

Juliano Daniel Simeão

Controle de Sistemas com Atrasos nos Estados: *uma abordagem convexa*

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Área de concentração:
Modelagem Matemática e Computacional

Orientador:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG / *campus* Divinópolis

MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

Belo Horizonte – MG

Julho de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar os efeitos da presença de atraso nos estados e suas consequências no desempenho e estabilidade de sistemas incertos discretos e variantes no tempo. Condições convexas, formuladas como desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), são investigadas. Essas condições são suficientes para a análise de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo sujeitos a incertezas do tipo politópica e atraso nos estados variante no tempo. Como forma de reduzir o conservadorismo das condições investigadas, é usado um candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro e ferramentas da álgebra linear, tais como o Lema de Finsler e o complemento de Schur. São também investigadas condições convexas para a análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas chaveados lineares. Como parte da proposta deste trabalho, foi desenvolvido um sistema de aquecimento de ar, cujas dinâmicas são adequadas para o estudo de atrasos. Com essa planta, pode-se, por exemplo, avaliar o desempenho de controladores projetados a partir de técnicas diferentes na presença de atrasos de tempo.

PALAVRAS-CHAVE: Atrasos, Desigualdades matriciais lineares, Condições independentes do atraso, Sistemas discretos no tempo, Funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro.

Abstract

The purpose of this work is to study the effects of the presence of delay in the states and its consequence on the performance and stability of uncertain discrete time-varying systems. Convex conditions, formulated as linear matrix inequalities (LMI), are investigated. These conditions are sufficient for robust stability analysis of discrete-time systems subject to polytopic-type uncertainties and time-varying delay in the states. As a way to reduce the conservatism of the investigated conditions, it is used a parameter dependent Lyapunov-Krasovskii functional candidate and tools from Linear Algebra such as Finsler's Lemma and Schur's complement. As a part of the proposal of this work, it has been developed an air heater system where its dynamics are suitable for studying delays. With this plant, it is possible, for example, to evaluate the performance of controllers design from different techniques, subject to time delays.

KEY-WORDS: Delays, Linear matrix inequalities, Delay-independent conditions, Discrete-time systems, Parameter dependent Lyapunov-Krasovskii functional.

Agradecimentos

A Deus, por tudo e por todos.

Ao Valter Júnior, meu orientador, pela amizade e confiança, sou grato por me receber e por tudo que me ensinou.

Aos meus pais, Geraldo e Maria Luiza, pelo amor, pelo apoio e felicidade de tê-los.

As minhas irmãs, Fabiana e Luciana, pelo amor, carinho e plena confiança.

Ao meu sobrinho Pedro, pelo amor, carinho e tornar mais leves as dificuldades.

Aos meus familiares, pelo apoio e carinho, em especial, minhas tias Lia, Margarida e Lucília, pelas orações e carinho.

A Fernanda, pelo incentivo, pelo amor e carinho, e me ensinar a amar.

Aos colegas do CEFET-MG-*Campus* V-Divinópolis, em especial ao colega Nelson de Figueiredo Barroso que sempre esteve disposto a ajudar.

Lista de Figuras

2.1	Analogia mecânica de diferentes tipos de pontos de equilíbrio estáveis e instáveis. (a) Equilíbrio globalmente assintoticamente estável; (b) Equilíbrio neutralmente estável; (c) Equilíbrio instável; (d) Equilíbrio localmente assintoticamente estável.	p. 23
2.2	(a) Trajetória representativa de um estado estável; (b) Trajetória representativa de um estado assintoticamente estável; (c) Trajetória representativa de um estado instável	p. 27
3.1	Comportamento do atraso d_k e do parâmetro α_k em função de k	p. 49
3.2	Comportamento dos estados x_{1k} a x_{3k}	p. 50
3.3	Comportamento das parcelas do sinal de controle $u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k}$. . .	p. 50
3.4	Função de chaveamento, σ_k , e atraso, d_k , em função da amostragem k . . .	p. 54
3.5	Comportamento dos estados $x_{1,k}$ a $x_{4,k}$, para $\beta = 335$ e d_k apresentado na Figura 3.4.	p. 55
3.6	Complexidades Numéricas Relativas, ER/EQ e SR/SQ	p. 57
4.1	Diagrama do Sistema de Aquecimento de Ar	p. 61
4.2	Visão Geral do Protótipo	p. 61
4.3	Detalhes das Seções 3 e 5	p. 62
4.4	Entrada do sistema, onde estão instalados o ventilador e sensor de temperatura.	p. 63
4.5	Tela do Programa de Coleta de Dados	p. 64
4.6	Saída de Pulso para Disparo dos Tiristores	p. 67
4.7	Saída PWM com Duty Cycle de 50%	p. 68
4.8	Saída do Triac U2 Disparado em um Ângulo de Fase $\frac{\pi}{2}$	p. 69
4.9	Conexão do Sensor LM35 à Placa de Aquisição de Dados	p. 69

4.10	Gráfico da Calibração Estática do Sensor 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	p. 71
4.11	Gráfico da Calibração Estática do Sensor 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	p. 71
4.12	Gráfico da Calibração Estática do Sensor 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	p. 72
4.13	Gráfico da Calibração Estática do Sensor 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	p. 72
4.14	Gráfico da Calibração Estática do Sensor 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	p. 73
4.15	Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 1 para os 3 degraus: $\Delta T = 8,8^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = 32,0^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = 43,2^{\circ}C$ ($-$).	p. 77
4.16	Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 2 para os 3 degraus: $\Delta T = 8,8^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = 32,0^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = 43,2^{\circ}C$ ($-$).	p. 78
4.17	Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 3 e Resposta do Modelo Obtido ($--$) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,765^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = 31,75^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = 44,65^{\circ}C$ ($-$); Resfriamento: $\Delta T = -7,711^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = -31,59^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = -42,94^{\circ}C$ ($-$).	p. 79
4.18	Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 4 e Resposta do Modelo Obtido ($--$) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,853^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = 32,39^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = 44,35^{\circ}C$ ($-$); Resfriamento: $\Delta T = -8,791^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = -31,55^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = -44,01^{\circ}C$ ($-$).	p. 80
4.19	Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 5 e Resposta do Modelo Obtido ($--$) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,617^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = 32,01^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = 44,44^{\circ}C$ ($-$); Resfriamento: $\Delta T = -8,71^{\circ}C$ (\dots), $\Delta T = -31,36^{\circ}C$ ($-\dots-$), $\Delta T = -44,46^{\circ}C$ ($-$).	p. 81
4.20	Resposta Temporal de Aquecimento do Forno	p. 82
4.21	Detalhe do Gráfico da Resposta Temporal de Aquecimento do Sistema de Aquecimento, mostrando o instante do degrau na seção 2, e a resposta nas seções 4, 6 e 9.	p. 82

4.22 Resposta Temporal de Resfriamento do Forno	p. 83
A.1 Diagrama Elétrico da Fonte de Alimentação	p. 91
A.2 Diagrama Elétrico do Circuito de Sincronismo	p. 92
A.3 Diagrama Elétrico do Circuito de Controle	p. 93
A.4 Diagrama Elétrico do Circuito de Potência AC	p. 94

Lista de Tabelas

3.1	Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) de linhas (\mathcal{L}) nas LMIs das condições propostas	p. 56
4.1	Código Binário dos Canais e suas Funções	p. 66
4.2	Pinos do Conector CON2 e suas Funções	p. 66
4.3	Calibração dos Sensores ($T(v_t) = av_t + b$)	p. 70
4.4	Tabela de Temperaturas do Experimento da Resposta Temporal dos Sensores	p. 74
4.5	Atraso de Resposta (Aquecimento)	p. 76
4.6	Atraso de Resposta (Resfriamento)	p. 76

Lista de Símbolos

A Matriz nominal de um sistema

A_d Matriz nominal de atraso de um sistema

A' Transposto de A

ΔA Matriz de atraso

α Incertezas associadas ao sistema

$\alpha(t)$ Incertezas dependentes do tempo contínuo associadas ao sistema

α_k Incertezas dependentes do tempo discreto associadas ao sistema

φ Ângulo de disparo dos tiristores

\mathcal{C}^1 Classe 1 de diferenciabilidade

d Atraso fixo

d_k Atraso num instante de amostragem k

\underline{d} Limite inferior do atraso

\bar{d} Limite superior do atraso

$f(\cdot)$ Função contínua

\mathcal{I} Denota o intervalo de valores do atraso d_k

\mathbf{I} Matriz identidade de dimensões adequadas

k Instante de amostragem

$M = \{M_1, M_2\}$ Denota uma matriz M formada pelas matrizes M_1 e M_2 na diagonal de M

$M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$) Denota que a matriz M é definida positiva (negativa)

\mathbb{N} Conjunto dos números naturais

\mathbb{N}_* Conjunto dos números naturais excluído o 0

P_{at} Potência elétrica eficaz nos atuadores de aquecimento

\mathbb{R} Conjunto dos números reais

\mathbb{R}_+ Conjunto dos números reais não negativos

\mathbb{R}^n Espaço dos vetores com n entradas reais

$\mathbb{R}^{n \times n}$ Espaço das matrizes com entradas reais e dimensões $n \times n$

t_0 Instante inicial de uma EDO

x Vetor de estados no tempo contínuo

x_k Vetor de estados no tempo discreto ($= x(k)$)

x_{k-d_k} Vetor de estados no tempo discreto atrasado d_k amostras ($= x(k - d_k)$)

x_{t_0} Vetor de estados inicial

u_{t_0} Vetor de controle inicial

u_k Vetor de controle no tempo discreto ($= u(k)$)

V_s Tensão eficaz da rede elétrica

$\mathbf{0}$ Matriz nula de dimensões adequadas

★ Denota os blocos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica

Acrônimos

AC Corrente Alternada (do inglês *Alternate Current*)

CI Circuito Integrado

EDO Equação Diferencial Ordinária

EDF Equação Diferencial Funcional

EQ Estabilidade Quadrática

ER Estabilidade Robusta

ERsch Estabilidade Robusta de Sistemas Chaveados

LMI Desigualdade Matricial Linear (do inglês *Linear Matrix Inequality*)

LMIs Desigualdades Matriciais Lineares

LPV *Linear Parameter Varying*

MDF Painel de Média Densidade Produzido a Partir da Madeira (do inglês *Medium Density Fiberboard*)

PWM Modulação em Largura de Pulso (do inglês *Pulse-width modulation*)

SR Síntese Robusta

SQ Síntese Quadrática

SRsch Síntese Robusta para Sistemas Chaveados

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 15
1.1	Motivação	p. 15
1.2	Objetivo Geral	p. 18
1.2.1	Objetivos Específicos	p. 19
1.3	Estrutura do Trabalho	p. 19
2	Resultados Preliminares	p. 21
2.1	Notação Empregada	p. 21
2.2	Representação de Incertezas	p. 21
2.2.1	Incertezas Limitadas em Norma	p. 22
2.2.2	Incertezas Politópicas	p. 22
2.3	Estabilidade	p. 23
2.3.1	Estabilidade no Sentido de Lyapunov	p. 24
2.3.2	Análise de Estabilidade via Equação de Lyapunov	p. 27
2.3.3	Estabilidade Quadrática	p. 29
2.3.4	Estabilidade de Sistemas Incertos	p. 30
2.4	Análise de Estabilidade via Sistema Aumentado	p. 31
2.5	Revisão da Literatura	p. 32
2.6	Técnicas para Análise e Projeto	p. 34
2.6.1	Condições Iniciais	p. 35
2.6.2	Funcional para Estudo de Sistemas Incertos com Atrasos	p. 36

3	Estabilidade e Estabilização	p. 38
3.1	Estabilidade	p. 38
3.1.1	Análise de Estabilidade Robusta	p. 40
3.1.2	Condições de Dimensões Finitas para Estabilidade Robusta	p. 43
3.1.3	Análise de Estabilidade Quadrática	p. 45
3.1.4	Exemplo Numérico	p. 46
3.2	Estabilização	p. 47
3.2.1	Estabilização Robusta	p. 47
3.2.2	Estabilização Quadrática	p. 47
3.2.3	Exemplo Numérico	p. 48
3.3	Extensão para Sistemas Chaveados	p. 51
3.3.1	Análise de Estabilidade de Sistemas Chaveados	p. 51
3.3.2	Estabilização de Sistemas Chaveados	p. 52
3.3.3	Exemplo Numérico	p. 53
3.4	Complexidade Numérica	p. 56
3.5	Cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞	p. 57
3.6	Comentários do Capítulo	p. 57
4	Protótipo	p. 59
4.1	Introdução	p. 59
4.2	Descrição Física da Planta	p. 60
4.3	Descrição dos Circuitos	p. 63
4.3.1	Circuito da Fonte de Alimentação	p. 64
4.3.2	Circuito de Sincronismo com a Rede Elétrica	p. 65
4.3.3	Circuito de Controle	p. 65
4.3.4	Circuito de Potência AC	p. 68
4.3.5	Leitura do Sinal dos Sensores	p. 69

4.4	Calibração dos Sensores	p. 69
4.4.1	Calibração Estática	p. 70
4.4.2	Calibração Dinâmica	p. 73
4.5	Resposta Temporal do Sistema de Aquecimento de Ar	p. 76
5	Considerações Finais	p. 84
5.1	Conclusões	p. 84
5.2	Perspectivas	p. 85
	Referências Bibliográficas	p. 86
	Anexo A – Diagramas Elétricos	p. 90
A.1	Diagrama do Circuito da Fonte de Alimentação	p. 91
A.2	Diagrama do Circuito de Sincronismo com a Rede	p. 92
A.3	Diagrama do Circuito de Controle	p. 93
A.4	Diagrama do Circuito de Potência AC	p. 94
	Anexo B – Programa do Microcontrolador	p. 95

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

As mudanças do comportamento humano, as novas necessidades socioeconômicas no mundo e o aumento do consumo de produtos industrializados levam a um consenso mundial pela necessidade de processos de produção mais eficientes. Essa eficiência pode ser tomada sob diferentes aspectos, tais como: redução do consumo de energia, aumento da segurança operacional, atendimento de especificações ambientais e de características do produto final, etc. Esse panorama mundial demanda pesquisa em modelagem, aperfeiçoamento e otimização de processos. Para atender aos requisitos de eficiência atualmente impostos, esses processos devem ser constituídos por sistemas de controle. O objetivo de um sistema de controle consiste em manipular, por meio de um controlador, sinais de controle na entrada do processo. A finalidade dessa manipulação é garantir que a saída do processo apresente um comportamento pré-especificado, e que o efeito das ações de perturbações sobre o seu comportamento seja reduzido ou até mesmo eliminado.

Neste contexto, o desenvolvimento de controladores é diretamente influenciado pelas características inerentes ao sistema de controle, tais como: características estáticas e dinâmicas, por exemplo, no caso linear, os ganhos, polos e zeros. Essas características apresentam sensibilidade às variações paramétricas influenciando na capacidade de rejeição de distúrbios, velocidade de resposta, atrasos, etc. Uma classe particularmente importante é a dos sistemas discretos no tempo, sujeitos a atrasos, pela imediata implementação de controladores digitais em processos físicos. Nesses casos, é inevitável a presença dos atrasos. Mesmo sistemas contínuos no tempo são frequentemente controlados por sistemas digitais, levando, inevitavelmente, à discretização dos sinais.

Em geral, os atrasos ocorrem devido a três razões distintas: ou é uma propriedade intrínseca do sistema, ou é consequência (não desejada) da ação de controle, ou advém da introdução intencional de atrasos no controle do sistema. Atrasos podem ser fixos ou

variantes no tempo, e podem ocorrer, nos estados do sistema, na aplicação dos sinais de controle, caracterizando os atrasos nas entradas do processo, ou ainda, na medida das variáveis controladas caracterizando os atrasos nas saídas do processo. Exemplos de sistemas com atrasos podem ser encontrados em reatores químicos e nucleares, controle de curso de navio, laminação de metais (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999), sistemas de tráfego de veículos, sistemas de teleoperação, redes de comunicação de dados (NICULESCU, 2001), sistemas biológicos, como por exemplo, o processo de maturação das células do sangue, modelo da epidemia de malária, interação neuronal (MACDONALD, 1989), etc. No âmbito industrial, podem-se ressaltar os processos de usinagem (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Entre os processos térmicos, podem ser destacados os fornos para tratamento térmico de metais (CHU; SU; HU, 1993), (CHU, 1995), e fornos de reaquecimento, usados em siderúrgicas (TEIXEIRA; JOTA; TEIXEIRA, 2007).

A análise e a síntese de sistemas com atrasos têm sido objeto de estudo nos últimos anos. Para citar algumas obras encontradas na literatura abordando esse assunto, veja, por exemplo, os trabalhos de: (KRASOVSKII; BRENNER, 1963), (El'sgol'ts, 1966), (HALE, 1977), (MACDONALD, 1989), (HALE; LUNEL, 1993), (WANG; LEE; TAN, 1998), (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999), (MAHMOUD, 2000), (NICULESCU, 2001), (BOUKAS; LIU, 2002), (HU; WANG, 2002), (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003), (NICULESCU; GU, 2004), (SILVA; DATTA; BHATTACHARYYA, 2005), (ZHONG, 2006), (MICHIELS; NICULESCU, 2007), (ZHANG; XIE, 2007), (NORMEY-RICO; CAMACHO, 2007), (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007). Das obras citadas, somente as de (MAHMOUD, 2000), (BOUKAS; LIU, 2002), (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007), (ZHANG; XIE, 2007) tratam de sistemas discretos no tempo, com atrasos nos estados. Entre os periódicos internacionais que publicaram edições especiais sobre sistemas com atrasos, pode-se citar como exemplo: “*Jornal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*”, 125(2), 2003 (OLGAC, 2003). A modelagem de sistemas com atrasos divide-se basicamente em duas abordagens: uma abordagem frequencial, e outra por espaço de estados. Na abordagem frequencial, o sistema é modelado e investigado por meio de funções de transferência, sendo direcionado ao estudo da análise de estabilidade de sistemas monovariáveis realimentados, apresentando atrasos invariantes no tempo (MICHIELS; NICULESCU, 2007). Na abordagem por variáveis de estado, duas classes particulares são consideradas: sistemas com atraso nos estados e/ou entradas, podendo ser variantes ou invariantes no tempo, e sistemas do tipo neutro (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007).

Este trabalho foca-se no estudo dos atrasos e suas consequências sobre a estabilidade

dos sistemas discretos no tempo. Esse recorte é motivado pela frequente presença de atrasos em sistemas físicos. Dentro da classe dos sistemas discretos no tempo, é considerado neste trabalho, o caso especial em que os atrasos estão presentes nos estados. São tratados os sistemas precisamente conhecidos, variantes ou invariantes no tempo, com atrasos, e os sistemas incertos discretos no tempo, variantes ou invariantes no tempo, com atrasos. Em todos os casos supõe-se que os atrasos presentes nos sistemas sejam variantes no tempo.

Em particular, podem ser considerados os sistemas lineares chaveados com atrasos nos estados. Esses sistemas consistem de vários sub-modos que são alternados entre si em qualquer sequência e em qualquer taxa de alternância. No caso dos sistemas chaveados com atrasos nos estados tratados nesta dissertação, supõe-se que a memória do sistema permanece comum a todos os sub-modos. O estudo da estabilidade e da síntese de controladores para tais sistemas constituem tema de interesse tanto do ponto de vista acadêmico quanto industrial. Uma aplicação possível é quando ocorrem chaveamentos em circuitos eletrônicos, como exemplo, pode-se citar os conversores estáticos de potência, nos quais dois circuitos diferentes estão claramente presentes: um circuito para as chaves de comando abertas e outro quando essas chaves estão fechadas. Nesse caso, a presença de atrasos pode ocorrer pela introdução do tempo de processamento dos sinais de controle dos conversores, ou mesmo de maneira intencional como forma de otimizar algum seguimento de referência periódica. Neste trabalho, serão apresentadas algumas extensões possíveis para os sistemas chaveados com atrasos nos estados. Essas extensões são possíveis aqui por serem tratados sistemas variantes no tempo e não apenas os invariantes no tempo.

Tendo observado a carência, na literatura, de dados e de equipamentos disponíveis no mercado para aplicações práticas laboratoriais em sistemas de controle com realimentação de estados com atrasos nos estados, será desenvolvido e instrumentado um protótipo de um sistema de aquecimento de ar, para estudos de análise de estabilidade e, principalmente, para avaliação de desempenho de controladores. Nesse caso, o sistema precisa ter características tais que possa ser modelado na forma $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d}$, o atraso ser variante no tempo e ter pontos de operação distintos (o que pode ser modelado por incertezas). O projeto dessa planta é inspirado nos trabalhos de (CHU; SU; HU, 1993) e (CHU, 1995), em que um forno elétrico industrial, com 5 zonas de aquecimento, foi modelado como um sistema discreto no tempo, no espaço de estados, com atraso nos estados. No projeto da planta em desenvolvimento nesta pesquisa, haverá seções de trabalho onde serão instalados sensores de temperatura para coleta de dados conforme feito em (CHU; SU; HU, 1993), essas temperaturas serão usadas como estados do processo. As temper-

aturas de cada seção podem ser utilizadas para realimentação de estados do sistema. A principal característica desejada para o protótipo refere-se a sua dinâmica: espera-se que os processos de transferência de energia e de massa ocorram de forma lenta. Além disso, o protótipo deverá ser preparado para receber sinais de controle e disponibilizar sinais de medição. É desejável que o protótipo seja construído com componentes de fácil aquisição no mercado e que possa ser transportado com facilidade para atender à finalidade didática à que se propõe.

No contexto da teoria de controle, quando incertezas afetam a dinâmica do sistema, essas são, em geral, representadas de duas formas distintas:

1. Incertezas limitadas em norma;
2. Incertezas politópicas

cujas representações são discutidas no Capítulo 2.

1.2 Objetivo Geral

O objetivo geral desta proposta de pesquisa é investigar os efeitos da presença de atrasos nos estados e suas consequências na estabilidade de sistemas discretos no tempo com incertezas politópicas e atrasos nos estados. São utilizados funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros a fim de reduzir o conservadorismo das condições investigadas além de ferramentas da álgebra linear, tais como o Lema de Finsler e o complemento de Schur. Os estudos são feitos com vistas à aplicação em sistemas reais.

Análise Investigar condições convexas para a análise de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados.

Síntese Investigar condições convexas para a síntese de ganhos robustos para realimentação de estados que assegurem a estabilização robusta de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados.

Desenvolvimento de protótipo Desenvolver e instrumentar um protótipo que possua características adequadas ao estudo da modelagem e controle de sistemas com atrasos nos estados.

1.2.1 Objetivos Específicos

Os problemas de análise de estabilidade robusta e síntese de ganhos robustos são estudados de forma específica conforme os problemas relacionados a seguir:

1. Dado um atraso variante no tempo, formular um problema de otimização convexa capaz de verificar se o sistema variante no tempo com atraso nos estados seja robustamente estável.
2. Formular um problema de otimização convexa capaz de determinar um par de ganhos robustos, tais que o sistema de controle, variante no tempo, com atraso nos estados, seja robustamente estável.
3. Com relação ao terceiro objetivo geral, o desenvolvimento de um protótipo, pretende-se projetar e implementar um sistema de dinâmica lenta que possa ser representado por um modelo do tipo $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d}$. Adicionalmente, o sistema deverá ter a possibilidade de variar o valor do atraso. Ao final desse trabalho de mestrado, esse sistema terá toda a instrumentação eletrônica e comando de acionamentos já interligados a um computador, utilizando placas de aquisição de dados, e programas comerciais (Matlab ou LabVIEW) e respectivas condições de calibração de sensores e atuadores.

1.3 Estrutura do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta os resultados preliminares necessários ao desenvolvimento desse trabalho de dissertação.

O Capítulo 3 apresenta condições convexas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI) que resultam em condições suficientes para teste de estabilidade robusta e síntese robusta de sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes no tempo. Essa abordagem é estendida a sistemas chaveados. São apresentados exemplos para elucidar as condições propostas.

O Capítulo 4 apresenta o projeto e o desenvolvimento do sistema de aquecimento de ar, relatando os objetivos deste projeto bem como o funcionamento dos circuitos eletrônicos necessários a sua operação. Resultados de testes e dados coletados são apresentados para ilustrar uma possível utilidade do sistema de aquecimento de ar em trabalhos futuros.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho e são indicadas algumas propostas para continuidade e aplicações da pesquisa aqui iniciada.

Esta dissertação é encerrada nos Apêndices, onde são apresentados os diagramas elétricos do sistema de aquecimento de ar e a listagem do programa do microcontrolador.

2 Resultados Preliminares

2.1 Notação Empregada

Neste projeto adota-se uma notação semelhante à que vem sendo empregada na literatura atual: x_k denota o vetor de estado (discreto no tempo) na k -ésima amostragem. \mathbb{R} (\mathbb{R}_+) denota o conjunto dos números reais (positivos) e \mathbb{N} (\mathbb{N}_*) é o conjunto dos números naturais (excluído o 0). $\mathcal{I}[a, b]$ representa o intervalo de todos os inteiros j tais que $a \leq j \leq b$. \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ denotam, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula de dimensões apropriadas. $M = \text{bloco-diagonal}\{M_1, M_2\}$ denota uma matriz M formada pelas matrizes M_1 e M_2 na diagonal de M . $M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$) significa que a matriz M é definida positiva (negativa), M' e M^\perp denotam a transposta de M e uma base para o espaço nulo de M , respectivamente. O símbolo \star é utilizado para indicar os blocos simétricos em relação à diagonal principal na LMI (do inglês *linear matrix inequality*).

2.2 Representação de Incertezas

Nesta seção são discutidas duas representações possíveis para as incertezas de um sistema. Foram escolhidas as representações de incertezas limitadas em norma e do tipo politópica. Essa escolha deve-se à frequência com que essas representações aparecem no contexto do controle robusto (no qual se insere esta dissertação). Em particular, a representação do tipo politópica é a escolha para as incertezas consideradas neste texto, em função do tipo de funcional (dependente de parâmetro) que é desenvolvido nesta dissertação.

2.2.1 Incertezas Limitadas em Norma

Em sistemas com apenas um atraso, o modelo utilizado para representar incertezas limitadas em norma é, em geral, dado por

$$x_{k+1} = (A + \Delta A)x_k + (A_d + \Delta A_d)x_{k-d_k} \quad (2.1)$$

em que k é a k -ésima amostragem, $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao estado atrasado d_k amostragens, sendo $d_k = d(k) > 0$ o atraso variante no tempo, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes nominais do sistema e as incertezas, ΔA e ΔA_d , são descritas por

$$\Delta A = E\hat{F}(k)M \quad \text{e} \quad \Delta A_d = E_d\hat{F}_d(k)M_d \quad (2.2)$$

em que $E \in \mathbb{R}^{n \times f_r}$, $E_d \in \mathbb{R}^{n \times f_{dr}}$, $M \in \mathbb{R}^{f_c \times n}$, $M_d \in \mathbb{R}^{f_{dc} \times n}$ são matrizes constantes, $\hat{F}(k) \in \mathbb{R}^{f_r \times f_c}$ e $\hat{F}_d(k) \in \mathbb{R}^{f_{dr} \times f_{dc}}$ são matrizes variantes no tempo satisfazendo

$$\hat{F}(k)'\hat{F}(k) \leq \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \hat{F}_d(k)'\hat{F}_d(k) \leq \mathbf{I} \quad (2.3)$$

ou seja, $\hat{F}(k)$ e $\hat{F}_d(k)$ possuem norma menor que 1. Nos trabalhos encontrados na literatura verifica-se a utilização de $\hat{F}(k) = \hat{F}_d(k)$ e, portanto, assumem-se $f_{dr} = f_r$ e $f_{dc} = f_c$.

2.2.2 Incertezas Politópicas

Outra representação de incertezas frequentemente utilizada na literatura baseia-se na abordagem politópica. Neste caso, os sistemas são descritos por

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} \quad (2.4)$$

em que as matrizes do sistema $[A(\alpha_k)|A_d(\alpha_k)] \in \mathcal{P}$,

$$\mathcal{P} = \left\{ \Upsilon(\alpha_k) : \Upsilon(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \Upsilon_i \alpha_{ki}, \quad \alpha_k \in \Omega \right\} \quad (2.5)$$

cujos vértices $\Upsilon_i = [A_i|A_{di}]$, $i = 1, \dots, N$ são conhecidos e o parâmetro incerto $\alpha_k \in \Omega$,

$$\Omega = \left\{ \alpha_k : \alpha_k \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} = 1, \alpha_{ki} \geq 0 \right\} \quad (2.6)$$

Observe que as duas formas de representação de incertezas descritas acima contêm os casos em que as matrizes dinâmicas do sistema são constantes ou são variantes no

tempo. No modelo utilizado para incertezas limitadas em norma, se $\hat{F}(k) = \hat{F}$ — isto é, \hat{F} não dependente de k — o sistema será invariante no tempo, porém incerto. Da mesma forma, na representação politópica, se $\alpha_k = \alpha$ o sistema também será invariante no tempo e incerto. Há que se mencionar que, no caso de incertezas limitadas em norma, ainda que essas sejam invariantes no tempo, a abordagem usada pode conduzir a resultados conservadores. Isso é devido ao fato da formulação empregada nesse caso considerar $\hat{F}(k)$ e não \hat{F} . Além disso, note que o atraso nos estados, d_k , pode ser:

1. constante e precisamente conhecido;
2. constante e incerto, por exemplo, $d_k = d \in \mathcal{S}[\underline{d}, \bar{d}]$;
3. variante no tempo, $d_k \in \mathcal{S}[\underline{d}, \bar{d}]$;

Neste trabalho serão investigados os sistemas discretos com atrasos nos estados, cujas matrizes estão sujeitas a incertezas politópicas.

2.3 Estabilidade

Para uma abordagem mais completa sobre o assunto tratado nesta seção, veja em (CHEN, 1999), (BHAYA, 2007). Dado um sistema dinâmico, e se esse sistema for perturbado, a propriedade que assegura o retorno desse sistema ao estado de equilíbrio após cessada a perturbação e transcorrido um tempo finito é chamada estabilidade. Como exemplo, podem-se destacar os sistemas industriais, em que a estabilidade desses garante uma operação segura e eficiente. Fazendo uma analogia mecânica para ilustrar intuitivamente os tipos de equilíbrio, considere uma esfera rígida sujeita a percorrer um caminho definido no plano, estando no seu ponto de equilíbrio e assumindo a existência de forças de atrito entre a esfera e a superfície como apresenta a figura 2.1.

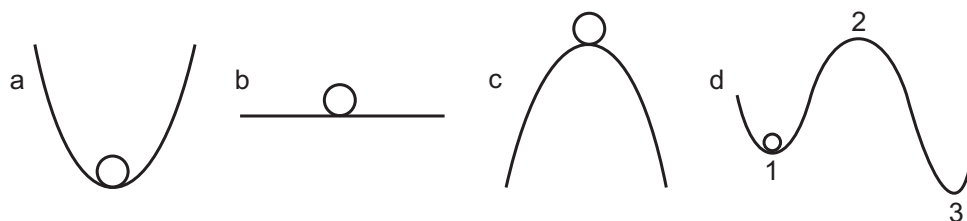


Figura 2.1: Analogia mecânica de diferentes tipos de pontos de equilíbrio estáveis e instáveis. (a) Equilíbrio globalmente assintoticamente estável; (b) Equilíbrio neutralmente estável; (c) Equilíbrio instável; (d) Equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Na Figura 2.1(a), uma perturbação na esfera em torno do ponto de equilíbrio causará uma oscilação em torno desse, e essas oscilações serão decrescentes, cessando com a esfera no ponto de equilíbrio como mostrado na figura. Essa situação corresponde a um estado de mínima energia potencial. Esse tipo de equilíbrio é chamado de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Na Figura 2.1(b), uma perturbação causará um deslocamento finito da esfera na direção da perturbação, sem que essa retorne ao ponto de equilíbrio anterior. Esse tipo de equilíbrio é chamado de equilíbrio neutralmente estável. Na Figura 2.1(c), uma perturbação qualquer, por menor que seja, fará com que a esfera se afaste do ponto de equilíbrio original sem que essa retorne ao ponto de equilíbrio anterior. Esse tipo de equilíbrio é chamado de equilíbrio instável. Na Figura 2.1(d), uma pequena perturbação na esfera em torno do ponto de equilíbrio 1 causará uma oscilação em torno desse, e essas oscilações serão decrescentes, cessando com a esfera nesse ponto de equilíbrio. Porém, se a magnitude da perturbação for suficiente para que a esfera transponha o ponto 2, essa irá oscilar em torno do ponto 3 e as oscilações serão decrescentes, cessando com a esfera nesse novo ponto de equilíbrio. Esse tipo de equilíbrio é chamado de equilíbrio localmente assintoticamente estável.

A descrição anterior é uma forma intuitiva de definir os vários tipos de equilíbrio, porém, para uma análise rigorosa da estabilidade de um sistema, é necessário obter um modelo matemático desse sistema e proceder um estudo da estabilidade por meio de métodos de investigação. Vários métodos de investigação da estabilidade de sistemas dinâmicos são propostos na literatura, tais como o critério de estabilidade de Nyquist, Routh e Hurwitz. Entretanto, se o sistema é não linear e variante no tempo, esses critérios de estabilidade não se aplicam. Um método mais geral para o estudo da estabilidade de sistemas lineares ou não lineares, variantes no tempo ou não variantes no tempo, é o segundo método de Lyapunov, também conhecido como método direto de Lyapunov. Esse método permite investigar a estabilidade de um sistema sob a forma de espaço de estados, sem resolver a equação de estados.

2.3.1 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Considere o sistema modelado pela equação diferencial ordinária

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.7)$$

em que $t \geq 0$ denota o tempo contínuo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados e $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função assumindo valores vetoriais, com componentes

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

em que as funções f_i contínuas possuem primeiras derivadas parciais contínuas ($f_i \in \mathcal{C}^1$) assegurando a existência e unicidade da solução de (2.7), que será denotado $x(t) = x(x_0, t)$. Se as funções f_i independem do tempo, então o sistema é denominado invariante no tempo; caso as funções f_i sejam dependentes do tempo, o sistema é denominado variante no tempo. Um ponto de equilíbrio ou estado de equilíbrio é um vetor constante x_e tal que $f(x_e, t) = 0, \forall t$ sendo, portanto, uma solução constante ou também chamada de uma solução de equilíbrio da equação (2.7). Por meio de uma mudança de variáveis, ou seja, pela introdução de uma nova variável $\bar{x}(t) = x(t) - x_e$ podemos reescrever (2.7) como

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t) + x_e, t) = g(\bar{x}(t), t).$$

e sem perda de generalidade, sempre considerar que o ponto de equilíbrio ocorre na origem. Efetuando a mudança de variável, temos

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t.$$

As definições básicas de estabilidade neste contexto são muitas vezes referidas como estabilidade da origem ou da solução nula.

O sistema discreto no tempo análogo ao sistema contínuo (2.7) é descrito pela equação a diferenças

$$x(k+1) = f(x(k), k), \quad x(k_0) = x_0. \quad (2.8)$$

O sistema é denominado autônomo ou invariante no tempo se a variável k não aparecer explicitamente no lado direito da equação (2.8). Para esse sistema, o ponto de equilíbrio é um vetor constante x_e tal que

$$x_e = f(x_e, k), \quad \forall k.$$

Tal como no caso contínuo, se definirmos $z(k) := x(k) - x_e$, podemos reescrever (2.8) como

$$z(k+1) = f(z(k) + x_e, k) - x_e = g(z(k), k),$$

sendo que $z = 0$ corresponde a $x = x_e$, e com isto pode-se sempre estudar a estabilidade em torno da origem.

Seja o sistema dado por (2.7). Supondo que esse sistema tem uma única solução começando em uma condição inicial. Denotando a solução de (2.7) por $\phi(t; x_o, t_o)$ em que $x = x_o$, $t = t_o$ e t é o tempo observado t . Portanto, em $t = t_o$ tem-se

$$\phi(t_o; x_o, t_o) = x_o$$

Um estado de (2.7) denominado x_e , que resulte em $f(x_e, t) = 0 \forall t$, é denominado um estado de equilíbrio do sistema. A investigação da estabilidade de sistemas descritos por (2.7) pode ser feita pela resolução da equação diferencial do sistema, o que por vezes pode se tornar um trabalho complexo. O segundo método de Lyapunov permite a investigação da estabilidade sem que tenha que encontrar uma solução para a equação diferencial. O critério de Lyapunov estabelece que, dada uma região esférica de raio ρ ao redor de um estado de equilíbrio x_e

$$\|x - x_e\| \leq \rho$$

em que $\|x - x_e\|$ é a norma Euclidiana definida por

$$\|x - x_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2}.$$

e $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $L(\delta)$ o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^n tais que $\|x_o - x_e\| \leq \delta$ e seja $L(\varepsilon)$ o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^n tais que $\|\phi(t; x_o, t_o) - x_e\| \leq \varepsilon \forall t \geq t_o$. Um estado de equilíbrio x_e do sistema (2.7) é dito no sentido de Lyapunov se a cada $L(\varepsilon)$, há um $L(\delta)$ tal que as trajetórias partindo de $L(\delta)$ não saem de $L(\varepsilon)$ quando t aumenta indefinidamente. Em geral, o número $\delta \in \mathbb{R}$ depende de $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e de t_o . Se δ não depende de t_o , o estado de equilíbrio é dito uniformemente estável. Suponha que, se toda solução de (2.7) partindo de dentro de $L(\delta)$ converge, sem sair de $L(\varepsilon)$, para o estado de equilíbrio x_e quando t cresce indefinidamente, então esse estado é definido como assintoticamente estável. Se todos os pontos do espaço de estados, de onde se originam todas as trajetórias e sendo o estado de equilíbrio único e assintoticamente estável, então esse estado é dito globalmente assintoticamente estável. Uma forma gráfica pode ser utilizada para ilustrar a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov. É ilustrado na Figura 2.2 o caso bidimensional, em que $n = 2$.

A Figura 2.2 ilustra as duas regiões definidas anteriormente, $L(\delta)$ e $L(\varepsilon)$, de onde uma trajetória da solução $\phi(t; x_o, t_o)$ parte de $L(\delta)$. Na Figura 2.2(a) é apresentado um estado estável, porém com trajetória não assintótica. Na Figura 2.2(b), a trajetória representa um estado assintoticamente estável. Na Figura 2.2(c), a trajetória representa

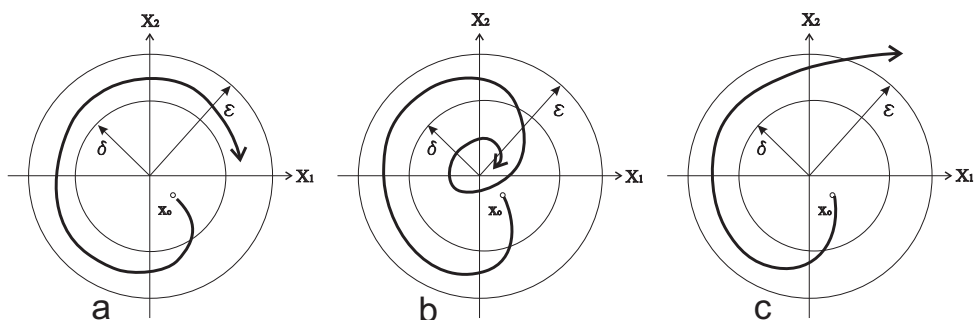


Figura 2.2: (a) Trajetória representativa de um estado estável; (b) Trajetória representativa de um estado assintoticamente estável; (c) Trajetória representativa de um estado instável

um estado instável. É sempre desejável que um dado sistema dinâmico apresente um estado de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, mas isso nem sempre é possível. Então, o problema se torna em encontrar a maior região de estabilidade assintótica. Para finalidades práticas, é suficiente encontrar uma região de estabilidade assintótica de forma que, quando o sistema for perturbado ele não exceda essa região.

2.3.2 Análise de Estabilidade via Equação de Lyapunov

Nesta seção considerem-se os sistemas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.9)$$

para o caso contínuo no tempo e

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.10)$$

para o caso discreto no tempo. t é o tempo contínuo, k a k -ésima amostragem e x é o vetor de estados. Em ambos os casos, tem-se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Seja $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que assume valores reais e $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto que contém a origem $x = 0$ no seu interior.

Definição 1 A função $V(x)$ é (semi-)definida positiva em γ em relação ao equilíbrio $x = 0$, se

1. $V(x)$ é continuamente diferenciável ($V \in C^1$)
2. $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $V(x) > (\geq) 0 \forall x \in \gamma$

Na definição precedente, se as desigualdades forem invertidas, as funções correspondentes definidas são denominadas (semi)-definidas negativa . Dentre as várias funções que podem satisfazer as definições acima, uma classe de funções se destaca pela simplicidade. Essa classe é composta pelas funções quadráticas, também denominadas formas quadráticas. Para sistemas precisamente contínuos, a estabilidade assintótica pode ser assegurada se a forma quadrática

$$V(x) = x'Px > 0 \quad (2.11)$$

sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva, e a derivada temporal de (2.11)

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall t > 0.$$

A derivada temporal da função $V(x) = x'Px$ é

$$\dot{V} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \quad (2.12)$$

que, usando (2.11) pode ser escrita como

$$\dot{V} = x'(A'P + PA)x \quad (2.13)$$

Teorema 1 (*Lyapunov, 1892*) *O sistema (2.9), com condição inicial dada por $x(t_0) = x_0$, é assintoticamente estável se e somente se, para qualquer matriz simétrica definida positiva Q a equação matricial de Lyapunov*

$$A'P + PA = -Q$$

possui solução P que também é simétrica e definida positiva .

Para o caso de sistemas discretos no tempo descrito como em (2.10), com condição inicial dada por $x(k_0) = x_0$, uma possível escolha de candidata à função de Lyapunov é

$$V(x(k)) = x'(k)Px(k)$$

sendo P simétrica e definida positiva . Assim tem-se

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

que resulta em

$$\Delta V(x(k)) = x'(k)(A'PA - P)x(k).$$

Teorema 2 *O sistema discreto no tempo (2.10), com condição inicial dada por $x(k_0) = x_0$, é assintoticamente estável se e somente se, para qualquer matriz simétrica definida positiva*

Q a equação matricial de Lyapunov

$$A'PA - P = -Q \quad (2.14)$$

possui solução P que também é simétrica e definida positiva .

A igualdade (2.14) pode ser resolvida no contexto de um problema de otimização, como $P > 0$ e $A'PA - P < 0$. Essa última desigualdade possui uma forma equivalente de escrita, que pode ser obtida com a aplicação do seguinte resultado:

Lema 1 (BOYD et al., 1994) *Seja $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica particionada,*

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} > 0$$

com $A = A'$, e $C = C'$, se $\det(A) \neq 0$, a matriz $C - B'A^{-1}B$ é o complemento de Schur de \mathcal{X} em relação a A , e \mathcal{X} é equivalente a: $A > 0$, $C - B'A^{-1}B > 0$. Analogamente, se o $\det(C) \neq 0$, a matriz $A - B'C^{-1}B$ é o complemento de Schur de \mathcal{X} em relação a C , e \mathcal{X} é equivalente a: $C > 0$, $A - B'C^{-1}B > 0$.

Aplicando o Lema 1 na equação $A'PA - P < 0$, e lembrando que $P > 0$, obtemos

$$\begin{bmatrix} P & PA \\ A'P & P - Q \end{bmatrix} > 0 \iff A'PP^{-1}PA - P + Q < 0 \iff \begin{bmatrix} P - Q & AP \\ PA & P \end{bmatrix} > 0$$

A aplicação do Lema 1, conhecido como complemento de Schur, nos problemas tratados nessa dissertação, ajudarão a tornar convexas as formulações investigadas, evitando produtos de matrizes dependentes de parâmetros.

2.3.3 Estabilidade Quadrática

A investigação da estabilidade de um determinado sistema utilizando o segundo método de Lyapunov está diretamente ligada à determinação de uma função de Lyapunov. Nas últimas décadas, grande parte das pesquisas procuram verificar a existência de uma função de Lyapunov do tipo

$$V(x(t), \alpha(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t), \quad (2.15)$$

em que $\alpha(t)$ representa as incertezas associadas ao sistema, e $P(\alpha(t))$ é uma matriz definida positiva. Uma escolha bastante comum para $P(\alpha(t))$ é

$$P(\alpha(t)) = P(\alpha(t))' \in \mathbb{R}^{n \times n} : P(\alpha(t)) = P > 0 \quad (2.16)$$

em que P possui valor fixo. Na realidade, (2.16) trata-se de uma desigualdade matricial linear, ou LMI, que será discutida na seção 2.6. Portanto, P independe dos valores assumidos por $\alpha(t)$. Diz-se que um sistema é quadraticamente estável, quando esse admite uma função de Lyapunov dada por (2.15) com (2.16). (BARMISH, 1985) A existência de uma mesma função de Lyapunov, independente de parâmetro, assegurando a estabilidade do sistema para todo domínio de incertezas, provavelmente, no contexto de controle robusto, foi um dos resultados mais importantes da décadas de 1980 e 1990.

2.3.4 Estabilidade de Sistemas Incertos

Uma representação mais aproximada de um sistema real, em malha fechada, deve considerar as incertezas deste sistema. Essa representação pode ser dada por

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t), u(t)) \quad (2.17)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\alpha(t)$ representa as incertezas associadas ao sistema, $u(t)$ é o sinal de controle e $f(\cdot)$, uma função não linear, é a equação diferencial, no caso contínuo, que descreve as trajetórias do sistema ao longo do tempo t . Para esses sistemas em malha fechada, as malhas de controle são estabelecidas e sintonizadas com base em um modelo linear em torno de um ponto de operação. No meio industrial, isso fornece uma boa aproximação do comportamento do sistema real. Para investigar essa classe de sistemas, é utilizado uma função de Lyapunov da forma $V(x) = x'P(\alpha)x$.

Para a redução do conservadorismo, novas variáveis matriciais de otimização podem ser introduzidas. Essas variáveis são usadas também para separar produtos entre as variáveis do sistema e da função de Lyapunov. Isso é feito por meio do Lema de Finsler. Para o caso dependente de parâmetro, esse lema é apresentado a seguir:

Lema 2 *Sejam $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétrica, e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, tal que o posto($\mathcal{B}(\alpha)$) $< n$. As seguintes assertivas são equivalentes :*

- i) $\omega' \mathcal{Q}(\alpha) \omega < 0$, $\forall \omega : \mathcal{B}(\alpha) \omega = 0$, $\omega \neq 0$*
- ii) $\mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$, em que $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ denota uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$*
- iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < 0$*
- iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{X}(\alpha)' < 0$*

Prova: A prova desse lema é retirada da demonstração apresentada em (LEITE, 2005). A veracidade de que $i) \Leftrightarrow ii)$, é afirmada, pois todo x tal que $\mathcal{B}(\alpha)x = 0$ pode ser escrito como $x = \mathcal{B}^\perp(\alpha)y$ e, conseqüentemente, $i) \Leftrightarrow y' \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha)y < 0$, para todo $y \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$. Assumindo a veracidade de $ii)$, multiplica-se o termo esquerdo dessa condição por y' à esquerda, e por y à direita, obtendo-se $i)$. Multiplica-se o termo esquerdo de $iii)$ ou $iv)$ por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ à direita, e por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ à esquerda para obter $ii)$. Assumindo a veracidade de $ii)$, a condição $iii)$ pode ser recuperada como segue: fatore-se $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ em um produto de matrizes de posto completo, $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_\ell(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)$, define-se $\mathcal{W}(\alpha) = \mathcal{B}_r(\alpha)' (\mathcal{B}_r(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)')^{-1} (\mathcal{B}_\ell(\alpha)' \mathcal{B}_\ell(\alpha))^{0,5}$ e aplica-se a transformação de congruência

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha) \\ \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} (\mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha)) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha) & \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{W}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathbf{I} & \mathcal{W}(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \\ \star & \mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observando que, o bloco (2.2) de (2.18) é definido, por hipótese negativo, conclui-se que existe $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ suficiente grande tal que a condição acima seja verificada. Para demonstrar que $iii) \Leftrightarrow iv)$, basta escolher $\mathcal{X}(\alpha) = -\mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' / 2$. ■

2.4 Análise de Estabilidade via Sistema Aumentado

Uma técnica para estudar sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados é a que emprega o aumento do vetor de estados (KAPILA; HADDAD, 1998). Por exemplo, seja o sistema

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} \quad (2.19)$$

em que k é a k -ésima amostragem, $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao estado atrasado d_k amostragens, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são as matrizes nominais do sistema. Neste caso é possível obter um sistema aumentado e livre de atrasos conforme se segue.

No caso de $d_k = 1$ tem-se

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} A & A_d \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{X}_k \quad (2.20)$$

No caso de $d_k = 2$ tem-se

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ x_{k-2} \end{bmatrix}; \quad \tilde{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & A_d \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{X}_k \quad (2.21)$$

Percebe-se, portanto, que é sempre possível construir um sistema aumentado, discreto no tempo e livre de atrasos, que contém a dinâmica de um sistema originalmente com atraso constante e finito.

Entretanto, essa abordagem nem sempre é adequada. Dentre as dificuldades encontradas podem ser destacadas: *i)* no caso de sistemas com grandes dimensões ou com atrasos muito grandes pode ser inviável tratar numericamente o sistema aumentado obtido; *ii)* no caso de atrasos variantes no tempo não é possível aplicar essa técnica, pois não basta assegurar a estabilidade de cada sistema aumentado; *iii)* mesmo no caso de atrasos invariantes no tempo, se o sistema for estável independentemente do valor do atraso, a técnica de aumentar o vetor de estados é inviável por ser necessário o teste de um número infinito de sistemas aumentados; *iv)* no caso de síntese de controladores que assegurem a estabilidade do sistema discreto no tempo com atrasos incertos e limitados, o uso de sistema aumentado impõe restrições importantes nas condições de síntese. Para uma discussão mais detalhada a esse respeito, veja, por exemplo, os trabalhos de (KAPILA; HADDAD, 1998) e (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007).

2.5 Revisão da Literatura

Desde a década de 90, o estudo de sistemas lineares sujeitos a atrasos nos estados tem sido um relevante tema de pesquisa, não obstante trabalhos anteriores. Em particular, o estudo de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados recebeu pouca atenção nesse mesmo período. Isso porque a estabilidade de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado conforme apresentado na Seção 2.4. Entretanto, nos casos de estudo da estabilidade de sistemas com incertezas, sistemas de grandes dimensões, sistemas com atrasos variantes no tempo e síntese de controladores robustos, essa técnica encontra grandes limitações (KAPILA; HADDAD, 1998). Ainda na década de 90, os trabalhos de (LI; SOUZA, 1995), (LI; de Souza, 1997) e (LI; de Souza, 1997) tratam da estabilidade e estabilização de sistemas incertos com atraso nos estados. No trabalho de (SONG; KIM, 1998), é utilizada uma abordagem pela equação de Riccati para tratar da estimação de custo garantido \mathcal{H}_∞ de

um sistema incerto, invariante no tempo, com atraso nos estados. As condições de análise são do tipo independentes do atraso e consideram incertezas limitadas em norma.

Nos últimos anos, uma grande parte dos trabalhos encontrados na literatura utilizam a abordagem baseada em funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Utilizando essa abordagem, em (MAHMOUD, 2000), são investigados sistemas com atrasos invariantes no tempo. Em (CHEN; GUAN; LU, 2003), são propostas condições independentes do atraso para tratar um sistema com incertezas limitadas em norma e atraso nos estados. Em (FRIDMAN; SHAKED, 2005b) e (FRIDMAN; SHAKED, 2005a), condições dependentes do atraso, variante no tempo são propostas utilizando a técnica de sistemas descritores. As condições são convexas para a análise de estabilidade e não-convexas para a síntese de controladores. Nesses trabalhos, (FRIDMAN; SHAKED, 2005a) e (FRIDMAN; SHAKED, 2005b), são tratadas incertezas do tipo politópicas e limitadas em norma, respectivamente. Condições convexas independentes do atraso tanto para síntese robusta de controladores, quanto para a estabilização em desempenho \mathcal{H}_∞ garantido, foram propostas em (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2004a) e (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2004b). Nesses dois trabalhos, as condições propostas utilizam variáveis de folga resultando em condições convexas na forma de LMI, tanto para análise de estabilidade quanto para síntese robusta de controladores. Em (GAO; CHEN, 2007), é utilizado um funcional de Lyapunov-Krasovskii para tratar a estabilidade de um sistema incerto sujeito a atrasos nos estados, porém o funcional não é dependente de parâmetros. As condições de análise são convexas, do tipo dependentes do atraso, e consideram incertezas limitadas em norma. Condições convexas para a análise e síntese robustas dependentes do atraso, para sistemas discretos no tempo com atrasos variantes no tempo são apresentadas em (MIRANDA; LEITE, 2007a). Nos trabalhos (MIRANDA; LEITE, 2007a), (LEITE; MIRANDA, 2008a), (LEITE; MIRANDA, 2008c), (LEITE; MIRANDA, 2008d), (LEITE; MIRANDA, 2008b), o tratamento de incertezas são consideradas no contexto politópico. O Lema de Finsler é empregado utilizando variáveis extras que reduzem o conservadorismo das formulações propostas. Em (ZHU; YANG, 2008), condições de análise convexas são apresentadas, sendo utilizado um funcional de Lyapunov-Krasovskii e desigualdades de Jensen para tratar a estabilidade de um sistema sujeito a atrasos variante no tempo. As condições de análise são do tipo dependentes do atraso e consideram incertezas limitadas em norma.

No contexto de sistemas chaveados, em (MONTAGNER, 2005) é investigado um funcional de Lyapunov para análise e síntese quadrática de sistemas chaveados lineares, tanto no tempo contínuo como no tempo discreto. Foram apresentados exemplos para validar

as condições propostas. Em (MONTAGNER et al., 2005), é utilizado um funcional de Lyapunov-Krasovskii para estudo da estabilidade e estabilização de sistemas chaveados com atrasos.

A pesquisa na literatura para revisão bibliográfica foi feita por meio dos *sites SCOPUS e Sciencedirect*, sendo o critério de busca as palavras chaves: sistemas discretos no tempo, incertezas politópicas e sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. Após o ano de 2006, foram encontrados 10 artigos de interesse para este trabalho, ou seja, tratando a estabilidade e estabilização de sistemas incertos discretos no tempo com atrasos nos estados. Além dos citados nessa seção, 3 trabalhos, (ZHANG; SHI; BASIN, 2008), (WANG et al., 2008) e (HONG; YANWU; XIAOMEI, 2007) utilizam um funcional de Lyapunov-Krasovskii sendo as incertezas do tipo limitadas em norma. Outros 7 trabalhos, (JUN; YIMIN, 2008), (MAHMOUD; SUNNI; SHI, 2009), (GHIGGI et al., 2008), (MIRANDA; LEITE, 2007a), (VALMÓRBIDA; LEITE; PERES, 2007), (LEITE et al., 2007), (MIRANDA; LEITE, 2007b) tratam as incertezas do tipo politópicas e também utilizam um funcional de Lyapunov-Krasovskii.

2.6 Técnicas para Análise e Projeto

Sistemas com atrasos nos estados podem ser estudados ou por meio de uma abordagem frequencial (NICULESCU, 2001), ou no domínio do tempo (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999). Neste trabalho opta-se pela última abordagem tendo em vista o desenvolvimento de técnicas de otimização numéricas eficientes que encontram-se disponíveis, e a versatilidade do segundo método de Lyapunov.

Na abordagem pelo domínio do tempo, utiliza-se a representação no espaço de estados. Duas técnicas são usuais na literatura. A primeira delas utiliza o método de Razumikhin. Esse método, utilizado principalmente em sistemas contínuos no tempo, baseia-se na ideia de permitir que o supremo do funcional de Lyapunov, considerado em um intervalo de tempo, seja sempre decrescente (ou não-crescente) ao invés de exigir que o funcional seja decrescente (ou não-crescente) a cada instante. Para detalhes desta técnica veja o trabalho de Kolmanovskii e Myshkis (1999). A segunda técnica usada neste trabalho, baseia-se na utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (KRASOVSKII; BRENNER, 1963). Essa técnica tem sido a mais frequentemente usada na literatura, permitindo a obtenção de condições para análise de estabilidade ou para síntese na forma de problemas convexos de otimização. Esse tipo de formulação é de grande interesse uma vez que existem algoritmos

numéricos que permitem a solução desses problemas de forma bastante eficiente. Um exemplo são os algoritmos de pontos interiores (BOYD et al., 1994).

Neste trabalho são investigadas condições convexas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) visando a redução do conservadorismo das formulações propostas. Essas condições resultam em formulações suficientes para a análise de estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo com incertezas politópicas e atrasos nos estados. Além disso, são investigadas condições do tipo LMI para síntese de ganhos robustos para realimentação de estados. Como forma de reduzir o conservadorismo das condições investigadas, são utilizados funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros. A exemplo do que ocorre em sistemas incertos livres de atrasos (LEITE et al., 2004), o uso de funcionais dependentes de parâmetros pode representar uma redução de conservadorismo importante nas formulações aqui propostas. Para a obtenção de condições convexas na forma de LMI, o Lema de Finsler é usado explicitamente. Note que a aplicação do Lema de Finsler (Veja Seção 2.3.4) já é, nos casos de sistemas incertos e livres de atrasos, reconhecidamente eficiente para a redução do conservadorismo das condições de análise de estabilidade e de síntese obtidas no contexto de sistemas com incertezas politópicas. Outra ferramenta empregada neste projeto é o complemento de Schur (Veja Seção 2.3.2), largamente utilizado no âmbito da teoria de controle nos trabalhos das décadas de 1990 e 2000.

Para o desenvolvimento deste projeto, será utilizado o toolbox LMILab, que é um pacote especializado na busca de soluções para problemas convexas, disponível comercialmente para o software Matlab.

2.6.1 Condições Iniciais

Diferentemente dos sistemas dinâmicos sem atrasos, que são representados por equações diferenciais ordinárias (EDO), um sistema com atrasos é representado por uma equação diferencial funcional (EDF). A solução das equações diferenciais ordinárias é caracterizada de forma única pelo conhecimento dos valores assumidos pelos vetores de estado e de entrada no instante $t = t_0$, porém, no caso de equações diferenciais funcionais, a unicidade é garantida pelo histórico do atraso dos estados e entradas no intervalo $[t_0 - h, t_0]$, ou seja, a condição inicial deixa de ser um ponto no espaço \mathbb{R}^n para ser uma função nesse espaço. De forma genérica, as condições iniciais de estado e controle podem ser representadas da

seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} x_{t_0} = x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta) \\ u_{t_0} = u(t_0 + \theta) &= \phi_u(\theta) \end{aligned} \right\} \theta \in [-h, 0]. \quad (2.22)$$

O espaço de estados agora é definido sobre um conjunto de funções, e não mais sobre pontos do espaço, que mapeiam o intervalo $[t_0 - h, t_0]$ em \mathbb{R}^n (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007).

2.6.2 Funcional para Estudo de Sistemas Incertos com Atrasos

Com o objetivo de reduzir o conservadorismo das condições aqui propostas, utiliza-se um candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii, dependente de k e de α_k . Essa escolha permite maior flexibilidade do funcional candidato, ao aumentar as possibilidades desse satisfazer as condições necessárias à estabilidade assintótica do sistema, e de alguma avaliação de desempenho, como por exemplo, a estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞ . Conforme já é amplamente conhecido na literatura, para a estabilidade faz-se necessário investigar um candidato a funcional Lyapunov-Krasovskii que satisfaça

$$V(\alpha_k, k) > 0 \quad \text{e} \quad \Delta V(\alpha_k, k) = V(\alpha_{k+1}, k+1) - V(\alpha_k, k) < 0. \quad (2.23)$$

Assim, escolhe-se

$$V(\alpha_k, k) = \sum_{v=1}^3 V_v(\alpha_k, k) \quad (2.24)$$

em que

$$V_1(\alpha_k, k) = x_k' P(\alpha_k) x_k, \quad (2.25)$$

$$V_2(\alpha_k, k) = \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j' Q(\alpha_j) x_j, \quad (2.26)$$

$$V_3(\alpha_k, k) = \sum_{\ell=2-\delta}^1 \sum_{j=k+\ell-1}^{k-1} x_j' Q(\alpha_j) x_j. \quad (2.27)$$

Note-se que as matrizes $P(\alpha_k)$ e $Q(\alpha_k)$ podem assumir um valor diferente a cada amostragem. Embora o funcional aqui proposto contenha apenas 3 termos e não 5 como em (MIRANDA; LEITE, 2007a), neste trabalho o funcional é dependente de α_k , um parâmetro variante no tempo. Além disso, em (BOUKAS, 2006) um funcional parecido com o empregado aqui é utilizado, porém as matrizes do funcional são fixas e independentes do parâmetro incerto. Em (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2004b) é empregado um candidato a funcional que não conta com terceiro termo (2.27) e em (MON-

TAGNER et al., 2005), sistemas chaveados são investigados sem utilizar (2.27) e com a matriz Q fixa e independente de parâmetros. Portanto, a abordagem proposta favorece a obtenção de condições que são, em alguns aspectos, menos conservadoras que outras encontradas na literatura.

3 Estabilidade e Estabilização

Condições convexas para tratar os problemas de análise de estabilidade robusta e de síntese robusta para sistemas discretos variantes no tempo com atraso nos estados são apresentadas neste capítulo. Ao contrário do que é tipicamente feito na abordagem de sistemas com incertezas limitadas em norma, é utilizado aqui um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro. Extensões da abordagem adotada são apresentadas para a classe dos sistemas chaveados discretos no tempo com atraso nos estados. Exemplos numéricos são utilizados para ilustrar a aplicação das condições propostas.

3.1 Estabilidade

Considere o sistema linear discreto no tempo com atrasos nos estados descrito por

$$x_{k+1} = \tilde{A}(\alpha_k)x_k + \tilde{A}_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + \tilde{B}(\alpha_k)u_k, \quad (3.1)$$

$$x_k = \phi(k), \quad k \in [-\tau, 0] \quad (3.2)$$

em que k é a k -ésima amostragem, $u_k = u(k) \in \mathbb{R}^p$ é o sinal de controle, $x_k = x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $x_{k-d_k} = x(k-d_k) \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao estado atrasado d_k amostragens, sendo $d_k = d(k) > 0$ o atraso variante no tempo. Assume-se que o atraso d_k tenha valores satisfazendo

$$d_k \in \mathcal{S}[\underline{d}, \bar{d}]. \quad (3.3)$$

$\phi(k)$ é a condição inicial em que τ é um valor suficientemente grande. As matrizes do sistema são dadas por $[\tilde{A}(\alpha_k) | \tilde{A}_d(\alpha_k) | \tilde{B}(\alpha_k)] = [\tilde{A} | \tilde{A}_d | \tilde{B}](\alpha_k) = \tilde{Y}(\alpha(k)) \in \mathbb{R}^{n \times 2n+p}$ em que o parâmetro incerto $\alpha_k = \alpha(k) \in \mathbb{R}^N$ é variante no tempo, satisfazendo

$$\Omega = \left\{ \alpha_k : \alpha_k \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} = 1, \alpha_{ki} \geq 0 \right\}. \quad (3.4)$$

Assume-se que essas matrizes pertencem ao politopo

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \tilde{\Upsilon}(\alpha_k) : \tilde{\Upsilon}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\Upsilon}_i \alpha_{ki}, \alpha_k \in \Omega \right\} \quad (3.5)$$

em que os vértices $\tilde{\Upsilon}_i = [\tilde{A}_i | \tilde{A}_{di} | \tilde{B}_i] = [\tilde{A} | \tilde{A}_d | \tilde{B}]_i$ são conhecidos.

Note-se que a descrição dada em (3.1) contém os casos em que *i*) o sistema é incerto, mas não varia no tempo ($\alpha_{k+1} = \alpha_k, \forall k$) e *ii*) o atraso é incerto, porém invariante no tempo, isto é, $\bar{d} - \underline{d} = 0$.

Considerando-se a lei de controle dada por

$$u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k} \quad (3.6)$$

em que $[K | K_d] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$ é formado por um par de ganhos para realimentação de estados que assegura a estabilidade robusta do sistema (3.1)-(3.5) em malha fechada. Isto é, a estabilidade de (3.1)-(3.6) é assegurada $\forall \alpha_k \in \Omega$. Isto resulta em um sistema incerto em malha fechada, variante no tempo, dado por

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} \quad (3.7)$$

com

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha_k) &\equiv \tilde{A}(\alpha_k) + \tilde{B}(\alpha_k)K \\ A_d(\alpha_k) &\equiv \tilde{A}_d(\alpha_k) + \tilde{B}(\alpha_k)K_d \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

sendo $[A(\alpha_k) | A_d(\alpha_k)] = [A | A_d](\alpha_k) = \Upsilon(\alpha_k)$ pertencente ao politopo

$$\mathcal{P} = \left\{ \Upsilon(\alpha_k) : \Upsilon(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \Upsilon_i \alpha_{ki}, \alpha_k \in \Omega \right\} \quad (3.9)$$

em que os vértices $\Upsilon_i = [A_i | A_{di}] = [A | A_d]_i$ são

$$\Upsilon_i = [\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K \mid \tilde{A}_{di} + \tilde{B}_i K_d]. \quad (3.10)$$

Observe-se que, caso o atraso d_k não seja conhecido a cada amostragem, é necessário fazer $K_d = \mathbf{0}$ em (3.6). Por outro lado, se d_k é disponível, então a possibilidade de uso de K e K_d como proposto em (3.6) pode facilitar a estabilização e melhorar o desempenho do sistema em malha fechada (3.7).

A estabilidade robusta do sistema (3.7) é admitida conforme a definição seguinte.

Definição 2 *O sistema (3.7)-(3.10) sujeito a (3.3) e (3.4) é dito robustamente estável se*

a solução trivial da equação a diferenças correspondentes tem estabilidade global uniforme e assintótica $\forall \alpha_k \in \Omega$.

O principal objetivo deste trabalho é o de obter condições convexas menos conservadoras para tratar os seguintes problemas:

Problema 1 Dado um atraso variante no tempo d_k sujeito a (3.3), determinar se o sistema variante no tempo com atrasos nos estados descrito por (3.7)-(3.9) é robustamente estável.

Problema 2 Encontrar, se possível, um par de ganhos $[K|K_d]$ tais que o sistema (3.1)-(3.5) controlado por (3.6) seja robustamente estável.

3.1.1 Análise de Estabilidade Robusta

Nesta seção, são investigadas condições convexas para determinar a estabilidade de sistemas variante no tempo com atrasos nos estados descrito por (3.7)-(3.9). É apresentado um exemplo para ilustrar o uso das condições propostas.

Essas condições são contribuições desta dissertação e podem ser encontradas no trabalho (SIMEAO; MIRANDA; LEITE, 2008).

Teorema 3 Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $F(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que as seguintes desigualdades matriciais sejam verificadas $\forall \alpha_k$ admissível

$$\mathcal{M}(\alpha_k) \equiv \begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) + F(\alpha_k)' + F(\alpha_k) & G(\alpha_k)' - F(\alpha_k)A(\alpha_k) \\ \star & [\beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k)] - A(\alpha_k)'G(\alpha_k)' - G(\alpha_k)A(\alpha_k) \\ \star & \star \\ & H(\alpha_k)' - F(\alpha_k)A_d(\alpha_k) \\ & -A(\alpha_k)'H(\alpha_k)' - G(\alpha_k)A_d(\alpha_k) \\ & -(Q(\alpha_{k-d_k}) + H(\alpha_k)A_d(\alpha_k) + A_d(\alpha_k)'H(\alpha_k)') \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

então o sistema (3.7)-(3.10) com atrasos é robustamente estável $\forall d_k \in \mathbb{N}$ e (2.24)-(2.27) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para esse sistema.

Prova: A positividade do candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii (2.24) é assegurada com a hipótese de que $P(\alpha_k) = P(\alpha_k)' > \mathbf{0}$, $Q(\alpha_k) = Q(\alpha_k)' > \mathbf{0}$. Para que (2.24) seja um funcional de Lyapunov-Krasovskii, além de sua positividade, é necessário que $\Delta V(\alpha_k, k) = V(\alpha_{k+1}, k+1) - V(\alpha_k, k) < 0$, $\forall \alpha_k \in \Omega$. Assim, consideram-se as seguintes diferenças associadas a (2.24):

$$\Delta V_1(\alpha_k, k) = x'_{k+1} P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x'_k P(\alpha_k) x_k \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(\alpha_k, k) = & x'_k Q(\alpha_k) x_k - x'_{k-d_k} Q(\alpha_{k-d_k}) x_{k-d_k} \\ & + \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x'_i Q(\alpha_i) x_i - \sum_{i=k+1-d_k}^{k-1} x'_i Q(\alpha_i) x_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$\Delta V_3(\alpha_k, k) = (\bar{d} - \underline{d}) x'_k Q(\alpha_k) x_k - \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-d} x'_i Q(\alpha_i) x_i \quad (3.14)$$

Observe que o terceiro termo em (3.13), $\Xi_k \equiv \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-1} x'_i Q(\alpha_i) x_i$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Xi_k &= \sum_{i=k+1-\underline{d}}^{k-1} x'_i Q(\alpha_i) x_i + \sum_{i=k+1-d_{k+1}}^{k-d} x'_i Q(\alpha_i) x_i \\ &\leq \sum_{i=k+1-d_k}^{k-1} x'_i Q(\alpha_i) x_i + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-d} x'_i Q(\alpha_i) x_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

Usando (3.15) em (3.13), obtém-se

$$\Delta V_2(\alpha_k, k) \leq x'_k Q(\alpha_k) x_k - x'_{k-d_k} Q(\alpha_{k-d_k}) x_{k-d_k} + \sum_{i=k+1-\bar{d}}^{k-d} x'_i Q(\alpha_i) x_i \quad (3.16)$$

Considerando (3.12), (3.14) e (3.16), pode-se verificar

$$\Delta V(\alpha_k, k) \leq x'_{k+1} P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} + x'_k [\beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k)] x_k - x'_{k-d_k} Q(\alpha_{k-d_k}) x_{k-d_k} < 0, \quad (3.17)$$

em que $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1)$. Substituindo-se x_{k+1} em (3.17) pelo lado direito de (3.7) obtém-se

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha_k) &\equiv \\ &\left[\begin{array}{cc} A(\alpha_k)' P(\alpha_{k+1}) A(\alpha_k) + \beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k) & A(\alpha_k)' P(\alpha_{k+1}) A_d(\alpha_k) \\ \star & A_d(\alpha_k)' P(\alpha_{k+1}) A_d(\alpha_k) - Q(\alpha_{k-d_k}) \end{array} \right] < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observa-se que (3.18) pode ser reescrita como

$$\Gamma(\alpha_k) = \Pi(\alpha_k)' P(\alpha_{k+1})^{-1} \Pi(\alpha_k) - \begin{bmatrix} P(\alpha_k) - \beta Q(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q(\alpha_{k-d_k}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.19)$$

em que

$$\Pi(\alpha_k) = [P(\alpha_{k+1})A(\alpha_k) \quad P(\alpha_{k+1})A_d(\alpha_k)].$$

O complemento de Schur pode ser utilizado para, a partir de (3.19), obter-se a seguinte condição equivalente

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_{k+1})A(\alpha_k) & P(\alpha_{k+1})A_d(\alpha_k) \\ \star & \beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q(\alpha_{k-d_k}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Portanto, se (3.20) é verificada, então a condição (3.11) é assegurada com $F(\alpha_k) = F(\alpha_k)' = -P(\alpha_{k+1})$, $G(\alpha_k) = H(\alpha_k) = \mathbf{0}$. Por outro lado, se (3.11) é verificada, então

$$\Gamma(\alpha_k) = T(\alpha_k)' \mathcal{M}(\alpha_k) T(\alpha_k) \quad (3.21)$$

com

$$T(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) \\ \mathbf{I}_{2n} \end{bmatrix}$$

Assim, a escolha de $F(\alpha_k) = F(\alpha_k)' = -P(\alpha_{k+1})$, $G(\alpha_k) = H(\alpha_k) = \mathbf{0}$ faz com que (3.11) seja equivalente à (3.20), e uma vez que (3.11) é verificada, (3.18) é assegurada pela transformação de congruência (3.21). ■

Observe-se que as condições propostas no Teorema 3 não são convexas devido à presença dos produtos de matrizes dependentes de α_k . Isso torna o problema de dimensão infinita em α_k .

A prova do Teorema 3 pode ser feita de maneira alternativa, e talvez mais simples, utilizando o Lema 2. Nesse caso, parte-se da desigualdade (3.17) e assumem-se

$$\mathcal{B}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A(\alpha_k) & -A_d(\alpha_k) \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k-d_k} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & [\beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k)] & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q(\alpha_{k-d_k}) \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{X}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} F(\alpha_k) \\ G(\alpha_k) \\ H(\alpha_k) \end{bmatrix}.$$

Note-se que (3.17) e (3.7) podem ser reescritas como $\omega' \mathcal{Q}(\alpha_k) \omega < 0$ e $\mathcal{B}(\alpha_k) \omega = 0$, respectivamente. Usando o Lema de Finsler tem-se que

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}(\alpha_k) \omega = 0 \\ \omega' \mathcal{Q}(\alpha_k) \omega < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathcal{Q}(\alpha_k) + \mathcal{X}(\alpha_k) \mathcal{B}(\alpha_k) + \mathcal{B}(\alpha_k)' \mathcal{X}(\alpha_k)' < 0. \quad (3.22)$$

Veja que $\mathcal{M}(\alpha_k) = \mathcal{Q}(\alpha_k) + \mathcal{X}(\alpha_k) \mathcal{B}(\alpha_k) + \mathcal{B}(\alpha_k)' \mathcal{X}(\alpha_k)' < 0$. A condição (3.11) proposta pelo Teorema 3 é necessária e suficiente para que (2.24)-(2.27) seja um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (3.7)-(3.10). No entanto, esse funcional é apenas suficiente para a estabilidade do sistema (3.7)-(3.10). O Teorema 3 não é numericamente (ou computacionalmente) viável: as condições propostas não são convexas devido à presença dos produtos de matrizes dependentes de α_k . Isso torna o problema de dimensão infinita em α_k . Nas seções que se seguem serão buscadas condições convexas suficientes para a verificação desse teorema.

3.1.2 Condições de Dimensões Finitas para Estabilidade Robusta

Uma condição suficiente pode ser obtida assumindo-se que as matrizes do candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii possuam uma estrutura semelhante a das matrizes $Y(\alpha_k)$, ou seja:

$$P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N P_i \alpha_{ki}; \quad Q(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N Q_i \alpha_{ki} \quad (3.23)$$

com $\alpha_k \in \Omega$ e as matrizes P_i e Q_i , $i = 1, \dots, N$, são associadas aos vértices do politopo dado em 3.9. Além disso, para tornar o problema convexo, admite-se que as matrizes $F(\alpha_k)$, $G(\alpha_k)$ e $H(\alpha_k)$ sejam dadas por

$$F(\alpha_k) = F; \quad G(\alpha_k) = G; \quad H(\alpha_k) = H. \quad (3.24)$$

As condições propostas em (3.24) tornam a abordagem mais conservadora, uma vez que as matrizes F, G e H são constantes, ou seja, são um caso particular de $F(\alpha_k)$, $G(\alpha_k)$ e $H(\alpha_k)$.

Teorema 4 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$*

tais que

$$\mathcal{M}(i, j, \ell) \equiv \begin{bmatrix} P_j + F' + F & G' - FA_i & H' - FA_{di} \\ \star & \beta Q_i - P_i - A'_i G' - GA_i & -A'_i H' - GA_{di} \\ \star & \star & -(Q_\ell + HA_{di} + A'_{di} H') \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$i, j, \ell = 1, \dots, N \quad (3.25)$$

então o sistema incerto variante no tempo (3.7)-(3.9) com atrasos sujeitos a (3.3) é robustamente estável $\forall d_k \in \mathbb{N}$ e (2.24)-(2.27) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para esse sistema.

Prova: Observe que $\mathcal{M}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^N \mathcal{M}(i, j, \ell) \alpha_{k,i} \alpha_{k+1,j} \alpha_{k-d_k,\ell}$, $\alpha_k \in \Omega$. Nesse caso, $F(\alpha_k)$, $G(\alpha_k)$ e $H(\alpha_k)$ são dadas por (3.24) e $P(\alpha_k)$ e $Q(\alpha_k)$ por (3.23). Assumindo $N = 2$ e desenvolvendo o somatório $\sum_{\ell=1}^2$ obtém-se;

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(P_j + F' + F) & (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(G' - FA_i) \\ \star & (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(\beta Q_i - P_i - A'_i G' - GA_i) \\ \star & \star \\ & (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(H' - FA_{di}) \\ & (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(-A'_i H' - GA_{di}) \\ & -((\alpha_{k-d_k,1} Q_1 + \alpha_{k-d_k,2} Q_2)) + (\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2})(HA_{di} + A'_{di} H') \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Como $(\alpha_{k-d_k,1} + \alpha_{k-d_k,2}) = 1$ e $(\alpha_{k-d_k,1})Q_1 + (\alpha_{k-d_k,2})Q_2 = Q(\alpha_{k-d_k})$,

$$\begin{bmatrix} P_j + F' + F & G' - FA_i & H' - FA_{di} \\ \star & \beta Q_i - P_i - A'_i G' - GA_i & -A'_i H' - GA_{di} \\ \star & \star & -(Q(\alpha_{k-d_k}) + HA_{di} + A'_{di} H') \end{bmatrix}$$

$$i, j, \dots, N \quad (3.27)$$

Fazendo o mesmo procedimento para os somatórios $\sum_{i=1}^2$ e $\sum_{j=1}^2$, obtém-se $\mathcal{M}(\alpha_k)$ dada em (3.25), completando-se a prova. ■

Nesta seção foram encontradas condições de dimensões finitas para estabilidade robusta, com uma abordagem de incertezas politópicas que, se verificadas, garantem que (2.24)-(2.27) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Em (LIU et al., 2006) e (GAO; CHEN, 2007) também é empregado um funcional de Lyapunov-Krasovskii, porém são

consideradas incertezas limitadas em norma. O funcional de Lyapunov-Krasovskii empregado aqui depende de um parâmetro variante no tempo, o que representa um potencial para redução de conservadorismo em relação aos funcionais utilizados, o que pode ser observado, por exemplo, em (BOUKAS, 2006). Note-se que, no caso em que P_i e Q_i definidos em (3.23) sejam assumidos da forma $P_i = P$ e $Q_i = Q$, recupera-se uma condição EQ como apresentada na próxima seção.

3.1.3 Análise de Estabilidade Quadrática

Note-se que condições baseadas na estabilidade quadrática (BARMISH, 1985) podem ser obtidas diretamente de (3.20) e de (3.25) (análise) e de (3.34) (síntese), bastando para isso assumir que as matrizes $P(\alpha_k) = P$ e $Q(\alpha_k) = Q$, ou seja, $P_i = P$, $Q_i = Q$, $i = 1, \dots, N$.

Corolário 1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\mathcal{M}(i) \equiv \begin{bmatrix} P + F' + F & G' - FA_i & H' - FA_{di} \\ \star & \beta Q - P - A_i' G' - GA_i & -A_i' H' - GA_{di} \\ \star & \star & -(Q + HA_{di} + A_{di}' H') \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$i = 1, \dots, N$ (3.28)

então o sistema incerto variante no tempo (3.7)-(3.9) com atrasos sujeitos a (3.3) é quadráticamente estável $\forall d_k \in \mathbb{N}$ e (2.24)-(2.27) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para esse sistema.

Prova: A prova deste teorema segue passos semelhantes à prova apresentada para o Teorema 4, observando que $P(\alpha_k) = P$, $Q(\alpha_k) = Q$, e $F(\alpha_k)$, $G(\alpha_k)$ e $H(\alpha_k)$ são dadas por (3.24). ■

O resultado dessa seção é mais geral por ter as variáveis de folga F , G e H , do que, por exemplo, o utilizando a EQ como feito, principalmente, nos anos 1990-2000: substituindo-se x_{k+1} em (3.17) pelo lado direito de (3.7). Veja também (GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007) como ilustração desse tipo de abordagem. Isso repercute na síntese de controladores. Com uma escolha adequada de F , G e H , ou seja, $F = -P$, $G = H = 0$, recupera-se (3.20) com matrizes P e Q fixas.

3.1.4 Exemplo Numérico

Considere-se o sistema gerado aleatoriamente, incerto e discreto no tempo com atraso nos estados descrito por

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)u_{k-d_k} \quad (3.29)$$

em que as matrizes variantes no tempo são descritas por um politopo com quatro vértices $\tilde{Y}_1 = [A|A_d|B|B_d]_1$, $\tilde{Y}_2 = [A|A_d|B|B_d]_2$, $\tilde{Y}_3 = [A|A_d|B|B_d]_3$, $\tilde{Y}_4 = [A|A_d|B|B_d]_4$

$$\tilde{Y}_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,7675 & 0,2099 & -0,0853 & 0,1170 & 0,0320 & -0,0130 & 0 & 0,9 \\ -1,0102 & -0,5642 & 0,5051 & -0,1540 & -0,0860 & 0,0770 & 1 & 0,54 \\ 0,5117 & -0,2558 & -0,1246 & 0,0780 & -0,0390 & -0,0190 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad (3.30)$$

$$\tilde{Y}_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,3540 & -0,0540 & -0,3180 & 0,0590 & -0,0090 & -0,0530 & 0 & 0,15 \\ -0,3600 & -0,1680 & -0,0720 & -0,0600 & -0,0280 & -0,0120 & 2 & 0,39 \\ -0,3540 & 0,1800 & 0,0240 & -0,0590 & 0,0300 & 0,0040 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (3.31)$$

$$\tilde{Y}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,9360 & 0,2560 & -0,1040 & 0,0702 & 0,0192 & -0,0078 & 0 & 0,9 \\ -1,2320 & -0,6880 & 0,6160 & -0,0924 & -0,0516 & 0,0462 & 1 & 0,54 \\ 0,6240 & -0,3120 & -0,1520 & 0,0468 & -0,0234 & -0,0114 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad (3.32)$$

$$\tilde{Y}_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,4720 & -0,0720 & -0,4240 & 0,0295 & -0,0045 & -0,0265 & 0 & 0,15 \\ -0,4800 & -0,2240 & -0,0960 & -0,0300 & -0,0140 & -0,0060 & 2 & 0,39 \\ -0,4720 & 0,2400 & 0,0320 & -0,0295 & 0,0150 & 0,0020 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (3.33)$$

Observe-se que o termo adicional $B_d(\alpha_k)u_{k-d_k}$ pode ser considerado na formulação proposta neste trabalho trocando-se B_i por B_{di} nas entradas (1,3) e (3,1) de (3.34). Neste caso, a lei de controle é dada por $u_k = Kx_k$ e $u_{k-d_k} = K_d x_{k-d_k}$.

Utilizando as condições do Teorema 4, foi realizada uma busca linear em \bar{d} para $\underline{d} = 1$. O valor limite no qual as condições do Teorema 4 conseguiram identificar o sistema como estável foi $\bar{d}_{max} = 8$. As condições do Corolário 1 não foram suficientes para identificar o sistema como estável com atraso superior à 1 amostragem. Veja que, se as matrizes A , A_d , B e B_d são invariantes no tempo, isto é, assumindo $\alpha_k = \alpha$, a aplicação do Teorema 4 ainda é válida para sistemas incertos e invariantes no tempo. Nesse caso, as condições podem ser apresentadas para os casos discretos e invariantes no tempo, sendo mais conservadoras.

3.2 Estabilização

Nesta seção são investigadas condições convexas para a solução do problema de estabilização e, se possível encontrar um par de ganhos $[K|K_d]$ tais que o sistema (3.1)-(3.4) controlado por (3.6) seja robustamente estável. É apresentado ainda um exemplo para ilustrar a aplicação das condições propostas.

3.2.1 Estabilização Robusta

Condições convexas para a solução do problema de estabilização robusta, isto é, a determinação de um par de ganhos robustos $[K|K_d]$, podem ser obtidas a partir do Teorema 4.

Teorema 5 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $W_d \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P_j + F' + F & -WB'_i - FA'_i & -W_d B'_i - FA'_{di} \\ \star & \beta Q_i - P_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q_\ell \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j, \ell = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

então o sistema variante e discreto no tempo com atrasos nos estados é robustamente estável para todo atraso d_k , utilizando-se a lei de controle (3.6) com

$$K = W'(F')^{-1} \quad e \quad K_d = W'_d(F')^{-1}. \quad (3.35)$$

Além disso, (2.24)-(2.27) com (3.23) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (3.7).

Prova: Obtém-se a prova substituindo-se A_i e A_{di} por $(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i K)'$ e $(\tilde{A}_{di} + \tilde{B}_i K_d)'$, respectivamente, escolhendo-se $G = \mathbf{0}$ e $H = \mathbf{0}$ e fazendo a troca de variáveis $W = FK'$, $W_d = FK'_d$ em (3.34). ■

Nos casos em que x_{k-d_k} não está disponível para realimentação, a condição (3.34) pode ser usada com $W_d = \mathbf{0}$. As condições para síntese aqui apresentadas são convexas, diferentemente de outros trabalhos como, por exemplo, (FRIDMAN; SHAKED, 2005b) e (FRIDMAN; SHAKED, 2005a).

3.2.2 Estabilização Quadrática

Condições convexas para a solução do problema de estabilização quadrática, isto é, a determinação de um par de ganhos robustos $[K|K_d]$, podem ser obtidas a partir do Corolário 1.

Teorema 6 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $W_d \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P + F' + F & -WB'_i - FA'_i & -W_d B'_i - FA'_{di} \\ \star & \beta Q - P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.36)$$

então o sistema variante e discreto no tempo com atrasos é quadraticamente estável para todo atraso d_k utilizando-se a lei de controle (3.6) com K e K_d dados por (3.35).

Além disso, (2.24)-(2.27) com (3.23) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade quadrática do sistema em malha fechada (3.7).

Prova: A prova segue passos semelhantes aos da prova do Corolário 1, assumindo-se $P(\alpha_k) = P$ e $Q(\alpha_k) = Q$, $G = 0$, $H = 0$ e substituindo-se A por $(A + BK)$ e A_d por $(A_d + BK_d)$ em (3.28). ■

Nos casos em que x_{k-d_k} não está disponível para realimentação, a condição (3.34) pode ser usada com $W_d = \mathbf{0}$.

O resultado dessa seção é mais geral por ter a variável de folga F . Sem essa variável de folga, o projeto de K e K_d seria a partir de P e Q , como em (BOUKAS, 2006).

Neste texto, as condições obtidas na abordagem quadrática, são denominadas EQ(3.20), EQ(3.28) e EQ(3.36), respectivamente. Nesses casos as LMIs resultantes precisam ser avaliadas somente para $i = 1, \dots, N$.

3.2.3 Exemplo Numérico

Considere o mesmo sistema da seção 3.1.4 gerado aleatoriamente, incerto e discreto no tempo com atraso nos estados descrito por (3.29) em que as matrizes variantes no tempo são descritas por um politopo com quatro vértices $\tilde{Y}_1 = [A|A_d|B|B_d]_1$, $\tilde{Y}_2 = [A|A_d|B|B_d]_2$, $\tilde{Y}_3 = [A|A_d|B|B_d]_3$, $\tilde{Y}_4 = [A|A_d|B|B_d]_4$

$$\tilde{Y}_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,7675 & 0,2099 & -0,0853 & 0,1170 & 0,0320 & -0,0130 & 0 & 0,9 \\ -1,0102 & -0,5642 & 0,5051 & -0,1540 & -0,0860 & 0,0770 & 1 & 0,54 \\ 0,5117 & -0,2558 & -0,1246 & 0,0780 & -0,0390 & -0,0190 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad (3.37)$$

$$\tilde{Y}_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,3540 & -0,0540 & -0,3180 & 0,0590 & -0,0090 & -0,0530 & 0 & 0,15 \\ -0,3600 & -0,1680 & -0,0720 & -0,0600 & -0,0280 & -0,0120 & 2 & 0,39 \\ -0,3540 & 0,1800 & 0,0240 & -0,0590 & 0,0300 & 0,0040 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (3.38)$$

$$\tilde{Y}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,9360 & 0,2560 & -0,1040 & 0,0702 & 0,0192 & -0,0078 & 0 & 0,9 \\ -1,2320 & -0,6880 & 0,6160 & -0,0924 & -0,0516 & 0,0462 & 1 & 0,54 \\ 0,6240 & -0,3120 & -0,1520 & 0,0468 & -0,0234 & -0,0114 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad (3.39)$$

$$\tilde{Y}_4 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c} 0,4720 & -0,0720 & -0,4240 & 0,0295 & -0,0045 & -0,0265 & 0 & 0,15 \\ -0,4800 & -0,2240 & -0,0960 & -0,0300 & -0,0140 & -0,0060 & 2 & 0,39 \\ -0,4720 & 0,2400 & 0,0320 & -0,0295 & 0,0150 & 0,0020 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (3.40)$$

Para as condições do Teorema 5, o valor limite de \bar{d} em que se consegue determinar um par de ganhos estabilizantes $[K|K_d]$ é $\bar{d}_{max} = 22$. Nesse caso, as matrizes de ganhos são dadas por $K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0,3686 & 0,1176 & -0,1423 & \end{array} \right]$ e $K_d = \left[\begin{array}{ccc|c} 0,0097 & 0,0046 & -0,0231 & \end{array} \right]$. Com as condições do Teorema 6 consegue-se determinar um par de ganhos estabilizantes $[K|K_d]$ para o valor limite de $\bar{d}_{max} = 20$, ou seja, o Teorema 5 consegue determinar um par de ganhos estabilizantes com 2 amostragens de atraso a mais que o Teorema 6. Esse sistema foi simulado para condições iniciais $x(k) = [1 \ -1 \ 1]'$, $k = -22, \dots, 0$. O parâmetro α_k e o atraso d_k foram variados conforme indicado na Figura 3.1. Foram adicionadas perturbações nos estados do sistema, dadas por $x_k = x_k + [1 \ -1 \ 1]'$, nas amostragens $k \in \{50, 100\}$. O comportamento dos estados do sistema em malha fechada é mostrado na Figura 3.2. Os estados convergem após transcorridas 25 amostragens da condição inicial e após 20 amostragens das perturbações introduzidas. Na Figura 3.3 é mostrado o comportamento dos sinais de controle u_k e u_{k-d_k} .

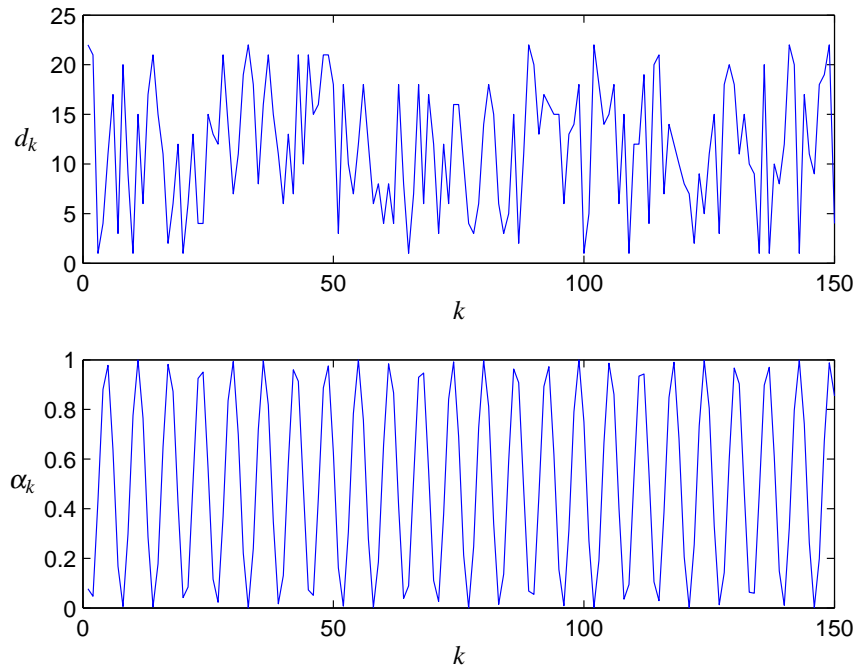
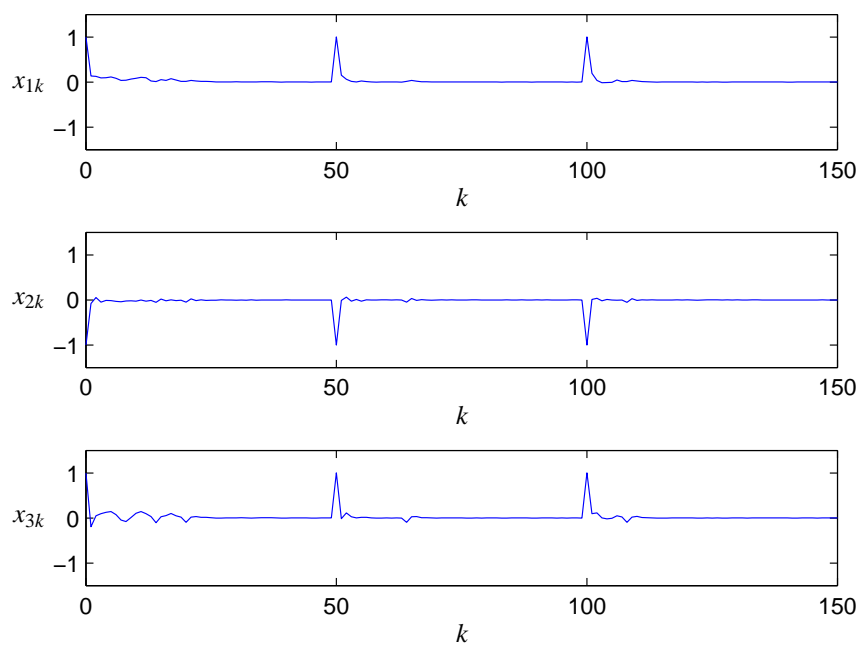
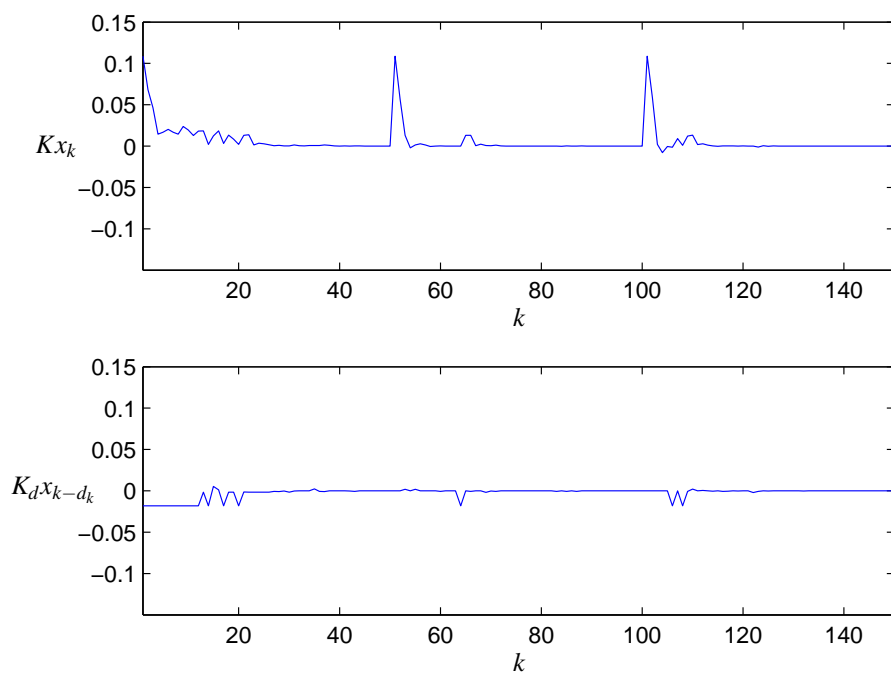


Figura 3.1: Comportamento do atraso d_k e do parâmetro α_k em função de k .

Figura 3.2: Comportamento dos estados x_{1k} a x_{3k} .Figura 3.3: Comportamento das parcelas do sinal de controle $u_k = Kx_k + K_d x_{k-d_k}$

3.3 Extensão para Sistemas Chaveados

Como exemplo de sistemas dinâmicos chaveados podem-se citar os circuitos elétricos com chaves eletrônicas, tais como fontes chaveadas. Sistemas chaveados também são encontrados em processos bioquímicos. A abordagem utilizada neste trabalho pode ser aplicada no contexto de sistemas chaveados discretos no tempo com atraso variante nos estados. Nesse caso, assume-se que as matrizes dinâmicas do sistema (3.7) dependem de uma função de chaveamento, $\sigma_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, de forma que $Y(\alpha_k) = [A|A_d](\alpha_k) = [A|A_d]_i$, ou seja,

$$\alpha_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = \sigma_k \\ 0, & \text{para } i \neq \sigma_k \end{cases} \quad (3.41)$$

Observa-se que, neste caso, N denota o número de subsistemas. Assim, condições específicas para a análise de estabilidade robusta e a síntese de ganhos robustos podem ser estabelecidas. No caso de sistemas discretos no tempo e chaveados, assumem-se as seguintes hipóteses (MONTAGNER et al., 2005):

1. A função de chaveamento (3.41) não é conhecida *à priori*, mas é avaliada em tempo real;
2. Todas as matrizes do subsistema chaveado são chaveadas pelas mesmas regras dadas por (3.41);
3. O atraso pode ser desconhecido;
4. O vetor de estado $x(k)$ e o vetor de estado atrasado $x(k-d)$ devem estar disponíveis para realimentação.

3.3.1 Análise de Estabilidade de Sistemas Chaveados

Nesta seção serão investigadas condições convexas para análise de estabilidade de sistemas chaveados.

Teorema 7 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\Lambda(i, j, \ell) \equiv \begin{bmatrix} P_j + F'_i + F_i & G'_i - F'_i A_i & H'_i - F'_i A_{di} \\ \star & \beta Q_i - P_i - A'_i G'_i - G_i A_i & -A'_i H'_i - G_i A_{di} \\ \star & \star & -(Q_\ell + H_i A_{di} + A'_{di} H'_i) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j, \ell = 1, \dots, N. \quad (3.42)$$

então o sistema chaveado discreto no tempo (3.7) com (3.41) e atraso nos estados sujeito a (3.3) é robustamente estável $\forall d_k \in \mathbb{N}$. Além disso, (2.24)-(2.27) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para esse sistema.

Prova: A prova desse teorema segue passos semelhantes à prova apresentada para o Teorema 3, substituindo-se as referências à equação (3.4) por (3.41) e observando que $\Upsilon(\alpha_k) = \Upsilon_i$, $P(\alpha_k) = P_i$, $Q(\alpha_k) = Q_i$ para $\sigma_k = i$, $P(\alpha_{k+1}) = P_j$ para $\sigma_{k+1} = j$ e $Q(\alpha_{k-d_k}) = P_j$ para $\sigma_{k-d_k} = \ell$. Assim, a partir de (3.20), substitui-se $F(\alpha_k) = F'_i = -P_j$, $G(\alpha_k) = H(\alpha_k) = \mathbf{0}$ e (3.11) por (3.42), ou seja, $\mathcal{M}(\alpha_k)$ por $\Lambda(i, j, \ell)$. ■

Note-se que o fato do sistema existir apenas nos vértices de um polítopo \mathcal{P} permite que o problema convexo de otimização seja formulado com maior flexibilidade do que seu correspondente na seção 3.2.1, usando um conjunto de variáveis extras associado a cada modo de operação do sistema dado por F_i , G_i e H_i , sendo $i = 1, \dots, N$.

3.3.2 Estabilização de Sistemas Chaveados

Devido à estrutura particular do sistema chaveado, pode-se modificar o problema da estabilização de forma a buscar um par de ganhos robustos para cada vértice (ou modo de operação) $[K|K_d](\alpha(k)) = [K_i|K_{di}]$, satisfazendo (3.41), para estabilizar cada subsistema em malha fechada, Υ_i , inclusive nas transições.

Teorema 8 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ e $W_{di} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$, $i = 1, \dots, N$ e um escalar $\beta = (\bar{d} - \underline{d} + 1) \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P_j + F'_i + F_i & -W_i B'_i - F_i A'_i & -W_{di} B'_i - F_i A'_{di} \\ \star & \beta Q_i - P_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q_\ell \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j, \ell = 1, \dots, N \quad (3.43)$$

então o sistema chaveado discreto no tempo com atrasos dados por (3.3) é robustamente estável para todo atraso d_k e lei de chaveamento σ_k utilizando-se a lei de controle (3.6) com

$$K = K_i = W'_i (F'_i)^{-1} \quad e \quad K_d = K_{di} = W'_{di} (F'_i)^{-1} \quad (3.44)$$

Além disso, (2.24)-(2.27) com (3.23) e (3.41) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade robusta do sistema em malha fechada (3.7).

Prova: A prova segue passos semelhantes aos da prova do Teorema 4. ■

3.3.3 Exemplo Numérico

Considere um sistema chaveado descrito por (3.1) com a restrição (3.41) em que $A(\sigma_k) = A_n + (-1)^{\sigma_k} \rho L J$, $A_d(\sigma_k) = (0, 225 + (-1)^{1+\sigma_k} 0, 025) A_n$ e

$$B(\sigma_k) = [0 \ 1,5 \ 0 \ 1,5]' + (-1)^{\sigma_k} [0 \ 0,5 \ 0 \ 0,5]'$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$L = [0, 0, 1, 0]'$, $J = [0, 8, -0, 5, 0, 1]$, $\sigma_k \in \{1, 2\}$, $\rho = 0,35$. Isso define um sistema chaveado com dois modos de operação. O objetivo aqui é procurar ganhos K_i e K_{di} , $i = 1, 2$, tais que esse sistema seja estabilizado para o maior valor possível de \bar{d} . Para as condições do Teorema 8, o valor limite de \bar{d} em que se consegue determinar um par de ganhos estabilizantes K_i e K_{di} , $i = 1, 2$ é $\bar{d}_{max} = 334$. Nesse caso, as matrizes de ganhos são dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0,6129 & 0,3269 & -1,2873 & -1,1935 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -0,2199 & 0,1107 & -0,6450 & -0,4890 \end{bmatrix} \\ K_{d1} &= \begin{bmatrix} -0,1291 & 0,0677 & -0,3228 & -0,2685 \end{bmatrix} \\ K_{d2} &= \begin{bmatrix} -0,0518 & 0,0271 & -0,1291 & -0,1076 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com esses ganhos o sistema considerado é simulado em malha fechada. Na Figura 3.4 são mostrados o comportamento do atraso (parte inferior) e a função de chaveamento (parte superior) adotada. Os sinais de d_k e de σ_k foram gerados aleatoriamente.

O sistema é simulado utilizando como condições iniciais iguais a $x_k = [1, -1, 1, -1]$ para $k \in [-334, 0]$. Nesta simulação foi utilizado $\beta = 335$, devido ao perfil usado para d_k (Figura 3.4). Iniciando em $k = 2000$, uma perturbação do tipo $x_k = x_k + [1, -1, 1, -1]'$ é imposta ao sistema a cada 2000 amostragens. Observe na Figura 3.5 a convergência dos estados após as perturbações. O pior caso se deu na perturbação imposta ao sistema no instante $k = 2000$ em que, nesse caso, o sistema converge após 500 amostras.

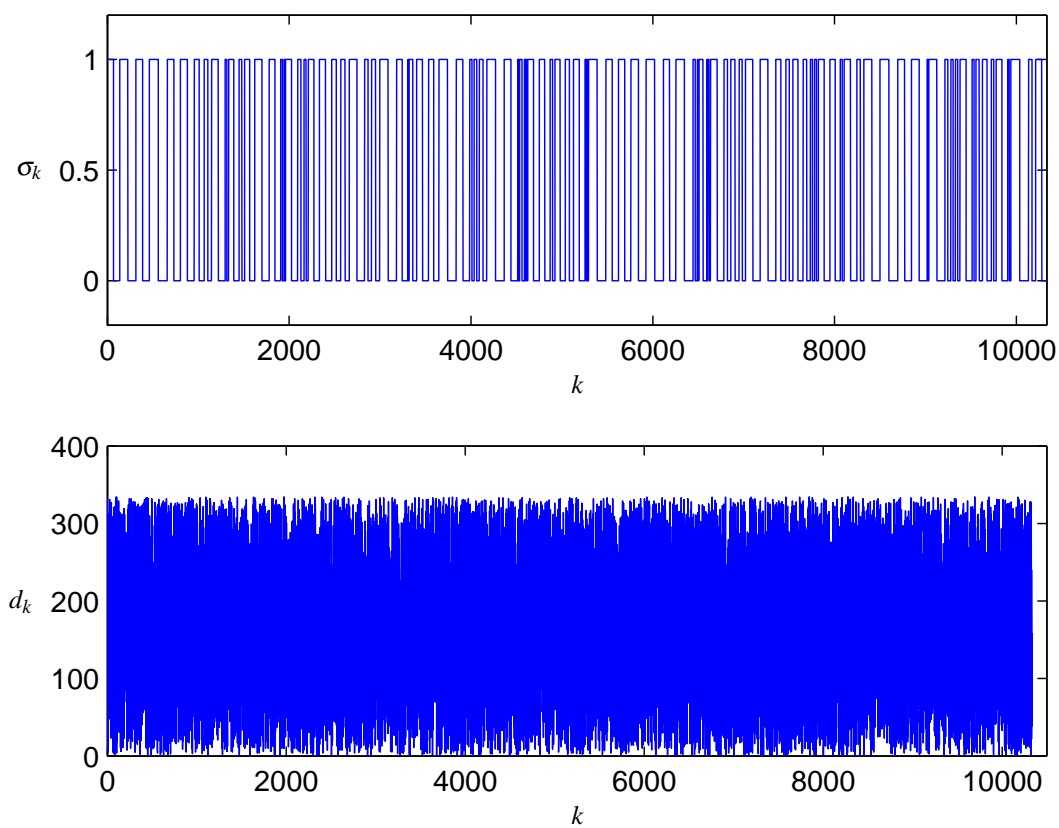


Figura 3.4: Função de chaveamento, σ_k , e atraso, d_k , em função da amostragem k .

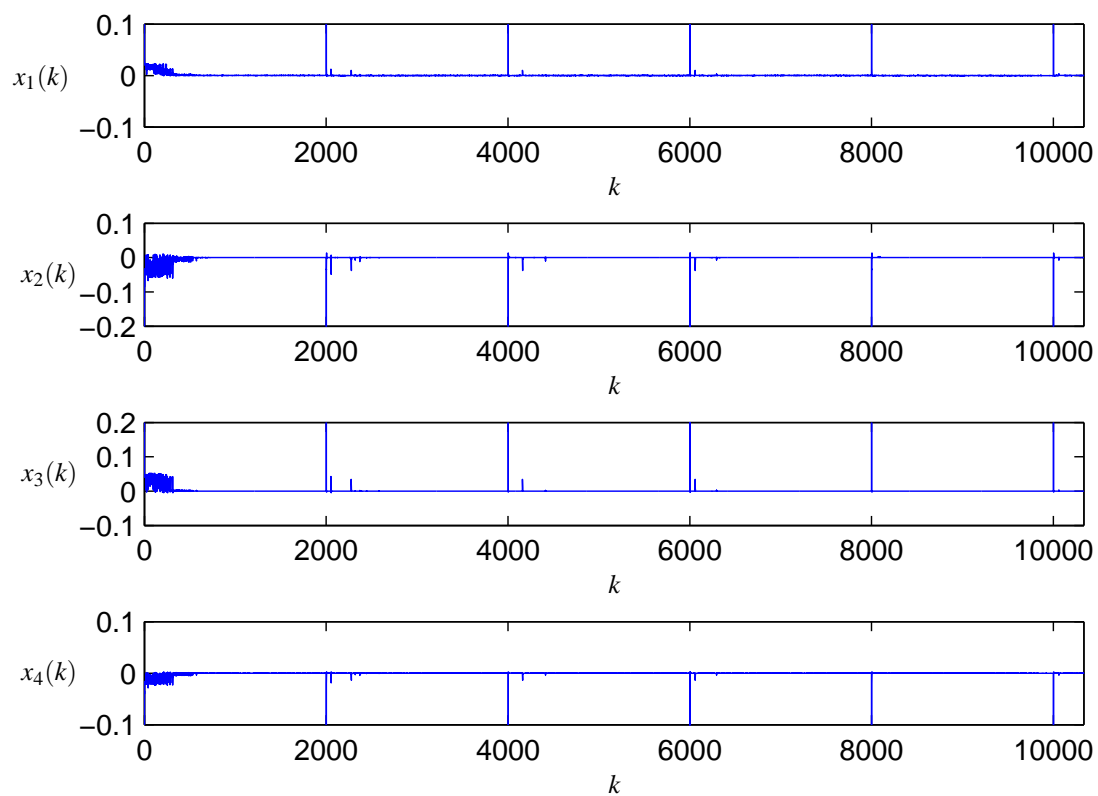


Figura 3.5: Comportamento dos estados $x_{1,k}$ a $x_{4,k}$, para $\beta = 335$ e d_k apresentado na Figura 3.4.

Nesta seção foram encontradas condições de dimensões finitas para estabilidade robustas de sistemas chaveados. Além disso, (2.24)-(2.27) com (3.23) e (3.41) é um funcional de Lyapunov-Krasovskii que assegura a estabilidade robusta. Esse é um funcional em que as matrizes P e Q , dadas por (3.23), são dependentes de parâmetros. Assim, os resultados apresentados aqui são mais gerais que os encontrados em (MONTAGNER et al., 2005).

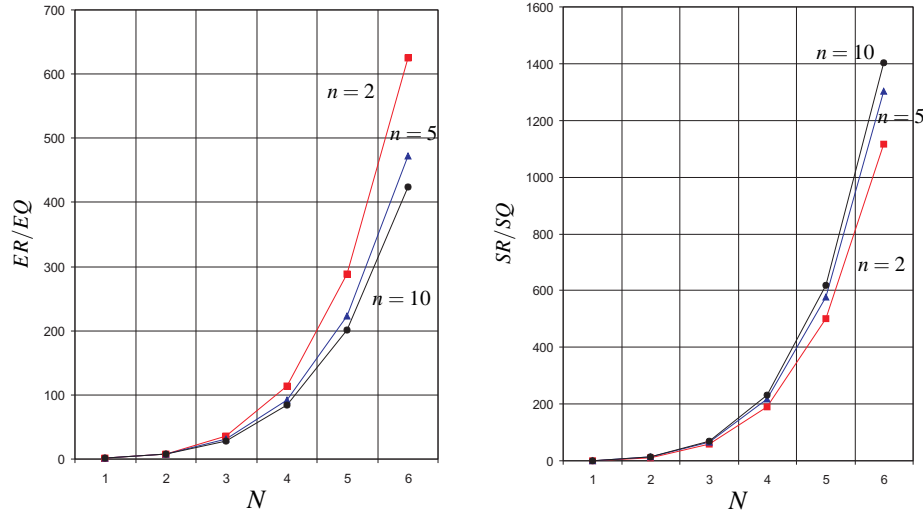
3.4 Complexidade Numérica

As condições apresentadas neste trabalho podem ser resolvidas numericamente por meio de algoritmos especializados e em tempo polinomial. A complexidade dessas condições depende do *solver* empregado. No caso do *LMI Control Toolbox* (GAHINET et al., 1995), essa complexidade é $\mathcal{O}(\mathcal{K}^3\mathcal{L})$ em que \mathcal{K} denota o número de variáveis de otimização, \mathcal{L} é o número de linhas do problema, sendo ambas, função de n , o número de estados do sistema, e de N , o número de vértices do polítopo. Os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} para as condições apresentadas neste trabalho podem ser vistas na Tabela 3.1. Nesta tabela, ER denota estabilidade robusta, EQ denota estabilidade quadrática, SR denota síntese robusta, SQ denota síntese quadrática, ERSch denota estabilidade robusta de sistemas chaveados e SRsch denota síntese robusta para sistemas chaveados.

Condição	\mathcal{K}	\mathcal{L}
Teorema. 4 (ER)	$Nn(n+1) + 3n^2$	$3N^3n + 2Nn$
Corolário. 1 (EQ)	$n(n+1) + 3n^2$	$3Nn + 2n$
Teorema. 5 (SR)	$Nn(n+1) + 2n + n^2$	$3N^3n$
Teorema. 6 (SQ)	$2n^2 + 3n$	$3Nn$
Teorema. 7 (ERSch)	$3Nn^2 + Nn(n+1)$	$3Nn + 2n$
Teorema. 8 (SRsch)	$N(2n^2 + 3n)$	$3N^3n$

Tabela 3.1: Número de variáveis escalares (\mathcal{K}) de linhas (\mathcal{L}) nas LMIs das condições propostas

A complexidade numérica do Corolário 1 é menor se comparada com a do Teorema 4. O gráfico da Figura 3.6(a) mostra a complexidade relativa entre esses dois teoremas em função do número de vértices N . A Figura 3.6(b) mostra a complexidade relativa entre os Teoremas 5 e 6. Para o caso em que $N = 2$ e $n = 10$, a SQ tem uma complexidade numérica maior que a SR. Obviamente o critério do Teorema 7 apresenta a maior complexidade numérica, pois possui mais variáveis escalares e mais linhas de avaliação que os demais. Vale destacar que as condições apresentadas nas seções anteriores foram obtidas no âmbito desse trabalho de dissertação.



(a) Complexidade Numérica Relativa entre o Teorema 4 e o Corolário 1 (b) Complexidade Numérica Relativa entre o Teorema 5 e o Teorema 6

Figura 3.6: Complexidades Numéricas Relativas, ER/EQ e SR/SQ .

3.5 Cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞

Uma proposta de estender os resultados obtidos neste trabalho de dissertação é de obter uma forma a contemplar um desempenho garantido baseado na norma \mathcal{H}_∞ entre os sinais da entrada de perturbação e saída ponderada. Tanto as condições para estimação do custo garantido \mathcal{H}_∞ quanto para a síntese dos controladores robustos podem ser propostas como problemas de otimização convexa na forma de desigualdades matriciais lineares, e as incertezas, que podem afetar todas as matrizes do sistema, serem expressas na forma politópica (3.9). Os resultados dessa proposta podem ser encontrados em (MIRANDA; SIMEAO; LEITE, 2008), mas não serão abordados nesta dissertação.

3.6 Comentários do Capítulo

Nesse capítulo foram desenvolvidas condições convexas para análise de estabilidade e síntese de sistemas de controle com atraso nos estados dependente de parâmetros. Na Seção 3.1.2 condições convexas foram investigadas para solucionar o problema em que, dado um atraso variante no tempo d_k sujeito a (3.3), determinar se o sistema variante no tempo com atrasos nos estados descrito por (3.7)-(3.9) é robustamente estável. Condições convexas para análise de estabilidade quadrática foram abordadas na Seção 3.1.3, observando-se que essas são mais conservadoras que as apresentadas na Seção 3.1.2. Para a síntese robusta, a Seção 3.2.1 apresentou condições convexas para encontrar, se possível, um par de ganhos $[K|K_d]$ tais que o sistema (3.1)-(3.4) controlado por (3.6) seja robustamente estável. A síntese quadrática é investigada

na Seção 3.2.2 podendo-se novamente observar o conservadorismo comparado às condições propostas na Seção 3.2.1. Note que a condição do Corolário 1 apresenta a estabilidade quadrática com variáveis extras, que é mais geral do que seria obtido usando (3.7) em (3.17)

$$(A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k})'P(\alpha_{k+1})(A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k}) + x_k'[\beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k)]x_k - x_{k-d_k}'Q(\alpha_{k-d_k})x_{k-d_k} < 0. \quad (3.46)$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_k' & x_{k-d}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha_k)'P(\alpha_{k+1})A(\alpha_k) + \beta Q(\alpha_k) - P(\alpha_k) & \\ & \star \\ & & A(\alpha_k)'P(\alpha_{k+1})A_d(\alpha_k) \\ & & & A_d(\alpha_k)'P(\alpha_{k+1})A_d(\alpha_k) - Q(\alpha_{k-d_k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.47)$$

Ou seja, observando que $P(\alpha_k) = P$, $Q(\alpha_k) = Q$, é obtida uma condição semelhante a (3.20)

$$\begin{bmatrix} -P & PA_i & PA_{di} \\ \star & \beta Q - P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Nesse caso a condição de síntese é dada por

$$\begin{bmatrix} -P & PA_i' + WB_i' & PA_{di}' + W_{di}B_i' \\ \star & \beta Q_i - P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q_\ell \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

e os ganhos K e K_d são obtidos diretamente da matriz P , $K = W'(P^{-1})'$ e $K_d = W_d'(P^{-1})$. No entanto, essas derivações não são discutidas neste texto por serem mais conservadoras, comparadas com as que aqui foram apresentadas. Nas seções 3.3.1 e 3.3.2, respectivamente, foi dada uma extensão das condições propostas neste trabalho ao caso dos sistemas chaveados.

4 *Protótipo*

4.1 Introdução

A decisão de desenvolver um protótipo para estudo de sistemas com atrasos nos estados foi tomada tendo observado a carência, na literatura, de dados e de equipamentos disponíveis no mercado para aplicações práticas laboratoriais em sistemas de controle com realimentação de estados com atrasos nos estados. Assim, foi proposto o desenvolvimento de uma planta possível de ser modelada na forma $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d}$, em laboratório, para estudos de análise de estabilidade e, principalmente, para avaliação de desempenho de controladores. O projeto dessa planta foi inspirado nos trabalhos de (CHU; SU; HU, 1993) e (CHU, 1995), em que um forno elétrico industrial, com 5 zonas de aquecimento, foi modelado como um sistema discreto no tempo, no espaço de estados, com atraso nos estados. A realimentação de estados foi utilizada para a lei de controle. No projeto da planta em desenvolvimento nesta dissertação, haverá seções de trabalho onde serão instalados sensores de temperatura para coleta de dados conforme feito em (CHU; SU; HU, 1993), essas temperaturas serão usadas como estados do processo. As temperaturas de cada seção podem ser utilizadas para realimentação de estados do sistema. Nesse sistema não será necessário o uso de observadores, embora a planta permita a aplicação desses, comparando os estados estimados com os estados medidos. A principal característica desejada para o protótipo, refere-se à sua dinâmica: espera-se que os processos de transferência de energia e de massa ocorram de forma lenta. Essa característica favorecerá a modelagem matemática na forma $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d}$. Além disso, o protótipo deverá ser preparado para receber (sinais de controle) e emitir (sinais de medição) sinais com tensões na faixa de 0-5V. É desejável que o protótipo seja construído com componentes de fácil aquisição no mercado e que possa ser transportado com facilidade para atender à finalidade didática à que se propõe. Em especial, a planta poderá ser usada para comparar os controladores projetados por técnicas que utilizam otimização convexa, como as estudadas no Capítulo 3.

4.2 Descrição Física da Planta

A planta consiste em um sistema de aquecimento de ar, disposto como mostrado na Figura 4.1. Esse sistema tem sua estrutura em acrílico transparente na forma de um tubo de seção quadrada, tendo sua parede 5 mm de espessura e seção transversal de $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$. Essa estrutura está montada em uma base de MDF. Para prover o fluxo de ar no interior do sistema, utilizou-se um ventilador axial com dimensões adequadas à seção transversal da montagem. Para o aquecimento do ar e controle do fluxo de ar no interior do duto, foram implementados os seguintes atuadores:

1. Atuadores para aquecimento do ar: resistências elétricas com tensão de trabalho de 127 V e potência de 1400 W , utilizadas em secadores de cabelo encontrados no mercado;
2. Restrição (*damper*) para controle do fluxo de ar: implementada por uma chapa de acrílico com medidas suficientes para obstruir a passagem de ar pelo interior do tubo. O deslocamento dessa restrição se dá pelo movimento giratório da mesma, em um ângulo entre 0° e 90° em relação ao sentido do fluxo de ar. Esse movimento é realizado por um servo motor utilizado em aeromodelos.

Para a medição de temperatura e realimentação dos estados para o sistema de controle, utilizaram-se sensores de temperatura semicondutores encontrados comercialmente. Foi utilizado o modelo *LM35* fixados em suporte próprio. Para facilitar a instalação e manutenção dos sensores e atuadores, o sistema de aquecimento de ar foi dividido em 9 seções de trabalho divididas da seguinte forma:

- Seção 1: Entrada de ar forçado por um ventilador axial; sensor de temperatura;
- Seção 2: Resistência elétrica para aquecimento do ar; sensor de temperatura;
- Seção 3: Restrição para controle do fluxo de ar;
- Seção 4: Sensor de temperatura;
- Seção 5: Resistência elétrica para aquecimento do ar;
- Seção 6: Sensor de temperatura;
- Seção 7: Resistência elétrica para aquecimento do ar;
- Seção 8: Não utilizada, disponível para futuras implementações;
- Seção 9: Sensor de temperatura do ar e saída do fluxo de ar.

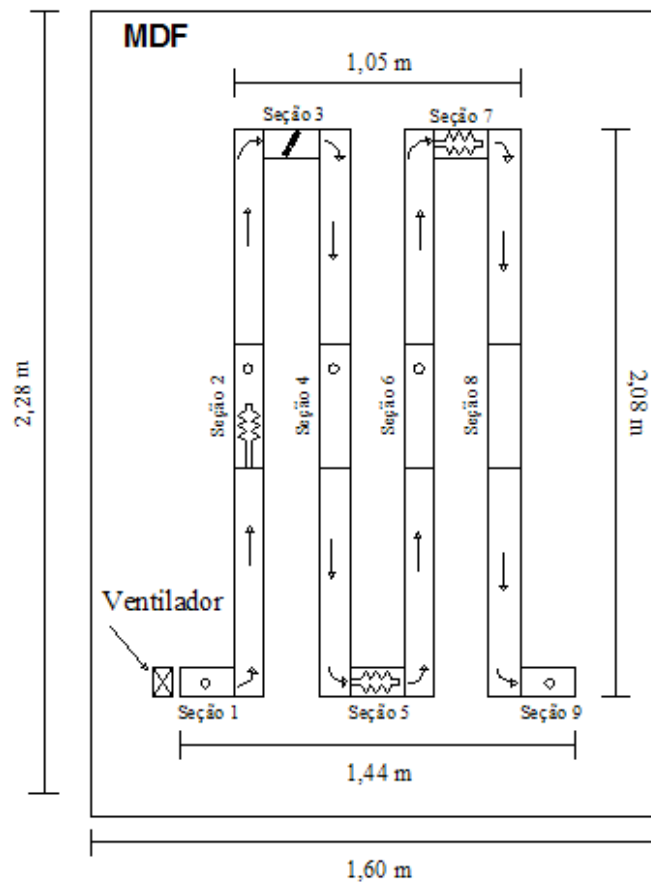


Figura 4.1: Diagrama do Sistema de Aquecimento de Ar

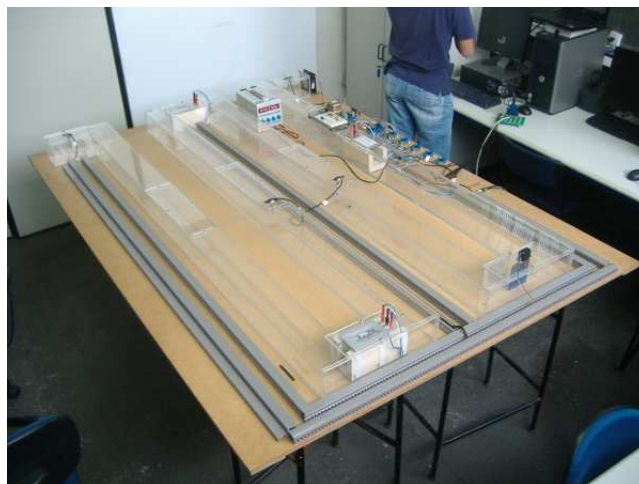


Figura 4.2: Visão Geral do Protótipo

O sinais de tensão, entradas e saídas, provenientes dos circuitos eletrônicos instalados no sistema de aquecimento, bem como da placa de aquisição, caracterizam as variáveis de entrada e saída do processo da seguinte forma:

1. Variáveis de entrada:

- (a) Vazão volumétrica de ar controlada pela abertura do *damper*. Um sinal de tensão aplicado na placa controladora faz com que essa gere um sinal PWM com uma frequência de 330Hz. A faixa de tensão do sinal de entrada é de 1,25V a 2,75V, sendo que, com 1,25V, o *damper* está na posição que proporciona máxima vazão, ou seja, paralela ao fluxo de ar. Variando o nível de tensão até o valor de 2,75V, a abertura do *damper* é variada gradualmente atingindo a posição de bloqueio do fluxo de ar, ou seja, perpendicular ao fluxo de ar. A Figura 4.3(a), ilustra o *damper* instalado na Seção 3 do sistema.
- (b) Temperatura de entrada do ar. A temperatura do ar é alterada pela aplicação de um sinal de tensão na placa controladora na faixa de 0V a 5V. Este sinal faz com que a potência elétrica aplicada nas resistências varie de 0W a 1400W. A Figura 4.3(b), ilustra o isolamento térmico do atuador de aquecimento instalado na Seção 5 do sistema.



(a) *Damper* para controle da vazão volumétrica de ar. (b) Detalhe da Seção 5. Isolamento térmico do atuador de aquecimento.

Figura 4.3: Detalhes das Seções 3 e 5

2. Variáveis de saída:

- (a) Temperatura do ar em cada seção. Nas seções de trabalho estão instalados os sensores de temperatura *LM35*. O sinal de tensão proveniente desses sensores varia na faixa de 0V a 1V, aplicado diretamente na placa de aquisição de dados. O projeto da planta determina a operação do protótipo a partir da temperatura ambiente. Nos testes de calibração estática, partiu-se da temperatura ambiente, 22,35°C, em que a média dos

sinais de saída dos sensores foi de 0,22V, e variou-se continuamente a temperatura até que o valor de 0,69V fosse atingido pelas saídas dos sensores, correspondendo à 71,7°C. A Figura 4.4, ilustra o ventilador e o sensor de temperatura instalados na Seção 1 do sistema.



Figura 4.4: Entrada do sistema, onde estão instalados o ventilador e sensor de temperatura.

Os valores das temperaturas, coletados nas seções 4, 6 e 8, têm como objetivo a realimentação de estados, como exposto em (CHU; SU; HU, 1993) e (CHU, 1995). Nas seções que seguem, são detalhados os funcionamentos dos circuitos eletrônicos para controle da vazão volumétrica (abertura do *dampers*), controle da temperatura do ar e aquisição dos sinais dos sensores de temperatura. Em seguida, são apresentados os procedimentos de calibração estática e dinâmica dos sensores.

4.3 Descrição dos Circuitos

Para prover a operação do sistema de aquecimento de ar por meio de um sistema computacional, utilizou-se o programa Labview versão 8.2, uma placa de aquisição de dados da *National Instruments* modelo PCI-6229. Veja na Figura 4.5 a interface do programa. Essa interface é provisória e foi desenvolvida pelo aluno de graduação do curso Engenharia Mecatrônica (CEFET-MG-*Campus* V-Divinópolis) Nelson de Figueiredo Barroso, bolsista do Laboratório de Sinais e Sistemas. Foram desenvolvidos também 4 circuitos eletrônicos distintos, a saber:

1. Fonte de alimentação com 1 entrada AC 127V. Saídas: +/-5V e sinal senoidal para o circuito de sincronismo com a rede AC.
2. Circuito de sincronismo com a rede para disparo dos triacs;
3. Circuito de acionamento dos atuadores e interface com o computador;

4. Circuito de potência para acionamentos das resistências.

Em particular, o circuito de acionamento dos atuadores e interface com a placa de aquisição de dados instalada no computador, aqui chamado de circuito de controle, tem um papel fundamental no funcionamento do sistema. É esse circuito de controle que faz a interface com a placa de aquisição de dados e os circuitos de potência, recebendo os níveis de tensão analógicos de controle e processando essas informações conforme o canal selecionado. A descrição do funcionamento de cada circuito é apresentada nas seções que se seguem.

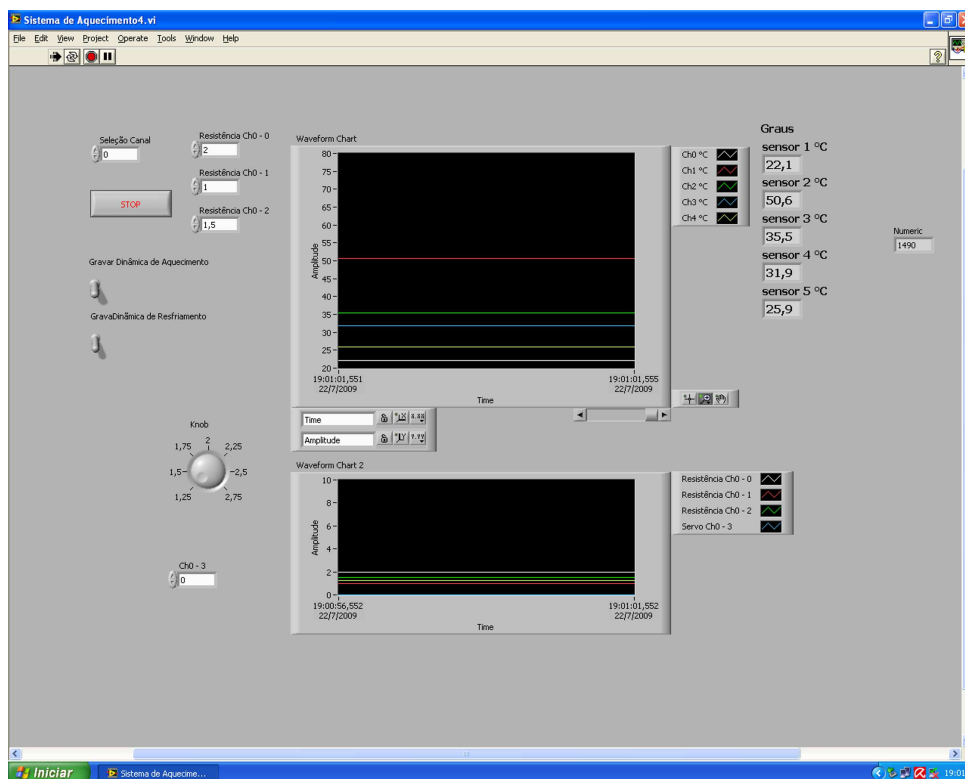


Figura 4.5: Tela do Programa de Coleta de Dados

4.3.1 Circuito da Fonte de Alimentação

A fonte de alimentação é do tipo linear, alimentada por uma tensão AC 127V. Para fornecer a alimentação adequada à todos os circuitos da planta, foram estabelecidas as seguintes saídas:

1. 1 saída de 5V positiva com capacidade de fornecer até 3A;
2. 1 saída de 5V negativa com capacidade de fornecer até 1A;
3. 1 saída de sinal de referência AC, proveniente do secundário do transformador.

O diagrama elétrico desse circuito pode ser visto na Figura A.1 Por meio desse diagrama, pode-se observar que a saída positiva é regulada pelo LM350 (CI U1) e o nível de tensão da

saída é ajustado pelo resistor variável P1. Dessa maneira, consegue-se um nível de tensão de saída entre 1,2V e 12V. Para os circuitos da planta em questão, fixou-se a saída em 5V. Por outro lado, a saída negativa é regulada pelo LM7905 (CI U2) e o nível de tensão da saída é fixa em -5V, não podendo ser ajustada nessa configuração.

4.3.2 Circuito de Sincronismo com a Rede Elétrica

O diagrama do circuito de sincronismo com a rede elétrica pode ser visto na Figura A.2. A função desse circuito é detectar a passagem da tensão senoidal da rede elétrica por zero volts e gerar um pulso de sincronismo. Nesse circuito é utilizado um comparador de tensão do CI (LM339). No comparador, a entrada não inversora, pino 5 do LM339, recebe uma tensão de referência de 0,4V. A entrada inversora, pino 4 do LM339, recebe uma amostra da tensão senoidal AC com amplitude de 12V, proveniente do circuito da fonte de alimentação. Quando o nível de tensão da entrada inversora for menor que o sinal de referência, correspondendo aproximadamente na tensão da rede à 4,2V, o comparador leva sua saída para o nível de saturação, no caso 5V, permanecendo assim até que a tensão da entrada inversora seja maior que a referência. Assim, é gerada um forma onda retangular com período igual ao da rede elétrica, tendo a duração de seu nível alto o tempo de meio período. Esse sinal de sincronismo é aplicado ao microcontrolador para o disparo adequado dos tiristores. Esse circuito foi implementado em *proto-board*.

4.3.3 Circuito de Controle

O diagrama elétrico desse circuito pode ser visto Figura A.3 O circuito de controle é responsável pela interface com o computador, processamento adequado dos sinais de controle e comando das placas de potência dos atuadores. Esse circuito pode operar tanto no modo manual como automático, selecionado por meio da chave CH6. No modo manual, o usuário seleciona o canal que deseja operar por meio das chaves CH1, CH2 e CH3, posicionando essas em um valor binário que corresponde ao canal desejado. Veja na Tabela 4.1 os códigos binários e seus respectivos canais e funções.

Código	Canal	Função
000	0	Pulso de disparo AC 1
001	1	Pulso de disparo AC 2
010	2	Pulso de disparo AC 3
011	3	Pulso de disparo AC 4
000	4	PWM 1
101	5	PWM 2
110	6	PWM 3
111	7	PWM 4

Tabela 4.1: Código Binário dos Canais e suas Funções

Uma vez selecionado o canal, o usuário altera o valor do sinal de controle por meio do potenciômetro POT. O modo manual foi implementado com o intuito de efetuar testes na planta e averiguar o correto funcionamento de todos os atuadores. No modo automático, tanto o código do canal quanto o sinal de controle são recebidos por meio do conector CON2, conectado ao computador. Veja na Tabela 4.2 a pinagem do conector CON2 e suas respectivas funções.

Pino	Função
01	Bit 0 do código de seleção do canal
02	Bit 1 do código de seleção do canal
03	Bit 2 do código de seleção do canal
04	Reservado para futura implementação
05	Sinal analógico de controle
06	GND
07	GND
08	GND
09	GND

Tabela 4.2: Pinos do Conector CON2 e suas Funções

No conector CON1, são ligados os terminais da fonte e o sinal de sincronismo com a rede, proveniente do circuito de sincronismo. O microcontrolador (U1) utilizado para este projeto foi o PIC18F452, sendo seu barramento de dados de 8 bits e o barramento de instruções de 16 bits. Foram utilizadas as seguintes estruturas internas desse microcontrolador: Gerenciador de Interrupções, Timer0, Conversor A/D para leitura de sinais analógicos e PLL para aumento do *clock* externo, o qual é gerado por um cristal de 10MHz. As portas de I/O foram configuradas conforme a necessidade do projeto. Veja a Figura A.3 e a listagem do programa na Seção B.1. O microcontrolador U1 é responsável pelo processamento dos sinais de controle e das saídas de comando para as placas de potência dos atuadores. Esse processamento se dá de seguinte forma:

1. *Processamento dos sinais de controle e comando de potência AC*: Nesse modo, o microcontrolador lê o sinal analógico de controle e faz uma correspondência entre o período da senóide da rede elétrica e o valor da entrada analógica. Dessa forma, o início da senóide

(ângulo de fase 0 rad) corresponde a 0V do sinal analógico de controle, e o término do semiciclo da senóide (ângulo de fase $\pi\text{ rad}$) corresponde a 5V do sinal analógico de controle. Essa relação é linear em fase, mas não em tensão. A relação *Tensão x Potência* não foi levantada neste trabalho. O sinal de sincronismo, durante a borda de subida, gera uma interrupção no microcontrolador para que o seu temporizador interno seja disparado em sincronismo com o início da senóide da rede elétrica. Após o disparo do temporizador, o microcontrolador verifica se o valor do temporizador é igual ao valor de controle, e caso afirmativo, o microcontrolador gera um pulso de disparo para o circuito de potência correspondente a um dos canais AC previamente selecionado. Esse processamento se repete a cada semi-ciclo senoidal e de forma independente para os canais de 0 a 3 (saídas AC1, AC2, AC3, AC4). A Figura 4.6 ilustra a saída de pulso para disparo dos tiristores.

2. *Processamento dos sinais de controle e comando PWM*: Os sinais de comando PWM não necessitam estarem em sincronismo com a rede. Para processar os sinais de controle para o PWM, o microcontrolador lê o sinal analógico de controle e faz uma correspondência entre o período do PWM e o valor da entrada analógica, ou seja, 0V corresponde a um tempo de nível alto do PWM igual a zero, e 5V corresponde a um tempo de nível alto do PWM igual ao seu período. No início do processo, o canal de PWM pré-selecionado é levado ao nível alto (5V) até que o valor do temporizador interno seja igual ao valor de controle proveniente da entrada analógica, fazendo com que, neste instante, o canal de PWM pré-selecionado vá para nível baixo (0V). A Figura 4.7 ilustra a forma de onda de uma das saídas PWM ajustada para um comando de 50%.

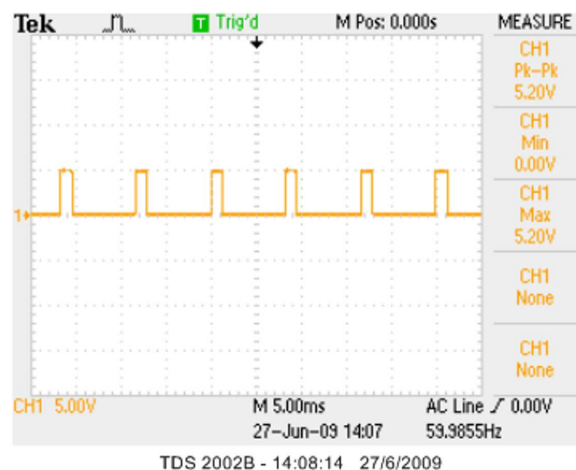


Figura 4.6: Saída de Pulso para Disparo dos Tiristores

Nos dois casos, processamento dos sinais de controle e comando de potência AC e processamento dos sinais de controle e comando PWM, o microcontrolador utiliza o mesmo temporizador diferenciando apenas as frações de tempo. Os valores dos sinais de controle são armazenados internamente no microcontrolador para que seja possível a troca e ajuste de canal sem que isto

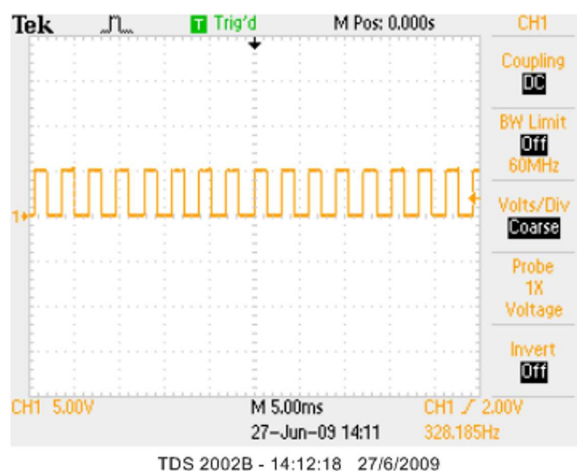


Figura 4.7: Saída PWM com Duty Cycle de 50%

afete o estado dos demais. O microcontrolador ainda é responsável por mostrar no *display* o canal selecionado e comutar entre os modos automático e manual de acordo com a posição da chave CH6. A programação feita no microcontrolador encontra-se listada no Anexo B.1

4.3.4 Circuito de Potência AC

O diagrama elétrico desse circuito pode ser visto Figura na A.4. O circuito de potência consiste de dois triacs, U2 e U3 que são ativados simultaneamente por meio do pulso de disparo proveniente do circuito de controle. Cada triac tem a capacidade de fornecer uma corrente de 16V. A utilização de dois triacs se dá pelo fato de que a resistência utilizada como elemento aquecedor possui dois filamentos independentes, portanto optou-se por sua ligação em paralelo. Para o isolamento entre a etapa de potência e o microcontrolador, foram utilizados dois fotoacopladores, U1 e U4. A Figura 4.8 ilustra a forma de onda na saída do triac U2 disparado em um ângulo de fase $\frac{\pi}{2}$.

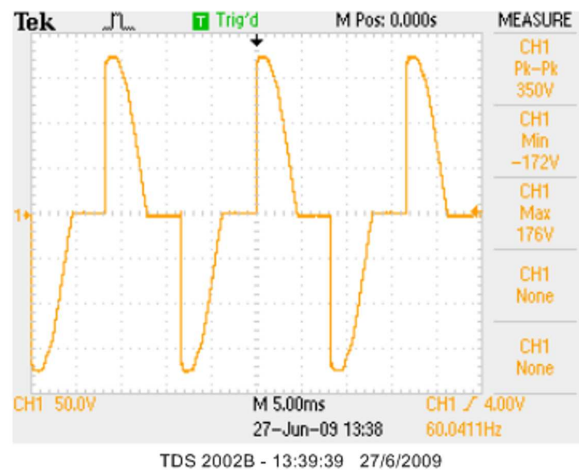


Figura 4.8: Saída do Triac U2 Disparado em um Ângulo de Fase $\frac{\pi}{2}$

4.3.5 Leitura do Sinal dos Sensores

A leitura dos sinais dos sensores (LM35) foi realizada diretamente pela placa de aquisição de dados. Foi utilizada uma fonte de alimentação de 5V independente dos outros circuitos para alimentação dos sensores. Após a coleta de dados para teste, observou-se que o sinal apresentava ruído e que esse provocava erros na aquisição dos dados. Para atenuar o efeito do ruído, foram colocados filtros RC nos terminais do bloco de aquisição de dados. Por meio de experimentos, pode-se avaliar que uma constante de tempo de 220ms para o filtro RC era satisfatória, escolhendo-se assim, os valores de $R=10K$ e $C=22\mu F$. A conexão feita, é apresentada no diagrama da Figura 4.9.

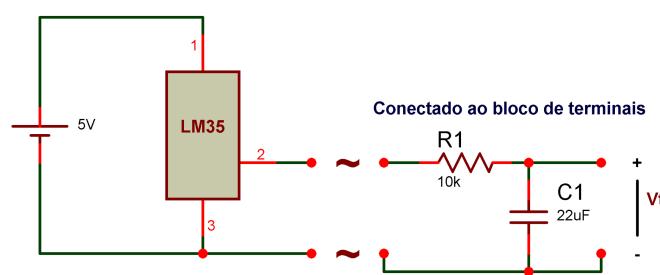


Figura 4.9: Conexão do Sensor LM35 à Placa de Aquisição de Dados

4.4 Calibração dos Sensores

A tarefa de calibração dos sensores foi dividida em duas etapas. Uma para a calibração estática e outra para a calibração dinâmica.

4.4.1 Calibração Estática

Na calibração estática foram coletadas 28 amostras de cada sensor em um ambiente de temperatura controlada, todos os sensores foram colocados em uma mesma seção da planta, no caso Seção 3. Para a temperatura de referência, foi utilizado um termômetro digital com termopar do tipo *K*. De posse dos pontos coletados, foi realizado um ajuste de curva por mínimos quadrados de forma a relacionar a temperatura medida com a tensão $v_t(t)$ na saída do sensor (Vt na Figura 4.9). Nesse caso tem-se: $T(v_t) = av_t + b$ em que a e b são os coeficientes a determinar no ajuste por mínimos quadrados. Os ajustes realizados são apresentados nas figuras 4.10 - 4.14, junto com as medições realizadas, a melhor reta ajustada no sentido dos mínimos quadrados e os limites para $\pm 3\sigma_a$ e $\pm 3\sigma_b$, que representam os intervalos de confiança de 99,7% para o modelo proposto. Veja o valor dos coeficientes dos polinômios correspondentes a cada sensor na Tabela 4.3 que inclui os desvios padrões para cada um dos coeficientes identificados. Esses desvios foram calculados como (DOEBELIN, 1990):

$$\sigma_a^2 = \frac{N\sigma_T^2}{N\sum v_t^2 - (\sum v_t)^2} \quad (4.1)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_T^2 \sum v_t^2}{N\sum v_t^2 - (\sum v_t)^2} \quad (4.2)$$

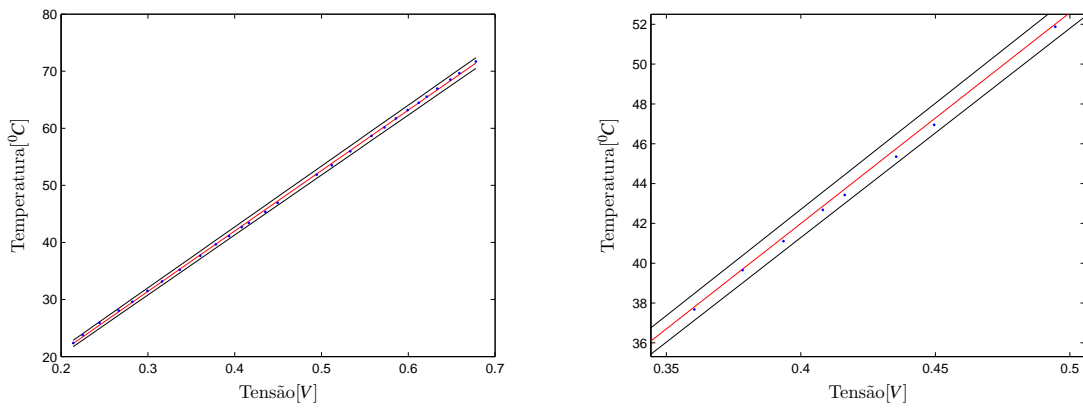
$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N} \sum (av_t + b - T)^2 \quad (4.3)$$

em que N é o numero de amostras.

Sensor	Coeficiente a	σ_a	Coeficiente b	σ_b
1	105.9096	0.2683	-0.3679	0.1281
2	104.0907	0.2137	0.1381	0.1028
3	102.6405	0.2056	-0.3350	0.1012
4	101.5722	0.1707	-0.1263	0.0845
5	101.9166	0.2019	-0.5153	0.1004

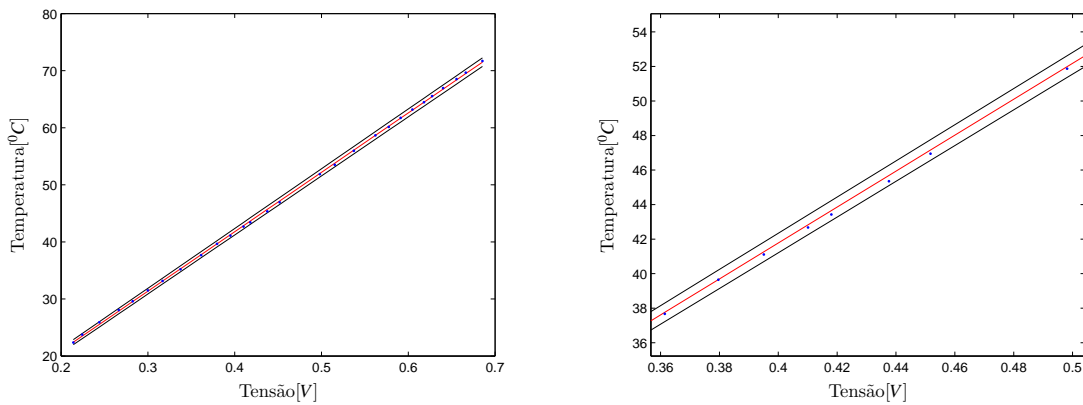
Tabela 4.3: Calibração dos Sensores ($T(v_t) = av_t + b$)

Conforme pode ser observado nas Figuras 4.10- 4.14, a estrutura linear proposta à calibração estática é bastante adequada e o intervalo de confiança de 99,7%, determinado pelos limites nos coeficientes a e b para o Sensor 1, é estreito.



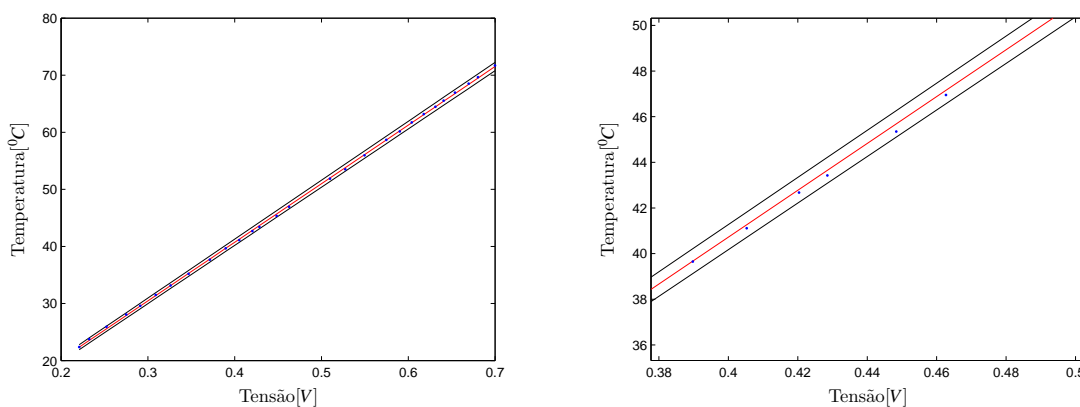
(a) Gráfico da Calibração Estática do Sensor 1 (b) Detalhe do Gráfico da Calibração Estática do Sensor 1

Figura 4.10: Gráfico da Calibração Estática do Sensor 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração



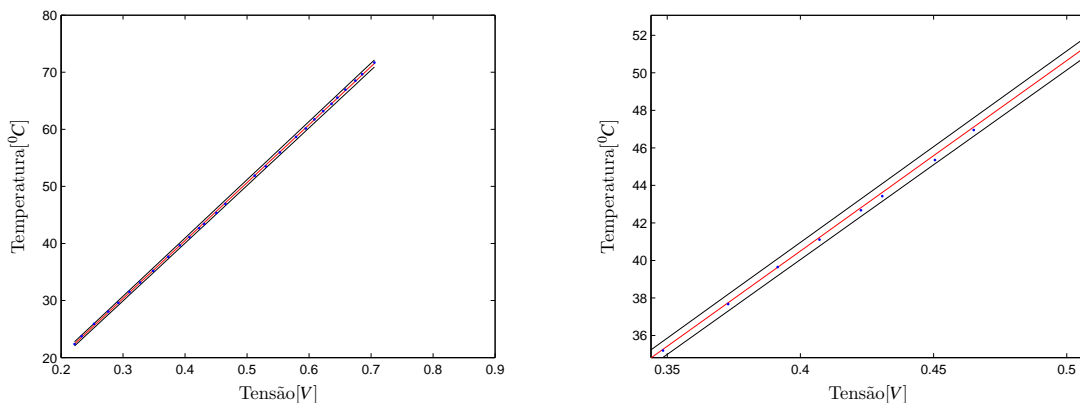
(a) Gráfico da Calibração Estática do Sensor 2 (b) Detalhe do Gráfico da Calibração Estática do Sensor 2

Figura 4.11: Gráfico da Calibração Estática do Sensor 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração



(a) Gráfico da Calibração Estática do Sensor 3 (b) Detalhe do Gráfico da Calibração Estática do Sensor 3

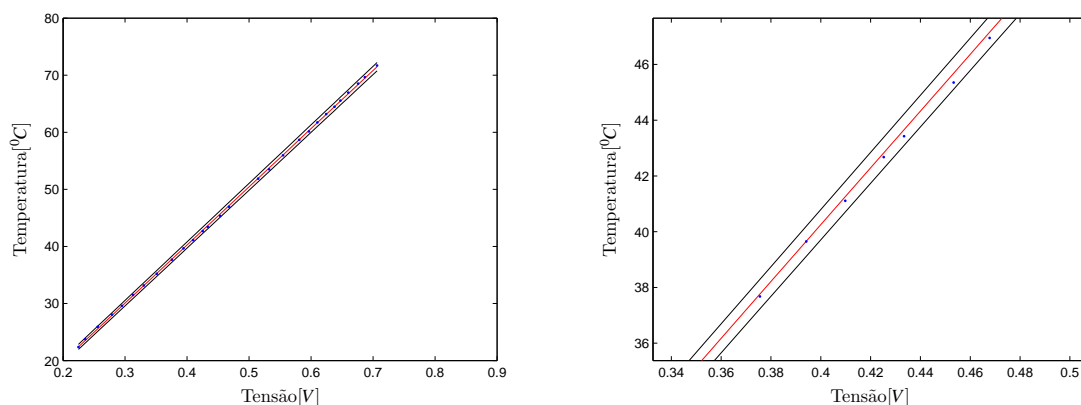
Figura 4.12: Gráfico da Calibração Estática do Sensor 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração



(a) Gráfico da Calibração Estática do Sensor 4 (b) Detalhe do Gráfico da Calibração Estática do Sensor 4

Figura 4.13: Gráfico da Calibração Estática do Sensor 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

Observando as Figuras 4.10- 4.14, pode-se calcular o erro de cada sensor dividindo por 2 o intervalo no eixo vertical entre os limites de confiança. Este erro é da ordem de $\pm 0,75^{\circ}C$ nas medições para os sensores 1-5.



(a) Gráfico da Calibração Estática do Sensor 5 (b) Detalhe do Gráfico da Calibração Estática do Sensor 5

Figura 4.14: Gráfico da Calibração Estática do Sensor 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

4.4.2 Calibração Dinâmica

As respostas temporais de aquecimento e de resfriamento dos sensores podem ser vistas nas figuras 4.15 - 4.19. O objetivo é estimar um modelo linear no domínio da frequência que seja simples para a resposta dinâmica dos sensores. O método utilizado para estimar os parâmetros, ganhos e constantes de tempos do modelo, é baseado na identificação desses, a partir da sua resposta à uma entrada em degrau, conhecido como método da Resposta Complementar (DOE-BELIN, 1990). Foram modelados apenas os sensores 3, 4 e 5, por estarem nas Seções de interesse para realimentação dos estados. O experimento foi realizado da seguinte forma: todos os sensores foram armazenados à temperatura ambiente e esperou-se até que os sensores e o sistema de aquecimento de ar atingissem a condição de equilíbrio. Ao atingir esse equilíbrio, o sensor foi inserido no interior do sistema de aquecimento de ar e aguardou-se até que esse estabilizasse a sua respectiva leitura. Em seguida, esse mesmo sensor foi retirado do sistema de aquecimento de ar e colocado em temperatura ambiente, caracterizando um degrau de resfriamento. Esse procedimento foi repetido três vezes para cada sensor. As temperaturas internas do sistema de aquecimento de ar em cada teste estão relacionadas na Tabela 4.4. Observe na Figura 4.15 que o gráfico de resfriamento apresenta um ponto espúrio que antecede o tempo de 100s. Esse ponto pode ter sido gerado por mau funcionamento da planta. Nesse mesmo gráfico, observa-se que os sensores apresentam uma temperatura final de resfriamento maior que a temperatura ambiente inicial. Isso é devido ao fato de que o experimento foi realizado em uma sala fechada sem corrente de ar para o meio externo, e o ar quente proveniente do sistema de aquecimento de ar causou uma perturbação no ambiente. Pode-se também observar na Figura 4.17, gráfico de resfriamento, após o tempo de 200s, uma tendência de aquecimento, isso é devido às oscilações da rede elétrica usada para acionar a planta. Essas oscilações causam a perda de sincronismo do circuito de controle acarretando o disparo eventual dos triacs.

Curva	Temperatura Ambiente	Temperatura interna do forno
...	21,9°C	30,7°C
---	21,9°C	53,9°C
-	22,7°C	65,9°C

Tabela 4.4: Tabela de Temperaturas do Experimento da Resposta Temporal dos Sensores

Os modelos obtidos em resposta ao degrau aplicado nas etapas de aquecimento são:

1. Funções de Transferência do Sensor 3, em resposta ao aquecimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,9994}{16,41s+1}, \text{ para } \Delta T = 8,765 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0002}{19,54s+1}, \text{ para } \Delta T = 31,75 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0000}{19,43s+1}, \text{ para } \Delta T = 44,65 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

2. Funções de Transferência do Sensor 4, em resposta ao aquecimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1,0011}{18,64s+1}, \text{ para } \Delta T = 8,853 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{0,9999}{21,17s+1}, \text{ para } \Delta T = 32,39 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0004}{19,36s+1}, \text{ para } \Delta T = 44,35 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

3. Funções de Transferência do Sensor 5, em resposta ao aquecimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,9997}{16,59s+1}, \text{ para } \Delta T = 8,617 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0001}{19,09s+1}, \text{ para } \Delta T = 32,01 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0000}{21,5s+1}, \text{ para } \Delta T = 44,44 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Os modelos obtidos em resposta ao degrau aplicado nas etapas de resfriamento são:

1. Funções de Transferência do Sensor 3, em resposta ao resfriamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1,0004}{46,83s+1}, \text{ para } \Delta T = -7,711 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{0,999}{52,4s+1}, \text{ para } \Delta T = -31,59 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{0,9999}{47,75s+1}, \text{ para } \Delta T = -42,94 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

2. Funções de Transferência do Sensor 4, em resposta ao resfriamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1,0004}{51,83s+1}, \text{ para } \Delta T = -8,791 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0000}{51,22s+1}, \text{ para } \Delta T = -31,55 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{1,0000}{47,78s+1}, \text{ para } \Delta T = -44,01 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

3. Funções de Transferência do Sensor 5, em resposta ao resfriamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,9999}{57,3s+1}, \text{ para } \Delta T = -8,71 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{0,9999}{50,29s+1}, \text{ para } \Delta T = -31,36 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \frac{0,9998}{50,29s+1}, \text{ para } \Delta T = -44,46 \text{ } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Pode-se notar que, tanto para as etapas de aquecimento quanto para as de resfriamento, os valores distintos de τ e K nas Funções de Transferência justificam a modelagem do sistema como um sistema incerto.

Devido ao procedimento experimental adotado, a dinâmica de resfriamento do *LM35* é mais rápida que a apresentada no texto, uma vez que esse sensor estará imerso em um fluido em movimento. Assim, os valores obtidos no resfriamento podem ser vistos como limites máximos de constantes de tempo em cada ponto de operação.

4.5 Resposta Temporal do Sistema de Aquecimento de Ar

As respostas temporais de aquecimento e resfriamento do sistema desenvolvido podem ser vistas nas figuras 4.20 e 4.22. Na Figura 4.21, é apresentado o gráfico do degrau aplicado na Seção 2 onde pode ser observado os seguintes atrasos: Seção 4, 3 segundos; Seção 6, 3 segundos; Seção 9, 13 segundos.

O experimento consistiu em aquecer o ar, por meio de degraus nos sinais de controle dos atuadores. A potência elétrica aplicada no atuador de aquecimento varia continuamente, de acordo com

$$P_{at} = \frac{V_s^2 \left[\frac{1}{\pi} (\pi - \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}) \right]}{11,52} W$$

em que P_{at} é a potência elétrica eficaz entregue ao atuador de aquecimento, V_s é a tensão eficaz da rede elétrica, φ é o ângulo de disparo dos tiristores, podendo variar de 0 à π (RASHID, 1999). Para cada incremento de 0,5V no sinal de controle, o ângulo de disparo dos tiristores, φ , sofre um decremento de $\frac{\pi}{10}$. O primeiro degrau foi de 1V (68W), e os seguintes ocorreram de 0,5V em 0,5V até 3,5V (1192W). Para esses testes, foi utilizado até 70% do sinal de controle, devido ao fato da rede de alimentação do laboratório não suportar a carga imposta pelos atuadores de aquecimento. Veja nas tabelas 4.5 e 4.6 o atraso das respostas aos degraus. No caso do resfriamento, na Seção 9 do sistema de aquecimento (Sensor 5), por meio dos dados levantados, não foi possível determinar o atraso, devido aos degraus de resfriamento aplicados nas seções anteriores. Os dados levantados mostram que o protótipo pode ter aplicação prática para testes de sistemas de controle com realimentação de estados com atrasos nos estados.

Sensor	Degrau na Seção 2	Degrau na Seção 5	Degrau na Seção 7
3	6s	—	—
4	22s	6s	—
5	46s	10s	7s

Tabela 4.5: Atraso de Resposta (Aquecimento)

Sensor	Degrau na Seção 2	Degrau na Seção 5	Degrau na Seção 7
3	17s	—	—
4	28s	8s	—
5	—	—	17s

Tabela 4.6: Atraso de Resposta (Resfriamento)

Visto que o comportamento temporal da planta desenvolvida nesse trabalho justifica a modelagem do sistema como um sistema incerto, essa poderá ser utilizada para implementação de controladores estudados no Capítulo 3 bem como os estudados no trabalho de (SIMEAO; MIRANDA; LEITE, 2008).

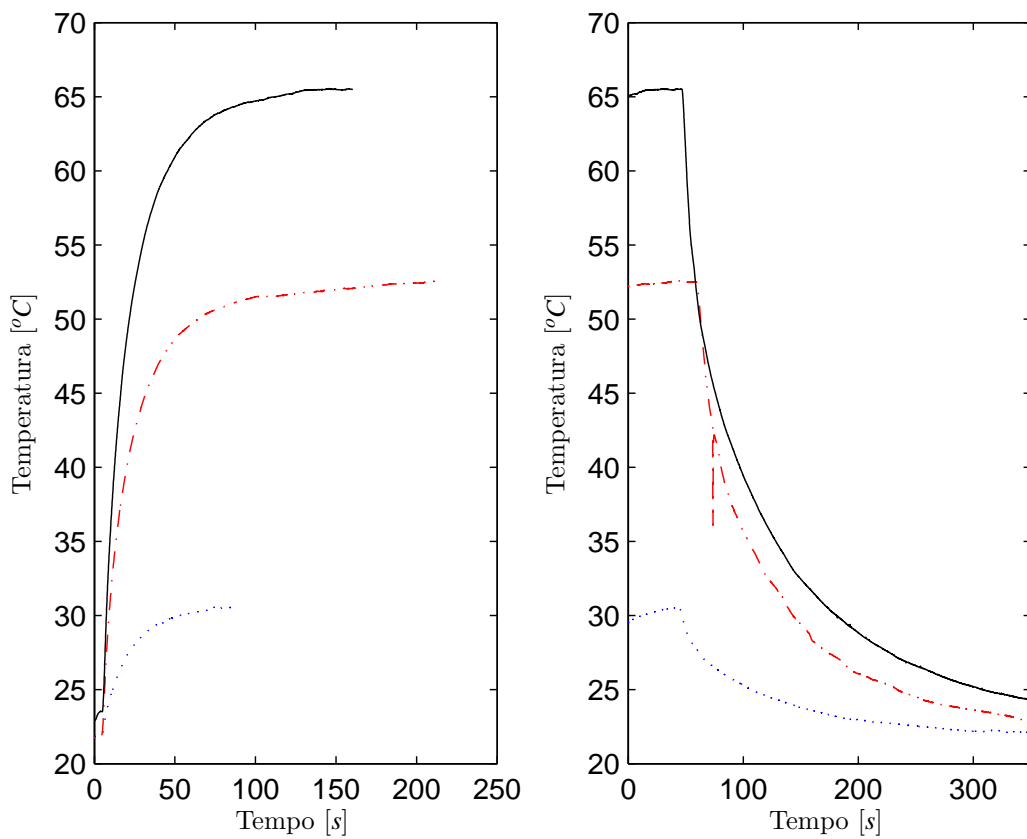


Figura 4.15: Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 1 para os 3 degraus: $\Delta T = 8,8^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = 32,0^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = 43,2^{\circ}C$ ($-$).

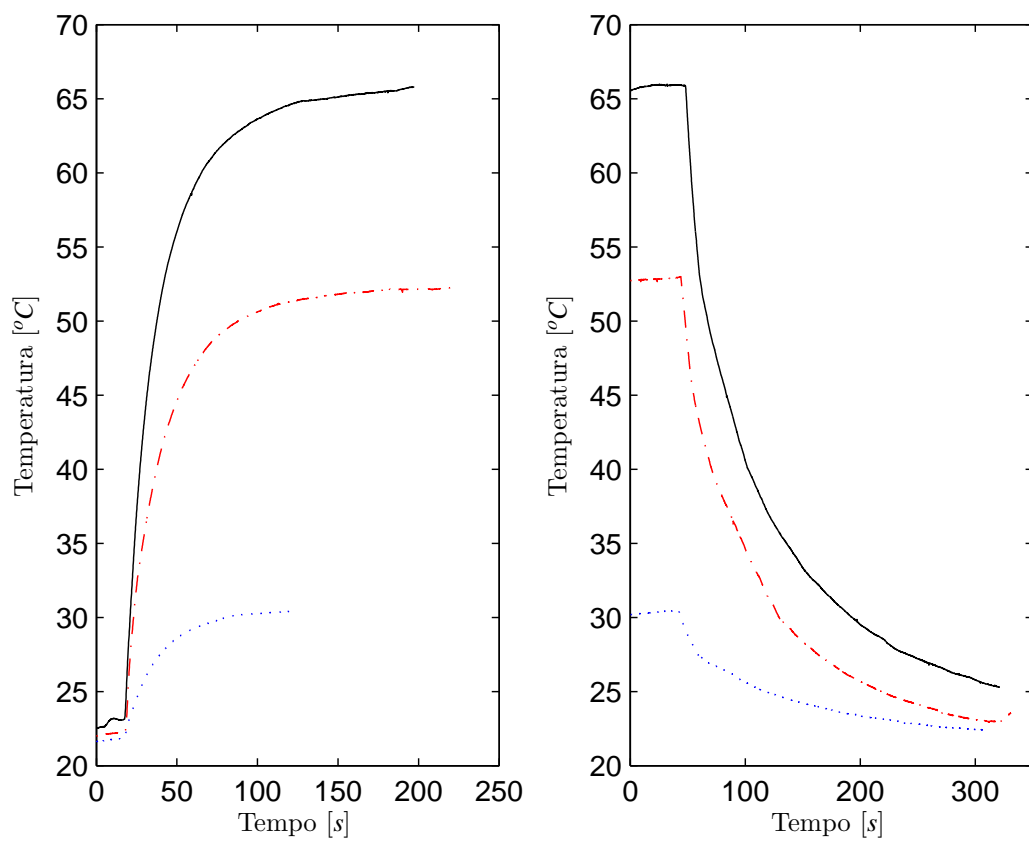


Figura 4.16: Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 2 para os 3 degraus: $\Delta T = 8,8^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = 32,0^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = 43,2^{\circ}C$ ($-$).

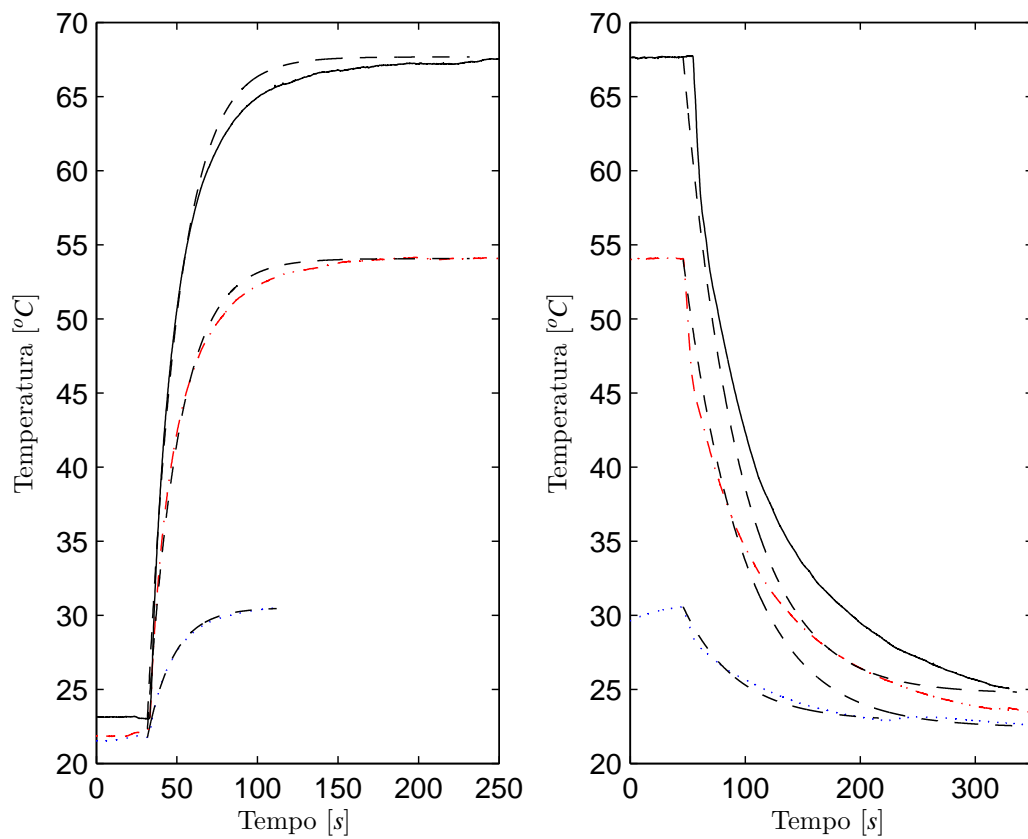


Figura 4.17: Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 3 e Resposta do Modelo Obtido (--) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,765^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = 31,75^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = 44,65^{\circ}C$ ($-$); Resfriamento: $\Delta T = -7,711^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = -31,59^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = -42,94^{\circ}C$ ($-$).

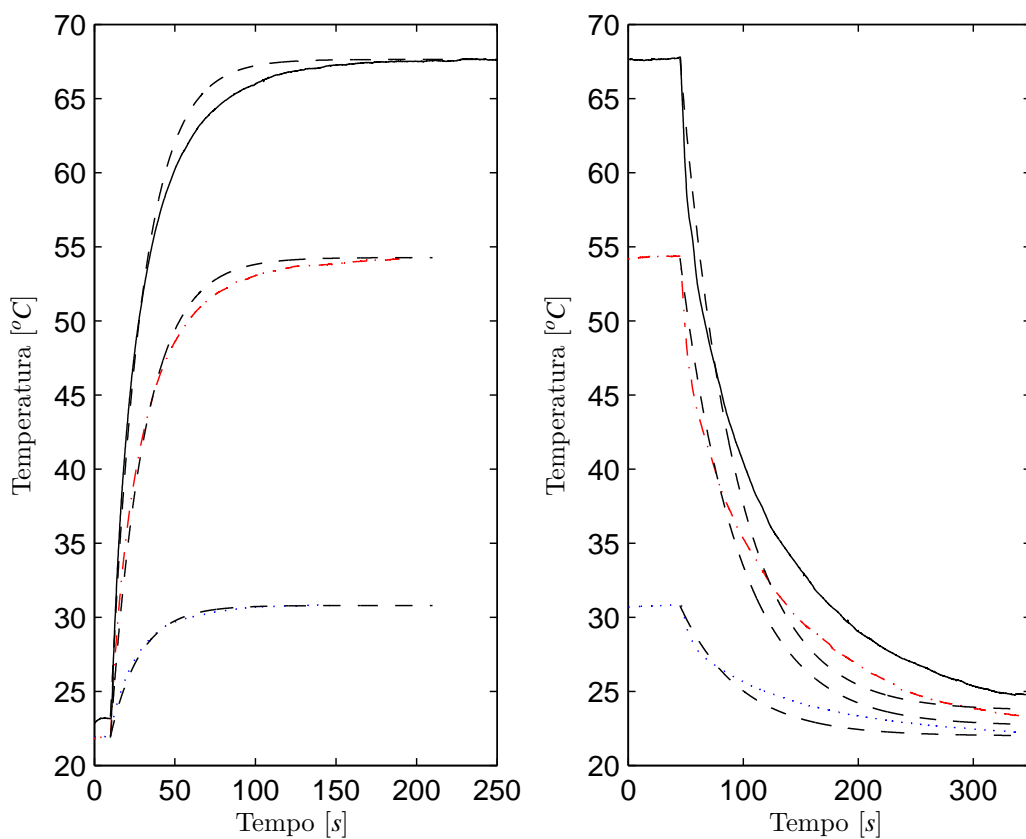


Figura 4.18: Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 4 e Resposta do Modelo Obtido (--) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,853^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = 32,39^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = 44,35^{\circ}C$ ($-$); Resfriamento: $\Delta T = -8,791^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = -31,55^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = -44,01^{\circ}C$ ($-$).

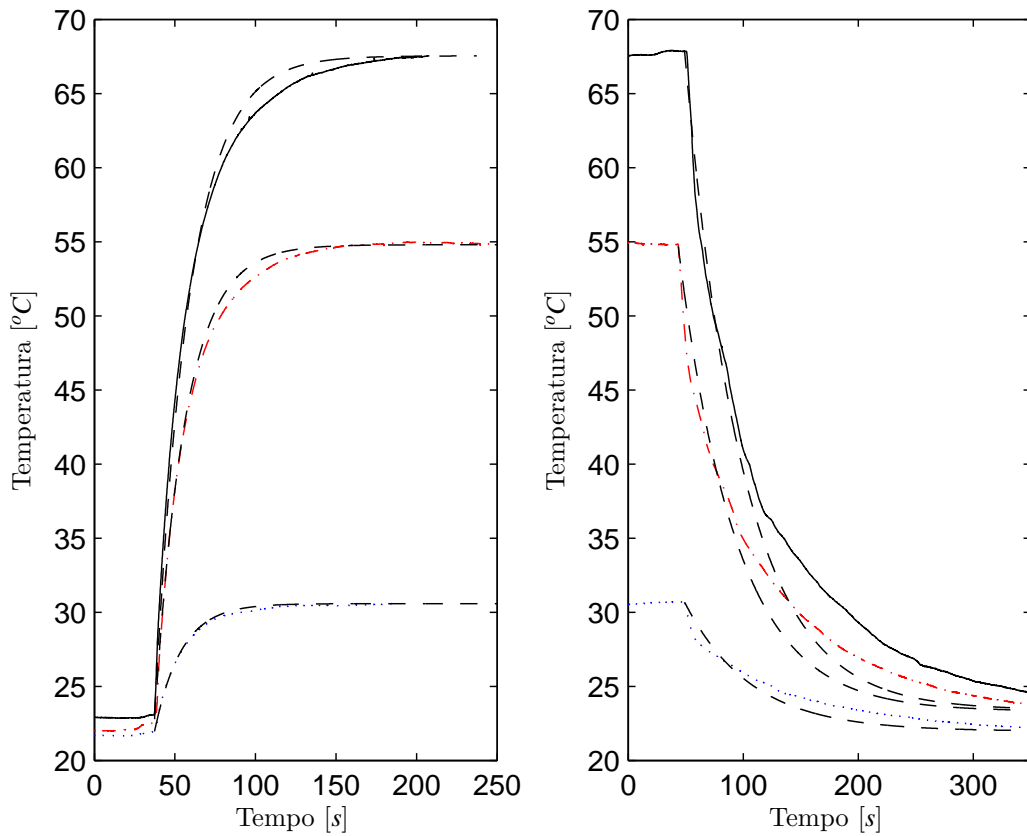


Figura 4.19: Gráficos Respectivos ao Aquecimento e Resfriamento da Resposta Temporal do Sensor 5 e Resposta do Modelo Obtido (- -) para os 3 degraus. Aquecimento: $\Delta T = 8,617^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = 32,01^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = 44,44^{\circ}C$ (-); Resfriamento: $\Delta T = -8,71^{\circ}C$ (\cdots), $\Delta T = -31,36^{\circ}C$ ($-\cdots-$), $\Delta T = -44,46^{\circ}C$ (-).

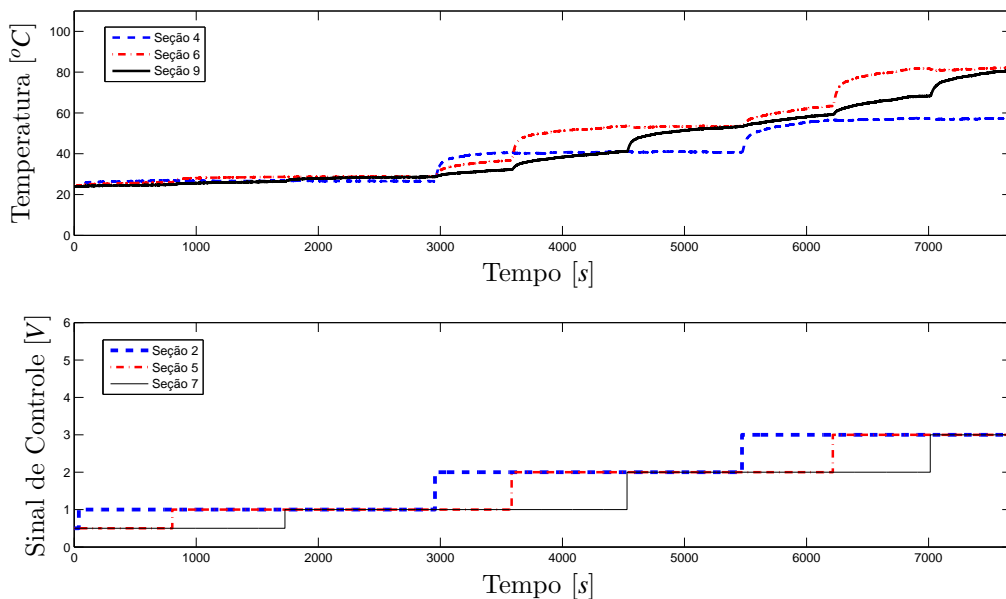


Figura 4.20: Resposta Temporal de Aquecimento do Forno

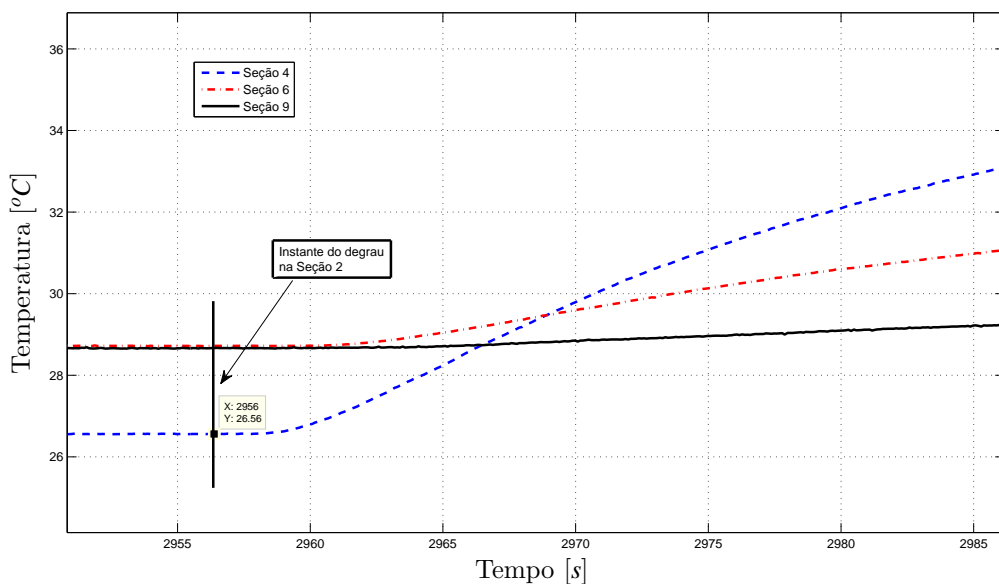


Figura 4.21: Detalhe do Gráfico da Resposta Temporal de Aquecimento do Sistema de Aquecimento, mostrando o instante do degrau na seção 2, e a resposta nas seções 4, 6 e 9.

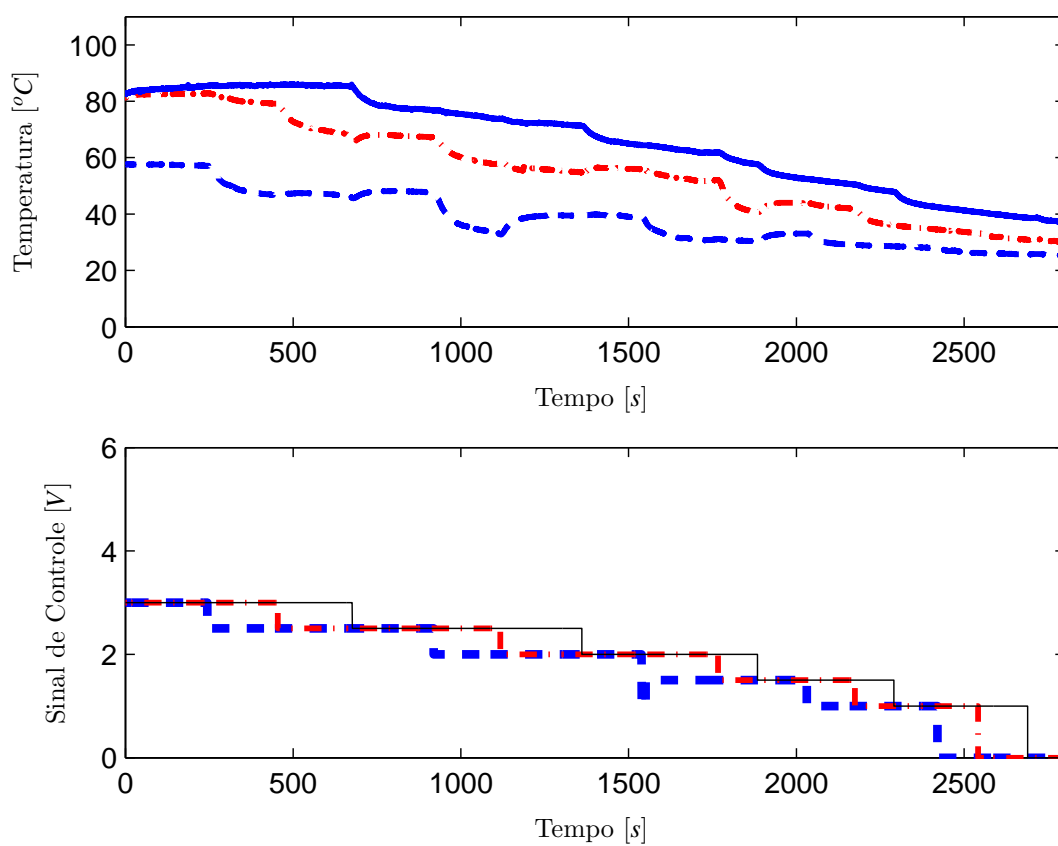


Figura 4.22: Resposta Temporal de Resfriamento do Forno

5 *Considerações Finais*

5.1 Conclusões

Nesse trabalho foi estudado um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro, para tratar problemas de análise de estabilidade e de controle de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados. A aplicação desses funcionais aliados ao uso do Lema de Finsler nos problemas estudados levou à uma redução do conservadorismo das condições de análise de estabilidade robusta e de síntese robusta. Essa redução de conservadorismo foi demonstrada formalmente e também por meio de exemplos numéricos. A maior complexidade numérica das condições estudadas é o custo, devido à redução do conservadorismo pela introdução do funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro e de matrizes extras em relação às LMIs correspondentes às condições em que se utiliza a abordagem quadrática com matrizes fixas e sem as matrizes extras como variáveis de folga. A redução do conservadorismo das condições ditas robustas fica mais evidente no contexto de sistemas chaveados do que se for utilizada uma abordagem baseada em matrizes constantes para os funcionais de Lyapunov-Krasovskii, isto é, fazendo-se $P_i = P$, $Q_i = Q$ em (3.49) e avaliando a LMI resultante para $i = 1, \dots, N$. As condições LMIs apresentadas neste trabalho podem ser resolvidas por outros *solvers* especializados como o *SeDuMi* (STURM, 1999), além do utilizado nesse trabalho.

O protótipo desenvolvido nesse trabalho apresentou um comportamento adequado para estudos de análise e avaliação de desempenho de controladores. Em especial, essa planta poderá ser usada para implementação de controladores estudados no Capítulo 2, e de maneira geral, suprir a carência na literatura de dados e aplicações práticas de sistemas de controle com realimentação de estados com atrasos nos estados. No contexto de análise de estabilidade e de controle de sistemas discretos no tempo com atrasos nos estados com abordagem convexa, foram publicados 2 trabalhos (MIRANDA; SIMEAO; LEITE, 2008) e (SIMEAO; MIRANDA; LEITE, 2008) no Congresso Brasileiro de Automática 2008 tendo o autor desta dissertação participado como co-autor.

5.2 Perspectivas

No desenvolvimento desse trabalho, alguns temas tornaram-se interessantes para trabalhos futuros, tais como:

1. Investigar o cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ , utilizando uma lei de controle dada por $u_k = Kx_k + K_d x_k - d_k$. Isso é ligeiramente diferente do que foi proposto em (MIRANDA; SIMEAO; LEITE, 2008);
2. Investigar condições convexas dependentes da taxa de variação do atraso como forma de reduzir o conservadorismo nas etapas de análise de estabilidade e síntese de controladores;
3. Investigar condições convexas dependentes de parâmetro em que as matrizes de folga são dependentes de parâmetro. Neste caso os controladores serão dependentes de parâmetros e pode-se pensar em leis do tipo LPV.

Para que a planta possa atender plenamente às necessidades das implementações, observaram-se as seguintes necessidades:

1. Obter um modelo mais completo para a planta, considerando ruídos, dinâmica dos atuadores e a dinâmica dos sensores na forma de espaço de estados $x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} + Bu_k$ como feito em (CHU; SU; HU, 1993);
2. Calibração estática e dinâmica dos atuadores;
3. Especificação e instalação de um sensor de vazão para coleta de dados;
4. Instalação de um conector para dar suporte aos cabos dos sensores;
5. Reavaliação dos circuitos para determinar a causa das oscilações nos disparos dos triacs;
6. Substituição do ventilador para obter um aumento total da vazão de ar obtendo assim uma redução do atraso;
7. Controle de velocidade de rotação do ventilador para alterar a vazão de ar e consequentemente variar os atrasos;
8. Dimensionamento e instalação de um medidor de vazão de ar.

Referências Bibliográficas

- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *J. Optim. Theory and Appl.*, v. 46, n. 4, p. 399–408, 1985.
- BHAYA, A. Enciclopédia de automática: Controle e automação. In: _____. 1. ed. [S.l.]: Editora Blucher, 2007. v. 2, cap. 3, p. 67–91.
- BOUKAS, E.-K. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability. *Math. Prob. in Eng.*, v. 2006, p. 1–10, January 2006.
- BOUKAS, E. K.; LIU, Z. K. *Deterministic and Stochastic time-delay systems*. Boston: Birkhäuser, 2002. (Control Engineering).
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. New York, NY: Oxford University Press, 1999.
- CHEN, W.-H.; GUAN, Z.-H.; LU, X. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. *IEE Proc. — Contr. Theory and Appl.*, v. 150, n. 4, p. 412–416, 2003.
- CHU, J. Application of a discrete optimal tracking controller to an industrial electric heater with pure delays. *J. Process Contr.*, v. 5, n. 1, p. 3–8, 1995.
- CHU, J.; SU, H.; HU, X. A time-delay control algorithm for an industrial electric heater. *J. Process Contr.*, v. 3, n. 4, p. 219–224, 1993.
- DOEBELIN, E. O. *Measurement Systems, Application and Design*. 4nd. ed. [S.l.]: McGRAW-HILL International Editions, 1990. (Mechanical Engineering).
- El'sgol'ts, L. E. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1966.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay dependent \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete delay system. *European J. Contr.*, v. 11, n. 1, p. 29–37, 2005.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay system. *Int. J. Contr.*, v. 78, n. 4, p. 235–246, March 2005.
- GAHINET, P. et al. *LMI Control Toolbox User's Guide*. [S.l.]: The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- GAO, H.; CHEN, T. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 52, n. 2, p. 328–334, February 2007.
- GHIGGI, I. et al. Estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores. Congresso Brasileiro de Automática 2008. 2008.

- GOMES DA SILVA JR., J. M.; LEITE, V. J. S. Enciclopédia de automática – controle & automação. In: _____. [S.l.]: Editora Blücher, 2007. cap. Sistemas lineares com atrasos de tempo.
- GU, K.; KHARITONOV, V. L.; CHEN, J. *Stability of Time-delay Systems*. Boston: Birkhäuser, 2003. (Control Engineering).
- HALE, J. *Theory of Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- HALE, J.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- HONG, T.; YANWU, H.; XIAOMEI, Z. Robust stabilization and \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time system with time-varying delays. *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, 2007.
- HU, H.; WANG, Z. *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback*. New York, USA: Springer-Verlag, 2002.
- JUN, X.; YIMIN, A. A new result on robust stability of discrete-time systems with polytopic uncertainties and time-varying state delay. *Proceedings of the 27rd Chinese Control Conference*, July 2008.
- KAPILA, V.; HADDAD, W. M. Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, v. 34, n. 9, p. 1141–1144, 1998.
- KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1999. (Mathematics and Its Applications).
- KRASOVSKII, N. N.; BRENNER, J. L. *Stability of Motion*. California, USA: Stanford University Press, 1963.
- LEITE, V. J. S. *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Tese (Tese de doutorado) — UNICAMP, Campinas (SP), Brasil, Agosto 2005.
- LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach. *Math. Prob. in Eng.*, p. 1–15, 2008.
- LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach. *Math. Prob. in Eng.*, 2008. Doi:10.1155/2008/875609.
- LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Stabilization of discrete time-varying delay systems: a convex parameter dependent approach. In: *Proc. 2008 Amer. Control Conf.* Seattle: [s.n.], 2008.
- LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Stabilization of switched discrete-time systems with time-varying delay. In: *Proc. 17th IFAC World Congr.* Seul: [s.n.], 2008. Aceito para publicação.
- LEITE, V. J. S. et al. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *SBA Cont. & Autom.*, v. 15, n. 1, p. 24–40, Janeiro/Março 2004.
- LEITE, V. J. S. et al. Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo. *SBA Cont. & Autom.*, v. 18, n. 4, p. 434–446, 2007.
- LEITE, V. J. S.; TARBOURIECH, S.; PERES, P. L. D. Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos com atraso nos estados: condições LMI independentes do atraso. In: *XV CBA*. Gramado, RS: [s.n.], 2004.

- LEITE, V. J. S.; TARBOURIECH, S.; PERES, P. L. D. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In: *Proc. 2004 Amer. Control Conf.* [S.l.: s.n.], 2004. p. 2870–2875.
- LI, X.; de Souza, C. E. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 42, n. 8, p. 1144–1148, 1997.
- LI, X.; SOUZA, C. E. de. LMI approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems. In: *Proc. 34th IEEE Conf. Decision Contr.* [S.l.: s.n.], 1995. p. 3614–3619.
- LIU, X. G. et al. Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay. *IEE Proc. — Contr. Theory and Appl.*, v. 153, n. 6, p. 689–702, November 2006.
- MACDONALD, N. *Biological delay systems: linear stability theory*. New York, USA: Cambridge University Press, 1989.
- MAHMOUD, M. S. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*. New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. (Control Engineering Series).
- MAHMOUD, M. S.; SUNNI, F. M.; SHI, Y. Switched discrete-time delay systems: delay-dependent analysis and synthesis. *Circuits Syst Process*, v. 28, p. 735–761, 2009.
- MICHIELS, W.; NICULESCU, S.-I. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems*. Philadelphia, USA: SIAM, 2007.
- MIRANDA, M. . F.; LEITE, V. J. S. Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes. In: *Anais do VIII Simp. Bras. de Aut. Inteligente*. Florianópolis, Brasil: [s.n.], 2007.
- MIRANDA, M. F.; LEITE, V. J. S. Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes. *SBA Cont. & Autom.*, 2007. Aceito para publicação em 12/05/2008.
- MIRANDA, M. F.; SIMEAO, J. D.; LEITE, V. J. S. Abordagem convexa para o controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos incertos com atraso variante no tempo. *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- MONTAGNER, V. F. *Estabilidade e controle de sistemas lineares variantes o tempo e de sistemas chaveados lineares*. Tese (Tese de doutorado) — UNICAMP, Campinas (SP), Brasil, Fevereiro 2005.
- MONTAGNER, V. F. et al. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. In: *Proc. 2005 Amer. Control Conf.* Portland, OR: [s.n.], 2005.
- NICULESCU, S.-I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. London: Springer-Verlag, 2001. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 269).
- NICULESCU, S.-I.; GU, K. (Ed.). *Advances in Time-Delay Systems*. [S.l.]: Springer; 1 edition (June 14, 2004), 2004. ISBN 978-3540208907.
- NORMEY-RICO, J. E.; CAMACHO, E. F. *Control of dead-time processes*. New York, USA: Cambridge University Press, 2007.
- OLGAC, N. Editorial: A message from the special issue editor. *J. Dyna. Syst., Measure., Contr. — Trans. ASME*, v. 125, n. 2, p. 157, June 2003.

- RASHID, M. H. *Eletrônica de Potência. Circuitos, Dispositivos e Aplicações*. [S.l.]: Makron Books, 1999.
- SILVA, G. J.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S. P. *PID Controllers for Time Delay Systems*. Boston: Birkhäuser, 2005.
- SIMEAO, J. D.; MIRANDA, M. F.; LEITE, V. J. S. Análise e síntese robustas para sistemas discretos variantes no tempo dependentes da taxa de variação do atraso. *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- SONG, S. H.; KIM, J. K. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, v. 34, n. 1, p. 137–139, 1998.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, p. 625–653, 1999. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- TEIXEIRA, B. O. S.; JOTA, F. G.; TEIXEIRA, M. H. Modelagem, controle e otimização do processo dos fornos de reaquecimento de placas. *SBA Cont. & Autom.*, scielo, v. 18, p. 67 – 93, 03 2007. ISSN 0103-1759.
- VALMÓRBIDA, G.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. Condições LMI do teorema do ganho pequeno escalonado para análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso. *SBA Cont. & Autom.*, v. 18, n. 4, p. 447–458, 2007.
- WANG, H.-J. et al. Delay-dependent robust control for uncertain discrete singular systems with time-varying delay. *Journal of Zhejiang University*, p. 1034–1042, 2008.
- WANG, Q.-G.; LEE, T. H.; TAN, K. K. *Finite-Spectrum Assignment for Time-Delay Systems*. London: Springer-Verlag, 1998. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 239).
- ZHANG, H.; XIE, L. *Control and Estimation of Systems with Input/Output Delays*. New York, USA: Springer-Verlag, 2007.
- ZHANG, L.; SHI, P.; BASIN, M. Robust stabilization for arbitrarily switched linear systems with time-varying delays and uncertainties. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- ZHONG, Q. C. *Robust Control of Time-delay Systems*. London: Springer-Verlag, 2006.
- ZHU, X.-L.; YANG, G.-H. Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. In: *Proc. 2008 Amer. Control Conf.* Seattle, WA, USA: AACC, 2008. p. 1644–1649.

ANEXO A – Diagramas Eléctricos

A.1 Diagrama do Circuito da Fonte de Alimentação

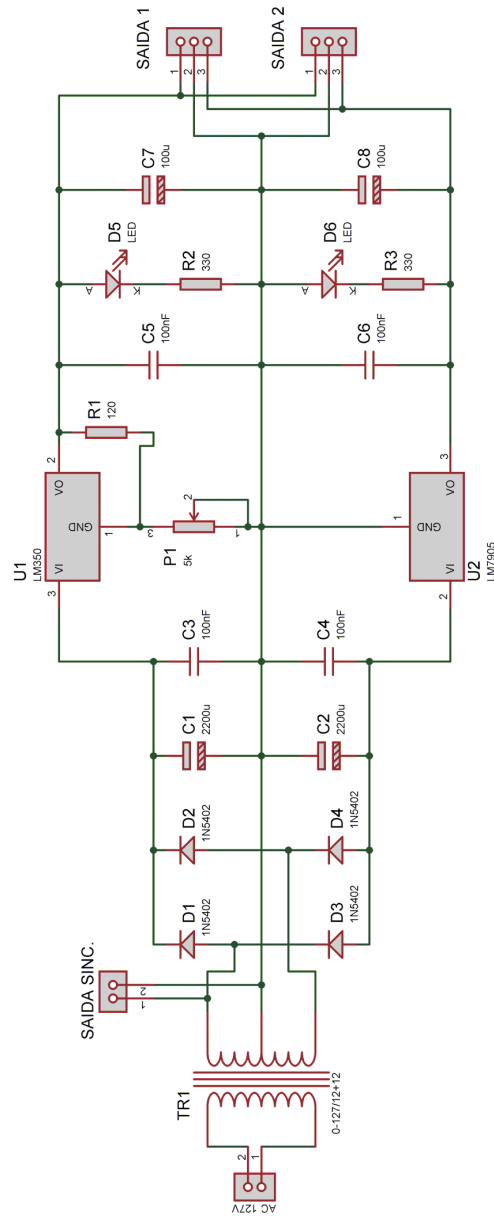


Figura A.1: Diagrama Elétrico da Fonte de Alimentação

A.2 Diagrama do Circuito de Sincronismo com a Rede

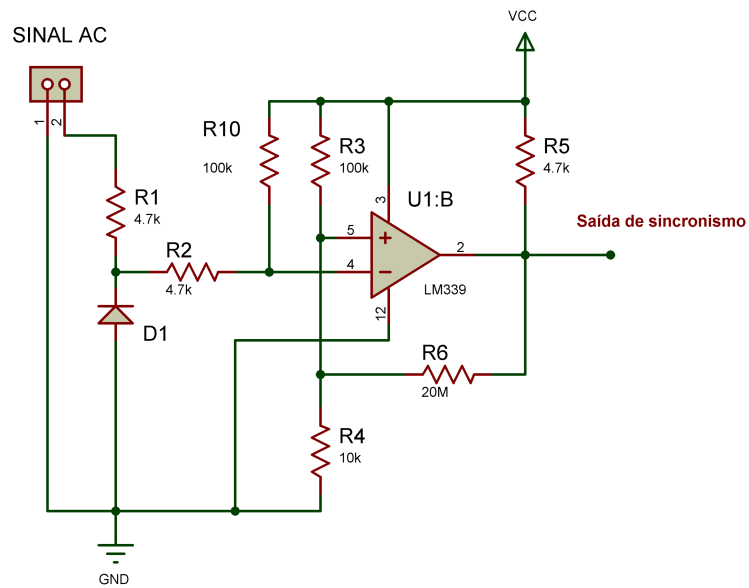


Figura A.2: Diagrama Elétrico do Circuito de Sincronismo

A.3 Diagrama do Circuito de Controle

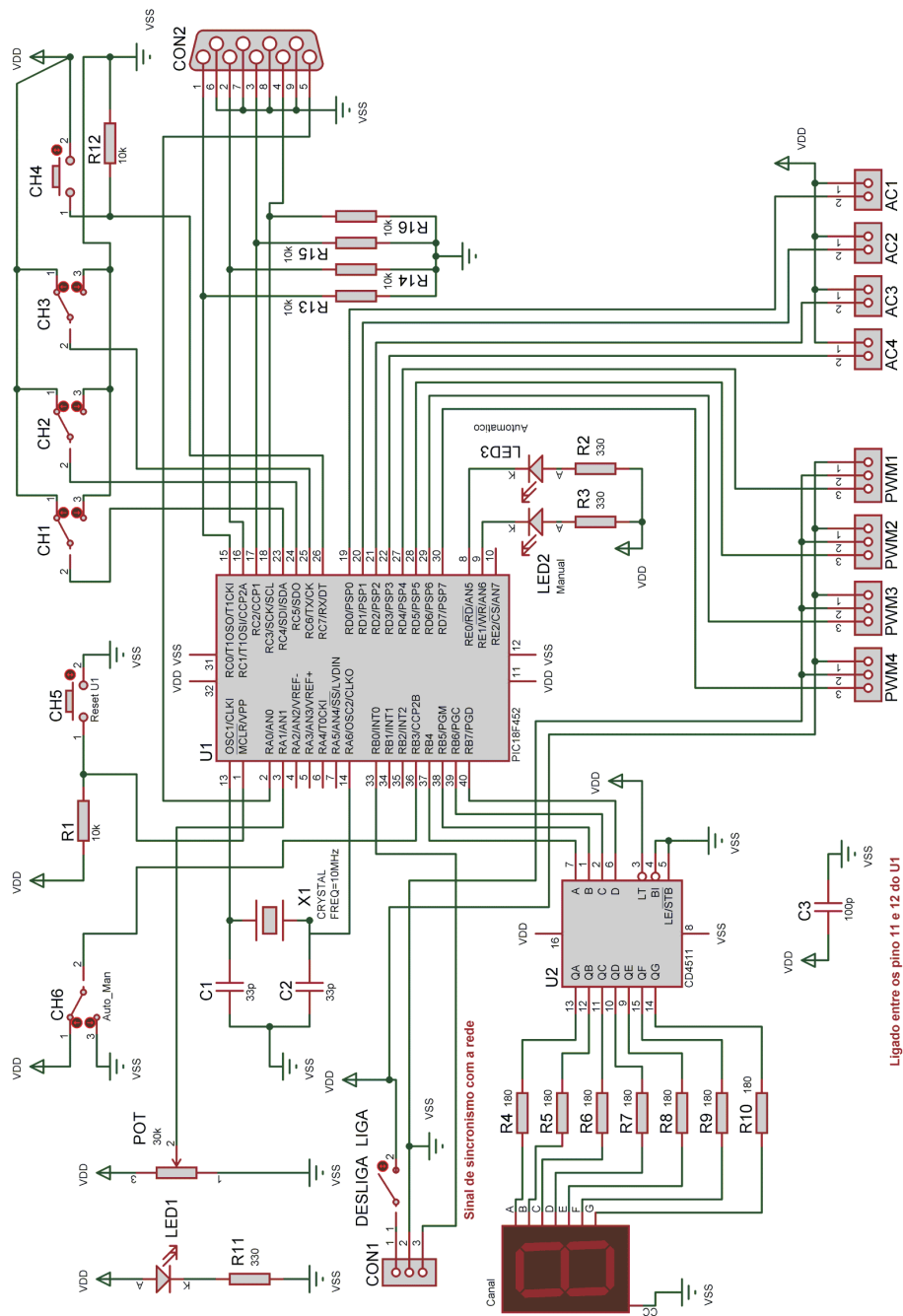


Figura A.3: Diagrama Elétrico do Circuito de Controle

A.4 Diagrama do Circuito de Potência AC

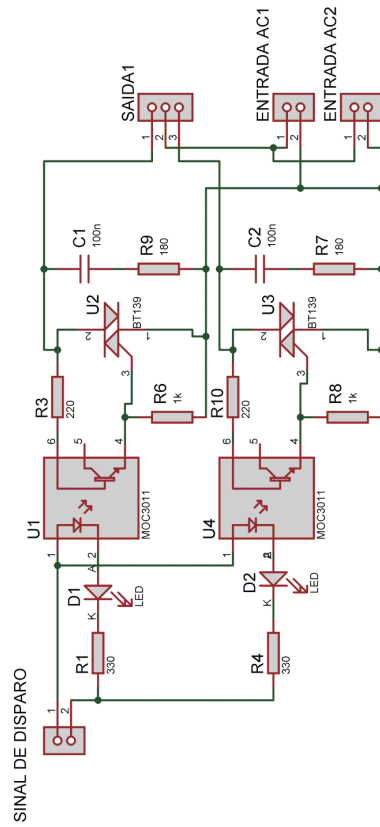


Figura A.4: Diagrama Elétrico do Circuito de Potência AC

ANEXO B – Programa do Microcontrolador

B.1 Listagem do Programa

Listing B.1: Programa em Linguagem C da Placa Controladora

```

1 #include <18F452.h>
2 #DEVICE ADC=10
3
4 #fuses H4, NOPROTECT, NOOSCSEN, BROWNOUT, NOWDT, PUT, NOSTVREN, BORV45,
   NOLVP, NOWRT, NOWRITD, NOWRITC, NOCPD, NOEBTR, NOEBTRB
5 #use delay(clock=10M) //Clock real será de 40MHz gerado pelo PLL interno
6
7 #define AUTOMATICO 0x0F
8
9 #priority INT_EXT,INT_TIMER0
10
11 //variáveis de controle
12 int1 controle_int = 1;
13 int1 modo_auto_man = 0;
14 int1 modo_man = 0;
15 int1 modo_auto = 1;
16 int8 estado_porta_D0 = 0;
17 int8 estado_porta_D1 = 0;
18 int8 estado_porta_D2 = 0;
19 int8 estado_porta_D3 = 0;
20 int1 estado_condicional_ac1 = 1;
21 int1 estado_condicional_ac2 = 1;
22 int1 estado_condicional_ac3 = 1;
23 int1 estado_condicional_ac4 = 1;
24 int8 saida = 0;
25 int16 valor_analogica[8] = {0,0,0,0,0,0,0,0};
26 int16 controle_pwm = 0;

```



```
27 int16 controle_ac = 0;
28 int16 analogica = 0;
29
30 /* Rotina da interrupção externa ativada pelo
31    sinal de sincronismo proveniente do circuito
32    de sincronismo.
33 */
34
35 #ANT_EXT
36 void isr ()
37 {
38     controle_ac = 0;
39
40     estado_porta_D0 = 0;
41     estado_porta_D1 = 0;
42     estado_porta_D2 = 0;
43     estado_porta_D3 = 0;
44
45     estado_condicional_ac1 = 1;
46     estado_condicional_ac2 = 1;
47     estado_condicional_ac3 = 1;
48     estado_condicional_ac4 = 1;
49
50     output_bit(PIN_D0,1);
51     output_bit(PIN_D1,1);
52     output_bit(PIN_D2,1);
53     output_bit(PIN_D3,1);
54
55     controle_int = controle_int ^ 1;
56
57     ext_int_edge(0,H_TO_L);
58
59     if(controle_int) ext_int_edge(0,L_TO_H);
60
61 }
62
63 /* Rotina da interrupção do Timer zero
64    para geração dos pulsos de disparo dos
65    triacs e sinal PWM. O valor da analogica é
66    comparado com a variável de controle.
67 */
68
69 #ANT_TIMER0
```

```
70 void interrupcao_timer0()
71 {
72
73     controle_pwm += 1;
74
75     controle_ac += 1;
76
77     if(controle_pwm >= valor_analogica[4])
78     {
79         output_bit(PIN_D4,0);
80     }
81
82     if(controle_pwm >= valor_analogica[5])
83     {
84         output_bit(PIN_D5,0);
85     }
86
87     if(controle_pwm >= valor_analogica[6])
88     {
89         output_bit(PIN_D6,0);
90     }
91
92     if(controle_pwm >= valor_analogica[7])
93     {
94         output_bit(PIN_D7,0);
95     }
96
97     if(controle_pwm >= 119)
98     {
99         output_bit(PIN_D4,1);
100        output_bit(PIN_D5,1);
101        output_bit(PIN_D6,1);
102        output_bit(PIN_D7,1);
103        controle_pwm = 0;
104    }
105
106    if ( ( controle_ac >= (320-valor_analogica[0])) && estado_condicional_ac1 )
107        {
108            output_bit(PIN_D0,0);
109            estado_porta_D0 = 50;
110            estado_condicional_ac1 = 0;
111        }
112    if ( ( controle_ac >= (320-valor_analogica[1])) && estado_condicional_ac2 )
```

```
113     {
114         output_bit(PIN_D1,0);
115         estado_porta_D1 = 50;
116         estado_condicional_ac2 = 0;
117     }
118     if ( ( controle_ac >= (320-valor_analogica[2])) && estado_condicional_ac3 )
119     {
120         output_bit(PIN_D2,0);
121         estado_porta_D2 = 50;
122         estado_condicional_ac3 = 0;
123     }
124     if ( ( controle_ac >= (320-valor_analogica[3])) && estado_condicional_ac4 )
125     {
126         output_bit(PIN_D3,0);
127         estado_porta_D3 = 50;
128         estado_condicional_ac4 = 0;
129     }
130
131
132     if ( estado_porta_D0 > 0)
133     {
134         estado_porta_D0 -=1;
135         if(!estado_porta_D0) {output_bit(PIN_D0,1);}
136     }
137     if ( estado_porta_D1 > 0)
138     {
139         estado_porta_D1 -=1;
140         if(!estado_porta_D1) {output_bit(PIN_D1,1);}
141     }
142     if ( estado_porta_D2 > 0)
143     {
144         estado_porta_D2 -=1;
145         if(!estado_porta_D2) {output_bit(PIN_D2,1);}
146     }
147     if ( estado_porta_D3 > 0)
148     {
149         estado_porta_D3 -=1;
150         if(!estado_porta_D3) {output_bit(PIN_D3,1);}
151     }
152
153 }
154
155
```

```
156 void main()
157 {
158
159     disable_interrupts(GLOBAL);
160
161     setup_adc_ports( RA0_RA1_RA3_ANALOG );
162     setup_adc( ADC_CLOCK_INTERNAL );
163     set_adc_channel( 0 );
164     delay_us(10);
165
166     set_tris_b( 0x0F ); //B0,B1,B2,B3 sao entradas para seleção de canal
167                       //B4,B5,B6,B7 sao saidas do codigo de bits do display
168
169     port_b_pullups(FALSE);
170
171     set_tris_c( 0xFF ); //todos os pinos como entrada
172
173     set_tris_d( 0x00 ); //todos os pinos como saida
174
175     set_tris_e( 0x00 ); //todos os pinos como saida
176
177     output_d(0xFF);
178     output_e(0xFF);
179     //configura timer0 para 8 bits, clock interno e sem prescaler
180     //com o clock de 40MHz, gera uma interrupção à cada 25,6 us
181     setup_timer_0(RTCC_INTERNAL|RTCC_DIV_1|RTCC_8_BIT);
182     set_timer0(0);
183
184     ext_int_edge(0,L_TO_H); //define borda de subida para disparo da
185                             //interrupção
186
187     enable_interrupts(INT_EXT);
188     enable_interrupts(INT_TIMER0);
189     enable_interrupts(GLOBAL);
190
191     modo_auto_man = input(PIN_B3); //modo automatico: B3=0, modo manual: B3=1
192
193     if(modo_auto_man){ //configura modo automático para
194                         //inicialização
195         modo_man = 1;
196         modo_auto = 0;
197         output_bit( PIN_E1, 0 );
198         output_bit( PIN_E0, 1 );
```

```

197     }
198     else{
199         modo_man = 0;                //configura modo manual para inicialização
200         modo_auto = 1;
201         output_bit( PIN_E1, 1 );
202         output_bit( PIN_E0, 0 );
203     }
204
205     for (;;)
206     {
207
208         if(modo_auto_man && modo_man){ //configura modo manual
209             set_adc_channel( 1 );      //e configura porta analógica 1
210             delay_us(10);
211             modo_man = 0;
212             modo_auto = 1;
213             output_bit( PIN_E1, 0 );
214             output_bit( PIN_E0, 1 );
215         }
216
217         if(!modo_auto_man && modo_auto){ //configura modo automatico
218             set_adc_channel( 0 );      //e configura porta analógica 0
219             delay_us(10);
220             modo_man = 1;
221             modo_auto = 0;
222             output_bit( PIN_E1, 1 );
223             output_bit( PIN_E0, 0 );
224         }
225
226         analogica = read_adc(); //Lê analógica
227
228         modo_auto_man = input(PIN_B3); //modo automatico: B3=0, modo manual: B3
                =1
229
230         /* Rotina para identificar o canal selecionado
231         e enviar o numero correspondente para o display
232         */
233
234         if(modo_auto_man){
235             saida = ((input_c()>>4)& AUTOMATICO );
236             if(saida){
237                 output_bit( PIN_B4, saida & 1 );
238                 output_bit( PIN_B5, (saida & 2)>>1 );

```

```
239     output_bit( PIN_B6, (saida & 4)>>2 );
240     output_bit( PIN_B7, (saida & 8)>>3 );
241 }
242 else{
243     output_bit( PIN_B4, 0 );
244     output_bit( PIN_B5, 0 );
245     output_bit( PIN_B6, 0 );
246     output_bit( PIN_B7, 0 );
247 }
248 }
249 else{
250     saida = (input_c() & AUTOMATICO );
251     if(saida){
252         output_bit( PIN_B4, saida & 1 );
253         output_bit( PIN_B5, (saida & 2)>>1 );
254         output_bit( PIN_B6, (saida & 4)>>2 );
255         output_bit( PIN_B7, (saida & 8)>>3 );
256     }
257     else{
258         output_bit( PIN_B4, 0 );
259         output_bit( PIN_B5, 0 );
260         output_bit( PIN_B6, 0 );
261         output_bit( PIN_B7, 0 );
262     }
263 }
264
265 /* Rotina para alterar o valor
266 do PWM ou tempo de disparo dos Triacs conforme
267 o canal selecionado. Os valor 0.317 é a inclinação
268 da reta ajustada para variação de fase. O valor 320 é
269 o máximo valor que se pode chegar. Para o caso de PWM,
270 0.1168 é a inclinação da reta e 119 é o valor máximo
271 para a largura de pulso.
272 */
273
274
275 switch(saida){
276     case 0: //valor da analogica para controle de
                fase da AC1
277         valor_analogica[0] = (int16)(analogica * 0.317);
278         if(valor_analogica[0] > 320) valor_analogica[0] = 320;
279         break;
```

```
280     case 1:                                     //valor da analogica para controle de
        fase da AC2
281     valor_analogica[1] = (int16)(analogica * 0.317);
282     if(valor_analogica[1] > 320) valor_analogica[1] = 320;
283     break;
284     case 2:                                     //valor da analogica para controle de
        fase da AC3
285     valor_analogica[2] = (int16)(analogica * 0.317);
286     if(valor_analogica[2] > 320) valor_analogica[2] = 320;
287     break;
288     case 3:                                     //valor da analogica para controle de
        fase da AC3
289     valor_analogica[3] = (int16)(analogica * 0.317);
290     if(valor_analogica[3] > 320) valor_analogica[3] = 320;
291     break;
292     case 4:                                     //valor da analogica para controle do
        PWM1
293     valor_analogica[4] = (int16)(analogica * 0.11608);
294     if(valor_analogica[4] > 119) valor_analogica[4] = 119;
295     break;
296     case 5:                                     //valor da analogica para controle do
        PWM2
297     valor_analogica[5] = (int16)(analogica * 0.11608);
298     if(valor_analogica[5] > 119) valor_analogica[5] = 119;
299     break;
300     case 6:                                     //valor da analogica para controle do
        PWM3
301     valor_analogica[6] = (int16)(analogica * 0.11608);
302     if(valor_analogica[6] > 119) valor_analogica[6] = 119;
303     break;
304     case 7:                                     //valor da analogica para controle do
        PWM4
305     valor_analogica[7] = (int16)(analogica * 0.11608);
306     if(valor_analogica[7] > 119) valor_analogica[7] = 119;
307     break;
308     default:
309     break;
310 }
311 }
312 }
```

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)