

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional

A formulação de Petrov-Galerkin com controle adaptativo do passo de tempo aplicada à simulação de secagem de grãos

Tatiane Reis do Amaral

Belo Horizonte
2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional

A formulação de Petrov-Galerkin com controle adaptativo do passo de tempo aplicada à simulação de secagem de grãos

Tatiane Reis do Amaral

Dissertação de mestrado apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco A. Vitor

Co-orientador: Prof. Dr. José Leôncio F. Souza

Belo Horizonte
2009

Dedico este trabalho aos meus pais, Elizabeth e Vicente,
e a meu estimado esposo Eduardo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar força nos momentos de desalento, dificuldades e principalmente pela vitória.

Agradeço aos meus pais pela incondicional ajuda em todos os momentos, por me apoiarem na luta pelos meus sonhos e fazem da minha vitória sua vitória. A meu irmão pelos momentos de companhia e apoio. Aos meus sogros pelo carinho e ajuda. E a todos da minha família que de alguma forma contribuíram com minha conquista.

Aos meus colegas de curso Suelen, Rosiene, Vinícius, Lucas, Lorenzo, Fábio, e todos que juntos compartilharam comigo estes anos de trabalho, por colaborarem de forma profissional e afetiva com minha conquista.

A minha inseparável amiga Neila pelo companheirismo, ajuda incondicional e por partilhar dos meus momentos bons e ruins sempre. Muito obrigada por tudo.

Aos amigos José Sergio e Weslei que compartilharam todo trajeto que percorri até esse mestrado e mesmo nos momentos de descontração emprestaram seus ouvidos.

Ao meu marido Eduardo que sempre me apóia e incentiva, coloca minhas prioridades como suas prioridades. Obrigado por estar ao meu lado.

Ao prof. João Francisco de Almeida Vítor, pela dedicação a este trabalho e a mim. Ao prof. José Leôncio Fonseca de Souza por encontrar disponibilidade para este trabalho em seu tempo já tão escasso.

Agradeço também aos professores e a coordenação do curso, pessoas com que tive o prazer de dividir esse tempo de trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 2 |
| 1.1.1 | Objetivo Geral | 2 |
| 1.1.2 | Objetivos Específicos | 3 |
| 1.2 | Organização do trabalho | 3 |
| 2 | O MEF: Formulação de Galerkin e Petrov-Galerkin | 4 |
| 2.1 | Streamline Upwind Petrov-Galerkin | 5 |
| 2.1.1 | Formulação para Problemas Transientes | 7 |
| 2.2 | A formulação de Sampaio | 9 |
| 2.3 | Integrador com passo de tempo adaptativo | 11 |
| 2.3.1 | Controle adaptativo do passo de tempo | 13 |
| 2.4 | Método Direto de Inicialização | 18 |
| 3 | O problema de Secagem | 21 |
| 3.1 | A secagem de grãos | 21 |
| 3.2 | O secador | 23 |
| 3.3 | O modelo de Secagem | 25 |
| 3.4 | Resolução Numérica do Modelo - Formulação de Galerkin | 30 |
| 3.4.1 | Discretização da equação da Pressão | 30 |
| 3.4.2 | Discretização das equações de conservação de massa e energia | 32 |
| 4 | Formulação SUPG para o problema de Secagem | 33 |
| 4.1 | Discretização das Equações | 33 |
| 4.1.1 | Umidade absoluta do ar | 34 |
| 4.1.2 | Temperatura do Ar | 36 |
| 4.2 | Diagrama de Bloco e Pseudocódigo | 38 |

| | | |
|---|----------------------------|----|
| 5 | Resultados e Discussão | 41 |
| 6 | Considerações e Conclusões | 57 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | (a) Funções de ponderação de Galerkin, (b) Petrov-Galerkin para o caso unidimensional. | 6 |
| 2.2 | Variação de alfa (α) para diferentes Números de Peclet (Pe). Extraída de (Zienkiewicz e Taylor, 2000). | 7 |
| 2.3 | Solução da equação 2.32. | 15 |
| 2.4 | Número de iterações necessárias para atingir o tempo final com as tolerâncias especificadas. | 16 |
| 2.5 | Tamanho do passo de tempo a cada iteração para o número total de iterações $N=50$ | 16 |
| 2.6 | Número de Iterações necessárias para atingir o tempo final, com tolerância de 10^{-5} | 17 |
| 2.7 | Entrada das condições iniciais na simulação. | 18 |
| 2.8 | Função de suavização aplicada as condições iniciais. | 20 |
| 3.1 | Representação do processo de secagem artificial em um grão. | 22 |
| 3.2 | Esquema do fluxo de ar em um secador de leito fixo. | 23 |
| 3.3 | Figura do secador real.Fonte: EMBRAPA | 24 |
| 3.4 | Simplificação do fluxo de ar e pontos de coleta experimentais. | 25 |
| 4.1 | Diagrama de blocos do programa principal. | 39 |
| 4.2 | Pseudocódigo Upwind. | 40 |
| 5.1 | Simplificação do fluxo de ar e pontos de coleta experimentais. | 41 |
| 5.2 | Malha de elementos quadriláteros de 4 nós. | 43 |
| 5.3 | Distorção numérica causada pela entrada das condições iniciais. | 45 |
| 5.4 | Comportamento da solução utilizando o método de inicialização direta. | 45 |
| 5.5 | Variação do teor médio de umidade do leito com o tempo para todas as simulações realizadas, incluído o passo adaptativo (bixler) | 46 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.6 | Tamanho do passo de tempo de acordo com o número de iterações. | 47 |
| 5.7 | Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 0,36 m. | 48 |
| 5.8 | Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 0,36 m. | 48 |
| 5.9 | Perfil do teor de umidade do leito após 12 horas de secagem para uma altura de 0,36 m. | 49 |
| 5.10 | Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 1,80 m. | 49 |
| 5.11 | Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 1,80 m. | 50 |
| 5.12 | Perfil do teor de umidade do leito após 12 horas de secagem para uma altura de 1,80 m. | 50 |
| 5.13 | Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 3,60 m. | 51 |
| 5.14 | Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 3,60 m. | 52 |
| 5.15 | Perfil do teor de umidade do leito após 12 horas de secagem para uma altura de 3,60 m. | 52 |
| 5.16 | Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as 4 horas de secagem. | 53 |
| 5.17 | Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as 8 horas de secagem. | 54 |
| 5.18 | Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as 12 horas de secagem. | 55 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Valores dos parâmetros A e B para o milho debulhado | 27 |
| 3.2 | Condições de Contorno para equação de pressão | 32 |
| 5.1 | Condição de Secagem dos dados experimentais | 42 |
| 5.2 | Parâmetros de simulação do secador axissimétrico. | 42 |

Lista de Símbolos

a superfície específica do leito de grãos ($m^2.m^{-3}$)

c é o calor específico (J/kg K)

c_w é o calor específico da água (J/Kg.K)

c_p é o calor específico do produto (J/Kg.K)

c_v é o calor específico do vapor (J/Kg.K)

H é a umidade absoluta do ar (Kg vapor/Kg de ar seco)

h é coeficiente convectivo do ar (W/m^2K)

h_{fg} é o calor latente de vaporização da água (J.kg)

\mathbf{k} coeficiente difusivo

K_0 permeabilidade do meio poroso

$[K^{(e)}]$ matriz de rigidez elementar

$\{I^{(e)}\}$ Vetor de força elementar

L tamanho característico

M teor de umidade do leito (bu)

M_e teor de umidade de equilíbrio (bu)

P pressão (Pa)

Q vazão volumétrica por unidade de área (m^3/sm^2)

U coeficiente de convectivo

T é a temperatura do ar (K)

t tempo (s)

\vec{v} vetor velocidade do ar (m/s)

Símbolos Gregos

ϵ porosidade do leito (volume de poros/ volume total)

μ viscosidade absoluta do ar seco

Ω região de integração

ϕ quantidade escalar transportada/variável de interesse

ρ_p é a massa específica do produto (Kg/m^3)

ρ_a é a massa específica do ar (Kg/m^3)

θ é a temperatura do leito (K)

τ parâmetro de suavização

Lista de Siglas

CI Condições Iniciais

CC Condições de Contorno

EDP Equação diferencial parcial

EDO Equação diferencial ordinária

ED Equação diferencial

GLS Método de Gresho, Lee e Sani

MEF Método dos Elementos Finitos

Pe Número de Peclet

PVI Problema de valor inicial

Re Número de Reynolds

Sc Número de Schmidt

SUPG Streamline Upwind Petrov-Galerkin

Resumo

O processo de Secagem artificial de grãos permite baixar rapidamente o teor de umidade dos produtos agrícolas, facilitando o processo de armazenamento e conservação. Neste trabalho simulou-se a secagem de grãos em um secador cilíndrico com fluxos radial e axial de ar com leito estacionário. Foram resolvidas as equações de pressão, de teor de umidade do leito, temperatura do leito de grãos, umidade absoluta do ar e temperatura do Ar. Trata-se de um problema puramente convectivo e sua resolução é obtida neste trabalho através de técnicas numéricas. Utilizou-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), empregado de duas formas, a formulação de Galerkin e o método 'Streamline Upwind Petrov-Galerkin' (SUPG). A aplicação do Método SUPG permitiu o uso de um tamanho do passo de tempo superior a aquele empregado pela formulação clássica do MEF. A técnica do passo de tempo adaptativo mostrou-se importante na busca de uma resolução mais eficiente de problemas em que as soluções tendem a estabilidade. O tamanho de passo assume dimensão reduzida em subdomínios onde a solução apresente taxas de variação elevadas, e o tamanho de passo aumenta em regiões onde essas taxas venham a se tornar menores. Sua eficiência é certa em problemas convectivos-difusivos, onde as propriedades apresentam oscilações numéricas na solução, mas concomitantemente tendem a um estado conservativo. A implementação de um integrador temporal em que ocorre o ajuste, a cada iteração, do tamanho do passo torna o método numérico utilizado na solução da equação diferencial computacionalmente econômico. Neste trabalho apresentam-se os recentes avanços e vantagens do uso do controle adaptativo do passo de tempo apresentados na literatura, aplicados em problemas modelados por equações diferenciais parciais resolvidas através do Método dos Elementos Finitos, aliada a formulação SUPG.

Palavras-chave: Métodos Numéricos; Método dos Elementos Finitos; Petrov-Galerkin; Passo de tempo adaptativo.

Abstract

The grain drying process allows a fast decrease in the moisture content of the agricultural products, which makes the processes of storage and conservation easier. In this master thesis, simulated the grain drying in a cylindrical dryer with radial and axial flows of a stationary-air bed . Was solved the equations for the pression, for the moisture content and the temperature of the grains bed, and for the temperature and absolute humidity of the air. This problem is purely connective and its resolution is achieved in this work through numerical techniques. The Finite Elements Method (FEM) was used in two different manners, the Galerkin formulation and the *Streamline Upwind Petrov-Galerkin method* (SUPG). The application of the SUPG method has permitted a time-step size bigger than the MEF classical formulation. The adaptive time-step technique has been important in the investigation of a more efficient problems resolution in which the solutions show a change of behavior during the simulation. The step size assumes a reduced dimension in subdomains where the solution presents high levels of variation. The step size also increases in regions where these levels become lower. Its efficiency is confirmed in diffuse convective problems , where the properties show numerical oscillations in the solution, but also tend to a steady state. The implementation of a temporal integrator in which the adjustment of the step size occurs in every iteration makes the numerical method used in the solution of a differential equation computationally economic. In this master thesis, present the recent advances and advantages of using the control of the step size displayed in the literature and applied in problems modeled by partial differential equations that were solved using the Finite Elements Method associated to the SUPG formulation.

Keywords: Numerical methods; Finite Elements Method; Petrov-Galerkin; Adaptive time-step

Capítulo 1

Introdução

A secagem é uma técnica largamente usada na conservação e transporte de grãos alimentícios. É um processo de transferência simultânea de calor e massa em que umidade é removida dos grãos. O objetivo básico da secagem de produtos agrícolas é a remoção da água do sólido até um certo nível em que a atividade microbiana e reações químicas de deterioração sejam minimizadas.

O conhecimento e controle de fatores como temperatura, velocidade de escoamento do ar e teor de umidade é indispensável nos processos de secagem de produtos agrícolas. Em geral, as operações de secagem apresentam altos custos de mão de obra, energia e tempo de secagem. Entretanto, estes custos podem ser reduzidos de forma significativa se for realizado um estudo visando o controle das propriedades envolvidas no processo.

Neste trabalho simulou-se a secagem de grãos em um secador cilíndrico com escoamentos radial e axial de ar com leito estacionário ou leito fixo. O modelo estabelecido por (Souza, 1996), apresentou a resolução de cinco equações: pressão, teor de umidade do leito, umidade absoluta do ar, temperatura do ar e temperatura do leito.

O modelo de (Souza, 1996) utiliza o método dos elementos finitos com a formulação de Galerkin com passo de tempo constante. Em problemas em que convecção é predominante a formulação de Galerkin clássica do método de Elementos Finitos pode apresentar oscilações numéricas contornáveis por meio da escolha apropriada da malha espacial e temporal ou formulações diferentes para discretização das equações envolvidas. Na prática é necessário utilizar malhas muito refinadas, o que torna o método de Galerkin ineficiente para certos problemas, e uma nova técnica é então aplicada, a formulação de *Petrov-Galerkin*.

Neste trabalho utiliza-se a técnica "*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*" (SUPG),

proposta por (Brooks e Huges, 1982). Esta técnica insere uma ponderação que é adicionada ao termo convectivo, extinguindo ou minimizando as oscilações das soluções causadas pela dominância da convecção no processo. Agregando estabilidade ao modelo de Souza (1996) , que apresenta duas equações puramente convectivas.

A estabilidade das soluções adquiridas com a aplicação da técnica SUPG, permite que o passo de tempo utilizado seja superior ao empregado pela técnica clássica. Em Souza (1996) o problema é resolvido utilizando passos de tempo constantes de 40 segundos. Neste trabalho o problema é resolvido com passos de tempo de até 200 segundos.

A estabilidade na resolução de equações diferenciais resultantes de métodos numéricos, como método dos elementos finitos, estão diretamente ligadas à dimensão do passo de tempo, que deve ser estimado a cada iteração. O custo computacional é função do passo de tempo estimado Δt (Söderlind e Wang, 2006). Dessa forma, a determinação de Δt , considerada a ordem de acurácia previamente determinada, passa a representar um papel importante na eficiência dos métodos de resolução de problemas de valores iniciais (PVI) e de valores no contorno (PVC).

Apresenta-se neste trabalho um algoritmo de controle adaptativo do passo de tempo, capaz de selecionar automaticamente o tamanho do passo de tempo baseado no erro local e na tolerância estabelecida pelo usuário. Esta técnica de controle de passo torna a solução do modelo computacionalmente econômica. Aplicada em conjunto com a técnica SUPG diminui o tempo computacional, sem ocorrer oscilações numéricas na solução.

A relevância do domínio dos processos de secagem e a economia computacional motiva a implementação da técnica SUPG e do controle adaptativo do passo de tempo na solução do modelo de Souza (1996). Os dados obtidos serão comparados com os dados experimentais e as soluções obtidas através da formulação clássica de Galerkin com passo de tempo constante apresentadas por Souza (1996).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é aplicar a formulação "*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*" (SUPG) e incorporar o método de passo de tempo adaptativo a resolução do modelo de secagem de grãos apresentado por Souza (1996).

1.1.2 Objetivos Específicos

Este trabalho tem os seguintes objetivos específicos:

- Efetuar uma revisão bibliográfica da formulação de Petrov-Galerkin e da técnica *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*;
- Revisar o emprego de técnicas adaptativas no passo de tempo aplicadas aos Métodos dos Elementos Finitos;
- Implementar um método adaptativo no passo de tempo ao modelo de Souza (1996) para solução proposta através da formulação de Petrov-Galerkin;
- Implementar a função de suavização para o tratamento da entradas das condições iniciais.
- Comparar os resultados obtidos pelas diferentes formulações com os dados experimentais e a literatura.

1.2 Organização do trabalho

A estrutura deste trabalho apresenta, inicialmente, uma descrição do método dos elementos finitos, abrangendo-se as formulações de Galerkin (clássica) e Petrov-Galerkin (SUPG). O capítulo 2 apresenta a formulação de Sampaio (1991) para problemas convectivo-difusivos e a revisão da técnica do passo de tempo adaptativo.

O capítulo seguinte trata do problema de secagem simulado neste trabalho. Uma descrição do secador é apresentada, bem como as equações constitutivas do modelo e a discretização das equações pela formulação de Galerkin.

O capítulo 4 apresenta a discretização das equações do modelo de Souza (1996) para formulação de Petrov-Galerkin, aplicada a formulação de Sampaio (1991). É revisado o método direto de inicialização para o tratamento das condições iniciais. E por fim, um diagrama de bloco e o pseudocódigo da rotina "*upwind*" são apresentados.

O resultados deste trabalho são apresentados no capítulo 5. É ainda feita a discussão dos resultados obtidos pela formulação SUPG e pela implementação do passo de tempo adaptativo ao algoritmo, incluindo a comparação com os dados experimentais (Souza, 1996).

As considerações finais e conclusões juntamente como perspectivas futuras para o trabalho são descritas no capítulo 6.

Capítulo 2

O MEF: Formulação de Galerkin e Petrov-Galerkin

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica numérica de resolução de equações diferenciais parciais muito empregado em problemas de engenharia. Modelos diferenciais com geometrias e condições de contorno irregulares são resolvidos adequadamente por este método (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

Conhecidos uma EDP ou um sistema de EDP's e um domínio qualquer, o MEF providencia a subdivisão desse domínio em subdomínios mais simples denominados elementos. Estes elementos, para um problema bidimensional, podem ser triângulos, quadrado e quadriláteros. O conjunto formado pelos elementos é denominado malha e os vértices dos elementos de nós da malha. Um sistema matricial resultante é formado por uma matriz chamada *Matriz de Rigidez* e um vetor, o *Vetor de Força*. Para problemas dependentes do tempo ou transientes uma nova matriz é incorporada ao sistema a *Matriz de Capacitância* (Segerlind, 1984).

O MEF é um método integrativo, e apresenta uma função *Peso* (W_i), função que minimiza o erro e a função de *Forma* (N_i), função candidata a solução (Assan, 1999). Estas técnicas de resolução são conhecidas por resíduos ponderados, dentre os quais, o método de Galerkin é um dos mais utilizados (Segerlind, 1984). Nesta formulação as funções peso e de forma são iguais. O Método de Galerkin é muito eficiente para resolver problemas lineares auto-adjuntos e problemas não lineares de valores nos contornos, nos quais a matriz de rigidez seja simétrica (Huebner, 1996).

Para problemas convectivos-difusivos dominados pela convecção a matriz associada ao termo convectivo é não simétrica, devido ao operador convectivo ter caráter não ad-

junto. Na prática, apresentam soluções com comportamento oscilatório. Para contornar esse fato é necessário utilizar malhas muito refinadas (Galeão et al., 2004). Essa necessidade de refinamento torna o método de Galerkin ineficiente para certos problemas. Na busca de resolver adequadamente os problemas convectivos-difusivos dominados pela convecção é utilizada uma nova formulação, denominada Petrov-Galerkin. Nessa formulação, a função de ponderação (W_i) advém da adição de um novo termo à função de forma de Galerkin (N_i), cujo objetivo é buscar estabilizar as equações do sistema gerado pelo método dos elementos finitos (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Para esta formulação a função Peso é diferente da função de Forma. $W_i \neq N_i$.

A formulação de Petrov-Galerkin será discutidas em detalhes nas próximas seções. A técnica *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), uma técnica desenvolvida para formulação de Petrov-Galerkin, é apresentada na próxima seção. Em seguida é desenvolvida a formulação SPUG para problemas transientes, logo após a formulação de Sampaio (1991) para problemas convectivos-difusivos é discutida. Uma revisão da técnica de passo de tempo adaptativo encerra o capítulo. Apresentando assim um apanhado das técnicas utilizadas na solução do problema de Souza (1996) nesta dissertação.

2.1 Streamline Upwind Petrov-Galerkin

O método de Galerkin é produzido pela aproximação por diferenças finitas centrais do operador diferencial (Söderlind, 2002). Para obter soluções livres de oscilações pode ser usado a diferença "*upwind*", ou atrasada, no termo convectivo (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Três técnicas básicas são apresentadas inspiradas nas diferenças "*upwind*":

- Difusão Artificial - é de fato o balanceamento da difusão, equilibrando a difusão negativa do tratamento do método de Galerkin (Zienkiewicz e Taylor, 2000).
- Quadratura - proposto por Huges (1978), a integração numérica do termo convectivo é modificada para obter a solução exata unidimensional do problema de convecção-difusão. O modelo é estendido a problemas bidimensionais.
- Petrov-Galerkin - A função peso para um nó é modificada através da adição de uma perturbação. A ponderação dos nós é feita na direção do escoamento/convecção conforme a Fig. 2.1.

Brooks e Huges (1982) propuseram um método no qual a função peso é diferente da função de forma (Brooks e Huges, 1982). O esquema "*Streamline Upwind Petrov-*

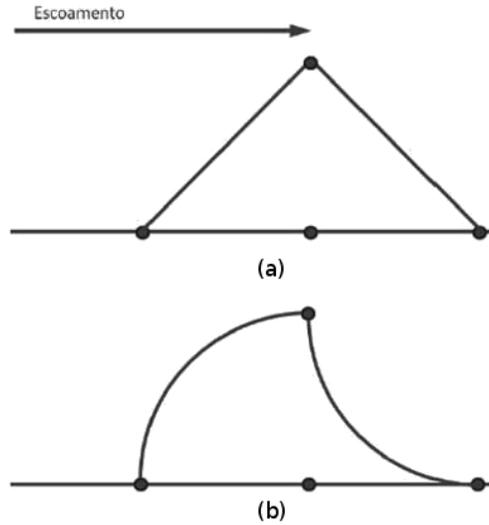


Figura 2.1: (a) Funções de ponderação de Galerkin, (b) Petrov-Galerkin para o caso unidimensional.

"Galerkin" (SUPG) modifica a função de peso através da adição de uma pequena perturbação na direção do escoamento, que é uma função do campo de velocidade e da derivada da função de forma. Este método teve sua convergência analisada primeiramente por Johnson *et al.* (Johnson *et al.*, 1984).

Com o objetivo de contornar o fato de que termos convectivos apresentam caráter não adjunto, buscando assim aumentar a dominância diagonal do problema, é determinado um coeficiente capaz de quantificar uma difusão adicional, o qual recebe o nome de fator de estabilização "upwind" (α). Seu valor é função do número de Peclet no elemento (Fig. 2.2).

O coeficiente "upwind" é calculado através da seguinte equação (Zienkiewicz e Taylor, 2000)

$$\alpha = \coth|Pe| - \frac{1}{|Pe|} \quad (2.1)$$

O número adimensional de Peclet $Pe \in [0, \infty]$ é então empregado para determinação das contribuições dos termos convectivos e termos difusivos para equação diferencial parcial convectiva-difusiva. Obtido pela equação

$$Pe = \frac{UL}{2k} \quad (2.2)$$

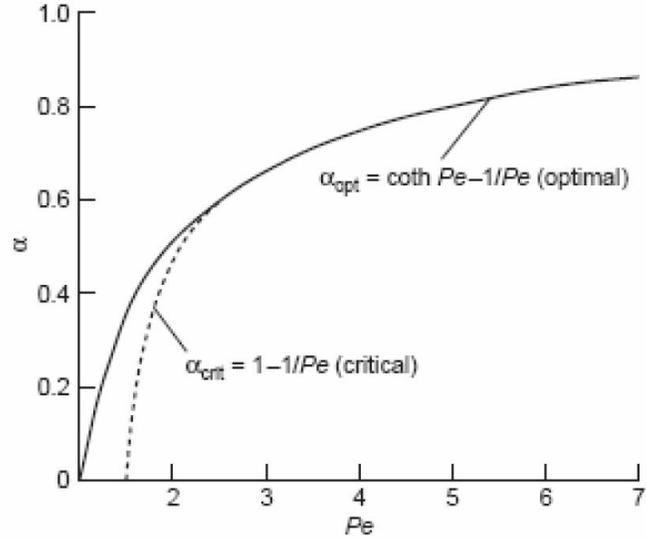


Figura 2.2: Variação de alfa (α) para diferentes Números de Peclet (Pe). Extraída de (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

onde U é o coeficiente convectivo, L é o tamanho característico do elemento e k é o coeficiente difusivo.

Nos casos em que $Pe \leq 1$ indica que a contribuição do termo difusivo é predominante no problema. Pe é maior que esse limite significa que a contribuição é maior do termo convectivo, ou ainda quando Pe tende ao infinito dizemos que o problema é puramente convectivo, determinando o emprego da técnica SUPG na resolução do problema (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

2.1.1 Formulação para Problemas Transientes

O objetivo desta seção é desenvolver as equações discretizadas do método de Petrov-Galerkin aplicadas de forma geral em problemas *transientes*. Iniciando com a equação unidimensional em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(U\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad (2.3)$$

U é o coeficiente convectivo, que neste problema é o campo de velocidade conhecido e ϕ é uma quantidade escalar transportada por esta velocidade. O termo Q é chamado de fonte e pode ser função ϕ , k é o coeficiente de difusão, podendo existir ou não, tornando assim o problema puramente convectivo. O problema então definido é não-linear a menos

que U seja independente de ϕ .

Considerando a discretização da Eq.(2.3) com

$$\phi \approx \hat{\phi} = N\tilde{\phi} \quad (2.4)$$

onde N é a função de forma e $\tilde{\phi}$ é o valor nodal da propriedade desconhecido, $\hat{\phi}$ é a aproximação de ϕ (Zienkiewicz e Taylor, 2000). Assim a forma residual da função peso do problema unidimensional é escrita como

$$\int_{\Omega} W \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{\phi})}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) + Q \right] d\Omega = 0 \quad (2.5)$$

Integrando o segundo termo por partes temos

$$\int_{\Omega} W \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{\phi})}{\partial x} + Q \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} \left(k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} W \tilde{q}_n d\Gamma = 0 \quad (2.6)$$

onde

$$\tilde{q}_n = -k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \text{ em } \Gamma_q$$

e

$$\hat{\phi} = \tilde{\phi} \text{ em } \Gamma_{\phi}$$

sendo Ω a região de integração, \tilde{q}_n é a condição contorno de Dirichlet Γ a união de Γ_{ϕ} e Γ_q que representam partes do contorno do problema.

Considerando a função de forma linear N, temos a função peso construída como

$$W = N + \alpha W^* \quad (2.7)$$

onde W^* é obtida por intermédio da Eq. (2.8)

$$\int_{\Omega_e} W^* dx = \pm \frac{\Delta t}{2} \quad (2.8)$$

onde Δt é o tamanho do passo de tempo.

Com esta aproximação a equação (2.6) torna-se

$$\int_{\Omega} (N + \alpha W) \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{\phi})}{\partial x} + Q \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial \alpha W}{\partial x} \right) k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} d\Omega + (N + \alpha W) \tilde{q}_n|_{\Gamma_q} = 0 \quad (2.9)$$

Assim a função peso W é dada por

$$W = N^T + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dx} (UN^T) \quad (2.10)$$

Para problemas dominados pela convecção se caracterizam por um alto valor do Número de Peclet. Em problemas puramente convectivo o desenvolvimento para encontrar W é o mesmo omitindo somente o termo difusivo.

2.2 A formulação de Sampaio

Uma forma de tratamento da formulação de Petrov-Galerkin é apresentada por Sampaio (1991). Neste caso, os problemas convectivos-difusivos são resolvidos a partir da proposição de uma nova função ponderadora (W).

Neste método, a formulação de Petrov-Galerkin é obtida a partir da aplicação do método dos mínimos quadrados ao desenvolvimento dos resíduos das equações (Sampaio, 2005). A metodologia proposta permite que a mesma ordem de interpolações sejam usadas para pressão e velocidade. A formulação de Sampaio é apresentada através do desenvolvimento da seguinte equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \nabla T - \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T = \frac{Q}{\rho c_p} \quad (2.11)$$

onde T é a temperatura, U é o campo de velocidade, k é a condutividade térmica, ρ é a massa específica, c_p é o calor específico e Q é a taxa de geração volumétrica de calor.

A equação (2.11) pode ser discretizada no tempo através de um esquema de diferenças centradas

$$A - \frac{Q^{n+1/2}}{\rho c_p} = 0 \quad (2.12)$$

em que

$$A = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \nabla T^{n+1/2} - \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T^{n+1/2}, \quad (2.13)$$

$$\nabla T^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nabla T^{n+1} + \nabla T^n) \quad (2.14)$$

e

$$\nabla^2 T^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nabla^2 T^{n+1} + \nabla^2 T^n). \quad (2.15)$$

A discretização espacial da temperatura

$$\hat{T}^{n+1} = N_j T_j^{n+1} \quad (2.16)$$

onde T_j^{n+1} é o valor nodal no tempo $n + 1$ e N_j , é a função de forma associada.

Das equações anteriores pode-se escrever uma aproximação para A, na forma

$$\hat{A} = \frac{\hat{T}^{n+1} - \hat{T}^n}{\Delta t} + \nabla \hat{T}^{n+1/2} - \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 \hat{T}^{n+1/2} \quad (2.17)$$

O quadrado dos resíduos devido à aproximação de A por \hat{A} é dado por

$$R = \int_{\Omega} [\hat{A} - A]^2 d\Omega. \quad (2.18)$$

Usando as equações (2.12) e (2.18)

$$R = \int_{\Omega} \left[\hat{A} - \frac{Q^{n+1/2}}{\rho c_p} \right]^2 d\Omega. \quad (2.19)$$

O quadrado do resíduo deve ser minimizado com relação aos parâmetros livres T_j^{n+1} .

$$\frac{\partial R}{\partial T_j^{n+1}} = \int_{\Omega} 2 \left[\hat{A} + \frac{Q^{n+1/2}}{\rho c_p} \right] \frac{\partial \hat{A}}{\partial T_j^{n+1}} d\Omega = 0. \quad (2.20)$$

O desenvolvimento da Eq.(2.20), a partir da Eq.(2.17), resultará numa expressão equivalente ao método de Petrov-Galerkin, no qual a função de ponderação toma a forma $N_i + W_i$.

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) \left[\hat{A} + \frac{Q^{n+1/2}}{\rho c_p} \right] d\Omega = 0 \quad (2.21)$$

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} u \nabla N_i - \frac{1}{2} \frac{k \Delta t}{\rho c_p} \nabla^2 N_i \quad (2.22)$$

Para problemas unidimensionais a função peso de Petrov-Galerkin torna-se

$$W = N_i + \frac{1}{2}u\Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{k\Delta t}{\rho c_p} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

Para elementos lineares a derivada segunda da função de forma é zero anulando o ultimo termo da equação. A função peso resultante terá a mesma estrutura da função peso utilizada no método SUPG.

Para obter as soluções exatas do regime permanente, usando elementos lineares, o passo de tempo para problemas convectivos deverá ser calculado pela equação a seguir

$$\Delta t = \frac{\alpha L}{|U|} \quad (2.24)$$

2.3 Integrador com passo de tempo adaptativo

O método dos Elementos Finitos transforma o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas. Na solução desse sistema de equações algumas técnicas de solução são utilizadas. Nesta seção será apresentado um integrador com passo de tempo adaptativo utilizado num método *Preditor-Corretor*.

A maioria dos problemas modelados por equações diferenciais ordinárias (EDOs), não apresentam soluções analíticas. Nestes casos, a maior parte tem sido aproximada com o emprego de técnicas numéricas. Nesta seção iremos definir o PVI (Problema de valor inicial) e alguns elementos teóricos necessários no desenvolvimento das técnicas numéricas.

A discretização do domínio de validade irá gerar o conjunto de pontos

$$t_i = a + i\Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta t = \frac{b - a}{n}$$

onde n o número de passo do intervalo $[a, b]$ e Δt , o tamanho do passo de tempo. Denotaremos por y_n a aproximação da solução exata em t_n , ou seja, $y_n \simeq y(t_n)$, e por $f_n = f(t_n, y_n)$.

O emprego combinado e sucessivo de um método explícito e um implícito recebem o nome de *Método Preditor-Corretor*. O método explícito prediz uma aproximação, e o método implícito corrige tal predição. A parte implícita melhora as aproximações obtidas com a parte explícita.

As técnicas preditor-corretor geram duas aproximações em cada passo. Essas aproximações podem ser relacionadas e comparadas com a tolerância do erro local. Assim, tais aproximações podem ser empregadas na adaptação do tamanho do passo de tempo baseado no controle de erro local.

A estabilidade na resolução de ED's resultantes de métodos numéricos a um ou mais passos estão diretamente ligadas à dimensão do passo de tempo, que deve ser estimado a cada iteração. O custo computacional é função do passo de tempo estimado Δt . Dessa forma, a determinação de Δt , considerada a ordem de acércea previamente determinada, passa a representar um papel importante na eficiência dos métodos de resolução de PVIs.

Uma potencial limitação das técnicas de tamanho de passo adaptativo reside no fato de que eles encorajam o emprego de um tamanho de passo constante para períodos de tempo significativamente grandes e por outro lado, restringe o tamanho de passo dentro de limites pré-estabelecidos, como exemplo, pode-se citar o método Range-Kutta-Fehldeberg, no qual é efetuado um controle do erro, de tal forma que os valores do passo não ultrapassem um certo valor máximo especificado.

Algoritmos de ajuste automático do tamanho do passo, que se adaptam à trajetória da solução, são conhecidos por *controle adaptativo do tamanho de passo* (Chapra e Canale, 1988). A sua implementação requer a estimativa do erro local de truncamento (ELT) determinado a cada passo. A dimensão do tamanho de passo é determinada a cada iteração, baseada nesse ELT (Shampine, 2005). Seu valor é calculado de forma a manter o erro dentro de uma dada tolerância e a assegurar uma precisão específica (Collins, 2003). Conseqüentemente, o algoritmo deve monitorar o erro local e, por ajustes no tamanho do passo, tentar manter sua magnitude num nível específico (Johnston, 1982).

Estabelecida a tolerância desejada ϵ , é possível determinar ou "adaptar" um tamanho do passo. Em geral, a estratégia é aumentar o tamanho do passo se o erro é muito pequeno e diminuir se o erro é muito grande (Chapra e Canale, 1988). Um algoritmo padrão para o controle do passo de tempo foi empregado em Gear (1971), onde o cálculo do tamanho do passo de tempo é calculado por

$$\Delta t_{n+1} = \left(\frac{\epsilon}{|d_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{q+1}} \cdot \Delta t_n \quad (2.25)$$

onde Δt_{n+1} e Δt_n são os tamanhos de passos nos instantes t_n e t_{n+1} , ϵ é a precisão desejada, $|d_{n+1}|$ é a distância entre a solução predita e a solução "correta" (Bixler,

1989), relacionada ao erro local de truncamento do método numérico, e que representa a ordem de erro do método. Gear (1971) propõe um integrador implícito no tempo fundamentado no preditor de Adams-Bashforth, e na regra do trapézio como corretor (Gresho et al., 1980). Utilizando essas considerações, Bixler (1989) propõe um novo integrador no tempo. Este integrador substitui a expressão empregada como corretora pela equação conhecida como "one-leg twin" da regra do trapézio (Hairer e Wanner, 1993). Esta equação é também conhecida como "Implicit Mid-point rule" ou regra do Ponto Médio Implícito. Esse método será discutido em detalhes na próxima seção.

2.3.1 Controle adaptativo do passo de tempo

Esta seção descreve o um método para resolução de PVI com controle adaptativo do passo de tempo. Gresho et al. (1980), ao propor a estratégia uma controle adaptativo do passo de tempo, recomendou o emprego de um preditor, Adams-Bashforth, com acuracea de segunda ordem. Uma vez que esta expressão é função de y_n , foi sugerido o emprego da regra do trapézio para a estimação dessa taxa de variação. Esta escolha é efetuada de forma muito natural devido a sua consistência com o corretor proposto

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n \frac{f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n)}{2} \quad (2.26)$$

onde y é a variável dependente, n indica o plano do passo de tempo e Δt_n , o comprimento do passo de tempo entre os planos de tempo n e $n + 1$.

Bixler(1989), propõe três alterações ao integrador preditor/corretor proposto por Gresho. Primeiramente, sugere a substituição do corretor desenvolvido segundo a lei do trapézio pelo corretor "one leg twins" (gêmeos de uma única perna)(Hairer e Wanner, 1993). Em segundo lugar, as expressões para estimativa das taxas de variação da solução são substituídas, de forma a melhorar a performance do preditor. Por fim, a expressão responsável pelo cálculo da dimensão do passo de tempo a cada iteração é modificada.

O desenvolvimento do método de Bixler consiste nas equações das três etapas a seguir:

1. O preditor a dois-passos de Adams-Bashforth, com acuracea de segunda ordem

$$y_{n+1}^p = y_n + \frac{\Delta t_n}{2} \left[\left(2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \right) \dot{y}_n - \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \dot{y}_{n-1} \right] \quad (2.27)$$

onde y_{n+1}^p se refere ao y predito no plano temporal $n + 1$ e \dot{y}_n e \dot{y}_{n-1} , às derivadas

no plano temporal n e $n - 1$, são aproximadas por

$$\dot{y}_n = \frac{2}{\Delta t_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) - \dot{y}_{n-1}$$

$$\dot{y}_{n-1} = \frac{\Delta t_{n-2}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} \right) + \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_{n-1} + \Delta t_{n-2}} \left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta t_{n-2}} \right)$$

2. Como corretor foi empregado a expressão "one-leg twin", Eq. (2.28), em substituição do antigo corretor do método GLS Eq. (2.26)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t_n f \left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}, \frac{t_{n+1} + t_n}{2} \right) \quad (2.28)$$

3. Para controle do passo de tempo é utilizada a expressão

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \left(\frac{\epsilon}{|d_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.29)$$

onde ϵ é a estimativa para o erro local e d_{n+1} uma expressão relacionada à diferença entre a solução corrigida e a exata

$$d_{n+1} = \frac{\beta}{2 + \alpha + 3 \frac{\Delta t_{n-1}}{\Delta t_n}} (y_{n+1} - y_{n+1}^p) \quad (2.30)$$

As Eqs (2.26) e (2.28), responsáveis pela correção no método GLS e do método de Bixler, respectivamente, são resolvidas com o emprego do método de Newton. A Eq. (2.30) é desenvolvida por meio do emprego do dispositivo de Milne (Iserles, 1996). O valor de β , conforme (Bixler, 1989), deve estar compreendido pelo domínio $0,25 < \beta < 1$. Na resolução de equações diferenciais não lineares, sugere-se que tal coeficiente deva ser mantido igual a 0,25.

O erro de truncamento local para a Eq. (2.28) é dado por

$$y_{n+1} - y_{n+1}^E = \frac{\beta}{12} \Delta t_n^3 \ddot{f}(y, t) + O(\Delta t^4) \quad (2.31)$$

onde o E indica a solução exata.

Com o objetivo de verificar e comparar os resultados e o tamanho dos passos produzidos pelos métodos Gresho (GLS) e Bixler, será considerado o seguinte exemplo.

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

cuja solução analítica seja igual a

$$y = \frac{1}{1+t} \quad (2.33)$$

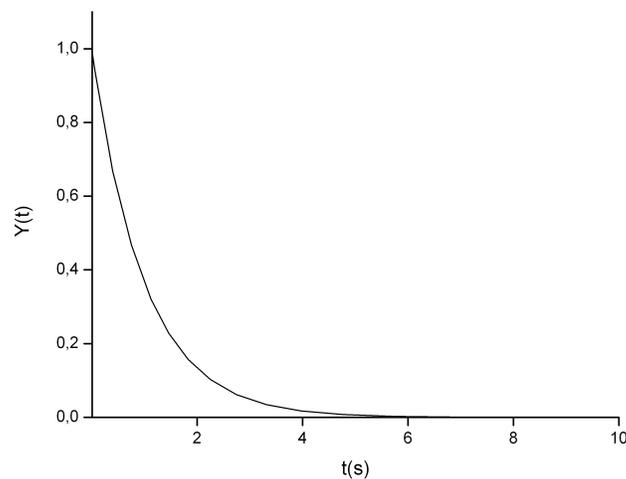


Figura 2.3: Solução da equação 2.32.

a qual encontra-se representada pela Fig. 2.3. Nos primeiros segundos a função apresenta alta taxa de variação com o tempo, tendendo esta taxa para valores cada vez menores, ao longo da sua resolução. Este tipo de comportamento é explorado pelos métodos de passo de tempo adaptativo. Os períodos em que a taxa de variação da função em relação ao tempo são elevadas, os passos de tempo tendem a valores pequenos, crescendo à medida que as taxas diminuem.

São avaliadas a influência da variação dos parâmetros apontados anteriormente. A tolerância (ϵ) foi considerada em três valores 10^{-3} , 10^{-5} e 10^{-7} , o tempo de simulação foi de 10 segundos e o passo de tempo inicial igual a 1×10^{-5} , com o número total de iterações n iguais a 300.

Na Fig.2.4 encontram-se apresentadas o número de iterações necessárias em três resoluções do PVI (Eq.2.32), relativas às tolerâncias do erro local 10^{-3} , 10^{-5} e 10^{-7} , respectivamente. Verificou-se existir uma relação entre esse número de iterações e a

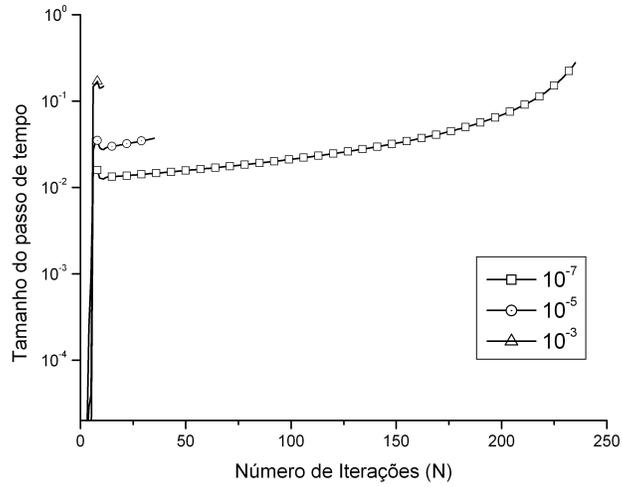


Figura 2.4: Número de iterações necessárias para atingir o tempo final com as tolerâncias especificadas.

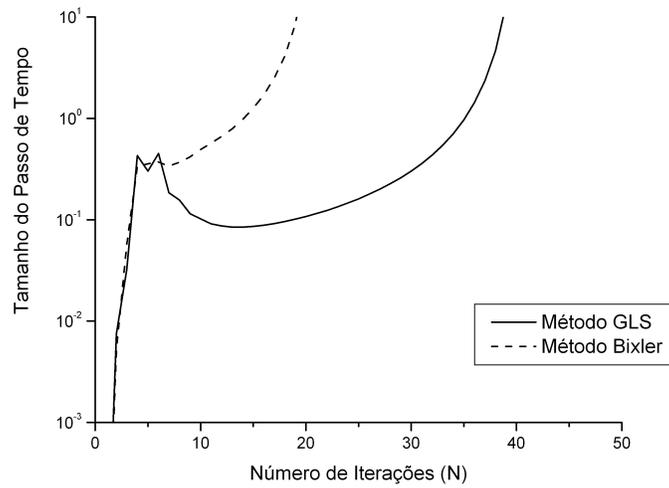


Figura 2.5: Tamanho do passo de tempo a cada iteração para o número total de iterações $N=50$.

tolerância imposta. Quanto menor a tolerância, um maior número de passos é necessário para a resolução total do problema, como obviamente poderia ser esperado. Na resolução com tolerância igual a 10^{-3} , foram necessárias 21 iterações até a resolução total. Para a resolução com tolerância igual a 10^{-5} e 10^{-7} foram empregadas 35 e 217 iterações, respectivamente.

Verificou-se conforme a Fig. 2.5 que o tamanho do passo de tempo cresce exponencialmente conforme o comportamento da solução fica mais estável, comparando com a Fig. 2.3. O tamanho do passo cresce mais rapidamente quando resolvido pelo Método de Bixler. Comparando com o Método GLS a melhora é significativa. A significativa economia computacional verificada no resultados acima aponta fortemente as vantagens do método de Bixler.

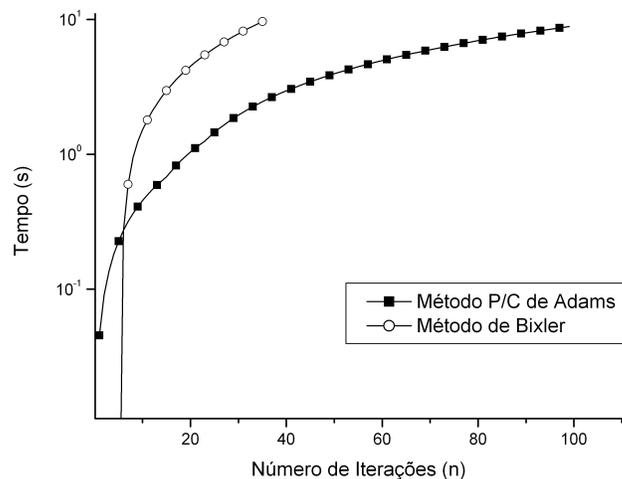


Figura 2.6: Número de Iterações necessárias para atingir o tempo final, com tolerância de 10^{-5} .

Para a tolerância de 10^{-5} , conforme a Fig. 2.6, utilizou-se o método de passo variável, o Método Preditor-Corretor de Adams. Verificou-se que o número de iterações necessárias para atingir o tempo final de 10 segundos foi de 100 iterações. Para a mesma tolerância utilizando o Método de Bixler foram necessárias 35 iterações. Neste caso também permanece inalterada a precisão da solução.

A aplicação de um método de passo adaptativo de tempo para a resolução de sistemas de equações é sugerido por (Bixler, 1989). Alguns autores já aplicaram esse método para

solução de sistemas de equações em problemas tanto de regime permanente (Huebner, 1996), como em regime transiente (Fortes e Ferreira, 1999), para equações convectivo-difusivas, o objetivo deste trabalho é verificar a aplicação deste método para as equações puramente convectivas do modelo de Souza (1996).

2.4 Método Direto de Inicialização

A implementação da formulação de Petrov-Galerkin, e também na formulação de Galerkin apresentada em Souza (1996), algumas distorções numéricas na entrada das condições iniciais acontecem na simulação de secagem efetuada neste trabalho. Nesta seção apresenta-se uma técnica de suavização da entrada das condições iniciais, este tratamento é empregada para minimizar ou até extinguir as distorções numéricas iniciais.

A entrada das condições iniciais se dão através de uma função degrau, onde para o tempo $t=0$ temos a função $\phi = \phi_{(in)}$. Conforme a Fig.2.7 . Esta forma de implementação apresenta algumas vezes, distorções numéricas no início da simulação.

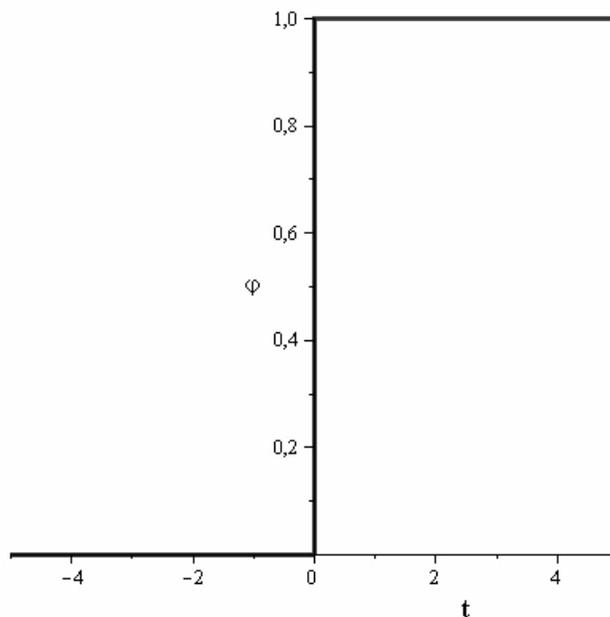


Figura 2.7: Entrada das condições iniciais na simulação.

Muitos códigos numéricos para a resolução de equações diferenciais algébricas (EDA), são robustos e amplamente documentados. No entanto, vários autores continuam a optar pela abordagem diferencial tradicional, devido à complexidade dos algoritmos

de inicialização disponíveis (Vieira e BiscaiaJR., 2000). Outros métodos dependem da diferenciação simbólica ou numérica do sistema e sobre a solução de uma grande escala não-linear do sistema algébrico, e pode não ser adequado para a maioria das aplicações práticas.

Um grande número das simulações de problemas transientes pode ser considerado como processos estacionários, em uma etapa desse processo sofrem perturbações nas suas condições de contorno. Essas mudanças forçando as funções podem causar descontinuidades em algumas das variáveis, conseqüentemente a integração automática dos códigos falha (Vieira e BiscaiaJR., 2000). Em cada descontinuidade, a simulação deve ser interrompida e os novos valores iniciais calculados coerentemente, a fim de prosseguir a integração com êxito.

Bachmann *et al.*(1990), provaram que um estado estacionário é sempre um consistente conjunto inicial, independentemente do índice ou da estrutura da EDA (Vieira e BiscaiaJR., 2000). Por isso, muita atenção tem sido dada às abordagens mais simples de inicialização, chamado a seguir de métodos direto de inicialização.

Viera e Biscaia Jr.(1999) propõe uma precisa e simples técnica inicialização. O método direto de inicialização consiste basicamente de analogia que identifica o físico e, em seguida, substitui os saltos descontínuos na função forçada u_0 a u_1 para $t = t_s$ pela função forçada da forma

$$u(t) = u_0 + (u_1 - u_0)\eta(t - t_s, \xi)$$

onde $0 \leq \eta(t - t_s, \xi) \leq 1$ e o vetor ξ representa parâmetros ajustáveis da função forçada adotada.

Um aspecto importante dos métodos diretos de inicialização é que eles podem ser uma representação melhor da situação real, onde tempos finitos são necessários para simulações experimentais de passo iniciais. O sucesso da técnica depende da suavização adequada dessas perturbações. Um eficiente e muito simples método de suavização das funções é apresentado por Viera e Biscaia Jr. (2000), e provou-se que o erro geral de suavização pode ser feita se parâmetros são escolhidos de acordo com o escalonamento das variáveis envolvidas, mais especificamente concordando com a tolerância absoluta da integração.

Várias formas de funções suaves com as propriedades desejadas podem ser derivadas, e as seguintes foram apresentados em Viera (1998). Para estas funções, $\phi = t/\tau$ e τ é o

parâmetro de suavização.

$$\eta(\phi) = 1 - \exp(-\phi) \quad (2.34)$$

$$\eta(\phi) = \text{sen}(\text{arctg}(\phi)) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + 1}} \quad (2.35)$$

$$\eta(\phi) = \begin{cases} \frac{\phi^3}{2} & 0 \leq t \leq \delta \\ \frac{1-(2-\phi)^3}{2} & \delta \leq t < 2 + \delta \\ 1 & 2 + \delta \leq t \end{cases} \quad (2.36)$$

A utilização desta técnica para função (2.35), aplicada neste trabalho, as condições iniciais entram na simulação conforme a Fig. , com o parâmetro $\tau = 10^{-1}$.

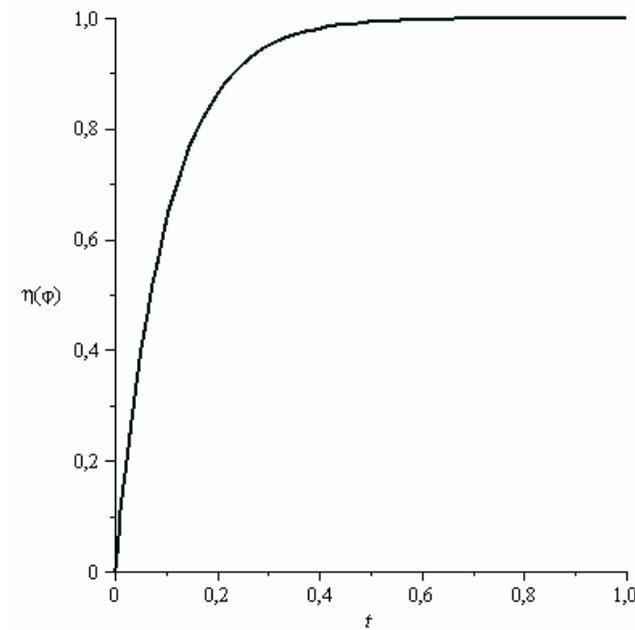


Figura 2.8: Função de suavização aplicada as condições iniciais.

O parâmetro τ não deve ser fixado de acordo com o escalonamento da variável diretamente influenciada pela suavização. Quanto menor o valor τ , menor o erro de suavização, mas maior o esforço computacional nos primeiros passos de integração. Portanto, o usuário deve determinar cuidadosamente o valor do parâmetro, a fim de exigir apenas a precisão necessária a partir do método. O parâmetro η não tem qualquer impacto na suavização do erro, mas controla igualmente uma propriedade importante da função: a continuidade das suas derivadas (Vieira e BiscaiaJR., 2000).

Capítulo 3

O problema de Secagem

Os processos de secagem de grãos agrícolas tem por objetivo a redução do teor de umidade de uma tal maneira a não produzir micro-trincas nos materiais, evitando assim a formação de grandes quantidades de finos durante seu manuseio, e permitindo que tais produtos sejam armazenados por tempo relativamente longo, sem o desenvolvimento de fungos, parasitas, etc.

O processo de *secagem artificial* de grãos permite baixar rapidamente o teor de umidade dos produtos agrícolas, permitindo o processo de armazenamento e conservação. O teor de umidade corresponde a relação entre massa de água presente no produto e o seu peso total.

No trabalho de Souza (1996) simulou-se a secagem de grãos de milho em um secador cilíndrico com fluxos radial e axial de ar com leito fixo ou estacionário. O objetivo deste capítulo é fazer uma breve e detalhada revisão deste modelo. Nas seções deste capítulo o secador utilizado é descrito, as equações constitutivas do modelo e a discretização das suas equações e condições de contorno, bem como o método de resolução, são minuciosamente revistas nas próximas seções.

3.1 A secagem de grãos

A secagem de grãos pode ser realizada de forma natural ou artificial. A secagem natural se dá pela radiação do sol, por exemplo, os terreiros de secagem de café, cacau e etc.. Uma desvantagem desta forma de secagem é o fato de estar sujeita as alterações climáticas. A secagem artificial vem contornar esse tipo de dependência do clima. E consiste em artifícios para acelerar esse processo da retirada de umidade do produto.

Os grãos tem a propriedade de repassar ou receber vapor de água do ar que os circunvizinham. Para que haja secagem do produto é necessário que a umidade relativa do ar de secagem seja menor que umidade relativa da sua superfície do grão, que tem suas condições de estado reguladas pela temperatura e teor de umidade do produto, esse processo é representado de forma esquemática pela Fig.3.1.

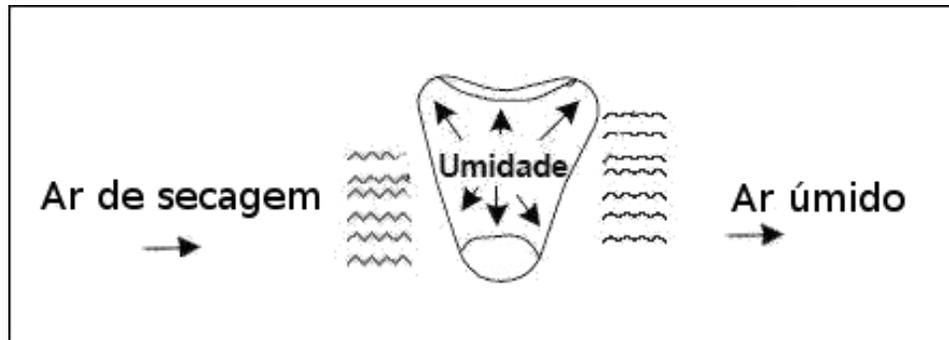


Figura 3.1: Representação do processo de secagem artificial em um grão.

A secagem artificial é classificada de acordo com sentido do fluxo de ar e do leito de grãos, sendo a secagem em leito fixo, secagem concorrente, secagem contracorrente e secagem de corrente cruzada, e quanto a funcionamento do secador, sendo contínuo ou intermitente.

- (i) Secagem em leito fixo - O ar avança sobre o leito fixo de grãos no interior do secador, a Fig.3.2 representa esquematicamente este processo de secagem.
- (ii) Secagem concorrente - O ar e o grão avançam paralelamente e no mesmo sentido no interior do secador.
- (iii) Secagem contracorrente - O ar e o grão avançam paralelamente em sentidos contrários no interior do secador.
- (iv) Secagem de corrente cruzada - O ar avança perpendicularmente ao sentido do escoamento do grão.

Os secadores de fluxo contínuo são aqueles que o produto precisa passar uma única vez pelo secador para atingir o nível de umidade desejado, já os intermitentes o produto necessita recircular várias vezes.

Simulações numéricas de secagem de milho foram feitas por Queiroz et al. (1984) em secador de fluxos concorrentes, por Rumsey (1991) em camadas espessas estacionárias.

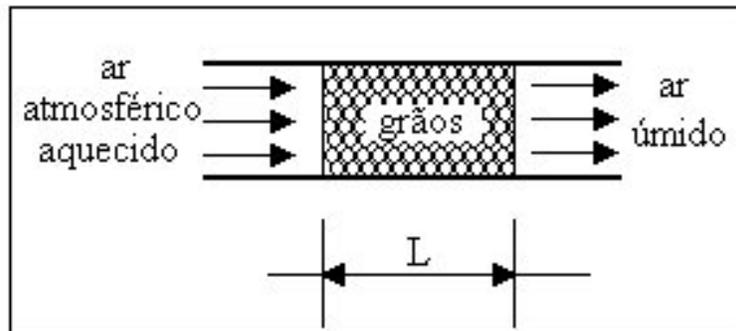


Figura 3.2: Esquema do fluxo de ar em um secador de leito fixo.

França e Fortes (1994) desenvolveram um modelo bidimensional em leito fixo de grãos, através de modificações feitas no modelo de Brooker et al. (1974). O modelo incorporou análise de escoamento de ar no interior do secador e a dependência da massa específica do ar com a temperatura.

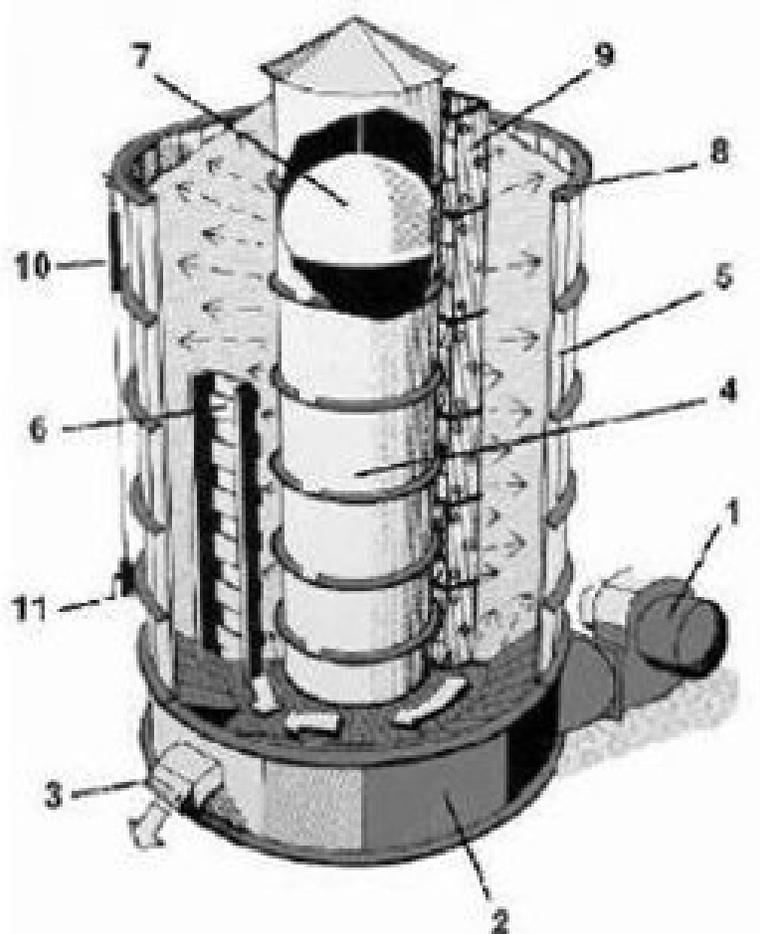
O modelo descrito por Souza (1996) tem por objetivo a simulação do processo de secagem de grãos de milho em um secador de leito fixo e fluxo contínuo, nas direções radial e axial.

O trabalho de Souza (1996) utiliza o modelo apresentado por França e Fortes (1994) para simular a secagem uni e bidimensional em coordenadas cartesianas e compara seus resultados com a solução obtida por França e Fortes (1994) usando o método de Volumes Finitos e o método dos elementos finitos. Posteriormente o modelo desenvolvido por França e Fortes (1994) é transformado para o sistema de coordenadas cilíndricas, visando simular um secador axissimétrico real na indústria, com fluxo radia e axial de ar.

3.2 O secador

Em seu trabalho Souza (1996) apresenta a simulação de três secadores: primeiro o caso unidimensional, em segundo o caso bidimensional, e um caso particular dos secadores bidimensional um secador axissimétrico. Neste trabalho somente será analisado o caso "Axissimétrico".

O secador simulado é apresentado na Fig.3.3. Este secador possui 2,00 m de diâmetro externo, o diâmetro do duto central de 0,80 m e altura igual a 3,90 m. Devido o seu formato cilíndrico com um duto central este é facilmente simplificado por uma forma



LEGENDA

1. Ventilador axial de baixa pressão;
 2. Base metálica com fundo côncavo perfurado;
 3. Saídas das sementes;
 4. Duto central de ventilação;
 5. Paineis de Madeira com venezianas de plásticos;
 6. Dispositivo de descarga e homogeneização;
 7. Válvula de controle do ar insuflado;
 8. Arco de cantoneira;
 9. Escada amortecedora de impacto das sementes;
 10. Mostrador do nível da válvula de distribuição do ar;
 11. Comando de válvula de controle e distribuição de ar.
- > Linhas de fluxo de ar quente
 ==> Fluxo de sementes

Figura 3.3: Figura do secador real. Fonte: EMBRAPA

bidimensional. Assim, o processo de secagem é simulado em dois sentidos, radial e axial. Esta discretização do domínio é apresentada em detalhes nas próximas seções.

A classificação do secador empregado nesse trabalho apresenta o leito fixo de camada espessa, e o fluxo do ar de secagem contínuo, admitida nas direções radial e longitudinal. O esquema do fluxo de ar de secagem encontra-se apresentado esquematicamente na Fig.3.4, onde parte deste adentra o secador no sentido axial, pela parte inferior deste. A parte restante do gás alcança o compartimento de grãos através de um duto central de ventilação.

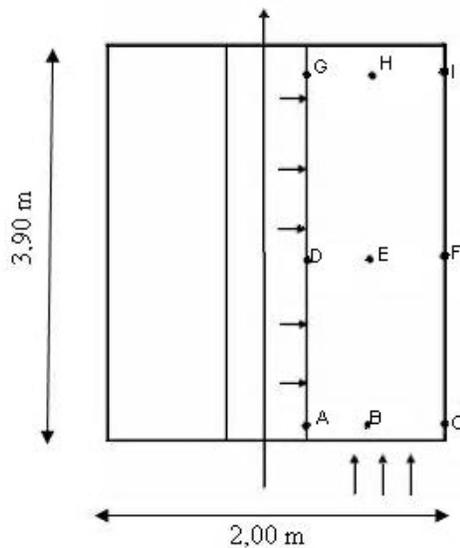


Figura 3.4: Simplificação do fluxo de ar e pontos de coleta experimentais.

Os pontos destacados na Fig.3.4 são os locais onde foram colhidos os resultados experimentais, do teor de umidade do leito, foram colhidos. Sua distribuição se deu: três pontos na altura de 0.36 m, três pontos na altura de 1.8 m e três pontos na altura de 3.6 m, instalados nos raios 0.40 m, 0.70 m e 1.0 m.

3.3 O modelo de Secagem

Para o escoamento em meios porosos no qual a variação de massa específica do fluido é desprezível com variação de pressão, as equações de continuidade modificada Eq.(3.1) e da quantidade de movimento (Lei de Darcy)(3.2) são respectivamente (Souza, 1996):

$$\frac{\partial(\epsilon\rho_a)}{\partial t} = -(\nabla\rho_a\vec{v}) \quad (3.1)$$

$$\vec{v} = \frac{-K_0}{\mu}(\nabla P - \rho_a \vec{g}) \quad (3.2)$$

em que \vec{v} é o vetor velocidade superficial, ϵ é a porosidade, K_0 é a permeabilidade do meio poroso, μ é a viscosidade absoluta do ar seco, \vec{g} o vetor aceleração da gravidade, P a pressão e ρ_a a massa específica do ar seco e t é o tempo.

Descosiderando o efeito da gravidade e tomando o coeficiente de permeabilidade dado por $K = \frac{k_0}{\mu}$, a equação de Darcy pode ser reescrita como

$$\vec{v} = -K\nabla P \quad (3.3)$$

Substituindo a velocidade superficial (vazão volumétrica por área da seção transversal do meio poroso) Eq. (3.3), na equação da continuidade (3.1):

$$\frac{\partial(\epsilon\rho_a)}{\partial t} = \nabla(\rho_a K \nabla P) \quad (3.4)$$

O termo convectivo é muito maior que a variação temporal da massa específica, em se tratando de solução numérica, a Eq. (3.4), torna-se:

$$\nabla(\rho_a K \nabla P) = 0 \quad (3.5)$$

Partindo do fato de que o coeficiente de permeabilidade é função das propriedades do meio poroso, Sheed (1991) obteve uma equação de quantidade de movimento, baseada em dados experimentais, para grãos cereais (Souza, 1996). Essa expressão relaciona a vazão do ar e o gradiente de pressão e pode ser expressa por

$$Q = A \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)^B \quad (3.6)$$

no qual Q é a vazão volumétrica por unidade de área, $\frac{\partial P}{\partial n}$ é o gradiente de pressão na direção do fluxo de ar (Pa/m) e A e B parâmetros que variam com o tipo de grão e com a faixa do gradiente de pressão, ∇P , conforme a Tab. 3.1.

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros A e B para o milho debulhado

| Faixa de Gradiente de pressão | Ax(10 ⁻³) | B |
|-------------------------------|-----------------------|-------|
| 0,000 | 8,175 | 1,451 |
| 8,175 | 20,438 | 1,713 |
| 20,438 | 57,225 | 2,297 |
| 57,225 | 163,500 | 3,017 |
| 163,500 | ... | 4,443 |
| 4,088 | 899250 | 3,294 |

*Valores médios obtidos por (Sheed, 1991) para a faixa de gradientes estudada.

A seguir são apresentadas as cinco equações componentes do modelo de secagem.

1. Equação da Pressão

$$\rho_a A |\nabla P|^{(B-1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.7)$$

A equação(3.7) resulta da comparação entre as Eqs.(3.3) e (3.6).

As equações restantes são EDP's apresentadas em coordenadas cilíndricas com suas respectivas condições iniciais e de contorno.

2. Teor de Umidade do leito:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{M_e - M}{3600 \sqrt{A^2 + (1/900)Bt}} \quad (3.8)$$

com $0 \leq z \leq 3,60 \text{ m}$, $0,40 \text{ m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$ e $t > 0$.

Condição inicial do teor de umidade do leito:

$$M = M_0$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \text{ m} \text{ e } 0,40 \text{ m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t = 0$$

onde M é o teor de umidade do leito;

M_e é o teor de umidade de equilíbrio;

A e B são coeficientes adimensionais específicos do milho, estimados para diferentes faixas de gradientes de pressão conforme a Tab. 3.1.

3. Umidade absoluta do ar:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \right) \frac{H}{r} + \frac{1}{\epsilon} \left[\vec{v}_r \frac{\partial H}{\partial r} + \vec{v}_z \frac{\partial H}{\partial z} \right] = \frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.9)$$

com $0 \leq z \leq 3,60$ m e $0,40\text{m} \leq r \leq 1,0$ m e $t > 0$

Condição Inicial da umidade absoluta do ar:

$$H=H_0$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \text{ m e } 0,40 \text{ m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t = 0$$

Condição de Contorno 1 da umidade absoluta do ar:

$$H=H_{in}$$

$$z=0 \text{ e } 0,40\text{m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t > 0$$

Condição de Contorno 2 da umidade absoluta do ar:

$$H=H_{in}$$

$$r=0,40\text{m e } 0 \leq z \leq 3,60 \text{ m}$$

$$t > 0$$

onde H é a umidade absoluta do ar;

ϵ é a porosidade do leito;

ρ_p é a massa específica do produto;

ρ_a é a massa específica do ar;

\vec{v} vetor velocidade do ar.

4. Temperatura do Ar:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon r} \right) T + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{h.a(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + H c_v)} \quad (3.10)$$

com $0 < z \leq 3,60$ m, $0,40 \text{ m} < r \leq 1,0$ m e $t > 0$

Condição Inicial da temperatura do ar:

$$T=T_0$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \text{ m e } 0,40 \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t = 0$$

Condição de Contorno 1 da temperatura do ar:

$$T = T_{in}$$

$$z = 0 \text{ e } 0,40\text{m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t > 0$$

Condição de Contorno 2 da temperatura do ar $T = T_{in}$

$$r = 0,40\text{m} \text{ e } 0 \leq z \leq 3,60 \text{ m}$$

$$t > 0$$

onde T é a temperatura do ar;

H é a umidade absoluta do ar;

h é coeficiente convectivo do ar;

a superfície específica do leito de grãos;

c é o calor específico.

5. Temperatura do leito:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h \cdot a (T - \theta)}{\rho_p (c_p + c_w M)} + \frac{h_{fg} + c_v (T - \theta)}{(c_p + c_w M)} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (3.11)$$

com $0 \leq z \leq 3,60 \text{ m}$, $0,40 \text{ m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$ e $t > 0$

Condição Inicial da temperatura do leito

$$\theta = \theta_0$$

$$0 \leq z \leq 3,60 \text{ m} \text{ e } 0,40 \text{ m} \leq r \leq 1,0 \text{ m}$$

$$t = 0$$

onde θ é a temperatura do leito;

h_{fg} é o calor latente de vaporização da água;

c_w é o calor específico da água;

c_p é o calor específico do produto;

c_v é o calor específico do vapor.

3.4 Resolução Numérica do Modelo - Formulação de Galerkin

As equações resultantes de foram resolvidas através do MEF. A discretização para cada equação é mostrada a seguir, para solução da equação de pressão e das equações de balanço de massa e energia. As equações podem ser escritas, na forma geral como:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + C_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \left[D_r(\Phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] + D_z(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - G\Phi + Q \quad (3.12)$$

3.4.1 Discretização da equação da Pressão

Quando a pressão é a variável de interesse a Eq.(3.12) é reescrita como

$$\frac{1}{r} \left[D_r(\Phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] + D_z(\Phi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

Discretizando a equação da pressão segundo a formulação de Galerkin

$$[R^{(e)}] = - \int_V N \left[\frac{D_r(P)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + D_z(P) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] dV = 0 \quad (3.14)$$

Usando a regra do produto para derivadas na direções r e z e o teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned} [R^{(e)}] = & - \int_V D_r(P) \frac{\partial N}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + D_z(P) \frac{\partial N}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) dV - \\ & - \int_{\Gamma} N \left[D_r(P) \frac{\partial P}{\partial r} dz + D_z(P) \frac{\partial P}{\partial z} dr \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os coeficientes D_r e D_z podem ser interpolados como

$$D_r = N \tilde{D}_r$$

$$D_z = N \tilde{D}_z$$

o mesmo podendo ser efetuado para pressão

$$P = N \tilde{P}$$

Ao reescrever a (3.15) em sua forma matricial, esta se apresenta na forma

$$[R^{(e)}] = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{P\} \quad (3.16)$$

onde a matriz de rigidez elementar $[K^{(e)}]$ é dada por

$$[K^{(e)}] = \int_v \left[D_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial N}{\partial r} \right) + D_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right) \right] dV \quad (3.17)$$

O volume axissimétrico é obtido pela rotação de uma secção bidimensional ao redor do eixo de simetria z , gerando uma superfície de revolução. O diferencial de volume dV da área de revolução ao redor do eixo z é $dV = 2\pi r d\Omega$.

A distância radial, pode ser interpolada da seguinte forma

$$r = \sum_{i=1}^n N_i r_i$$

onde n é o número de pontos nodais por elemento (Segeerlind, 1984). Assim, a Eq.(3.17) pode ser apresentada na forma

$$[K^{(e)}] = 2\pi \int_{\Omega} \left[D_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial [N]}{\partial r} \right) r + D_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right) r \right] d\Omega \quad (3.18)$$

$$\{I^{(e)}\} = - \int_{\Gamma} N \left[D_r(P) \frac{\partial P}{\partial r} dz + D_z(P) \frac{\partial P}{\partial z} dr \right] d\Gamma \quad (3.19)$$

A equação (3.19) pode ser então reescrita

$$\{I^{(e)}\} = - \int_{\Gamma} N \left(D_n \frac{\partial P}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.20)$$

O vetor de força elementar $\{I^{(e)}\}$ torna-se nulo quando a pressão tem um valor prescrito (Condição de Dirichlet) e sendo a condição de contorno derivativa (condição de Neuman) a Eq.(3.20) pode ser escrita como

$$\{I^{(e)}\} = - \int_{\Gamma} N \rho_a |\vec{v}| d\Gamma = \{f^{(e)}\} \quad (3.21)$$

Condições de contorno para equação da pressão são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Condições de Contorno para equação de pressão

| | |
|-----------------------------|---|
| Entrada do secador | Neuman: $\frac{\partial P}{\partial n} = -K^{-1} \vec{v} $ ou Dirichlet: $P = P_{in}$ |
| Saída do secador | $P = P_{out}$ |
| Junto às paredes do secador | $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ |

3.4.2 Discretização das equações de conservação de massa e energia

A forma discretizada das equações de conservações de massa e energia, que não possuem os termos difusivos, será efetuada a partir da Eq. (3.12), que modificada apresenta-se como:

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + C_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + G\Phi = Q \quad (3.22)$$

Efetuando a discretização das equações acima através da formulação de Galerkin, tem-se:

$$[R^{(e)}] = - \int_V N \left[-\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial t} - C_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - C_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - G\Phi + Q \right] dV = 0 \quad (3.23)$$

A variável Φ pode ser calculada em qualquer ponto do domínio de um elemento como

$$\Phi = N\tilde{\Phi}$$

onde $[N]$ é a matriz das funções de forma e $\tilde{\Phi}$ é a matriz dos valores nodais da variável de interesse.

A discretização destas equações pela formulação clássica de Galerkin não são foco deste trabalho e seus detalhes serão omitidos. Estas equações serão resolvidas, utilizando a técnica SUPG, e sua discretização será apresentada no próximo capítulo. Os resultados da implementação do modelo feita por (Souza, 1996) e os resultados apresentados com a formulação de Galerkin são apresentados nos próximos capítulos, de forma a propiciar ao leitor a interpretação e comparação das soluções obtidas.

Capítulo 4

Formulação SUPG para o problema de Secagem

Nos capítulos anteriores estabeleceu-se a formulação de Petrov-Galerkin para problemas convectivos-difusivos em regime transiente, também o modelo de secagem para simulação em um secador axissimétrico. Neste capítulo será desenvolvida a formulação de Petrov-Galerkin, com descrição da implementação e estratégias para tratamento das condições iniciais e da malha temporal.

As equações estabelecidas para Umidade Absoluta do Ar e Temperatura do Ar apresentaram-se puramente convectivas, e estas serão tratadas com a formulação de Petrov-Galerkin. As equações de Teor de Umidade do Leito e Temperatura do Ar são resolvidas pelo método de diferenças finitas por tratarem de equações que contém somente o termo transiente e o termo fonte. A equação da pressão é resolvida por Galerkin por ser uma equação difusiva.

O método SUPG é aplicado na solução das equações de Umidade Absoluta do Ar(Eq.) e Temperatura do Ar através da *Formulação de Sampaio*. O desenvolvimento das equações é apresentado na próxima seção. A descrição computacional do tratamento do problema é apresentado neste capítulo contendo o algoritmo da rotina *Upwind* e o Diagrama de Bloco do programa principal.

4.1 Discretização das Equações

O problema tratado neste trabalho apresenta cinco equações e as equações de umidade absoluta do ar e temperatura do ar, por tratarem de equações puramente con-

vectivas, são resolvidas pela técnica SUPG. Para obtermos a função de ponderação w apresentaremos a discretização de cada uma dessas equações.

4.1.1 Umidade absoluta do ar

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \left[\vec{v}_r \frac{\partial H}{\partial r} + \vec{v}_z \frac{\partial H}{\partial z} \right] = - \frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (4.1)$$

A equação (4.1) é discretizada no tempo por um esquema de diferenças centrais:

$$A + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} = 0 \quad (4.2)$$

onde temos

$$A = \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{1/2}}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\nabla H^{n+1/2} = \frac{1}{2} (H^{n+1} + H^n) \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

v é o vetor velocidade e Δt é tamanho do passo de tempo. A discretização espacial da equação da umidade absoluta do ar é realizada através da técnica de Elementos Finitos

$$H \approx \hat{H}^{n+1} = N_j H_j^{n+1} \quad (4.6)$$

onde H_j^{n+1} representa o valor nodal da umidade absoluta do ar no tempo $n + 1$ e N_j é a função de forma associada a este nó j .

Das equações anteriores pode-se desenvolver \hat{A} como

$$\hat{A} = \frac{\hat{H}^{n+1} - \hat{H}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial z} \quad (4.7)$$

A minimização do resíduo, advindo da aproximação de A por \hat{A} , é efetuada segundo a técnica dos mínimos quadrados

$$R = \int_{\Omega} [\hat{A} - A]^2 d\Omega \quad (4.8)$$

Ao substituir (4.7) em (4.8) obtem-se

$$R = \int_{\Omega} \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right]^2 d\Omega \quad (4.9)$$

O quadrado do resíduo é agora minimizado com relação aos parâmetros livres H_j^{n+1} .

$$\frac{\partial R}{\partial H_j^{n+1}} = \int_{\Omega} 2 \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] \frac{\partial \hat{A}}{\partial H_j^{n+1}} d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

A equação acima é equivalente ao método de Petrov-Galerkin com as funções peso $N_i + W_i = W$.

$$\int_{\Omega} (W) \left[\hat{A} + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

onde

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \quad (4.12)$$

Discretizando a equação da Umidade Absoluta do Ar, utilizando a formulação de Sampaio (Sampaio, 1991) e reescrevendo a equação (4.11), obtemos

$$\int_{\Omega} (W) \left[\left(\frac{H^{\hat{n}+1} - \hat{H}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0. \quad (4.13)$$

Distribuindo a integral e a função peso W

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (W) \left(\frac{\hat{H}^{n+1} - \hat{H}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1/2}}{\partial z} \right) d\Omega + \\ \int_{\Omega} (W) \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1/2)} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando o teorema de Grenn e ponderando por N_i obtem-se a formulação usual de Galerkin, entretanto surgem os termos da contribuição do uso de W_i (Sampaio, 2005). E considerando que os termos ponderados por W_i são integrados no interior dos elementos, como descrito por Brooks e Huges (1982).

Soluções exatas de regime permanente podem ser obtidas, quando usados elementos lineares, e o passo de tempo for calculado pela Eq.(2.24) como sugere Sampaio (1991). Para obter o regime permanente como limite, os valores de \hat{H} no instante $n+1$ tendem ao

valores de \hat{H} no instante n , assim a formulação de Sampaio para Eq.(4.14) é apresentada como

$$\int_{\Omega} (W) \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial H^{n+1}}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (W) \left(\frac{\rho_p}{\epsilon \rho_a} \frac{\partial M}{\partial t} \right)^{(n+1)} d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

4.1.2 Temperatura do Ar

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \quad (4.16)$$

A equação (4.16) é discretizada no tempo por um esquema de diferenças finitas centrais

$$A + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} = 0 \quad (4.17)$$

onde temos

$$A = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{1/2}}{\partial z} \quad (4.18)$$

$$\nabla T^{n+1/2} = \frac{1}{2}(T^{n+1} + T^n) \quad (4.19)$$

$$T^{\hat{n}+1} = N_j T_j^{n+1} \quad (4.20)$$

Nas expressões acima v e o vetor velocidade e Δt é o tamanho do passo de tempo. A discretização espacial da equação da temperatura do ar é realizada através da técnica de Elementos Finitos.

$$T \approx \hat{T}^{n+1} = N_j T_j^{n+1} \quad (4.21)$$

onde T_j^{n+1} representa o valor nodal da temperatura do ar no tempo $n+1$ e N_j é a função de forma associada a este nó j . Das equações anteriores pode-se desenvolver \hat{A} como

$$\hat{A} = \frac{T^{\hat{n}+1} - \hat{T}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{T}^{1/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \hat{T}^{1/2}}{\partial z} \quad (4.22)$$

A minimização do resíduo, advindo da aproximação de A por \hat{A} , é efetuada segundo a técnica dos mínimos quadrados

$$R = \int_{\Omega} [\hat{A} - A]^2 d\Omega \quad (4.23)$$

Substituindo (4.17) em (4.23) obtemos

$$R = \int_{\Omega} \left[\hat{A} + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} \right]^2 d\Omega \quad (4.24)$$

O quadrado do resíduo deve ser minimizado com relação aos parâmetros livres T_j^{n+1} .

$$\frac{\partial R}{\partial T_j^{n+1}} = \int_{\Omega} 2 \left[\hat{A} + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} \right] \frac{\partial}{\partial T_j^{n+1}} d\Omega = 0 \quad (4.25)$$

A equação acima é equivalente ao método de Petrov-Galerkin com as funções peso $N_i + W_i = W$

$$\int_{\Omega} (W) \left[\hat{A} + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \nabla N_i \quad (4.27)$$

Discretizando a equação da Temperatura do Ar, utilizando a formulação de Sampaio (Sampaio, 1991) e reescrevendo a equação (4.26), obtemos

$$\int_{\Omega} (w) \left[\left(\frac{T^{\hat{n}+1} - \hat{T}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial z} \right) + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} \right] d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

Distribuindo a integral e a função peso W

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w) \left(\frac{T^{\hat{n}+1} - \hat{T}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial z} \right) d\Omega + \\ \int_{\Omega} (w) \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1/2)} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considerando como limite o regime permanente, analogamente a equação da Umidade Absoluta do Ar, quando os valores de T no instante $n + 1$ tendem ao valores de \hat{T}

no instante n , a formulação de Sampaio para equação anterior é

$$\int_{\Omega} (w) \left(\frac{T^{\hat{n}+1} - T^{\hat{n}}}{\Delta t} + \frac{\vec{v}_r}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial r} + \frac{\vec{v}_z}{\epsilon} \cdot \frac{\partial T^{\hat{1}/2}}{\partial z} \right) d\Omega + \left(\frac{ha(T - \theta)}{\epsilon \rho_a (c_a + Hc_v)} \right)^{(n+1)} d\Omega = 0 \quad (4.30)$$

4.2 Diagrama de Bloco e Pseudocódigo

Um programa foi desenvolvido a partir das considerações desenvolvidas neste trabalho e da resolução apresentada por (Souza, 1996). Utiliza-se a linguagem FORTRAN. O programa utilizado por Souza (1996) foi implementado para a resolução do Modelo com a formulação de Galerkin. Para implementação da técnica '*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*' através da Formulação de Sampaio, implementa-se a rotina *Upwind*, que foi alocada no programa.

A seguir o diagrama de bloco para o programa principal na Fig. 4.1, e o Pseudocódigo para Rotina *Upwind* na Fig. 4.2. No pseudocódigo temos alguns termos

- IEQ = Número da equação;
- SC = Número do adimensional de Schimdt;
- Re = Número do adimensional de Reinold;
- Pe = Número do adimensional de Peclet;
- L = Tamanho do comprimento característico do elemento;
- ξ = Coordenada natural;
- η = Coordenada natural.

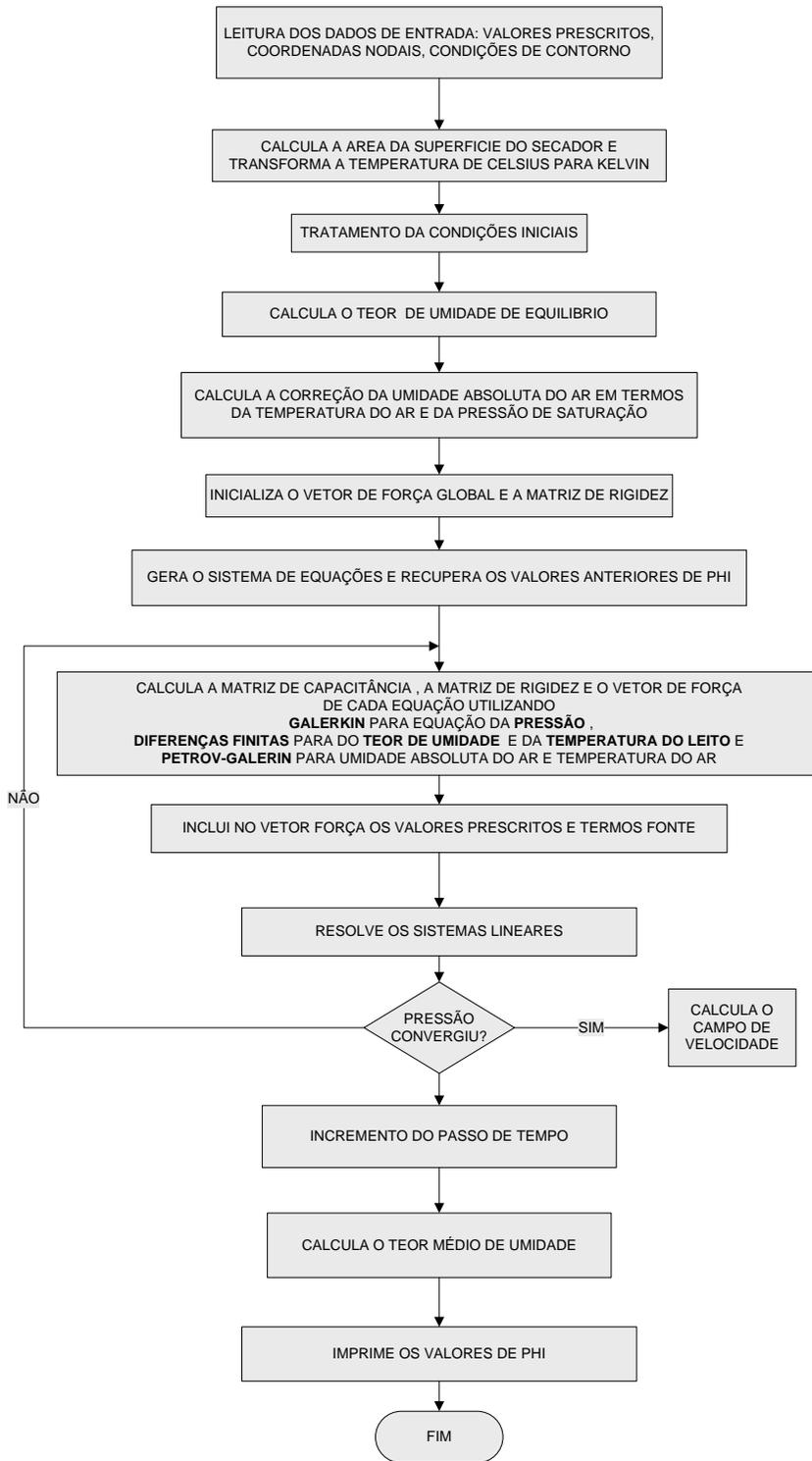


Figura 4.1: Diagrama de blocos do programa principal.

Algoritmo Rotina Upwind

```
Calcular propriedade no centro do elemento  
Calcular  $L$  na direção das coordenada  $\xi$  e  $\eta$ ;  
Escolha do menor  $h$  calculado em cada Nó;  
Se IEQ=3 então  
     $Sc.Re=2000$ ;  
    Calculo do Ponto Upwind ( $\alpha$ ) nas coordenada  $\xi$  e  $\eta$ ;  
Fim_Se;  
Se IEQ=4 então  
     $Pe =2000$ ;  
    Calculo do Ponto Upwind nas coordenada  $\xi$  e  $\eta$  ;  
Fim_Se;  
Fim_Algoritmo.
```

Figura 4.2: Pseudocódigo Upwind.

Capítulo 5

Resultados e Discussão

O presente trabalho apresenta as soluções advindas de um modelo de secagem em um secador de leito fixo bidimensional axissimétrico, constituído por cinco equações, a equação da Pressão, a do teor de umidade do leito, a equação da Umidade Absoluta do Ar, equação da Temperatura do Ar e a equação da Temperatura do Leito. As soluções serão comparados com dados experimentais coletados em um secador pertencente à Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA) sediada na cidade de Sete Lagoas - MG. Tais resultados experimentais foram coletados a cada quatro horas, nos pontos indicados na Fig.5.1.

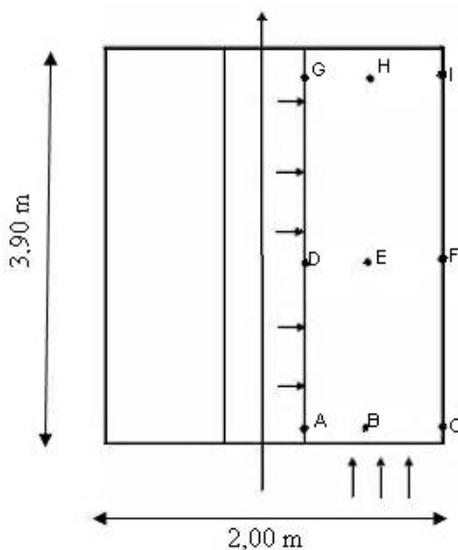


Figura 5.1: Simplificação do fluxo de ar e pontos de coleta experimentais.

Os resultados existentes foram cedidos pela própria empresa e são muito escassos, sem

análise de incerteza de medida e, unicamente, para as condições de secagem apresentados na Tab.5.1.

Tabela 5.1: Condição de Secagem dos dados experimentais

| | |
|------------------------------|---------------|
| Fluxo de Ar | $9500m^3/h$ |
| Temperatura do Ar de Secagem | $42^{\circ}C$ |
| Temperatura inicial do leito | $19^{\circ}C$ |

Os parâmetros necessários na simulação do secador axissimétrico de leito fixo de grãos encontram-se descritos na Tab.5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros de simulação do secador axissimétrico.

| Parâmetro | Valor | Unidade |
|------------|----------|-------------------|
| a | 784,0 | m^2m^{-3} |
| c_a | 1013,0 | J/kgK |
| c_v | 1884,0 | J/kgK |
| c_w | 4185,9 | J/kgK |
| c_p | 1122,0 | J/kgK |
| ρ_p | 620,0 | kg/m ³ |
| ϵ | 0,44 | m^3m^{-1} |
| P_{atm} | 101325,0 | Pa |
| P_{in} | 101730,3 | Pa |

A região do secador reservada para a instalação do material a ser seco foi discretizada por intermédio de elementos lineares de quatro nós, somando um total de 737 pontos nodais. Conforme a representação feita na Fig.5.2. Souza (1996) utilizando o MEF em sua formulação de Galerkin, utilizou de um passo de tempo bastante pequeno ($\Delta t = 40s$), a fim de que o problema convergisse para uma solução satisfatória.

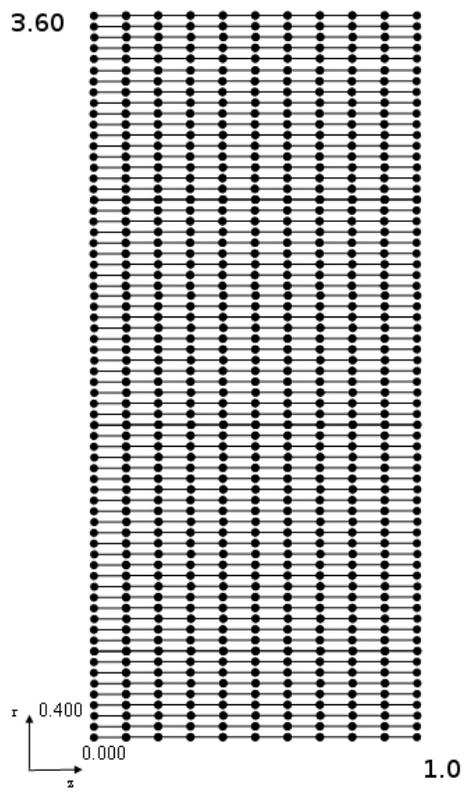


Figura 5.2: Malha de elementos quadrilateros de 4 nós.

Para o cálculo do fator "*upwind*"(α), na Eq. (2.1), utiliza-se o Número de Peclet (Pe) fixo em 2000. Utilizado para encontrar a função W na resolução da equação da temperatura do ar. Já, no cálculo de (α) para equação da umidade absoluta do ar, este adimensional é substituído por uma relação de outros dois dimensionais, o Número de Schmidt (Sc) e o Número de Reynolds (Re), relacionados a transferência convectiva de massa (Incropera e DeWitt, 1998). Então a Eq.(2.1) permanece inalterada, onde Pe torna-se o produto $Pe = Sc.Re$ e o valor deste produto também é fixo em 2000, representando o processo convectivo, em que $Pe \rightarrow \infty$.

Neste trabalho buscou-se inicialmente resolver o mesmo problema de secagem, empregado ainda passo de tempo constante igual a 40 segundos, entretanto, com a formulação SUPG do MEF.

Verificou-se uma determinada distorção nos primeiros momentos da secagem (Fig.5.3), o que pôde ser corrigido a partir da introdução de um método direto de inicialização, descrito na seção 2.4. Este método suaviza levemente a função degrau, segundo o qual as condições iniciais são introduzidas na resolução das equações.

Para utilização do tratamento das condições iniciais utiliza-se a Função de suavização apresentada na Eq.(2.34), com o parâmetro τ igual a 10^{-1} . Sob tais condições, a resolução do modelo é apresentada na Fig.5.4, com a eliminação da distorções numéricas. O método direto de inicialização substitui a descontinuidade da função degrau por uma função suave e contínua. Em seguida verificou-se que, mesmo com tamanhos de passo de tempo maiores, o problema convergia para soluções, sem grandes erros agregados.

A Figura 5.4 estão representadas as soluções obtidas pela formulação de Galerkin, com passo de tempo constante de 40 s e Petrov-Galerkin (SUPG), com passos constantes de 40, 100 e 200 s. A curva com passo de tempo constante igual a 200 s apresenta um desvio maior em relação as demais.

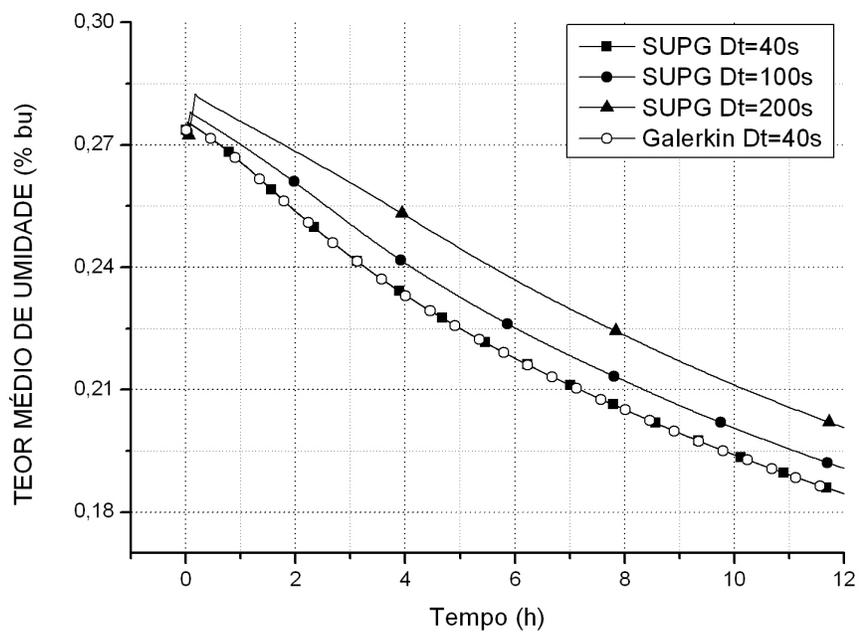


Figura 5.3: Distorção numérica causada pela entrada das condições iniciais.

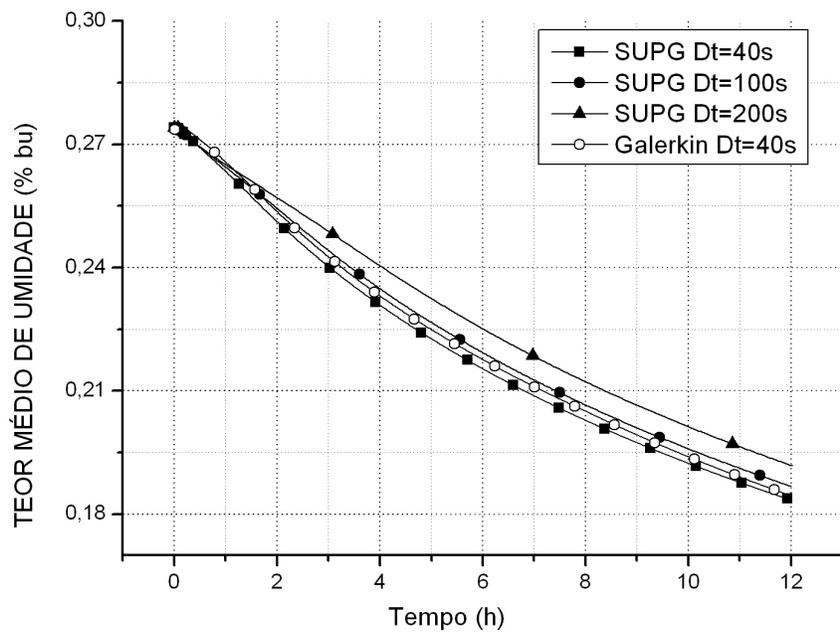


Figura 5.4: Comportamento da solução utilizando o método de inicialização direta.

Buscando comparar seus desempenhos, a Fig.5.5 apresenta as mesmas soluções expostas na figura anterior, com exceção da curva com passo de tempo constante igual a 200 s. Em seu lugar é apresentada a solução do MEF, em sua formulação SUPG, com emprego de técnica de passo adaptativo proposta por Bixler (1989). Esta simulação adaptativa, empregou passo de tempo inicial igual a 10^{-5} , limitando-o em 200 segundos, com ordem de erro de 10^{-7} . A solução obtida com essa técnica apresenta grande proximidade com as soluções obtidas com passos de tempo fixo, corrigindo o comportamento dispersivo da solução com passo fixo igual a 200 segundos.

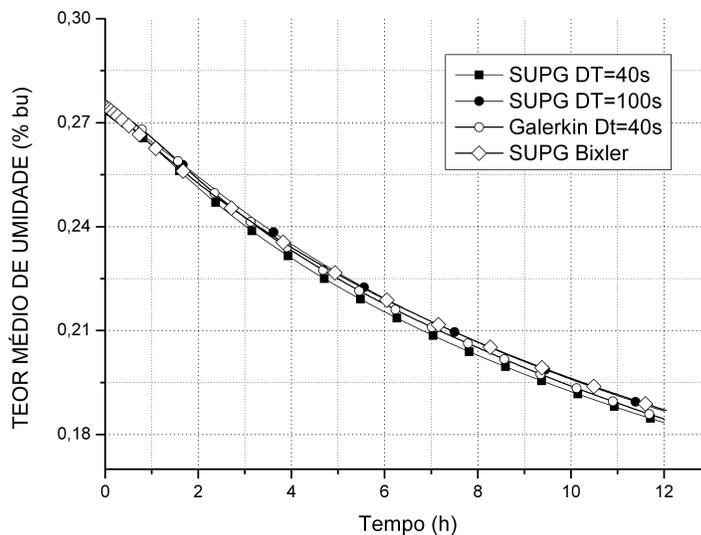


Figura 5.5: Variação do teor médio de umidade do leito com o tempo para todas as simulações realizadas, incluindo o passo adaptativo (bixler)

O tamanho dos passos de tempo adaptativos empregados na execução da solução apresentada na Fig.5.5, em relação ao número de iteração correspondente encontram-se expostos pela Fig.5.6.

Aplicada a técnica SUPG com passo de tempo adaptativo foram necessárias 450 iterações, para a formulação clássica de Galerkin com passo de tempo constante de 40 segundos, apresentado no trabalho de Souza (1996), foram necessárias 1080 iterações, simulando o tempo de 12 horas de secagem. Reiterando a *economia computacional* obtida por este trabalho.

Algumas considerações a respeito da secagem simulada neste trabalho são consideradas a seguir. O primeiro considerou-se a temperatura do ar de entrada constante. No caso real, não é possível afirmar de forma rigorosa, que esta temperatura foi mantida

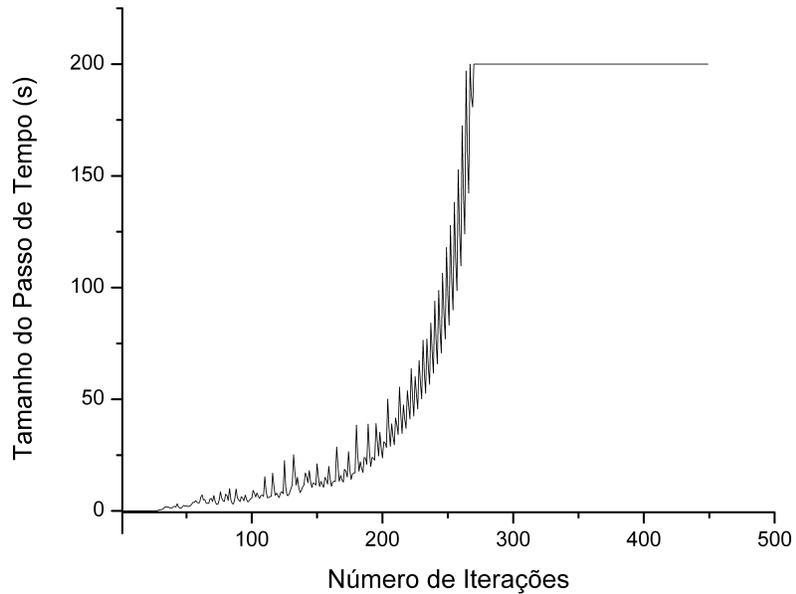


Figura 5.6: Tamanho do passo de tempo de acordo com o número de iterações.

constante. Os pontos experimentais também são poucos e a sua pouca precisão afeta a comparação com a simulação. As condições experimentais na indústria são muito difíceis, pois não é possível fazer da mesma maneira que em um laboratório.

Os dados são apresentados em curvas do teor de umidade do leito em função do raio do secador. Nela são comparados os resultados experimentais com os resultados numéricos de Souza (1996) e com os resultados numéricos advindas da técnica SUPG proposta neste trabalho. Para a primeira altura, 0,36 m, onde os pontos experimentais foram coletados, as Fig.5.7, Fig.5.8 e Fig.5.9 apresentam o perfil do teor de umidade do leito a cada quatro horas de secagem. Os resultados simulados se apresentam próximos dos dados experimentais.

Para a altura de 1,80 m, localizada na parte central do secador, temos a Fig. 5.10, Fig.5.11 e Fig.5.12 que representam as curvas para os dois processos simulados. Observa-se que na parte central do secador, os resultados numéricos se divergem dos pontos experimentais durante o processo de secagem.

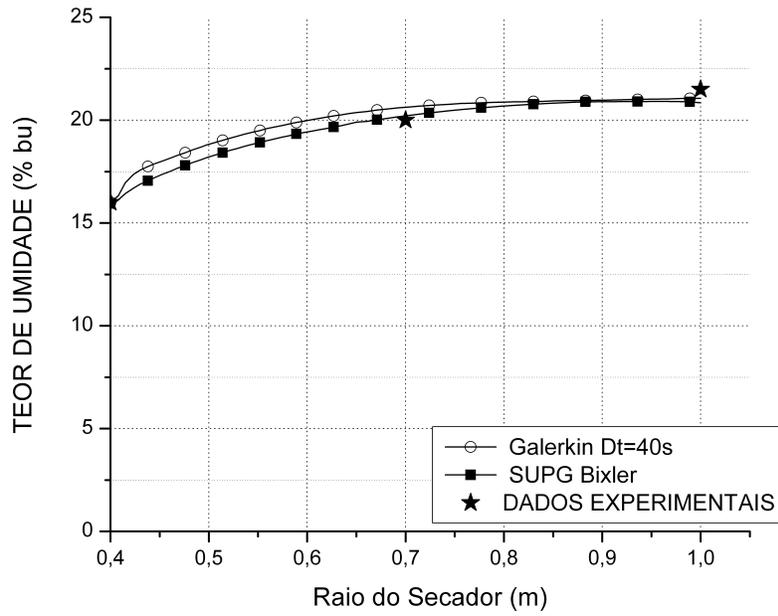


Figura 5.7: Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 0,36 m.

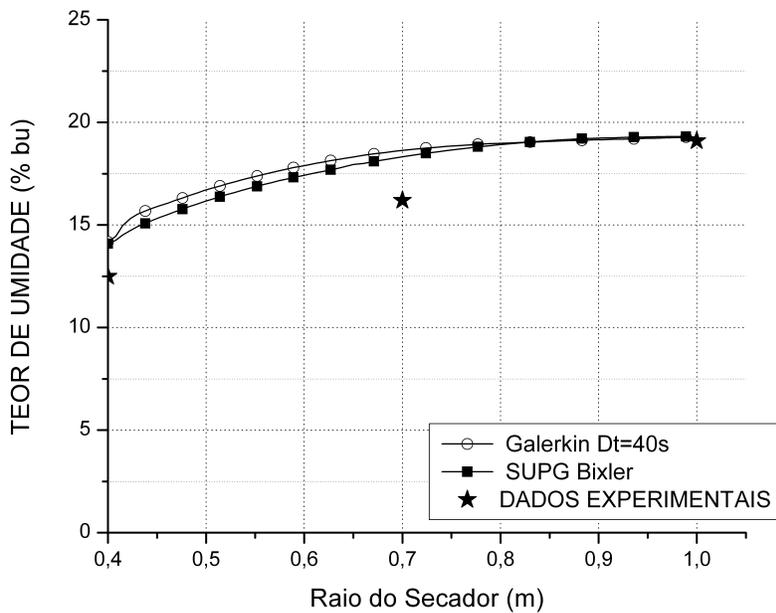


Figura 5.8: Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 0,36 m.

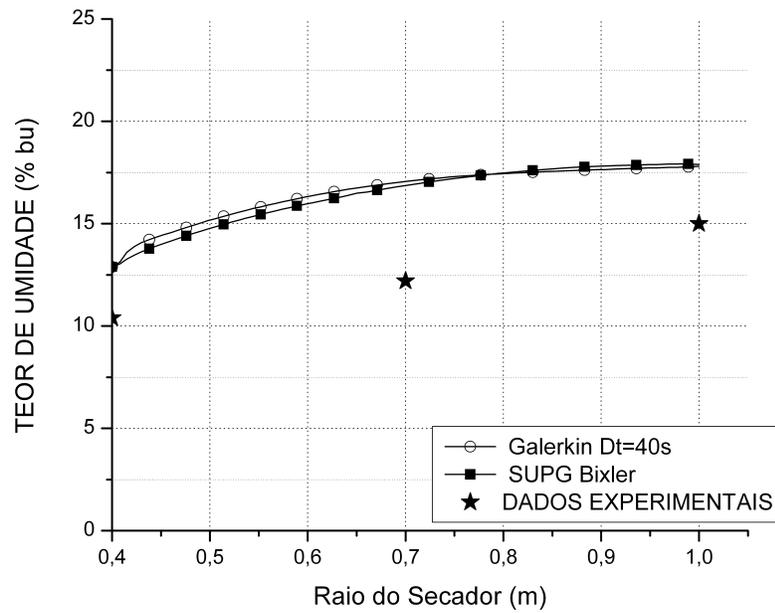


Figura 5.9: Perfil do teor de umidade leito após 12 horas de secagem para uma altura de 0,36 m.

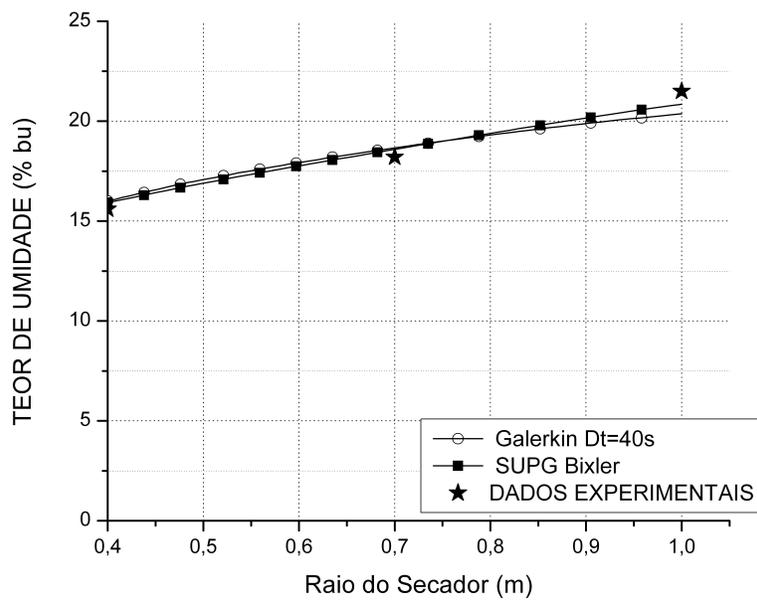


Figura 5.10: Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 1,80 m.

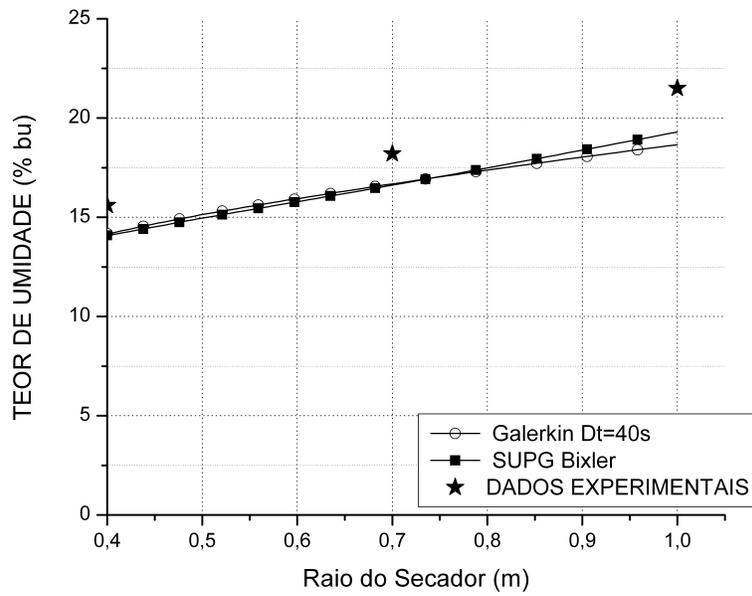


Figura 5.11: Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 1,80 m.

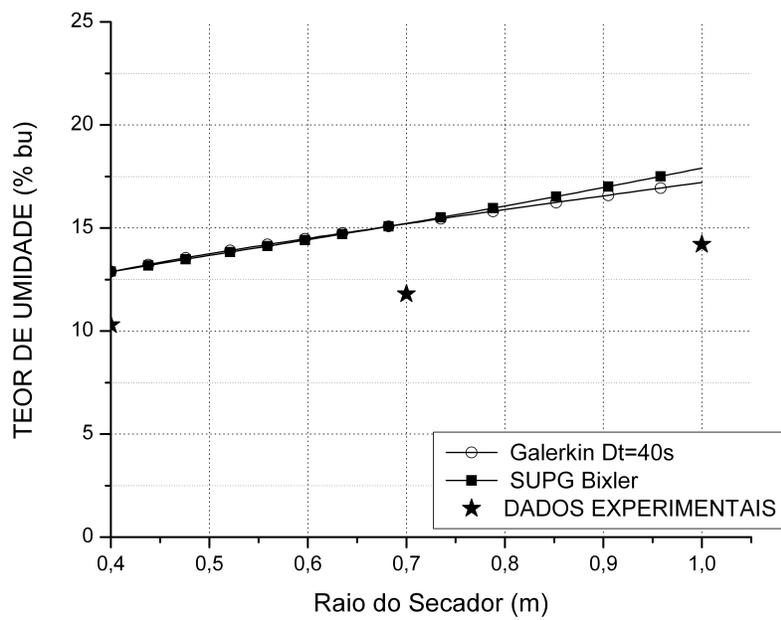


Figura 5.12: Perfil do teor de umidade do leito após 12 horas de secagem para uma altura de 1,80 m.

Na altura, 3,60 m, os dados experimentais apresentam valores divergentes em relação aos valores calculados já nas primeiras horas de secagem (Fig.5.13, Fig.5.14 e Fig.5.13). Por isso, os fenômenos de transferência de calor e massa (secagem) ocorrem inicialmente, de forma mais acentuada nas partes inferiores do leito e nas camadas anelares mais próximos as paredes do duto central. Com o passar do tempo os efeitos da secagem vão alcançando as camadas superiores, bem como as regiões mais externas.

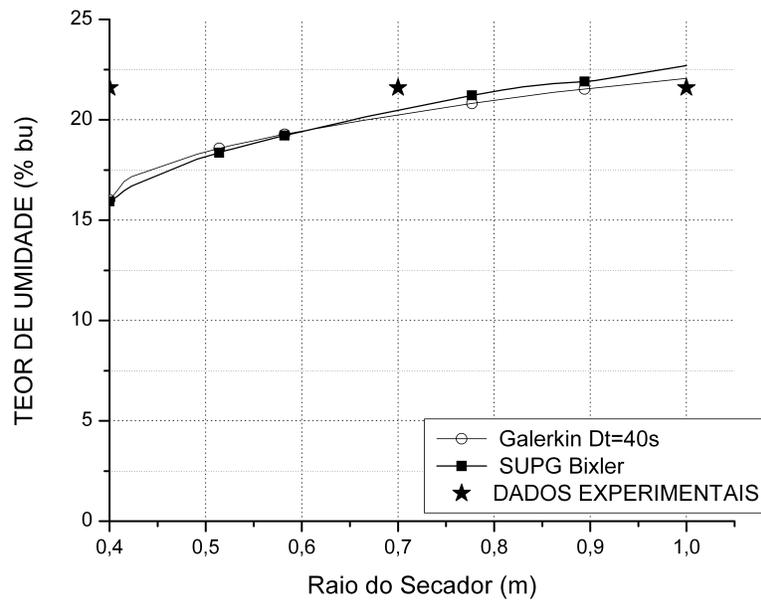


Figura 5.13: Perfil do teor de umidade do leito após 4 horas de secagem para uma altura de 3,60 m.

Para as primeiras horas de secagem, as simulações acompanham os dados experimentais com erros reduzidos, o que não ocorre nos instantes finais de secagem. Os resultados numéricos obtidos pela técnica SUPG e por Souza (1996) se distanciam dos pontos experimentais ao final da secagem. Este fato é justificado pela imprecisão dos dados experimentais coletados no secador real e pela geometria do secador.

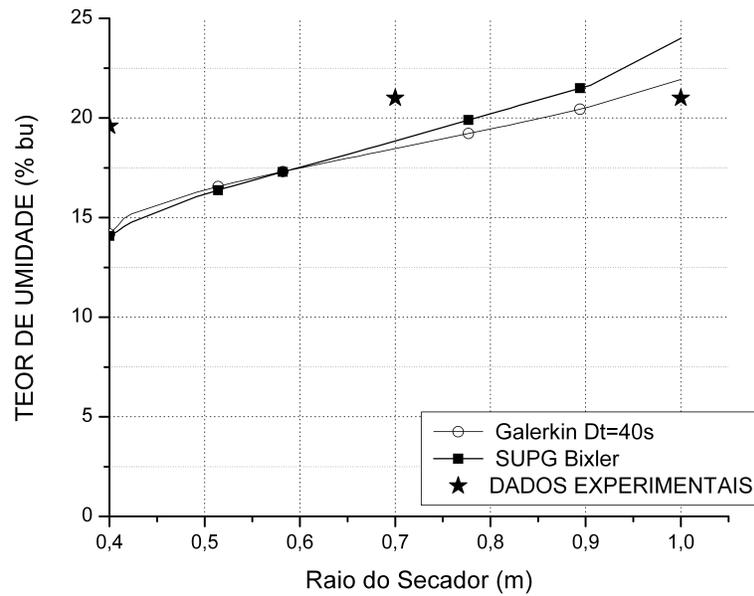


Figura 5.14: Perfil do teor de umidade do leito após 8 horas de secagem para uma altura de 3,60 m.

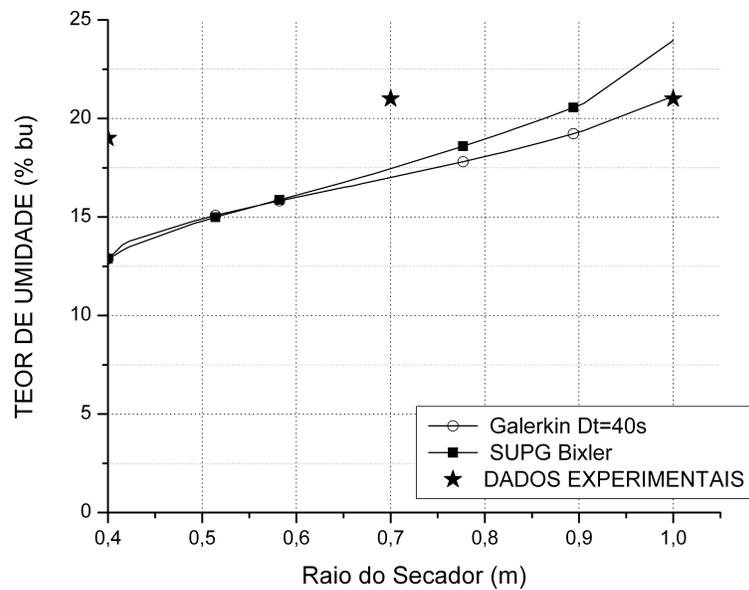


Figura 5.15: Perfil do teor de umidade do leito após 12 horas de secagem para uma altura de 3,60 m.

A distribuição da temperatura do leito de grãos, da temperatura do ar e do teor médio de umidade ao longo do secador com o tempo é apresentado nas Fig.5.16, Fig.5.17 e Fig.5.18. Cada uma das figuras representa as distribuições com 4, 8 e 12 horas de secagem, para técnica SUPG com passo adaptativo apresentada neste trabalho.

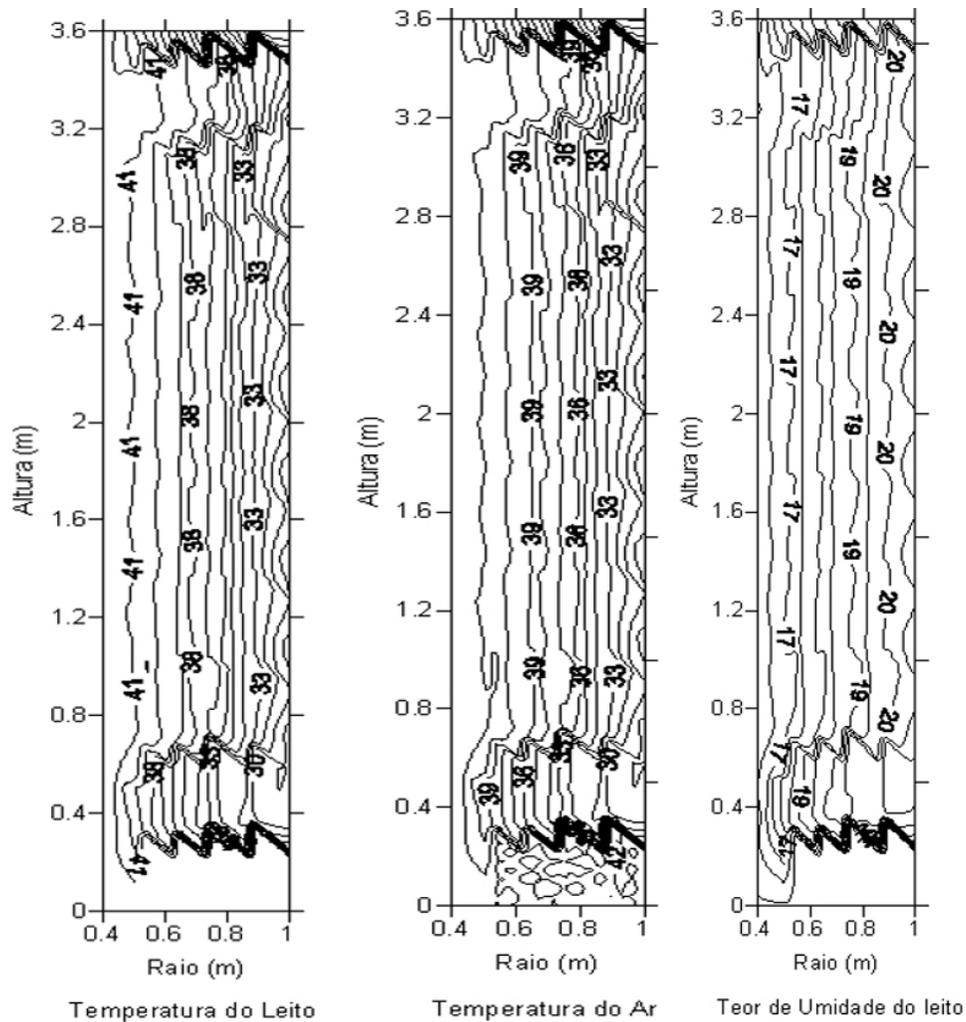


Figura 5.16: Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as 4 horas de secagem.

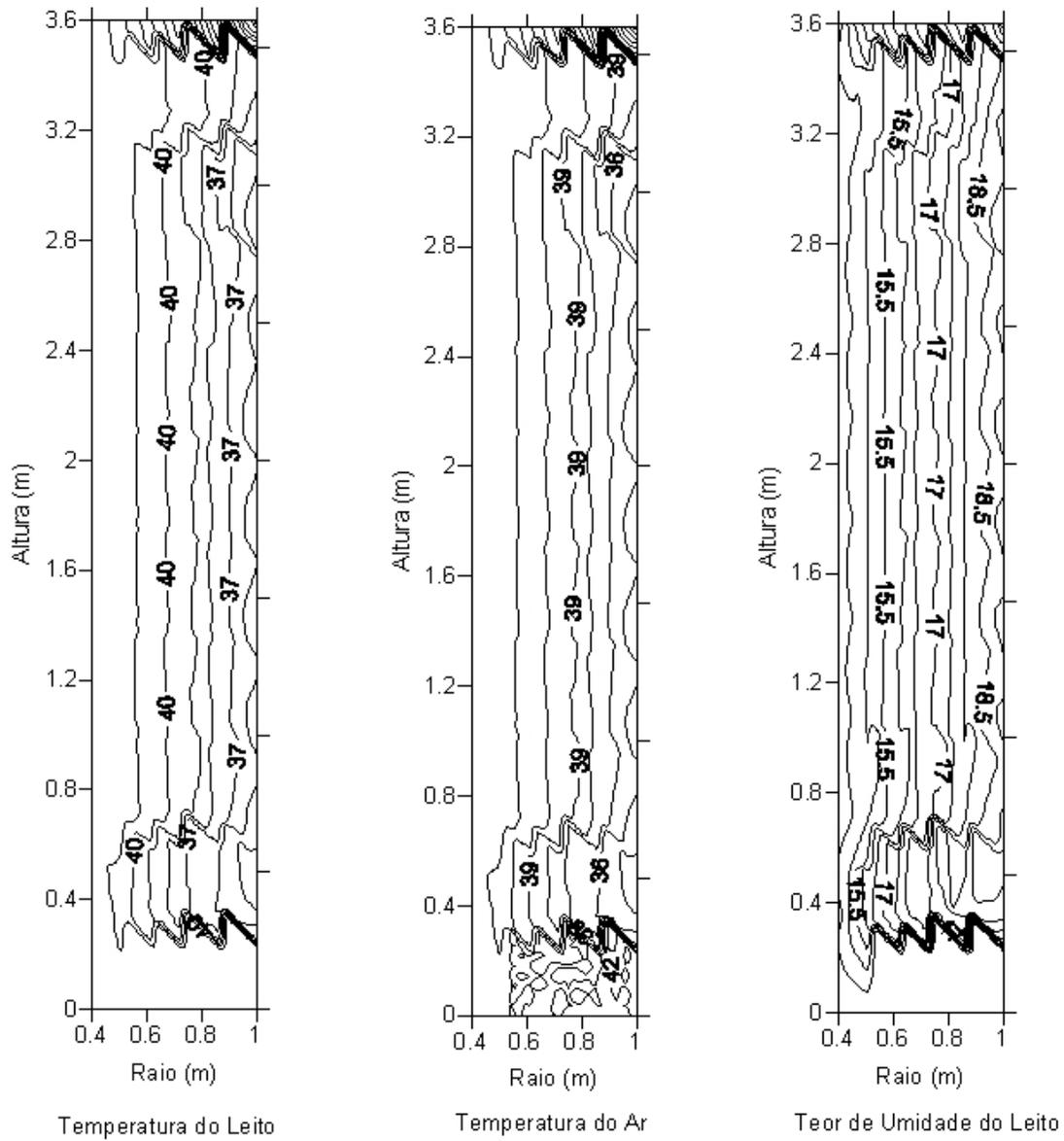


Figura 5.17: Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as após 8 horas de secagem.

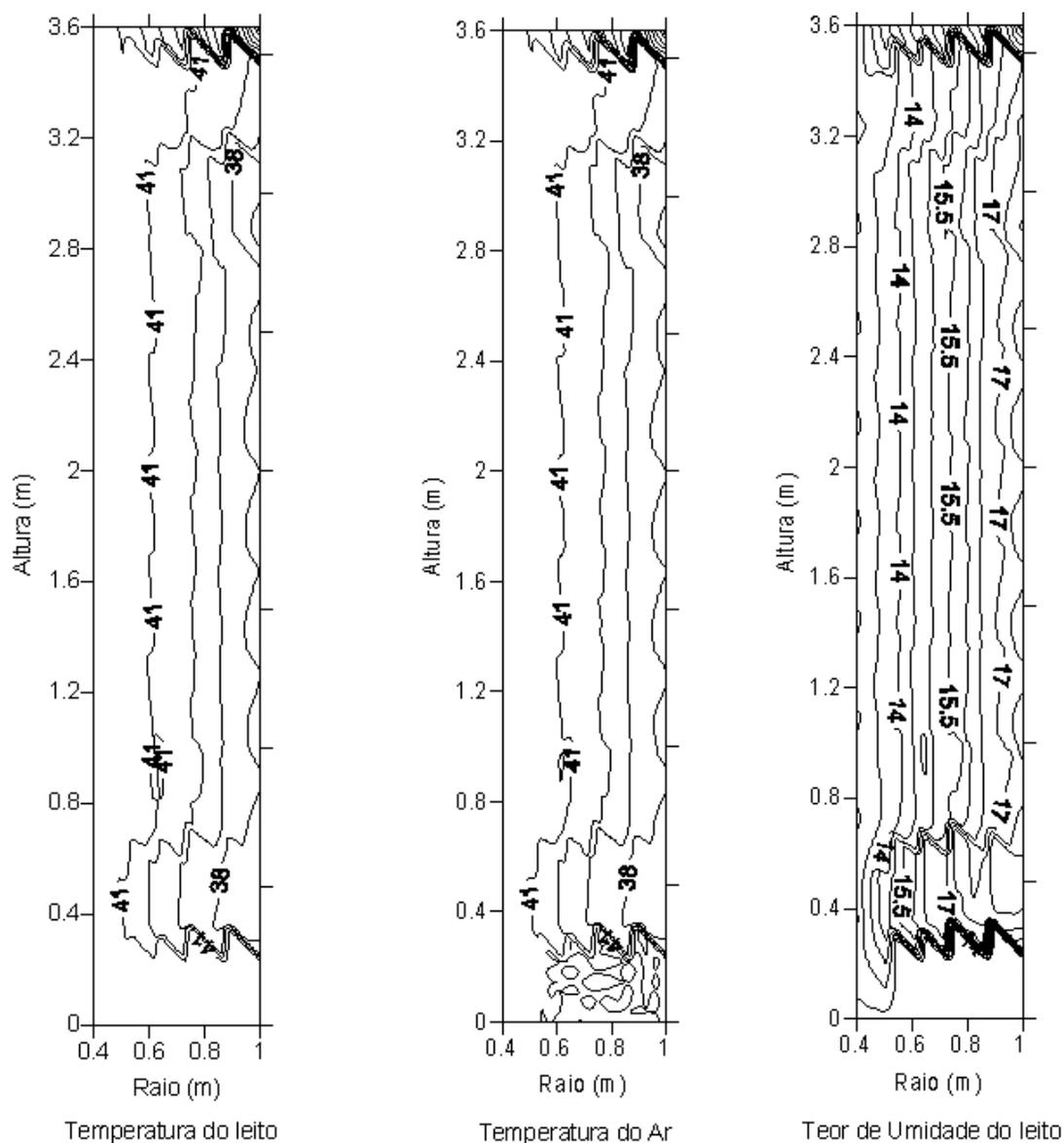


Figura 5.18: Curvas de distribuição da temperatura do leito, temperatura do ar e teor de umidade do leito após as 12 horas de secagem.

Para a temperatura do ar pode-se perceber valores elevadas próximo a entrada do secador, e conseqüentemente a elevação da temperatura do leito. O teor de umidade baixo e a alta temperatura do leito podem levar a perda do produto, sendo aconselhável um controle mais rígido da temperatura do ar de entrada.

Ao final da secagem o perfil de distribuição do teor de umidade do leito de grãos no secador, apresenta-se em níveis baixos com grande influência da geometria do secador (Fig.5.18). Observa-se que no raio mais interno do secador o teor de umidade é muito

baixo e vai aumentando com o afastamento da entrada do fluxo de ar que se dá pelo duto central.

Verificamos nas figuras acima que a distribuição do teor de umidade é altamente influenciada pela geometria do secador durante todo tempo de secagem. O secador simulado neste trabalho, o ar entra pelo duto central espalhando-se pelo leito desde a base até o topo do secador descrito corretamente pelas curvas de distribuição. Consolidando a importância da geometria do secador.

Capítulo 6

Considerações e Conclusões

Neste trabalho simulou-se a secagem de grãos em um secador cilíndrico com fluxos radial e axial de ar, com leito estacionário ou leito fixo. O modelo estabelecido por Souza (1996) é composto por cinco equações: a pressão, teor de umidade do leito, umidade absoluta do ar, temperatura do ar e temperatura do leito.

As equações da Umidade Absoluta do Ar e da Temperatura do Ar, classificadas como puramente convectivas foram resolvidas por MEF, na formulação de Petrov-Galerkin. As equações de teor de umidade do leito e da temperatura do ar foram resolvidas pelo método de diferenças finitas. A equação da pressão foi resolvida pelo MEF, na formulação de Galerkin por ser uma equação puramente difusiva.

A formulação de Galerkin (clássica) desenvolvida por Souza (1996) apresenta alguns problemas na resolução do modelo. Neste trabalho, uma das principais dificuldades está ligada ao fato de que a solução convergia apenas quando utilizados passos de tempo extremamente pequenos. Havia ainda uma instabilidade numérica nos instantes iniciais de secagem, devido à forma como as CI's são inseridas no código, de forma abrupta. A entrada das CIs se dá através de uma função degrau onde $t < 0 \Rightarrow \phi = 0$ e $t \geq 0 \Rightarrow \phi = \phi_{CI}$

No presente trabalho, com vistas a corrigir os problemas citados, as equações convectivas foram resolvidas pela formulação SUPG, passando a admitir passos bastante superiores aos empregados anteriormente (Fig.5.4). Foi possível também, com essa formulação, implementar uma técnica de passo de tempo adaptativo (Bixler, 1989).

A mesma instabilidade, devido à implementação das CI's, continuou a ocorrer (Fig.5.3). A correção foi possível através do emprego de funções de suavização da função degrau (Fig. 5.4).

Alguns dados experimentais (valores do teor de umidade do leito em função do raio e da altura do secador), para uma única condição específica de secagem, foram coletadas pela empresa proprietária do equipamento.

Essas medidas não têm um forte significado quantitativo, uma vez que o ar de secagem é aquecido através de uma fornalha, sem um controle refinado da temperatura de entrada no leito. O significado dessas medidas é apenas qualitativo.

Dessa forma, como se pode verificar pelos gráficos Fig.5.7, Fig.5.11, Fig.5.9, nem a formulação com o emprego de Galerkin clássico, nem a formulação Petrov-Galerkin apresentam uma forte correspondência com os dados experimentais, principalmente ao final da secagem.

Devido a presença de duas equações convectivas no modelo proposto por Souza (1996), a formulação SUPG, apresenta uma maior adequação na sua resolução, o que pode ser verificado pela sua capacidade de convergir, mesmo com passos de tempo maior. Talvez, devido ainda a este fato, possamos explicar porque o MEF em sua formulação clássica, Galerkin, aplicada a este problema, não permita a implementação de técnicas de controle de passo de tempo adaptativo, uma vez que na forma de Petrov-Galerkin essa técnica tenha sido implementada sem dificuldades.

As contribuições deste trabalho para simplificação da simulação de secadores reais em condições mais próximas das praticadas pela indústria, colabora para futuras simulações com alterações de geometrias e condições iniciais de entrada. A escolha de outros valores para vazão do ar e de sua temperatura de entrada podem causar a deteriorização das propriedades dos grãos, tais como ductilidade e a cor. Dessa forma, a escolha adequada destas condições são de extrema importância.

Uma proposta para trabalhos futuros consiste no refinamento do controle adaptativo de passo de tempo, através do erro local. Uma vez que a formulação de Petrov-Galerkin admite grande passos de tempo, então é possível se estabelecer menores tolerâncias para o tamanho do erro local e verificar a consonância da técnica SUPG com as malhas temporais mais refinadas.

A técnica de passo adaptativo tem sido utilizada em trabalhos em que as equações são difusivas ou dominadas pela difusão. Abre-se dessa forma novas perspectivas de aplicação desta técnica para outros modelos e problemas convectivos puros ou dominados pela convecção.

Referências Bibliográficas

- Assan, A. E. (1999). *Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos*. Ed. Unicamp, São Paulo.
- Bixler, N. E. (1989). An improved time integrator for finite element analysis. *Communications in Applied Numerical Methods*, v. 5, p. 69–79.
- Brooker, B.D.; Bakker-Arkema, F.W. e Hall, C.W. (1974). *Drying Cereal Grains*. The AVI Publ. Co. Inc., Westport: Connecticut.
- Brooks, A. N. e Huges, T. J. R. (1982). Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 199–259.
- Chapra, S. C. e Canale, R. P. (1988). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2 edição.
- Collins, G. W. Fundamental numerical methods and data analysis, (2003). URL <http://bifrost.cwru.edu/personal/collins/>, acessado em 08/06/2008.
- Fortes, M. e Ferreira, W.F. (1999). The one-dimensional transient diffusional method: finite element adaptive solutions to convection-diffusion problems. *Int.J. Therm. Sci.*, v. 38, p. 780–796.
- França, A. S. e Fortes, M. (1994). Numerical simulation of intermittent and continuous deep-batch drying of biological materials. *Drying Technology*, v. 12, n. 7, p. 1537–1560.
- Galeão, A. C.; Almeida, R. C.; Malta, S. M. C. e Loula, A. F. D. (2004). Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems. *Applied Numerical Mathematics*, v. 48, p. 205–222.

- Gear, C. W. (1971). *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall PTR, NJ. ISBN 0136266061.
- Gresho, P.M.; Lee, R.L. e Sani, R.L. (1980). One the time dependent solution of the incompressible navier-stokes equation in two and tree dimensions. *Recent Advance in Numerical Methods in fluids*, v. 1, p. 27–29.
- Hairer, E. e Wanner, G. (1993). *Solving Orginary Differential Equations II - Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, Berlin, 2nd revised ed. edição.
- Huebner, Rudolf. (1996). *Análise de Dois Métodos de Petrov-Galerkin para a Solução das Equações de Navier-Stokes e Problemas Convectivo-Difusivos*. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte.
- Incropera, F.P. e DeWitt, D. P. (1998). *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. LTC, Rio de Janeiro, 4 edição.
- Johnson, C.; Nävert, U. e Pitkaranta, J. (1984). Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 285–312.
- Johnston, R. L. (1982). *Numerical Methods - A software approach*. John Wiley & Sons, Toronto.
- Queiroz, D.M.; Dalpasquale, V.A. e Pereira, J.A.M. (1984). Simulação de secagem de milho em secadores de fluxos contracorrentes de múltiplo estágios com resfriamento em fluxos contracorrentes. *Rev. Bras. de Armazenamento*, v. 9, p. 30–34.
- Rumsey, T. (1991). Modeling moisture variability in a fixed-bed dryer. *Dryer Tecnology*, v. 9, n. 1, p. 61–78.
- Sampaio, P. A. B. De. (1991). A petrov-galerkin formulation for the incompressible navier-stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, v. 31, p. 1135–1149.
- Sampaio, P. A. B. De. (2005). A finite element formulation for transient incompressible viscous flows stabilized by local time-steps. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 194, p. 20952108.

- Söderlind, G. (2002). Automatic control and adaptative time-stepping. *Numerical Algorithms*, v. 31, p. 281–310.
- Söderlind, G. e Wang, L. (2006). Adaptative time-stepping and computational stability. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 185, p. 225–243.
- Seegerlind, L. J. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 2 edição.
- Shampine, L. F. (2005). Error estimation and control for odes. *Journal of Scientific Computing*, v. 25, n. 112, p. 3–16.
- Sheed, C.K. (1991). Resistance of grains and seeds to air flow. *Agr. Engineering*, v. 9, n. 1, p. 61–78.
- Souza, J. L. F. (1996). *Simulação de Secador Cilíndrico de Grãos com Fluxos Radial e Axial de Ar*. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte.
- Vieira, R. C. e BiscaiaJR., E. C. (2000). An overview of initialization approaches for differential-algebraic equations. *Latin American Applied Research*, v. 30, p. 303–313.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Woburn, 5 edição.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)