

# **CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS**

Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e  
Computacional

## **Estudo analítico e numérico do espalhamento acústico**

**Aluno:** Márcio Eustáquio Maria

**Orientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ester Naves Machado Borges

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2010.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO  
TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS**

Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Programa de Pós-Graduação em Modelagem  
Matemática e Computacional

**Estudo analítico e numérico do  
espalhamento acústico**

Dissertação de Mestrado, submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

**Aluno:** Marcio Eustáquio Maria

**Orientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ester Naves Machado Borges

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2010.

C837m Maria, Márcio Eustáquio  
Estudo analítico e numérico do espalhamento acústico. – 2010.  
74 f.

Orientadora: Ester Naves Machado Borges

Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica  
de Minas Gerais.

1. Método matemático – Teses. 2. Métodos de simulação  
I. Borges, Ester Naves Machado. II. Centro Federal de Educação  
Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 519.6

# Dedicatória

Para minha mãe, familiares e amigos.

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me dado força, paciência, persistência, determinação, conforto e paz necessárias à conclusão de mais uma etapa da minha formação acadêmica.

A professora Ester Naves Machado Borges pela orientação inestimável, pela amizade e confiança depositada em mim, além da paciência em todos os momentos de dúvidas.

Ao professor Márcio Matias Afonso pela orientação sempre presente, críticas construtivas e valiosas contribuições ao meu trabalho.

Aos demais professores pelo apoio na realização deste trabalho e aos colegas de mestrado pelo companheirismo e amizade.

À minha mãe, pelo carinho e pelas palavras de incentivo que não me deixaram desanimar nunca.

Às professoras da graduação e grandes amigas, Inês Teixeira e Mercy Rodrigues que me incentivaram e tiveram confiança no meu trabalho.

Por fim, aos não menos importantes, demais amigos e familiares pelo apoio.

Agradeço a todos vocês.

*“A educação sozinha não transforma a sociedade,  
sem ela tampouco a sociedade muda.”*  
Paulo Freire

# Resumo

A preocupação com o ruído nas comunidades urbanas cresceu nas últimas décadas com o aumento do número de veículos e a atividade industrial. Sabe-se que a exposição humana a níveis sonoros elevados causa diversos problemas de saúde, tais como estresse e problemas de audição. Por isso, o estudo de fenômenos como radiação, propagação, transmissão e espalhamento sonoro é de grande interesse social e econômico. O espalhamento acústico está presente em nossa vida diária, uma vez que ele ocorre sempre que os comprimentos de onda acústica envolvidos são comparáveis com as dimensões dos objetos presentes ao nosso redor. Em ambientes fechados, o espalhamento é observado devido à presença de objetos decorativos, pilares e instalações técnicas. Em espaços abertos, o espalhamento ocorre, por exemplo, próximo a barreiras em auto-estradas. Esse trabalho estuda o espalhamento de uma onda plana por uma superfície cilíndrica bidimensional situada em um espaço aberto. As soluções analítica e numérica da equação de Helmholtz são obtidas e implementadas. O método numérico utilizado é o método de elementos de contorno que apresenta algumas vantagens na solução de problemas de domínio exterior quando comparado com outros, como o método de elementos de finitos, uma vez que, ele exige a discretização somente da superfície do domínio. Os resultados obtidos utilizando a solução analítica e solução numérica foram comparados e mostram-se bem próximos.

**Palavras-chave:** Espalhamento, Redução de ruídos, Método de elementos de contorno.

# Abstract

Concerns about noise in the community grew up in the last decades due to the increase of vehicles traffic, industrial and all other activities that generate noise. It is well known that the human exposure to high sound levels can cause several diseases, as such problems and stress. So the study of sound phenomena like radiation, propagation, transmission and scattering are of great social and economic interest. The present work investigates hearing acoustical scattering that is present in our daily lives, since it occurs when the wavelength of the involved acoustic waves have approximately the same dimensions of the objects placed near us. In closed spaces, acoustical scattering is observed due the presence of decorative materials, pillars and technical installations. In open spaces, it occurs, for instance, near barriers placed along auto routes. This work studies the scattering of a plane wave by a surface of rigid cylindrical geometry placed in open space. Both analytical and numerical solutions of the Helmholtz equation are obtained and implemented numerically. The numerical method used is the boundary element method, since it requires the discretization only of the contour of the domain. The results obtained with the analytical method are compared to those obtained using the BEM and they show a good agreement.

**Key words:** Acoustical scattering, Noise reduction, Boundary element method.

# Conteúdo

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	1
<b>2 – O ESPALHAMENTO ACÚSTICO</b>	6
<b>2.1 – Introdução</b>	6
<b>2.2 – O espalhamento acústico</b>	6
<b>2.3 – Formulação analítica do espalhamento acústico no cilindro</b>	9
<b>3 – TÉCNICAS NUMÉRICAS</b>	11
<b>3.1 – Técnicas numéricas diferenciais</b>	11
<b>O método de diferenças finitas</b>	11
<b>O método de elementos finitos</b>	12
<b>3.2 – Técnica numérica integral</b>	13
<b>O método de elementos de contorno</b>	13
<b>4 – A APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO AO PROBLEMA DO ESPALHAMENTO ACÚSTICO</b>	16
<b>4.1 – Introdução</b>	15
<b>4.2 – Formulação integral do espalhamento acústico</b>	16
<b>4.3 – A discretização geométrica do contorno de uma superfície bidimensional</b>	18
<b>4.4 – Avaliação das integrais não singulares utilizadas no método de elementos de contorno</b>	20
<b>4.5 – Avaliação das integrais pelo MEC para pontos singulares</b>	23
<b>5 – RESULTADOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS</b>	25
<b>5.1 – Introdução</b>	25
<b>5.2 – Validação do método de elementos de contorno</b>	25
<b>5.3 – A influência da frequência no espalhamento acústico</b>	28

5.3.1 – A influência da frequência no espalhamento acústico em pontos no contorno do cilindro	28
5.3.2 – A influência da frequência no espalhamento acústico em pontos externos ao cilindro	31
5.4 – A influência da distância no potencial de velocidade espalhado	35
<b>6 – CONCLUSÕES E PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>43</b>
6.1 – Conclusões	43
6.2 – Propostas para trabalhos futuros	44
6.2.1 – Espalhamento acústico	44
6.2.2 – Ultra-sonografia	44
6.2.3 – Barreiras acústicas	45
<b>7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>46</b>
<b>ANEXO A</b>	<b>50</b>
<b>ANEXO B</b>	<b>55</b>
<b>ANEXO C</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO D</b>	<b>64</b>
<b>ANEXO E</b>	<b>70</b>

# Lista de Tabelas

<b>Tabela 5.1</b> – Potencial de velocidade máximo para pontos no contorno do cilindro	38
<b>Tabela 5.2</b> – Variação do potencial máximo em relação à frequência	41
<b>Tabela 5.3</b> – Variação do potencial de velocidade espalhado com a distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro rígido	46

# Lista de Figuras

<b>Figura 2.1</b> – Onda incidente atingindo uma superfície cilíndrica	6
<b>Figura 2.2</b> – Espalhamento da onda em diversas direções	7
<b>Figura 3.1</b> – Malha utilizada no Método das Diferenças Finitas	12
<b>Figura 3.2</b> – Malha utilizada no Método dos Elementos Finitos	12
<b>Figura 3.3</b> – Malha utilizada no Método dos Elementos de Contorno	14
<b>Figura 4.1</b> – Obstáculo rígido bidimensional	17
<b>Figura 4.2</b> – Discretização do contorno do obstáculo	19
<b>Figura 5.1</b> – Variação do erro para malha com 512 elementos	27
<b>Figura 5.2</b> – Configuração do problema da onda espalhada	28
<b>Figura 5.3</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 2$	28
<b>Figura 5.4</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 5$	29
<b>Figura 5.5</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 10$	29
<b>Figura 5.6</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 15$	30
<b>Figura 5.7</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 25$	30
<b>Figura 5.8</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 2$	32
<b>Figura 5.9</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 5$	32
<b>Figura 5.10</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 10$	33
<b>Figura 5.11</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 15$	33
<b>Figura 5.12</b> – Potencial de velocidade para frequência normalizada $ka = 25$	34
<b>Figura 5.13</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 1\text{m}$	35
<b>Figura 5.14</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 5\text{m}$	36
<b>Figura 5.15</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 10\text{m}$	36
<b>Figura 5.16</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 15\text{m}$	37
<b>Figura 5.17</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 20\text{m}$	37
<b>Figura 5.18</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 25\text{m}$	38
<b>Figura 5.19</b> – Potencial de velocidade na distância $r = 50\text{m}$	39
<b>Figura 5.20</b> – Variação do potencial de velocidade espalhado máximo com a distância	41

# Simbologia

## CARACTERES LATINOS

Variável	Descrição	Unidade
$S$	Contorno do cilindro rígido	[m]
$r$	Distância entre a origem e o ponto de observação	[m]
$E$	Erro de integração	-
$F$	Fonte de onda sonora	-
$\kappa a$	Frequência normalizada	-
$J$	Função de Bessel	-
$G$	Função de Green	-
$H$	Função de Hankel	-
$N$	Função de Neumann	-
$f$	Função que distribui as fontes pontuais	-
$k$	Número de onda	[m <sup>-1</sup> ]
$W$	Peso de Gauss	-
$q$	Ponto de fonte de onda sonora	-
$p$	Ponto de observação do potencial de velocidade	-
$R$	Região limitada bidimensional	[m <sup>2</sup> ]
$t$	Tempo	[s]
$c$	Velocidade do som	[m/s]
$\vec{n}$	Vetor normal unitário	-

## CARACTERES GREGOS

Variável	Descrição	Dimensão
$\gamma$	Ângulo	[rad]
$\theta$	Ângulo entre o eixo horizontal $x$ e o segmento de reta que liga a origem ao ponto.	[rad]
$\varepsilon$	Coefficiente de fórmula	-
$\lambda$	Comprimento de onda	[m]
$\xi$	Coordenada de Gauss	-
$\omega$	Frequência angular	[rad/s]
$\delta$	Função delta de Dirac	-
$\varphi$	Parte espacial do potencial de velocidade	[m/s]
$\phi$	Potencial de velocidade	[m/s]
$\Omega$	Região relacionada ao cilindro	[m]

## OPERADORES

Variável	Descrição
$\partial / \partial i$	Derivada parcial
$\nabla \cdot (*) = \text{div}(*)$	Divergente
$\nabla(*) = \text{grad}(*)$	Gradiente
$\nabla^2(*)$	Laplaciano
$ * $	Norma de um vetor ou matriz

## LISTA DE ABREVIATURAS

---

<b>Abreviação</b>	<b>Descrição</b>
EI	Equação Integral
EIC	Equações Integrais de Contorno
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

A poluição sonora é um dos problemas da sociedade atual. Devido ao crescimento urbano desordenado, a população vive constantemente exposta a ruídos provocados pelo tráfego intenso de veículos e de aviões, realização de obras públicas e privadas e realização de eventos, como concertos musicais e competições desportivas, dentre outros. O crescimento econômico contribui para o aumento do número de instalações industriais, comerciais e de edifícios destinados à instalação de escolas, universidades, grandes empresas e repartições públicas. No interior desses recintos, o nível de ruído também é intenso, devido à presença de pessoas realizando diversas atividades ao mesmo tempo.

Estudos realizados mostram que a exposição constante do homem ao ruído pode ocasionar diversos problemas para o organismo, tais como o aumento da produção de hormônios pela glândula tireóide e de adrenalina pelas glândulas supra-renais e também lesões no aparelho auditivo, sendo que a surdez é a pior delas. Pode-se ainda citar a aceleração do ritmo cardíaco e o aumento da pressão arterial, que são responsáveis pelo grande número de infartos contabilizados nas estatísticas hospitalares. Observa-se ainda uma redução no rendimento escolar e profissional das pessoas e um aumento da fadiga corporal resultante da perda do sono. Esses danos sofridos pelos indivíduos prejudicam também o país, que perde recursos financeiros devido à redução da atividade econômica e ao aumento de verbas públicas destinadas ao tratamento de diversas doenças nas redes hospitalares.

A poluição sonora e os seus efeitos na saúde humana têm recebido uma atenção cada vez maior por parte da comunidade científica internacional e se tornaram pauta quase que obrigatória em encontros promovidos por entidades ambientalistas mundiais e órgãos governamentais de vários países. Normas e leis mais restritivas referentes à

emissão e ao controle de ruído em ambientes urbanos e industriais têm sido propostas com o intuito de minorar os problemas ambientais gerados pela poluição sonora.

No Brasil, a resolução CONAMA/Nº 002 de 08/03/1990, instituiu o programa nacional de educação e controle de poluição sonora “SILÊNCIO”. Este programa está sob a coordenação do IBAMA, que trabalha junto aos estados e municípios. A Resolução CONAMA nº 1/93, de 11 de fevereiro de 1993, estabelece limites máximos de ruído para veículos em aceleração e na condição de parados, para motocicletas, motonetas, triciclos, ciclomotores, bicicletas com motor auxiliar e veículos assemelhados, nacionais ou importados. A Resolução CONAMA nº 020/94, de 30/12/1994, instituiu o Selo Ruído, de uso obrigatório para aparelhos eletrodomésticos, como forma de indicação do nível de potência sonora. A Resolução CONAMA nº 272/2000, de 14/09/2000, regulamenta a emissão de ruídos de veículos automotores. Ela altera a Resolução nº 1/93 estabelecendo novos limites máximos de emissão de ruídos para veículos automotores, sendo mais rigorosa que a anterior. Borges (2002).

No estado de Minas Gerais, a lei Nº 7302 de 21/07/1978 regulamenta os níveis máximos de emissão sonora permitidos e estabelece ainda que, sempre que necessário, tais limites podem ser reduzidos, caso a legislação municipal pertinente à matéria delibere neste sentido. Como exemplo, pode-se citar o decreto lei nº 5893 de 16/03/1985, que regulamenta a lei nº 4253 sobre emissão de ruídos, de 04/12/1985, do município de Belo Horizonte, que é uma das mais severas do país. Esta lei dispõe sobre a política de proteção do controle e da conservação do meio ambiente e da melhoria da qualidade de vida no Município de Belo Horizonte Posteriormente, em 1997, o governador Eduardo Azeredo sancionou a Lei nº 12627, que altera o artigo 3 da Lei nº 7302, colocando sob a responsabilidade dos municípios o controle e a fiscalização do ruído emitido por veículos sonoros, utilizados em anúncios ou propagandas, nas vias públicas.

No município de Belo Horizonte, a Lei nº 7.848/1999, de 21/10/1999, dispõe sobre a utilização de equipamentos sonoros para publicidade. A lei nº 8204/2001, de 25 de julho de 2001, dispõe sobre condições básicas de proteção ambiental. A Lei nº 9341/2007 de 22/02/2007 dispõe sobre condições de proteção ambiental contra a poluição sonora. Essa lei estabelece valores menores para os níveis máximos de emissão

de ruídos e aumenta o valor das multas para os infratores. A Lei nº 9.505/2008, de 24/01/2008 dispõe sobre o controle de ruídos, sons e vibrações no município de Belo Horizonte. Essa lei revoga a lei nº 9341/2007 estabelecendo novos limites máximos de emissão de ruídos e novos valores de multas para os infratores. Esta lei, comparada com anterior, é mais branda em relação aos níveis máximos de ruído e ao valor das multas.

O controle do ruído pode ser obtido de forma preventiva ou corretiva estudando-se os princípios físicos associados às ondas sonoras e aplicando-os na concepção de espaços internos e externos com características acústicas adequadas ou no desenvolvimento de dispositivos destinados à redução de ruídos. Dentre os princípios físicos, destacamos a geração, transmissão e o espalhamento de ondas sonoras. O controle dos níveis de ruído pode ser obtido com um bom planejamento do sistema de transporte público, do tráfego de veículos em geral, da instalação de aeroportos, indústrias, escolas, grandes centros comerciais e da ocupação residencial dos centros urbanos. Cada espaço interno ou externo deve ser projetado de forma a ter as características acústicas adequadas à sua utilização, Gerges (2000). Quando não é possível prevenir, resta corrigir o problema utilizando, dentre outras técnicas, a redução da transmissão de ruído da fonte até o receptor. A instalação de barreiras acústicas tem a finalidade de impedir a livre propagação do som, gerando uma redução dos níveis sonoros que chegam a um dado receptor que esteja localizado próximo a fontes de ruído intenso como auto-estradas, elevados e aeroportos, dentre outros. As barreiras acústicas, que se baseiam no princípio do espalhamento acústico, são construídas com os mais diversos materiais e sua eficiência na atenuação de ruídos devido à difração da onda incidente está relacionada diretamente com sua geometria, suas dimensões e com as características dos emissores e receptores de ruídos, Murgel (2007)

O fenômeno da difração está presente em nossa vida diária, uma vez que ele ocorre sempre que os comprimentos de onda da onda sonora são comparáveis às dimensões dos obstáculos, que são os objetos presentes ao nosso redor. Em ambientes fechados, observa-se o espalhamento devido à presença de objetos decorativos, pilares e instalações técnicas. Em espaços abertos, o espalhamento ocorre nas construções que existem nas cidades. A literatura apresenta métodos de análise que utilizam a formulação analítica para estudar o espalhamento acústico. No entanto tais métodos apresentam limitações quanto à forma geométrica do obstáculo. Por isso, torna-se

necessário desenvolver técnicas de análise do espalhamento acústico que superem essa dificuldade.

Neste trabalho, a solução analítica do espalhamento de uma onda sonora plana incidente em um cilindro infinito de paredes rígidas é feita e comparada com a solução obtida por uma técnica numérica, o método de elementos de contorno. Os resultados obtidos pelos dois métodos são comparados e dessa forma pode-se analisar a precisão da técnica numérica empregada. A técnica numérica, uma vez validada, pode ser empregada para analisar o problema do espalhamento acústico para geometrias mais complexas e condição de contorno arbitrária.

O texto deste trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 é feita uma apresentação do problema e no capítulo 2 é apresentada a solução analítica para o espalhamento de uma onda plana incidente sobre um cilindro infinito de paredes rígidas. No capítulo 3 são apresentados alguns métodos numéricos diferenciais e integrais para se determinar a técnica que melhor se adapta às características do problema a ser resolvido. No capítulo 4, o método de elementos de contorno é aplicado ao problema do espalhamento acústico no cilindro infinito de paredes rígidas e a formulação integral do problema é estabelecida. É feita a discretização do contorno do obstáculo e um sistema de equações lineares é construído para estabelecer o potencial de velocidade em pontos localizados no contorno do objeto. A partir da solução deste sistema de equações é obtido o potencial de velocidade em pontos localizados na região exterior ao obstáculo. No capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos pelos métodos analítico e numérico. Dessa forma, a utilização do método de elementos de contorno é validada e utilizada e é feita uma análise dos resultados obtidos. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e propostas de atividades futuras.

# Capítulo 2

## O espalhamento acústico

---

### 2.1 – Introdução

Neste capítulo é apresentada a solução analítica para o problema do espalhamento de uma onda sonora plana por uma superfície infinita de geometria cilíndrica. A onda incidente é suposta harmônica e as paredes do cilindro são consideradas rígidas, ou seja, será aplicada a condição de contorno de Neumann.

### 2.2 - O espalhamento acústico

Considere que uma região cilíndrica bidimensional é atingida por uma onda plana que se propaga no sentido negativo do eixo  $x$ , como mostrado na figura 2.1.

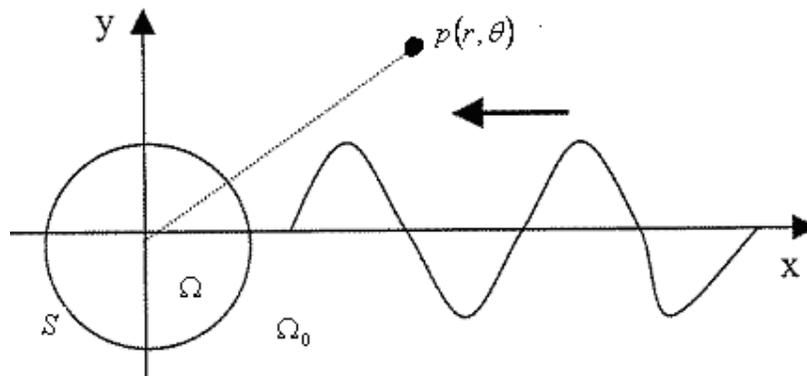


Figura 2.1 – Onda incidente atinge um cilindro rígido bidimensional

A região interior do cilindro bidimensional é chamada  $\Omega$ , a exterior,  $\Omega_0$  e o contorno,  $S$ . Considere também que o comprimento de onda da onda incidente é da ordem da dimensão radial do cilindro. Nesse caso, a incidência da onda plana na superfície cilíndrica produz ondas que são desviadas em todas as direções, afastando-se

do contorno  $S$  e propagando-se para o infinito pela região exterior  $\Omega_0$ , como mostra a figura (2.2).

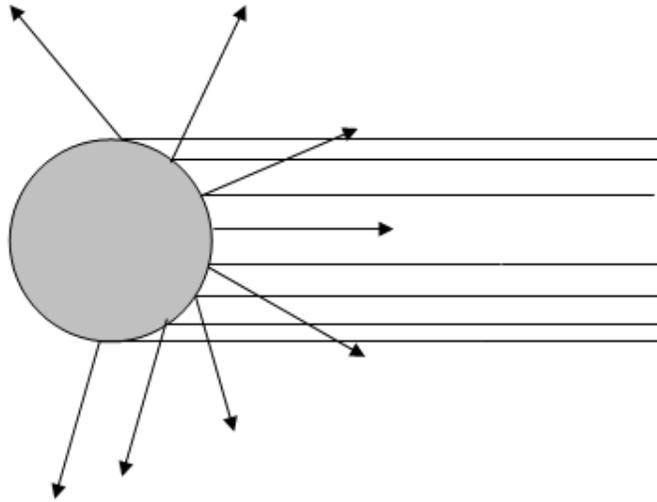


Figura 2.2 – Espalhamento da onda em diversas direções

Estas ondas são denominadas ondas espalhadas e obedecem o princípio de Huygens. Assim, cada ponto do cilindro rígido bidimensional, ao ser atingido pela onda plana incidente, se torna uma fonte pontual ondas esféricas que se propagam em diferentes direções. Neste trabalho, o meio é considerado homogêneo, não viscoso e sem perdas. Desta forma, como mostrado no anexo A, a velocidade das partículas de fluido pode ser expressa como o gradiente de uma função escalar  $\phi$ , denominada potencial de velocidade.

A onda plana incidente, cujo potencial de velocidade é  $\phi_i$  sofre interferência da espalhada, cujo potencial de velocidade  $\phi_E$ , nos pontos  $p(r, \theta)$  localizados no contorno  $S$  e na região exterior  $\Omega_0$ . Dessa forma, produz-se uma onda total distorcida cujo potencial de velocidade  $\phi$  é dado pela soma do potencial de velocidade espalhado com o potencial de velocidade incidente. Esse fenômeno é chamado espalhamento acústico.

A onda espalhada que se afasta do cilindro, propagando-se num meio infinito, homogêneo e não viscoso é descrita pela equação linear que se segue:

$$\nabla^2 \phi_E(t, p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_E(t, p)}{\partial t^2} = F(t, p) \quad (2.1)$$

Na equação (2.1),  $c$  é a velocidade da onda sonora no ar,  $F(t, p)$  e  $\phi_E(t, p)$  são, respectivamente, a fonte de onda sonora e o potencial de velocidade total que, nesse trabalho, são considerados harmônicos no tempo e são definidos pelas expressões:

$$F(t, p) = f(p) e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

e

$$\phi(t, p) = \varphi(p) e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Nas equações (2.2) e (2.3),  $\omega$  representa a freqüência angular da onda sonora,  $f(p)$  e  $\varphi(p)$ , representam, respectivamente, a parte espacial da expressão da fonte de onda sonora e do potencial de velocidade em pontos  $p(r, \theta)$  que se localizam no contorno  $S$  ou na região exterior  $\Omega_0$  do cilindro. Tais pontos são denominados pontos de observação do potencial. Substituindo-se as equações (2.2) e (2.3), na equação (2.1) mostra-se que o potencial de velocidade da onda espalhada  $\varphi_E(p)$  satisfaz a equação diferencial de Helmholtz, e, em coordenadas cilíndricas, tem a expressão:

$$\frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial \theta^2} + k^2 \varphi_E = f(p) \quad (2.4)$$

O potencial de velocidade espalhado  $\varphi_E(p)$  satisfaz, também, a condição de contorno de Neumann, Butkov (1968):

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} = 0 \quad (2.5)$$

Na equação (2.4),  $\kappa$  é o número de onda e  $\lambda$  o comprimento de onda no meio de propagação:

$$\kappa = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.6)$$

### 2.3 - A Formulação analítica para o espalhamento de uma onda plana por um cilindro infinito de paredes rígidas

A solução analítica para o problema do espalhamento de uma onda sonora plana por um cilindro infinito de paredes rígidas descrito pela equação (2.4) é obtida utilizando-se o método de separação de variáveis. O potencial de velocidade espalhado  $\varphi_E(r, \theta)$ , num ponto de observação  $p(r, \theta)$  localizado no contorno  $S$  ou na região exterior  $\Omega_0$  do cilindro, como demonstrado no anexo B, é dado pela expressão a seguir:

$$\varphi_E(r, \theta) = A_0 [J_0(\kappa r) + iN_0(\kappa r)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) [J_m(\kappa r) + iN_m(\kappa r)] \quad (2.7)$$

Na equação (2.7),  $J_m(\kappa r)$  e  $N_m(\kappa r)$  são, respectivamente, as funções de Bessel e Neumann de ordem  $m$  e tipo 1. O termo  $\kappa r$  é denominado frequência normalizada, sendo que  $\kappa$  o número de onda no meio de propagação e  $r$  é a distância radial entre o centro do cilindro rígido e um ponto de observação  $p(r, \theta)$ . Os coeficientes  $A_m$  e  $A_0$ , como demonstrado no anexo C, são dados, respectivamente, por:

$$A_m = -\varepsilon_m P_0 i^{m+1} e^{-i\gamma_m} \text{sen}(\gamma_m) \quad (2.8)$$

$$A_0 = -\varepsilon_0 P_0 i e^{-i\gamma_0} \text{sen}(\gamma_0) \quad (2.9)$$

Nas equações (2.8) e (2.9) são mostradas as expressões que definem  $\gamma_m$  e  $\gamma_0$ :

$$\tan \gamma_m = \frac{J_{m-1}(\kappa r) - J_{m+1}(\kappa r)}{N_{m+1}(\kappa r) - N_{m-1}(\kappa r)} \quad (2.10)$$

$$\tan \gamma_0 = -\frac{J_1(\kappa r)}{N_1(\kappa r)} \quad (2.11)$$

Nas equações (2.9) e (2.8), os valores dos coeficientes  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_m$  são, respectivamente, 1 e 2 e o termo  $P_0$  é a amplitude da onda.

A solução analítica para o potencial de velocidade espalhado, estabelecida pela equação (2.7), é válida apenas em uma superfície de geometria cilíndrica. As soluções analíticas, apesar de serem exatas, possuem, em geral, uma limitação em relação à geometria do problema. Por este motivo, torna-se importante a utilização de uma técnica numérica eficiente para o tratamento de problemas de espalhamento acústico por obstáculos com uma forma geométrica qualquer e condições de contorno arbitrárias. As técnicas numéricas serão discutidas no capítulo a seguir.

# Capítulo 3

## Técnicas Numéricas

---

### 3.1 – Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns métodos numéricos com a finalidade de se determinar a técnica mais eficiente para a solução do problema de espalhamento de uma onda sonora plana por obstáculo com forma geométrica complexa e condição de contorno arbitrária.

#### 3.2.1 – Técnicas numéricas diferenciais

As técnicas numéricas diferenciais resolvem problemas de valor de contorno descrito por equações diferenciais. Dentre as técnicas diferenciais disponíveis, o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos são os mais utilizados.

#### O Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas MDF, é utilizado para a solução de problemas de valor de contorno descritos por equações diferenciais parciais. Nesse método numérico, o domínio da região é discretizado em uma grade de nós como mostrado na figura (3.1), Chandrupatla et al (1991).

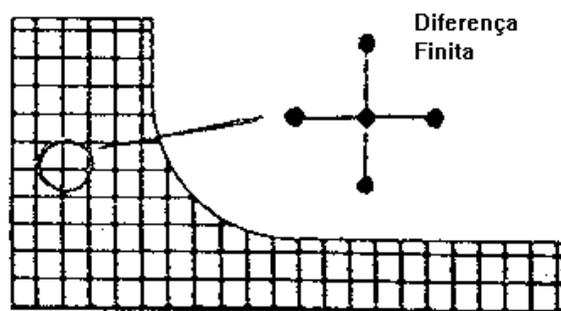


Figura 3.1 – Exemplo de uma malha utilizada no Método Malha de Diferenças Finitas.

O Método das Diferenças Finitas substitui a equação diferencial e as condições de contorno que descrevem o problema por um conjunto de equações lineares algébricas chamadas de equações de diferença, válidas em pontos sobre a grade do domínio. A solução desse sistema de equações estabelece a solução aproximada da equação original do problema de contorno, Chandrupatla et al (1991).

### O Método de Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos, MEF, também é uma técnica numérica empregada para resolver problemas de valor de contorno descritos por equações diferenciais parciais. Nesse método numérico, o domínio do problema é discretizado em pequenos subdomínios designados por elementos, como mostra a figura (3.2), Bickford (1990).

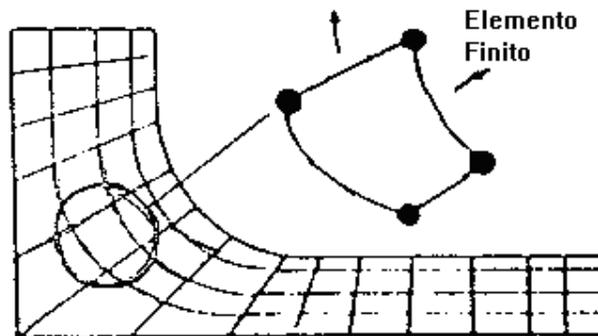


Figura 3.2 – Exemplo de uma malha utilizada no Método de Elementos Finitos

No interior de cada elemento, a solução procurada é aproximada por uma função de interpolação e, utilizando-se o método dos resíduos ponderados ou o método variacional, transforma-se a equação diferencial que rege o problema de valor de contorno em um sistema algébrico de equações, em que a matriz de rigidez é esparsa e, em alguns casos, é também simétrica. A solução desse sistema de equações estabelece a solução da equação original do problema de contorno. Bickford (1990).

### **3.2.2 – Técnica numérica integral**

O Método de Elementos de Contorno, MEC, é uma técnica numérica empregada para resolver um problema de valor de contorno descrito por uma equação integral que envolva um objeto com forma geométrica complexa e condição de contorno arbitrária, Hall (1994).

#### **O Método de Elementos de Contorno**

O Método dos Elementos de Contorno desenvolveu-se a partir da antiga técnica numérica empregada para resolver problemas de valor de contorno descritos por equações integrais, conhecida como Método da Equação integral de Contorno. Tal técnica numérica possuía duas formulações que, atualmente, são conhecidas como formulação direta e formulação indireta do método dos elementos de contorno, Hall (1994).

A formulação indireta do método integral utiliza considerações sobre o aspecto físico do problema com a finalidade de transformar um contorno físico em um contorno contendo fontes ou sorvedouros. Esses contornos são ajustados para fornecer os mesmos resultados físicos que aqueles obtidos para o problema original, Manolis et al (1988). A formulação direta é uma extensão da forma padrão de se solucionar equações diferenciais parciais envolvendo funções de Green. Assim, uma vez conhecida a função de Green que é solução da equação diferencial que rege o problema e que satisfaz as condições de contorno impostas, tem-se a solução para o problema do espalhamento acústico na forma de uma equação integral que pode ser resolvida numericamente, Kithe (1995)

As duas formas do método da equação integral de contorno foram utilizadas, sem distinção, no período de 1960 a 1975, para resolver problemas de valor de contorno descritos por equações integrais em várias áreas da engenharia. A formulação indireta foi empregada por Hess e Smith (1967) para solucionar problemas de engenharia aeroespacial e por Harrington (1970) para resolver problemas de engenharia elétrica. A formulação direta solucionou problemas da teoria do potencial aplicados a mecânica estática nos trabalhos de Jaswon (1963) e Sym (1963) e foi empregada por Cruze (1968)

e Cruze e Rizzo (1968) na área da dinâmica elástica para problemas de tração e deslocamento de placas. Na acústica, o método da equação integral de contorno foi utilizado no tratamento de problemas de radiação sonora e espalhamento acústico. A técnica numérica integral foi utilizada no estudo da radiação sonora por Chen e Schweikert (1963), Chertock (1964), Copley (1968) e Schenk (1968) e no tratamento de problemas de espalhamento acústico por Shaw (1968), Banaugh e Goldsmith (1963), Sharma (1967), Waterman (1969) e Karlson (1967), dentre outros.

O nome Método de Equação Integral de Contorno permaneceu em uso até 1978, quando nesse mesmo ano, na segunda conferência sobre o método integral realizada na universidade de Southampton, Brebbia, lançou um livro texto em que o nome Método de Equação Integral de Contorno foi modificado para Método de Elementos de Contorno. Desde então, as duas formulações características da técnica numérica empregada para resolver problemas de valor de contorno descritos por equações integrais passaram a ser conhecidas, exclusivamente, pelo nome Método de elementos de contorno, Banerjee (1994). Para utilização desta técnica numérica, apenas o contorno do objeto envolvido no problema necessita ser discretizado, como mostrado na figura 3.3.

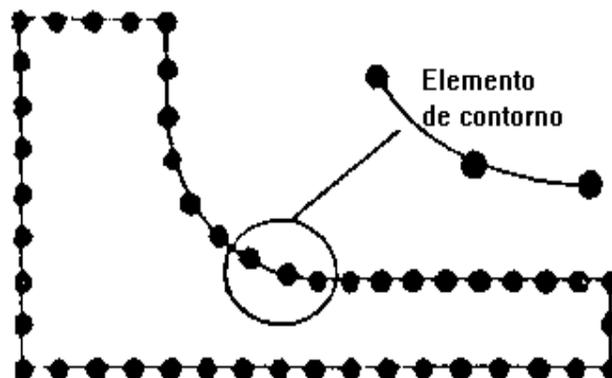


Figura 3.3 – Exemplo de uma malha utilizada no método de elementos de contorno.

A equação diferencial que descreve o espalhamento é transformada numa equação integral equivalente e o teorema de Green é utilizado para transformar a equação integral de volume em uma equação integral de contorno. A aplicação da

equação integral em cada elemento no contorno gera um sistema linear de equações que estabelece a solução do problema para pontos no contorno da região analisada. Tal solução é utilizada para estabelecer o potencial de velocidade em pontos localizados no exterior da região envolvida no problema. O Método de Elementos de Contorno possui algumas desvantagens, tais como a necessidade do cálculo de integrais singulares e a formação de uma matriz de rigidez cheia e não simétrica, Manolis et al (1988).

O domínio envolvido no problema do espalhamento acústico por um objeto com forma geométrica qualquer é externo e ilimitado. A discretização desse domínio realizada por elementos finitos ou diferenças finitas, sem nenhuma condição de contorno para representar o infinito, produz uma malha com um número de elementos muito elevado. Nesse caso, o esforço computacional empregado pelo método de diferenças finitas ou elementos finitos na resolução do problema do espalhamento acústico é extremamente elevado, pois, como mostra Ziviani (1996), o esforço computacional empregado por uma técnica numérica para resolver um problema, depende da função de complexidade do algoritmo e do número de elementos empregados. Por essa razão, essas técnicas numéricas não serão utilizadas nesse trabalho.

O método de elementos de contorno, por sua vez, requer a discretização apenas do contorno do obstáculo envolvido no problema do espalhamento acústico. Por esta razão, o número de elementos requeridos para o processo de discretização é menor e o esforço computacional empregado na solução do problema é reduzido, quando comparado aos outros métodos citados. Por essa razão essa técnica numérica será empregada nesse trabalho.

# Capítulo 4

## A aplicação do método de elementos de contorno ao problema do espalhamento acústico

---

### 4.1 – Introdução

Neste capítulo é estabelecida a formulação integral do problema do espalhamento acústico de uma onda plana por uma superfície cilíndrica infinita e de paredes rígidas. A solução é obtida para pontos localizados no contorno e fora dele. São descritos ainda, o processo de discretização do contorno do objeto e o sistema de equações integrais e lineares, cuja solução é buscada, assim como o método de resolução das integrais que surgem na formulação do método de elementos de contorno.

### 4.2 – Formulação integral do espalhamento acústico

Considere-se um corpo bidimensional rígido, com uma forma geométrica qualquer, imerso num domínio infinito, atingido por uma onda plana que se propaga no sentido negativo no eixo  $x$ , como mostrado na figura 4.1.

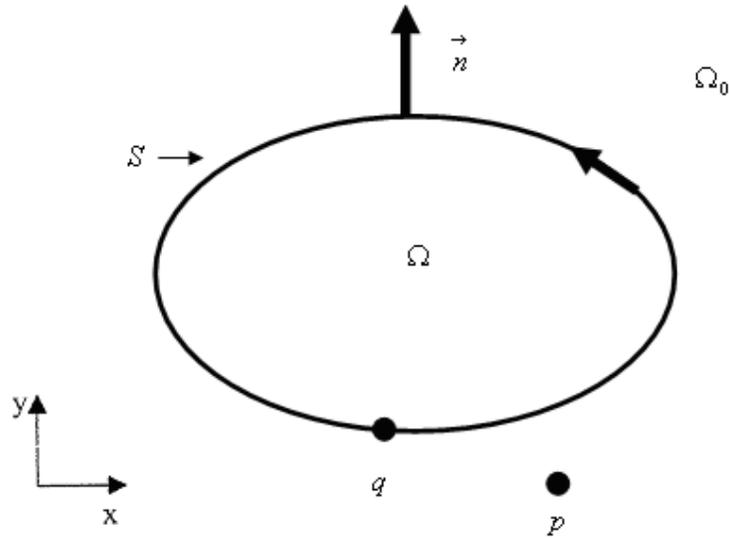


Figura 4.1 – Obstáculo rígido bidimensional

O contorno do obstáculo é chamado  $S$ , a região interior  $\Omega$  e a exterior,  $\Omega_0$ . O vetor unitário  $\hat{n}$ , que é normal à superfície e dirigido para fora do contorno, também é mostrado na figura 4.1. A função  $f(p)$  é utilizada para fornecer a distribuição das fontes pontuais para pontos  $q(x, y)$  localizados no contorno  $S$ . O potencial de velocidade  $\varphi(p)$  é calculado nos pontos  $p(x, y)$  denominados pontos de observação que se localizam no contorno  $S$  do obstáculo ou na região exterior  $\Omega_0$ .

O potencial de velocidade  $\varphi(p)$  num ponto  $p(x, y)$  qualquer localizado no contorno  $S$  do obstáculo ou na região exterior  $\Omega_0$  satisfaz a equação diferencial de Helmholtz, Ziomek (1995).

$$\nabla^2 \varphi(p) + \kappa^2 \varphi(p) = f(p) \quad (4.1)$$

e a condição de Neumann, Pierce (1989):

$$\frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} = 0 \quad (4.2)$$

O potencial de velocidade satisfaz essa condição de contorno uma vez que a superfície do cilindro é considerada rígida. O potencial de velocidade satisfaz, para ondas que se propagam para o infinito, a condição de Sommerfeld dada pela expressão:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i\kappa \varphi(p) \right) = 0 \quad (4.3)$$

Essa condição garante a unicidade da solução da equação (4.1) para pontos no infinito, Dettman (1969). Na equação (4.1),  $\kappa$  é o número de onda e  $\lambda$  o comprimento de onda, ambos já definidos anteriormente.

O potencial de velocidade espalhado  $\varphi(p)$  num ponto  $p(x, y)$  qualquer localizado na região exterior  $\Omega_0$  ou no contorno  $S$  do objeto é estabelecido por uma equação integral que pode ser obtida de diversas formas. Nesse trabalho, tal equação é obtida utilizando-se a função de Green. Por essa razão, é necessário utilizar a equação (4.1) para o caso de uma fonte pontual com amplitude unitária que toma a forma:

$$\nabla^2 G(p, q) + \kappa^2 G(p, q) = \delta(p - q) \quad (4.4)$$

A solução da equação (4.4) é a função de Green  $G(p, q)$  que representa o campo num ponto de observação  $p(x, y)$  devido à presença de uma fonte de amplitude unitária localizada num ponto  $q(x, y)$ . Tal função é denominada solução fundamental da equação de Helmholtz. A função de Green  $G(p, q)$  para problemas bidimensionais é definida pela expressão, Ziomek (1995):

$$G(p, q) = H_n(\kappa r) \quad (4.5)$$

Na equação (4.5),  $H_n$ ,  $\kappa$  e  $r$  representam, respectivamente, a função de Hankel de ordem  $n$  e tipo 1, o número de onda do som no ar e a distância entre os pontos  $q$  e  $p$ . A equação integral para o problema do espalhamento acústico por um objeto com forma geométrica qualquer, como demonstrado no anexo D, é dada pela expressão:

$$c(p)\varphi(p) + \int_S \varphi(p) \frac{\partial G(p,q)}{\partial n} dS = \int_S G(p,q) \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} dS + \varphi'(p) \quad (4.6)$$

O potencial de velocidade  $\varphi(p)$  será calculado inicialmente para pontos de observação  $p(x,y)$  singulares localizados no contorno  $S$  do cilindro. Nesse caso,  $c(p)$  assume o valor  $1/2$  e a equação (4.6) se torna:

$$\frac{1}{2}\varphi(p) + \int_S \varphi(p) \frac{\partial G(p,q)}{\partial n} dS = \int_S G(p,q) \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} dS + \varphi'(p) \quad (4.7)$$

Os valores do potencial de velocidade  $\varphi(p)$  para pontos de observação  $p(x,y)$  no contorno do cilindro serão utilizados para estabelecer os valores do potencial de velocidade  $\varphi(p)$  nos pontos de observação  $p(x,y)$  não singulares localizados na região exterior  $\Omega_0$ . Nesse caso,  $c(p)$  assume o valor 1 e a equação (4.6) se torna:

$$\varphi(p) + \int_S \varphi(p) \frac{\partial G(p,q)}{\partial n} dS = \int_S G(p,q) \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} dS + \varphi'(p) \quad (4.8)$$

### 4.3 – Discretização geométrica do contorno de uma superfície bidimensional

A discretização do contorno  $S$  do obstáculo bidimensional  $\Omega$  é feita utilizando-se uma malha contendo  $N$  segmentos de reta  $S_n$  denominados elementos, que são mostrados na figura 4.2.

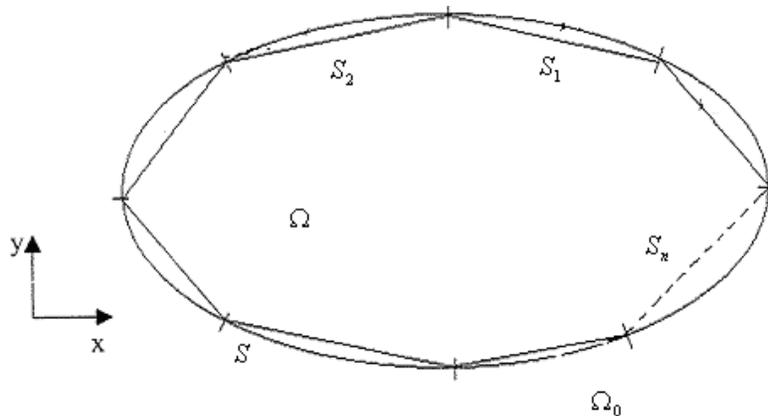


Figura 4.2 – Discretização do contorno.

Neste trabalho, considera-se que os valores desconhecidos do potencial  $\varphi_j(q)$  e de sua derivada normal  $\frac{\partial\varphi_j(q)}{\partial n}$  são constantes ao longo de cada elemento da malha. Elementos com esta forma de aproximação para o potencial de velocidade  $\varphi_j(q)$  são denominados elementos constantes. Nesse caso, o ponto de observação  $p$  é colocado no centro de cada elemento  $S_i$  considerado e os valores desconhecidos de  $\varphi_j(q)$  e de  $\frac{\partial\varphi_j(q)}{\partial n}$  ao longo desses elementos são considerados iguais ao valor do potencial e de sua derivada no ponto central  $p$ . Dessa forma, o potencial de velocidade  $\varphi_i(p)$  num ponto de observação  $p$  no centro de um dado elemento  $S_i$  é dado pela expressão:

$$\frac{1}{2}\varphi_i(p) + \sum_{j=1}^N \varphi_j(q) \int_{S_j} \frac{\partial G(p,q)}{\partial n} dS_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial\varphi_j(q)}{\partial n} \int_{S_j} G(p,q) dS_j + \varphi_i'(p) \quad (4.9)$$

A equação (4.9) descreve o valor do potencial de velocidade  $\varphi_i(p)$  no centro de um dado elemento fixo  $S_i$  como sendo a soma dos potenciais produzidos pelas fontes no elemento  $S_j$  considerado, incluindo as fontes do próprio elemento  $S_i$  que contém o ponto de observação  $p$ . Na equação (4.9), as integrais que contém o termo da derivada normal da solução fundamental são representadas por:

$$H_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(p,q)}{\partial n} dS_j \quad (4.10)$$

e as integrais da solução fundamental, definida pela equação (4.5), são representadas por:

$$G_{ij} = \int_{S_j} G(p,q) dS_j \quad (4.11)$$

Assim, a equação (4.9) toma a forma que se segue:

$$\frac{1}{2} \varphi_i(p) + \sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} + \varphi_i^I(p) \quad (4.12)$$

#### 4.4 – A construção do sistema de equações lineares

O potencial de velocidade  $\varphi(p)$  é calculado em cada elemento  $S_i$ , formando um sistema de equações. Em seguida, é descrita a forma como é obtida a primeira equação deste sistema. Considera-se o que o ponto  $p$  de observação está situado no centro do elemento  $S_1$  e as integrais  $H_{1j}$  e  $G_{1j}$  são avaliadas em cada um dos elementos, ou seja, em  $S_1, S_2, S_3 \dots e S_n$ . Em seguida, para cada elemento  $S_j$ , as variáveis desconhecidas  $\varphi_j(q)$  e  $\frac{\partial \varphi_j(q)}{\partial n}$  são multiplicadas pelas integrais  $H_{1j}$  e  $G_{1j}$  e então os  $n$  termos  $\varphi_j H_{1j}$  são adicionados no lado esquerdo da equação. No lado direito da equação, os  $n$  termos  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} G_{1j}$  são somados com a expressão da onda incidente  $\varphi_i^I$  no ponto de observação. A equação obtida tem a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \varphi_1 + H_{11} \varphi_1 + H_{12} \varphi_2 + \dots + H_{1n} \varphi_n = G_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + G_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \dots + G_{1n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + \varphi_1^I(p) \quad (4.13)$$

Em seguida, o ponto de observação  $p$  é colocado sucessivamente nos elementos  $S_2, S_3, \dots, S_n$ , repetindo-se, para cada um deles, o procedimento descrito para obtenção da primeira equação. Assim, é formado o sistema de  $N$  equações e  $N$  incógnitas que descrevem o problema, mostrado a seguir:

$$\frac{1}{2} \varphi_1 + H_{11} \varphi_1 + H_{12} \varphi_2 + \dots + H_{1n} \varphi_n = G_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + G_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \dots + G_{1n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + \varphi_1^I(p) \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{2} \varphi_2 + H_{21} \varphi_1 + H_{22} \varphi_2 + \dots + H_{2n} \varphi_n = G_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + G_{22} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \dots + G_{2n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + \varphi_2^I(p)$$

$$\frac{1}{2} \varphi_3 + H_{31} \varphi_1 + H_{32} \varphi_2 + \dots + H_{3n} \varphi_n = G_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + G_{32} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \dots + G_{3n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + \varphi_3^I(p)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_n + H_{n1}\varphi_1 + H_{n2}\varphi_2 + \dots + H_{nn}\varphi_n = G_{n1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + G_{n2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \dots + G_{nn} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} + \varphi_n'(p)$$

Este sistema de equações pode ser escrito de forma mais compacta na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + H_{11} & H_{21} & \dots & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & \frac{1}{2} + H_{22} & \dots & \dots & H_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & \dots & \frac{1}{2} + H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & \dots & G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n' \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Neste trabalho, como a superfície do cilindro infinito é considerada rígida, a condição de contorno de Neumann é satisfeita em seu contorno. Assim, os termos  $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ ,

$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \dots, \frac{\partial\varphi_n}{\partial n}$  são nulos e o sistema de equações descrito por (4.15) se torna:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{21} & \dots & \dots & H_{n1} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & \dots & H_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & \dots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n' \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

No sistema de equações (4.16),  $H_{ij}$  é dado pela expressão:

$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & \text{para } i \neq j \\ H_{ij} + \frac{1}{2} & \text{para } i=j \end{cases} \quad (4.17)$$

e a equação (4.17) pode ser reescrita da forma que se segue:

$$HU = Q \quad (4.18)$$

Na equação (4.18),  $H$  é uma matriz de ordem  $N \times N$  não esparsa e não simétrica e  $U$  e  $Q$  são vetores de ordem  $N \times 1$ . O vetor  $U$  contém os valores desconhecidos de  $\varphi_j(q)$ , o vetor  $Q$  contém os valores conhecidos dos potenciais de velocidade incidentes nos pontos centrais dos elementos e a matriz  $H$  é composta pelas expressões integrais das derivadas normais da função de Green no ponto central de cada elemento. Pré-multiplicando a equação (4.18) pela matriz  $H^{-1}$ , obtém-se os valores de  $\varphi_j(p)$  para todos os pontos do contorno do cilindro:

$$U = H^{-1}Q \quad (4.19)$$

Uma vez determinados os elementos do vetor  $U$  que são os potenciais  $\varphi_i$ , estes são utilizados para se obter o potencial  $\varphi(p)$  em qualquer ponto  $p$  exterior ao contorno, como mostrado na figura 4.1. Para isso, é utilizada a equação integral (4.6), que pode ser escrita na forma discreta pela seguinte expressão:

$$\varphi_i(p) = \sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi_j + \varphi_i^I(p) \quad (4.20)$$

#### 4.5 – Avaliação das integrais

As integrais  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$ , para pontos que não contém singularidade, são avaliadas, em cada elemento  $S_j$  da malha que compõe o contorno  $S$  do cilindro, utilizando-se o método da quadratura gaussiana, que tem a seguinte expressão, Campos Filho (2001):

$$\int_A^B f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi = \sum_{m=1}^N f(\xi_m) W_m + E_m \quad (4.21)$$

Na equação (4.21), os termos  $E_m$ ,  $W_m$  e  $\xi_m$  são, respectivamente, o erro cometido na integração, o peso e a coordenada de Gauss. O peso  $W_m$  e a coordenada de Gauss  $\xi_m$  são os valores a se determinar para que a integral dada na equação (4.21) seja exata para o polinômio de grau  $2n - 1$  que substitui a função no integrando. Os pontos extremos do elemento são  $q_1(x_1, y_1)$  e  $q_2(x_2, y_2)$ . Para a utilização do método da quadratura gaussiana é feita uma mudança da variável  $q(x, y)$ , definida no intervalo de integração  $[q_1, q_2]$  para a variável  $\xi$  definida no intervalo de integração  $[-1, +1]$ . Neste trabalho, é empregada a técnica da quadratura gaussiana uma vez que ela apresenta maior precisão nos resultados obtidos quando comparada com outras técnicas numéricas utilizadas para a avaliação de integrais, Campos Filho (2001).

A solução fundamental  $G(p, q)$  e sua derivada normal  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$ , avaliadas nas integrais  $H_{ij}$  e  $G_{ij}$  sobre cada um dos elementos, são funções da distância  $R$  entre o ponto de observação  $p(x, y)$  e os pontos de integração numérica  $q(x, y)$ , dada pela expressão a seguir, como mostrado no anexo E:

$$R(\xi) = \left\{ \left[ \frac{x_2 - x_1}{2} \xi + \frac{x_2 - x_1}{2} - Xobs \right]^2 + \left[ \frac{y_2 - y_1}{2} \xi + \frac{y_2 + y_1}{2} - Yobs \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

A solução fundamental  $G(p, q)$  é dada por, Hall (1994).

$$G(p, q) = \frac{i}{4} H_0^1(kR) \quad (4.23)$$

Dessa forma, a integral  $G_{ij}$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{i}{4} H_0^1(kR(\xi)) \frac{L}{2} d\xi = \sum_{m=1}^N \frac{i}{4} H_0^1(kR(\xi_m)) W_m \frac{L}{2} \quad (4.24)$$

A derivada normal da solução fundamental  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$  é dada por, Kithé (1995):

$$\frac{\partial G(p, q)}{\partial n} = \frac{\partial G(p, q)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} \quad (4.25)$$

Assim, a integral  $H_{ij}$  é dada pela expressão que se segue, que é mostrada no anexo E:

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{i}{4} H_1^1(\kappa R(\xi)) \frac{\partial R}{\partial n} \frac{L}{2} d\xi = \sum_{m=1}^N \frac{i}{4} H_1^1(\kappa R(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial n} W_m \frac{L}{2} \quad (4.26)$$

No capítulo a seguir, o método de elementos de contorno será empregado para analisar o espalhamento da onda sonora por um cilindro rígido e infinito.

# Capítulo 5

## Resultados analíticos e numéricos

---

### 5.1 – Introdução

Neste capítulo, o método de elementos de contorno será validado como técnica de análise do espalhamento da onda sonora. Será apresentado também como a variação da frequência normalizada e a variação da distância entre os pontos de observação do potencial e o eixo do cilindro rígido modificam o espalhamento da onda sonora.

### 5.2 – Validação do método de elementos de contorno

O método de elementos de contorno será validado pela utilização da solução analítica do espalhamento acústico por um cilindro rígido. Tal solução é representada por uma soma infinita de termos. Dessa forma, torna-se necessária, a substituição dessa série por uma soma finita de termos a fim de inseri-la em um código computacional. Nesse trabalho, 150 termos são utilizados para compor a soma finita e assegurar sua convergência nas frequências normalizadas consideradas nas simulações. Estabelecida a solução analítica, realiza-se a análise da solução numérica que é obtida pelo método de elementos de contorno.

Essa técnica numérica integral é aplicada à formulação integral do espalhamento acústico por um objeto com forma geométrica qualquer para resolvê-la numericamente. Uma vez conhecidas a solução analítica do espalhamento pelo cilindro rígido e a solução numérica da equação integral, elas são comparadas e o erro decorrente dessa comparação estabelece o nível de proximidade das soluções e, por consequência, a eficiência do método de elementos de contorno para solucionar o problema do espalhamento acústico.

O número de elementos utilizados na malha que discretiza o objeto influencia na precisão da solução numérica estabelecida pelo método de elementos de contorno e no

esforço computacional dessa técnica numérica para resolver o problema do espalhamento acústico, Manolis et al (1988). Dessa forma, é necessário estabelecer uma malha cujo número de elementos assegure um esforço computacional reduzido e um erro satisfatório decorrente da comparação das soluções analítica e numérica.

Para obter tal malha, a frequência normalizada  $\kappa a = 5$  foi escolhida e o potencial de velocidade foi simulado para pontos  $p(r, \theta)$  localizados no contorno do cilindro de raio unitário. Nessa simulação, foram utilizadas malhas compostas por 32, 64, 128, 256 e 512 elementos e, para cada uma delas, foram calculados o erro relativo percentual e o erro relativo percentual médio, definidos respectivamente, por:

$$e_r = \frac{|\varphi_A - \varphi_N|}{|\varphi_A|} \quad (5.1)$$

e

$$e_m = \frac{\sum_{k=1}^n e_k}{n} \quad (5.2)$$

Na equação (5.1),  $\varphi_A$  e  $\varphi_N$  são, respectivamente, o potencial de velocidade analítico e o potencial de velocidade numérico em cada ponto. Na equação (5.2),  $n$  representa o número de pontos da malha. A malha composta por 512 elementos foi a que assegurou, o menor erro relativo percentual e o menor erro relativo percentual médio. Por essa razão, tal malha será empregada, neste trabalho, para a discretização do contorno do cilindro rígido.

O erro relativo, nos pontos  $p(r, \theta)$  do contorno do cilindro, varia em relação ao erro relativo médio como mostrado na figura 5.1

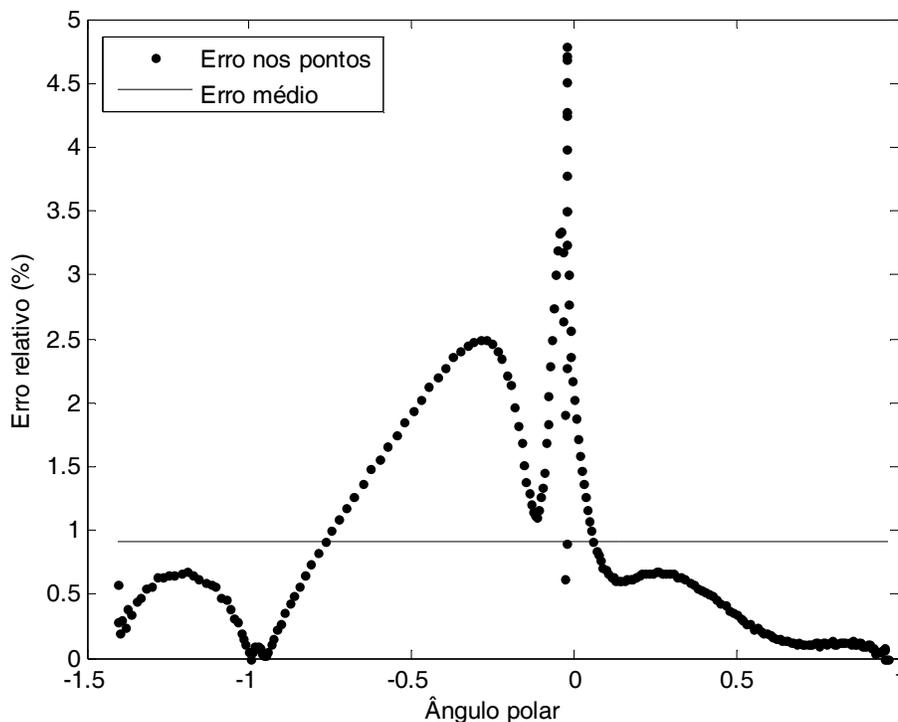


Figura 5.1 – Variação do erro para malha com 512 elementos

Esse gráfico, devido à simetria existente no cilindro, mostra o erro para metade dos pontos que compõem a malha utilizada para discretizá-lo. Essa malha assegurou um erro médio inferior a 1% e um erro máximo inferior a 5%. Em seguida, calculou-se o número de pontos para os quais o erro relativo é inferior ao erro relativo médio. Tal cálculo estabelece que, para 67.7043% dos pontos que compõem tal malha, o erro relativo é inferior ao erro relativo médio. A execução do código computacional, utilizando uma malha composta por 512 elementos, durou em torno de 45 segundos. Tal tempo foi estabelecido pela função Tic Toc do Matlab. O código computacional foi executado em linguagem Matlab, versão 7.8/2009a, instalado em uma máquina com dois gigabytes de memória Ram, disco rígido com 360 gigabytes e com processador Dual Core.

Dessa forma, o método de elementos de contorno foi validado para estudar o espalhamento acústico por um cilindro rígido. Tal técnica numérica será, então, utilizada para analisar a influência da variação da frequência normalizada e da variação

da distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro, no valor do potencial de velocidade simulado em pontos  $p(r, \theta)$  que se localizam no contorno do cilindro rígido e em sua região exterior. A configuração utilizada para realizar essas análises na onda espalhada é mostrada na figura 5.2.

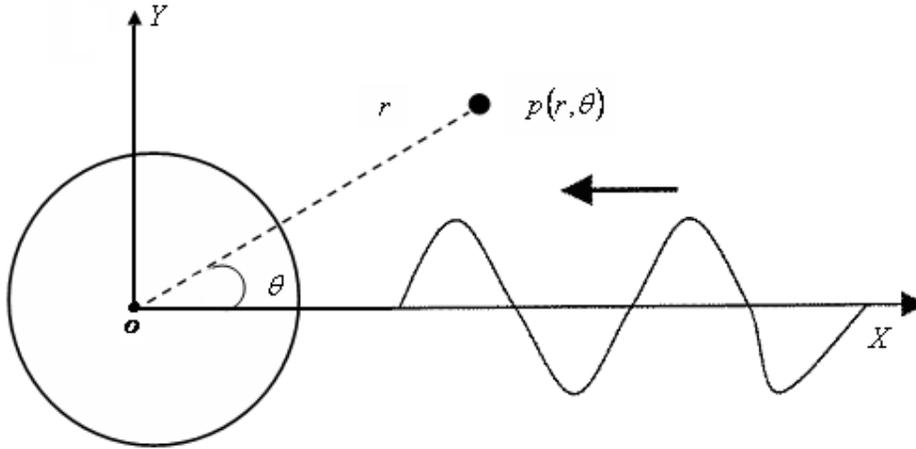


Figura 5.2 – Configuração do problema da onda espalhada

O eixo do cilindro rígido passa pela origem  $o$  do sistema de coordenadas polares. A onda plana incidente propaga-se no eixo X no sentido negativo. A variável  $r$  é a distância entre o eixo do cilindro e o ponto de observação  $p(r, \theta)$  e variável  $\theta$ , denominada ângulo polar, é o ângulo entre o eixo horizontal X e o segmento de reta que une a origem ao ponto  $p(r, \theta)$ . Tal ângulo é medido no sentido anti-horário a partir do eixo X. As regiões do plano entre os ângulos  $\theta = 0$  a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a  $\theta = \pi$  serão, denominadas, respectivamente, região anterior e região posterior do cilindro. Devido à simetria no cilindro, o potencial de velocidade espalhado  $\varphi_E$  será dado em função do ângulo polar  $\theta$  para metade dos 512 pontos de observação distribuídos no contorno do cilindro. O eixo das abcissas e o eixo das ordenadas serão respectivamente denominados, X e Y, sendo estes definidos, pelas expressões que se seguem:

$$X = \left| \frac{\varphi_E}{P_0} \right| \cos(\theta) \quad (5.3)$$

$$Y = \left| \frac{\varphi_E}{P_0} \right| \text{sen}(\theta) \quad (5.4)$$

O método de elementos de contorno foi utilizado para analisar o potencial de velocidade em pontos de observação localizados em diversas distâncias em relação ao eixo do cilindro. Tais pontos foram distribuídos em círculos concêntricos ao cilindro cujos raios representam a distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro. A simulação do potencial de velocidade espalhado foi realizada considerando-se a frequência normalizada  $\kappa a = 5$  para as distâncias  $R = 5 \text{ m}$ ,  $10 \text{ m}$ ,  $15 \text{ m}$ ,  $20 \text{ m}$ ,  $25 \text{ m}$  e  $50 \text{ m}$ .

### **5.3 – A influência da frequência no espalhamento acústico**

O método de elementos de contorno foi utilizado para analisar a influência da frequência normalizada  $\kappa a$  no potencial de velocidade em pontos de observação localizados no contorno do cilindro e em sua região exterior.

#### **5.3.1 – A influência da frequência no espalhamento acústico em pontos no contorno do cilindro**

A simulação do potencial de velocidade espalhado foi realizada para pontos que se localizam no contorno  $S$  do cilindro, isto é, à distância  $R = 1 \text{ m}$ , em relação a origem por onde passa o eixo do cilindro. As frequências normalizadas escolhidas para os testes correspondem a comprimentos de onda comparáveis à ordem de dimensão radial do cilindro. Tais frequências normalizadas são  $\kappa a = 2, 5, 10, 15, 25$ . Os resultados da simulação computacional são apresentados nas figuras:

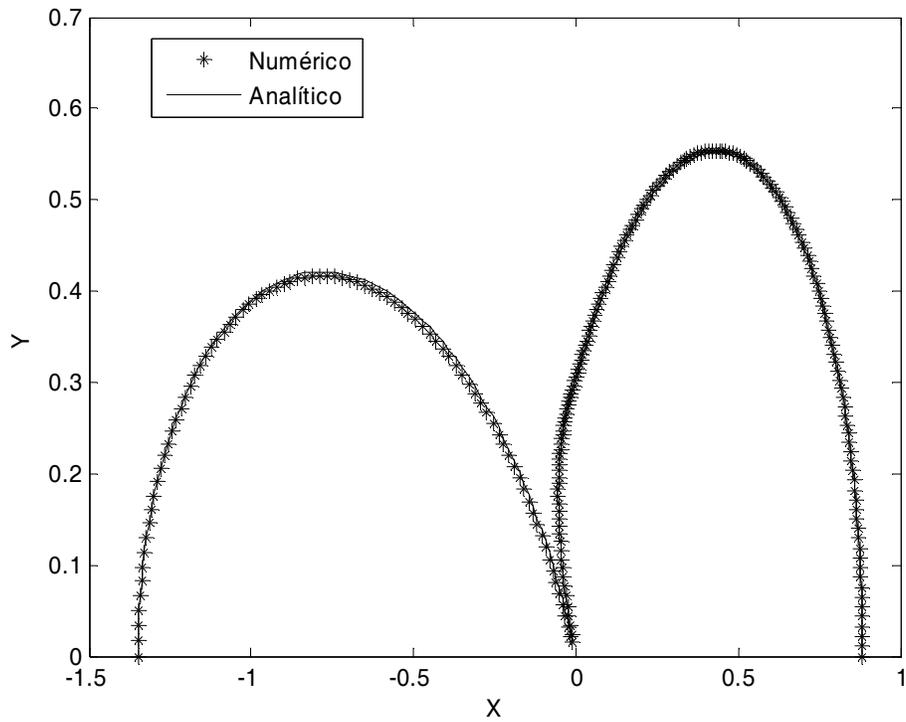


Figura 5.3 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 2$

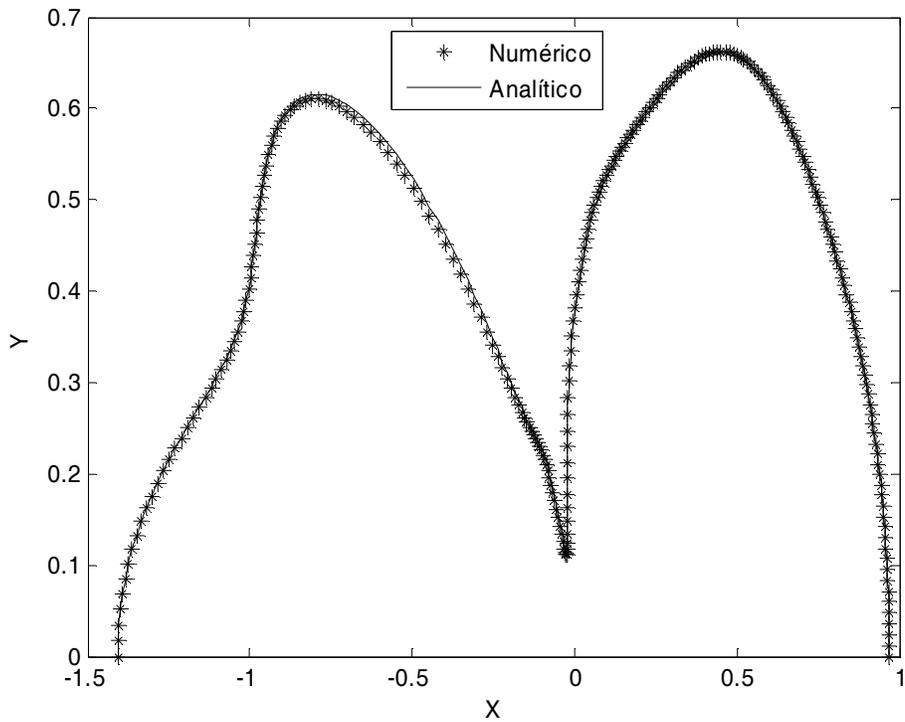


Figura 5.4 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 5$

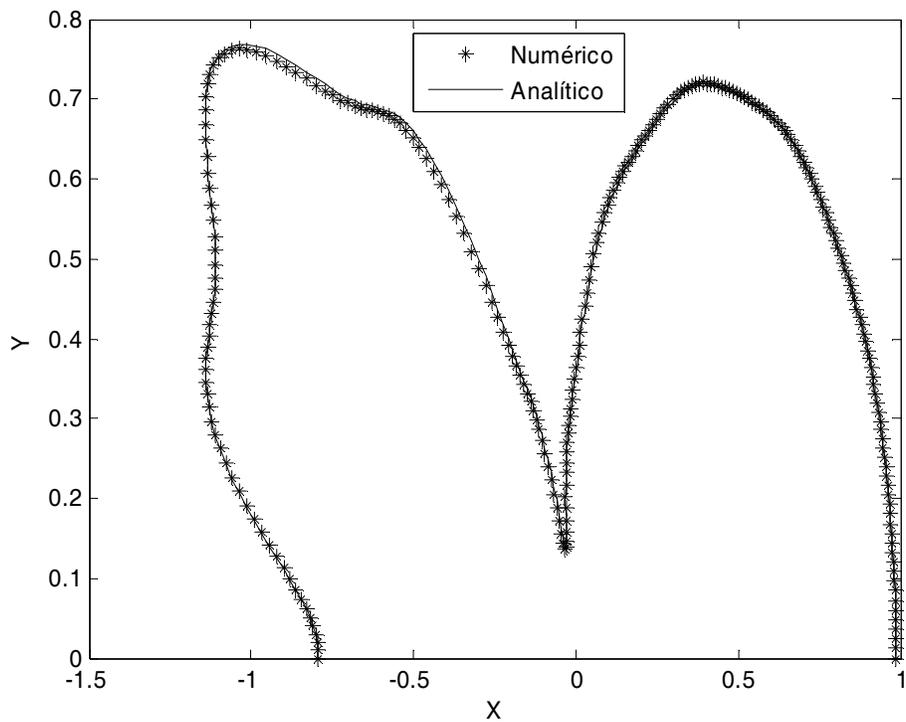


Figura 5.5 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa\alpha = 10$

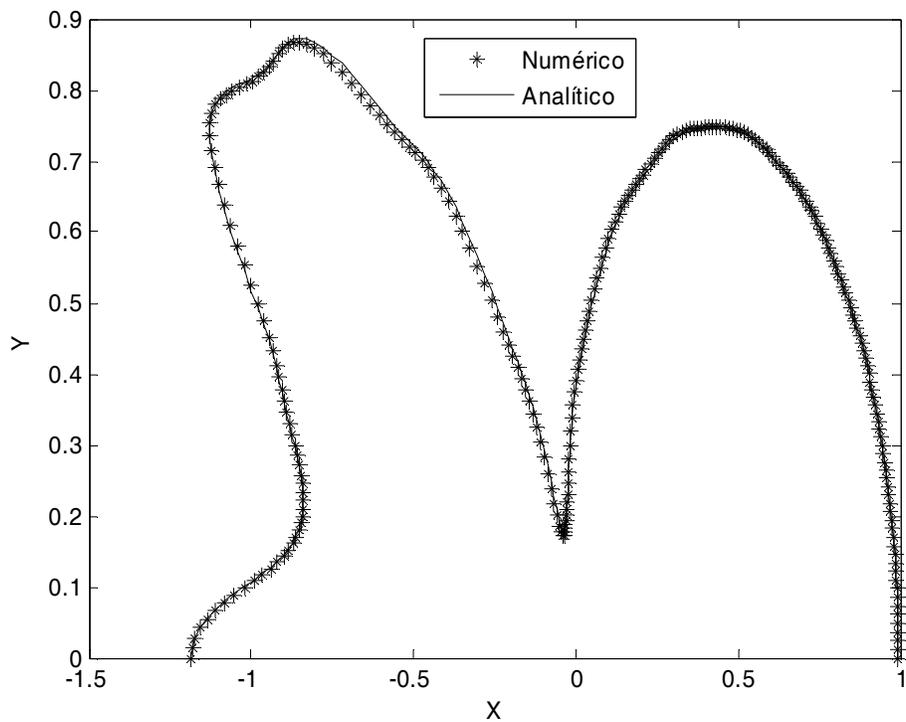


Figura 5.6 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa\alpha = 15$

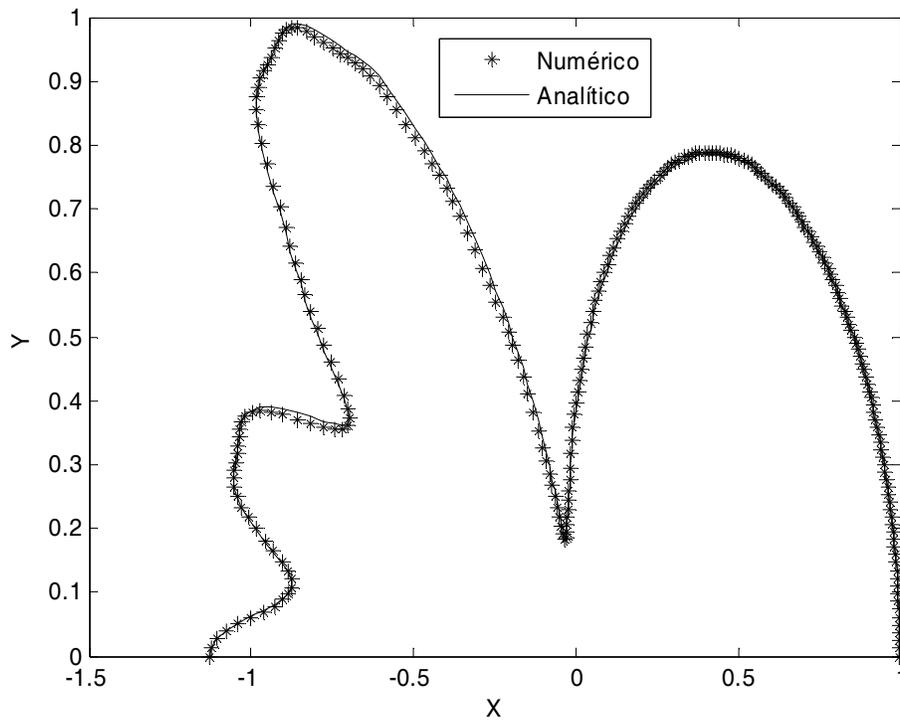


Figura 5.7 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 25$

A análise das figuras mostra como a variação na frequência normalizada  $\kappa a$  influencia no comportamento da onda que se espalha em todas as direções. Para as baixas frequências, o potencial de velocidade espalhado é mais intenso na região do plano anterior ao cilindro rígido. À medida em que a frequência normalizada aumenta, o potencial de velocidade se torna mais intenso na região do plano posterior ao cilindro. Para cada frequência normalizada  $\kappa a$ , calculou-se o valor absoluto do potencial de velocidade máximo nos pontos do contorno do cilindro. A tabela 5.1. mostra os valores.

Potencial de velocidade máximo $\varphi_E$	Frequência normalizada $\kappa a$
0.5546	2
0.6623	5
0.7628	10
0.8680	15
0.9847	25

Tabela 5.1 – Potencial de velocidade máximo para pontos no contorno do cilindro

A análise da tabela 5.1 mostra que o valor absoluto do potencial de velocidade máximo nos pontos de observação no contorno do cilindro aumenta com o crescimento da frequência normalizada  $\kappa a$ .

### 5.3.2 – A influência da frequência no espalhamento em pontos externos ao cilindro

A simulação do potencial de velocidade espalhado foi realizada para pontos localizados na região exterior  $\Omega_0$  do cilindro, isto é, à distância  $R = 5m$  em relação a origem por onde passa o eixo do cilindro rígido. As frequências normalizadas consideradas nessas simulações foram as mesmas utilizadas para os pontos de observação localizados no contorno do cilindro, ou seja,  $\kappa a = 2, 5, 10, 15$  e  $25$ . Os resultados dessas simulações são apresentados nas figuras:

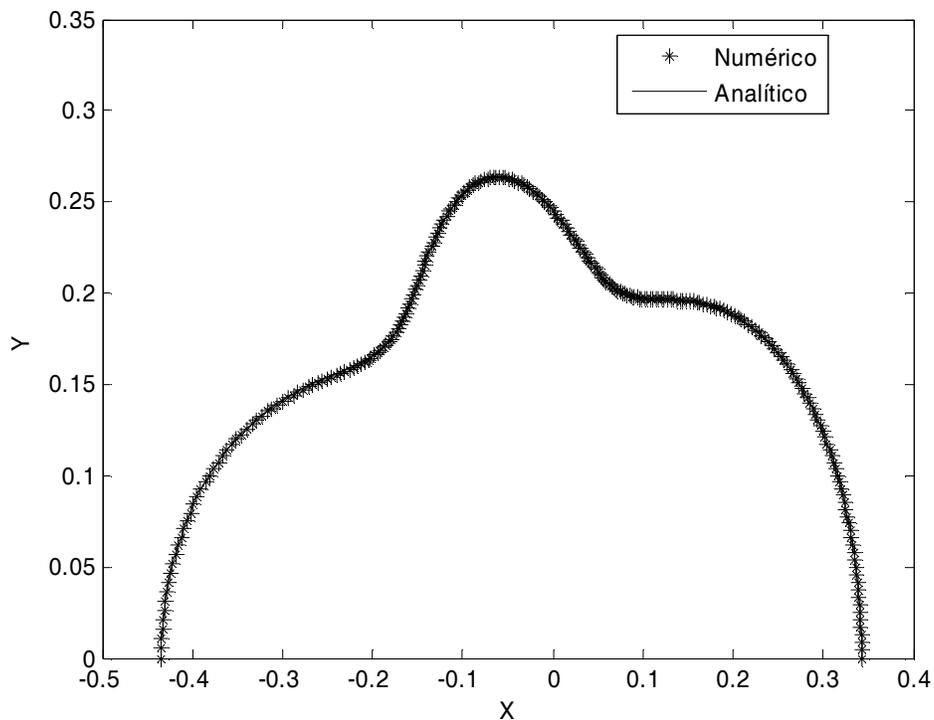


Figura 5.8 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 2$

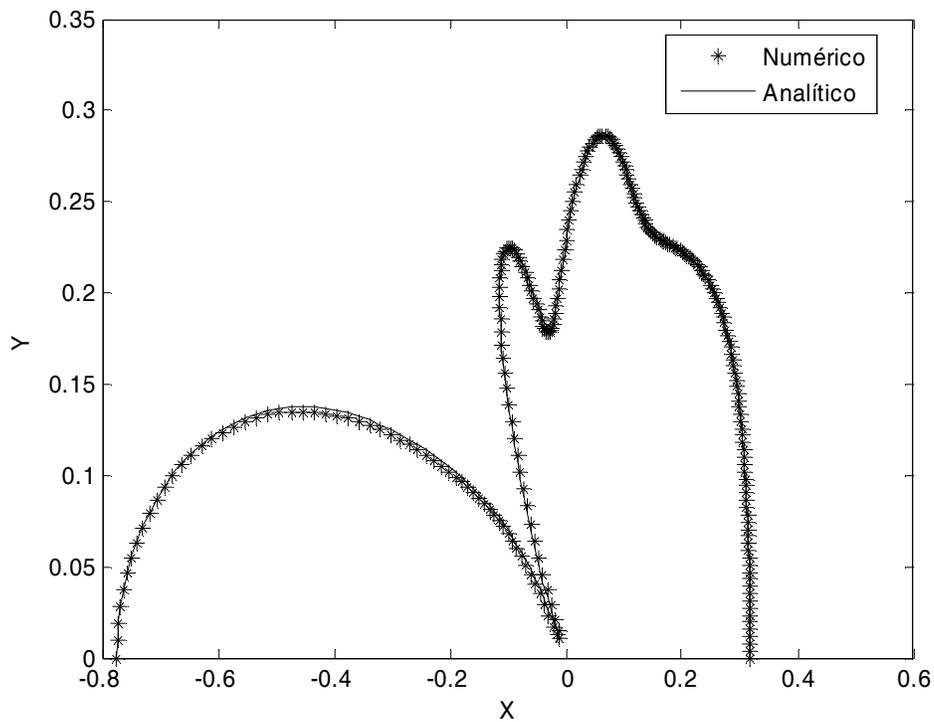


Figura 5.9 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 5$

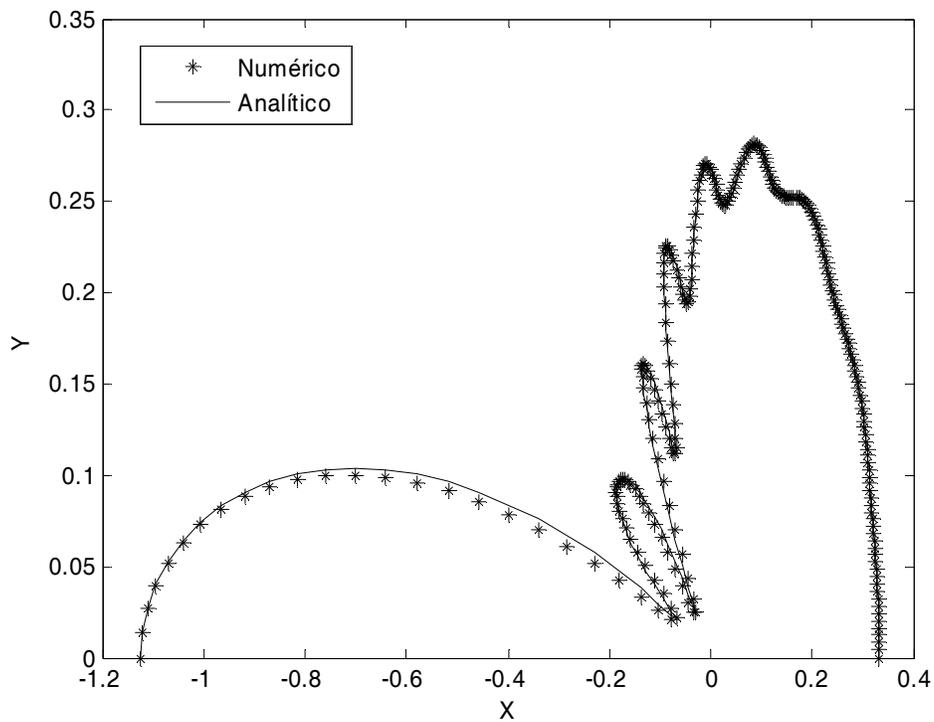


Figura 5.10 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 10$

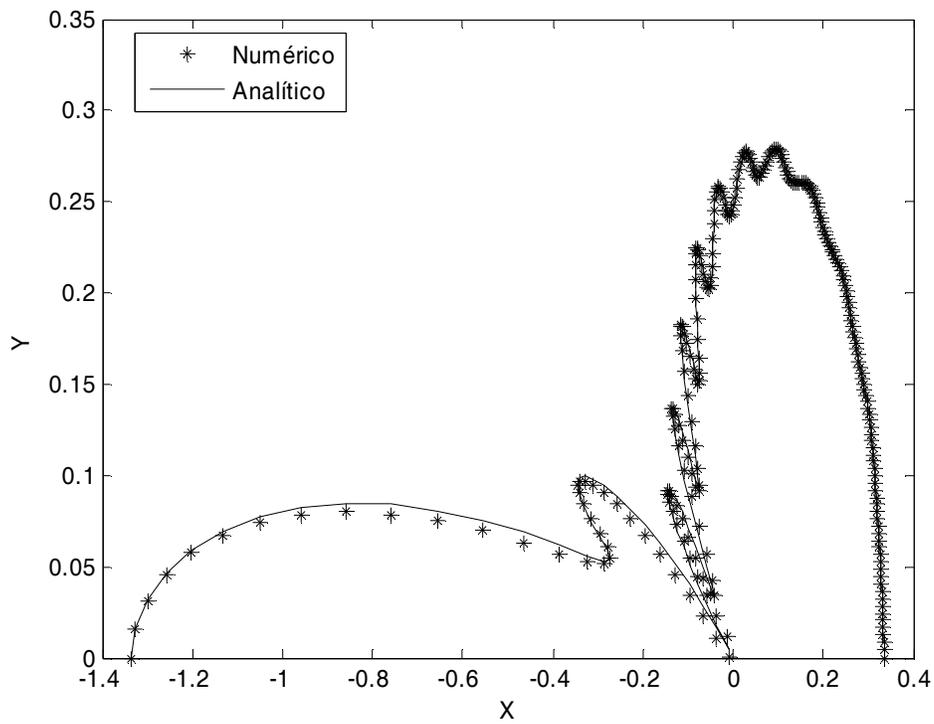


Figura 5.11 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 15$

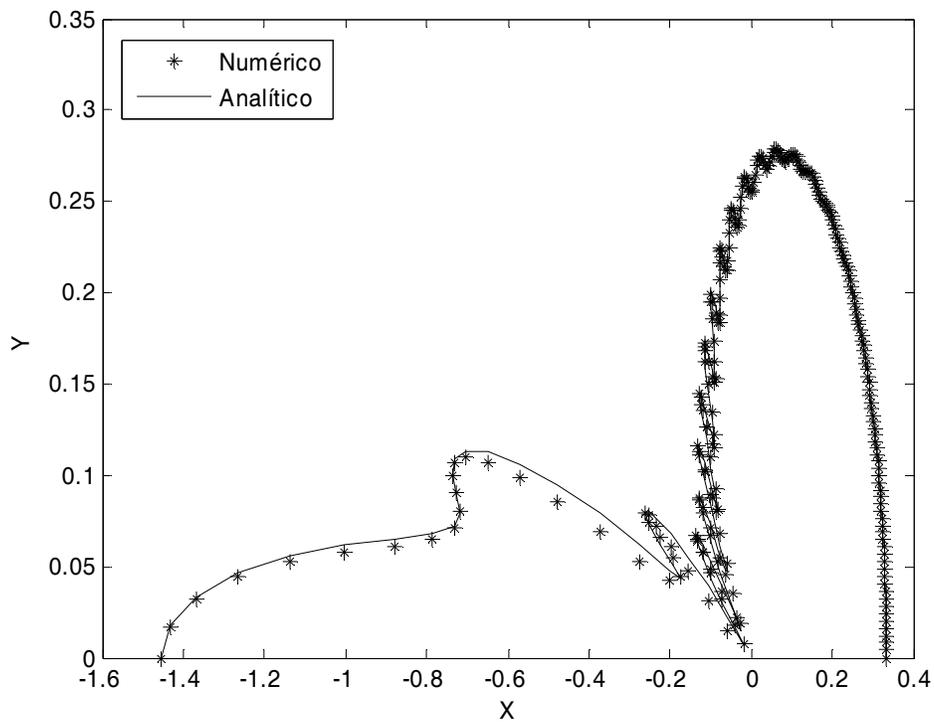


Figura 5.12 – Potencial de velocidade para frequência normalizada  $\kappa a = 25$

A análise das figuras mostra como a variação na frequência normalizada  $\kappa a$  influencia no comportamento da onda que se espalha em todas as direções. O aumento da frequência normalizada  $\kappa a$  produz o crescimento na oscilação do valor do potencial de velocidade em torno do cilindro. Para cada frequência normalizada  $\kappa a$ , calculou-se o valor absoluto do potencial de velocidade máximo nos pontos externos ao cilindro. Tais valores estão dispostos na tabela 5.2.

Maior potencial de velocidade $\varphi_E$	Frequência normalizada $\kappa a$
0.2635	2
0.2864	5
0.2815	10
0.2792	15
0.2789	25

Tabela 5.2 – Variação do potencial máximo em relação à frequência

Utilizando-se os valores dispostos na tabela 5.2, calcula-se o valor médio dos potenciais de velocidade máximos. Tal potencial de velocidade é 0.2815 e, como mostra a tabela 5.2, os potenciais de velocidade máximos oscilam mantendo-se próximos dele.

#### 5.4 – A influência da distância no potencial de velocidade espalhado

Os resultados das simulações do potencial de velocidade espalhado em pontos de observação localizados em diversas distâncias do eixo do cilindro de raio unitário são apresentados nas figuras:

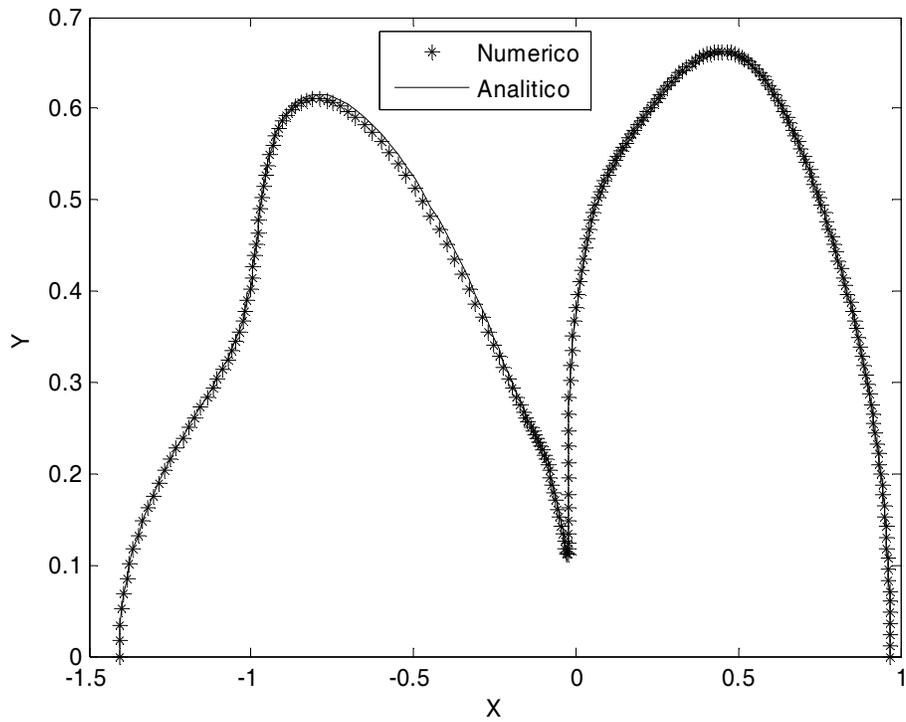


Figura 5.13 – Potencial de velocidade na distância  $R = 1\text{m}$

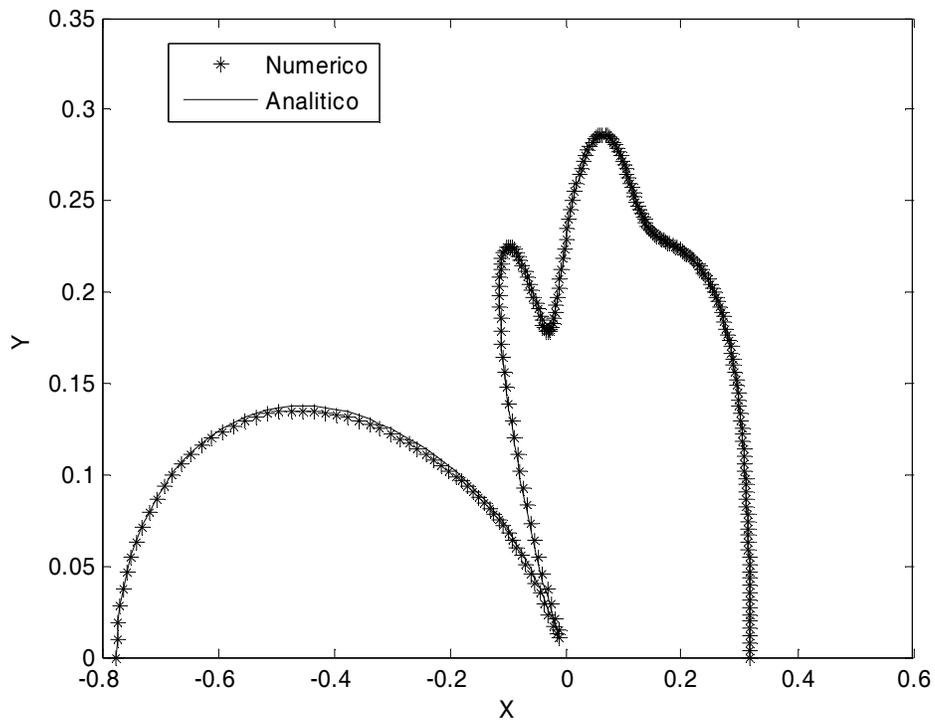


Figura 5.14 – Potencial de velocidade na distância  $R = 5\text{m}$

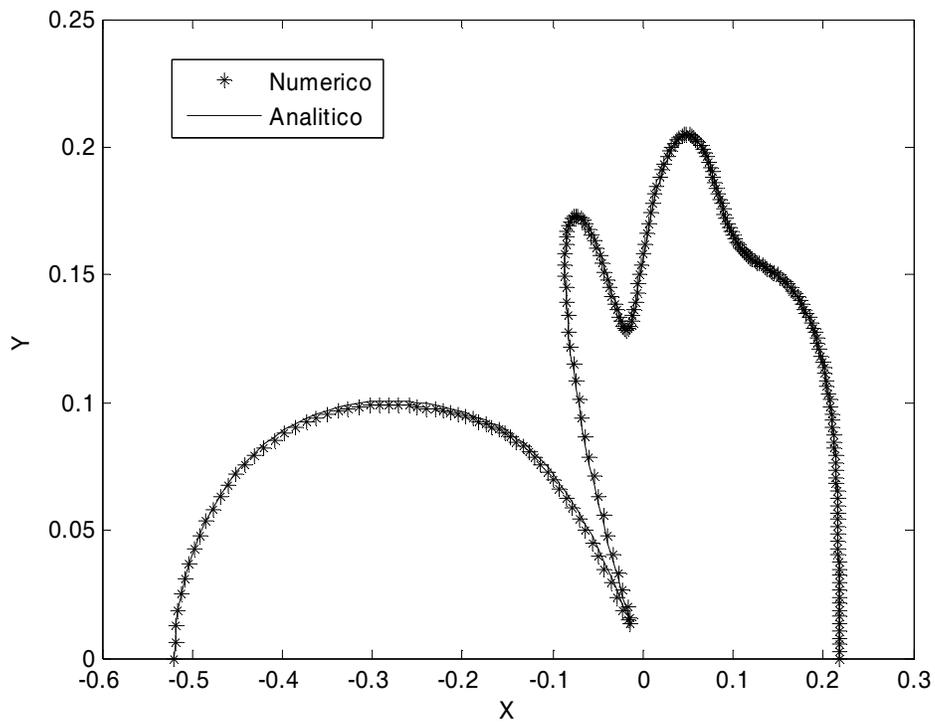


Figura 5.15 – Potencial de velocidade na distância  $R = 10\text{m}$

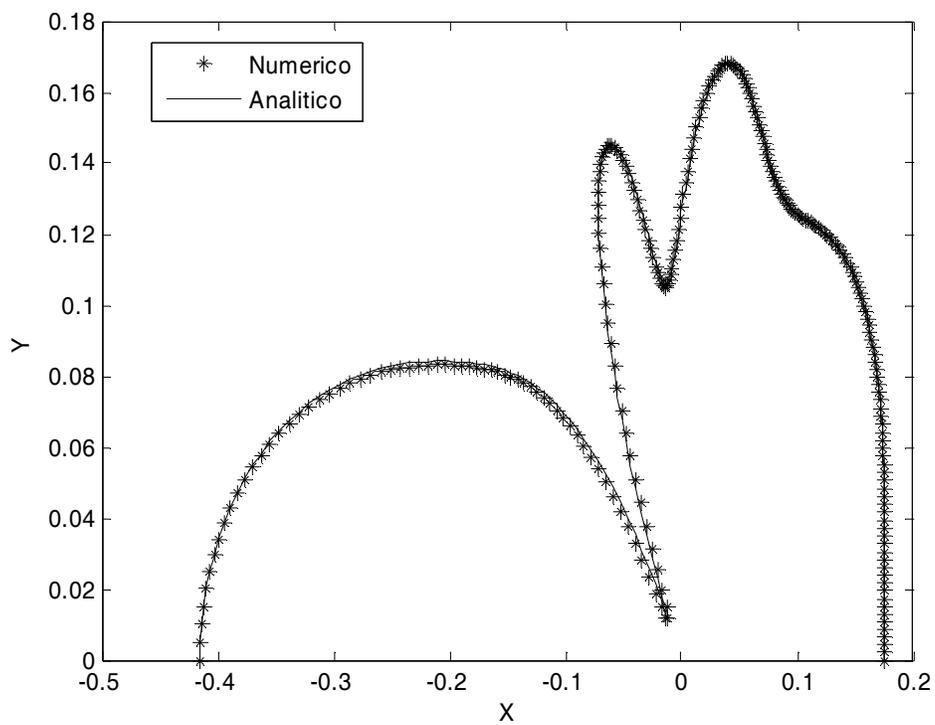


Figura 5.16 – Potencial de velocidade na distância  $R = 15\text{m}$

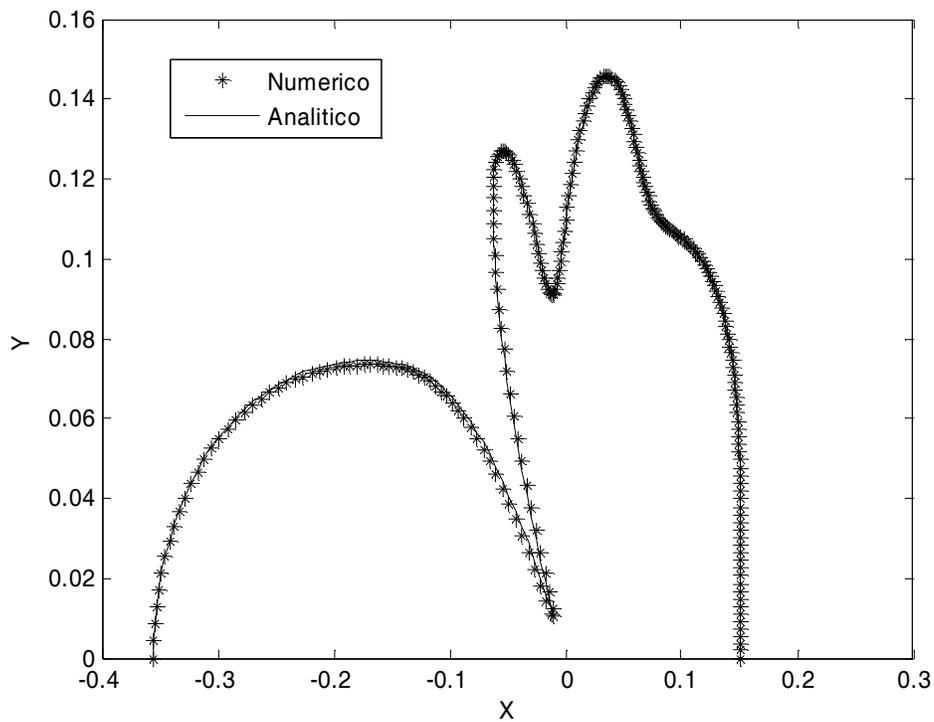


Figura 5.17 – Potencial de velocidade na distância  $R = 20\text{m}$

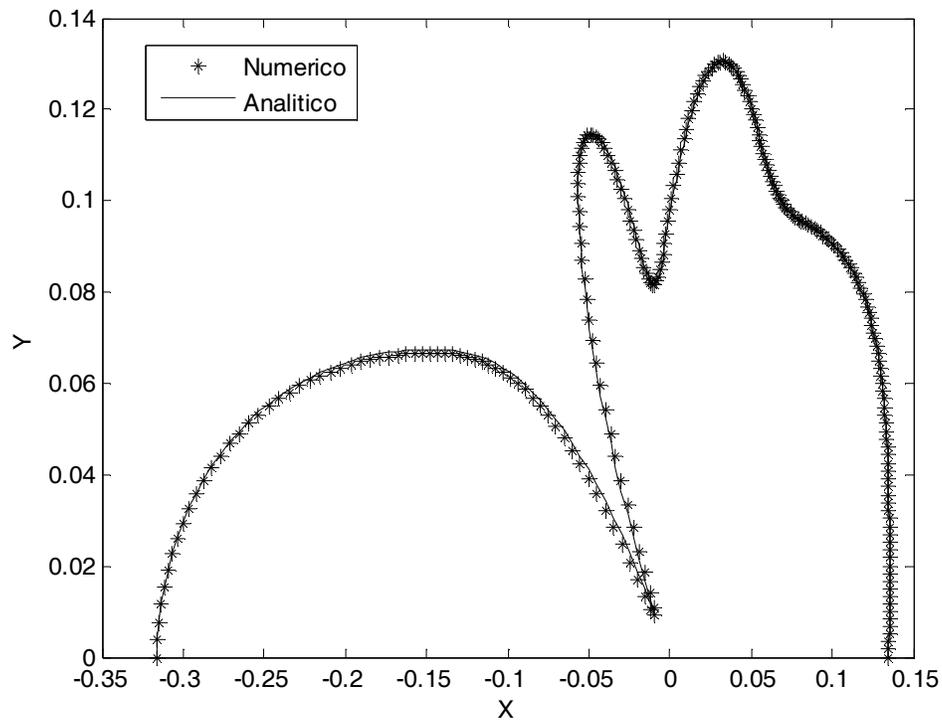


Figura 5.18 – Potencial de velocidade na distância  $R = 25\text{m}$

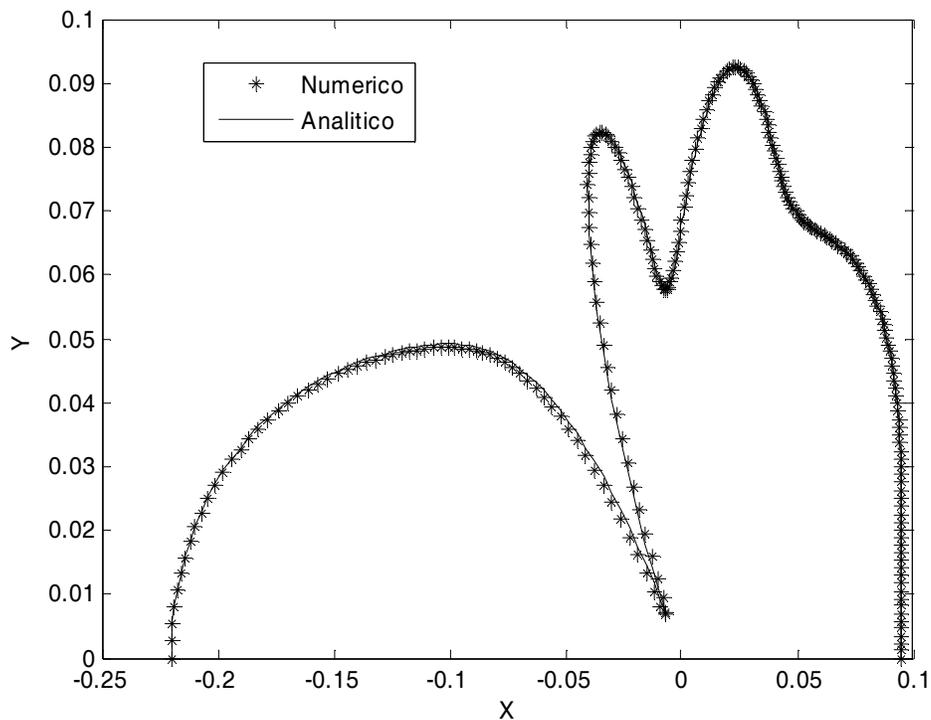


Figura 5.19 – Potencial de velocidade na distância  $R = 50m$

As figuras mostram que o potencial de velocidade diminui com o aumento da distância. O valor máximo do potencial de velocidade espalhado foi calculado, em cada teste, para se estudar como a distância  $R$  entre o ponto de observação  $p(r, \theta)$  e o eixo do cilindro de raio unitário influencia na redução do potencial de velocidade espalhado. Tais resultados estão dispostos na tabela 5.3

Distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro (metros)	Potencial de velocidade espalhado máximo
R = 1	0.6623
R = 5	0.2864
R = 10	0.2051
R = 15	0.1681
R = 20	0.1458
R = 25	0.1306
R = 50	0.0925

Tabela 5.3 – Variação do potencial de velocidade espalhado com a distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro rígido

A tabela 5.3 mostra que o maior potencial de velocidade espalhado ocorre num ponto de observação  $p(r, \theta)$  localizado no contorno do cilindro. À medida em que a distância  $R$  aumenta, o potencial de velocidade sofre redução. A tendência dessa atenuação é descrita pelo gráfico:

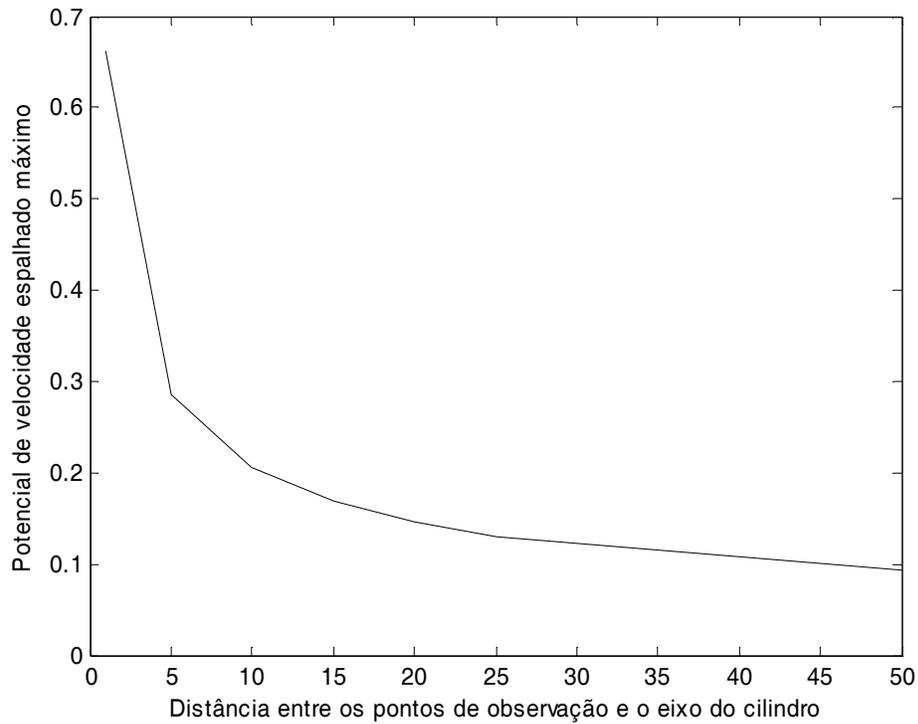


Figura 5.20 – Variação do potencial de velocidade espalhado máximo com a distância entre o ponto de observação e o eixo do cilindro de raio unitário

A figura 5.20 mostra a forma de atenuação no potencial de velocidade espalhado em função do aumento da distância entre o ponto de observação  $p(r, \theta)$  e o eixo do cilindro rígido e infinito. Tal atenuação decorre da solução fundamental da equação diferencial parcial de Helmholtz. Neste trabalho, escolheu-se o termo  $e^{-i\omega t}$  como fator temporal da solução  $\phi$  para a equação de onda. Dessa forma, segundo Ziomek (1995), a função de Hankel  $H_n^1$  de ordem  $n$  e tipo 1, representa uma onda divergente que se

afasta do obstáculo. Segundo Dettman (1969), tal função se comporta como a função  $\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$  para pontos localizados em grandes distâncias do obstáculo espalhador da onda.

O método de elementos de contorno estabeleceu, em um curto tempo de execução do código computacional, resultados precisos na análise das variáveis envolvidas no espalhamento da onda sonora por um cilindro infinito e rígido.

# Capítulo 6

## Conclusões e propostas para trabalhos futuros

---

### 6.1 – Introdução

Neste trabalho, analisou-se o problema do espalhamento acústico por um cilindro infinito utilizando-se sua formulação analítica e o método de elementos de contorno. O número de elementos utilizados para compor a malha que discretiza o contorno do obstáculo influencia no erro que decorre da comparação entre as soluções numérica e analítica e no esforço computacional empregado pela técnica numérica para resolver o problema da onda espalhada pelo cilindro rígido. Por essa razão, neste trabalho, escolheu-se um número de elementos para compor a malha que discretiza o contorno, de maneira que, o erro decorrente da comparação entre a solução analítica e a solução numérica estabeleça um nível de precisão satisfatório e o tempo de execução do código computacional seja pequeno.

As simulações computacionais mostram que, dependendo da localização dos pontos de observação, a variação da frequência normalizada produz resultados diferentes no valor do potencial de velocidade. Para pontos que se localizam no contorno do cilindro, o aumento da frequência normalizada produz o crescimento do valor absoluto do potencial de velocidade máximo. Para pontos que se localizam na região exterior do cilindro, o aumento da frequência normalizada faz o valor absoluto do potencial de velocidade máximo oscilar mantendo-se próximo a um valor médio.

A precisão dos resultados obtidos e o curto tempo de execução do código computacional nessas simulações revelam que o método de elementos de contorno é uma técnica numérica eficiente para estudar o espalhamento da onda sonora por um objeto com forma geométrica complexa e condição arbitrária. Dessa forma, obtém-se

uma ferramenta computacional que encontra variadas aplicações na arquitetura e na engenharia.

## **6.2 – Propostas para trabalhos futuros**

O presente trabalho apresenta uma das diversas aplicações do Método de Elementos de Contorno à área da Acústica. Algumas sugestões de continuidade desse trabalho, na Acústica ou em outra área, são formuladas a seguir.

### **6.2.1 – Espalhamento acústico**

Neste trabalho, a utilização de elementos constantes nas malhas empregada na discretização do contorno do obstáculo, assegurou resultados satisfatórios e um baixo custo na execução do programa durante a análise do problema do espalhamento da onda sonora por um cilindro rígido e infinito. Esse estudo pode ser aprimorado pelo aumento da eficiência da técnica numérica integral empregada. Por isso, torna-se importante utilizar, na malha que discretiza o contorno, elementos polinomiais de ordem mais alta, como por exemplo, quadrática ou cúbica, para aumentar a precisão dos resultados numéricos obtidos na aplicação do método de elementos de contorno ao problema do espalhamento da onda sonora por um obstáculo com forma geométrica qualquer e condição de contorno arbitrária. Desenvolver essa forma de abordagem para essa técnica numérica integral é uma maneira de dar continuidade a este trabalho.

### **6.2.2 – Ultra-sonografia**

Um trabalho futuro importante consiste em aplicar o método de elementos de contorno para estudar as características da onda sonora espalhada pelos tecidos do corpo humano que possuem forma geométrica complexa. Dessa forma, contribui-se para a melhoria na eficiência dessa técnica diagnóstica e, por conseqüência, dos tratamentos médicos.

### **6.2.3 – Barreiras acústicas**

A barreira acústica é um dispositivo colocado entre uma fonte de onda sonora e um receptor para atenuar o nível de ruído emitido pela fonte sonora que chega ao receptor. A onda sonora ao atingir uma barreira acústica se espalha em todas as direções. Uma proposta de continuidade deste trabalho é aplicar o Método de Elementos de Contorno para analisar a onda sonora espalhada por uma barreira acústica.

# Referências Bibliográficas

---

Banaugh, R.P, Goldsmith, W. Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of the arbitrary shape. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 35, pp. 1590 - 1601. 1963.

Brebbia, C.A, Ciskowski, R.D. Boundary Element Methods in Acoustics. 1991. New York: Elsevier Applied Science, 1991.

Brebbia, C.A, Walker, S. Boundary element techniques in engineering. London: Newnes-Butterworths, 1980.

Bickford, W.B. A first course in the finite element method. Burr Ridge: Irwin, 1994.

Borges, E, N.M. Estudo da Emissão e do cancelamento de campos acústicos para o controle ativo de ruídos em subestações elétricas. Tese de doutorado, UFMG, Belo Horizonte, 2002.

Brascho D.J, Shawker T.H. Abdominal Ultrasound in the Cancer Patient. New York. John Wiley & Sons, 1982.

Butkov, E. Física matemática. Rio de Janeiro: LTC, 1988

Campos Filho, F.F. Algoritmos numéricos. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

Cerri, GG, Rocha, DC. Ultra-Sonografia Abdominal. São Paulo: Sarvier, 1996.

Chandrupatla T; Bellegundu, A.D. Introduction to finite elements in engineering. Upper Saddle River, NJ : Prentice hall, 1991.

Chapra, S.C, Canale, R.P. Numerical methods for engineers. New York: McGraw-Hill, 2002.

Chen, L.H., and Schweikert, D.G. Sound radiation from an arbitrary body. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 35, pp. 1626-1632. 1963.

Chertock, G. Sound Radiation from Vibrating Surfaces. The Journal of the Acoustical Society of America, v.36, pp. 1305 - 1313. 1964.

Copley, L.G. Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 44, pp. 28 - 32. 1967.

Cruse, T.A, Rizzo, F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 22, pp. 244 - 259. 1968.

Cruse, T.A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 22, pp. 341 - 355. 1968.

Costa, E, S. Modelagem e simulação numérica da radiação acústica de um cilindro pulsante. 2008. Dissertação de Mestrado, CEFET-MG, Belo Horizonte, 2008.

Dettman, J.W. Mathematical methods in physics and engineering. New York: McGraw-Hill, 1969.

Gerges, S. N.Y. Ruído: Fundamentos e controle. Florianópolis: NR, 2000.

Hall, W. S. The boundary element method. Dordrecht: Kluwer, 1994.

Harrington, R.F, Mautz J. R. Computation Rotationally Symmetric Laplacian Potentials. Proceedings IEE, v. 117, pp. 850 - 852. 1970.

Issei,T, Embleton, T.F.W, Piercy, J.E. Noise reduction by barriers on finite ground. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 67, p. 46 - 58. 1980.

Jaswon, M. Integral Equation Methods in the Potential Theory, I. Proceedings of the Royal Society, v. 275, pp. 23 - 32. 1963.

Jaswon, M.A. Integral equation Methods in the potencial theory and elastostatics. Academic press, Nova York Academic Press, 1977

Kinsler, L. E. Fundamentals of acoustics. New York: 1982.

Ko, W, Karlsson, T. Application of Kirchhoff's integral equation formulation to an elastic wave scattering problem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 34, pp. 921 - 930. 1967.

Kurze, U.J, Anderson, G.S. Sound attenuation by barriers. Applied Acoustics, v. 4, p. 35 - 53. 1971.

Kytbe, P.K. An introduction to boundary element methods. Boca Raton CRC, 1995.

Maekawa, Z. Noise reduction by screens. Applied Acoustics, v. 1, p. 157 - 173. 1968.

Manolis, G.D, Beskos, D.E. Boundary element methods in elastodynamics. London: Unwin Hyman, 1988.

Maria, M.E, Borges, E.N.M, Afonso, M.M. Analytical and numerical study of the acoustical scattering using boundary element method. CILAMCE – 30<sup>0</sup> Congresso Ibero – Latino – Americano de Métodos Numéricos Computacionais em Engenharia, 2009

Menounou, P.A correction to Maekawa's curve for the insertion loss behind barriers. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 110, pp. 1828 - 1838. 2001.

Morse, P.M, Ingard, K. Uno. Theoretical acoustics. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1986.

Murgel, E. Fundamentos de Acústica Ambiental. São Paulo: Editora Senac, 2007.

Nicolas, J, Embleton, T.F.W and Piercy, J.E. Precise model measurements versus theoretical prediction of barrier insertion loss in presence of the ground. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 73, p. 44 - 54. 1983.

Pappini, G. S. Estudo Numérico de Barreiras Acústicas. 1999. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, 1999.

Pierce, A.D. Acoustics, An introduction to its physical principles and applications. New York: Acoustical Society of America Library, 1989.

Sharma, D.L. Scattering of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape. Bulletin of the Seismological society of America, v. 57, pp. 795 - 812. 1967.

Shaw, R.P. Retarded potential approach to the scattering of elastic waves by rigid obstacles of arbitrary shape. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 44, pp. 745 - 748. 1968.

Schenk, H. A. Improved Integral Formulation for acoustic radiation problems. Journal of the Acoustical Society of America, v. 44, pp. 41 - 58. 1968.

Symm, G.T. Integral Equation Methods in the Potential Theory, II. Proceedings of the Royal Society, v. 275, pp. 33 - 46. 1963.

Yoon, W.S, Park, J.M, Eversman, W. Two dimensional radiation and scattering at short wave length. Journal of Vibration and Acoustics, v.112, pp. 384 - 391. 1990.

Watterman, P.C. New formulation of acoustic scattering. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 45, pp. 1417 - 1429. 1969.

Ziviani, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C. São Paulo: Pioneira, 1996.

Ziomek, L.J. Fundamentals of acoustic field theory and space-time signal processing. Boca Raton CRC, 1995.

# Anexo A

---

## A.1 – Equação linear da onda acústica

Para se estabelecer a equação que descreve a radiação acústica, utiliza-se as equações de estado, de conservação da massa e da quantidade de movimento.

## A.2 – Equação de Estado

A equação de estado para o fluido relaciona as forças internas restauradoras com as correspondentes deformações no fluido. Considerando-se um gás perfeito tem-se a seguinte equação de estado.

$$P = \rho r T_K \tag{A.1}$$

que relaciona a pressão instantânea  $P$  (em Pascal-Pa), a densidade instantânea  $\rho$  ( $\text{Kg/m}^3$ ) e a temperatura absoluta  $T_K$  (Kelvins), para um grande número de gases sob condições de equilíbrio. Dependendo da capacidade térmica do recipiente que o gás perfeito é descrito por um processo isotérmico em que a equação de estado se torna, Kinsler (1982):

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \tag{A.2}$$

No entanto a experiência mostra que os processos acústicos são aproximadamente adiabáticos. Nesse caso, o gás perfeito é descrito pela equação de estado a seguir:

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \tag{A.3}$$

Na equação (A.3),  $\gamma$  é a razão entre os valores específicos à pressão e volume constantes. Na acústica não se trabalha com gases perfeitos, mas com gases reais. Neste caso, a relação isentrópica entre pressão e flutuação na densidade do fluido pode ser representada através de uma expansão em série de Taylor

$$P = P_0 + \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (\text{A.4})$$

Na expressão acima, as derivadas parciais são constantes determinadas pela compressão adiabática e pela expansão do fluido em torno de sua densidade de equilíbrio. Se tais flutuações são pequenas, somente os termos de ordem mais baixa  $(\rho - \rho_0)$  são considerados. Isto fornece uma relação linear entre flutuação de pressão e variação de densidade

$$P - P_0 = \beta \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (\text{A.5})$$

Na equação (A.5),  $\beta$  é o módulo adiabático ou coeficiente de expansão volumétrica do fluido, dado por

$$\beta = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} . \quad (\text{A.6})$$

Kinsler define a condensação  $s$  em um ponto como a variação da densidade de equilíbrio  $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$  e a pressão acústica como a variação da pressão de equilíbrio  $p = P - P_0$ . Dessa maneira pode-se expressar a equação (A.3) em termos da pressão acústica  $p$  e da condensação  $s$  que deve ser muito pequena,  $|s| \ll 1$ .

$$p \approx \beta s . \quad (\text{A.7})$$

### A.3 – Equação de Euler

A equação da conservação da quantidade de movimento relaciona a pressão acústica  $p$  com a velocidade  $\vec{u}$  instantânea de partícula, para um fluido adiabático e não viscoso. Assim, a equação de Euler para fenômenos acústicos de pequena amplitude

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (\text{A.8})$$

### A.4 – Equação de Continuidade

A equação de continuidade relaciona a taxa de crescimento de massa num elemento de volume com o fluxo de massa através da superfície fechada que envolve esse volume. Uma vez que o fluxo deve ser igual à taxa de crescimento, obtém-se a equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Como a densidade instantânea  $\rho$  pode ser expressa em função da condensação  $\rho = \rho_0(1 + s)$ , pode-se usar o fato que  $\rho_0$  é constante no espaço e no tempo, e  $s$  é muito pequena, isto é,  $|s| \ll 1$ . Dessa forma, a equação acima pode ser expressa por

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{A.10})$$

### A.5 – Equação Linear da Onda

Aplicando-se o operador divergente em ambos os lados da equação (A.10), obtém-se

$$\rho_0 \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 p \quad (\text{A.11})$$

Na equação (A.11),  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano. Derivando-se a equação (A.9) em relação ao tempo e usando o fato que

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.12})$$

obtem-se:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

As equações (A.10) e (A.11) podem ser combinadas numa única equação:

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

Utilizando-se a equação de estado (A.6) para eliminar a condensação  $s$ , obtem-se

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

Na equação (A.15), a constante  $c$  é definida como:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (\text{A.16})$$

é denominada velocidade de propagação da onda acústica no meio.

A equação (A.15) é a equação linear de onda para a propagação de sons em fluidos, num meio homogêneo sem perdas. Para fluidos não viscosos, a velocidade da

partícula é irrotacional, ou seja,  $\nabla \times \vec{u} = 0$ . Isso significa que ela pode ser expressa como o gradiente de uma função escalar  $\phi$ , denominada potencial de velocidade,

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (\text{A.17})$$

Substituindo-se a expressão acima na equação (A.9), obtém-se

$$\nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p \right) = 0 \quad (\text{A.18})$$

A expressão entre parênteses na equação (A.17) pode ser escolhida nula caso não haja excitação acústica. Dessa forma, tem-se que

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo-se a equação (A.18) na equação (A.10), obtém-se a equação de onda linearizada, expressa em termos do potencial de velocidade de onda acústica:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{A.20})$$

# Anexo B

---

## Formulação analítica do espalhamento acústico pelo cilindro rígido

A solução da equação não homogênea (2.4) será obtida utilizando-se as soluções fundamentais da equação diferencial parcial homogênea equivalente dada por, Dettman (1969):

$$\frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial \theta^2} + \kappa^2 \varphi_E = 0 \quad (\text{B.1})$$

As soluções procuradas para a equação (B.1) são da forma:

$$\varphi_E(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (\text{B.2})$$

Na equação (B.2),  $R$  e  $\Theta$  são funções que dependem, respectivamente, da distância radial  $r$  e do ângulo  $\theta$ .

O método de separação de variáveis pode ser utilizado para encontrar tais funções. Substituindo-se a equação (B.2) na equação (B.1) tem-se, Morse (1986):

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} R = 0 \quad (\text{B.3})$$

Multiplicando-se os ambos os lados da equação (B.3) por  $r^2$  obtem-se:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + r \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} R = 0 \quad (\text{B.4})$$

Dividindo-se ambos os lados da equação (B.4) por  $R\Theta$  obtem-se:

$$\left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) \frac{1}{R} = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (\text{B.5})$$

O lado esquerdo da equação (B.5) depende apenas de  $r$  e o lado direito envolve apenas  $\theta$ , assim, os dois membros da equação são constantes. Dessa forma, a equação (B.5) se torna:

$$\left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) \frac{1}{R} = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \lambda \quad (\text{B.6})$$

Assim, a equação diferencial parcial (B.3) foi separada em duas equações diferenciais ordinárias dadas a seguir:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda \Theta = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0 \quad (\text{B.8})$$

A solução da equação (B.7) é dada pela expressão:

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos(m\theta) + B_m \text{sen}(m\theta) \quad (\text{B.9})$$

O cilindro rígido utilizado como obstáculo para a onda plana incidente é bidimensional. Nesse caso, o coeficiente  $B_m$  é nulo, Ziomek (1995). Dessa forma, a equação (B.9) se torna:

$$\Theta_m(\theta) = A_m \cos(m\theta) \quad (\text{B.10})$$

A solução da equação ordinária radial (B.8) é dada por:

$$R(r) = J_m(\kappa r) + iN_m(\kappa r) \quad (\text{B.11})$$

O ponto de observação  $p(r, \theta)$ , que tem coordenada  $r$  nula, não pertence ao domínio do problema da onda espalhada pelo cilindro, por isso a função de Bessel de segunda espécie  $N_m(\kappa r)$  é considerada na solução. O sinal positivo garante que a onda espalhada se afasta do cilindro propagando-se para o infinito.

A tentativa de encontrar soluções na forma  $\varphi(r, \theta)$  para a EDP de Helmholtz leva a um número infinito de funções que satisfazem a equação diferencial e a condição de contorno de Neumann e são escritas na forma:

$$\varphi_m(\theta, r) = A_m \cos(m\theta) [J_m(\kappa r) + iN_m(\kappa r)] \quad (\text{B.12})$$

A solução  $\varphi_E(r, \theta)$  da EDP de Helmholtz não homogênea dada pela equação (2.4) é dada pela soma infinita das soluções da EDP de Helmholtz homogênea, dada na equação (B.12) e se torna, Morse (1986):

$$\varphi_E(r, \theta) = A_0 [J_0(\kappa r) + iN_0(\kappa r)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) [J_m(\kappa r) + iN_m(\kappa r)] \quad (\text{B.13})$$

Para determinar os coeficientes  $A_m$  na equação (B.13), são utilizadas as derivadas normais  $\frac{\partial \varphi_E}{\partial n}$  e  $\frac{\partial \varphi_I}{\partial n}$  e a condição de Neumann. Dessa forma, como demonstrado no anexo C, os coeficientes  $A_m$  e  $A_0$  são dados, respectivamente, por:

$$A_m = -\varepsilon_m i^{m+1} e^{-i\gamma_m} \text{sen}(\gamma_m) \quad (\text{B.14})$$

$$A_0 = -\varepsilon_0 i e^{-i\gamma_0} \text{sen}(\gamma_0) \quad (\text{B.15})$$

Nas equações (B.14) e (B.15), os ângulos  $\gamma_m$  e  $\gamma_0$  são dados, respectivamente, pelas expressões a seguir:

$$\tan \gamma_m = \frac{J_{m-1}(\kappa r) - J_{m+1}(\kappa r)}{N_{m+1}(\kappa r) - N_{m-1}(\kappa r)} \quad (\text{B.16})$$

$$\tan \gamma_0 = -\frac{J_1(\kappa r)}{N_1(\kappa r)} \quad (\text{B.17})$$

Nas equações (B.15) e (B.14), os coeficientes  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_m$  são, respectivamente, 1 e 2

# Anexo C

---

## Enésimo coeficiente da solução analítica do potencial de velocidade espalhado

O potencial de velocidade harmônico no tempo de uma onda plana incidente  $\phi_I(t, p)$  num ponto  $p(r, \theta)$  qualquer do plano e num dado tempo  $t$  é dado por:

$$\phi_I(t, p) = \varphi_I(p) e^{i\omega t} \quad (\text{C.1})$$

Na equação (C.1),  $\varphi_I(p)$  é a parte espacial do potencial de velocidade incidente e  $e^{i\omega t}$  é a parte temporal. A parte espacial do potencial de velocidade incidente  $\varphi_I(r, \theta)$  é dada em coordenadas cilíndricas, pela expressão a seguir:

$$\varphi_I(r, \theta) = A_0 P_0 \left[ J_0(\kappa r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos(m\theta) J_m(\kappa r) \right] \quad (\text{C.2})$$

A derivada normal do potencial de velocidade da onda plana incidente é dada pela expressão:

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial n} = \frac{P_0}{\rho c} \left\{ i J_1(\kappa r) + \sum_{m=1}^{\infty} i^{m+1} [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r)] \cos(m\theta) \right\} \quad (\text{C.3})$$

A solução  $\varphi_E(r, \theta)$  da EDP que representa a onda espalhada pelo cilindro, como demonstrado no anexo B, é dada por:

$$\varphi_E(r, \theta) = A_0 [J_0(\kappa r) + i N_0(\kappa r)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) [J_m(\kappa r) + i N_m(\kappa r)] \quad (\text{C.4})$$

A derivada normal do potencial de velocidade espalhado  $\frac{\partial \varphi_E}{\partial n}$  é dada por:

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial n} = \frac{1}{\rho c} \left\{ \begin{aligned} & iA_0 [J_1(\kappa r) + iN_1(\kappa r)] \\ & + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\theta) [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r) + iN_{m+1}(\kappa r) - iN_{m-1}(\kappa r)] \end{aligned} \right\} \quad (C.5)$$

O cilindro é rígido, portanto, em sua superfície, o potencial de velocidade espalhado  $\varphi_E$  satisfaz-se a condição de contorno de Neumann:

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_E}{\partial n} = 0 \quad (C.6)$$

A condição de contorno de Neumann é reescrita como:

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_I}{\partial n} \quad (C.7)$$

Igualando o primeiro termo das equações (C.3) e (C.5), tem-se:

$$\frac{1}{\rho c} iA_0 [J_1(\kappa r) + iN_1(\kappa r)] = -\frac{P_0}{\rho c} iJ_1(\kappa r) \quad (C.8)$$

O coeficiente  $A_0$  é dado pela expressão:

$$A_0 = \frac{-\frac{P_0}{\rho c} iJ_1(\kappa r)}{\frac{1}{\rho c} i[J_1(\kappa r) + iN_1(\kappa r)]} = -P_0 \frac{J_1(\kappa r)}{H_1(\kappa r)} \quad (C.9)$$

As funções de Bessel e Neumann da equação (C.9) se relacionam com as funções seno e cosseno. Tal relação é dada por:

$$J_1(\kappa r) = \frac{1}{2} E_0 \text{sen}(\gamma_0) \quad (C.10)$$

$$N_1(\kappa r) = -\frac{1}{2} E_0 \cos(\gamma_0) \quad (\text{C.11})$$

Substituindo as equações (C.10) e (C.11) na equação (C.9), tem-se:

$$A_0 = \frac{-\frac{1}{2} P_0 E_0 \text{sen}(\gamma_0)}{\frac{1}{2} E_0 \text{sen}(\gamma_0) - \frac{1}{2} i E_0 \cos(\gamma_0)} = -\frac{P_0 \text{sen}(\gamma_0)}{(\text{sen}(\gamma_0) - i \cos(\gamma_0))} \quad (\text{C.12})$$

Em seguida, multiplicando-se a equação (C.12) pelo conjugado de  $\text{sen}(\gamma_0) - i \cos(\gamma_0)$  e fazendo  $-1 = i^2$ , tem-se:

$$A_0 = i^2 P_0 \text{sen}(\gamma_0) (\text{sen}(\gamma_0) + i \cos(\gamma_0)) \quad (\text{C.13})$$

Multiplicando a equação (C.13) por  $\frac{(-i)}{(-i)}$  tem-se:

$$A_0 = P_0 i \text{sen}(\gamma_0) (\cos(\gamma_0) - i \text{sen}(\gamma_0)) \quad (\text{C.14})$$

Substituindo-se a relação

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \text{sen}(z) \quad (\text{C.15})$$

na equação (C.14) tem-se:

$$A_0 = -P_0 i e^{-i\gamma_0} \text{sen}(\gamma_0) \quad (\text{C.16})$$

Fazendo  $\varepsilon_0 = 1$ , a equação (C.16) é reescrita como

$$A_0 = -\varepsilon_0 P_0 i e^{-i\gamma_0} \text{sen}(\gamma_0) \quad (\text{C.17})$$

A equação (C.17) representa o termo independente da solução analítica do espalhamento acústico por um cilindro.

Para se obter o coeficiente do enésimo termo, utiliza-se também, as expressões da derivada normal da onda incidente e da onda espalhada. Assim, igualando o enésimo termo das equações (C.3) e (C.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho c} iA_m [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r) + iN_{m+1}(\kappa r) - iN_{m-1}(\kappa r)] \cos(m\theta) = \\ -\frac{P_0}{\rho c} i^{m+1} [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r)] \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (C.18)$$

Assim, o coeficiente  $A_m$  é dado pela expressão:

$$A_m = \frac{-\frac{P_0}{\rho c} i^{m+1} [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r)] \cos(m\theta)}{\frac{i}{2\rho c} [J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r) + i(N_{m+1}(\kappa r) - N_{m-1}(\kappa r))] \cos(m\theta)} \quad (C.19)$$

As relações a seguir, são válidas:

$$J_{m+1}(\kappa r) - J_{m-1}(\kappa r) = 2E_m \operatorname{sen}(\gamma_m) \quad (C.20)$$

$$N_{m-1}(\kappa r) - N_{m+1}(\kappa r) = 2E_m \cos(\gamma_m) \quad (C.21)$$

Modificando a ordem dos termos, a equação (C.21) se torna:

$$N_{m+1}(\kappa r) - N_{m-1}(\kappa r) = -2E_m \cos(\gamma_m) \quad (C.22)$$

Substituindo as equações (C.20) e (C.22) na equação (C.19) tem-se:

$$A_m = \frac{-2P_0 i^m 2E_m \operatorname{sen}(\gamma_m)}{2E_m \operatorname{sen}(\gamma_m) - 2iE_m \cos(\gamma_m)} = -\frac{2P_0 i^m \operatorname{sen}(\gamma_m)}{\operatorname{sen}(\gamma_m) - i \cos(\gamma_m)} \quad (C.23)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da equação (C.23) pelo conjugado de  $sen(\gamma_0) - i \cos(\gamma_0)$  e fazendo  $i^2 = -1$ , a equação (C.23) se torna:

$$A_m = -2P_0 i^{m+2} sen(\gamma_m)(sen(\gamma_m) + i \cos(\gamma_m)) \quad (C.24)$$

Multiplicando a equação (C.24) por  $\frac{(-i)}{(-i)}$  tem-se:

$$A_m = -2P_0 i^{m+1} sen(\gamma_m)(-isen(\gamma_m) + i \cos(\gamma_m)) \quad (C.25)$$

Substituindo a relação

$$e^{-iz} = \cos(z) - isen(z) \quad (C.26)$$

na equação (C.25) tem-se:

$$A_m = -2P_0 i^{m+1} e^{-i\gamma_m} sen(\gamma_m) \quad (C.27)$$

Fazendo  $\varepsilon_m = 2$ , a equação (C.27) é reescrita como:

$$A_m = -\varepsilon_m P_0 i^{m+1} e^{-i\gamma_m} sen(\gamma_m) \quad (C.28)$$

A equação (C.28) representa o coeficiente do  $m$ -ésimo termo da solução analítica do espalhamento acústico por um cilindro.

# Anexo D

---

## D.1 – Formulação integral do espalhamento acústico

O potencial de velocidade espalhado  $\varphi(p)$  num ponto  $p(x, y)$  qualquer localizado na região exterior  $\Omega_0$  ou no contorno  $S$  do objeto será estabelecido por uma equação integral que pode ser obtida de diversas formas. Nesse trabalho, tal equação será obtida utilizando-se a função de Green. Por essa razão, é necessário utilizar a equação (3.1) para o caso de uma fonte pontual com amplitude unitária que toma a forma:

$$\nabla^2 G(p, q) + \kappa^2 G(p, q) = \delta(p - q) \quad (D.1)$$

A solução da equação (D.1) é a função de Green  $G(p, q)$  que representa o campo num ponto de observação  $p(x, y)$  devido a presença de uma fonte de amplitude unitária localizada num ponto  $q(x, y)$ . A função de Green  $G(p, q)$  para problemas bidimensionais é definida pela expressão, Ziomek (1995):

$$G(p, q) = H_n(\kappa r) \quad (D.2)$$

Na equação (D.2),  $H_n$ ,  $\kappa$  e  $r$  representam, respectivamente, a função de Hankel de ordem  $n$  e tipo 1, o número de onda do som no ar e a distância entre os pontos  $q$  e  $p$ . Na equação (D.1),  $\delta(p - q)$  representa a função delta de Dirac, que é definida pela expressão, Dettman (1969):

$$\delta(p - q) = \begin{cases} 0 & \text{para } p \neq q \\ \infty & \text{para } p = q \end{cases} \quad (D.3)$$

A integral da função delta de Dirac é a unidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(p-q) = 1 \quad (\text{D.4})$$

Em consequência, a função delta de Dirac satisfaz, para uma função  $f(x)$  contínua qualquer, a propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\delta(p-q)dp = f(p) \quad (\text{D.5})$$

A função de Green  $G(p, q)$  e a função delta de Dirac  $\delta(p-q)$ , são simétricas, isto é, Butkov (1968).

$$G(p, q) = G(q, p) \quad (\text{D.6})$$

e

$$\delta(p-q) = \delta(q-p) \quad (\text{D.7})$$

Estabelecidas tais informações, para obter a equação integral do espalhamento acústico, multiplica-se a equação (3.1) por  $G(p, q)$  e obtém-se a expressão, Maria et al (2009):

$$G(p, q)\nabla^2\varphi(p) + G(p, q)\kappa^2\varphi(p) = -f(p)G(p, q) \quad (\text{D.8})$$

Em seguida, multiplica-se a equação (D.1) por  $\varphi(p)$

$$\varphi(p)\nabla^2G(p, q) + \varphi(p)\kappa^2G(p, q) = -\varphi(p)\delta(p-q) \quad (\text{D.9})$$

posteriormente, toma-se a diferença entre as equações (D.8) e (D.9) e obtém-se:

$$\varphi(p)\delta(p-q) - f(p)G(p, q) = G(p, q)\nabla^2\varphi(p) - \varphi(p)\nabla^2G(p, q) \quad (\text{D.10})$$

Com a utilização da simetria da função de Green e da função delta de Dirac, escreve-se a equação (D.10), em termos das coordenadas da fonte, como:

$$\varphi(q)\delta(p-q) - f(q)G(p,q) = G(p,q)\nabla^2\varphi(q) - \varphi(q)\nabla^2G(p,q) \quad (D.11)$$

Agora, tomando-se a integral em ambos os lados da equação (D.11) em relação a região exterior  $\Omega_0$ , tem-se:

$$\int_{\Omega_0} \varphi(q)\delta(p-q)d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} f(q)G(p,q)d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} (G(p,q)\nabla^2\varphi(q) - \varphi(q)\nabla^2G(p,q))d\Omega_0 \quad (D.12)$$

Utilizando-se a propriedade da função delta de Dirac descrita na equação (D.5), tem-se

$$\varphi(p) = \varphi'(p) + \int_{\Omega_0} (G(p,q)\nabla^2\varphi(q) - \varphi(q)\nabla^2G(p,q))d\Omega_0 \quad (D.13)$$

A aplicação do teorema de Green à equação (D.13) estabelece a integral ao longo do contorno  $S$  da região limitada  $\Omega$ :

$$\varphi(p) = \varphi'(p) + \int_S G(p,q)\frac{\partial\varphi(q)}{\partial n}dS - \int_S \varphi(q)\frac{\partial G(p,q)}{\partial n}dS \quad (D.14)$$

A equação (D.14) estabelece o potencial de velocidade num ponto  $p(x,y)$  localizado na região exterior  $\Omega_0$ . A equação integral para pontos de observação  $p(x,y)$  localizados no contorno  $S$  da região limitada  $\Omega$  é obtida utilizando-se um processo especial descrito a seguir:

## D.2 – A formulação integral do espalhamento acústico para pontos singulares

A formulação integral do espalhamento acústico representada pela equação (D.14), também, é utilizada para estabelecer o potencial de velocidade  $\varphi(p)$ , quando o ponto de observação  $p(x,y)$ , se localiza no contorno  $S$  da região  $\Omega$  bidimensional

limitada e coincide com o ponto de fonte  $q(x, y)$ , também localizado no contorno, como mostra a figura D.2.

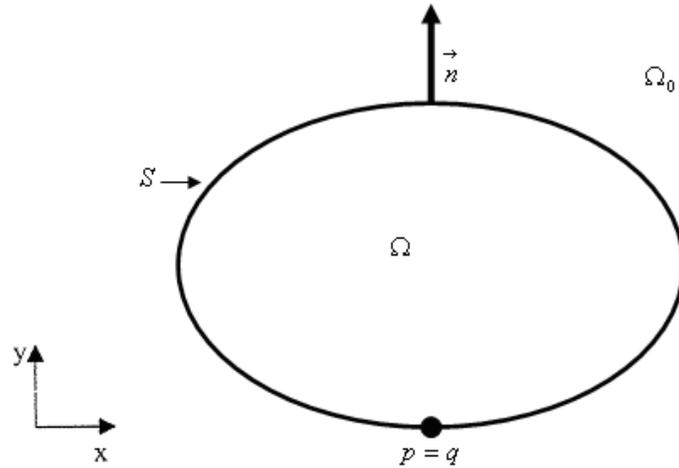


Figura D.2 – Ponto singular no contorno

Nesse caso, a análise da equação (D.14) é mais complexa. Quando se tem  $p = q$ , a distância  $r$  é nula, e, conseqüentemente, a função de Green  $G(p, q)$  não está definida. Assim, a integral é avaliada, utilizando-se um processo especial, para esses pontos especiais chamados pontos singulares. Para remover a singularidade no contorno  $S$ , realiza-se o processo a seguir: Considera-se que o ponto  $p(x, y)$  singular é o centro de um círculo de raio  $\varepsilon$ , como mostrado na figura D.3, Hall (1994).

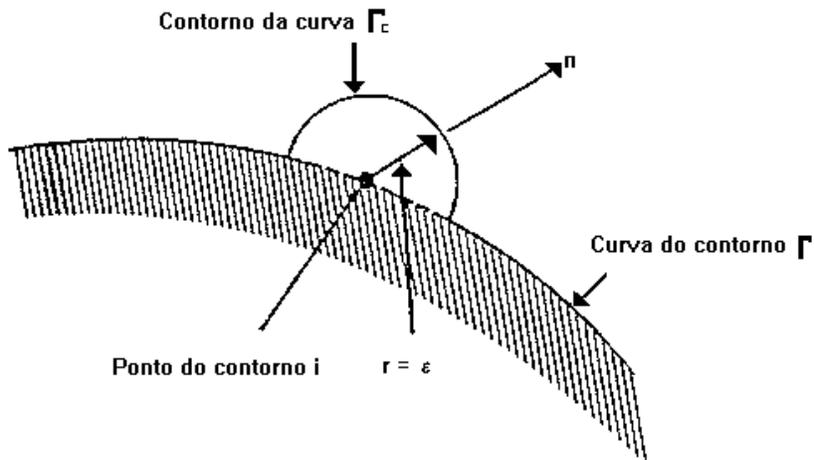


Figura D.3 – Região bidimensional com ponto singular no contorno

Fazendo-se o raio  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se que, no limite, o círculo se reduz a um ponto. Esse processo de limite depende apenas da ordem da singularidade do potencial de velocidade  $\varphi(p)$ , que é a mesma para as equações de Laplace e Helmholtz, Papini (1999). A equação de Laplace é dada pela expressão a seguir, Ciskowski e Brebbia (1991):

$$\nabla^2 \varphi(p) = 0 \quad (\text{D.15})$$

e sua solução fundamental é dada pela expressão:

$$G(p, q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (\text{D.16})$$

A solução fundamental da equação Laplace é substituída na equação (D.14) a qual é aplicada no contorno  $S_\varepsilon$  do semicírculo da figura D.3. Tomando-se o limite em relação ao raio do círculo, obtém-se resultados diferentes para os membros da equação integral. Para o lado direito da equação integral (D.14) obtém-se, Maria(2009):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} G(p, q) ds_\varepsilon \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) ds_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} \frac{\pi \varepsilon}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n} \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Isto significa que a integral analisada é contínua no contorno. Para o lado esquerdo, tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G(p, q)}{\partial n} \varphi(p) ds_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \left( \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)}{\partial n} \varphi(p) ds_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S_\varepsilon} \varphi(p) \frac{1}{2\pi \varepsilon} ds_\varepsilon \right\} \quad (\text{D.18})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\varphi \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} \varphi(p)$$

Assim, quando o ponto  $p(x, y)$  está situado sobre o contorno do obstáculo, as equações (D.18) e (D.19) são aplicadas na equação (D.14), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2} \varphi(p) + \int_S \varphi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n} dS = \int_S G(p, q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n} dS + \varphi'(p) \quad (\text{D.19})$$

A equação integral para o problema do espalhamento acústico por um objeto com forma geométrica qualquer pode ser generalizada pela expressão que se segue:

$$c(p) \varphi(p) + \int_S \varphi(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n} dS = \int_S G(p, q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n} dS + \varphi'(p) \quad (\text{D.20})$$

Na equação (D.20), o termo  $c(p)$  depende da posição do ponto  $p$ . A função  $c(p)$  assume os valores de 1;  $1/2$ , quando o ponto  $p$  se localizar, respectivamente, na região exterior  $\Omega_0$ , no contorno  $S$ .

# Anexo E

---

## E.1 – Avaliação das integrais utilizadas no método de elementos de contorno.

O método da quadratura gaussiana faz uma mudança da variável  $q(x,y)$  definida no intervalo de integração  $[q_1, q_2]$  para a variável  $\xi$  definida no intervalo de integração  $[-1, +1]$  da seguinte forma:

$$f(q) = aq + b = \xi \quad (\text{E.1})$$

Substituindo os extremos do intervalo  $[q_1, q_2]$ , na equação (E.1), obtem-se

$$f(q_1) = aq_1 + b = -1 \quad (\text{E.2})$$

e

$$f(q_2) = aq_2 + b = +1 \quad (\text{E.3})$$

A solução desse sistema estabelece as constantes  $a$  e  $b$ , respectivamente, dadas por:

$$a = \frac{2}{q_2 - q_1} \quad (\text{E.4})$$

$$b = -\frac{(q_1 + q_2)}{q_2 - q_1} \quad (\text{E.5})$$

Em seguida, substituindo as equações (E.4) e (E.5) na equação (E.1), obtem-se:

$$q = -\frac{q_2 - q_1}{2} \xi + \frac{q_2 + q_1}{2} \quad (\text{E.6})$$

assim, derivando a equação (E.6) em relação a variável  $\xi$ , obtem-se:

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{q_2 - q_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (\text{E.7})$$

Dessa forma, a integral, em cada elemento, se torna:

$$\int_A^B f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right| d\xi = \sum_{m=1}^N f(\xi_m) W_m + E_m \quad (\text{E.8})$$

## E.2 – Cálculo da integral da derivada normal da solução fundamental

Para calcular a integral ao longo do contorno do obstáculo, é necessário estabelecer, em cada elemento da malha que discretiza o contorno do objeto, a integral da solução fundamental e de sua derivada normal. A integral da solução fundamental do problema foi estabelecida no texto pela função de Hankel, mas sua derivada normal é mais complexa. A derivada normal da solução fundamental  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$  é dada por, Kythe (1995):

$$\frac{\partial G(p, q)}{\partial n} = \frac{\partial G(p, q)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} \quad (\text{E.9})$$

Na equação (E.9),  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial R}$  é a derivada da solução fundamental em relação a distância

$R$ , sendo dada pela expressão:

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \vec{\nabla} R \cdot \vec{n} \quad (\text{E.10})$$

Na equação (E.10),  $\vec{\nabla} R$  é o vetor gradiente da função distância  $R$ , sendo dado pela expressão:

$$\vec{\nabla} R = \left( \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} \right) \quad (\text{E.11})$$

Na equação (E.11),  $\frac{\partial R}{\partial x}$  e  $\frac{\partial R}{\partial y}$ , respectivamente, são dadas por:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x - x_o}{R} \quad (\text{E.12})$$

e

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y - y_o}{R} \quad (\text{E.13})$$

Para calcular a derivada normal da solução fundamental  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$ , é necessário obter um vetor normal  $\vec{n}$ . Isso será feito utilizando-se dois vetores unitários  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  ortogonais entre si. O vetor  $\vec{v}_2$  é obtido utilizando-se as coordenadas dos pontos extremos do elemento considerado. Assim, o vetor  $\vec{v}_2$  é dado por:

$$\vec{v}_2 = \left( \frac{x_2 - x_1}{L} i + \frac{y_2 - y_1}{L} j + 0k \right) \quad (\text{E.14})$$

Um vetor  $\vec{v}_1$  ortogonal ao vetor  $\vec{v}_2$  é dado por:

$$\vec{v}_1 = (0i + 0j + 1k) \quad (\text{E.15})$$

Dessa forma, o vetor normal  $\vec{n}$  é dado pelo produto vetorial:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{x_2 - x_1}{L} & \frac{y_2 - y_1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.16})$$

O cálculo do determinante dessa matriz estabelece o vetor normal  $\vec{n}$  a seguir:

$$\vec{n} = \left( \frac{y_2 - y_1}{L} i - \frac{x_2 - x_1}{L} j + 0k \right) \quad (\text{E.17})$$

Assim, a derivada normal da função distância  $R$  é dada por:

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \nabla R \cdot \vec{n} = \left[ \frac{(x - x_o)(y_2 - y_1) + (y - y_o)(x_1 - x_2)}{RL} \right] \quad (\text{E.18})$$

A derivada da solução fundamental em relação a distância é dada por:

$$\frac{\partial G(p, q)}{R} = \frac{ik}{4} H_1^1(\kappa R) \quad (\text{E.19})$$

Finalmente, a derivada normal da solução fundamental em relação a distância  $\frac{\partial G(p, q)}{\partial n}$

é dada pela expressão a seguir:

$$\frac{\partial G(p, q)}{\partial n} = -\frac{ik}{4} H_1^1(\kappa R) \frac{\partial R}{\partial n} \quad (\text{E.20})$$

Substituindo a equação (E.18) na equação (E.20), obtém-se:

$$\frac{\partial G(p, q)}{\partial n} = -\frac{ik}{4} H_1^1(\kappa R) \left[ \frac{(x - x_o)(y_2 - y_1) + (y - y_o)(x_1 - x_2)}{RL} \right] \quad (\text{E.21})$$

Dessa forma, a integral da derivada normal da solução fundamental, representada por  $H_{ij}$ , é dada pela expressão:

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{i}{4} H_1^1(\kappa R(\xi)) \frac{\partial R}{\partial n} \frac{L}{2} d\xi = \sum_{m=1}^N \frac{i}{4} H_1^1(\kappa R(\xi_m)) \frac{\partial R}{\partial n} W_m \frac{L}{2} \quad (\text{E.22})$$



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)