxas empregando modulação codificada em treliça (TCM - *trellis coded modulation*) (UNGERBOECK, 1982). Os esquemas de transmissão que utilizam alto ganho de codificação e altas taxas de transmissão são chamados TTCM (*turbo trellis coded modulation*) e apresentam tanto características da codificação turbo quanto de esquemas TCM.

Os projetos de bons códigos dependem, em muito, da ferramenta que se adota como guia do projeto. Uma ferramenta muito utilizada em projetos de bons códigos é o espectro de distâncias (ED) do código. O ED fornece muitas informações sobre o desempenho do código e permite, a partir deste, a obtenção de bons limitantes da probabilidade de erro. Como o cálculo da exata probabilidade de erro de esquemas de transmissão codificados é uma tarefa que envolve intenso esforço computacional e grande número de iterações em integração numérica. Este método para o cálculo da exata probabilidade de erro é praticamente descartado. Um método muito atrativo é o método em que se emprega limitantes da probabilidade de erro. Como existe uma relação muitíssimo estreita entra a probabilidade de erro e o ED, este último é então largamente empregado como ferramenta principal em análise de desempenho de códigos.

O objetivo deste trabalho é fazer a enumeração do ED de esquemas TCM empregando codificação turbo, propondo uma modificação na abordagem da função enumeradora original de esquemas turbo binários. Essa abordagem é baseada na enumeração do código perfurado diretamente das saídas complexas e não na enumeração da perfuração de saídas binárias, como vem sendo utilizado na maioria dos trabalhos da literatura.

Um aspecto muito atrativo da técnica de enumeração apresentada é que todos os algoritmos apresentados são completamente matriciais e não utilizam inversão de matrizes, o que permite a implementação de forma mais eficiente em qualquer *software* de programação simbólica, como MAPLE, MATLAB, Matemática, entre outros. Análises similares apresentadas na literatura utilizam-se de algoritmos que fazem exaustivas buscas nas treliças dos codificadores, o que leva a muito tempo de processamento e uso elevado de memória.

As simulações foram realizadas considerando o canal RAGB (Ruído Aditivo Gaussiano Branco). Os resultados obtidos mostraram que os limitantes obtidos foram bem apertados, o que corrobora a técnica proposta.

Este trabalho, dividido em capítulos, está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 são abordadas as principais características dos sistemas de comunicação digital. Serão também apresentados alguns conceitos básicos esquemas de transmissão TCM. É definida a matriz adjacência de esquemas TCM e um algoritmo de redução de estados também é apresentado.

No Capítulo 3 são abordados os códigos turbo, descrevendo alguns conceitos iniciais sobre códigos turbo binário e estendendo estes conceitos para esquemas TTCM. E por último a técnica de perfuração, proposta desse trabalho.

No Capítulo 4 tratou-se da probabilidade de erro de esquemas TTCM, a partir da probabilidade de erro de esquemas TCM, empregando o limitante da união. Neste capítulo é descrito o algoritmo para redução da matriz adjacência do DSE e um algoritmo para o cálculo da função de transferência de esquemas TCM, ambos completamente matriciais. Ao final deste capítulo são apresentados os resultados deste trabalho, em forma de comparações dos limitantes obtidos com a técnica proposta com alguns códigos da literatura.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões do trabalho, bem como suas principais contribuições. Finalmente, são propostas algumas possibilidades de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

Um sistema de comunicações digitais tem como principal característica o fato de um conjunto finito de mensagens ser transmitido através do canal de comunicações. Várias técnicas de processamento digital de sinais foram propostas nas últimas décadas, para que a transmissão fosse efetuada com alta confiabilidade.

Observa-se, atualmente, uma crescente utilização de técnicas de comunicação digital em vários serviços de telecomunicações. Essa tendência pode ser explicada por vários motivos, como por exemplo:

- Facilidade de regeneração do sinal digital;
- Incorporação de técnicas de processamento digital de sinais, que resultam em maior imunidade a ruído;
- Uso de métodos criptográficos para manter a integridade da informação;
- Possibilidade de usar várias técnicas de acesso múltiplo;
- Baixo consumo de potência.

Este capítulo é dedicado à descrição de um sistema de comunicações digitais codificado em treliça. Na seção 2.1 será apresentada uma descrição do diagrama em blocos deste sistema de comunicações. Será apresentado, na seção 2.2, um sistema de comunicações digitais codificado em treliça, isto é, um sistema de comunicação onde o codificador e o modulador são uma única entidade, e será feita também uma descrição da técnica TCM (*trellis coded modulation*). Na seção 2.3 será apresentada a matriz adjacência de esquemas TCM. E na seção 2.4 será ilustrado o algoritmo de redução de estados.

2.1 Caracterizações de um Sistema de comunicações

A Figura 2.1 ilustra o diagrama em blocos de um sistema de comunicações digitais empregando TCM. As subseções seguintes detalharão cada bloco.

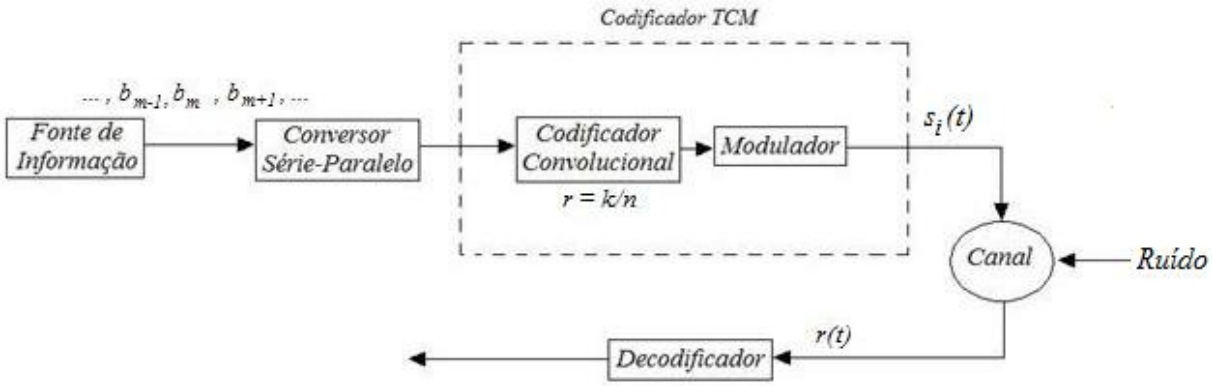

Figura 2.1 Diagrama em blocos de um sistema de comunicações digitais empregando TCM.

2.1.1 Fonte de Informação

A fonte de informação emite símbolos discretos. Uma fonte discreta é caracterizada por um alfabeto, por uma taxa de informação (em símbolos por segundo) e por uma distribuição de probabilidade de emissão de seqüências de símbolos.

Essa fonte gera uma seqüência de símbolos binários $\{..., b_{m-1}, b_m, b_{m+1},...\}$, aleatórios, com distribuição de probabilidade uniforme, a uma taxa de transmissão de $1/T_b$, sendo T_b o intervalo de tempo para a geração de bits consecutivos da fonte. Esta seqüência é então enviada a um conversor série-paralelo.

2.1.2 Conversor Série-Paralelo

O conversor série-paralelo compatibiliza a entrada do codificador convolucional produzindo em sua saída um vetor $\mathbf{C}^{(j)} = [c_1^{(j)},..., c_k^{(j)}]$, a cada instante discreto de tempo j para cada k bits de entrada. Assim, tem-se na saída do conversor o vetor $\mathbf{C}^{(j)}$ com uma taxa de transmissão igual a 1/T segundos, com $T=k\,T_b$.

2.1.3 Codificador Convolucional

O codificador introduz uma redundância, de maneira controlada, a seqüência de símbolos à sua saída, de forma que o decodificador de canal usa esta redundância para controlar os efeitos de ruídos e distorções causados pela passagem do sinal transmitido pelo canal de comunicações.

O codificador convolucional é uma máquina de estados finitos (FSM – *finite state machine*), composta de ν elementos de memória representados pelos registradores de deslocamento, combinados com certas funções lógicas. Por ser uma FSM, o codificador pode ser representado por um diagrama de estados, cujo número de estados é dado por 2^{ν}.

As palavras código de saída são geradas através de operações tipicamente lineares sobre os bits de entrada. Na Figura 2.2, o codificador convolucional recebe em sua entrada o vetor $\mathbf{C}^{(j)}$ com k bits, após algum processamento, apresenta na sua saída o vetor $\mathbf{V}^{(j)} = [v_1^{(j)},..., v_n^{(j)}]$, com n bits, resultando em um codificador de taxa k/n.

Na Figura 2.2, tem-se um exemplo de um codificador convolucional com $k = 2$ bits de entrada, $\mathbf{C}^{(j)} = [c_1^{(j)}, c_2^{(j)}]$, $n = 3$ bits de saída, $\mathbf{V}^{(j)} = [v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, v_3^{(j)}]$, e dois elementos de memória ν resultando em um codificador de $2^{\nu} = 4$ estados.

O símbolo $\boxed{D}$ na Figura 2.2 representa o elemento de memória do codificador convolucional e $\oplus$ denota a operação soma, módulo 2. Embora o codificador da Figura 2.2 possa ser representado por um diagrama de estados, uma forma mais conveniente de representá-lo é através de um diagrama de treliça, isto porque esta representação descreve uma noção temporal das seqüências transmitidas pelo codificador.

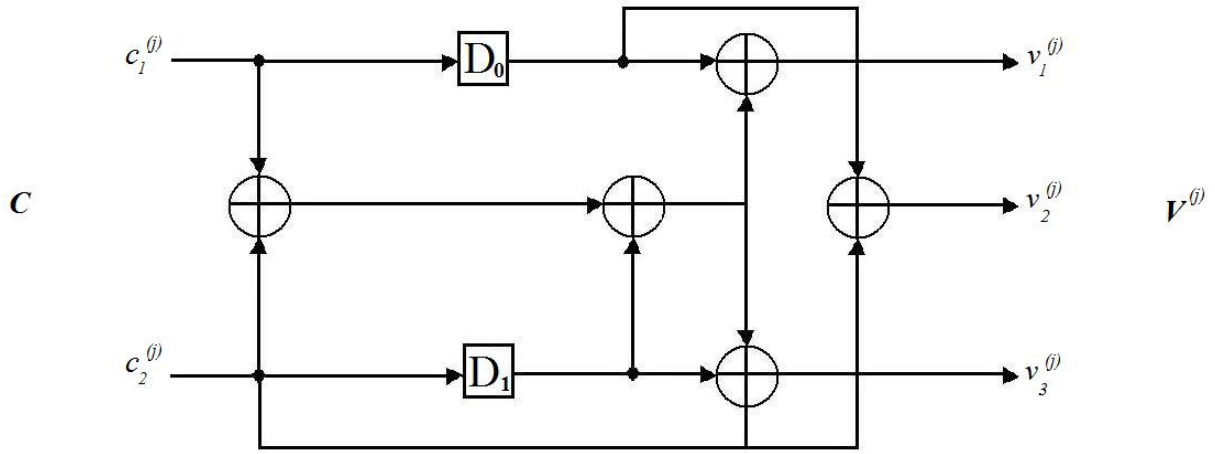

Figura 2.2 Codificador convolucional, taxa 2/3 e 4 estados.

A Figura 2.3 ilustra o diagrama em treliça do codificador da Figura 2.2. Este codificador tem 4 estados, representados na treliça pelos círculos pretos (nós), $a = 00$, $b = 01$, $c = 10$ e $d = 11$. Ao lado de cada nó da treliça da Figura 2.3, quatro seqüências de três bits rotulam os quatro ramos que conectam o estado atual para os próximos estados. Cada rótulo é uma composição particular do vetor $\mathbf{V}^{(j)}$.

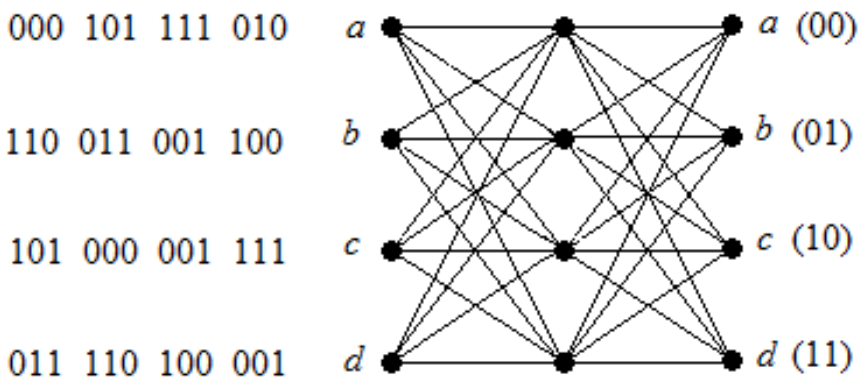

Figura 2.3 Diagrama em treliça do codificador convolucional, taxa 2/3, 4 estados.

Na Figura 2.4 são ilustradas as seqüências de transições a partir do estado a para os demais estados, de acordo com a seqüência de bits de entrada. Os rótulos dos ramos têm a seguinte notação:

$$c_1^{(j)}c_2^{(j)} / v_1^{(j)}v_2^{(j)}v_3^{(j)}$$

Os dois primeiros bits indicam os bits de entrada que formam o vetor $\mathbf{C}^{(j)}$ e os três últimos, os bits de saída que formam o vetor $\mathbf{V}^{(j)}$. Por exemplo, se o codificador estiver no estado a e receber o vetor de bits de entrada [1, 0], este codificador transmitirá o vetor de bits de saída $\mathbf{V}^{(j)} = [1, 1, 1]$ e migrará para o estado c. Para esta combinação particular de bits de entrada tem-se o rótulo 10/111 para o ramo que interliga os estados a e c, conforme ilustrado na 0. Cada transição de estado é um intervalo de transmissão do codificador, assim este diagrama dá uma noção temporal das seqüências transmitidas. Denomina-se por percurso na treliça, uma seqüência válida de estados do codificador.

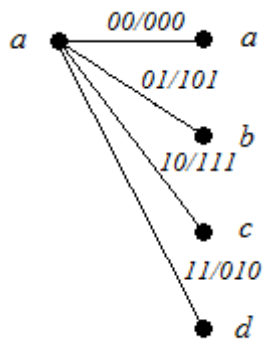

Figura 2.4 Transições do estado *a* para as possíveis combinações dos bits de entrada do codificador.

Além do diagrama de treliça, existem outras formas de representar o codificador convolucional, como por exemplo, o diagrama de estados.

Como o codificador é uma FSM, lembrando que o termo finito refere-se ao fato de existirem apenas um número finito de estados que a máquina pode gerar, a relação de entrada e saída de um codificador convolucional é completamente descrita por seu Diagrama de Estados (DE). O DE do codificador pode ser obtido a partir da verificação de todas as possibilidades de transição entre os seus estados, e isso é uma representação infinita da palavra código.

Como exemplo, será considerado a FSM do codificador ilustrada na Figura 2.2. Inicialmente, será resetado o conteúdo dos registradores (D_0D_1), o codificador é então colocado no estado (00). Se, ao longo da transmissão, os bits de entrada forem (0,0), o próximo estado permanecerá em (00), porém se forem (0,1) ocorrerá uma transição de estado, e o próximo estado será (01). Conforme representado na Tabela 2.1:

Tabela 2.1. Transição de estados do codificador da Figura 2.2 em função do bit de informação ($c_1^{(j)}$, $c_2^{(j)}$) e o estado atual do codificador (D_0D_1).

Estado Atual (D_0D_1)	Próximo Estado (D_0D_1), se:			
	Entrada = 00	Entrada = 01	Entrada = 10	Entrada = 11
a (00)	*a* (00)	*b* (01)	*c* (10)	*d* (11)
b (01)	*a* (00)	*b* (01)	*c* (10)	*d* (11)
c (10)	*a* (00)	*b* (01)	*c* (10)	*d* (11)
d (11)	*a* (00)	*b* (01)	*c* (10)	*d* (11)

Os símbolos de saída deste codificador ($v_1^{(j)}$, $v_2^{(j)}$, $v_3^{(j)}$), em função do bit de entrada ($c_1^{(j)}$, $c_2^{(j)}$) e o seu estado atual, é representado pela Tabela 2.2.

Tabela 2.2. Símbolos de saída do codificador da Figura 2.2 em função do bit de informação ($c_1^{(j)}$, $c2^{(j)}$) e o estado atual do codificador (D_0D_1).

Estado Atual (D_0D_1)	Símbolos de saída ($v_1^{(j)}$, $v_2^{(j)}$, $v_3^{(j)}$), se:			
	Entrada = 00	Entrada = 01	Entrada = 10	Entrada = 11
a (00)	000	101	111	010
b (01)	110	011	010	100
c (10)	101	000	001	111
d (11)	011	110	100	001

Por exemplo, se o estado atual do codificador é 00 e na entrada tem-se um 00, a saída será 000, se a entrada for 01, a saída será 101.

Assim, o codificador da Figura 2.2 pode ser representado pelo DE da Figura 2.5. Nesta Figura 2.5, os nós do DE representados por um círculo, são os estados do codificador (D_0, D_1), os rótulos das flechas indicam o bit de entrada e sua respectiva saída ($c_1^{(j)}$,$c_2^{(j)}$/$v_1^{(j)}$,$v_2^{(j)}$,$v_3^{(j)}$). Os nós no início e fim da flecha representam o estado atual e final do codificador, respectivamente.

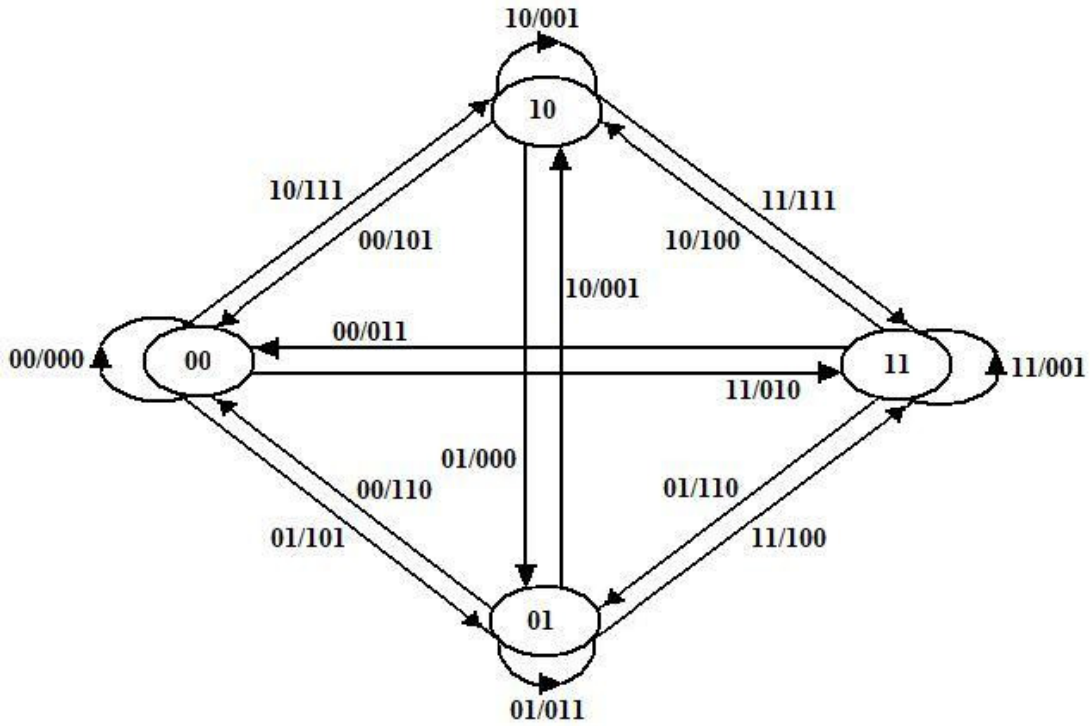

Figura 2.5 DE da FSM do codificador da Figura 2.2.

Uma forma de representar os códigos é utilizando a forma octal, conforme exemplo dos polinômios geradores, a seguir:

$$\boldsymbol{x^4 + x + 1}$$
$$\boldsymbol{0x^5 + 1x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 1x + 1x^0}$$
$$\underbrace{\mathbf{010}}\,\underbrace{\mathbf{011}} = \underbrace{\mathbf{2}}\ \underbrace{\mathbf{3}}$$

Assim, no formato octal, $\boldsymbol{x^4 + x + 1 = 23}$.

2.1.4 Modulador

O modulador é um dispositivo que mapeia uma seqüência de *n* bits em um conjunto de *M* sinais $\left\{s_i^{(j)}(t)\right\}_{i=1}^{M}$.

O modulador da Figura 2.2 mapeia uma seqüência de $\log_2 M$ símbolos binários da saída do codificador convolucional para uma das formas de onda $\{s_1(t), \ldots, s_M(t)\}$, pertencentes a um conjunto de *M* sinais, com duração *T*, que é transmitida através do canal. Para um codificador com taxa $r = k/n$, tem-se $M = 2^n$.

A expressão genérica de um sinal modulado passa-faixa $\left\{s_i^{(j)}(t)\right\}_{i=1}^{M}$ no intervalo τ_j: $jT \leq t \leq (j+1)T$ é da forma:

$$s_i^{(j)}(t) = R\{\tilde{s}^{(j)} e^{j2\pi f_c t}\}\ ,\ t \in \tau_j\ , \quad i = 1, \ldots, M \tag{2.1}$$

em que $\tilde{s}_i^{(j)}$ é denominado de envoltória complexa de $s_i^{(j)}(t)$. No caso específico da modulação PSK (*Phase shift keyning*), o sinal $\tilde{s}_i^{(j)}$ é da forma:

$$\tilde{s}_i^{(j)}(t) = \sqrt{2E_s}\, u(t - jT) e^{j\emptyset_i^{(j)}}\ ,\ t \in \tau_j\ , \quad i = 1, \ldots, M \tag{2.2}$$

em que $u(t)$ é um pulso formatador de energia unitária, $E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = 1$, E_s é a energia de $s_i^{(j)}(t)$ e $\left\{\emptyset_i^{(j)}\right\}_{i=1}^{M}$ é a fase da portadora, de freqüência f_c transmitida no intervalo

τ_j. Uma modulação digital também pode ser representada por um conjunto de M vetores $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$,..., $\mathbf{s_M}$, denominado constelação de sinais. Denominam-se constelações PSK com M sinais de M-PSK.

A Figura 2.6, ilustra duas constelações de sinais M-PSK para M = 2, M = 4 e M = 8. No caso de M = 2 e M = 4 é comum as siglas BPSK (*Binary phase shift keyning*) e QPSK (*Quadrature phase shift keyning*), ao invés de 2-PSK e 4-PSK, respectivamente. A constelação de sinais para o esquema M-PSK é dada por (PROAKIS,1983):

$$\boldsymbol{s}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s} & cos\emptyset_i \\ \sqrt{E_s} & sen\emptyset_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \dots, M$$

Um vetor de uma constelação bidimensional transmitido no j-ésimo intervalo de sinalização pode também ser representado por um número complexo da forma:

$$\boldsymbol{s}_i{}^{(j)} = \sqrt{E_s} cos\emptyset_i{}^{(j)} + j\sqrt{E_s} sen\emptyset_i{}^{(j)}$$

Portanto, a envoltória complexa de (2.2) é da forma:

$$\tilde{s}_i^{(j)}(t) = \sqrt{2} s_i{}^{(j)} u(t - jT)\ , t \in \tau_j,\ i = 1, \dots, M \qquad (2.3)$$

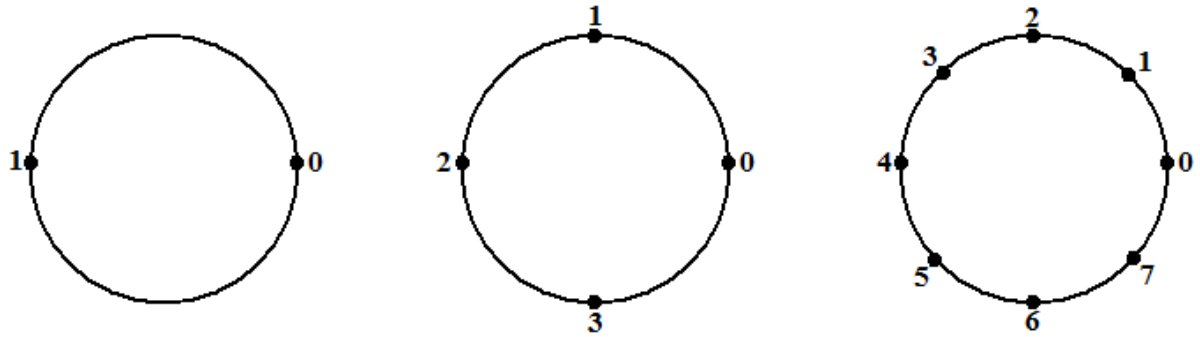

Figura 2.6 Constelações de sinais M-PSK para M = 2 (BPSK), M = 4 (QPSK) e M = 8 (8-PSK).

Esta representação é válida para modulações lineares como ASK (*amplitude shift keyning*), e QAM (*quadrature amplitude modulation*).

Um parâmetro muito importante em um sistema de comunicações digitais é a distância Euclidiana entre as seqüências transmitidas pelo canal. Por sua grande importância, será definida a seguir a distância Euclidiana quadrada entre duas seqüências quaisquer.

Seja $v(t)$ uma seqüência de sinais modulados no intervalo $0 \leq t \leq NT$, isto é:

$$v(t) = R\sqrt{2}\sum_{j=0}^{N-1} s_i^{(j)} u(t - jT) e^{j2\pi f_c t} \qquad i = 1, \dots, M$$

A distância Euclidiana ao quadrado entre duas seqüências $v(t)$ e $v'(t)$é definida por:

$$d^2(v(t), v'(t)) = \int_0^{NT} [v(t) - v'(t)]^2 \, dt \tag{2.4}$$

$$= 2\int_0^{NT} \left(R\left\{ \sum_{j=0}^{N-1} s^{(j)} - s'^{(j)} u(t - jT) e^{j2\pi f_c t} \right\} \right)^2 dt,$$

lembrando que $R\{A\}R\{B\} = \frac{R\{AB^* + AB\}}{2}$, sendo $B*$ o conjugado complexo de B e $R\{A\}$ a parte real do número complexo A, A Equação (2.4) resulta em:

$$d^2(v(t), v'(t) = \int_0^{NT} \left| \sum_{j=0}^{N-1} s^{(j)} - s'^{(j)} u(t - jT) \right|^2 dt$$
$$+ \int_0^{NT} \left\{ R\left(\sum_{j=0}^{N-1} s^{(j)} - s'^{(j)} u(t - jT) e^{j2\pi f_c t} \right)^2 dt \right\} \tag{2.5}$$

O segundo termo do lado direito da Equação (2.5) é igual a zero para sinais passa-faixa de banda estreita, resultando em:

$$d^2(v(t), v'(t) = \int_0^{NT} \left| \sum_{j=0}^{N-1} s^{(j)} - s'^{(j)} u(t - jT) \right|^2 dt$$

$$+ \int_0^{NT} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N\ 1} \left(s^{(j)} - s'^{(j)}\right) \left(s^{(z)} - s'^{(z)}\right)^* u(t - jT)\, u(t - zT)\, dt \qquad (2.6)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} \left(s^{(j)} - s'^{(j)}\right) \left(s^{(z)} - s'^{(z)}\right)^* \int_0^{NT} u(t - jT)\, u(t - zT)\, dt$$

Devido à condição de ortogonalidade entre $u(t - jT)$ e $u(t - zT)$, para $j \neq z$, tem-se:

$$\int_0^{NT} u(t - jT)\ u(t - zT) dt = \begin{cases} 1, & z = j \\ 0, & z \neq j \end{cases}$$

Obtendo-se, finalmente:

$$d^2(v(t), v'(t)) = \sum_{j=0}^{N-1} \left| s^{(j)} - s'^{(j)} \right|^2 \qquad (2.7)$$

Portanto, a distância Euclidiana quadrada entre dois sinais passa faixa é dada pela distância Euclidiana entre a seqüência de vetores transmitidos. Como exemplo, para duas seqüências de sinais BPSK, $s_0 = -\sqrt{E_s}$ e $s_1 = \sqrt{E_s}$, resulta em $d^2\left(v(t), v'(t)\right) = 4E_s$.

2.1.5 Canal

A Figura 2.7 ilustra o modelo do canal, em que o sinal *s(t)* entra e é somado à sua saída o ruído *n(t)*, essa soma é o sinal recebido *r(t) = s(t) + n(t).*

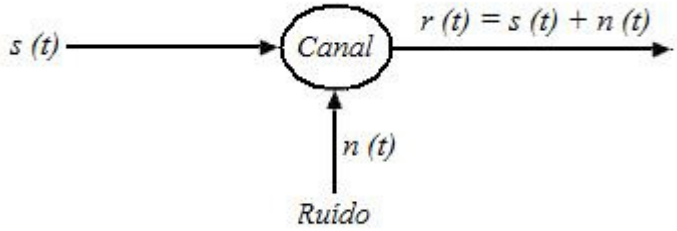

Figura 2.7 Modelo de Canal.

O modelo do canal apresentado neste trabalho é o modelo denominado canal RAGB (ruído aditivo Gaussiano branco). Nesse modelo, considera-se que o sinal transmitido é corrompido por um ruído aditivo modelado como um processo estocástico Gaussiano com densidade espectral de potência $S_n(f)$ constante em toda a faixa de freqüência. Conforme ilustra na Figura 2.8.

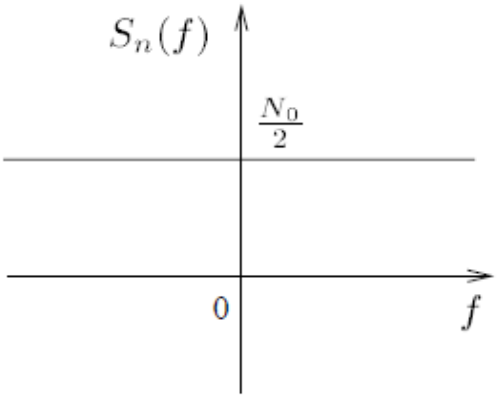

Figura 2.8 Densidade espectral de potência do ruído Gaussiano branco.

O canal RAGB possuí variância $N_0/2$ e função densidade de probabilidade da variável aleatória *n* dada por:

$$f_n(N) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{\left(-\frac{n^2}{N_0}\right)}$$

O modelo mais simples utilizado para modelar o canal de comunicações é denominado RAGB. O termo aditivo significa que o ruído é adicionado ao sinal transmitido. O canal

RAGB é um modelo adequado quando o ruído térmico é a fonte principal de distúrbios presentes em um sistema de comunicações.

O decodificador largamente utilizado em esquemas de recepção TCM é o Algoritmo de Viterbi, devido a sua facilidade de implementação. Porém como não é o foco no trabalho, não será descrito aqui. Contudo pode ser consultado para maiores detalhes a referência (VITERBI, 1966).

2.2 Modulação Codificada em Treliça

A modulação codificada em treliça foi a princípio idealizada por Massey em 1974 (MASSEY, 1974) e implementada por G. Ungerboeck em 1982 (UNGERBOECK, 1982). Ungerboeck descreveu uma técnica que permitiu a obtenção de ganhos significativos de codificação sem a redução da taxa de informação, ou o aumento da banda passante, para canais RAGB. Essa técnica é conhecida como *mapeamento por partição de conjuntos* (UNGERBOECK, 1982).

Pode-se obter um considerável aumento de desempenho utilizando a codificação e a modulação como uma identidade conjunta (MASSEY, 1974). Esse esquema utilizando a codificação e a modulação como uma única entidade é denominado Modulação Codificada em Treliça (TCM – *trellis coded modulation*).

Tradicionalmente, na codificação de canal, a codificação é executada separadamente da modulação no transmissor. Porém, para se obter uma utilização mais eficiente da largura de banda e potência disponíveis, a codificação e a modulação têm de ser tratadas como uma única entidade. TCM é a combinação da codificação e da modulação para a melhoria da confiabilidade do sistema de transmissão digital sem o aumento da potência de transmissão ou da largura de banda requerida.

Em um esquema de transmissão com restrição de potência, o desempenho do sistema desejado deveria ser alcançado com a menor potência possível. Uma solução é o uso de códigos corretores de erro que aumentem a eficiência de potência, em relação aos esquemas de codificação tradicionais.

Em um esquema de codificação tradicional, o aumento da taxa de transmissão implica diretamente no aumento da largura de banda. Em um ambiente com largura de banda limitada, o aumento da eficiência espectral pode ser obtido optando por esquemas de modulação de

ordem superior (ex: 8-PSK em vez de QPSK), mas uma potência maior seria necessária para manter a mesma separação do sinal e por isso a mesma probabilidade de erro (VITERBI & OMURA, 1979).

A solução dos códigos em treliça combina a escolha de um esquema de modulação de ordem superior com a de um código convolucional, enquanto o receptor, ao invés de executar demodulação e decodificação em duas fases distintas, combina as duas operações em uma.

A Modulação Codificada em Treliça tem três características básicas:

1. O número de pontos do sinal na constelação usada é maior do que o necessário para o formato de modulação que nos interessa, com a mesma taxa de dados; estes pontos adicionais permitem redundância para a codificação de controle de erros sem sacrificar a largura de banda.
2. A codificação convolucional é usada para introduzir uma dependência entre as seqüências de sinais sucessivos, tal que somente certas seqüências sejam permitidas.
3. A decodificação com decisão suave é executada no receptor, no qual a seqüência de sinais permissível é modelada com uma estrutura em treliça; daí o nome códigos em treliça.

2.2.1 A necessidade de TCM

A utilização de esquemas TCM tem-se tornado atrativa devido à sua alta eficiência espectral e relativa baixa complexidade, quando comparada aos esquemas clássicos de codificação em bloco (BIGLIERI et. al., 1991). Este tipo de esquema propõe uma solução que combina a escolha de esquemas de modulação de alta ordem, com codificação convolucional, de forma que as operações de modulação/codificação e demodulação/decodificação não sejam realizadas isoladamente, mas combinando-as em uma única operação.

Existe a necessidade da utilização de esquemas TCM em várias áreas das telecomunicações. Considere um esquema de comunicação digital para transmitir dados de

uma fonte emitindo 2 bits de informação a cada T segundos (BIGLIERI et. al., 1991), tem-se algumas hipóteses de transmitir estes 2 bits. Conforme ilustrado na Figura 2.9.

(a) Sem usar codificador com modulação QPSK, com um sinal a cada T segundos, cada sinal carrega 2 bits de informação.
(b) Usando codificador convolucional com taxa 2/3 e modulação QPSK. Cada sinal carrega somente 4/3 bits de informação, para compatibilizar a saída do codificador com o modulador e tem uma duração de 2T/3 para corresponder à taxa de dados da fonte. Para que se transporte a mesma quantidade de bits da fonte, a taxa do modulador deve ser 3/2 a mais que o esquema não codificado, o que aumenta a largura de banda.
(c) Por fim, usando codificador convolucional com taxa 2/3 e modulação 8-PSK, preservando a largura de banda. Cada sinal carrega 2 bits de informação a cada T segundos, evitando a expansão da largura de banda, mantendo a mesma largura de banda que no caso QPSK não codificado.

Analisando a Figura 2.9, pôde ser observado que a utilização de um esquema codificado em 8-PSK tem desempenho maior e utiliza a mesma largura de banda que o esquema QPSK não codificado.

Esta idéia não é inovadora, desde a modulação multinível de símbolos codificados convolucionalmente (MASSEY, 1974), este foi um conceito conhecido antes da introdução de TCM. Porém o aspecto inovador de TCM é o conceito de que a codificação convolucional e modulação deveriam ser tratadas como uma única operação e não como entidades separadas.

Em resumo, o sinal receptor em vez de ser demodulado e depois decodificado, é processado por um receptor que combina demodulação e decodificação em uma única etapa.

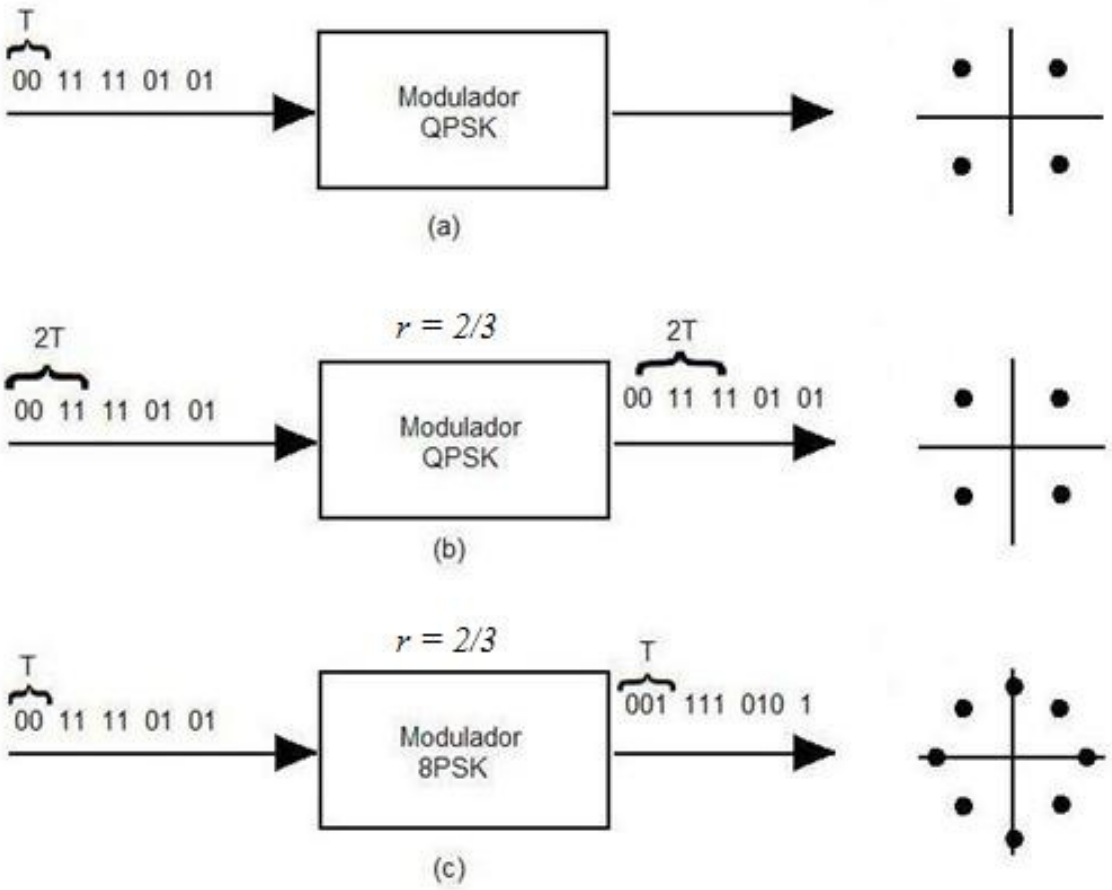

Figura 2.9 Transmissão digital de informação, 2 bits/T utilizando: a) Esquema QPSK não codificado; b) esquema QPSK codificado com expansão de banda; c) Esquema 8PSK codificado sem expansão de banda.

2.2.2 Parâmetros do TCM

A seleção do formato da modulação e codificação para transmissão de um canal RAGB é baseado nos seguintes parâmetros:

- R_b, a taxa de informação (o número de bits por segundo que se queira transmitir através do canal).
- B, a largura de banda disponível (em Hertz).
- P_e, a probabilidade de erro a ser alcançada para uma dada relação sinal-ruído (SNR - *signal to noise ratio*).

Em canais RAGB, o parâmetro do sistema de transmissão não é a distância de Hamming dos códigos convolucionais, mas sim a sua distância Euclidiana quadrada. Como no caso da distância de Hamming, tem-se também a distância Euclidiana mínima entre as seqüências do código, denominada de d^2_{free} (distância livre) do código.

O parâmetro que guia projetos de codificadores para TCM, em canais RAGB, é o critério da maximização da d^2_{free} entre as seqüências de sinais, ou palavras-código, na treliça. Existe um parâmetro comparativo entre sistemas codificados TCM e os não codificados. Este parâmetro é denominado como ganho assintótico g e pode ser definido como (BIGLIERI et. al., 1991):

$$g\ (\mathrm{dB})|_{\mathrm{SNR}\to\infty} = 10\log(\ d^2_{free}\ /d^2_{min})$$

Em que d^2_{min} é a menor distância Euclidiana quadrada para um sistema não codificado e d^2_{free} é a distância livre do código, definida anteriormente. A d^2_{min} utilizada na comparação é sempre relativa a constelação mapeada pelos k bits de entrada do codificador. Por exemplo, se o codificador tiver taxa 2/3, tem-se k = 2 bits de entrada, assim a d^2_{min} de comparação é de um QPSK, se for um codificador com taxa 3/4, k = 3 bits de entrada, a d^2_{min} é de um 8-PSK e assim por diante.

A Tabela 2.3 (BIGLIERI et. al., 1991) apresenta o ganho de codificação assintótico (em dB) para alguns codificadores de Ungerboeck (UNGERBOECK, 1982), 8-PSK, para um número crescente de estados, tendo como referência o QPSK não codificado.

Tabela 2.3. Ganho de codificação assintótico de códigos Ungerboeck 8-PSK.

Número de Estados	4	8	16	32	64	128	256	512
Ganho de codificação (dB)	3	3,6	4,1	4,6	4,8	5	5,4	5,7

O valor de g indica a diferença entre as SNRs, em decibéis, necessário para se obter a mesma probabilidade de erro que um sistema não codificado.

Com o aumento do número de estados do codificador convolucional, o ganho de codificação assintótico, que é possível obter com códigos Ungerboeck, também se elevam. Melhorias podem chegar a ordem de 6 dB, porém requerem códigos com um número muito grande de estados, o que o torna impraticável.

2.2.3 Mapeamentos por partição de conjuntos

Ungerboeck desenvolveu uma técnica para mapear os sinais nos ramos da treliça de forma sistemática, essa técnica ficou conhecida como: mapeamento por partição de conjuntos (UNGERBOECK, 1982).

Particionamento de conjuntos tem sido descrito como a solução do problema de construção de eficientes técnicas de modulação codificada para canais de banda limitada.

O mapeamento por partição de conjuntos permite a obtenção de ganhos significativos de codificação sem a redução da taxa de informação ou o aumento da banda passante, para canais RAGB.

Esta técnica de particionamento de conjuntos consiste em dividir uma constelação em subconjuntos de modo que a d_{mim} aumente em cada nível de partição.

A idéia chave na construção de técnicas eficientes de modulação codificada para canais limitados em banda é analise de projeto por particionamento do conjunto. Isto envolve dividir uma constelação *M*-ária em 2, 4, 8,... subconjuntos com tamanho *M*/2, *M*/4, *M*/8,... e obter uma distância Euclidiana mínima crescente cada vez maior entre seus respectivos pontos de sinal.

A Figura 2.10 ilustra o procedimento de particionamento considerando uma constelação circular que corresponde a 8-PSK e os subconjuntos 2 e 4 resultantes de dois níveis de particionamento. As distâncias Euclidianas mínimas entre seus respectivos pontos seguem um padrão crescente $d_0 < d_1 < d_2$.

Na Figura 2.10 observa-se que os subconjuntos também têm distâncias Euclidianas crescentes $d_0 < d_1 < d_2 < d_3$.

Baseando-se nos subconjuntos resultantes de divisões sucessivas de uma constelação bidimensional, podem-se idealizar esquemas de codificação relativamente simples, porém muito eficientes (UNGERBOECK, 1982).

No caso da decodificação, pode-se utilizar o algoritmo de Viterbi (VITERBI & OMURA, 1979) para executar uma estimação da seqüência no receptor, já que o modulador tem memória.

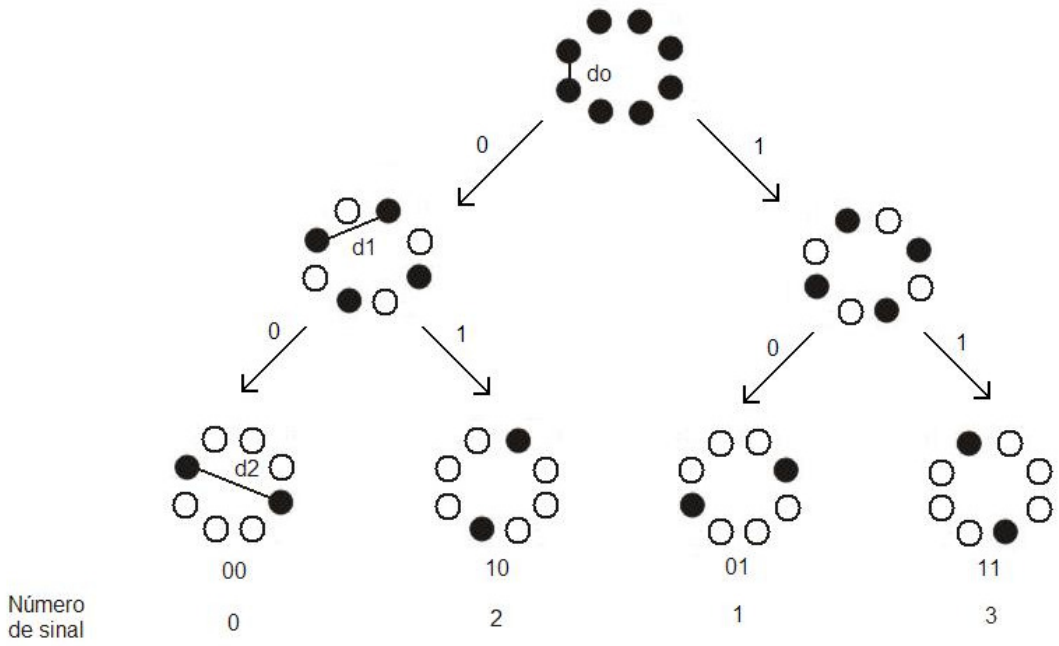

Figura 2.10 Procedimento de Particionamento de uma constelação 8-PSK

Outra forma de particionamento é o particionamento de uma constelação retangular. A Figura 2.11 corresponde a uma constelação 16-QAM.

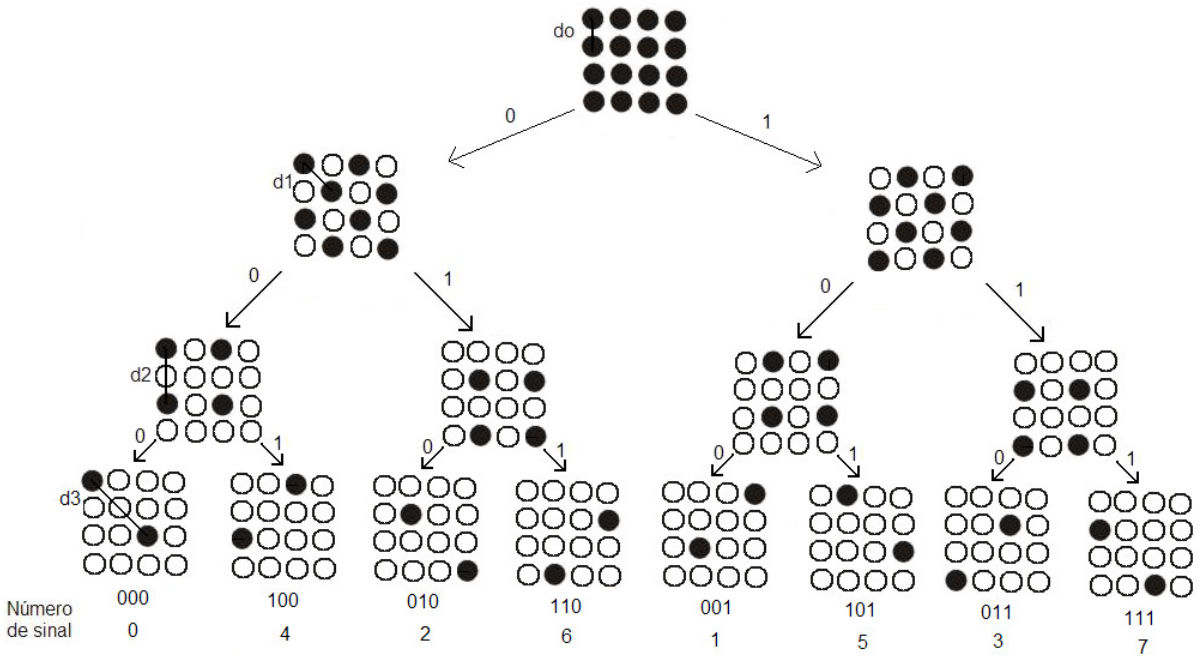

Figura 2.11 Procedimento de Particionamento de uma constelação 16-QAM.

2.2.4 Cálculo da distância livre

Devido à ação ruidosa do canal, o caminho escolhido pode não coincidir com o caminho correto por um instante de tempo *t*, segue então um caminho errado por vários intervalos de transmissão e colapsa com o caminho correto em um dado instante de tempo *t* + L. Quando isso acontece, pode-se dizer que um evento erro de tamanho *L* ocorreu. Desta forma, a distância livre de um esquema TCM é a distância Euclidiana mínima entre um par de percursos, o percurso correto e o evento erro.

Observe a Figura 2.12. Seja σ o estado do codificador e A, B, C e D conjuntos de sinais que rotulam os ramos da treliça. Independentemente do comprimento L do evento erro, pode-se calcular a d^2_{free} (BIGLIERI et. al., 1991). Bons códigos para canais RAGB devem maximizar a d^2_{free}.

A distância livre pode ser calculada de acordo com (2.8):

$$d^2_{\text{free}} = d^2(A, B) + ... + d^2(C, D) \tag{2.8}$$

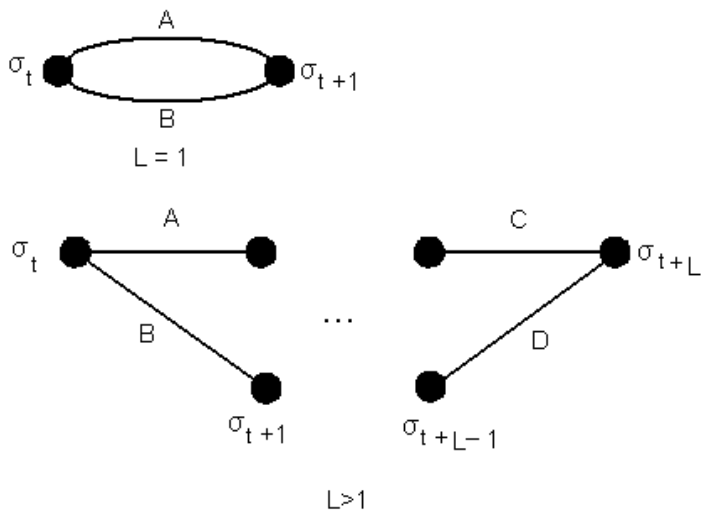

Figura 2.12 Cálculo de d_{free}

2.2.5 Exemplo de um esquema TCM

Considere um esquema TCM de oito estados, modulação 8-PSK, taxa 2/3. Será usado um esquema TCM baseado em duas constelações quaternárias, a partir do particionamento do 8-PSK ilustrado na Figura 2.13. Ao particionar a constelação 8-PSK

obteve-se duas constelações QPSK cada uma com os conjuntos de sinais {1, 3, 5, 7} e {0, 2, 4, 6}, respectivamente.

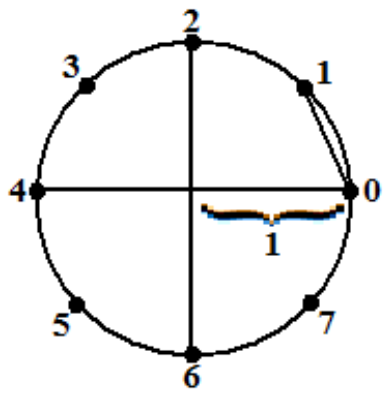

Figura 2.13 Constelação 8 PSK.

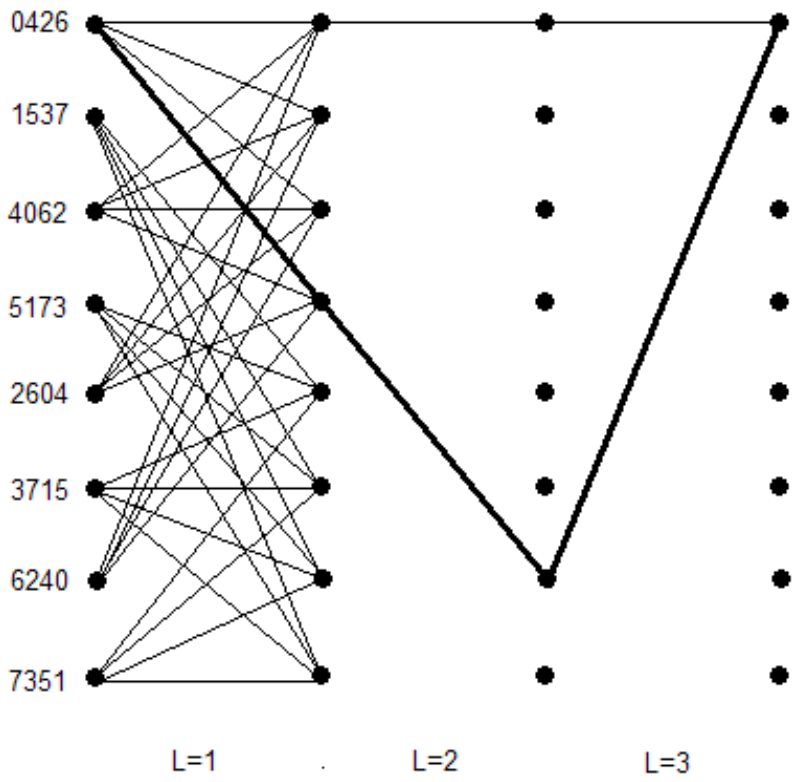

Figura 2.14 Esquema TCM baseado numa treliça de oito estados, M =8

O rotulamento deste codificador TCM está ilustrado na Figura 2.14. Os quatro símbolos associados com os ramos que saem de cada nó são usados como rótulos dos nós. Da esquerda pra direita, o primeiro símbolo em cada nó é associado, de cima para baixo, com a

mais alta transição, o segundo símbolo com a transição imediatamente abaixo, e assim por diante. Considerando uma transmissão de percurso correto, os símbolos 000, tem-se o menor evento-erro, ilustrado em negrito na treliça, de comprimento 3, rotulado pelos símbolos 676.

O menor evento erro para este esquema TCM tem comprimento L = 3.

A distância Euclidiana quadrada, considerando a energia da constelação normalizada (energia média igual a 1), entre o percurso correto e este evento erro, d^2_{free}, é então calculado a partir da Figura 2.13:

$$d^2_{free} = d^2(0, 6) + d^2(0, 7) + d^2(0, 6) = 2 + 4\sin^2 \pi/8 + 2 = 4,586$$

em que: $d^2(0, 6) = 1^2 + 1^2 = 2$

$$d^2(0, 7) = 4\sin^2 \pi/8$$

Então o ganho de codificação *g* em relação a uma transmissão QPSK (que também transmite *k* = 2 bits), não codificada é:

$$g = 4,586/2 = 2,293 \Rightarrow 3,6\ dB$$

O ganho de codificação *g* pode ser observado conforme a Figura 2.15.

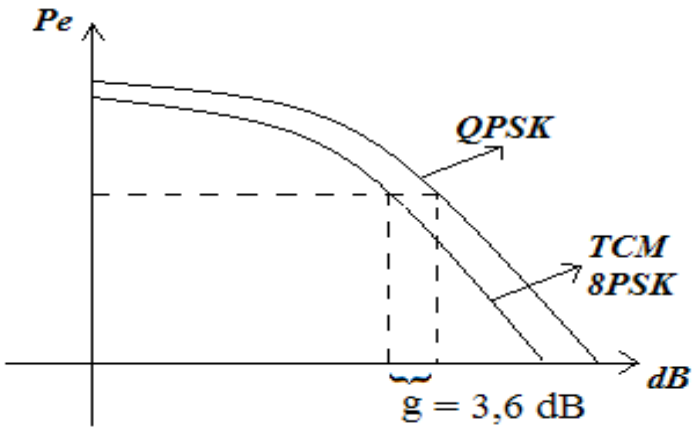

Figura 2.15 Ganho de codificação g de um esquema TCM 8 PSK, taxa igual a 2/3, com relação a uma transmissão QPSK não codificada.

O esquema TCM ajuda na melhoria da confiabilidade do sistema de transmissão digital, e isso pode ser obtido sem a alteração da taxa de dados e sem o aumento da largura de banda requerida.

2.3 Matriz Adjacência de esquemas TCM

Existem alguns parâmetros importantes que podem ser enumerados para a obtenção do espectro de distâncias (ED) de um código tais como a distância de Hamming e a distância Euclidiana. Uma ferramenta muito utilizada na técnica de enumeração do ED é a matriz adjacência, que será definida nesta seção.

Considerando um codificador com $N = 2^{\nu}$ estados e k bits de informação de entrada. Pode-se, a partir do diagrama de estados do codificador definido na Seção 2.1.3, definir o diagrama de super estados (DSE) deste codificador como a composição de duas treliças idênticas, uma representando o percurso correto e outra o provável percurso incorreto, onde cada estado do DSE é representado por uma combinação Cartesiana dos estados componentes de cada uma destas treliças. Como exemplo denominam-se os estados da treliça do percurso correto por S_i e para o percurso incorreto por S_j, $i,j=1,2,...,N$, tem-se então um estado do DSE dado por S_{ij}, $i,j=1,2,...,N$, resultando em um número de estados do DSE igual a N^2. Como uma proposição bem razoável, considera-se que as transições em cada nó da treliça ocorrem de forma equiprovável ($1/2^k$). A matriz que representa todas as transições entre os estados do DSE é definida como matriz adjacência. Assim, os elementos da matriz adjacência **B** de um codificador TCM são dados por (SCHLEGEL, 1997):

$$\mathbf{B} = \{b_{(pq)(p_1q_1)}\} = \frac{1}{2^k} X^{d_H((p,q)\rightarrow(p_1,q_1))} Y^{d^2((p,q)\rightarrow(p_1,q_1))} \tag{2.9}$$

Em que $(p, q) \rightarrow (p_1, q_1)$ indica o percurso correto dado pela transição entre os estados p e p_1, e o respectivo percurso incorreto dado pela transição entre os estados q e q_1, $i,j=1,2,...,N$. $d_H(.)$ e $d^2(.)$ são as distâncias de Hamming e Euclidiana quadrada de (.), respectivamente. X e Y são variáveis mudas. Um elemento não nulo da L-ésima potência de **B** é um polinômio em XY cujos expoentes são todas as distâncias de Hamming e Euclidiana entre os pares de caminhos que começam em (p, q) e terminam em (p_1, q_1) em L passos da treliça e cujos coeficientes são as multiplicidades médias dessas distâncias.

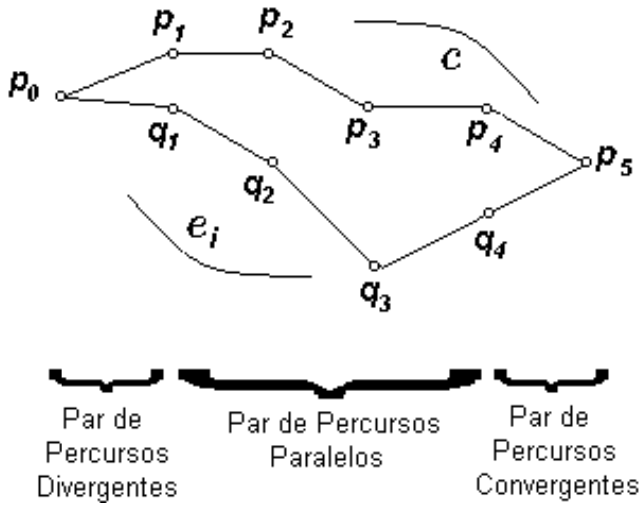

Figura 2.16 Caminho correto **c** e i-ésimo caminho de erro $\mathbf{e_i}$ para um tamanho L = 5.

A Figura 2.16 ilustra como a ação ruidosa do canal interfere diretamente na seqüência decodificada, diferenciando a seqüência decodificada da seqüência transmitida a partir de certo instante de tempo *t*. O decodificador começa então a seguir um caminho errado por vários, ou até mesmo por um, intervalo de transmissão e depois colapsa com o caminho correto em um dado instante de tempo $t + L$. Este período de discordância é denominado evento erro de comprimento *L*, como ilustrado na Figura 2.17.

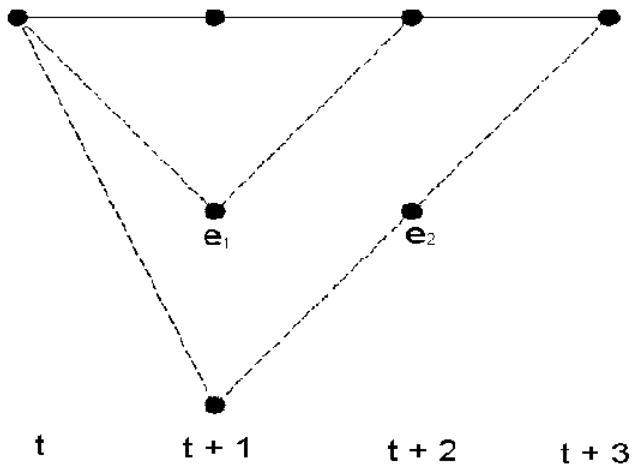

Figura 2.17 Ilustração dos eventos erro $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$.

Observa-se que a linha cheia indica o percurso correto e as linhas pontilhadas indicam os eventos erro $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ com comprimentos $L=2$ e $L=3$, respectivamente.

Da Figura 2.17 tem-se que o evento erro inicia quando o caminho correto e o caminho errado divergem e termina quando os dois caminhos convergem.

Exemplo 2.1: Seja o codificador TCM com N = 4 estados com diagrama de treliça correspondente à Figura 2.3, modulação 8PSK e com k = 2 bits/símbolo transmitidos. Por questão de simplicidade, considere a enumeração somente da distância Euclidiana quadrada deste codificador. Como este codificador TCM tem 4 estados, tem-se então uma matriz adjacência da forma $\mathbf{B}\{N^2 \text{ x } N^2\}$, isto é, $\mathbf{B}\{16 \text{ X } 16\}$ dada por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4}\begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 02 \\ 03 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \\ 33 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc} 00 & 01 & 02 & 03 & 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & 21 & 22 & 23 & 30 & 31 & 32 & 33 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 \\
Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\
Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 \\
Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\
Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\
1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 \\
Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} \\
Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 \\
Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 \\
Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} \\
1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 \\
Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\
Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\
Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & Y^2 \\
Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\
1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & 1 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\tag{2.10}$$

Deseja-se particionar a matriz **B** em submatrizes que especifiquem as três secções que compõem o evento erro denominadas divergente (**D**), paralela (**P**) e convergente (**M**). Para este TCM de $N = 4$ estados, esta partição é dada por:

$$\mathbf{D}=\frac{1}{4}\begin{array}{c} \\ 00 \\ 11 \\ 22 \\ 33 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 01 & 02 & 03 & 10 & 12 & 13 & 20 & 21 & 23 & 30 & 31 & 32 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 \\ Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 \\ Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 \\ Y^2 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & Y^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{P}=\frac{1}{4}\begin{array}{c} \\ 01 \\ 02 \\ 03 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 20 \\ 21 \\ 23 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 01 & 02 & 03 & 10 & 12 & 13 & 20 & 21 & 23 & 30 & 31 & 32 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\ 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 \\ Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\ 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^2 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 \\ 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & 1 \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} \\ Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\ 1 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^2 & Y^2 & Y^4 & 1 & Y^4 & Y^4 & Y^2 \\ Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{M}=\frac{1}{4}\begin{array}{c} \\ 01 \\ 02 \\ 03 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 20 \\ 21 \\ 23 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 11 & 22 & 33 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\ Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^2 \\ Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\ Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} \\ Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^2 \\ Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^2 \\ Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} \\ Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \\ Y^{0.6} & Y^{3.4} & Y^{0.6} & Y^{3.4} \\ Y^2 & Y^2 & Y^2 & Y^2 \\ Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} & Y^{3.4} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.13}$$

Em que a matriz paralela **P** é (N^2- N) x (N^2-N), a matriz divergente **D** é N x (N^2 - N) e a matriz convergente **M** é (N^2 - N) x N. Obtida a matriz adjacência do codificador TCM, pode-se fazer um estudo das distâncias, no exemplo somente distâncias Euclidianas, envolvidas.

2.4 Redução de Estados de uma FSM

O desempenho de esquemas TCM está relacionado diretamente com o espectro de distâncias de tais esquemas. Nesta seção será apresentado um algoritmo completamente matricial, para redução do número de estados da matriz adjacência do DSE do codificador.

Codificadores práticos, geralmente possuem N = 8 estados, isso significa que possuem matrizes adjacências de tamanho N^2 x N^2, ou seja, 64 x 64, o que exige um esforço computacional excessivamente grande, tornando-se necessário uma redução dessa matriz, para que possa ser diminuído o esforço computacional.

Por exemplo, para um codificador de N = 4 estados, tem-se uma matriz adjacência 16x16, para um codificador de N = 8 estados, a matriz adjacência será 64 x 64, para um codificador de N = 16 estados, a matriz adjacência será 256 x 256, e assim sucessivamente.

O método proposto aqui, para redução do DSE, é baseado em redução de linhas e colunas da matriz adjacente do DSE.

Antes de descrever o algoritmo de redução, serão apresentadas duas definições de equivalência de estados:

1. Dois estados S_i e S_k de uma FSM $\boldsymbol{\mu}$ são saídas equivalentes, denotadas por $S_i \equiv S_k$, se e somente se:
   i) Para todas as transições $S_i \rightarrow S_i'$, existe uma transição $S_k \rightarrow S_k'$, tal que as saídas $\delta(S_i \rightarrow S_i') = \delta(S_k \rightarrow S_k')$ e vice versa.
   ii) O estado sucessor correspondente também é equivalente, isto é $S_i' \equiv S_k'$.

2. Duas FSM $\boldsymbol{\mu}_1$ e $\boldsymbol{\mu}_2$ são chamadas saídas equivalentes se e somente se suas seqüências de saída são idênticas para seqüencias de entrada idênticas e estados iniciais equivalentes.

Como ilustra a Figura 2.18 (SCHLEGEL, 1997).

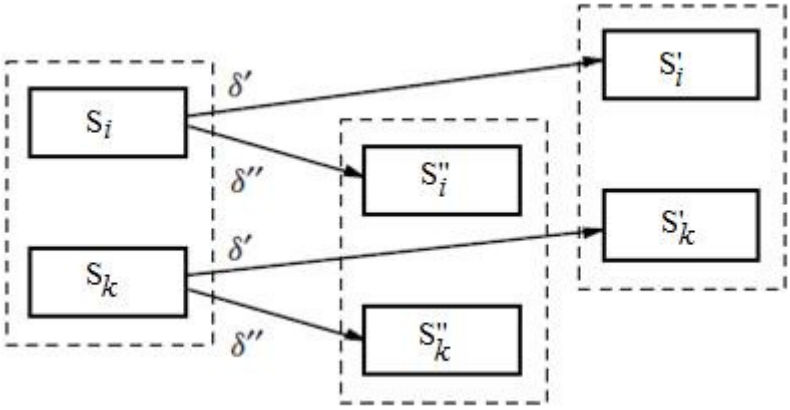

Figura 2.18 Ilustração de estados equivalentes

Implementando esse algoritmo de redução de estados, no *software* MAPLE, na matriz adjacência **B**, apresentada na seção 2.2.6, tem-se uma matriz adjacência reduzida **B'** $_{3x3}$.

Esse algoritmo de redução de estados não é o objetivo do trabalho, mas podem ser citados alguns algoritmos de redução bons da literatura, como em (WESEL R., 2004).

É importante destacar que o algoritmo de redução, apesar de apresentar uma forte redução de estados do DSE, não é ótimo quanto ao número mínimo de redução dos estados, porém conta com uma vantagem grande sob o aspecto da implementação por ser completamente matricial. A função de transferência completa de códigos TCM será calculada considerando como a matriz de entrada do algoritmo a matriz reduzida **B'**. No capítulo 4 este algoritmo será tratado com maiores detalhes.

A matriz **B'** é a matriz adjacência reduzida da matriz adjacência **B**, após a aplicação do algoritmo de redução.

$$\mathbf{B'} = \begin{pmatrix} 1 & Y^2 & Y^4 & Y^2 \\ Y^{3.41} & \frac{1}{2}Y^{0.59} + \frac{1}{2}Y^{3.41} & Y^{0.59} & \frac{1}{2}Y^{0.59} + \frac{1}{2}Y^{3.41} \\ Y^2 & 1 & Y^2 & Y^4 \\ \frac{1}{2}Y^{0.59} + \frac{1}{2}Y^{3.41} & Y^{3.41} & \frac{1}{2}Y^{0.59} + \frac{1}{2}Y^{3.41} & Y^{0.59} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

CAPÍTULO 3

CÓDIGOS TURBO

Em 1966 Forney Jr. propôs uma técnica de codificação de canal que tornou possível obter códigos resultantes de maior comprimento e com maior capacidade de correção de erros do que aqueles proporcionados por códigos individuais, chamados de códigos componentes, essa técnica foi implementada através da combinação de códigos componentes. O processo de decodificação, que é dividido em etapas associadas a cada código componente, se tornou menos complexo que aquele que seria necessário para decodificar um único código equivalente de comprimento igual ao do código resultante. Ao código resultante dessa implementação foi dado o nome de código concatenado (FORNEY, 1966).

Em 1989, Hagenauer e Hoeher propuserem um algoritmo de decodificação diferente do algoritmo de Viterbi. Nesse novo algoritmo eram produzidas decisões suaves e através destas uma decisão abrupta poderia ser tomada. Em um esquema com códigos concatenados uma métrica associada à confiabilidade dessa decisão poderia ser utilizada como entrada suave do processo de decodificação conseguinte. A esse algoritmo foi dado o nome de SOVA (s*oft-output Viterbi algorithm*) (HAGENAUER & HOEHER, 1989).

Os códigos turbo foram inventados por C. Berrou, A. Glavieux e P. Thitimajshima (BERROU et. al., 1993) na França, em 1993, cerca de 4 anos depois do algoritmo proposto por Hagenauer e Hoeher (HAGENAUER & HOEHER, 1989). Essa nova classe de códigos foi inicialmente motivada pelas idéias de Forney Jr. (FORNEY, 1966) e com o que foi proposto em 1989, por Hagenauer e Hoeher (HAGENAUER & HOEHER, 1989). Em geral, este esquema de codificação de canal corresponde à concatenação paralela de códigos convolucionais recursivos e sistemáticos, decodificados iterativamente por um algoritmo baseado no algoritmo MAP (*maximum a posteriori*) símbolo-a-símbolo BCJR (BAHL, L. R. et. al., 1974). A sigla BCJR foi adotada devido aos sobrenomes dos inventores do algoritmo: Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv.

Embora os códigos turbo se referissem apenas àquela forma de codificação e decodificação, de forma genérica, atualmente, pode-se classificar como código turbo todo esquema de codificação de canal que utilize: 1) processos de decodificação iterativa e 2) concatenação de códigos componentes separados por entrelaçadores temporais. Assim, percebe-se que o termo, turbo, está diretamente associado à decodificação iterativa e não necessariamente à forma de implementação da codificação.

São utilizados os algoritmos do tipo SISO (s*oft-input*, *soft-output*) no processo de decodificação iterativa dos códigos turbo. Informações sobre a confiabilidade ou qualidade da decodificação de um dos códigos componentes (*soft output*) alimentam o processo de decodificação de outro código componente, na forma de entrada suave (*soft input*). Dessa forma, a cada iteração tem-se maior confiabilidade na estimação do bit, palavra ou seqüência transmitida, dependendo da forma específica de implementação da decodificação. A obtenção dessa confiabilidade, denominada de informação extrínseca em (BERROU et. al., 1993), incorpora um princípio já identificado por Gallager em (GALLAGER, 1963) e por Lodge em (LODGE, 1993). Entretanto, todos estes trabalhos ocorreram de forma independente (BERROU & GLAVIEUX, 1998).

Hoje, pouco mais de quinze anos após a invenção dos códigos turbo, as pesquisas sobre o tema se encontram bastante avançadas, o que permitiu o surgimento do chamado processamento turbo, no qual, de forma genérica, para a realização de um determinado processo ocorre uma troca de informação entre subprocessos componentes, que cooperam entre si de forma iterativa. Dentre as várias técnicas nas quais o processamento turbo pode ser aplicado destacam-se: a equalização, a estimação de canal, a codificação de fonte e canal conjunta, a detecção multi-usuário e o cancelamento de interferências, os sistemas MIMO (*multiple input*, *multiple output*) e a codificação espaço-temporal, apenas para citar alguns exemplos.

O processamento turbo é uma das mais promissoras técnicas para a melhoria de desempenho em sistemas de comunicação. Por isso, a invenção dos códigos turbo vem sendo considerada como o segundo grande marco do desenvolvimento científico das comunicações, desde o desenvolvimento da teoria matemática da comunicação (SHANNON, 1948) no final da década de 40. Como desafiou Simon Haykin em (HAYKIN, 2003), qualquer sistema com realimentação a partir de agora deve ser interpretado não simplesmente como um sistema onde há realimentação de sinais, mas sim onde há realimentação de informação, como acontece no processamento turbo. Durante as investigações que deram origem aos códigos

turbo, C. Berrou *et. al*. foram inspirados por uma idéia de amplificação de informação a partir de uma estrutura com realimentação (BERROU & GLAVIEUX, 1998).

As demais seções deste capítulo estão organizadas da seguinte maneira: a Seção 3.1. aborda alguns conceitos iniciais sobre os códigos turbo, descrevendo um esquema turbo binário, e é apresentada ainda a técnica de entrelaçamento. A Seção 3.2 trata da decodificação turbo e na Seção 3.3 é abordada a modulação codificada em treliça turbo, TTCM (*turbo trellis coded modulation*). E por fim, a Seção 3.4, é apresentada a técnica de perfuração utilizada neste trabalho, ilustrando o algoritmo de perfuração.

3.1 Estrutura dos Códigos Turbo

O codificador turbo binário pode ser construído através da concatenação série ou paralela de dois ou mais codificadores, denominados codificadores componentes, que podem ou não serem iguais, e um entrelaçador ou permutador de *K* bits de comprimento, juntamente com um mecanismo de perfuração opcional.

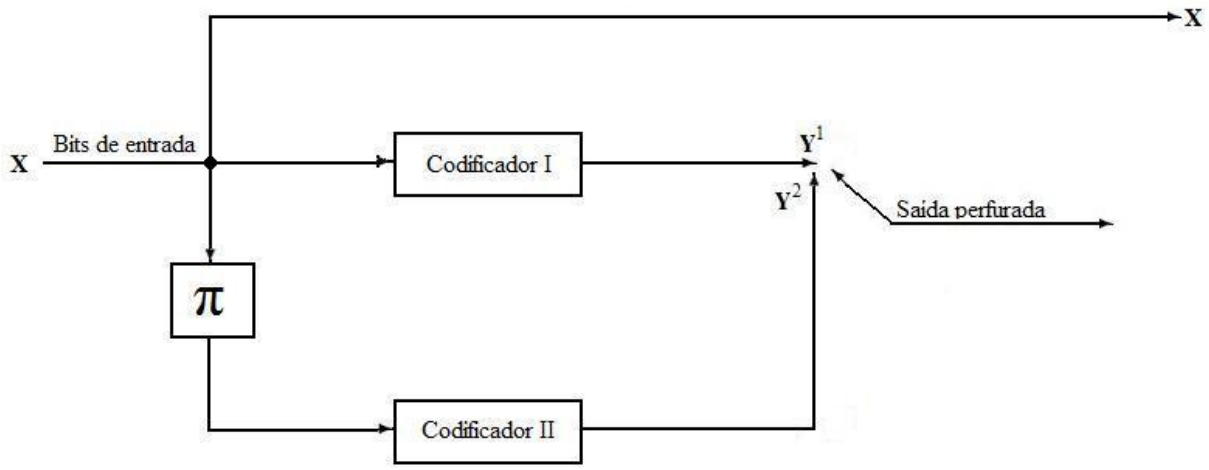

Figura 3.1 Codificador turbo sistemático, com taxa *R*=1/3 ou *R*=1/2 se usada a opção de perfuração.

A Figura 3.1 ilustra um codificador turbo com concatenação paralela que é a configuração utilizada neste trabalho. Este consiste em dois codificadores convolucionais binários, separados por um entrelaçador com *K* bits de comprimento, juntamente com um mecanismo de perfuração opcional. Os bits de paridade podem ser perfurados. Com a

perfuração dos bits de paridade é possível obter maiores taxas de codificação. Em geral os codificadores convolucionais constituintes são sistemáticos e recursivos. Normalmente o codificador componente é do tipo recursivo devido à propriedade não catastrófica dos codificadores recursivos.

Conforme ilustrado na Figura 3.1, a seqüência de bits de informação **X** de comprimento K, entra no Codificador I e simultaneamente é direcionada para uma das saídas e para a entrada do Codificador II, via o entrelaçador $\boldsymbol{\pi}$. Os codificadores I e II produzem em suas saídas as seqüências, cada uma de comprimento K, $\mathbf{Y}^1$ e $\mathbf{Y}^2$, respectivamente. Se a opção de perfuração não for utilizada, a palavra código de saída do codificador turbo é então composta da concatenação das partes sistemática (**X**) e paridade ($\mathbf{Y}^1$, $\mathbf{Y}^2$) e neste caso a taxa será de R=1/3. Se a opção de perfuração for utilizada, tem-se o perfurador atuando nas saídas de paridade e conseqüentemente, para um intervalo de tempo discreto ímpar, um bit correspondente à $\mathbf{Y}^1$ é transmitido e, a um intervalo par, um bit correspondente $\mathbf{Y}^2$ é transmitido, o que proporciona uma taxa R=1/2.

O principal objetivo do entrelaçador $\boldsymbol{\pi}$ é aumentar a distância mínima do código turbo, eliminando as correlações entre os codificadores criando um maior afastamento entre as palavras código. Esse distanciamento criado entre as palavras código é proporcional ao tamanho K do entrelaçador $\boldsymbol{\pi}$. O principal problema de utilizar entrelaçadores com K muito elevado, é que o tempo de decodificação e a complexidade computacional inerente no processo de decodificação iterativo também aumentam.

Quando existirem mais de dois codificadores, cada novo codificador terá um entrelaçador distinto em sua entrada. A concatenação é dita ser em paralelo, pois os codificadores operam sobre os mesmo blocos de informação de entrada, ao contrário da concatenação em série, onde o segundo codificador recebe como entrada a saída do primeiro codificador (SCHLEGEL & PEREZ, 2003).

3.2 Decodificação Turbo

A decodificação turbo usando um algoritmo de máxima verossimilhança, ignorando a estrutura dos codificadores constituintes, precisaria comparar as 2^K seqüências possíveis com a seqüência recebida, o que é claramente inviável computacionalmente. A decodificação turbo é portanto realizada através da decodificação iterativa dos códigos

constituintes, dividindo-se, assim o processo de decodificação total em processos de decodificação mais simples. Evidências empíricas mostram que este esquema de decodificação, apesar de sub-ótimo, quase sempre converge para uma solução ótima.

Em 1974 Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv (BAHL et. al., 1974) publicaram um algoritmo de decodificação de códigos baseado em probabilidades a posteriori. O algoritmo passou depois a ser conhecido como algoritmo BCJR, algoritmo MAP ou ainda *"forward-backward algorithm"*. Esse é o algoritmo usado na decodificação turbo.

Técnicas de codificação usadas em conjunto com a decodificação iterativa combinam diferentes códigos de tal forma que cada um deles pode ser decodificado de forma independente. Incluí nessa categoria os códigos de bloco (ELIAS, 1954), os códigos concatenados (FORNEY, 1966), os códigos de vários níveis (IMAI H & HIRAKAWA, 1977) e (POTTIE & TAYLOR, 1977), e, mais importante, os códigos turbo (BERROU et. al., 1993).

Na próxima seção serão descritos os principais conceitos da Modulação codificada em treliça turbo (TTCM). Isto é, a combinação da capacidade de modulação codificada em treliça de alta ordem com o alto desempenho dos códigos turbo.

3.3 Modulação Codificada em Treliça Turbo (TTCM)

Com o objetivo de melhorar a eficiência espectral, percebeu-se a necessidade de desenvolver sistemas de transmissão que combinassem a capacidade de modulação de alta ordem (TCM) (UNGERBOECK, 1982) com o alto desempenho dos códigos Turbo. Esses esquemas, que combinam alta eficiência espectral e alto ganho de codificação, foram chamados de modulação codificada em treliça turbo (TTCM – *turbo trellis coded modulation*) e foram inicialmente propostas em (BERROU, 1994) (ROBERTSON & WOERZ, 1995) (ROBERTSON & WOERZ, 1996) (BENEDETTO et. al., 1996). Essas estruturas oferecem melhorias em relação a técnicas convencionais de TCM. Em analogia aos códigos turbo, o TTCM também utiliza codificadores TCM concatenados em paralelo.

Ignorando os pequenos detalhes que podem diferenciar os esquemas TTCM dos códigos turbo binários, em geral, a análise é a mesma para todos os esquemas TTCM. Assim, será descrito apenas um como exemplo. Para outros a análise é direta.

Exemplo 3.1: Para o esquema TTCM (ROBERTSON & WOERZ, 1996) ilustrado na Figura 3.2, dois códigos componentes, denominados TCM1 e TCM2, são idênticos ao codificador convolucional recursivo Ungerboeck (UNGERBOECK, 1982), de taxa 2/3, 8 PSK, 8 estados e eficiência 2 bits/s/Hz. O codificador TCM1 recebe os bits de entrada diretamente e o codificador TCM2 recebe uma versão permutada através de um entrelaçador uniforme, denominado π.

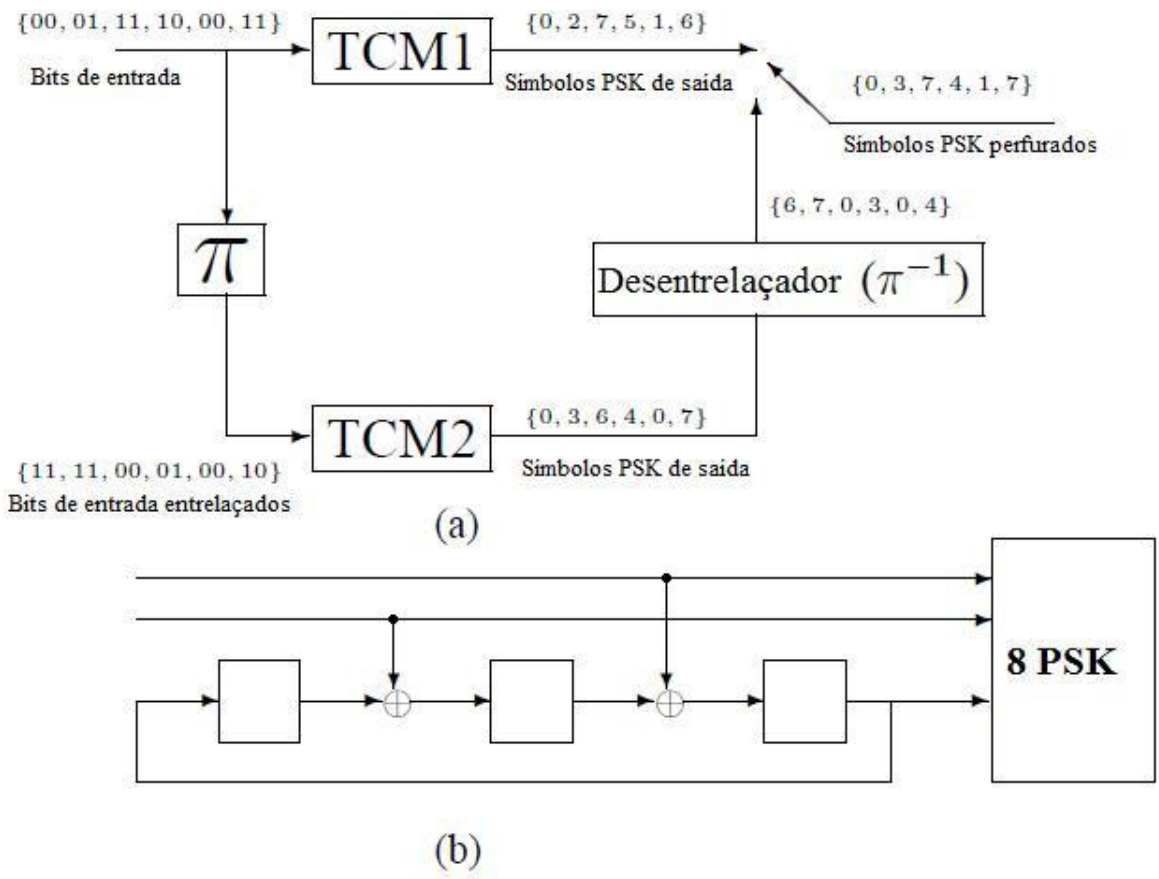

Figura 3.2 (a) O esquema TTCM, com dois codificadores TCM idênticos, 8 PSK, 8 estados e 2 bits/s/Hz. (b) Circuito lógico do código componente e mapeamento.

O entrelaçador usado é do tipo bit par-ímpar (ROBERTSON & WOERZ, 1996), isto é, entrelaçado, separadamente, os grupos de bits das posições pares e posições ímpares. Isto assegura que cada bit de informação contribua exatamente uma vez, para a palavra código TTCM de saída, mapeando as mesmas posições de par de bits para as mesmas posições pares de símbolos.

Seja w_O *e* w_E o peso de Hamming da seqüência de informação ímpar e par, respectivamente, cada uma com comprimento *K/2*. O entrelaçador uniforme par-ímpar, também de comprimento *K/2*, é um dispositivo probabilístico que mapeia a seqüência de informação de entrada em uma das possíveis, e distintas, $\binom{K/2}{w_O}$ ou $\binom{K/2}{w_E}$, seqüências de saída do entrelaçador. O entrelaçador uniforme executa todas as permutações par-ímpar com igual probabilidade $\frac{1}{\binom{K/2}{w_O}}$ e $\frac{1}{\binom{K/2}{w_E}}$, respectivamente (BENEDETTO & MONTORSI, 1996).

Esta consideração, de entrelaçador médio uniforme, permite que seja matematicamente viável a análise de desempenho de um código turbo, como se fosse feito de dois códigos elementares independentes, devido à distribuição uniforme produzida pelo entrelaçador. De outra forma seria praticamente impossível a referida análise.

Baseado nesta consideração é possível obter limitantes superiores da probabilidade de erro que são bastante precisos para altos valores de SNR. No entanto, os limitantes são significamente piores para o desempenho que pode ser alcançados pelos códigos turbo em valores de SNR muito baixos. Apesar disso, o conceito de entrelaçador uniforme tem sido a peça chave para a análise de desempenho dos códigos turbo. O projeto do entrelaçador é um fator chave que determina um bom desempenho de um código turbo.

Como exemplo de um entrelaçador, considere o TTCM da Figura 3.2. Nesta figura têm-se os símbolos representados pelos pares bits de entrada, antes da permutação, (00,01,11,10,00,11). Considere que as posições iniciais dos símbolos antes da permutação é (1, 2, 3, 4, 5, 6), e que o padrão de permutação deste entrelaçador é (3, 6, 5, 2, 1, 4), sendo assim a seqüência de símbolos permutada na saída do entrelaçador, para este padrão é (11,11,00,01,00,10). As seqüências complexas dos símbolos de saída dos codificadores são perfuradas e enviadas para o canal. Na Tabela 3.1 tem-se o resumo do padrão de entrelaçamento deste exemplo.

Tabela 3.1 Entrelaçador padrão.

Posição inicial	Bits de entrada
1	00
2	01
3	11
4	10
5	00
6	11

Entrelaçador padrão	Bits de entrada entrelaçados
3	11
6	11
5	00
2	01
1	00
4	10

Com relação à perfuração, tem-se então para posições ímpares, TCM1 transmitindo e TCM2 não transmitindo e para posições pares, TCM1 não transmitindo e TCM2 transmitindo.

Na próxima seção será exemplificada a técnica de perfuração que foi utilizada neste trabalho.

3.4 Perfuração

A técnica de perfuração proposta neste trabalho, que emprega a perfuração a nível de símbolo e não a nível de bit, trata de uma abordagem diferente da abordagem feita na maioria dos trabalhos da literatura (HENG-PING et. al., 2002; KOUSA & MUGAIBEL, 2002; BALTA et. al., 2005; CARRASCO et. al., 2009). A perfuração é necessária quando se deseja obter uma maior taxa do código. Alguns trabalhos, tais como (CARRASCO et. al., 2009) propõem um esquema de perfuração similar ao deste trabalho (SOUSA et.al.,2009), porém utiliza a perfuração a nível de binário e não é sistematizada matricialmente.

Considere um esquema turbo com n_o saídas. Seja uma matriz de perfuração **P**, com período p, de dimensão n_o x p, com elementos $\{g_{ij}\}$, $i=1,2,\ldots, n_o$, $j=1,2,\ldots,p$, dada por (KOUSA & MUGAIBEL, 2002):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,p} \\ \vdots & g_{i,k} & \vdots \\ g_{no,1} & \cdots & g_{no,p} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

em que as linhas de **P** são as saídas do TTCM e as colunas correspondem ao tempo discreto de transmissão, com número de colunas igual ao período de perfuração *p*. Os vetores coluna $\mathbf{P}_j$, $j=1,2,...,p$, indicam o padrão de perfuração adotado, { g_{ij} } ∈ { 0,1 }, onde { $g_{ij} = 0$ } implica em um símbolo perfurado e { $g_{ij} = 1$ } implica em um símbolo transmitido.

Para o exemplo do TTCM da Figura 3.2, com período $p = 2$ e seguindo a definição de (3.1), tem-se a seguinte matriz de perfuração:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

O que resultaria no vetor $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ indicando a transmissão do símbolo de saída do código componente TCM1 e a perfuração do símbolo de saída do código componente TCM2. Consequentemente, o vetor $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ indica a perfuração e transmissão do símbolo de saída do código componente TCM1 e TCM2, respectivamente.

Em resumo, tem-se que para as posições ímpares do tempo discreto, TCM1 transmitindo e TCM2 não transmitindo e para as posições pares, TCM1 não transmitindo e TCM2 transmitindo.

Para a análise de desempenho de um esquema TCM, necessita-se da sua Função de Transferência obtida a partir da matriz adjacência, conforme definida no Capítulo 2. Para um mesmo codificador, a matriz adjacência muda se este é perfurado ou não. Para obter a matriz adjacência de um codificador perfurado, primeiramente considera-se a sua matriz adjacência sem perfuração e posteriormente leva-se o efeito da perfuração a esta matriz. Para uma melhor compreensão, será descrito a seguir o efeito da perfuração em uma matriz adjacência de um codificador não perfurado hipotético.

Primeiro considera-se a matriz de adjacência do diagrama de super estados, definida na seção 2.3, **B'**, que é obtida por um algoritmo de redução qualquer (BENEDETTO & MONTORSI, 1996) (TUJKOVIC , 2002) e (AKTAS & FITZ, 2003). Neste trabalho utilizou-se o algoritmo conhecido como SRA para obter a FT a partir da matriz reduzida **B'**, sem precisar fazer a inversão de matrizes.

Deve ser levado para a matriz **B'** o efeito da perfuração. A técnica de perfuração utilizada neste trabalho é a mesma proposta em (RYAN W & TANG, 2004), porém neste

trabalho foi usada a perfuração a nível de super treliça (nível de símbolo), e não foi considerada a matriz erro, como considerado em (RYAN W & TANG, 2004).

Nesta dissertação a perfuração será feita após o mapeamento dos bits de saída do codificador, ou seja, perfura-se os símbolos complexos na treliça e não os símbolos binários da mesma. Sabe-se que a perfuração no binário é mais complicada, quando comparada a perfuração em símbolos complexos. A seqüência complexa de saída do codificador é então perfurada e será enviada pelo canal.

Considere o seguinte Diagrama de Estados aberto de um Codificador Convolucional hipotético, de 3 estados, S_0, S_1 e S_2, conforme Figura 3.3. Considere também a matriz **B'** como entrada do algoritmo.

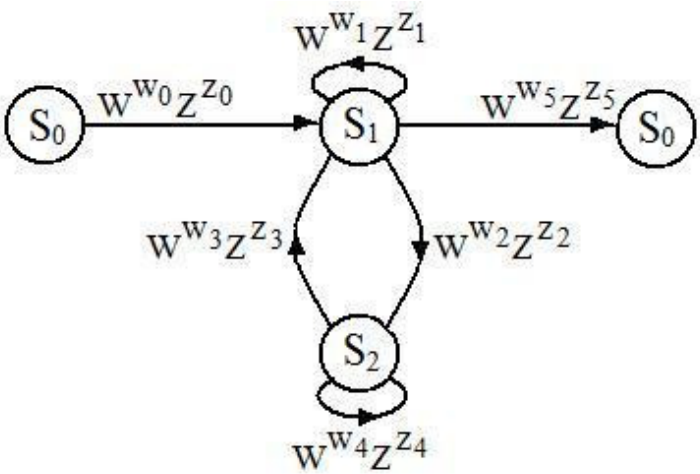

Figura 3.3 Diagrama de Estados Aberto não Perfurado.

Matriz adjacência original **B'**:

$$\boldsymbol{B'} = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & W^{W_0}Z^{Z_0} & 0 \\ W^{W_5}Z^{Z_5} & W^{W_1}Z^{Z_1} & W^{W_2}Z^{Z_2} \\ 0 & W^{W_3}Z^{Z_3} & W^{W_4}Z^{Z_4} \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.3}$$

O esquema de perfuração segue o seguinte algoritmo:

Sejam S_0 e S_1 dois estados na treliça original e S_0' e S_1' os estados criados após a perfuração.

- A transição de estados de S_0 para S_1 representa um caminho não perfurado.
- A transição de estados de S_0 para S_1'representa um caminho perfurado.
- As transições S_0 para S_0, bem como, S_0' para S_0', não são permitidas (*self loops*).
- A variável Z é a variável perfurada.

A partir da Matriz Adjacência original **B'** do diagrama aberto na Equação (3.3) tem-se os passos:

Passo 1: Exclui-se a primeira linha e a primeira coluna.

Passo 2: Obtém-se a sub-matriz $\mathbf{B'_{sub}}$;

$$\boldsymbol{B'}_{\mathbf{sub}} = \begin{bmatrix} W^{w_1}Z^{Z_1} & W^{w_2}Z^{Z_2} \\ W^{w_3}Z^{Z_3} & W^{w_4}Z^{Z_4} \end{bmatrix}$$

Passo 3: Considerando a matriz de perfuração:

$$\begin{bmatrix} 0 & Z^z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

e substituindo em $\mathbf{B'_{sub}}$:

$$\boldsymbol{B'_{sub}} = \begin{bmatrix} W^{w_1}\begin{bmatrix} 0 & Z^{Z_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & W^{w_2}\begin{bmatrix} 0 & Z^{Z_2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ W^{w_3}\begin{bmatrix} 0 & Z^{Z_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & W^{w_4}\begin{bmatrix} 0 & Z^{Z_4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

obtém-se então a seguinte matriz:

$$\boldsymbol{B''_{sub}} = \begin{bmatrix} 0 & W^{w_1}Z^{Z_1} & 0 & W^{w_2}Z^{Z_2} \\ W^{w_1} & 0 & W^{w_2} & 0 \\ 0 & W^{w_3}Z^{Z_3} & 0 & W^{w_4}Z^{Z_4} \\ W^{w_3} & 0 & W^{w_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4: A primeira linha e a primeira coluna da matriz **B'**, anteriormente excluídas, são multiplicadas pelos vetores $[1 \quad Z^z]$ e $\begin{bmatrix} Z^z \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente;

$$\boldsymbol{B'} = \begin{bmatrix} 0 & W^{W_0}[1 \quad Z^{Z_0}] & 0 \\ W^{W_5}\begin{bmatrix} Z^{Z_5} \\ 1 \end{bmatrix} & W^{W_1}Z^{Z_1} & W^{W_2}Z^{Z_2} \\ 0 & W^{W_3}Z^{Z_3} & W^{W_4}Z^{Z_4} \end{bmatrix}$$

Fazendo as multiplicações, tem-se a seguinte matriz adjacência com efeito da perfuração $\mathbf{B}^*_{\mathbf{punct}}$:

$$\boldsymbol{B}^*_{\boldsymbol{punct}} = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1' \\ S_1 \\ S_2' \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1' & S_1 & S_2' & S_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & W^{w_0} & W^{w_0}Z^{z_0} & 0 & 0 \\ W^{w_5}Z^{z_5} & 0 & W^{w_1}Z^{z_1} & 0 & W^{w_2}Z^{z_2} \\ W^{w_5} & W^{w_1} & 0 & W^{w_2} & 0 \\ 0 & 0 & W^{w_3}Z^{z_3} & 0 & W^{w_4}Z^{z_4} \\ 0 & W^{w_3} & 0 & W^{w_4} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.5}$$

Assim obtém-se o Diagrama de estados aumentado perfurado, conforme ilustrado na Figura 3.4.

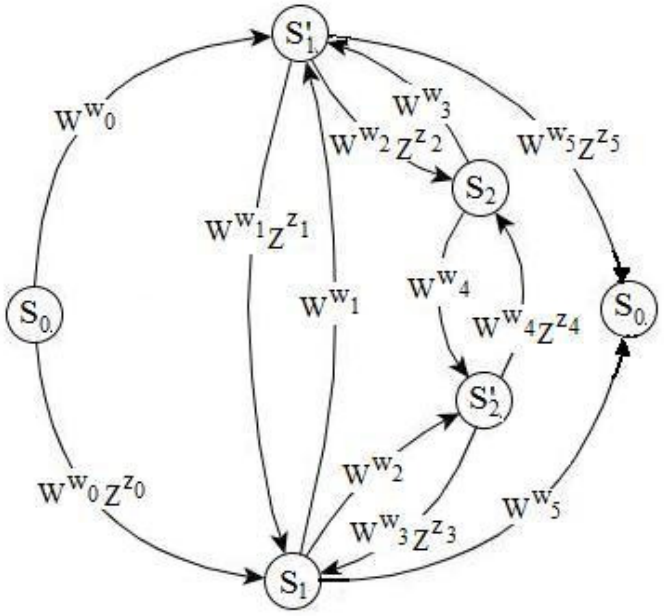

Figura 3.4 Diagrama de Estados aumentado perfurado.

Fazendo uso da matriz adjacência do código, pode-se obter o espectro de distâncias, que é necessário para se calcular a probabilidade de erro.

O efeito da perfuração deve ser levado para a matriz adjacência. No cálculo do limitante considera-se o entrelaçador médio, já que seria impraticável o cálculo da probabilidade de erro sem o uso desse artifício.

No capítulo 4 será apresentada, primeiro, a análise de desempenho para códigos TCM, depois a análise de desempenho de esquemas TTCM, que é similar. Será abordada a Função de Transferência, assim como o espectro de distâncias do código. Serão apresentados também os resultados obtidos com a utilização dessa técnica de perfuração.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ESQUEMAS TTCM

O desempenho dos códigos turbo pode ser analisado a partir de técnicas simples: médias analíticas ou simulação em computador.

A Função de Transferência (FT) é uma função utilizada para se obter alguns dados teóricos referentes a um codificador, como por exemplo, a distribuição do peso das palavras de informação e das palavras código, a multiplicidade média com que estas palavras ocorrem, o comprimento destas palavras, e outros fatores que se queiram enumerar. A aproximação analítica dos códigos turbo é baseada na FT, que pode ser obtida a partir do diagrama de estados modificado do codificador.

Neste capítulo será abordada na seção 4.1, a probabilidade de erro entre duas seqüências transmitidas em esquemas TCM e a sua ligação direta com a FT do código. Na seção 4.2 o espectro de distâncias de um código TCM será descrito, assim como a obtenção do DSE a partir da FSM e na seção 4.3 o limitante da probabilidade de erro baseado na FT do primeiro evento erro. Na seção 4.4 será descrito algoritmo para redução da matriz adjacência do DSE e o algoritmo para cálculo da FT de códigos TCM e na seção 4.5 será descrita a análise de desempenho para esquemas TTCM. E ainda na seção 4.6 serão apresentados os resultados obtidos nesse trabalho.

4.1 Probabilidade de Erro

Existem algumas probabilidades de erro associadas com os códigos turbo e com esquemas TTCM. Uma delas é a probabilidade de erro de bloco, P_e , ou FER (*frame error rate*), que é a probabilidade de ocorrer um erro em um bloco transmitido dentre tantos blocos transmitidos. A segunda probabilidade, mais conhecida, é a probabilidade de erro de bit, P_b , ou BER (*bit error rate*), que é a probabilidade de errar um bit a cada tantos bits transmitidos.

O cálculo exato destas probabilidades é matematicamente muito trabalhoso e torna-se inviável conforme o código utilizado. Usualmente, podem-se obter limitantes superiores para o cálculo destas probabilidades de erro, usando uma medida de desempenho que seja mais viável de ser calculada. A probabilidade que o primeiro evento erro ocorra no instante de tempo *t*, $P(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{c})$, dado um percurso correto **c** é dada por (SCHLEGEL, 1997):

$$P_{fev}\,(\boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{c}) = P\left(\bigcup_i \boldsymbol{e_i}|\boldsymbol{c}\right) \tag{4.1}$$

Onde $\mathbf{e}_i$ é o *i*-ésimo evento erro que ocorre, na treliça, pela primeira vez no instante de tempo *t*, isto é, o decodificador elimina o caminho correto em favor do caminho incorreto pela primeira vez no instante de tempo fixo *t.* Esta probabilidade independe dos instantes de tempo *t* em que estes caminhos divergem. Para se obter a probabilidade P_{fev} (**e**) deve-se efetuar uma média ao longo de todos os caminhos corretos, considerando também que se normalize esta probabilidade para seqüências muito longas, aplicando o limitante da união temos (SCHLEGEL, 1997):

$$P_{fev}\,(\boldsymbol{e}) \leq \sum_{\boldsymbol{c}} p(\boldsymbol{c}) P\left(\bigcup_i \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{c}\right) \tag{4.2}$$

Considerando apenas um par de seqüências (**c**, **e**), e o canal sendo RAGB, $P_{(\mathbf{c}\rightarrow\mathbf{e}i,)}$, a probabilidade de se decodificar a seqüência $\mathbf{e_i}$ dado que seqüência **c** é quem foi transmitida, pode ser calculada por (SCHLEGEL, 1997):

$$P_{(\boldsymbol{c}\rightarrow\boldsymbol{e_i})} = Q\left(\sqrt{d_{ci}^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \tag{4.3}$$

Em que $R = k / n$ é a taxa do código, N_0 é a densidade espectral de potência do ruído, E_b é a energia por bit de informação, e d_{ci}^2 é a distância Euclidiana quadrada entre o *i*-ésimo evento erro **e** e o percurso correto **c**. A equação (4.3) é chamada de probabilidade de erro entre duas seqüências transmitidas.

Q(x) é a bem conhecida integral de cauda Gaussiana, dada por:

$$Q(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} d_y \tag{4.4}$$

Um limitante superior para a Equação (4.2) pode ser dado por:

$$P_{fev}(\boldsymbol{e}) \leq \sum_{\boldsymbol{c}} p(\boldsymbol{c}) \sum_{e_i|c} Q\left(\sqrt{d_{ci}^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \tag{4.5}$$

Podendo ser reescrito da forma:

$$P_{fev}(\boldsymbol{e}) \leq \sum_{\substack{i \\ (d_i^2 \in D)}} A_{d_i^2} Q\left(\sqrt{d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \tag{4.6}$$

Freqüentemente cada uma das distâncias Euclidianas quadradas d_i^2 que ocorrem em (4.6) estão entre o percurso correto **c** e o *i*-ésimo evento erro $\mathbf{e_i}$ em um particular código de treliça. *D* é o conjunto de todas as possíveis distintas distâncias d_i^2 e $A_{d_i^2}$ é o número de vezes que d_i^2 ocorre, isto é, a multiplicidade de d_i^2. A multiplicidade $A_{d_i^2}$ pode ser fracionada, desde que todos os caminhos **c** não tenham o mesmo conjunto de distâncias d_{ci}^2 com os seus respectivos caminhos de erro **e**. A menor distância d_i^2 que pode ser encontrada na treliça é chamada de d_{free}, distância Euclidiana quadrada livre, ou apenas distância livre do código.

O conjunto infinito de pares (d^2, A_{d^2}) é chamado de espectro de distância (ED) do código, e imediatamente pode-se ver está conexão com a probabilidade de erro do código. A Figura 4.1 ilustra o ED de um código 8PSK com 16 estados, a partir da Tabela 4.1.

A partir da primeira probabilidade do evento erro obtém-se um salto na média da probabilidade de erro de bit pelo seguinte raciocínio: Cada evento erro $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e_i}$ causará certo número de bits errados. Se for substituído A_{d^2} por B_{d^2}, que é a média de erros de bit no caminho errado com distância d^2, obtém-se um salto no erro de bit.

Desde que o código em treliça processe *k* bits por unidade de tempo, a média de probabilidade de erro de bit é dada por:

$$P_b(\boldsymbol{e}) \leq \sum_{\substack{i \\ (d_i^2 \in D)}} \frac{1}{k} B_{d_i^2} Q\left(\sqrt{d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \tag{4.7}$$

A Tabela 4.1 mostra os valores de A_{d^2} e B_{d^2}para este código.

Tabela 4.1 ED para um código Ungerboeck, 8-PSK e 16 estados.

$\{\boldsymbol{d^2}\}$	$\boldsymbol{A_{d^2}}$	$\boldsymbol{B_{d^2}}$
5.172	2.23	11.5
5.757	4.625	21.875
6	1	4
6.343	6.063	41.25
56.586	4	15
6.929	17.656	116.219
7.172	6.75	39
7.515	31.891	234.906
7.757	26.375	169.625
8	8.5	42
8.101	62.602	526.289
8.343	58.375	408.875
8.586	16.625	94.375
8.686	130.691	1163.28
8.929	134.719	1107.84
9.172	60.75	400.75
9.272	253.697	2480.54
9.414	4	17
9.515	338.688	2948.34
9.757	168.219	1253.53
9.858	511.915	5385.71
10	16.5	106

A Figura 4.1 ilustra o ED de um código Ungerboeck, 8PSK e 16 estado, conforme Tabela 4.1.

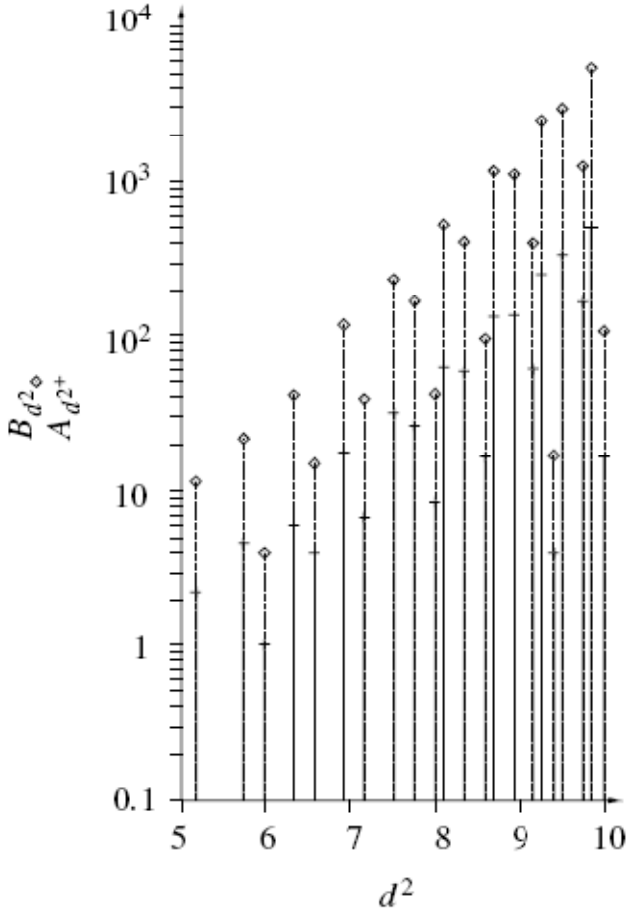

Figura 4.1 ED de um código Ungerboeck, 8-PSK e 16 estados, com polinômios geradores

$h^{(0)}=23$, $h^{(1)}=4$ e $h^{(2)}=16$.

Em geral, o caminho decodificado pode conter múltiplos eventos erro, mas a probabilidade de erro do primeiro evento erro é sempre a mais importante, pois ela dá um limitante bem apertado da probabilidade de erro.

A FT, definida por uma função polinomial T (*X, Y, L*) onde *X* é a variável que rotula na treliça a seqüencia de entrada, *Y* a seqüencia de saída e L o comprimento da seqüência. Os expoentes de *X* e *Y* contêm as distâncias de Hamming e Euclidianas entre seqüências, respectivamente, e o expoente da variável *L* o comprimento da palavra-código ao longo da treliça.

Observe na obtenção da FT que a distância livre mínima do código é identificada como o monômio de T (*X, Y, L*) que possui o menor expoente de *Y*. A expansão em série da

FT, nos dá a informação sobre todas as palavras código de qualquer comprimento. Esta expansão é denominada de espectro de distâncias do código. Na seção seguinte será definido o espectro de distâncias do código TCM e sua relação com a sua FT.

4.2 Espectro de Distâncias de um Codificador TCM

A partir da matriz adjacência associada, com um algoritmo de redução de estados do codificador, ou não, torna possível encontrar a função de transferência (FT) do primeiro evento erro, função esta que enumera todo o espectro de distâncias (ED) do codificador. O cálculo de desempenho baseia-se na enumeração das distâncias Euclidianas e/ou de Hamming entre as seqüências de símbolos transmitidas e todas as possíveis seqüências decodificadas (evento erro). A enumeração destas distâncias, com suas respectivas multiplicidades, constituem o ED do código. O ED na realidade é um conjunto ordenado, no caso de triplas constituídas de multiplicidade (A_i), distância de Hamming (d_i^H) e distância Euclidiana quadrada (d_i^2) , $i=1,2,...,$ dado por $S=\{(A_1, d_1^H, d_1^2), (A_2, d_2^H, d_2^2), (A_3, d_3^H, d_3^2),...\}$. O ED tem um papel importante na estimativa da probabilidade de erro empregando alguma técnica de limitante tal como a bem conhecida técnica do limitante da união.

Pode-se descrever todas as distâncias do evento erro de comprimento L por (SCHLEGEL, C., 1997):

$$\boldsymbol{G}_L = \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{L-2}\boldsymbol{E}; \qquad L \geq 2 \tag{4.8}$$

A seguir será relacionado o cálculo de (4.8) com o limitante da probabilidade de erro de esquemas TCM. A Equação (4.8) pode agora ser usada para encontrar o espectro das distâncias de um código com qualquer comprimento desejado.

4.3 Limitante da União da Probabilidade de Erro

O limitante da probabilidade de erro pode ser obtido a partir de funções de transferência, sob o ponto de vista da teoria de sistemas. Este limitante usando o par de

estados da treliça foi aplicado pela primeira vez em esquemas TCM (BENEDETTO et. al., 1996).

O primeiro passo é tomar a equação (4.6) e aplicar a desigualdade:

$$Q\left(\sqrt{d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}}\right) \leq \frac{1}{2} exp\left(-d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}\right) \tag{4.9}$$

Agora usando a equação (4.8), pode-se verificar que:

$$P_{fev}(\boldsymbol{e}) \leq \sum_{\substack{i \\ (d_i^2 \in D)}} A_{d_i^2}\, exp\left(-d_i^2 \frac{RE_b}{2N_0}\right) \tag{4.10}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{L=2}^{\infty} \mathbf{1}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{P}^{L-2} \boldsymbol{M}\ \mathbf{1}\Big|_{Y=exp\left(-\frac{RE_b}{4N_0}\right)} \tag{4.11}$$

em que $\mathbf{1} = (1,1 \ldots ,1)^T$ é um vetor de 1's, N x 1 e $\frac{1}{N}\mathbf{1}^T$ é a média sobre todos os estados divergentes.

Tirando a soma da matriz multiplicação obtém:

$$P_{fev}(\boldsymbol{e}) \leq \frac{1}{N} \boldsymbol{D} \sum_{L=2}^{\infty} \boldsymbol{P}^{L-2}\, \boldsymbol{M}\ \mathbf{1}\Big|_{Y=exp\left(-\frac{RE_b}{4N_0}\right)} \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{N} \mathbf{1}^T \boldsymbol{D} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{M}\ \mathbf{1}\Big|_{Y=exp\left(-\frac{RE_b}{4N_0}\right)} \tag{4.13}$$

A equação (4.13) envolve inversão de uma matriz ($N^2 - N$) x ($N^2 - N$), que é uma tarefa bastante difícil. O cálculo da equação (4.13) é muito complicado e gera um esforço computacional elevado, isto porque exige inversão de matriz. Para diminuir esse esforço, faz-se a redução da matriz **B**, conforme exposto na seção 2.4. Na próxima seção será descrito o algoritmo de redução com maiores detalhes.

4.4 Algoritmo para Redução da matriz adjacência do DSE

Nesta seção será feito um detalhamento maior do algoritmo de redução exposto na seção 2.4. Considere a matriz adjacência do DSE definida no capítulo 2, seção 2.3, em (2.9). A FT que enumera as distâncias mencionadas T(X, Y, L) pode ser calculada a partir da matriz adjacência **B** do DSE da seguinte forma:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{GG} & \boldsymbol{B}_{GB} \\ \boldsymbol{B}_{BB} & \boldsymbol{B}_{BG} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

onde as submatrizes $\mathbf{B}_{GG}$, $\mathbf{B}_{GB}$, $\mathbf{B}_{BG}$, $\mathbf{B}_{BB}$ têm como elementos, no caso mais geral, polinômios cujos expoentes enumeram as distâncias Euclidianas e de Hamming, entre os estados (bom, bom), (bom, ruim), (ruim, bom) e (ruim, ruim), respectivamente. Essas submatrizes estão relacionadas com as matrizes apresentadas no capítulo 2: matriz divergente **D** ($\mathbf{B}_{GB}$), matriz paralela **P** ($\mathbf{B}_{BB}$), e matriz convergente **M** ($\mathbf{B}_{BG}$).

Uma forma de calcular T(X, Y, L) a partir destas submatrizes e de (4.13) pode ser feita diretamente conforme (SCHLEGEL, 1997):

$$T(X,Y,L) = \frac{1}{N}\mathbf{1}^T.\boldsymbol{B}_{GG}.\mathbf{1} + \mathbf{1}^T.\boldsymbol{B}_{GB}.[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_{BB}]^{-1}.\boldsymbol{B}_{BG}.1 \tag{4.15}$$

onde **1** é um vetor coluna de 1's. Observa-se, porém, em (4.15), que este método utiliza a inversão de matrizes, o que pode ser, conforme o valor de N, computacionalmente proibitivo. Para um dado código TCM, tem-se um DSE com uma matriz adjacência **B** de dimensão N^2 x N^2, e um vetor de probabilidades $\prod$, 1 x N, com probabilidades equiprováveis $1/N$.

Primeiramente as linhas das matrizes serão divididas em duas partes, a parte que consiste das linhas dos estados (bom, bom), e o restante. É denotado n_g, n_b e $dim = n_g + n_b$ o número de linhas dos estados (bom, bom), o número de linhas dos estados restantes e a dimensão de **B**, respectivamente. Inicialmente tem-se $n_g = N$ e $n_b = N^2 - N$.

O algoritmo consiste em fazer uma varredura nas n_g linhas e verificar dentre estas as que são iguais elemento a elemento. As linhas iguais são colapsadas para uma única linha sendo que os elementos da linha repetida são zerados. As respectivas colunas, que representam as entradas no DSE, são somadas elemento a elemento e a linha anulada tem a sua respectiva coluna também anulada. O mesmo se dá para as n_b linhas.

Após cada varredura nas linhas, é verificado se ainda restaram linhas iguais, caso afirmativo aplica-se novamente o procedimento descrito anteriormente até que não sejam encontradas linhas repetidas. Após as reduções de linhas, e conseqüentemente de colunas, tem-se o novo vetor de probabilidades $\prod$ com dimensão 1 x n_g, cujas probabilidades são também colapsadas de acordo com o número n_g de linhas não nulas. Da matriz **B** extrai-se então uma submatriz $\mathbf{B'}_{dim\ x\ dim}$.

Exemplo 4.1: Seja o código de Ungerboeck TCM, 4 estados, 1 bit/símbolo, QPSK, da Figura 4.2. Este código inicialmente possui uma matriz $\mathbf{B}_{16x16}$, que após a aplicação do algoritmo de redução, utilizando o *software* MAPLE, tem-se n*g* = 1, n*b* = 2, dim = 3 resultando em uma matriz reduzida $\mathbf{B'}_{3x3}$:

$$\boldsymbol{B'} = \begin{pmatrix} 1 & y^4xL & 0 \\ 0 & y^2xL & y^2L \\ y^4L & xL & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Figura 4.2 Treliça e mapeamento da constelação para o código TCM de Ungerboeck, 4 estados, Q-PSK, 1 bit/símbolo. Admitindo que a energia média da constelação é igual a 1.

A partir da matriz de adjacências na forma de (4.14) e do vetor inicial de probabilidades $\prod$, o algoritmo de redução da matriz **B** resume-se nos seguintes passos:

1. Para cada par (i, j), $i = 1, ..., n_g - 1$, $j = i + 1, ..., n_g$, dentre as n_g linhas de **B**: Se $(i = j)$ faça:

   - $i = i + j$ (colapse as linhas iguais);
   - $j = 0$ (zere todos os elementos da j-ésima linha);
   - Atualize o vetor de probabilidades $\prod$;
   - Some o correspondente par de colunas $(i; j)$, $i = i + j$;
   - $j = 0$ (zere todos os elementos da j-ésima coluna);

2. Para cada par (i, j), $i = 1, ..., n_b - 1$, $j = i + 1, ..., n_b$, dentre as n_b linhas de **B**: Se $(i = j)$ faça:

   - $i = i + j$ (colapse as linhas iguais);
   - $j = 0$ (zere todos os elementos da j-ésima linha);
   - Some o correspondente par de colunas (i, j), $i = i + j$;
   - $j = 0$ (zere todos os elementos da j-ésima coluna);

3. Se ainda existirem dentre as n_g e n_b linhas não nulas linhas iguais:

   - Repita o item 1 e/ou 2;

4. Caso contrário:

   - Extraia de **B** a submatriz reduzida **B'**;

5. Fim.

É importante destacar que o algoritmo proposto, apesar de apresentar uma forte redução de estados do DSE, não é ótimo quanto ao número mínimo de redução dos estados, porém conta com uma vantagem grande sob o aspecto da implementação por ser completamente matricial. A próxima subseção descreverá o algoritmo para calcular a função de transferência completa de códigos TCM, considerando como a matriz de entrada do algoritmo a matriz reduzida **B'**.

4.5 Algoritmo para cálculo da FT de códigos TCM

O algoritmo a ser descrito aqui, para cálculo da FT de códigos TCM, é uma extensão do algoritmo proposto em (PIMENTEL, 2003). O cálculo da FT, *T*(*X, Y, L*) derivado em (SCHLEGEL, 1997) a partir de uma matriz igual à matriz de adjacências do código TCM, no caso será utilizada a matriz reduzida **B'** como na forma de (4.15), exceto que os elementos de $\mathbf{B'_{GG}}$ são forçados a zero, gerando a matriz **B***, de modo a ter os eventos erro saindo de um estado bom e divergindo para um estado ruim. Assim, a expressão para a FT é dada por (SCHLEGEL, 1997):

$$T(X,Y,L) = 1 - \frac{1}{[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^*]_{1,1}} \tag{4.17}$$

sendo $\boldsymbol{I}$ a matriz identidade, em (4.17) observa-se a necessidade da inversão da matriz simbólica para a obtenção da expressão da FT. Sabe-se que, em função do número de estados *N* do codificador, a inversão de matrizes pode tornar-se computacionalmente proibitivo.

O algoritmo não utiliza inversão de matrizes, o que torna o cálculo da FT computacionalmente mais eficiente. O algoritmo emprega uma técnica de redução de estados, o SRA (*state reduction alghoritm*), da matriz inicial **B*** que iterativamente produz uma matriz reduzida de forma que, a cada passo, tem-se máquinas de estados finitos (FSM), que produzem FTs idênticas.

O algoritmo consiste em obter a matriz **B*** (*r*), *r* = *dim*, obtida através da eliminação do *r*-ésimo estado, a partir da matriz anterior **B*** (*r* + 1). Sejam dois conjuntos de índices *l, l* = 0, ..., n_g – 1, $l \neq r$, *R* e C, o cálculo do (*i, j*)-ésimo elemento da matriz **B*** (*r*) é dado pela equação (4.21) (UNGERBOECK, 1982):

$$\begin{aligned} &[\boldsymbol{B}^*(r+1)]_{i,j} + [\boldsymbol{B}^*(r+1)]_{i,r}\left(1 - [\boldsymbol{B}^*(r+1)]_{r,r}\right)^{-1}[\boldsymbol{B}^*(r+1)]_{r,j} && \text{para } i \in R,\ j \in \text{C}, \\ &0, && \text{para } i = r,\ j = 0, ..., n_g\text{-}1, \\ &0, && \text{para } j = r,\ i = 0, ..., n_g\text{-}1, \\ &[\boldsymbol{B}^*(r+1)]_{i,j}, && \text{caso contrário.} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como pôde ser observado em (4.18), não é utilizada a inversão de matrizes, isto provoca uma grande simplificação no esforço computacional e possibilita a utilização de programas para computação simbólica como o MAPLE, MATLAB, entre outros.

Exemplo 4.2: Seja a matriz reduzida **B'** dada em (4.16), a partir desta matriz tem-se a matriz **B*** (*r*), com dimensão dim = 3, inicialmente:

$$\boldsymbol{B}^*(3) = \begin{pmatrix} 0 & y^4xL & 0 \\ 0 & y^2xL & y^2L \\ y^4L & xL & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

que após a aplicação do algoritmo SRA, simulado pelo *software* MAPLE, obtêm-se a seguinte seqüência de matrizes:

$$\boldsymbol{B}^*(2) = \begin{pmatrix} 0 & y^4xL & 0 \\ y^6L^2 & y^2xL + y^2xL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^*(1) = \begin{pmatrix} -\frac{y^{10}xL^3}{-1+y^2xL+y^2xL^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuja FT é dada por:

$$T(X,Y,L) = [B^*(1)]_{1,1} = \frac{y^{10}xL^3}{1-(y^2xL + y^2xL^2)} \tag{4.20}$$

Reescrevendo em forma de série infinita, tem-se:

$$T(X,Y,L) = y^{10}xL^3 \frac{1}{1-(y^2xL + y^2xL^2)} = y^{10}xL^3 \sum_{i=0}^{\infty} (y^2xL + y^2xL^2)^i \tag{4.21}$$

Com a utilização do MAPLE, foi feita a expansão em série de Taylor de (4.21) e ordenado em ordem crescente. Supondo o interesse em enumerar somente as multiplicidades e distâncias Euclidianas, fazendo x=1 e L=1, tem-se:

$$\begin{aligned} T(X,Y,L) = {} & y^{10} + 2y^{12} + 4y^{14} + 8y^{16} + 16y^{18} + 32y^{20} + 64y^{22} + 128y^{24} + \\ & 256y^{26} + 512y^{28} + 1024y^{30} + 2048y^{32} + 4096y^{34} + 8192y^{36} + 16384y^{38} + \\ & 32768y^{40} + 65536y^{42} + 131072y^{44} + 262144y^{46} + 524288y^{48} + 1048576y^{50} + \\ & \ldots \end{aligned} \tag{4.22}$$

Como pôde ser observado na expressão (4.22), os primeiros n = 21 pares (d_i^2,A_i), distâncias e multiplicidades, respectivamente, descrevem o espectro truncado segundo o conjunto:

S = {(1,10), (2,12), (4,14), (8,16), (16,18), (32,20), (64,22), (128,24), (256,26), (512,28), (1024,30), (2048,32), (4096,34), (8192,36), (16384,38), (32768,40), (65536,42), (131072,44), (262144,46), (524288,48), (104857,50)}

Executando os mesmo passos acima, a mesma análise pode ser estendida para outros códigos TCM.

Após a expansão truncada, n = 21, da série de Taylor da FT deste código, pode se analisar o espectro das distâncias em (4.22), observa-se que existe 1 (uma) palavra código com distância Euclidiana = 10, 2 (duas) palavras código com distância Euclidiana = 12, 4 (quatro) palavras código com distância Euclidiana = 14, e assim por diante.

A partir do espectro das distâncias pode-se fazer o cálculo da probabilidade de erro de bit dos códigos TCM conforme a equação (4.7).

Neste código TCM, a taxa do código é igual a R=1/2. Serão utilizados somente os primeiros n = 18 termos da série expandida em (4.21), isto porque as menores distâncias Euclidianas são as mais importantes, pois dominam a probabilidade de erro.

Fazendo o cálculo da probabilidade de erro para uma SNR fixa, e depois variando SNR de 0 a 5dB, obtêm-se uma curva, através do *software* MATLAB, para o limitante da probabilidade de erro ilustrada na Figura 4.3.

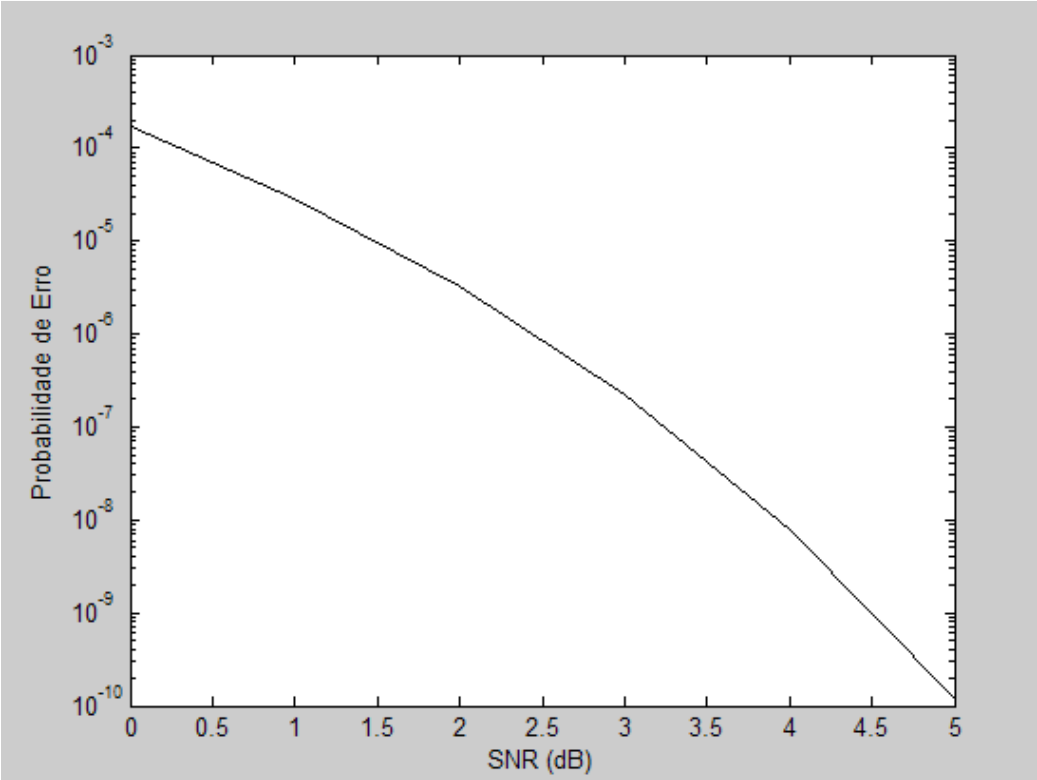

Figura 4.3 Limitante da União da probabilidade de erro, de um código Ungerboeck, modulação QPSK e a uma taxa R=1/2.

A seguir será descrita a análise de desempenho para o esquema TTCM.

4.6 Análise de desempenho para esquemas TTCM.

Em (BENEDETTO, 1996), foi introduzida a função de enumeração dos pesos de entrada e saída - IOWEF (*input output weigth enumeration function*) de um código turbo binário. Esta função enumera o número de palavras códigos A_{xy} com bits de informação de peso *i* e bits de paridade de peso *j*, como um coeficiente de X^iY^y de um polinômio com duas variáveis X e Y. Neste trabalho será estendido o conceito da IOWEF para o TTCM perfurado.

Considere um TTCM composto por códigos componentes idênticos e cada um tem uma taxa de *k/n* e comprimento de memória *v*, resultando em um $N = 2^v$ estados. Considere também que o comprimento do entrelaçador é igual á *K* bits.

Considere x e $\tilde{x}$ seqüências de informações de entrada correspondentes a palavra código correta e errada, **c** e **e** respectivamente. Para um par evento erro e admitindo $k = 2$, definindo $\mathbf{h} = [h_{O1}; h_{O2}; h_{E1}; h_{E2}]$, vetor de distâncias de Hamming, onde os quatro componentes de **h**

enumeram o número de posições de bits do tipo {0, 1} e do tipo {1, 0} nos dois entrelaçadores de informação par e ímpar. Considere **I** □ {$O_{(odd)}$; $E_{(even)}$} e i = 1 pra **I** = O, i = 0 para **I** = E, os componentes do vetor **h** são calculados como (TUJKOVIC et.al., 2002):

$$h_{I1} = \sum_{l} \sum_{m=1}^{k} \tilde{x}_m(2l-i)(x_m(2l-i) \oplus \tilde{x}_m(2l-i)) \tag{4.23}$$

$$h_{I2} = \sum_{l} \sum_{m=1}^{k} x_m(2l-i)(x_m(2l-i) \oplus \tilde{x}_m(2l-i))$$

Em que o operador binário $\oplus$ denota a adição módulo 2.

Por exemplo, considere x ={01, 11, 00, 10, 11, 01} e $\tilde{x}$ = {01, 10, 10, 11, 11, 01}, como ilustrado na Figura 4.4, uma linha continua e uma linha tracejada na parte superior da figura, respectivamente. Então substituindo (4.23), tem-se **h** = [1, 0, 1, 1]. A soma sobre os componentes de **h**, denotado por h, é a distância de Hamming entre x e $\tilde{x}$, isto é, h = 3. Os elementos da entrada de L-ésima potência de **B** é um polinômio em (X, Y) cujos expoentes são todas as distâncias de Hamming e distâncias Euclidianas quadradas entre os pares (**c, e)** e cujos coeficientes são as multiplicidades médias dessas distâncias.

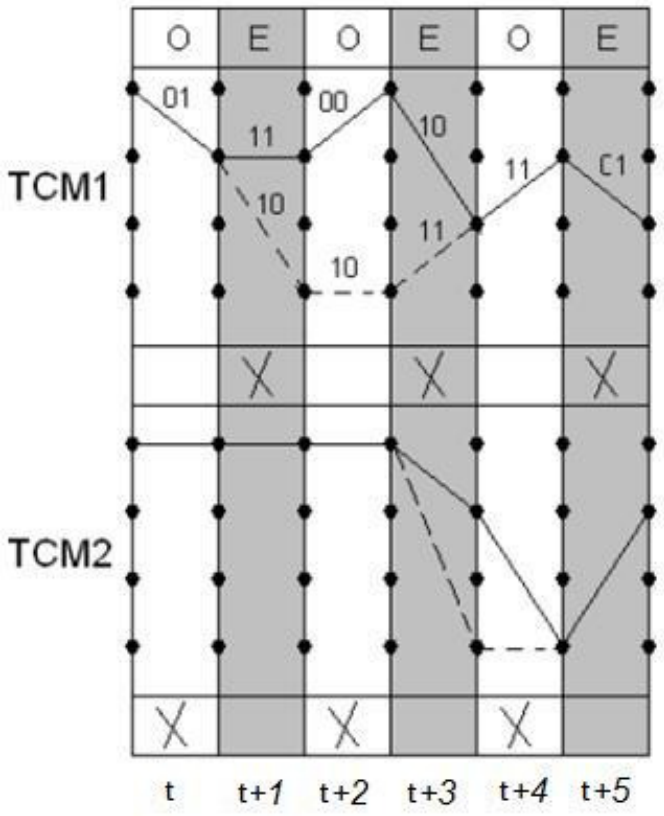

Figura 4.4 Saída da treliça para TCM1 e TCM2. A linha tracejada é a seqüência $\tilde{x}_m$ e a linha continua é a seqüência x_m (4.25). A marca "X" indica perfuração no símbolo.

A palavra código perfurada TTCM resultante é a concatenação de símbolos complexos par-ímpar das treliças TCM1/TCM2, respectivamente, como ilustrado na Figura 4.4, isto é, admitindo o primeiro símbolo de saída do TTCM de t = 1 do TCM1, e segundo t = 2 do TCM2, t =3 do TCM1, e assim por diante, a palavra código TTCM composta será TCM1, TCM2, TCM1, e assim por diante, para os mesmo índices de tempo. Em poucas palavras, tem-se para posições ímpares, TCM1 transmitindo e TCM2 não transmitindo e para posições pares, TCM1 não transmitindo e TCM2 transmitindo, por analogia com TTCM binários tem-se uma matriz padrão de perfuração **P**, a nível de símbolo, de período 2, conforme definido o padrão de perfuração no capítulo 3, dado por (3.2).

Para obter o IOWEF do TTCM, inicialmente se enumera o codificador individualmente e depois o IOWEF do TTCM, como no modo binário em (BENEDETTO, 1996).

A contribuição deste trabalho é definir a enumeração de um esquema TTCM perfurado, a nível de símbolo, empregando algoritmos completamente matriciais, conforme definido no capítulo3, seção 3.4.

Primeiro considerou-se a matriz **B'** com dimensão *N'* x *N'*, que é obtida por um algoritmo de redução qualquer (SCHLEGEL,1997), (AKTAS e FITZ, 1993) e (RYAN e TANG, 2004) (WESEL R., 2004) da matriz **B** de tamanho *N* x *N*, definida anteriormente pela Equação (2.10). Para continuar, a enumeração deve ser levada para a matriz **B'** o efeito da perfuração. A técnica de perfuração usada neste trabalho é a mesma proposta em (DUMAN e SALEHI, 1999), porém neste trabalho foi usada a perfuração á nível de símbolo.

Seguindo a notação do algoritmo de perfuração, descrito na seção 3.4, do capítulo 3, e adequando a matriz de perfuração (3.4) por:

$$\begin{bmatrix} 0 & X^{h_j}\, Y^{d^2(c,e)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

A partir da matriz **B'** obtém uma sub-matriz $\mathbf{B'_{sub}}$, com dimensão (*N'*-1) x (*N'*-1), apagando a primeira linha e a primeira coluna de **B'**. Denota-se $\mathbf{h}_j = [h_{I1}, h_{I2}]$, o vetor da distância de Hamming com I=O para *j*=1 e I=E para *j*=2 para TCM*j*.

Portanto, substituindo em $\mathbf{B'_{sub}}$ a matriz de perfuração (4.24), tem-se uma matriz que terá o dobro do tamanho de $\mathbf{B'_{sub}}$, com uma nova dimensão 2(*N'*-1) x 2(*N'*- 1).

Deixando a primeira linha e a primeira coluna de $\mathbf{B'_{sub}}$, respectivamente, com seus elementos em comum ($\mathbf{B'}_{[1,1]}$=0) deletados, assim, ambos os vetores terão tamanho *N'*-1. Multiplicando cada entrada destas, por um vetor linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & X^{h_j}\, Y^{d^2(c,e)} \end{bmatrix}$$

e um vetor coluna:

$$\begin{bmatrix} X^{h_j}\, Y^{d^2(c,e)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente, o vetor resultante terá um duplo comprimento 2(*N'*-1).

A matriz de perfuração final $\mathbf{B^*_{punct}}$ do TCM*j*, *j* = 1, 2 tem tamanho [2(*N'*-1)+1] x [2(*N'*-1)+1], cujas entradas tem tamanho 2(*N'*-1)+1. O elemento [1, 1] de $\mathbf{B^*}_{punct}$ é zero.

Seja $H_{1,\psi}^{j}$ uma função enumeradora para o codificador TCMj, j = 1, 2, onde $H_{1,\psi}^{j}$ é a multiplicidade para o evento erro simples com tamanho $\boldsymbol{\psi}$. Considere o TCM1 terminado. A multiplicidade $H_{1,\psi}^{j}$ é determinada pela FT do primeiro evento erro, dada pelos coeficientes da FT determinada pelos algoritmos SRA e IMBA.

O número de eventos erros concatenados é denotado por θ. Se θ = 1, diz que o evento erro é simples, se θ = 2 diz que o evento erro é duplo, se θ = 3 diz que o evento erro é triplo, e assim por diante.

A função $H_{\theta,\psi}^{j}$ enumera todos os eventos erros múltiplos de ordem θ. Então se define as multiplicidades para os codificadores TCM1 e TCM2 para uma concatenação de eventos erros θ, dado por (BENEDETTO e MONTORSI, 1996):

$$H_{\theta,\psi}^{j}\left(h_j, d_j^2(c,e)\right) = \Gamma(\theta,\boldsymbol{\psi}) \prod_{\boldsymbol{\theta}=1}^{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{1,\psi\theta}}^{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{j\theta}}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{e})) \tag{4.25}$$

onde a função Gama é definida em (BENEDETTO e MONTORSI, 1996):

$$\Gamma(\theta,\boldsymbol{\psi}) = \binom{\frac{K}{2} - \frac{\boldsymbol{\psi}}{2} + \theta}{\theta} \tag{4.26}$$

Dentro de um bloco de tamanho K, é possível terem eventos erros múltiplos de diversas formas, não apenas concatenados. O número de eventos erro de ordem θ possíveis dentro de um bloco de comprimento *K/2* (entrelaçador par-ímpar), independente de serem concatenados ou não, e tamanho $\boldsymbol{\psi}$ é dado por (4.26).

Então, a multiplicidade média no espectro de distâncias do TCM j, j = 1, 2 são calculados como:

$$H^{j}\left(h_j, d_j^2(c,e)\right) = \sum_{\theta}\sum_{\boldsymbol{\psi}} H_{\theta,\psi}^{j}\left(h_j, d_j^2(c,e)\right) \tag{4.27}$$

Admitindo que ambos entrelaçadores, par e ímpar, são uniformes (BENEDETTO e MONTORSI, 1996), isto é, todas as permutações são igualmente prováveis, o espectro de

distâncias resultante do TTCM, a média de todos as informações entrelaçadas possíveis, condicionados ao vetor distância **h** é dado por (TUJKOVIC, JUNTTI e LATVA-AHO, 2002):

$$H\big(h, d^2(c,e)\big) = \sum_h \frac{H^1(h_1, d_1^2(c,e))H^2(h_2, d_2^2(c,e))}{\binom{\frac{K}{2}}{h_{O1}, h_{O2}}\binom{\frac{K}{2}}{h_{E1}, h_{E2}}} \tag{4.28}$$

Em que (4.29) é o efeito do entrelaçador médio (MIZUTOME e KOIKE, 2000):

$$\binom{\frac{K}{2}}{h_{I1}, h_{I2}} = \binom{\frac{K}{2}}{h_{I1}}\binom{\frac{K}{2} - h_{I1}}{h_{I2}} \tag{4.29}$$

Neste trabalho, não foi utilizado o algoritmo genérico (BENEDETTO, MONDIN e MONTORSI, 1994), tal como na sua concepção original, mas um algoritmo iterativo matricial (CALDEIRA e PIMENTEL, 2004), devido a facilidade de implementação. Neste algoritmo avaliou-se o espectro de distância truncado levando em conta eventos erro múltiplos de ordem $\theta = 3$.

O limitante da união para a probabilidade de erro de bit (BER – *bit error rate*) de decodificação de máxima verossimilhança é dado por (MIZUTOME e KOIKE, 2000):

$$P_b \leq \sum_h \frac{h}{2K} Q\left(\sqrt{d_{free}^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) x\, H\big(h, d^2(c,e)\big) \tag{4.30}$$

em que d^2_{free} é a mínima distância Euclidiana quadrada do TTCM, E_b/N_o é a energia de bit pra razão sinal-ruído e *h/2K* é a distância efetiva. Q(x) é a conhecida cauda Gaussiana, já definida em (4.4).

4.7 Resultados

Nesta secção serão mostrados os resultados obtidos com a comparação entre o limitante expurgado e as simulações de alguns códigos da literatura. Quando a curva do limitante obtido é muito próxima da curva da simulação diz-se que o limitante é apertado. Os

limitantes apresentam comportamento assintótico em relação à curva simulada na faixa de relação sinal ruído alta que no caso TTCM esta faixa situa-se no patamar de erro da curva simulada. Um desses resultados foi obtido com o TTCM (ROBERTSON e WOERZ, 1995) ilustrado na Figura 3.2, 8 PSK, 8 estados, 2 bits/s/Hz, e para 2 entrelaçadores de comprimentos K = 2048 e K = 10000 bits. O espectro de distâncias truncado foi avaliado pra valores máximos de concatenação de eventos simples, tamanho do evento-erro e distância de Hamming igual a $\theta = 3$, $\boldsymbol{\psi} = 10$ e $h = 6$, respectivamente.

Depois de aplicada a técnica de redução de matriz e o algoritmo SRA, obtém a FT completa do primeiro evento erro do código a partir da matriz reduzida, sem precisar fazer inversão de matrizes (SOUSA et.al.,2009).

Aplicando de (4.25) a (4.28), para os valores já mencionados de $\theta = 3$, $\boldsymbol{\psi} = 10$ e $h = 6$, obtém o seguinte limitante apertado para os codificadores simulados (ROBERTSON e WOERZ, 1995) e (ROBERTSON e WOERZ, 1998), ilustrados nas Figuras 4.5 e 4.6, respectivamente.

Observa-se que a técnica empregada é bastante robusta para os codificadores utilizados. Pode-se observar na figura que o limitante apertado foi obtido com esta abordagem, mesmo quando o comprimento do entrelaçador é alterado.

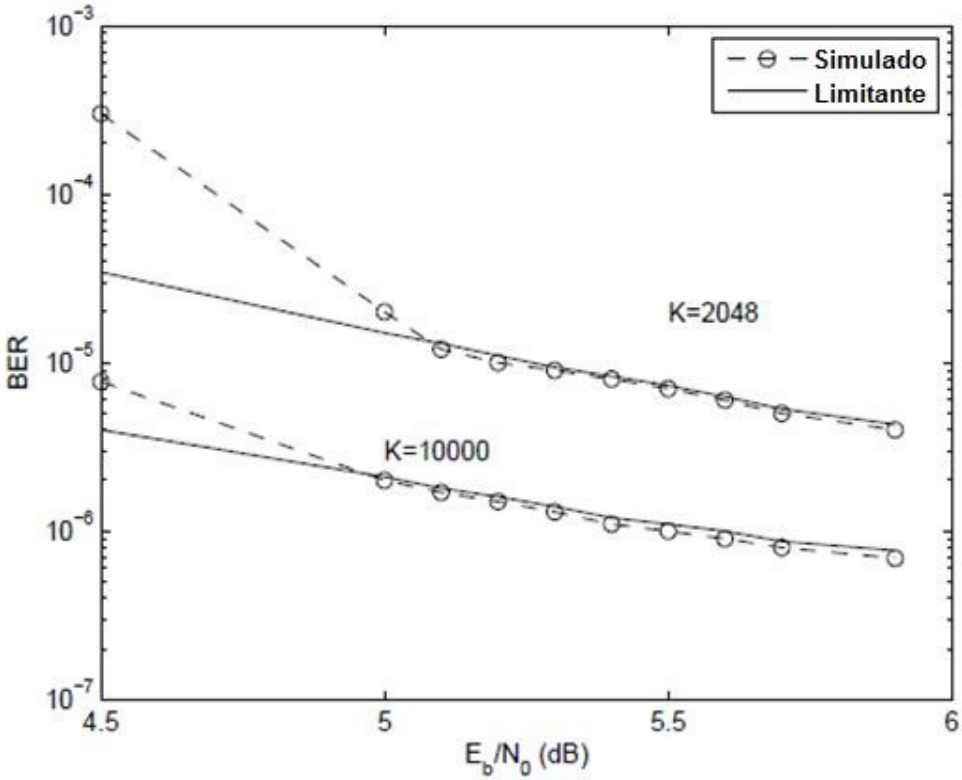

Figura 4.5 Limitante expurgado para o TTCM (ROBERTSON e WOERZ, 1995), com códigos componentes 8PSK, 8 estados, taxa 2/3. O comprimento do entrelaçador usado foi K=2048 e K=10000 bits e h=6.

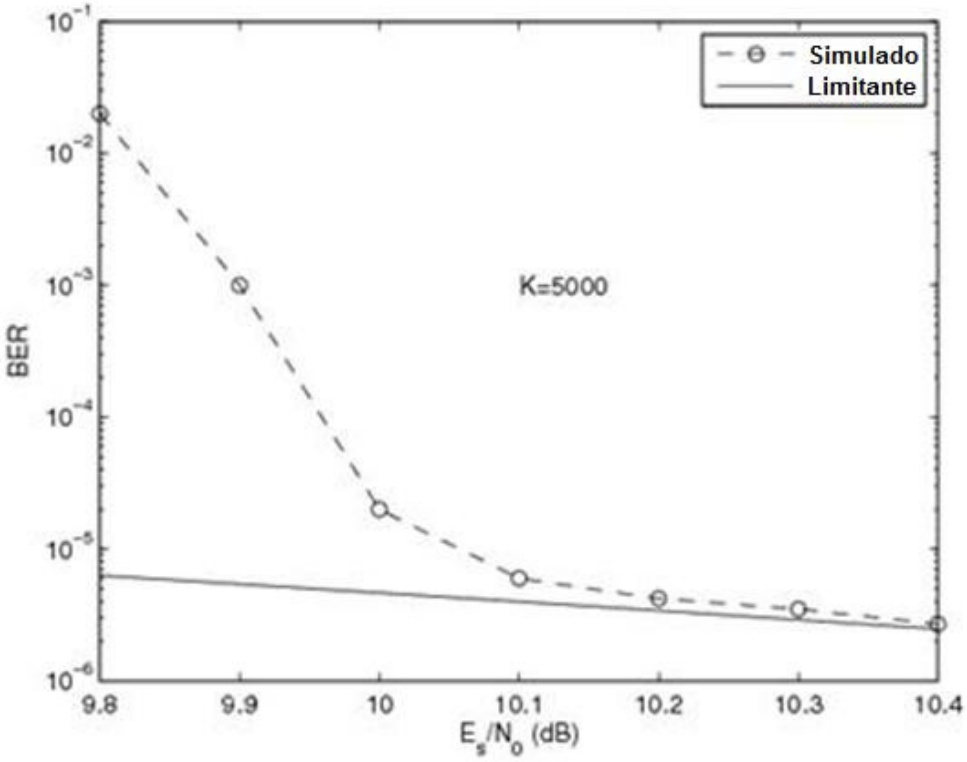

Figura 4.6 Limitante expurgado para o TTCM (ROBERTSON e WOERZ, 1998), com códigos componentes 16QAM, 8 estados, taxa 2/3. O comprimento do entrelaçador usado foi K=5000 bits e h=6.

Como a cardinalidade do ED do codificador 8PSK é bastante extensa, será exemplificado apenas o ED do 16-QAM, referente ao codificador utilizado em (ROBERTSON e WOERZ, 1998).

O espectro truncado (d_i^2, A_i) é descrito segundo o conjunto:

S = {(0.3999, 0.4996), (0.4001, 2.6360), (0.7998, 0.2160), (0.8000, 2.9480), (0.8001, 0.8546), (0.8002, 5.8960), (1.2000, 15.5300)}

Para uma melhor visualização dos passos de obtenção do limitante da união da probabilidade de erro, será apresentado um fluxograma, ilustrado na Figura 4.7.

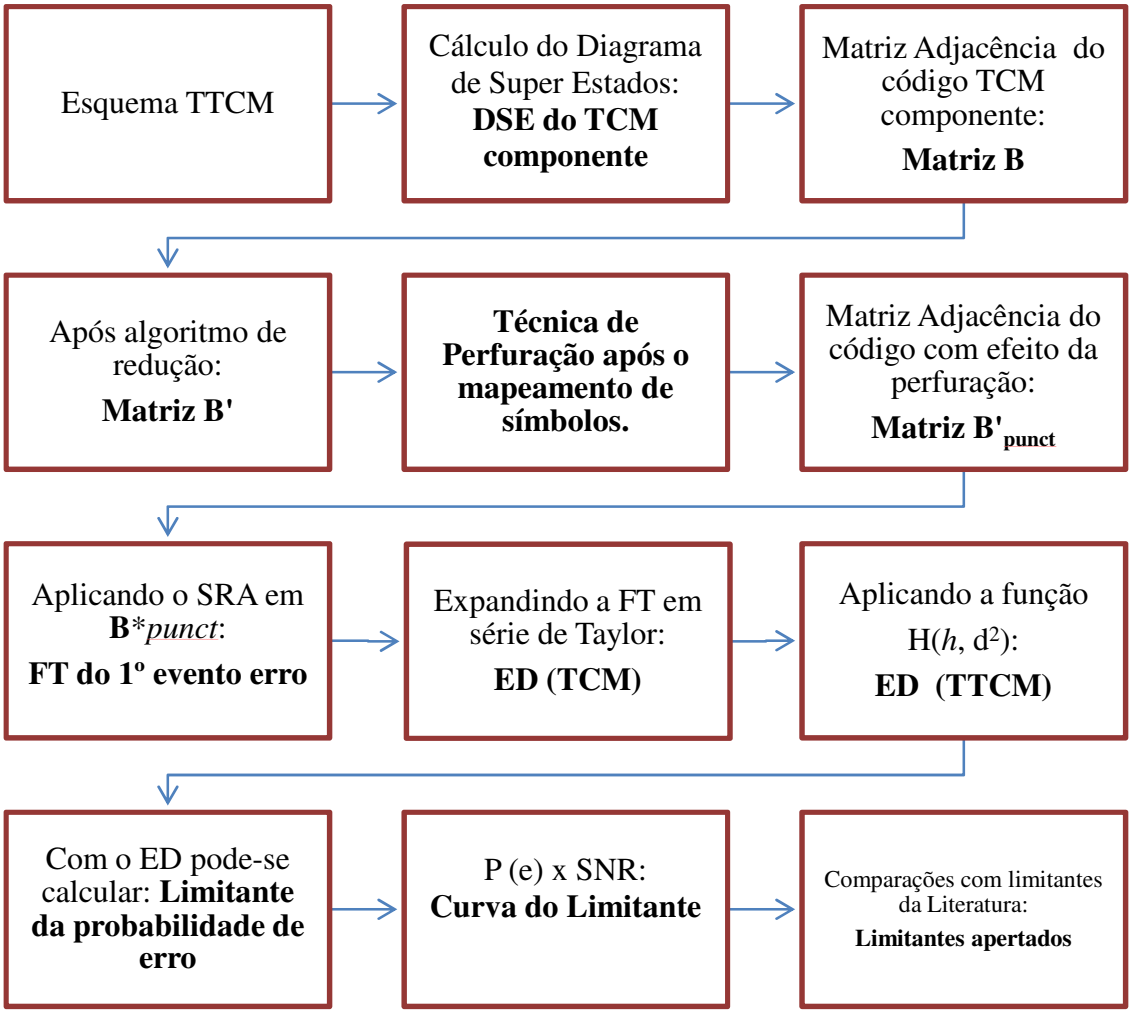

Figura 4.7 Fluxograma de cada etapa para obtenção do limitante da probabilidade de erro.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi descrito o funcionamento de um sistema de comunicação digital que combinam a capacidade de modulação de alta ordem (TCM) com o alto desempenho dos códigos turbo, esses esquemas são chamados de Modulação Codificada em Treliça Turbo (TTCM).

Foram apresentados: uma técnica de redução do número de estados do DSE, gerando uma matriz adjacência reduzida, bem como o algoritmo para obter a FT a partir desta matriz reduzida (SRA), que não necessita de inversão de matrizes, reduzindo assim o custo computacional, além disso, foi apresentada uma nova técnica para avaliação do limitante expurgado em TTCM perfurados, com a perfuração de super treliça em nível de símbolo e não de bits como na maioria dos trabalhos da literatura.

A técnica apresentada, que é baseada em um algoritmo que faz manipulações matriciais, produz limitantes apertados. Foram feitas comparações desses limitantes com os limitantes de alguns trabalhos da literatura, confirmando a eficiência da técnica proposta.

A técnica de enumeração do Espectro de Distâncias (ED) de esquemas TCM e TTCM foi aplicada a canais RAGB, utilizando um algoritmo completamente matricial. Devido à topologia matricial do algoritmo, estes podem ser facilmente implementados computacionalmente.

Fez-se uso do *software* MAPLE para apresentar os resultados matemáticos simbólicos. Um limitante da união expurgado pode ser calculado a partir do espectro de distâncias que é exato na região de patamar de erro (*error floor*). Este limitante é uma ferramenta importante para avaliação do desempenho, isto porque simulações para obter o BER para TTCMs são complexos e consomem tempo.

Fazendo uso do *software* MATLAB, obteve-se a tendência da curva do limitante da união expurgado para o código TTCM. Foram feitas algumas comparações com resultados de trabalhos já publicados.

Os algoritmos propostos têm grande vantagem pela simplicidade de execução com linguagens de programação simbólica.

A extensão do método proposto para outros códigos TTCM com diferentes estados, modulação e/ou eficiência espectral é feita de forma direta.

Por se tratar de uma técnica eficiente, sob o ponto de vista computacional, e robusta quanto à diversidade de modulação e comprimento do entrelaçador, pode ser sugerido como propostas para trabalhos futuros estudos de caso para a enumeração de códigos TCM empregando codificadores Turbo em canais com transmissão em múltiplas antenas MIMO (*multiple input multiple output*), e levando em consideração outros modelos de canais tais como os canais com desvanecimento, efeito *Doppler* e por ser uma ferramenta muito rica o ED poderia ainda ser utilizado para investigação de esquemas de transmissões empregando multiportadoras como OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKTAS D. K.; FITZ M. P. **Distance spectrum analysis of space-time trellis-coded Modulations in quasi-static Rayleigh-fading channels**. *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, pp. 3335-3344, *December* 2003.

AKTAS, D. K.; FITZ M. P. **The distance spectrum of space-time trellis coded modulations in quasi-static Rayleigh fading channels**, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, pp. 3335-3344, *December* 1993.

BAHL, L. R. et al. **Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate.** *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 284 - 287. *March* 1974.

BALTA Horia; TRIFINA Lucian; RUSINARU Anca; **Decreasing of the turbo MAP decoding time using an iterations stopping criterion,** *In: Proceedings of the 7th International Symposium on Signals, Circuits and Systems* (ISSCS '05), vol. 1, pp. 371–374, Romania, *July* 2005.

BENEDETTO, S.; MONDIN, M.; MONTORSI, G. **Performance evaluation of trellis-coded modulation schemes**. *In: Proceedings of the IEEE*, vol. 82, pp. 833-855, *June*: 1994.

BENEDETTO S.; DIVSALAR D.; MONTORSI G.; POLLARA F. **Parallel concatenated trellis coded modulation**. *In: Proc.* ICC'96, pp. 974–978, *June* 1996.

BENEDETTO S.; MONTORSI G. **Unveiling turbo-codes: Some results on parallel concatened coding schemes**. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 409-428, 1996.

BERROU, Claude; A. GLAVIEUX; P. THITIMAJSHIMA. **Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-Codes**, *In: Proceedings of the 1993 Communication Conference*, ICC'93, Geneva, Switzerland, pp. 1064-1070, *May* 1993.

BERROU, Claude, A. GLAVIEUX. **Reflections on the Prize paper: "Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo codes"**, *IEEE IT Society Newsletter*, Vol. 48, N° 2, *June* 1998.

BIGLIERI, Ézio, D. DIVASALAR, P. J. MCLANE, M. K. SIMON. **Introduction to Trellis-coded Modulation with Applications**. New York: 1991. pp.56-94. ISBN 0023099658.

CALDEIRA, L. G.; PIMENTEL, C. J. L. **An iterative matrix-based algorithm to finding the distance spectrum of space-time trellis codes**, ISITA04, pp.3335-3344, 2004.

CARRASCO R.A.; CHATZIGEORGIOU I.; RODRIGUES M. R. D; WASSELL I. J. **The Augmented State Diagram and its Application to Convolutional and Turbo Codes**. *IEEE Trans. Commun*. Vol. 57, n. 7, pp. 1948-1958, *July* 2009.

DUMAN, T. M.; SALEHI, M. **The union bound for turbo coded modulation systems over fading channels**, GLOBECOM'99, pp. 520-524, 1999.

FORNEY Jr, G. D. **Concatenated Codes**, Ph.D. Thesis, Cambridge, Massachusetts Institute of Technology - MIT, USA, 1966.

GALLAGER, R. G. **Low-Density Parity-Check Codes**. Cambridge, MIT Press, 1963.

HAGENAUER, J; HOEHER P. **A Viterbi Algorithm With Soft-Decision Outputs and its Applications**. Proceedings of Globecom '89, Dallas, Texas, pp. 47.11-47.17, November 1989.

HAMMING, R. W. **Error Detecting and Error Correcting Codes**, *Bell System Technical Journal*, Vol. 29, pp. 147-160, *April* 1950

HAYKIN, S.; M. SELLATHURAI. **Turbo-BLAST with Multi-loop Feedback Receiver**, in: Proceedings of the *3rd International Symposium on Turbo Codes & Related Topics*, pp. 195-202: Brest, France, *September* 2003.

HENG-PING Xu; SHENG Pan; XUN Zhao; MENG-TIAN Rong; **Puncturing period on the performance of punctured turbo codes.** Wuhan University Journal of Natural Sciences. Vol 7, n. 3, pp. 319-322, China, *September* 2002.

KOUSA M. A.; MUGAIBEL A. H. **Puncturing effects on turbo codes**. *IEEE Proc. Commun*. Vol. 149, n. 3, pp. 132-138, *June* 2002.

LODGE, J, R. YOUNG; P. HOEHER; J. HAGENAUER. **Separable MAP 'filters' for the decoding of product and concatenated codes**. *Proceedings of ICC'93*, Geneva, pp. 1740 - 1745, *May* 1993.

MASSEY, J. L. **Coding and modulation in digital communications**. Zurich: March, 1974. pp. 1-4.

MIZUTOME A.; KOIKE K. **Performance evaluation of parallel concatened TCM**, in *Proc. Int. Symp. Turbo Cod. and Related Topics*, 2000.

PIMENTEL, Cecílio José Lins. **On the computation of weight enumerators for convolutional codes**. In: *IEEE Trans. on Commun.* vol. 51, pp. 313-317, March: 2003.

PROAKIS, John G. **Digital Communication**, New York: McGraw-Hill Book Company, 1983. ISBN 0072321113.

ROBERTSON, P.; WOERZ, T. **Novel coded modulation scheme employing turbo codes**, *IEEE Eletronic Letters*, vol. 31, no. 18, pp. 1546-1547, 1995.

ROBERTSON P.; WOERZ T. **A novel bandwidth efficient coding scheme employing turbo codes**. *In: Proc.* ICC '96, pp. 962–967, *June* 1996.

ROBERTSON, P.; WOERZ, T. **Bandwidth-Efficient Turbo Trellis-Coded Modulation Using Punctured Component Codes**, *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 16, no. 02, pp. 206 -218, 1998.

RYAN W. E.; TANG Z. **Reduced-complexity error state diagrams in TCM and ISI channel performance evaluation**. *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 12, pp. 2047-2051, *December* 2004.

SCHLEGEL, C. **Trellis and Turbo Coding**. New York: *IEEE Press*, 1997.

SCHLEGEL C.; PEREZ L., **Trellis and Turbo Coding**, 1ª ed. Wiley-*IEE Press*, *May* 2003.

SHANNON, C. E. **A Mathematical Theory of Communication**, *The Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379–423 e 623–656. *October* 1948.

SOUSA Aline F.; CALDEIRA Luiz G.; PIMENTEL Cecílio; FERNANDES Humberto C.; **A New Technique to Evaluate an Expurgated Bound on Punctured Turbo Trellis Coded Modulation,** SBMO/IEEE MTT-S *International Microwave and Optoelectronics Conference*, *November* de 2009.

TUJKOVIC D.; JUNTTI M.; LATVA-AHO M. **Space-Time Turbo Coded Modulation: Design and Applications**. *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, vol. 2, pp. 236-248, *March* 2002.

UNGERBOECK, Gottfried. **Channel coding with multilevel/ phase signals**. *IEEE Trans. Inform.*, Theory. 1982. pp. 55-67.

VITERBI, Andrew J. **Principles of Coherent Communication** , New York : McGraw-Hill, 1966.

VITERBI, A. J.; OMURA, J. K. **Principles of Digital Communication and Coding**. New York: McGraw-Hill, 1979. ISBN:0070675163.

WESEL Richard D. **Reduced-State Representations for Trellis Codes Using Constellation Symmetry.** *IEEE Transactions on communications*, vol. 52, nº 8, *August* 2004.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas