

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SOBRE APLICAÇÕES DA TEORIA QUÂNTICA DE INVARIANTES A  
SISTEMAS HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO

ALBERES LOPES DE LIMA

JOÃO PESSOA (PB)

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ALBERES LOPES DE LIMA

**SOBRE APLICAÇÕES DA TEORIA QUÂNTICA DE INVARIANTES A  
SISTEMAS HAMILTONIANOS DEPENDENTES DO TEMPO**

Tese apresentada ao programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho

Co-Orientador: Prof. Dr. Alexandre da Silva Rosas

João Pessoa

2008

Lima, Alberes Lopes de

Sobre aplicações da teoria quântica de invariantes a sistemas hamiltonianos dependentes do tempo / Alberes Lopes de Lima. - João Pessoa: Alberes Lopes de Lima, 2008. 126 f.

Tese (Doutorado em Física) - UFPB, Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza.

1. FÍSICA. 2. FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA. 3. TEORIA QUÂNTICA

I. Título

CDD - 530.12

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos  
meus pais, aos meus  
irmãos, à minha esposa,  
Iracema, e à nossa filha,  
Mayara.

# Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer a **Deus Pai Todo-Poderoso**, que nos concede a graça da vida.

Agradeço à minha esposa, Iracema, e à minha filha, Mayara, à minha mãe, meu pai e meus irmãos, que sempre me dão força para sonhar e conquistar.

Gostaria também de tornar pública minha gratidão ao DF da UFPB, em especial aos professores doutores: **Inácio de Almeida Pedrosa Filho**, pela orientação dada nesta tese, **Alexandre da Silva Rosas**, pelas inestimáveis discussões dadas no decorrer deste trabalho de tese e **Cláudio Benedito Furtado**, pelo seu exemplo na dedicação à Pós-graduação em Física e na responsabilidade com a qual o mesmo a dirigiu durante anos.

Gostaria também de destacar minha gratidão ao Prof. Dr. Carlos A. S. Pires, atual coordenador da pós-graduação, Prof. Dr. Valdir Bezerra e ao Prof. Dr. Pedro Luiz Christiano. Agradeço ainda aos vários amigos do DF pelo apoio que me ajudou a atingir os objetivos. Em especial, Ana Virgínia, Nazaré e Mariano.

Agradeço também o apoio fundamental dos que fazem o Colégio Militar do Recife. Desejo externar minha gratidão em especial aos amigos da Seção de Ensino C, particularmente às professoras Maria de Jesus e Ana Paula, ao CAP Corrêa da Cunha e ao CEL Washington. Sou grato igualmente aos comandantes CEL Mesquita e CEL Roberto.

Por fim, gostaria de agradecer aos inúmeros amigos que me ajudaram nesta caminhada seja com seu apoio, sua torcida ou pela inclusão do meu nome em suas orações. Sei que são muitos e esta página não comportaria tantos nomes. Mas, desejo deixar a todos o meu **MUITO OBRIGADO!**

‘O tempo é um grande mestre!  
O mal é que ele vai matando  
seus discípulos’.

Hector Berlioz (1803-1869) -  
Compositor francês

## RESUMO

Na presente tese, usamos operadores invariantes lineares à luz do método de invariantes dinâmicos para encontrar as soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Construímos as soluções do tipo pacotes de ondas gaussianos e calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação entre ambos. Como destaque, mostramos que a largura das flutuações e as correlações do pacote gaussiano não dependem da força externa. Como caso particular, aplicamos nosso formalismo ao conhecido oscilador forçado de Caldirola-Kanai. Depois, fazemos uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula, usando o modelo de oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica usando o gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico. Obtemos as funções de onda exatas para este problema em termos de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador amortecido clássico. Além disso, construímos soluções do tipo pacotes de onda gaussianos e calculamos as flutuações e as correlações quânticas para cada modo do campo eletromagnético quantizado. Em seguida, estendemos nossa investigação utilizando também um operador invariante quadrático. Encontramos as funções de onda exatas para a equação de Schrödinger para a luz num meio condutor com frequência dependente do tempo. Concluímos a presente tese abordando o problema de encontrar funções de onda (soluções da equação de Schrödinger) exatas, com dependência temporal, para uma partícula aprisionada por campos oscilantes.

**Palavras-chave:** Física. Teoria quântica. Oscilador quântico dependente do tempo.



## ABSTRACT

In this thesis, we use linear invariants and the method of dynamical invariants to obtain exact solutions of the Schrödinger equation for the generalized time-dependent forced harmonic oscillator in terms of the solutions of a second order ordinary differential equation that describes the amplitude of the classical unforced damped oscillator. In addition, we construct gaussian wave packet solutions and calculate the fluctuations in coordinate and momentum as well as the quantum correlations between them. It is shown that the width of the Gaussian packet, fluctuations and correlations do not depend on the external force. As a particular case, we consider the forced Caldirola-Kanai oscillator. In addition, we use the Coulomb gauge, linear invariants and the method of dynamical invariants in the framework of the Schrödinger equation to obtain a quantum description of the light propagation through a homogeneous conducting linear media with no charge density. We obtain exact wave functions for this problem in terms of solutions of a second order ordinary differential equation which describes the amplitude of the classical damped harmonic oscillator. Furthermore, we construct gaussian wave packet solutions and calculate the fluctuations in coordinate and momentum as well as the quantum correlations for every mode of the quantized electromagnetic field. We also use quadratic invariants together method of dynamical invariants to study the light propagation in a conducting media. We obtain exact solutions of the time-dependent Schrödinger equation for this case and construct coherent and squeezed states for the quantized electromagnetic waves. Yet, we evaluate the quantum fluctuations in coordinate and momentum as well as the uncertainty product for every mode of the electromagnetic field. Finally, we use quadratic invariants and the dynamical invariant method for obtain exact wavefunctions of the Schrödinger equation for a particle trapped by oscillating fields.

**Key-words:** Physics. Quantum theory. Time-dependent quantum oscillator.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações iniciais . . . . .	1
1.2	Osciladores harmônicos com frequência dependente do tempo: um breve histórico . . . . .	5
1.3	Organização desta tese . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Teoria quântica de invariantes de Lewis e Riesenfeld</b>	<b>11</b>
2.1	Definição do operador invariante . . . . .	11
2.2	Autoestados e autovalores do operador invariante . . . . .	13
2.3	Conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger . . . . .	15
2.4	Aplicação do método de invariantes dinâmicos a osciladores harmônicos dependentes do tempo . . . . .	17
2.4.1	Operador invariante na forma quadrática . . . . .	17
2.4.2	Determinação de autoestados e autovalores de $I(t)$ . . . . .	22
2.4.3	Determinação das fases de $I(t)$ . . . . .	23
2.5	Comentários finais . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Dinâmica quântica de um oscilador forçado generalizado dependente do tempo</b>	<b>27</b>
3.1	Considerações iniciais . . . . .	27

3.2	Soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo . . . . .	29
3.3	Pacote de ondas Gaussiano, flutuações e correlações . . . . .	35
3.3.1	Pacote de ondas Gaussiano . . . . .	35
3.3.2	Flutuações e correlações . . . . .	38
3.4	O oscilador forçado de Caldirola-Kanai . . . . .	42
3.5	Considerações finais . . . . .	50
4	Descrição quântica da luz em meios condutores homogêneos e lineares	51
4.1	Considerações iniciais . . . . .	51
4.2	Equações de Maxwell . . . . .	52
4.2.1	A conservação da carga e a equação de continuidade . . . . .	52
4.2.2	Indução eletromagnética . . . . .	54
4.2.3	A modificação introduzida por Maxwell na lei de Ampère . . . . .	56
4.2.4	A forma geral das equações de Maxwell . . . . .	57
4.3	Funções potenciais do campo eletromagnético e o gauge de Coulomb	59
4.3.1	Meio homogêneo, linear e isotrópico . . . . .	59
4.3.2	As funções potenciais do campo eletromagnético . . . . .	59
4.4	Hamiltoniano para a luz num meio condutor . . . . .	62
4.5	Luz num meio condutor . . . . .	64
4.6	Descrição quântica da luz num meio condutor . . . . .	66
4.7	Pacotes de onda Gaussianos, correlações e flutuações . . . . .	71
4.7.1	Pacotes de onda Gaussianos . . . . .	71
4.7.2	Correlações e flutuações quânticas . . . . .	73
4.8	Considerações finais . . . . .	75
5	Quantização do campo eletromagnético em meio condutor	77
5.1	Determinação do operador invariante quadrático . . . . .	77
5.2	Funções de onda de Schrödinger . . . . .	78

5.3	Determinação das funções de fase . . . . .	82
5.4	Solução geral . . . . .	83
5.5	Estados coerentes . . . . .	83
5.6	Relações de incerteza . . . . .	86
5.7	Estados comprimidos do campo eletromagnético quantizado . . .	88
5.8	Breve comentário . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Dinâmica quântica de uma partícula aprisionada por campos oscilantes</b>	<b>91</b>
6.1	O modelo . . . . .	91
6.2	Abordagem do problema . . . . .	92
6.3	Soluções para o problema . . . . .	95
6.3.1	Determinação dos autoestados do operador invariante . . .	95
6.3.2	Determinação das funções de fase . . . . .	98
6.3.3	Solução geral . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações iniciais

A teoria quântica teve origem no dia 14 de dezembro de 1900, quando Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) apresentou na reunião da assembléia da Sociedade Alemã de Física um novo e estranho conceito, capaz de resolver o problema da catástrofe do ultravioleta. Conforme a hipótese de Planck, qualquer sistema físico que execute oscilações harmônicas simples, pode possuir apenas valores discretos de energia, múltiplas de  $\hbar\omega$ , em que  $\omega$  representa a frequência angular característica das oscilações e  $\hbar$  é a constante de Planck ( $h$ ) dividida por  $2\pi$ .

Mais tarde, durante cerca de um quarto de século, a hipótese quântica foi útil para resolver outros problemas que colocavam os físicos do início do século XX em dificuldades. Albert Einstein (1879-1955) a usou para explicar o efeito fotoelétrico, Niels Henrik David Bohr (1885-1962) para estabelecer o modelo atômico de órbitas estáveis e o príncipe Louis Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987) para estabelecer a dualidade onda-partícula.

Em 1924, Louis de Broglie, sugeriu em sua tese que, pelo fato da luz possuir propriedades ondulatórias e também corpusculares, a matéria, especialmente os elétrons, teriam também características ondulatórias além das corpusculares. À época, tratava-se de uma idéia puramente especulativa. De Broglie propôs as seguintes equações para

relacionar a frequência ( $f$ ) e o comprimento das ondas ( $\lambda$ ) de elétrons:

$$f = \frac{E}{h} \quad (1.1)$$

e

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1.2)$$

nas quais  $p$  é o momento e  $E$ , a energia do elétron. Com isto, de Broglie mostrou que a condição de quantização de Bohr

$$mvr = n\hbar, \quad (1.3)$$

onde  $m$  representa a massa do elétron,  $v$  a velocidade do mesmo,  $r$  o raio de sua órbita e  $n$  é um número inteiro, é equivalente à afirmação de estarem contidas na circunferência da órbita circular do elétron um número inteiro de ondas de elétrons.

Durante o primeiro quarto do século XX, a hipótese quântica vinha sendo utilizada, porém faltava ainda um formalismo teórico capaz de descrever a dinâmica dessas ondas de elétrons às quais de Broglie se referia. As primeiras teorias com fundamento matemático que embassaram a teoria quântica surgiram a partir de 1925, com os trabalhos de Werner Heisenberg (1901-1976), Max Born (1882-1970) e Pascoal Jordan (1902-1980). Mas, foi Erwin Schrödinger (1887-1961) que obteve uma equação de onda para o elétron.

A equação de onda para o elétron deveria satisfazer duas propriedades básicas. Em primeiro lugar, ela deveria ser linear para que as suas soluções pudessem ser superpostas de modo a produzir interferências (no caso tridimensional) e permitir a construção de pacotes de onda. Em segundo lugar, os coeficientes da equação deveriam envolver apenas constantes, como por exemplo  $\hbar$ , a massa e a carga da partícula. Além disso, estes coeficientes não deveriam conter parâmetros associados a um tipo particular de movimento da partícula (momento, energia, frequência). A razão para esta última exigência é que deveria ficar em aberto a possibilidade de superposição de soluções que possuíssem diferentes valores para tais parâmetros [1].

A partir de resultados das experiências com difração de elétrons, realizadas por C. J. Davisson (1881-1958) e L. H. Germer, e, independentemente, por G. P. Thomson (1892-1975), e pela exigência de que um pacote de onda de número de onda  $\vec{k}$  e frequência

angular  $\omega$  tenha uma velocidade de grupo igual a de uma partícula livre clássica de momento  $\vec{p}$  e energia cinética  $E$ , uma função de onda  $\Psi(q, t)$ , que representasse uma partícula deslocando-se na direção  $q$  com momento  $\vec{p}$  e energia cinética  $E$  deveria ter uma das formas

$$\cos(k_q q - \omega t) \quad \sin(k_q q - \omega t) \quad e^{i(k_q q - \omega t)} \quad e^{-i(k_q q - \omega t)} \quad (1.4)$$

ou qualquer combinação linear das mesmas.

Procurando escrever uma equação de onda para o elétron em uma dimensão, Erwin Schrödinger inspirou-se na teoria ondulatória clássica, a qual aplicada às ondas numa corda fixa nas duas extremidades levava a um conjunto discreto de frequências permitidas (múltiplos inteiros do modo fundamental), conforme pode ser visto na referência [2]. Assim, a equação proposta inicialmente seria do tipo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(q, t) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi(q, t), \quad (1.5)$$

na qual  $\gamma$  representaria o quadrado da velocidade da onda. Substituindo as formas apresentadas na equação (1.4) na equação (1.5), pode ser verificado que qualquer uma delas (ou qualquer combinação linear delas) satisfaz a equação diferencial se e somente se

$$\gamma = \frac{\omega^2}{k_q^2} = \frac{E^2}{p_q^2} = \frac{p_q^2}{4m^2}, \quad (1.6)$$

com  $m$  representando a massa da partícula. Devido à inconsistência apresentada na equação (1.6), Schrödinger observou que, derivando  $\Psi(q, t)$  com respeito ao tempo uma vez apenas esta inconsistência seria praticamente retirada. Desse modo, a equação de onda correta seria dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = \gamma \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi(q, t), \quad (1.7)$$

com

$$\gamma = \frac{i\omega}{k_q^2} = \frac{i\hbar E}{p_q^2} = \frac{i\hbar}{2m}. \quad (1.8)$$

No entanto, faltava multiplicar por um fator  $i\hbar$ . Fazendo isto, a solução

$$\Psi(q, t) = A e^{i(k_q q - \omega t)}, \quad (1.9)$$

na qual  $A$  representa uma constante, satisfaz a equação de onda para o elétron

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi(q, t). \quad (1.10)$$

Surgia então a famosa formulação matemática da teoria quântica, que até hoje é traduzida pela equação de Schrödinger. Através dela, todos os resultados conhecidos da chamada velha teoria quântica puderam ser deduzidos. A função de onda, representada por  $\Psi(q, t)$ , determina completamente o estado de um sistema físico na mecânica quântica. Sendo  $H$  o operador hamiltoniano,  $q$  o conjunto de coordenadas de um sistema quântico e  $t$ , o tempo, a equação de Schrödinger de uma maneira geral é escrita na forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H\Psi(q, t). \quad (1.11)$$

Esta é a equação básica da mecânica quântica não-relativística.

De uma maneira geral o que se faz ao procurar descrever um sistema físico do ponto de vista da mecânica quântica é, utilizando uma forma particular para o operador  $H$ , resolver a equação (1.11) correspondente. Dentre os sistemas físicos mais estudados, um de enorme interesse é o oscilador harmônico. Isto se deve a uma razão muito simples: não são poucas as áreas em Física nas quais surgem aplicações do mesmo. As vibrações dos átomos nos sólidos, circuitos elétricos, vibrações elásticas em membranas e vibrações de moléculas do ar são apenas alguns dos exemplos de sua manifestação. Basicamente, trabalharemos nesta tese com sistemas desta natureza, abordando situações à luz do método de invariantes dinâmicos e de transformações unitárias. Entretanto, nosso objeto de pesquisa está ligado a osciladores harmônicos que de alguma forma possuam dependência com o tempo. Tal dependência é associada à frequência ou à massa, conforme será visto em nossa abordagem. Embora este problema tenha atraído muita atenção, soluções da equação de Schrödinger com hamiltonianos dependentes explicitamente do tempo são possíveis apenas para situações particulares e, via de regra, não são de fácil solução.

Todavia, devido à importância crucial que o oscilador harmônico tem desempenhado na descrição de fenômenos físicos em diversas áreas, não podemos nos abster de investigar osciladores harmônicos que têm dependência temporal. De fato, podemos citar que, para



dependências associadas à frequência ou à massa, este problema representa o protótipo de um outro que é exatamente solúvel e que guarda conexões com outras áreas da Física. Só para citar algumas, dentre outras, temos aplicações em óptica quântica, com Colegrave e Abdalla [3] os aplicando para descrever a intensidade do campo eletromagnético numa cavidade tipo Fabry-Perot e, Brown [4], para analisar o movimento de uma partícula numa armadilha de Paul. Em estudos de gravitação, Lemos e Natividade [5] e Holstein [6] utilizaram osciladores com dependência temporal na frequência para estudar universos em expansão. Outras aplicações podem ser vistas nas áreas de física molecular [7], teoria de campos [8, 9, 10], entre outras.

## 1.2 Osciladores harmônicos com frequência dependente do tempo: um breve histórico

Muito embora não seja necessário chamar a atenção para o fato de que osciladores harmônicos dependentes do tempo têm atraído para si uma ampla gama de investigações, é salutar citarmos que, tanto em mecânica clássica como em mecânica quântica, existem muitos trabalhos explorando este tema. Podemos citar, dentre outros, o uso de quantização de osciladores harmônicos dependentes do tempo para investigar propriedades quânticas da radiação [11], estados coerentes e comprimidos da luz [12], etc.

Segundo Dekker [13] e Um *et al.* [14], foi Bateman que, pela primeira vez, fez a descrição de sistemas dependentes do tempo na formulação lagrangiana. Bateman construiu uma lagrangiana com dependência temporal explícita para um oscilador harmônico amortecido. Todavia, sua análise ocorreu num contexto puramente clássico. Só mais tarde é que a descrição no contexto da mecânica quântica para sistemas dissipativos foi investigada num tratamento fenomenológico sob a hipótese de forças não-conservativas. Isto foi feito independentemente por Caldirola [15, 16] e Kanai [17], que introduziram no estudo de sistemas não-conservativos um hamiltoniano dependente do tempo para descrever um oscilador harmônico amortecido. O hamiltoniano em questão passou a ser conhecido na literatura

científica como hamiltoniano de Caldirola-Kanai. No entanto, este hamiltoniano trouxe dificuldades de caráter conceitual, como a violação do princípio da incerteza. Num trabalho de Dodonov e Man'ko [18], eles encontraram uma relação de incerteza  $\Delta p \Delta q \geq e^{-\lambda t} \hbar/2$ , na qual  $\lambda$  representa um fator constante. Isto trouxe uma dificuldade, pois para  $t \rightarrow \infty$ , essa relação de incerteza iria se anular. Porém, trabalhos de Cervero e Villaroel [19], Greenberg [20] e Abdalla [21], por exemplo, revisaram criticamente essa suposta inconsistência. Em seu artigo, Greenberg [20] remove tal dificuldade afirmando que o referido hamiltoniano em verdade descreve um oscilador com frequência angular constante, mas cuja massa cresce exponencialmente com o tempo. Assim, a introdução de uma massa variável  $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$  remove a violação do princípio da incerteza presente no estudo de Dodonov e Man'ko [18]. Esse argumento pode ser compreendido na idealização feita por Ray [22]. Nesse artigo, ele idealizou um modelo no qual um balde pendurado por um fio de massa desprezível oscilava harmonicamente sob uma chuva. A água da chuva ao cair dentro do balde aumentava sua massa. Supondo que o incremento de massa com o tempo variasse com  $M = m_0 e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  representa uma constante positiva, ele mostrou que o hamiltoniano não descrevia um sistema com dissipação, mas sim um sistema de massa  $M = m_0 e^{\lambda t}$  que se move num potencial  $e^{\lambda t} V(x)$ .

Ao longo dos anos, vários autores obtiveram soluções exatas e analíticas para problemas envolvendo osciladores harmônicos dependentes do tempo. Alguns destes trabalhos, por exemplo, utilizaram as seguintes abordagens: funções Gaussianas tentativas [23, 24, 25], integrais de trajetória de Feynman [14, 26, 27, 28] e transformações canônicas e/ou unitárias [29, 30, 31, 32, 33]. Particularmente, é de nosso interesse na presente tese a abordagem idealizada por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld, ambos do Laboratório Científico de Los Alamos (Universidade da Califórnia), no final dos anos 1960 [34, 35, 36]. O método por eles idealizado para encontrar os estados quânticos de osciladores harmônicos dependentes do tempo revelou-se ser bastante útil [37, 38, 39, 40]. Em seus trabalhos, eles dirigiram sua atenção para a resolução de problemas em mecânica quântica concernente a osciladores harmônicos dependentes do tempo utilizando para tal uma classe de operadores invariantes exatos. Segundo eles, até aquele momento, o uso de invariantes dependentes

explicitamente do tempo em aplicações em teoria quântica havia recebido pouca atenção por parte dos pesquisadores.

O método de invariantes de Lewis e Riesenfeld tem como base uma relação entre autoestados de um operador invariante e soluções da equação de Schrödinger correspondente. Desde o seu estabelecimento, o mesmo é largamente utilizado para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para diversos tipos de osciladores harmônicos dependentes do tempo [41, 42, 43, 44]. O método de invariantes de Lewis e Riesenfeld também tem uma ligação intrínseca com os sistemas de Ermakov, os quais foram objeto de estudo deste, há mais de um século [45]. Tais sistemas são pares de equações diferenciais acopladas e dependentes do tempo, os quais se relacionam por intermédio de constantes de movimento chamadas de invariantes de Ermakov ou de Lewis-Ermakov. Aqui, destacamos que o invariante usado na formulação quântica de Lewis e Riesenfeld foi primeiro obtido, num outro contexto, por Ermakov [45]. Através de diferentes métodos, outros autores o obtiveram, como por exemplo, Leach [46], usando álgebra de Lie, e Nassar [47], usando a mecânica estocástica. Em termos de aplicações, sistemas de Lewis-Ermakov são utilizados em diversas áreas da Física, como, por exemplo, em óptica não-linear [48, 49, 50]. Uma aplicação interessante que devemos destacar é a que foi realizada por Choi [51], na qual ele utilizou o método de invariantes dinâmicos para investigar o problema de um pêndulo gravitando com crescimento exponencial. O sistema é semelhante ao tratado no capítulo 3 da presente tese.

Em se tratando do invariante de Lewis e Riesenfeld, não podemos deixar de mencionar os trabalhos de Hartley e Ray [52, 53, 54, 55], nos quais eles usaram a referida teoria de invariantes para obter soluções exatas da equação de Schrödinger para determinados osciladores não-lineares dependentes explicitamente do tempo (sistemas de Lewis-Ermakov). Em particular, eles desenvolveram uma técnica que transforma a equação de autovalores para o operador invariante em uma equação de Schrödinger independente do tempo para o operador invariante. Esta técnica permite transformar o método de invariantes de Lewis e Riesenfeld em um dos mais típicos e poderosos métodos para encontrar estados quânticos de sistemas hamiltonianos dependentes do tempo, em especial para aqueles que são descritos

por hamiltonianos quadráticos.

Em 2002, Ferreira *et al.* [56] usaram os invariantes de Lewis-Ermakov para encontrar as funções de onda exatas para um oscilador harmônico bidimensional sob a influência de um campo magnético estático. No entanto, conforme crítica feita por Maamache *et al.* [57], o invariante que eles encontraram era inconsistente com a teoria de Lewis e Riesenfeld por violar uma prerrogativa básica: os autovalores encontrados eram dependentes do tempo. No mesmo artigo, além do comentário, Maamache *et al.* construíram as soluções corretas para o problema.

Um outro problema de interesse nesta tese é a obtenção de soluções da equação de Schrödinger para osciladores harmônicos com dependência explícita com respeito ao tempo e sujeitos a uma força externa. O oscilador harmônico com amortecimento e uma força perturbativa utilizando o método de invariantes de Lewis e Riesenfeld foi objeto de pesquisa de Lawande e Khandekar [27]. No trabalho em questão, eles encontraram uma função de onda exata em termos de uma função auxiliar  $\rho$  e de uma força externa  $f(t)$ . Já Lo [58] obteve um operador de evolução exato para osciladores harmônicos sujeitos a forças externas arbitrárias. Ele obteve estados quânticos resolvendo uma equação diferencial, a qual era satisfeita pelo operador de evolução. Yeon *et al.* [59] utilizaram o método de integrais de trajetória para estudar osciladores harmônicos forçados com uma dependência temporal na frequência no início dos anos 1990. Em seus estudos, eles obtiveram o propagador, a função de onda, valores esperados da energia, a relação de incerteza e estados coerentes.

O método de Lewis e Riesenfeld não teve sua aplicação restrita apenas a problemas envolvendo osciladores harmônicos, mas também a outros sistemas quânticos de interesse. Podemos citar, a título de exemplo, o trabalho de Cerveró *et al.* [31], no qual os referidos autores utilizam o citado método para encontrar as soluções para o problema de Schrödinger associado a um poço quadrado de potencial infinito, e o de Luan e Tang [60], no qual os mesmos encontraram a solução geral da equação de Schrödinger na presença de um potencial linear dependente do tempo no espaço das configurações baseados na teoria de Lewis e Riesenfeld. Devemos citar também o trabalho de Moya-Cessa e Guasti [61], no qual os autores estudaram a evolução temporal de um oscilador harmônico quântico, porém sujeito

a uma mudança abrupta na frequência representada por uma função degrau. Seu estudo foi baseado numa solução analítica aproximada para a equação de Ermakov dependente do tempo para uma função degrau.

Esta breve referência histórica demonstra a importância do problema aqui tratado. Vimos acima que sistemas hamiltonianos dependentes do tempo têm sido alvo de grande interesse na literatura científica. Tais sistemas, além de serem interessantes do ponto de vista acadêmico, tem-se comprovado ser fisicamente relevantes, posto que muitas propriedades físicas de interesse emergem, quando alguns parâmetros do sistema variam com o tempo. Tratar os problemas não-conservativos também é de fundamental importância porque os mesmos são relevantes pelo fato da maioria dos fenômenos físicos que ocorrem no mundo real terem natureza deste tipo.

### 1.3 Organização desta tese

No capítulo 2 da presente tese, apresentaremos o método idealizado por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld, apontando a essência do formalismo. Nesta apresentação, o formalismo descrito terá como base as referências [34] e [36]. No sentido de dar uma consistência à teoria, iremos, ainda no capítulo 2, aplicar o método de operadores invariantes a um sistema físico de interesse: um oscilador harmônico unidimensional com frequência dependente do tempo.

No capítulo 3 desta tese, descreveremos nosso trabalho. Usaremos operadores invariantes lineares à luz do método de invariantes dinâmicos para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Também construiremos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano e terminaremos nossa análise com o cálculo de flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação entre ambos. Como destaque, mostraremos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa. No intuito de ilustrar a teoria proposta no

capítulo, trataremos um caso particular: aplicaremos nosso formalismo ao conhecido oscilador forçado de Caldirola-Kanai [15, 16, 17].

No capítulo 4 desta tese, faremos uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula, usando o modelo de oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica usando o gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico. Obteremos funções de onda exatas para este problema em termos de soluções de uma equação diferencial segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador amortecido clássico. Além disso, nós construiremos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos e calcularemos as flutuações e as correlações quânticas para cada modo do campo eletromagnético quantizado.

O capítulo 5 será simplesmente uma extensão do capítulo 4. Vamos estender nossa investigação feita neste último, só que agora utilizando um operador invariante quadrático. Encontraremos as funções de onda exatas para a equação de Schrödinger para a luz num meio condutor com frequência dependente do tempo. Neste capítulo, também construiremos estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo.

Concluiremos a descrição de nosso trabalho com o capítulo 6 da presente tese. Nosso procedimento no citado capítulo será abordar o problema de encontrar as funções de onda (soluções da equação de Schrödinger) exatas, com dependência temporal, para uma partícula aprisionada por campos oscilantes sujeita a um potencial dependente do tempo do tipo oscilador harmônico unidimensional. Porém, diferentemente do que foi feito por Pedrosa *et al.* [41], em nossa abordagem utilizaremos operadores invariantes quadráticos ao invés dos lineares por eles empregados.

Finalmente, no capítulo 7, apresentaremos nossas considerações finais. Devemos salientarmos que a literatura científica acerca de sistemas quânticos dependentes do tempo é muito extensa. Por mais que tenhamos nos esforçado para citá-las na bibliografia desta tese, certamente algumas foram omitidas.

## Capítulo 2

# Teoria quântica de invariantes de Lewis e Riesenfeld

### 2.1 Definição do operador invariante

Neste capítulo, faremos uma descrição do método idealizado por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld. Tomaremos como base neste capítulo as referências [34] e [36]. Em seus trabalhos, eles dirigiram sua atenção para a resolução de problemas em mecânica quântica concernente a osciladores harmônicos dependentes do tempo utilizando para isto uma classe de operadores invariantes exatos. Segundo eles, até aquele momento, o uso de invariantes dependentes explicitamente do tempo em aplicações em teoria quântica havia recebido pouca atenção por parte das pesquisas científicas. O que estimulou Lewis e Riesenfeld a aplicar o método, que será descrito a partir da próxima seção, foi a simplicidade das regras necessárias para a construção dos invariantes em questão e a instrutiva relação dos mesmos na expansão assintótica da teoria invariante adiabática.

Na descrição do método proposto por Lewis e Riesenfeld, vamos inicialmente considerar um sistema no qual o operador hamiltoniano  $H(t)$  seja uma função explícita do tempo e assumiremos a existência de um outro operador  $I(t)$  invariante. Dizemos que um **operador** hermitiano não-trivial dependente explicitamente do tempo  $I(t)$  é **invariante** se o mesmo

satisfizer as seguintes condições:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0 \quad (2.1)$$

e

$$I^\dagger = I. \quad (2.2)$$

O fato do operador invariante  $I(t)$  ser hermitiano (ou autoadjunto) nos garante que:

- o mesmo possui autovalores puramente reais;
- suas autofunções são ortogonais;
- suas autofunções formam um conjunto completo.

O estado de um sistema físico na mecânica quântica é completamente determinado pela função de onda  $\Psi$ . No formalismo de Dirac, podemos representar um estado de um sistema físico, num instante  $t$  por  $|\psi(t)\rangle$ . A evolução temporal de um vetor de estado como esse é governada pela equação de Schrödinger. Assim, sendo  $H(t)$  o operador hamiltoniano, a evolução é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

Notemos que, aplicando o lado esquerdo da equação (2.1) ao vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$ , teremos que

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi(t)\rangle + [I, H] |\psi(t)\rangle = 0 \quad (2.4)$$

Por outro lado,  $[I, H] |\psi(t)\rangle = IH |\psi(t)\rangle - HI |\psi(t)\rangle = i\hbar(I \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle) - H(I |\psi(t)\rangle)$ . Nesta última passagem, usamos a equação (2.3). Dessa maneira, verificamos que a equação (2.4) fica na seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (I |\psi(t)\rangle) = H(I |\psi(t)\rangle). \quad (2.5)$$

A expressão acima deixa claro que a ação de um operador invariante sobre um vetor de estado que satisfaz à equação de Schrödinger produz uma outra solução da mesma equação. Particularmente, se  $|\psi(t)\rangle$  é solução da equação de Schrödinger, o vetor de estado resultante da aplicação do invariante ( $I |\psi(t)\rangle$ ) também satisfaz à mesma. Uma vez que não foi feita



nenhuma restrição, este resultado é válido para qualquer operador invariante, até mesmo se este envolver a operação de derivada com respeito ao tempo. Devemos destacar que, caso o operador invariante não possua termos envolvendo derivadas temporais, seremos capazes de obter uma regra simples e explícita para a determinação das fases dos autoestados do operador  $I(t)$  que satisfaçam a equação de Schrödinger. Vamos então assumir que os operadores invariantes, os quais serão aqui tratados, não contenham operadores envolvendo derivadas temporais. Particularmente, daremos atenção a problemas que satisfaçam esta condição como, por exemplo, o oscilador harmônico forçado dependente do tempo.

## 2.2 Autoestados e autovalores do operador invariante

Vamos assumir que, como o operador invariante  $I(t)$  é hermitiano, ele faz parte de um conjunto completo de observáveis que comutam. Assim, existirá um conjunto completo de autoestados do mesmo. Representaremos os autovalores do operador  $I(t)$  por  $\lambda$  e os autoestados associados a um dado autovalor  $\lambda$  por  $|\lambda, \kappa; t\rangle$ , no qual o índice  $\kappa$  representa todos os números quânticos (além de  $\lambda$ ) necessários para especificar os autoestados. Neste ponto, diferenciamos os autoestados de  $I(t)$  daqueles que são solução da equação de Schrödinger. Na próxima seção, buscaremos uma conexão entre os mesmos.

Para os autoestados de  $I(t)$ , teremos a seguinte equação de autovalores

$$I(t) |\lambda, \kappa; t\rangle = \lambda |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (2.6)$$

e

$$\langle \lambda', \kappa'; t | \lambda, \kappa; t \rangle = \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\kappa'\kappa}. \quad (2.7)$$

Conforme explicitado anteriormente, como o operador invariante  $I(t)$  é hermitiano, seus autovalores  $\lambda$  serão todos reais. Vamos mostrar que os mesmos também são independentes do tempo. Para tal, basta derivar a equação (2.6) com respeito ao tempo, de modo que teremos

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle \quad (2.8)$$

Por outro lado, aplicando a equação (2.1) sobre  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  obteremos o seguinte

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \left(\frac{1}{i\hbar}\right) [I, H] |\lambda, \kappa; t\rangle = 0, \quad (2.9)$$

ou seja,

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + IH |\lambda, \kappa; t\rangle - \lambda H |\lambda, \kappa; t\rangle = 0, \quad (2.10)$$

Fazendo agora o produto escalar da equação acima com um estado  $\langle \lambda', \kappa'; t|$ , obteremos o seguinte resultado

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \langle \lambda', \kappa'; t| IH |\lambda, \kappa; t\rangle - \langle \lambda', \kappa'; t| \lambda H |\lambda, \kappa; t\rangle = 0, \quad (2.11)$$

equivalente a

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \lambda' \langle \lambda', \kappa'; t| H |\lambda, \kappa; t\rangle - \lambda \langle \lambda', \kappa'; t| H |\lambda, \kappa; t\rangle = 0, \quad (2.12)$$

ou, ainda

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', \kappa'; t| H |\lambda, \kappa; t\rangle = 0. \quad (2.13)$$

Uma vez que este resultado deve ser válido para  $\lambda' = \lambda$ , necessariamente teremos o resultado seguinte, oriundo da equação anterior sujeito à condição supracitada:

$$\langle \lambda, \kappa'; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = 0. \quad (2.14)$$

Nosso passo seguinte é fazer o produto escalar da equação (2.8) com  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  de tal modo que teremos

$$\langle \lambda, \kappa; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \langle \lambda, \kappa; t| I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda, \kappa; t| \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \langle \lambda, \kappa; t| \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.15)$$

Como  $\langle \lambda, \kappa; t| I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle$  é igual a  $\langle \lambda, \kappa; t| \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle$ , a equação acima resulta em

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, \kappa; t| \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = 0, \quad (2.16)$$

de acordo com a equação (2.14). O resultado acima demonstra claramente que os autovalores  $\lambda$  são independentes do tempo. No entanto, o mesmo não é verdade para os autoestados. Estes últimos são dependentes do tempo.

## 2.3 Conexão entre os autoestados do operador invariante e as soluções da equação de Schrödinger

Conforme mencionamos na seção anterior, pretendemos agora encontrar uma conexão entre os autoestados do operador invariante  $I(t)$  e as soluções da equação de Schrödinger. Para tal, vamos inicialmente escrever a equação de movimento para o estado  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  a partir da equação (2.8), usando o fato de que  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, \kappa | \lambda, \kappa \rangle = 0$ . Assim, teremos que

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.17)$$

Em seguida, tomemos o produto escalar com  $|\lambda', \kappa'; t\rangle$  de tal maneira que obteremos

$$\langle \lambda', \kappa'; t | (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle \quad (2.18)$$

ou

$$\lambda \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \lambda' \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.19)$$

Da equação (2.13), temos que o lado direito da equação acima pode ser substituída pela relação  $\frac{1}{i\hbar}(\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | H | \lambda, \kappa; t\rangle$  de sorte que a mesma pode ser reescrita como

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | H | \lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.20)$$

Para  $\lambda \neq \lambda'$ , chegamos à seguinte conclusão

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | H | \lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.21)$$

É importante destacar que a equação anterior é válida apenas para o caso em que  $\lambda \neq \lambda'$ . Porém, se o mesmo for válido para  $\lambda = \lambda'$ , poderemos assegurar prontamente que  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  satisfaz a equação de Schrödinger. Assim, concluiríamos que  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  seria uma solução especial para  $|\psi(t)\rangle$ .

Sabemos que todas as grandezas calculadas por médias usando a função de onda (e que têm um significado físico exato) são tais que dependem da função de onda multiplicada por seu complexo conjugado. Logo,  $|\psi(t)\rangle$  e  $e^{i\alpha} |\psi(t)\rangle$  (no qual  $\alpha$  é um número real qualquer)

representam o mesmo estado físico. Isto quer dizer que a função de onda normalizada é determinada unicamente a menos de uma constante, que chamamos de **fator de fase**. Esta indeterminação é, em princípio, irremovível, no entanto isto não tem importância porque sua presença não afeta os resultados físicos já que

$$\langle \psi^*(t)\psi(t) \rangle = \langle e^{-i\alpha}\psi^*(t)e^{i\alpha}\psi(t) \rangle \quad (2.22)$$

Nas definições anteriores acerca de  $|\lambda, \kappa; t\rangle$ , não houve a preocupação de fixarmos o fator de fase. Para estudar o fator de fase, assumiremos que poderemos multiplicar  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  por um fator de fase arbitrário dependente do tempo. Dessa forma, podemos definir um novo conjunto de autovetores de  $I(t)$  relacionados ao nosso conjunto inicial de autovetores por meio de uma transformação de gauge dependente do tempo:

$$|\lambda, \kappa; t\rangle_S = e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle \quad (2.23)$$

Na equação acima,  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  são funções reais arbitrárias dependentes do tempo. Pelas hipóteses estabelecidas para o operador invariante, sabemos que  $I(t)$  não contém operadores de derivação em relação ao tempo. Sabemos igualmente que os autoestados  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  são ortonormais (equação (2.7)). Daí, os autoestados  $|\lambda, \kappa; t\rangle_S$ , de acordo com a equação (2.23), também serão ortonormais. Para  $\lambda' \neq \lambda$ , a equação (2.21) também será válida para elementos de matriz tomados em relação aos novos autoestados. Se escolhermos as fases  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  satisfazendo a equação (2.21) para  $\lambda' = \lambda$ , cada um dos novos autoestados satisfará a equação de Schrödinger. Esta exigência é equivalente a

$$i\hbar\delta_{\kappa\kappa'} \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = \langle \lambda', \kappa'; t | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H) |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.24)$$

Para satisfazer a equação anterior, os estados  $|\lambda, \kappa; t\rangle$  devem ser escolhidos de tal sorte que o lado direito da equação acima seja igual a zero para  $\kappa' \neq \kappa$ . Como o operador  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$  é hermitiano, sempre poderemos fazer esta diagonalização. Uma vez que os estados tenham sido desta forma escolhidos, as funções de fase correspondentes  $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$  irão satisfazer a seguinte equação

$$\hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = \langle \lambda', \kappa | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H) |\lambda, \kappa\rangle. \quad (2.25)$$

Daí, posto que o novo conjunto de autoestados de  $I(t)$ ,  $|\lambda, \kappa; t\rangle_S$ , satisfaz a equação de Schrödinger, poderemos escrever a solução geral da seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda\kappa} c_{\lambda\kappa} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (2.26)$$

na qual  $|\psi(t)\rangle$  representa o vetor de estado solução da equação de Schrödinger,  $|\lambda, \kappa; t\rangle$ , os autoestados do invariante  $I(t)$  e  $c_{\lambda\kappa}$  são coeficientes independentes do tempo.

No intuito de ilustrar o método dos invariantes de Lewis e Riesenfeld, aplicaremos na seção seguinte a teoria aqui formulada a um sistema físico de interesse: um oscilador harmônico unidimensional com frequência característica dependente do tempo.

## 2.4 Aplicação do método de invariantes dinâmicos a osciladores harmônicos dependentes do tempo

### 2.4.1 Operador invariante na forma quadrática

Nosso interesse nesta seção é aplicar o método de operadores invariantes idealizado por Lewis e Riesenfeld [36] a sistemas físicos que possam ser descritos como osciladores harmônicos unidimensionais dependentes do tempo. Consideraremos então uma partícula que executa pequenas oscilações em uma dimensão. Nosso sistema tem associado a si um hamiltoniano na seguinte forma

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2}. \quad (2.27)$$

Na expressão acima,  $q$  representa a coordenada canônica,  $p$  o momento canonicamente conjugado a  $q$ ,  $m$  é a massa e  $\omega(t)$  é a frequência característica das oscilações (neste caso, dependente do tempo). As variáveis  $p$  e  $q$  satisfazem a usual relação de comutação canônica  $[q, p] = i\hbar$ . A energia potencial do oscilador em questão torna-se infinita em  $q = \pm\infty$  e seu valor mínimo ocorre para  $q = 0$ . O seu espectro de autovalores de energia é inteiramente discreto.

As equações canônicas do movimento associado ao hamiltoniano (2.27) podem ser escritas como

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (2.28)$$

e

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2(t)q. \quad (2.29)$$

Com isto, a equação de movimento deste sistema pode ser obtida simplesmente derivando novamente a equação (2.28) com respeito ao tempo,

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2(t)q \quad (2.30)$$

na qual substituímos a equação (2.29). Assim, chegamos ao seguinte resultado

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \quad (2.31)$$

Esta última expressão será de grande utilidade para o estudo de nosso oscilador. Devemos notar que a mesma pode ser facilmente resolvida para  $\omega \neq \omega(t)$ . No entanto, a dependência temporal presente na frequência característica das oscilações  $\omega$ , torna a tarefa mais difícil. Todavia, a equação (2.31), conhecida na literatura como equação de Mathieu-Hill, pode ser resolvida caso seja conhecida a expressão para  $\omega(t)$ . Porém, o que pretendemos fazer aqui é evitar esta necessidade, encontrando autoestados inerentes ao nosso problema para uma frequência  $\omega(t)$  arbitrária. Para isto, vamos aplicar o método de operadores invariantes ao hamiltoniano (2.27).

Vamos inicialmente assumir a existência de um operador invariante  $I(t)$  que assuma a forma homogênea quadrática

$$I = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}_+], \quad (2.32)$$

na qual  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são funções reais do tempo (para garantir que o operador invariante  $I(t)$  seja hermitiano, conforme exige a equação (2.2)), o fator multiplicativo  $1/2$  foi escolhido arbitrariamente, por conveniência, e  $\{q, p\}_+$  representa a notação usual para o anticomutador.

Considerando as propriedades estudadas na seção anterior, acerca de operadores invariantes, pretendemos construir um processo para determinação do mesmo na forma quadrática. Derivando  $I(t)$  dado pela equação anterior em relação ao tempo, obtemos de uma maneira explícita

$$\dot{I} = \frac{1}{2}(2\alpha q\dot{q} + \dot{\alpha}q^2 + 2\beta p\dot{p} + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma}\{q, p\}_+ + \gamma(q\dot{p} + \dot{q}p + p\dot{q} + \dot{p}q)) \quad (2.33)$$

Substituindo na equação acima  $\dot{q}$  e  $\dot{p}$  pelas equações (2.28) e (2.29), respectivamente, chegaremos, após alguma álgebra, ao resultado seguinte

$$\dot{I} = \frac{1}{2} \left\{ [\dot{\alpha} - 2m\omega^2\gamma] q^2 + \left[ \dot{\beta} + \frac{2\gamma}{m} \right] p^2 + \left[ \dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - m\omega^2\beta \right] \{q, p\}_+ \right\} = 0. \quad (2.34)$$

Por outro lado, para que seja satisfeita a equação (2.1), obtemos, da expressão anterior, as relações a seguir:

$$\dot{\alpha} = 2m\omega^2\gamma, \quad (2.35)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{m}\gamma \quad (2.36)$$

e

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{m}\alpha + m\omega^2\beta \quad (2.37)$$

Neste momento, devemos observar que nosso operador invariante ficará determinado, a menos da forma de  $\omega^2(t)$ , se conhecermos a expressão da função  $\gamma(t)$ . Isto porque, com o seu conhecimento, a equação (2.36) fornecerá a expressão para  $\beta(t)$  e, a equação (2.37) nos fornecerá  $\alpha(t)$  em função de  $\omega^2(t)$ . No entanto, apenas por conveniência, vamos introduzir uma outra função,  $\sigma(t)$ , tal que seu quadrado seja uma função real dependente do tempo. Definiremos, então

$$\beta(t) = \sigma^2(t). \quad (2.38)$$

Feita esta substituição, a equação (2.36) tomará a forma

$$\gamma = -m\sigma\dot{\sigma}. \quad (2.39)$$

Da mesma forma, poderemos expressar a equação (2.37) como segue

$$m^2(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) = \alpha - m^2\omega^2\sigma^2, \quad (2.40)$$

ou ainda, isolando  $\alpha$ ,

$$\alpha = m^2 [(\sigma\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}^2) + \omega^2\sigma^2]. \quad (2.41)$$

Nosso trabalho em determinar uma expressão para nosso invariante quadrático agora está reduzido a determinação não de três, mas de apenas uma função,  $\sigma(t)$ . Isto porque, uma vez que tenhamos a expressão para  $\sigma(t)$ , imediatamente decorrerá das equações (2.41), (2.38) e (2.39) a determinação de  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$ , respectivamente. No intuito de encontrar uma expressão para  $\sigma(t)$ , vamos derivar a equação (2.41) em relação ao tempo. Obtemos

$$\dot{\alpha} = m^2(3\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \sigma\ddot{\sigma}) + 2m^2\omega\sigma(\omega\dot{\sigma} + \dot{\omega}\sigma). \quad (2.42)$$

Substituindo na equação acima  $\dot{\alpha}$  por seu correspondente na equação (2.35) com  $\gamma$  dada pela equação (2.39) chegaremos a

$$m^2(3\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \sigma\ddot{\sigma}) + 2m^2\omega\sigma(\omega\dot{\sigma} + \dot{\omega}\sigma) + 2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma} = 0. \quad (2.43)$$

A equação anterior pode ser rearrumada na seguinte forma

$$\sigma \frac{d}{dt} [m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma] + 3\dot{\sigma} [m^2\ddot{\sigma} + m^2\omega^2\sigma] = 0. \quad (2.44)$$

Poderíamos simplificar a equação acima por  $m^2$ . No entanto, não queremos perder este termo de vista, pois pretendemos desenvolver uma teoria geral. Haverá situações de estudo, como, por exemplo, as desenvolvidas nos capítulos 3 e 4 desta tese, nas quais a massa varia com o tempo. Assim, a presença do termo de massa vai nos permitir fazer comparações. Voltando à equação (2.44), faremos uso de uma função auxiliar

$$\eta = m^2\ddot{\sigma} + \omega^2\sigma, \quad (2.45)$$

para resolvê-la. Com esta função auxiliar  $\eta$ , a expressão dada pela equação (2.44) vai se tornar uma equação diferencial de primeira ordem,

$$\sigma\dot{\eta} = -3\dot{\sigma}\eta, \quad (2.46)$$

cuja solução é expressa como  $\eta = \frac{c^2}{\sigma^3}$ , onde  $c^2$  é uma constante de integração. O fator de potência 2 foi escolhido apenas por conveniência. Do resultado da integração, teremos a



solução para  $\sigma$  dada por

$$\ddot{\sigma} + \omega^2 \sigma = \frac{c^2}{m^2 \sigma^3}. \quad (2.47)$$

Podemos agora isolar o termo  $\ddot{\sigma}$  na equação (2.47) e substituí-lo na equação (2.41). Assim, teremos

$$\alpha = m^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{c^2}{\sigma^2}. \quad (2.48)$$

Substituindo  $\alpha$  pela equação anterior,  $\beta$  pela equação (2.38) e  $\gamma$  pela equação (2.39) em (2.32), teremos finalmente, após alguma álgebra

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c}{\sigma} \right)^2 q^2 + (\sigma p - m \dot{\sigma} q)^2 \right]. \quad (2.49)$$

A arbitrariedade implicada pela presença da constante de integração  $c^2$  na expressão acima é apenas aparente. Ela pode ser retirada facilmente. Para tal, faremos uma transformação de escala

$$\sigma(t) = c^{1/2} \rho(t) \quad (2.50)$$

de modo que o fator  $c$  passa a multiplicar todo o lado direito da equação (2.49), o que permite que o mesmo possa ser descartado. A transformação de escala (2.50) também afeta nossa condição de vínculo, equação (2.47). Deste modo, nosso invariante agora pode ser escrito na forma

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m \dot{\rho} q)^2 \right]. \quad (2.51)$$

sujeito ao vínculo

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t) \rho - \frac{1}{m^2 \rho^3} = 0. \quad (2.52)$$

Devemos apenas ressaltar que, uma vez que nosso operador  $I(t)$  por definição é hermitiano, escolheremos apenas as soluções reais da equação de vínculo acima. Considerando isto, qualquer solução particular (real) dela poderá ser utilizada na construção de um operador invariante conforme procuramos (equação (2.51)). Aqui, destacamos que o invariante nesta forma foi primeiro deduzido por Ermakov e depois por Lewis, motivo pelo qual ele é conhecido na literatura por invariante de Ermakov-Lewis.

## 2.4.2 Determinação de autoestados e autovalores de $I(t)$

Os autoestados e autovalores do operador invariante  $I(t)$  poderão ser encontrados mediante algo semelhante ao que foi feito por Paul Dirac para diagonalizar o hamiltoniano de um oscilador harmônico com frequência constante. Essencialmente, definiremos operadores de aniquilação  $a(t)$  e de criação  $a^\dagger(t)$ , ambos dependentes do tempo, pelas seguintes relações

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right) + \iota(\rho p - m\dot{\rho}q) \right] \quad (2.53)$$

e

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{q}{\rho}\right) - \iota(\rho p - m\dot{\rho}q) \right] \quad (2.54)$$

A escolha foi feita desta forma para que, deste modo, os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  possam satisfazer a relação de comutação canônica

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.55)$$

É fácil verificar que

$$a^\dagger a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right) \left( \left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 + \iota[q, p] \right) = \left(\frac{1}{2\hbar}\right) (2I - \hbar) \quad (2.56)$$

de modo que obtemos  $I(t)$  na forma

$$I(t) = \hbar \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.57)$$

Assim, o problema de autovalores de  $I(t)$  fica reduzido ao problema de autovalores do operador hermitiano  $N = a^\dagger a$ , isto é, encontrar números  $n$  e vetores  $|n, t\rangle$  normalizados de forma que  $\langle n, t | n, t \rangle = 1$  tais que

$$N |n, t\rangle = a^\dagger a |n, t\rangle = n |n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

Da relação entre os operadores  $I(t)$  e  $N(t)$ ,

$$I(t) = \hbar \left( N + \frac{1}{2} \right), \quad (2.59)$$

vemos que os autoestados normalizados  $|\lambda, t\rangle$  de  $I(t)$  serão os mesmos autoestados normalizados  $|n, t\rangle$  de  $N(t)$ . Logo, podemos escrever que

$$I |n, t\rangle = \lambda_n |n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

de sorte que o espectro de autovalores de  $I(t)$  será dado por

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

### 2.4.3 Determinação das fases de $I(t)$

Para completar a solução de nossa aplicação do método do invariante dinâmico a osciladores harmônicos dependentes do tempo, falta ainda a determinação das fases de  $I(t)$ . Para determinarmos as fases dos autoestados  $|n, t\rangle$  de  $I(t)$ , temos inicialmente que calcular os elementos diagonais da matriz dos operadores  $H(t)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$  para que, substituindo-os na equação (2.25), obtermos a determinação das funções de fase. Nosso primeiro passo será escrevermos nosso hamiltoniano, dado pela equação (2.27), em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ , definidos pelas equações (2.53) e (2.54), respectivamente. Assim, a equação (2.27) ficará

$$\begin{aligned} H(t) = & \frac{\hbar}{4m} \left\{ - \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 - m\omega^2(t)\rho^2 \right) (a^\dagger)^2 \right. \\ & - \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{2im\dot{\rho}}{\rho} - m^2\dot{\rho}^2 - m\omega^2(t)\rho^2 \right) a^2 \\ & \left. + \left( \frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2\omega^2(t)\rho^2 \right) \{a, a^\dagger\}_+ \right\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Devemos agora observar que, como estamos interessados apenas nos elementos diagonais, os termos contendo  $(a^\dagger)^2$  e  $a^2$ , ao serem aplicados a  $|n, t\rangle$  darão uma contribuição nula, devido ao fato de que os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem as relações

$$a |n, t\rangle = n^{\frac{1}{2}} |n-1, t\rangle \quad (2.63)$$

e

$$a^\dagger |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} |n+1, t\rangle. \quad (2.64)$$

Assim, quando tomarmos  $\langle n, t | H(t) | n, t \rangle$ , somente restará o termo

$$\langle n, t | H(t) | n, t \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho^2} + m^2\dot{\rho}^2 + m^2\omega^2(t)\rho^2 \right) \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar. \quad (2.65)$$

É claro que a matriz que representa o operador hamiltoniano  $H(t)$  possui elementos de matriz não-diagonais, uma vez que a representação definida pelas equações (2.58) a (2.61)

e (2.63) a (2.64) não diagonaliza este operador. Temos agora que obter os elementos diagonais da matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Para tal, inicialmente, vamos derivar a equação (2.64) em relação ao tempo. O resultado é o seguinte

$$\left(\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + a^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\right) |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle. \quad (2.66)$$

Fazendo o produto escalar desta equação com  $\langle n, t|$ , teremos o seguinte

$$\langle n, t| \left(\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} + a^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\right) |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle. \quad (2.67)$$

ou seja,

$$\langle n, t| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n, t\rangle + \langle n, t| a^\dagger \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle. \quad (2.68)$$

Agora, usando a equação (2.64), esta expressão fica

$$\langle n, t| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n, t\rangle + n^{\frac{1}{2}} \langle n-1, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle. \quad (2.69)$$

Fazendo na equação acima a mudança de variáveis  $n \rightarrow (n-1)$ , a equação acima fica

$$\langle n, t| \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle n-1, t| \frac{\partial}{\partial t} |n-1, t\rangle + n^{-\frac{1}{2}} \langle n, t| \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} |n-1, t\rangle. \quad (2.70)$$

Neste momento, será muito útil para nós representarmos as variáveis dinâmicas  $q$  e  $p$  em função dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . Isto pode ser feito a partir das equações (2.63) e (2.64). O resultado é o seguinte

$$q = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \rho (a^\dagger + a), \quad (2.71)$$

e

$$p = i \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{1}{\rho} - im\dot{\rho}\right) a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\dot{\rho}\right) a \right]. \quad (2.72)$$

Tendo as expressões para  $q$  e  $p$  conforme acima, podemos agora derivar a equação (2.54) em relação ao tempo e, substituindo as mesmas no resultado encontrar a seguinte expressão para  $\frac{\partial}{\partial t}$  em termos dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . A expressão a qual chegamos é dada por

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ -\frac{2\dot{\rho}}{\rho^2} + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] a + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) a^\dagger \right\}. \quad (2.73)$$

Assim, substituindo esta equação (2.73) na equação (2.70), teremos que

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle n-1, t | \frac{\partial}{\partial t} |n-1, t\rangle + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)\frac{n}{2}. \quad (2.74)$$

Este resultado pode ser escrito ainda na forma

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)\frac{n}{2}. \quad (2.75)$$

Na equação anterior podemos observar que os elementos de matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  devem ser imaginários puros. Isto porque o operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  é não-hermitiano. Como nenhuma informação adicional sobre o termo  $\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle$  pode ser determinada da equação acima, escolheremos, por uma questão de conveniência, que

$$\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle = \frac{1}{4}im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2), \quad (2.76)$$

de maneira que, ao tomarmos o limite em que  $\rho$  se torna constante, encontraremos  $\langle 0, t | \frac{\partial}{\partial t} |0, t\rangle$  tendendo a zero. Afinal, os elementos diagonais de matriz do operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  serão dados por

$$\langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} |n, t\rangle = \frac{im}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)(n + \frac{1}{2}). \quad (2.77)$$

Notemos que a condição dada pela equação (2.76) contribui para o "ponto zero" da equação (2.75). Calculados os elementos diagonais de matriz dos operadores  $H(t)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ , dados respectivamente pelas equações (2.65) e (2.77), podemos substituí-los na equação (2.24). Daí, encontraremos a seguinte equação para as funções de fase do operador  $I(t)$

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{1}{2m} \left[ m^2\rho\ddot{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + m^2\omega^2(t)\rho^2 \right] (n + \frac{1}{2}). \quad (2.78)$$

Se observarmos que a condição de vínculo (2.52) nos permite escrever que  $\ddot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{m^2\rho^3}$ , a equação (2.78) ficará reduzida a

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = -\frac{1}{m}(n + \frac{1}{2})\frac{1}{\rho^2}. \quad (2.79)$$

Integrando esta equação, temos as funções de fase na forma

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{m}(n + \frac{1}{2}) \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}. \quad (2.80)$$

Este resultado nos permite escrever que os autoestados de  $I(t)$  que satisfazem a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo serão dados por

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle, \quad (2.81)$$

na qual as fases  $\alpha_n(t)$  são dadas pela equação (2.80). Assim, poderemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger (2.3) para o operador hamiltoniano (2.27) como segue

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle. \quad (2.82)$$

Na equação (2.82), os  $c_n$  são constantes.

## 2.5 Comentários finais

A dependência temporal das soluções da equação de Schrödinger também pode ser escrita em termos de um operador unitário  $U(t)$  que satisfaça as condições

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (2.83)$$

e

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H(t)U. \quad (2.84)$$

No caso em que  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , a solução da equação acima é evidente. A solução da equação (2.84) pode ser expressa na forma

$$U(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right). \quad (2.85)$$

No entanto, o caso por nós estudado não contempla esta situação. Aqui, nosso hamiltoniano depende explicitamente do tempo. Mas, ainda assim, a evolução temporal dos autoestados de  $I(t)$ ,  $|n, t\rangle$ , pode ser determinada a partir da equação (2.81) como

$$|n, t\rangle = e^{-i\alpha_n(t)} U(t) |n, 0\rangle, \quad (2.86)$$

onde, em  $t = 0$ ,  $U(0) = 1$  e  $\alpha_n(0) = 0$ , de tal sorte que os estados  $|\psi(0)\rangle$  e  $|n, 0\rangle$  sejam iguais.

Nos capítulos seguintes, iremos utilizar o método do invariante dinâmico no estudo de alguns tipos de osciladores harmônicos dependentes do tempo.

# Capítulo 3

## Dinâmica quântica de um oscilador forçado generalizado dependente do tempo

### 3.1 Considerações iniciais

Conforme já mencionamos no primeiro capítulo desta tese, há bastante tempo que o estudo de sistemas envolvendo osciladores harmônicos dependentes do tempo desperta a atenção dos pesquisadores em Física, o que pode ser evidenciado pela farta literatura científica envolvendo o assunto e já citada naquele capítulo. Só para citar, podemos dar como exemplo algumas destas investigações: as referências [27, 42, 62] são algumas de interesse. Grande parte do interesse despertado em sistemas desta natureza certamente se deve ao fato de que, além de se tratar de sistemas quânticos capazes de serem resolvidos de forma exata, eles também podem ser usados com completo sucesso para modelar muitos fenômenos nas mais diversas áreas da Física, como, por exemplo, óptica quântica [3, 41, 63], dinâmica de fluidos quânticos [47] e gravitação [5, 51, 64]. Em particular, osciladores harmônicos forçados dependentes do tempo tem sido alvo de estudo de vários autores, os quais têm utilizados diversos métodos, desde as funções-tentativa [23, 24, 25, 65], for-

malismo de integrais de trajetória [14, 27, 28, 66, 67, 68, 69], representação de Heisenberg [70], funções de Wigner [71], estados coerentes e comprimidos [18, 58], transformações canônicas e unitárias [72] e método de invariantes utilizando tanto invariantes lineares como quadráticos [14, 18, 73, 74].

É importante salientar que, apesar de sua simplicidade quando comparado a outros métodos, o uso de invariantes lineares aparentemente, pelo que se observa na literatura científica, não havia sido muito explorado. Neste sentido, buscamos neste capítulo, entre outros objetivos, preencher este espaço. Para tal, usaremos operadores invariantes lineares à luz do método de invariantes dinâmicos [36] na intenção de encontrar as soluções exatas para a equação de Schrödinger para um oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado.

A obtenção de nossas soluções é muito menos extensa e mais direta, quando comparada aos métodos encontrados na literatura, pelo fato de que os invariantes lineares poderem ser mais facilmente diagonalizados quando comparados, por exemplo, com os invariantes quadráticos. Outra vantagem de nossa solução reside no fato de que torna-se mais acessível a obtenção das propriedades físicas do sistema.

Em nosso estudo também construiremos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano e terminaremos nossa análise com o cálculo de flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação entre ambos. Como destaque, mostraremos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa. Também faremos uma análise da expressão obtida no presente caso para o princípio da incerteza.

Ao final do presente capítulo, como caso particular, ilustraremos o formalismo aqui desenvolvido aplicando-o a um sistema físico de interesse, o oscilador forçado de Caldirola-Kanai. Em particular, estudaremos a evolução temporal do pacote de ondas Gaussiano para duas situações. Na primeira, consideraremos que a força externa é constante, enquanto que, na segunda, esta varia sinusoidalmente com o tempo. Em ambos os casos, construiremos o espaço de fase e procederemos à análise dos mesmos.



## 3.2 Soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo

Nesta seção, pretendemos tratar o problema de um oscilador harmônico unidimensional forçado generalizado dependente do tempo. Consideraremos um hamiltoniano  $H(t)$  que apresenta dependência temporal. A descrição do problema em questão será dada através do seguinte hamiltoniano

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{M(t)\omega^2(t)}{2}q^2 + \frac{y(t)}{2}(pq + qp) - F(t)q, \quad (3.1)$$

no qual  $q$  e  $p$  representam, respectivamente, a coordenada e o momento canonicamente conjugados, satisfazendo a relação de comutação  $[p, q] = -i\hbar$ , e as funções reais dependentes do tempo  $M(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $y(t)$  e  $F(t)$  representam, respectivamente, a massa (positiva), a frequência natural de oscilação, um parâmetro arbitrário e a força externa aplicada ao oscilador. Aqui, destacamos que  $F(t)$  é uma função real do tempo, requisito necessário para garantir que  $H(t)$  seja hermitiano em qualquer instante de tempo  $t$ . A evolução temporal do vetor de estado  $\Psi(q, t)$  que representa o sistema descrito pelo hamiltoniano (3.1), deve obedecer a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H(t) \Psi(q, t). \quad (3.2)$$

Desse modo, o sistema que estamos estudando evolui com o tempo de acordo com a equação de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M(t)} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)q^2 - \frac{i\hbar y(t)}{2} - i\hbar y(t)q \frac{\partial}{\partial q} - F(t)q \right] \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t), \quad (3.3)$$

onde usamos  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Uma vez que a nossa intenção reside em investigar a dinâmica quântica de nosso sistema, devemos resolver a equação de Schrödinger acima (3.3). Para tal intento, usaremos o método do invariante dinâmico idealizado por Lewis e Riesenfeld, descrito no capítulo anterior. Assim, dentro daquele formalismo, procederemos à busca de

um operador hermitiano não-trivial  $I(t)$  que satisfaça a equação (2.1). Se tal invariante existir e se ele não contiver termos envolvendo operadores com derivadas temporais, a condição (2.1) nos permite construir soluções da equação de Schrödinger (3.3) na forma

$$\Psi_\lambda(q, t) = e^{i\mu_\lambda(t)} \phi_\lambda(q, t), \quad (3.4)$$

na qual  $\phi_\lambda(q, t)$  representa uma autofunção de  $I(t)$  com autovalor independente do tempo  $\lambda$  e  $\mu_\lambda(t)$  é uma função de fase que pode ser calculada através da relação

$$\hbar \frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = \langle \phi_\lambda | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t)) | \phi_\lambda \rangle, \quad (3.5)$$

conforme visto no capítulo 2. Posto que explicitamos nossa linha de estudo para o problema, nosso primeiro passo agora será tentarmos encontrar um operador hermitiano  $I(t)$  que obedeça a equação (2.1). Assim, seguindo o método do invariante dinâmico, vamos assumir a existência do nosso operador linear invariante  $I(t)$  e admitir que o mesmo se apresenta na forma

$$I(t) = \alpha(t)q + \beta(t)p + \gamma(t), \quad (3.6)$$

na qual  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$  são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. O fato de exigirmos que tais funções sejam reais é simplesmente para garantir que nosso operador  $I(t)$  seja hermitiano. De acordo com o método,  $I(t)$  necessariamente deve satisfazer a equação (2.1). Assim, derivando a equação (3.6) com respeito ao tempo, obteremos o seguinte resultado

$$\dot{I}(t) = \dot{\alpha}(t)q + \alpha\dot{q} + \dot{\beta}(t)p + \beta\dot{p} + \dot{\gamma}(t) = 0. \quad (3.7)$$

Neste ponto, é preciso lembrar que podemos obter  $\dot{q}$  e  $\dot{p}$  facilmente da equação (3.1). Suas expressões são as seguintes:

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M(t)} + y(t)q, \quad (3.8)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -M(t)\omega^2(t)q - y(t)p - F(t). \quad (3.9)$$

nas quais os pontos sobre as respectivas funções indicam suas derivadas com respeito ao tempo. Substituindo as equações (3.8) e (3.9) na equação (3.7), esta última torna-se

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) = & [\dot{\alpha}(t) + \alpha(t)y(t) - \beta(t)M(t)\omega^2(t)] q \\ & + \left[ \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) + \frac{\alpha(t)}{M(t)} \right] p + [\dot{\gamma}(t) + \beta(t)F(t)] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Exigindo-se que seja satisfeita a equação (2.1), a equação anterior resulta no seguinte

$$\dot{\alpha}(t) = -\alpha(t)y(t) + \beta(t)M(t)\omega^2(t), \quad (3.11)$$

$$\dot{\beta}(t) = \beta(t)y(t) - \frac{\alpha(t)}{M(t)}, \quad (3.12)$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\beta(t)F(t), \quad (3.13)$$

Combinando as equações (3.11) e (3.12), encontramos facilmente que  $\beta(t)$  deve obedecer a equação

$$\ddot{\beta}(t) + \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}\dot{\beta}(t) + \Omega^2(t)\beta(t) = 0, \quad (3.14)$$

na qual

$$\Omega^2(t) = \omega^2 - y^2 - \frac{\dot{M}}{M}y - \dot{y} \quad (3.15)$$

é a frequência modificada. Ademais, podemos notar, a partir da equação (3.13), que  $\gamma(t)$  satisfaz a equação

$$\gamma(t) = - \int_0^t \beta(\tau)F(\tau)d\tau. \quad (3.16)$$

Do exposto acima, concluímos que, uma vez que determinemos a função  $\beta(t)$  pela resolução da equação (3.14), as funções  $\alpha(t)$  e  $\gamma(t)$  poderão ser obtidas diretamente. A primeira delas, a partir da equação (3.12) e, a segunda, da equação (3.16). Portanto, conhecendo-se a expressão da função real  $\beta(t)$ , o operador invariante linear  $I(t)$  poderá ser escrito da seguinte forma

$$I(t) = \beta(t)p - M(t) \left[ \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) \right] q + \gamma(t), \quad (3.17)$$

e o mesmo ficará completamente determinado desde que se conheça a expressão para a força externa  $F(t)$ . O passo seguinte em nosso estudo será encontrarmos os autoestados  $|\phi_\lambda\rangle$  de  $I(t)$ . Estes autoestados formam, conforme teoria descrita no capítulo 2 desta tese,

um conjunto completo contínuo cujos autovalores independentes do tempo  $\lambda$  constituem soluções da equação

$$I(t) |\phi_\lambda\rangle = \lambda |\phi_\lambda\rangle, \quad (3.18)$$

com a relação de ortonormalização

$$\langle \phi_\lambda | \phi_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (3.19)$$

Substituindo a expressão do operador invariante, dada pela equação (3.17), na equação (3.18), teremos a seguinte equação de autovalores

$$\left\{ -i\hbar\beta(t) \frac{\partial}{\partial q} - M(t) \left[ \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) \right] q + \gamma(t) \right\} |\phi_\lambda\rangle = \lambda |\phi_\lambda\rangle, \quad (3.20)$$

onde efetuamos a substituição  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Desse modo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial q} |\phi_\lambda\rangle = \frac{\left\{ iM(t) \left[ \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) \right] q + i(\lambda - \gamma(t)) \right\}}{\hbar\beta(t)} |\phi_\lambda\rangle. \quad (3.21)$$

As soluções da equação (3.21) são da forma

$$\phi_\lambda(q, t) = C_0 \exp \left\{ \frac{iM(t) \left[ \dot{\beta}(t) - y(t)\beta(t) \right]}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q \right\}, \quad (3.22)$$

na qual  $C_0$  representa uma constante de integração a ser determinada pela equação (3.19). Procedido o cálculo, encontramos que

$$C_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}}. \quad (3.23)$$

Com isto, as soluções da equação de autovalores (3.18) são finalmente dadas por

$$\phi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ \frac{iM(t) \left[ \dot{\beta}(t) - y(t)\beta(t) \right]}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q \right\}. \quad (3.24)$$

Para determinação da função de onda  $\Psi_\lambda(q, t)$ , precisamos ainda da expressão das funções de fase. Para isto, calcularemos os elementos de matriz do lado direito da equação (3.5), de

modo a obtermos a expressão para a função de fase. Para tal feito, primeiro derivaremos a equação (3.21). Obteremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2} |\phi_\lambda\rangle &= \left[ \frac{iM(t) \left( \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) \right)}{\hbar\beta(t)} \right] |\phi_\lambda\rangle \\ &+ \left[ \frac{iM(t) \left( \dot{\beta}(t) - \beta(t)y(t) \right) q + i(\lambda - \gamma(t))}{\hbar\beta(t)} \right]^2 |\phi_\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O próximo passo é substituir, na equação (3.1), as relações  $p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}$  e  $(pq + qp) = -i\hbar(1 + 2q \frac{\partial}{\partial q})$ . Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_\lambda | H(t) | \phi_\lambda \rangle &= \langle \phi_\lambda | \left( -\frac{\hbar^2}{2M(t)} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) | \phi_\lambda \rangle + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) q^2 \\ &- \frac{i\hbar y(t)}{2} - i\hbar y(t) \langle \phi_\lambda | q \frac{\partial}{\partial q} | \phi_\lambda \rangle - F(t)q. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo na equação acima as equações (3.21) e (3.25), após um cálculo direto, encontraremos o valor esperado do Hamiltoniano dado pela equação (3.1):

$$\begin{aligned} \langle \phi_\lambda | H(t) | \phi_\lambda \rangle &= \frac{1}{2} M(t) \left[ \omega^2(t) - y^2(t) + \frac{\dot{\beta}^2(t)}{\beta^2(t)} \right] q^2 - \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{2M(t)\beta^2(t)} \\ &- \frac{i\hbar \dot{\beta}(t)}{2\beta(t)} + \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} (\lambda - \gamma(t))q - F(t)q. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, derivando a equação (3.24) com respeito ao tempo e, fazendo uso das equações (3.8), (3.13) e (3.14) para simplificar o resultado, obteremos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_\lambda | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}) | \phi_\lambda \rangle &= \frac{1}{2} M(t) \left[ \omega^2(t) - y^2(t) + \frac{\dot{\beta}^2(t)}{\beta^2(t)} \right] q^2 - \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{M(t)\beta^2(t)} \\ &- \frac{i\hbar \dot{\beta}(t)}{2\beta(t)} + \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} (\lambda - \gamma(t))q - F(t)q. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo, com a substituição das equações (3.27) e (3.28) na equação (3.5), teremos afinal as funções de fase que queríamos determinar dadas pela seguinte expressão:

$$\frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = -\frac{1}{2\hbar} \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{M(t)\beta^2(t)}. \quad (3.29)$$

A determinação das funções de fase é obtida afinal por

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar} \int_0^t \frac{[\lambda - \gamma(\tau)]^2}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau. \quad (3.30)$$

Então, substituindo as equações (3.24) e (3.30) na equação (3.4), teremos que a expressão através da qual obteremos as soluções da equação de Schrödinger (3.3), dadas na forma a seguir:

$$\Psi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ i\mu_\lambda(t) + \frac{iM(t) [\dot{\beta}(t) - y(t)\beta(t)]}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q \right\}, \quad (3.31)$$

com as funções de fase  $\mu_\lambda(t)$  dadas pela equação (3.30). Neste ponto, devemos destacar que, quando  $\beta(t)$  for nula, as funções de fase  $\mu_\lambda(t)$  divergirão. Apesar desta divergência, podemos mostrar, como faremos a seguir, que as funções de onda (3.31) serão sempre finitas [41, 74]. Para um tempo  $t$  qualquer, consideraremos a função  $h_\lambda(t) = \mu_\lambda(t)\beta(t)$ , onde  $\mu_\lambda(t)$  são as funções de fase dadas pela equação (3.30) e  $\beta(t)$ , a solução da equação (3.14). Substituindo  $h_\lambda(t)$  na equação (3.29), teremos que

$$\frac{\dot{h}_\lambda(t)}{\beta(t)} - \frac{h_\lambda(t)\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} = -\frac{1}{2\hbar} \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{M(t)\beta^2(t)} \quad (3.32)$$

ou

$$\dot{h}_\lambda(t)\beta(t) - h_\lambda(t)\dot{\beta}(t) = -\frac{1}{2\hbar} \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{M(t)}. \quad (3.33)$$

Assim, notamos que, no caso da divergência de  $\mu_\lambda(t)$ , ocorrendo com  $\beta(t)$  tendendo a zero, o primeiro termo à esquerda na equação acima vai a zero, resultando no seguinte

$$h_\lambda(t) = \frac{[\lambda - \gamma(t)]^2}{2\hbar M(t)\dot{\beta}(t)}. \quad (3.34)$$

Logo, no caso da divergência de  $\mu_\lambda(t)$ , as autofunções (3.31) poderão ser reescritas em termos das funções  $h_\lambda(t)$  (que são finitas) ao invés de  $\mu_\lambda(t)$ . Um outro ponto a destacar em nossa análise é a evolução de um estado geral de Schrödinger. Ela pode ser escrita na forma

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\Psi_\lambda(q, t)d\lambda, \quad (3.35)$$

onde  $g(\lambda)$  representa uma função peso que determina o estado do sistema. Na próxima seção, utilizaremos esta expressão para a construção de soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano. Finalmente, podemos fazer uma análise para um caso de interesse. Supondo que o sistema fosse tal que houvesse um crescimento exponencial da massa,  $M(t) = e^{rt}$ , onde  $r$  representa uma constante positiva, e admitíssemos também que  $y(t) = 0$ , as funções de onda (3.31) se reduziriam àquelas obtidas por Vaidyanathan [74], ou seja,

$$\Psi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\beta(t)\hbar} \left[ h_\lambda(t)\hbar + \frac{ie^{rt}\dot{\beta}(t)q^2}{2} + (\lambda - \gamma(t))q \right] \right\}. \quad (3.36)$$

Isto indica a consistência de nosso resultado.

### 3.3 Pacote de ondas Gaussiano, flutuações e correlações

#### 3.3.1 Pacote de ondas Gaussiano

Já vimos que as soluções para a equação de Schrödinger (3.3) são determinadas pela equação (3.31). Uma forma de descrição do comportamento quântico de nosso sistema é apresentarmos nossa função de onda  $\Psi_\lambda(q, t)$  determinada numa expressão capaz de descrever um pacote de ondas Gaussiano. Desta forma, poderemos estudar seu comportamento e verificar a adequação de nossos resultados ao comportamento esperado para o caso em questão. É com esta intenção que, na presente subseção, procederemos à construção de soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano da equação (3.3). Para tal, vamos inicialmente separar nossas funções de fase  $\mu_\lambda(t)$  em três partes, desenvolvendo o binômio no numerador da integral da equação (3.30). Assim, teremos que

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar} \left\{ \int_0^t \frac{\lambda^2}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau - 2 \int_0^t \frac{\gamma(\tau)\lambda}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\gamma^2(\tau)}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau \right\}. \quad (3.37)$$

Definiremos a seguir algumas funções que nos ajudarão a reescrever a nossa equação anterior (3.37). As funções citadas são as seguintes

$$f_1(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{M(\tau)\beta^2(\tau)}, \quad (3.38)$$

$$f_2(t) = \int_0^t \frac{\gamma(\tau)}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau, \quad (3.39)$$

$$f_3(t) = -\frac{1}{2\hbar} \int_0^t \frac{\gamma^2(\tau)}{M(\tau)\beta^2(\tau)} d\tau. \quad (3.40)$$

Com estas definições, reescreveremos a equação (3.37) como segue

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{f_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{f_2(t)}{\hbar} \lambda + f_3(t). \quad (3.41)$$

Deste modo, podemos reescrever a função de onda (3.31) na forma

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(q, t) = & \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ -\frac{if_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{i\lambda}{\beta(t)\hbar} [q \right. \\ & \left. + \beta(t)f_2(t)] + i \left[ \frac{\dot{\beta}(t) - y(t)\beta(t)}{2\hbar\beta(t)} M(t)q^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma(t)}{\hbar\beta(t)} q + f_3(t) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como queremos construir soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano da equação (3.3), iremos utilizar uma função peso Gaussiana conforme definida a seguir

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{a^2}{4} \lambda^2\right), \quad (3.43)$$

na qual  $a$  é uma constante positiva. Assim, inserindo as equações (3.42) e (3.43) na equação (3.35) teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{a^2}{4} \lambda^2\right) \right\} \cdot \\ & \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ -\frac{if_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{i\lambda}{\beta(t)\hbar} [q \right. \\ & \left. + \beta(t)f_2(t)] + i \left[ \frac{\dot{\beta}(t) - y(t)\beta(t)}{2\hbar\beta(t)} M(t)q^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\gamma(t)}{\hbar\beta(t)} q + f_3(t) \right] \right\} d\lambda, \end{aligned} \quad (3.44)$$

Resolvendo a integral acima, podemos escrever a função de onda do pacote Gaussiano como segue

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{iC_3(t)} e^{i(C_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2}, \quad (3.45)$$



com  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $\phi(t)$  e  $B(t)$  dadas pelas seguintes expressões

$$C_1(t) = \sqrt{\frac{M(\dot{\beta} - y\beta)}{2\hbar\beta} + \frac{2f_1}{\beta^2\hbar^3a^4(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}}, \quad (3.46)$$

$$C_2(t) = \frac{2f_1f_2}{\beta\hbar^3a^4(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})} \frac{1}{C_1(t)} - \frac{\gamma}{2\hbar\beta C_1}, \quad (3.47)$$

$$C_3(t) = \frac{2f_1f_2}{\hbar^3a^4(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})} - C_2^2 + f_3 + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2f_1(t)}{\hbar a^2}, \quad (3.48)$$

$$B(t) = \frac{1}{\beta^2\hbar^2a^2(1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2a^4})}. \quad (3.49)$$

Podemos, além disso, calcular a densidade de probabilidade dependente do tempo associada a esse pacote Gaussiano. Ela é também Gaussiana para um tempo qualquer. Sua expressão é a seguinte

$$\rho(q, t) = |\Psi(q, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{(q + \beta f_2)^2}{\sigma^2(t)}\right\}, \quad (3.50)$$

com largura dependente do tempo

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2a^2\beta^2(t)}{2} \left(1 + \frac{2f_1^2(t)}{\hbar^2a^4}\right)}. \quad (3.51)$$

Um fato que pode nos preocupar é o que ocorre com a função  $f_1$  quando  $\beta \rightarrow 0$ . Devemos notar que, de acordo com a equação (3.16), quando isto ocorrer, teremos  $\gamma(t) \rightarrow \gamma = \text{constante}$ . Daí, resulta que  $f_1$  será expressa como um múltiplo de  $\mu_\lambda(t)$ . Ora, uma vez que a divergência de  $\mu_\lambda(t)$  já foi contornada com a utilização de uma função auxiliar  $h_\lambda(t)$ , conforme argumento apresentado na seção anterior, o mesmo argumento nos garante que podemos reescrever os resultados obtidos de modo que estes sejam finitos.

Podemos verificar facilmente que a função de onda (3.45) é normalizada e a densidade de probabilidade dependente do tempo é conservada, conforme esperado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(q, t)|^2 dq = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2B(q+\beta f_2)^2} = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1. \quad (3.52)$$

Da equação (3.45), vemos que o centro do pacote permanece em  $\langle q \rangle = -\beta(t)f_2(t)$ <sup>1</sup> enquanto que a largura do mesmo atinge um mínimo em  $t = 0$ . Ademais, devemos notar, a partir

---

<sup>1</sup>O valor esperado de  $q$  é calculado na próxima subseção e seu valor é dado pela equação (3.55).

da equação (3.51) que a largura do pacote Gaussiano não depende da força externa  $F(t)$ . Na verdade, a forma do pacote não se altera com a força externa. Isto significa que a força externa  $F(t)$  age uniformemente no pacote de ondas, ou melhor, o pacote Gaussiano tem um *centro de massa* sobre o qual a força  $F(t)$  atua de sorte que o pacote se desloca sem sofrer distorção. A força externa simplesmente desloca o pacote de ondas de uma quantidade  $-\beta(t)f_2(t)$ .

### 3.3.2 Flutuações e correlações

Na subsecção anterior, apresentamos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano da equação (3.3). A função de onda do pacote Gaussiano (3.45) nos permite obter mais informações acerca do sistema em estudo e da consistência de nossos resultados. Nosso próximo passo será calcular as flutuações quânticas da coordenada e do momento no estado  $\Psi(q, t)$ . Devemos primeiramente encontrar os valores esperados de  $q$ ,  $p$ ,  $q^2$  e  $p^2$ . Por definição, o valor esperado de  $q$  é determinado a partir da função de onda  $\Psi(q, t)$  pela seguinte relação

$$\langle q \rangle = \int \Psi^*(q, t)q\Psi(q, t)dq. \quad (3.53)$$

Substituindo  $\Psi(q, t)$  dada pela equação (3.45) na integral acima, teremos que

$$\langle q \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int qe^{-2B(q+\beta f_2)^2} dq. \quad (3.54)$$

Fazendo uma mudança de variáveis,  $x = q + \beta f_2$ , a expressão acima resulta numa integral do tipo  $\int e^{-C_0x^2} dx$ , na qual  $C_0$  é uma constante. Seu valor é conhecido  $((\pi/C_0)^{1/2})$ . Assim, teremos que

$$\langle q \rangle = -\beta f_2. \quad (3.55)$$

Da mesma forma, podemos calcular  $\langle q^2 \rangle$  por intermédio da expressão

$$\langle q^2 \rangle = \int \Psi^*(q, t)q^2\Psi(q, t)dq, \quad (3.56)$$

que resulta na seguinte integral

$$\langle q^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int q^2e^{-2B(q+\beta f_2)^2} dq, \quad (3.57)$$

a qual pode ser resolvida fazendo-se a troca de variáveis  $x = q + \beta f_2$ . Resulta em

$$\langle q^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int (x - \beta f_2)^2 e^{-2Bx^2} dx. \quad (3.58)$$

Com um pouco de álgebra podemos desenvolver o binômio dentro do sinal de integral, transformando-a em três, as quais podem ser resolvidas por partes. O resultado final desta integral é o seguinte

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{4B} + (\beta f_2)^2. \quad (3.59)$$

Igualmente, podemos calcular os valores esperados de  $p$  e  $p^2$ . Só que, neste caso, devemos usar a substituição  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Teremos então que

$$\langle p \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}) e^{i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} dq. \quad (3.60)$$

Embora neste caso o cálculo seja mais longo, ele é direto e resulta em

$$\langle p \rangle = 2\hbar C_1 [C_2 - C_1 \beta f_2]. \quad (3.61)$$

Finalmente, podemos calcular

$$\langle p^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} (-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}) e^{i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} dq. \quad (3.62)$$

O resultado da integral acima é dado pela equação a seguir:

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 C_1^2 \left\{ 4[C_2 - C_1 \beta f_2]^2 + \frac{C_1^2}{B} + \frac{B}{C_1^2} \right\}. \quad (3.63)$$

Das equações (3.55), (3.59), (3.61) e (3.63), podemos agora obter as flutuações quânticas, tanto da coordenada como do momento. Após alguma álgebra, chegamos ao seguinte resultado

$$\Delta q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} = \frac{1}{2\sqrt{B}}, \quad (3.64)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar \sqrt{\frac{B^2 + C_1^4}{B}}. \quad (3.65)$$

Uma análise das equações (3.64) e (3.65) nos permite observar que as flutuações de  $q$  e  $p$  no estado  $\Psi(q, t)$  não dependem da força externa. Este resultado concorda com aquele

obtido na referência [70]. Aqui, notamos que, em termos das flutuações em  $q$ , a largura  $\sigma(t)$  do pacote Gaussiano (3.50) é dada por  $\sigma(t) = \sqrt{2}\Delta q$ . É necessário porém não apenas chegar às flutuações quânticas (3.64) e (3.65), mas também analisar a relação de incerteza  $\Delta q\Delta p$ . Este produto deve nos levar a conclusões acerca da incerteza mínima. Um cálculo direto permite que escrevamos o produto da incerteza na seguinte forma

$$\Delta q\Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{C_1^4}{B^2}}. \quad (3.66)$$

Uma análise direta desta equação nos mostra que o produto da incerteza atinge um valor mínimo igual a  $\frac{\hbar}{2}$  para um dado tempo  $\tau$  tal que  $C_1(\tau) = 0$ , ou, conforme podemos concluir a partir da equação (3.46),

$$\dot{\beta}(\tau) = -\frac{4f_1(\tau)}{M\beta(\tau)[\hbar^2 a^4 + 4f_1^2(\tau)]} + y(\tau)\beta(\tau). \quad (3.67)$$

Portanto, a equação acima nos mostra que, se começarmos com um pacote de incerteza mínima,  $\Delta q\Delta p = \frac{\hbar}{2}$  para  $\tau = 0$ , então a condição acima será obviamente reduzida a  $\dot{\beta}(0) = y(0)\beta(0)$  (notemos que, por definição,  $f_1(0) = 0$ ). Ademais,  $\beta(0)$  está relacionada à largura inicial do pacote Gaussiano (equações (3.50) e (3.51)). Assim, nossa análise tornou-se extremamente produtiva no sentido de que a mesma nos oferece as condições iniciais necessárias para resolver equação (3.14). Logo, a solução de tal equação fica completamente estabelecida. Mas, retomemos nossa discussão a partir da busca de correlações quânticas, as quais, após obtidas, serão capazes de dar maior consistência e robustez à nossa proposta de utilizar o método de invariantes dinâmicos em nossa contribuição. A seguir, calcularemos as correlações quânticas entre coordenada e momento. As mesmas são definidas como segue [75]

$$C_{1,1} = \frac{1}{2}\langle\{(q - \langle q \rangle), (p - \langle p \rangle)\}_+\rangle \quad (3.68)$$

onde  $\{ , \}_+$  representa o anti-comutador. No cálculo das flutuações já encontramos os valores esperados de  $q$  e  $p$ . Então, para efetuar nossos cálculos referentes à correlação, precisamos calcular o valor esperado do anti-comutador  $\{q, p\}_+ = -i\hbar(1 + 2q\frac{\partial}{\partial q})$ . Devemos então resolver as integrais

$$\langle(-i\hbar)\rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2} (-i\hbar) e^{i(C_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2} dq \quad (3.69)$$

e

$$\left\langle (-i\hbar)\left(2q\frac{\partial}{\partial q}\right)\right\rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{i(C_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2} (-i\hbar)\left(2q\frac{\partial}{\partial q}\right) e^{i(C_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2} dq. \quad (3.70)$$

A primeira delas, equação (3.69) é imediata. Seu resultado é

$$\langle (-i\hbar) \rangle = -i\hbar. \quad (3.71)$$

A segunda integral, equação (3.70) exige um cálculo demorado, no entanto direto. Após alguma álgebra, seu resultado é o seguinte

$$\left\langle (-i\hbar)\left(2q\frac{\partial}{\partial q}\right)\right\rangle = (-i\hbar) \left\{ [2C_1\beta f_2]^2 - 4C_1C_2\beta f_2 + \frac{C_1^2}{B} - 1 \right\}. \quad (3.72)$$

Logo, das equações (3.71) e (3.72), encontramos que

$$\langle \{q, p\}_+ \rangle = (-i\hbar) \left\{ [2C_1\beta f_2]^2 - 4C_1C_2\beta f_2 + \frac{C_1^2}{B} \right\}. \quad (3.73)$$

Desse modo, retomando ao nosso objetivo de calcular as correlações quânticas, desenvolvemos a equação (3.68), substituindo os valores esperados dados pelas equações (3.55), (3.61) e (3.73). Feito isto, após alguma álgebra, encontramos as correlações quânticas, as quais são exibidas pela seguinte expressão

$$C_{1,1} = \frac{\hbar C_1^2}{2B} \quad (3.74)$$

Da expressão acima, podemos ver que, mesmo quando o estado inicial for descorrelacionado, as correlações quânticas se desenvolvem com o passar do tempo. O aparecimento de correlações vem acompanhando o crescimento na incerteza. De fato, a equação (3.66) pode ser reescrita como

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4C_{1,1}^2}{\hbar^2}}, \quad (3.75)$$

o que implica claramente no fato da incerteza ser mínima para uma correlação nula. E, vice-versa, sempre que a incerteza for mínima, a correlação será nula. Concluindo esta seção, destacamos que a ausência de correlação no produto da incerteza mínima já era esperado, uma vez que qualquer possível correlação existente criaria um vínculo na minimização do

referido produto e, assim, este não atingiria seu valor mínimo [76]. De fato, o produto generalizado da incerteza é dado por [77]

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [q, p] \rangle|^2 + C_{1,1}^2. \quad (3.76)$$

Em nossos cálculos, encontramos que

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} + C_{1,1}^2. \quad (3.77)$$

Como

$$|\langle [q, p] \rangle|^2 = \hbar^2, \quad (3.78)$$

o nosso resultado para o produto da incerteza mínima, equação (3.77), de fato satisfaz a equação (3.76), conforme era necessário para que nossos cálculos fossem coerentes. Assim, nosso resultado não apenas concorda os da referência [77] como também mostra que, para um pacote Gaussiano, este produto generalizado da incerteza atinge seu menor valor. Ademais, uma vez que a correlação não depende da força externa, esta pode ser calculada para o caso particular de um oscilador harmônico dependente do tempo não-forçado. Na seção seguinte, iremos calcular as correlações para um oscilador em especial, conhecido por oscilador forçado de Caldirola-Kanai.

### 3.4 O oscilador forçado de Caldirola-Kanai

Ilustraremos a aplicação do formalismo que desenvolvemos neste capítulo com um Hamiltoniano de interesse, conhecido na literatura por Hamiltoniano do oscilador forçado de Caldirola-Kanai [14]. Consideraremos para nosso exemplo o caso em que  $y(t) = 0$ ,  $\omega(t) = \omega_0$  é constante e a massa  $M(t)$  seja dada por

$$M(t) = me^{rt}, \quad (3.79)$$

na qual  $r$  é uma constante real positiva, a qual fornece a taxa de crescimento da massa. Para este caso, o Hamiltoniano (3.1) torna-se

$$H(t) = e^{-rt} \frac{p^2}{2m} + e^{rt} \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 - F(t)q, \quad (3.80)$$

que é a expressão encontrada na literatura para o Hamiltoniano de Caldirola-Kanai. Devemos salientar que o Hamiltoniano em questão, equação (3.80), depende do tempo, mas a dependência agora encontra-se no termo de massa e não na frequência. Por causa disto, devemos tomar o cuidado de refazer nossos cálculos. Um exemplo do que foi destacado acima é a equação (3.14), que envolve a derivada de  $M(t)$ . Seguindo, no presente caso, o método do invariante dinâmico, conforme fizemos na seção 3.2 desta tese, as equações (3.14) e (3.16) reduzem-se a

$$\ddot{\beta}(t) + r\dot{\beta}(t) + \omega_0^2\beta(t) = 0, \quad (3.81)$$

e

$$\gamma(t) = - \int_0^t \beta(\tau)F(\tau)d\tau. \quad (3.82)$$

Aqui, destacamos que esta expressão (3.81) descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido clássico. Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem, cuja solução oscilatória é dada por

$$\beta(t) = A \frac{e^{-\frac{rt}{2}}}{\sqrt{m\omega_0}} \sin(\Omega_0 t + \Phi), \quad (3.83)$$

onde  $A$  e  $\Phi$  são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2 - (r^2/4). \quad (3.84)$$

Como foi dito acima, devemos deixar bem claro que estamos levando em consideração apenas as soluções oscilatórias da equação (3.81), ou seja, o caso particular no qual  $\Omega_0^2 > 0$ . Considerando as condições iniciais  $\dot{\beta}(0) = 0$  e uma largura inicial de pacote Gaussiano como  $\sigma(0)$ , conforme discutido na seção anterior,  $A$  e  $\Phi$  podem ser facilmente encontrados como segue

$$A = \frac{\sqrt{2m\omega_0^3}\sigma(0)}{\hbar a \Omega_0} \quad (3.85)$$

$$\sin(\Phi) = \frac{\Omega_0}{\omega_0}. \quad (3.86)$$

Antes de calcularmos as flutuações quânticas relativas ao nosso problema, vamos encontrar a derivada com respeito ao tempo de  $\beta$  a partir da equação (3.83). O resultado é

o seguinte

$$\dot{\beta}(t) = A \frac{e^{-rt/2}}{\sqrt{m\omega_0}} \left[ \omega_0 \cos(\Omega_0 t + \Phi) - \frac{r}{2} \sin(\Omega_0 t + \Phi) \right]. \quad (3.87)$$

Nosso próximo passo é substituir as equações (3.83) e (3.87) nas equações (3.46) e (3.49).

Deste modo, teremos que

$$C_1(t) = \left\{ \frac{m\omega_0}{2\hbar \tan(\Omega_0 t + \Phi)} - \frac{1}{4\hbar} + \frac{2f_1(m\omega_0)^{1/2}}{A \exp(-rt/2) \sin(\Omega_0 t + \Phi)^2 \hbar^3 a^4 (1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2 a^4})} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.88)$$

e

$$B(t) = \left\{ A \frac{\exp(-rt/2)}{(m\omega_0)^{1/2}} \sin(\Omega_0 t + \Phi)^2 \hbar^2 a^2 (1 + \frac{4f_1^2}{\hbar^2 a^4}) \right\}^{-1}. \quad (3.89)$$

Nossos cálculos iniciais nos permitem agora calcular as correlações quânticas para este problema. Devemos então substituir as equações (3.88) e (3.89) na equação (3.74), que calculamos na seção anterior. Depois de um longo, porém direto cálculo, as correlações quânticas podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{2C_{1,1}}{\hbar} &= \frac{4\nu}{\chi \sqrt{4\nu^2 - 1}} \sin(\Omega_0 t + \Phi) [\cos(\Omega_0 t + \Phi) \\ &\quad - \frac{\sin(\Omega_0 t + \Phi)}{\sqrt{4\nu^2 - 1}}] \left\{ 1 + \frac{\chi^2}{4\nu^2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{4\nu^2 - 1}}{\nu \tan(\Omega_0 t + \Phi)} \right]^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\chi}{2\nu} \left[ 1 - \frac{\sqrt{4\nu^2 - 1}}{\nu \tan(\Omega_0 t + \Phi)} \right], \end{aligned} \quad (3.90)$$

na qual

$$\nu = \frac{\omega_0}{r}, \quad (3.91)$$

$$\chi = \frac{\hbar}{m\omega_0 \sigma^2(0)}. \quad (3.92)$$

Conseqüentemente, a escolha destes dois parâmetros,  $\nu$  e  $\chi$ , determina completamente a evolução temporal das correlações quânticas e do produto da incerteza. Substituindo a equação (3.90) na equação (3.75), obteremos o produto da incerteza. Com isso, no intuito de concluir algo mais preciso acerca do referido produto, poderemos construir o gráfico do



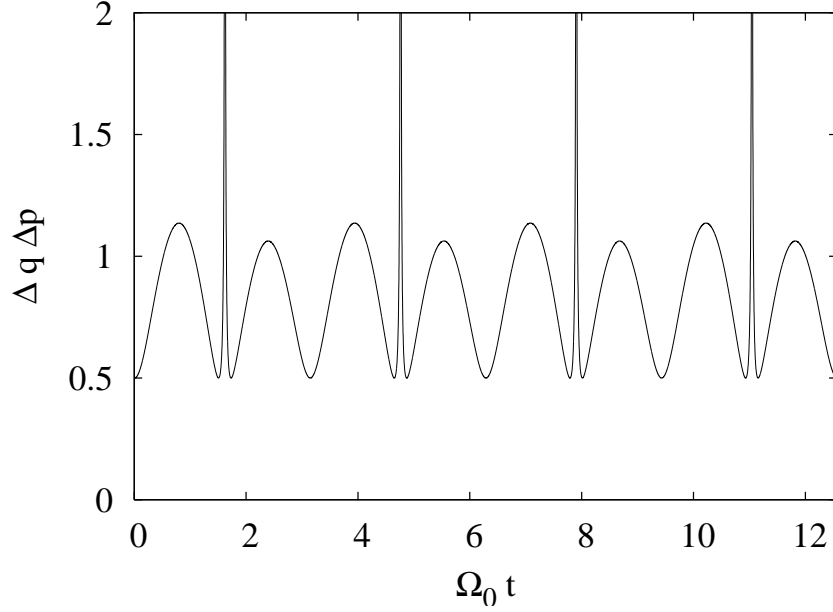


Figura 3.1: Produto da incerteza em função do tempo.

mesmo em função do tempo. Esse gráfico, figura 3.1, mostra que o produto da incerteza é periódico e cresce ilimitadamente para determinados tempos ressonantes.

Para  $F(t) = 0$ , as soluções da equação de Schrödinger (3.3) correspondente ao Hamiltoniano Caldirola-Kanai não-forçado (3.80) são completamente determinadas (equações (3.45) e (3.82)). Notemos que, na equação (3.82), teremos como resultado  $\gamma(t) = 0$ , o que implica na anulação de  $f_2(t)$  na equação (3.39), que a define. Em consequência disso, a equação (3.55) nos leva a concluir que  $\langle q \rangle = 0$ . Da mesma forma, na equação (3.47), teremos que  $C_2(t) = 0$ , o que nos leva a concluir, a partir da equação (3.61), que  $\langle p \rangle = 0$ . Neste caso, podemos concluir que a ausência de uma força externa leva o sistema ao repouso na origem, ou seja,  $\langle q \rangle = 0$  e  $\langle p \rangle = 0$  para qualquer instante de tempo. Para uma força externa constante  $F(t) = F_0$ , a integração da equação (3.82) leva a

$$\gamma(t) = -\frac{2AF_0}{(r^2 + 4\Omega_0^2)\sqrt{m\omega}} \left[ 2\Omega_0 \cos(\Phi) + r \sin(\Phi) - e^{-\frac{rt}{2}} (2\Omega_0 \cos(\Phi + \Omega_0 t) + r \sin(\Phi + \Omega_0 t)) \right]. \quad (3.93)$$

Logo, usando as equações (3.38), (3.39), (3.88) e (3.47), a posição e o momento esperados

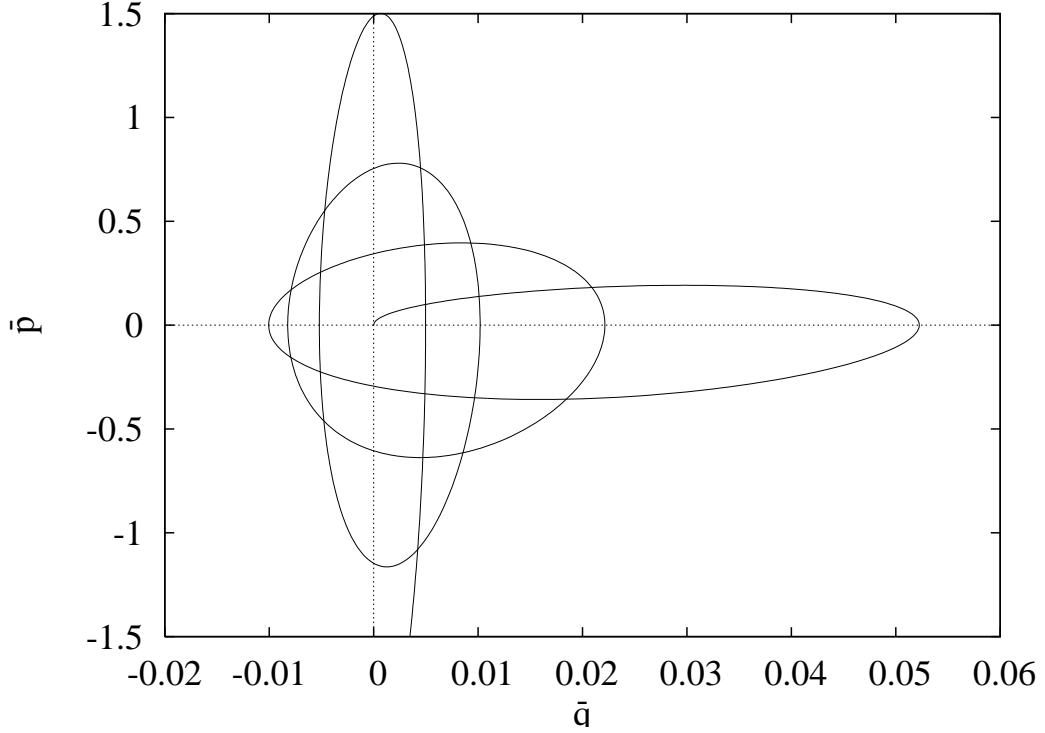


Figura 3.2: Espaço de fase para o caso no qual a força externa é constante. Notemos que tanto o momento  $\bar{p}(t) = \frac{r\langle p(t) \rangle}{F_0}$  quanto a posição  $\bar{q}(t) = \frac{mr^2\langle q(t) \rangle}{F_0}$  oscilam a partir da origem com uma amplitude que depende do tempo. Nesta figura, fixamos  $\nu = 5$  e variamos  $\Omega_0 t$  até 23.

no estado Gaussiano serão os seguintes

$$\langle q \rangle = \frac{4e^{-\frac{rt}{2}} F_0}{mr^2 (1 + 4(\Omega_0/r)^2)} \left( e^{-\frac{rt}{2}} + \frac{r}{2\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) - \cos(\Omega_0 t) \right) \quad (3.94)$$

e

$$\langle p \rangle = -\frac{F_0}{r (1 + 4(\Omega_0/r)^2)} \left\{ 4 + e^{\frac{rt}{2}} \left[ \frac{r}{\Omega_0} \left( 1 - 4\frac{\Omega_0^2}{r^2} \right) \sin(\Omega_0 t) - 4 \cos(\Omega_0 t) \right] \right\}. \quad (3.95)$$

Definimos tanto o momento normalizado  $\bar{p}(t) = \frac{r\langle p(t) \rangle}{F_0}$  quanto a posição normalizada  $\bar{q}(t) = \frac{mr^2\langle q(t) \rangle}{F_0}$ , que passam a ser governados por um parâmetro único, a saber,  $\nu$ , a razão entre a frequência natural do oscilador  $\omega_0$  e taxa de crescimento da massa  $r$ . Assim, das equações acima e da relação entre  $\Omega_0$  e  $\omega_0$ , dada pela equação (3.84), podemos ver que

$$\bar{q} = \frac{\exp(-\frac{\Omega_0 t}{\sqrt{4\nu^2-1}})}{\nu^2} \left( \exp(-\frac{\Omega_0 t}{\sqrt{4\nu^2-1}}) + \frac{1}{\sqrt{4\nu^2-1}} \sin(\Omega_0 t) - \cos(\Omega_0 t) \right) \quad (3.96)$$

e

$$\bar{p} = -\frac{1}{\nu^2} \left\{ 1 + \exp(\frac{\Omega_0 t}{\sqrt{4\nu^2-1}}) \left[ \frac{(1-2\nu^2)}{\sqrt{4\nu^2-1}} \sin(\Omega_0 t) - \cos(\Omega_0 t) \right] \right\}. \quad (3.97)$$

As equações acima nos permitem a construção do espaço de fase. Fixando  $\nu = 5$  e variando  $\Omega_0 t$  até 23, obtemos o gráfico representado na figura 3.2. Nele, podemos observar que tanto a posição quanto o momento oscilam. Contudo, enquanto a amplitude de oscilação da posição decresce e, eventualmente, vai a zero para um tempo suficientemente longo, a amplitude de oscilação do momento é sempre crescente. Este comportamento é devido ao incremento exponencial da massa. Para valores pequenos de  $\nu$ , a massa cresce muito rapidamente e a força não será forte o suficiente para retirar o pacote de ondas da origem, ao mesmo tempo em que o momento crescerá rapidamente. Se aumentarmos o valor de  $\nu$  o que se vê no gráfico de fase é cada vez mais oscilações.

Continuando nossa análise, nós estudamos também o caso no qual a força periódica externa tem a forma  $F(t) = F_0 \sin(\Omega_1 t)$  com  $F_0$  e  $\Omega_1$  constantes. Nesse caso, a equação (3.82) fica escrita na forma seguinte

$$\gamma(t) = -\left(\frac{m}{\Omega_0}\right)^{1/2} A F_0 \int_0^t e^{\frac{r\tau}{2}} \sin(\Omega_1 \tau) \sin(\Omega_0 \tau + \Phi) d\tau. \quad (3.98)$$

A integração da equação (3.98) resulta no seguinte

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & -\left(\frac{m}{\Omega_0}\right)^{1/2} \frac{2A^2 F_0}{1 - \left(\frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r}\right)^2} \left\{ e^{\frac{rt}{2}} \sin(\Omega_0 t + \Phi) \left[ \sin(\Omega_1 t) + \frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r} \cos(\Omega_1 t) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r} \sin(\Phi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Das equações (3.39), (3.79), (3.83) e (3.99), teremos que

$$\frac{f_2(t)}{\Pi} = \int_0^t \frac{e^{\frac{r\tau}{2}} [\sin(\Omega_1 t) + \frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r} \cos(\Omega_1 t)] d\tau}{\sin(\Omega_0 t + \Phi)} - \frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r} \int_0^t \frac{\sin(\Phi) d\tau}{\sin^2(\Omega_0 \tau + \Phi)}, \quad (3.100)$$

com

$$\Pi = -\left(\frac{m}{\Omega_0}\right)^{1/2} \frac{2\omega_0 F_0}{1 - \left(\frac{2\Omega_0 \Omega_1}{r}\right)^2}. \quad (3.101)$$

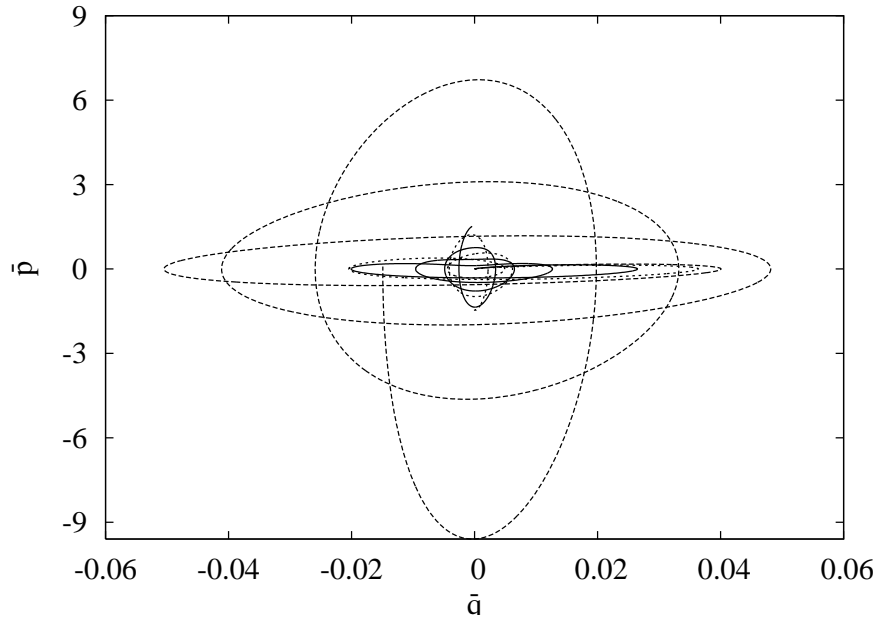


Figura 3.3: Espaço de fase para o caso no qual a força externa é periódica. Nesta figura, fixamos  $\nu = 5$  e variamos  $\Omega_0 t$  até 23, considerando três valores para  $\xi$ : 0.5 (linha pontilhada), 1 (linha tracejada) e 2 (linha contínua).

Finalmente, das equações (3.55) e (3.83), encontraremos que

$$\langle q \rangle = -\frac{Ae^{-rt/2} \sin(\Omega_0 t + \Phi)}{\sqrt{m\omega_0}} f_2(t), \quad (3.102)$$

com  $f_2(t)$  dado pela equação (3.100).

A obtenção analítica de soluções para a equação acima torna-se difícil. Neste momento, partimos para soluções computacionais. Devemos destacar que nosso interesse reside novamente na construção do espaço de fase. No entanto, no presente caso, são dois os parâmetros de controle: o já mencionado acima  $\nu$  e a razão entre as frequências da força atuante  $\Omega_1$  e a frequência efetiva do sistema não-forçado  $\Omega_0$ , aqui definido como  $\xi = \Omega_1/\Omega_0$ . Como no caso em que estudamos anteriormente, no qual a força externa era constante, o papel de  $\nu$  é determinar o número de oscilações que serão vistas no espaço de fase até o momento em que  $\bar{q}(t)$  se torne muito pequeno. Por outro lado,  $\xi$  é o responsável pela eficácia da força externa. Quando  $\xi$  se afastar de 1, tanto para valores grandes como para

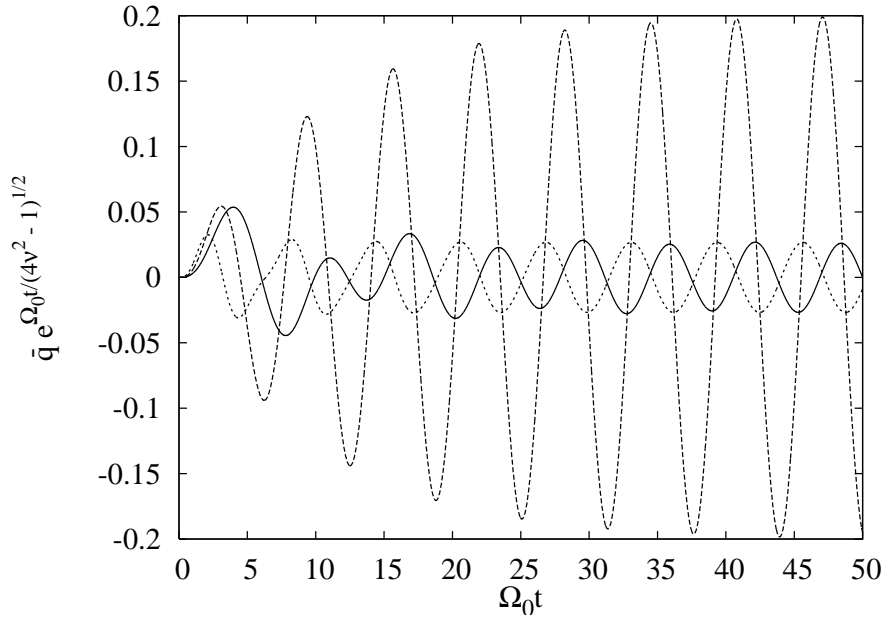


Figura 3.4: Valor esperado da posição do pacote de onda em função do tempo mostra o surgimento de ressonância para  $\Omega_1 = \Omega_0$ . Nesta figura, fixamos  $\nu = 5$  e consideramos três valores para  $\xi$ : 0.5 (linha pontilhada), 1 (linha tracejada) e 2 (linha contínua).

pequenos, a amplitude das oscilações irá diminuir, conforme podemos ver na figura 3.3. Nele, consideramos,  $\nu = 5$ , três valores para  $\xi$ : 0,5, 1 e 2, e variamos  $\Omega_0 t$  até 23, como feito no caso anterior.

No intuito de analisarmos o surgimento da ressonância em detalhes, podemos perceber inicialmente, a partir da equação (3.96), que, no caso em que a força externa era constante, a amplitude de oscilação da posição decaía exponencialmente com  $e^{-\Omega t / \sqrt{4\nu^2 - 1}}$  para tempos suficientemente grandes. Aqui, notamos que, exceto na presença da ressonância, este decaimento deverá também aparecer no caso da força ser oscilante, como é a que estamos estudando. De fato, se descartarmos este fator exponencial na expressão para  $\bar{q}$ , seremos capazes de ver que (figura 3.4), exceto para  $\xi = 1$ , a posição do pacote de ondas oscila com amplitude constante. Por outro lado, também observamos a existência de ressonância para  $\xi = 1$ , o que torna o decaimento da amplitude de oscilação da posição muito lento. Nesse

último caso, quando surge a ressonância, a amplitude da posição decai muito lentamente em comparação com o rápido decaimento exponencial observado no caso da frequência constante da força externa. No entanto, o produto da incerteza é o mesmo para ambos os casos, uma vez que o mesmo não depende da força externa.

### 3.5 Considerações finais

Concluimos este capítulo, ressaltando que a abordagem alternativa aqui utilizada oferece algumas vantagens quando comparada com outros métodos apresentados na literatura da área, a saber:

- ela nos permite derivar a função de onda diretamente, uma vez que o operador invariante linear é facilmente diagonalizável quando comparado com o invariante quadrático, por exemplo;
- uma vez que conheçamos as soluções clássicas do oscilador harmônico amortecido não-forçado correspondente, a função de onda fica completamente determinada;
- nossa função de onda permite que obtenhamos as soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano de maneira mais fácil de que pelo uso de outros métodos;
- nossa abordagem permite uma análise mais clara e direta das propriedades físicas do sistema, posto que os estados de pacotes Gaussianos são muito comuns e que os valores esperados das quantidades físicas nesses estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

# Capítulo 4

## Descrição quântica da luz em meios condutores homogêneos e lineares

### 4.1 Considerações iniciais

O modelo de oscilador harmônico é um dos modelos mais importantes em física quântica. Ele é analítico e exatamente solúvel no âmbito da mecânica quântica e tem uma extensa gama de aplicações em física moderna. Um exemplo disto é fato do mesmo ter sido usado na quantização do campo eletromagnético em meios não-dissipativos. Esta quantização é descrita claramente em textos básicos de ótica quântica [11, 78] e é necessária para que possamos apreender os conceitos básicos para a descrição dos efeitos quânticos da luz. Como um sistema não estacionário, um oscilador harmônico dependente de tempo pode ser também analiticamente e exatamente solúvel e o método do invariante dinâmico, já apresentado nesta tese, fornece um método típico e poderoso para estudar este sistema [43, 44, 81, 82, 83, 84]. Aqui, observamos que, em geral, modelos de oscilador harmônico dependente do tempo podem surgir fundamentalmente tanto como uma consequência da interação do oscilador com um reservatório, o qual possui um número grande de graus de liberdade [11, 62, 85] como em uma abordagem fenomenológica na qual são introduzidas forças não-conservativas "com a mão" no Hamiltoniano do sistema em estudo,

como é feito, por exemplo, nas referências [38, 39, 62, 64].

Nesta contribuição, nós pretendemos usar o modelo de oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica usando o gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico para dar uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula. Nós obteremos funções de onda exatas para este problema em termos de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador harmônico amortecido clássico. Além disso, construiremos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos e calculamos as flutuações e as correlações quânticas para cada modo do campo eletromagnético quantizado.

A organização deste capítulo é a seguinte: na próxima seção, faremos uma breve revisão das equações básicas do eletromagnetismo, as equações de Maxwell. Esta revisão não pretende ser extensa e completa, mas apenas didática no sentido de dar fundamentos para o desenvolvimento de nossa contribuição. Em seguida, apresentamos as características associadas a abordagem do problema em questão. Finalmente, apresentamos a solução clássica para a luz em meios condutores, homogêneos e lineares e fazemos a descrição quântica do problema. Construiremos soluções do tipo pacote de ondas Gaussianas e terminaremos nossa análise com o cálculo de flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação entre ambos.

## 4.2 Equações de Maxwell

### 4.2.1 A conservação da carga e a equação de continuidade

Nesta seção temos a intenção de discutir a descrição matemática do campo eletromagnético feita com êxito por James Clerk Maxwell (1831-1879), ao construir uma teoria unificada para os fenômenos eletromagnéticos. Segundo Marion [87], o *Treatise on Electricity and Magnetism*, de autoria de Maxwell, foi publicado em 1873, mas as bases do eletromagnetismo por ele unificadas já haviam sido apresentadas em um artigo de 1864,



publicado em 1865. Em sua homenagem, as equações do campo eletromagnético dependente do tempo, que alicerçam sua teoria, foram batizadas de equações de Maxwell. É importante destacar que tais equações são abstrações matemáticas de resultados experimentais, particularmente de alguns trabalhos de Michael Faraday (1791-1867). No entanto, por meio das equações de Maxwell, uma ampla gama de fenômenos podem ser descritos sem nenhuma contradição. Realmente, tem sido comprovado que as mesmas fornecem uma excelente representação do campo eletromagnético clássico. Todavia, seu limite de validade extrapola a Física clássica, sua aplicabilidade tem sido consistente na discussão tanto de efeitos relativísticos quanto de efeitos quânticos. Nossa atenção nesta seção é dirigida apenas à teoria clássica. Vamos apresentar as equações de Maxwell, discutir os potenciais escalar e vetor e analisar o caráter ondulatório do campo eletromagnético. Nossa análise tem como base textos básicos de eletromagnetismo [86, 87].

Em condições estacionárias, a densidade de carga numa dada região permanece constante. Vamos, entretanto, considerar o caso em que a densidade de carga varia em função do tempo, isto é,  $\rho = \rho(t)$ . Faraday, em 1843, comprovou experimentalmente que a quantidade de carga elétrica num sistema fechado, na média, é constante. Logo, se determinada quantidade média de carga elétrica em certa região do espaço diminuir com o tempo, isto implica que esta quantidade de carga elétrica fluiu para outra região. Este transporte de carga é o que chamamos de corrente elétrica. A quantidade de carga elétrica média que atravessa uma unidade de área na unidade de tempo é definida como a densidade de corrente  $\vec{J}$ . A corrente elétrica total que flui através de uma superfície  $S$  é, então,

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} da, \quad (4.1)$$

sendo que  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal dirigido para o exterior da superfície e  $da$  um elemento infinitesimal da superfície  $S$ . Definiremos que a corrente elétrica total será positiva para o fluxo gerado para o exterior da superfície a partir de uma carga positiva. Se, numa dada superfície fechada, houver um fluxo de corrente para o exterior, então a carga contida num certo volume contornado por essa superfície deve diminuir. Logo,

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} da = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv. \quad (4.2)$$

Se a superfície  $S$  for mantida fixa no espaço, a variação com o tempo da integral de volume deve ser devida apenas à variação de  $\rho$  com respeito ao tempo. Assim, a expressão anterior toma a forma

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} da = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (4.3)$$

Fazendo uso do teorema da divergência

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} da = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv. \quad (4.4)$$

obteremos o seguinte

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (4.5)$$

e, como o volume  $V$  é arbitrário, teremos afinal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.6)$$

Esta é a conhecida equação de continuidade. Ela é uma consequência da conservação da carga elétrica, a qual se trata de um fato experimentalmente comprovado.

## 4.2.2 Indução eletromagnética

As primeiras observações qualitativas relacionando campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo foram relatadas por Faraday em 1831. Em seus experimentos sobre o comportamento de correntes em circuitos dispostos em regiões contendo campos magnéticos variando com o tempo, ele observou que uma corrente transiente seria introduzida num circuito se:

1. O fluxo estacionário de corrente em um circuito adjacente fosse ligado ou desligado;
2. O circuito adjacente com um fluxo estacionário de corrente fosse movido em relação ao primeiro circuito;
3. Um ímã permanente fosse deslocado nas vizinhanças do circuito<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Na época, Faraday utilizou duas bobinas em suas experiências, conforme descrito no capítulo 10 da referência [88]

Estes resultados de Faraday estabelecem a ligação entre os fenômenos elétricos e magnéticos, conhecida hoje por lei de Faraday, a qual pode ser enunciada como segue: a força eletromotriz  $fem$  induzida em um circuito,  $E$ , é proporcional à taxa de variação com respeito ao tempo do fluxo magnético do circuito,  $\Phi$ . Marion [87] defende que a indução magnética teria sido de fato descoberta inicialmente por um físico norte-americano chamado Joseph Henry (1797-1878). Entretanto, como ele mesmo cita, os resultados deste último só foram publicados depois daqueles de Faraday. A publicação de Henry só ocorreu em 1832. A lei de Faraday é expressa na forma

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.7)$$

O sinal negativo na expressão acima representa o “sentido” da  $fem$  induzida quando “comparado” ao sentido original arbitrariamente escolhido. Este aspecto, introduzido em 1834 pelo físico alemão Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865), é conhecido como lei de Lenz: a  $fem$  induzida (e, conseqüentemente, a corrente induzida) tem sentido oposto ao da variação que a produziu. Por definição, o fluxo do vetor indução magnética  $\vec{B}$  através de uma superfície aberta  $S$  é dado por

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} da, \quad (4.8)$$

e a força eletromotriz induzida à curva fechada  $\Gamma$ , por

$$E = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (4.9)$$

sendo  $\vec{E}$  o campo elétrico e  $d\vec{l}$  um elemento de comprimento da curva fechada  $\Gamma$ . Considerando que a taxa de variação do fluxo em relação ao tempo resulte da variação de  $\vec{B}$  com respeito ao tempo, poderemos escrever, a partir da substituição das equações (4.8) e (4.9) na equação (4.7) que

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} da. \quad (4.10)$$

A integral de linha na equação acima pode ser transformada numa integral de superfície por meio da aplicação do teorema de Stokes:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} da. \quad (4.11)$$

Desse modo, a equação (4.10) fica

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} da = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} da. \quad (4.12)$$

Uma vez que a superfície  $S$  é arbitrária, a expressão acima nos leva a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.13)$$

que é a forma diferencial da lei de Faraday.

### 4.2.3 A modificação introduzida por Maxwell na lei de Ampère

Andrè-Marie Ampère (1775-1836) estabeleceu que, em condições estacionárias,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}. \quad (4.14)$$

Maxwell observou que essa lei continha uma inconsistência. Se tomarmos o divergente da equação anterior, teremos o seguinte

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \quad (4.15)$$

Mas, como o lado esquerdo da equação acima é nulo, necessariamente teríamos de ter  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Ora, isto implicaria em que o fluxo total de corrente para o exterior de qualquer superfície fechada também seria nulo. Mas, da equação de continuidade (4.6), oriunda da comprovação experimental da conservação da carga elétrica, sabemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.16)$$

Logo, a equação (4.14) só é válida para condições estacionárias. Ela é insuficiente para o caso de campos dependentes do tempo. Diante da situação exposta acima, Maxwell propôs que se deveria adicionar um termo à equação (4.14) que viesse a contemplar as condições de variação temporal. Ele escreveu suas equações em unidades Gaussianas realizando uma substituição que é análoga à seguinte em unidades do Sistema Internacional

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Maxwell introduziu a chamada corrente de deslocamento  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , na qual  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  é o vetor deslocamento elétrico,  $\vec{E}$  o campo elétrico e  $\vec{P}$  a polarização. Ele utilizou esse termo (corrente de deslocamento), em 1861, por acreditar que os efeitos associados ao mesmo fossem inteiramente deslocamentos físicos. Embora as teorias da mecânica no decorrer do tempo tenham sido modificadas, esta terminologia, ainda que imprópria, permanece até hoje. Assim, a lei de Ampère modificada por Maxwell ficou na seguinte forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}). \quad (4.18)$$

A substituição feita acima elimina a dificuldade descoberta por Maxwell, pois  $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$  implica na equação de continuidade, posto que a lei de Gauss vai nos permitir notar que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ . Desse modo, podemos concluir que a equação (4.18) tem consistência com a comprovação experimental.

#### 4.2.4 A forma geral das equações de Maxwell

As equações (4.13) e (4.18) ao lado da lei de Gauss formam um tripé de equações válidas para campos dependentes do tempo. Vamos agora analisar duas equações fundamentais para os vetores deslocamento elétrico  $\vec{D}$  e indução magnética  $\vec{B}$  na situação em que os mesmos estejam variando com respeito ao tempo. Começaremos nossa análise aplicando a divergência à equação (4.13). Assim, teremos o seguinte

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (4.19)$$

Uma vez que o divergente do rotacional de qualquer vetor é nulo, a equação acima fica resumida a  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0$ . Se assumirmos que todas as derivadas de  $B$  sejam contínuas, poderemos inverter a ordem das derivadas com respeito ao espaço e ao tempo. Com isto, teremos que  $\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}{\partial t} = 0$ , ou seja,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$  é constante com o tempo. Se, num dado instante,  $\vec{B} = \vec{0}$ , então a constante de integração será zero. Se assumirmos que o campo originou-se em algum instante de tempo anterior, teremos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.20)$$

Fisicamente esta equação, que constitui uma das equações de Maxwell, estabelece que, mesmo para campos variáveis com respeito ao tempo, não há monopolos magnéticos livres<sup>2</sup>.

Continuaremos nosso objetivo nesta subseção analisando agora a lei de Ampère-Maxwell (4.18). Aplicando a divergência à mesma, teremos que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \quad (4.21)$$

devido ao fato de que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ . Ademais, usando a equação de continuidade (4.6), resulta que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \quad (4.22)$$

ou seja,

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho)}{\partial t} = 0. \quad (4.23)$$

Do mesmo modo que fizemos anteriormente, se, num dado instante,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \rho = 0$ , então a constante de integração será zero. Se assumirmos que o campo originou-se em algum instante de tempo anterior, teremos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (4.24)$$

Devemos observar que o fato de termos  $\rho = 0$  num dado instante não implica em que  $\rho$  será nula para qualquer tempo, uma vez que  $\vec{D}$  é uma quantidade macroscópica. Isto é, um meio pode estar eletricamente neutro se for feita uma média sobre volumes suficientemente pequenos, mas, no entanto, isto não evita que cargas microscópicas que estejam sendo eventualmente separadas possam produzir um campo elétrico. De uma maneira geral, resumimos as quatro equações de Maxwell que descrevem o campo eletromagnético variável no tempo. Elas constituem as equações (4.13), (4.18), (4.20) e (4.24).

---

<sup>2</sup>Uma discussão acerca da questão dos monopolos magnéticos apresentando os argumentos teóricos de Dirac pode ser apreciada na referência [86].

## 4.3 Funções potenciais do campo eletromagnético e o gauge de Coulomb

### 4.3.1 Meio homogêneo, linear e isotrópico

O trabalho desenvolvido neste capítulo terá como meta a descrição quântica da luz propagando-se num meio homogêneo isotrópico condutor linear com densidade de carga nula. O fato de ser meio homogêneo, linear e isotrópico significa que as propriedades elétricas do dielétrico são independentes da direção do campo elétrico  $\vec{E}$ . Como qualquer direção é completamente equivalente a outra, o vetor polarização  $\vec{P}$  deve ser necessariamente paralelo a  $\vec{E}$  de sorte que o vetor deslocamento elétrico  $\vec{D}$  satisfaz a relação

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad (4.25)$$

onde  $\epsilon_0$ ,  $\chi_e$  e  $\epsilon$  representam, respectivamente, a permissividade elétrica no vácuo, a suscetibilidade elétrica e a permissividade elétrica absoluta. De maneira similar, sendo  $\mu_0$ ,  $\chi_m$  e  $\mu$ , respectivamente, a permeabilidade magnética no vácuo, a suscetibilidade magnética e a permeabilidade magnética absoluta, num meio homogêneo, linear e isotrópico, a magnetização ( $\vec{M}$ ) é proporcional e paralela ao campo magnético  $\vec{H}$ , de sorte que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \chi_m \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (4.26)$$

### 4.3.2 As funções potenciais do campo eletromagnético

As equações de Maxwell apresentam-se na forma de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Elas podem ser dispostas numa forma mais conveniente por intermédio da introdução de funções potenciais vetor e escalar. Assim, poderemos agrupar algumas das equações e obter um número menor de equações (no caso, duas) de segunda ordem. Começaremos a partir da equação (4.20). Dela, podemos concluir que  $\vec{B}$  é o rotacional de algum vetor que definiremos como o potencial vetor  $\vec{A}$ . Logo, podemos escrever que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (4.27)$$

indica que, conhecido o potencial vetor  $\vec{A}$ , uma das equações de Maxwell já estará resolvida. Substituindo a equação acima na equação de Maxwell (4.13), teremos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (4.28)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.29)$$

O resultado acima significa que a quantidade  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  é um vetor cujo rotacional é zero. Logo, a mesma pode ser escrita como o gradiente de uma função escalar, o potencial escalar  $V$ . Por uma questão de conveniência, escreveremos o gradiente com um sinal negativo

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V \quad (4.30)$$

ou

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.31)$$

Neste ponto, destacamos que já temos uma segunda equação de Maxwell a partir do conhecimento dos potenciais  $V$  e  $\vec{A}$ . Notemos ainda que as equações de Maxwell não se alteram se, ao invés de tomarmos como potenciais  $V$  e  $\vec{A}$ , escolhermos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\xi \quad (4.32)$$

e

$$V' = V - \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Dizemos então que os potenciais de campo  $V$  e  $\vec{A}$  são invariantes por transformação de gauge. Devido à arbitrariedade na escolha do gauge, podemos escolher livremente condições iniciais para o potencial vetor  $\vec{A}$ . Particularmente, escolheremos **o gauge de Coulomb** para a descrição feita nas seções seguintes deste capítulo, uma vez que tal escolha demonstra ser conveniente para problemas de óptica quântica [11, 78, 84]. Sendo  $\mu$  e  $\sigma$ , respectivamente, a permeabilidade magnética absoluta e a condutividade elétrica de um meio homogêneo, linear e isotrópico, o gauge de Coulomb será expresso pela seguinte relação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu\sigma V. \quad (4.34)$$



Em meios não condutores, esta condição ficaria reduzida a apenas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.35)$$

Pretendemos encontrar uma equação de onda para o potencial vetor  $\vec{A}$ . Para tal, vamos aplicar o rotacional à equação que o define (4.27). Teremos, então, o seguinte

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}. \quad (4.36)$$

Substituindo nesta última expressão a equação (4.18) com a substituição  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  (equação (4.25)) e, usando a condição de gauge (4.34), teremos que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu\sigma \vec{\nabla} V = -\mu(\vec{J}_t - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}), \quad (4.37)$$

com  $\vec{J}_t$  representando a componente transversal da densidade de corrente. Isto é uma condição imposta pela escolha do gauge de Coulomb, no qual tanto  $\vec{E}$  quanto  $\vec{A}$  são transversais à direção de propagação da onda plana na ausência de fontes. Usando o fato de que  $\vec{J}_t = \sigma \vec{E}_t$  e de que, num meio com densidade de carga nula, o gradiente do potencial escalar  $\vec{\nabla} V$  será nulo. A expressão acima ficará na seguinte forma

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu\sigma \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Mas, da equação (4.31), com  $\vec{\nabla} V = 0$ , temos que  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  de sorte que, substituindo isto na equação anterior, finalmente chegamos à equação

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.39)$$

Esta é a representação de uma equação de onda com um termo de amortecimento para o potencial vetor  $\vec{A}$ . Em geral, as quantidades  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  são complexas, mas para condutores pobres e outros materiais em certos ranges de frequência, a saber bem abaixo das frequências de ressonância, os mesmos são reais [86, 93]. Aqui, consideraremos apenas esses materiais, de modo a garantir que nosso Hamiltoniano seja hermitiano.

## 4.4 Hamiltoniano para a luz num meio condutor

Nosso intuito inicialmente nesta seção é resolver a equação (4.39). A primeira hipótese que consideraremos para tal é a de que o campo de radiação está contido numa cavidade com paredes perfeitamente condutoras. Uma vez que o procedimento que será por nós adotado não depende da forma da cavidade vamos assumir que, por uma questão de simplicidade, que a cavidade em estudo seja um cubo de volume total  $v = L^3$ . Após obtermos nossos resultados, caso queiramos estudar o campo de radiação no espaço livre bastará fazermos o limite  $v \rightarrow \infty$ .

A representação do campo por intermédio do potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  é essencialmente uma descrição feita por meio de um conjunto contínuo de variáveis. Logo, se fossemos usar as componentes  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$  do potencial vetor como variáveis para descrever o campo teríamos um número infinito não-enumerável. No entanto, impondo condições de contorno sobre os campos, conforme será exposto na seção 4.5, a solução da equação de onda (4.39) conterà um conjunto discreto infinito de soluções de modos normais ortogonais umas às outras e completas, de modo que qualquer campo arbitrário na cavidade poderá ser expresso como uma soma destes modos normais com amplitudes adequadas. Assim, o uso das amplitudes de cada modo normal como um conjunto discreto infinito, porém enumerável, de "variáveis de campo" aliado às condições de contorno convenientes fornecem um conjunto enumerável de variáveis para a descrição do campo eletromagnético.

Nosso problema agora restringe-se a uma solução da equação (4.39) levando-se em conta a quantização proposta acima. Assim, vamos separar  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  em componentes [11, 78, 84, 89]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r}) q_l(t), \quad (4.40)$$

onde o subscrito  $l$  denota os vários modos de frequência do campo eletromagnético. Desse modo, teremos que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \sum_l \left[ \vec{\nabla}^2 \vec{u}_l(\vec{r}) \right] q_l(t), \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r}) \frac{\partial q_l(t)}{\partial t}, \quad (4.42)$$

e

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \sum_l \vec{u}_l(\vec{r}) \frac{\partial^2 q_l(t)}{\partial t^2}. \quad (4.43)$$

Substituindo estas três últimas equações na equação (4.39), após alguma álgebra e considerando a velocidade da onda no meio como sendo  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , chegaremos às seguintes equações desacopladas:

$$\nabla^2 \vec{u}_l(\vec{r}) + \frac{\omega_l^2}{c^2} \vec{u}_l(\vec{r}) = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{d^2 q_l(t)}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{dq_l(t)}{dt} + \omega_l^2 q_l(t) = 0, \quad (4.45)$$

onde introduzimos a constante de separação  $-\omega_l^2$ , sendo que  $\omega_l$  representa a frequência natural de oscilação de cada modo  $l$  [11, 78, 84, 89].

Devemos destacar que o método de quantização da luz se propagando no espaço livre ou num meio material transparente e isolante,  $\sigma = 0$  na equação (4.45), já está bem determinada e pode ser encontrada nos textos básicos de óptica quântica, como por exemplo a referência [11]. No caso de um termo de amortecimento como é o caso da equação (4.45), utilizando o modelo de oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica usando o gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico pretendemos dar uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula, através de obtenção de funções de onda exatas para este problema em termos de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador harmônico amortecido clássico. Neste momento, é importante chamar a atenção para um outro detalhe: a equação (4.45) pode ser obtida a partir do Hamiltoniano clássico [15, 16, 17, 44, 84]

$$H_l(t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon}t\right) \frac{p_l^2}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\sigma}{\epsilon}t\right) \epsilon \omega_l^2 q_l^2, \quad (4.46)$$

no qual  $p$  representa uma variável definida por  $-\imath\hbar\partial/\partial q$ . Além do mais, as variáveis  $q$  e  $p$  satisfazem a relação de comutação  $[q, p] = \imath\hbar$ . O Hamiltoniano acima é o conhecido Hamiltoniano de Caldirola-Kanai, por nós já utilizado no capítulo anterior. Aqui,  $\sigma$  e  $\epsilon$

representam respectivamente a condutividade e a permissividade elétrica do meio, respectivamente. Ambas são consideradas como reais. Como o subscrito  $l$  corresponde a cada um dos modos de frequência, obteremos o Hamiltoniano total para o campo eletromagnético através da soma dos Hamiltonianos individuais correspondentes a cada um destes modos [11, 78], isto é

$$H = \sum_l H_l \quad (4.47)$$

## 4.5 Luz num meio condutor

Estamos tratando do estudo de uma onda eletromagnética concentrada em certa região do espaço que, por conveniência, escolhemos como sendo uma cavidade cúbica de volume total  $v = L^3$ . Dirigindo nossa atenção inicialmente para a equação (4.44), notamos que o conjunto de funções  $\vec{u}_l(\vec{r})$  deve satisfazer certas condições:

1. De acordo com as equações (4.35) e (4.40), em qualquer posição da cavidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l(r) = 0. \quad (4.48)$$

2. Se exigirmos que, nas paredes da cavidade, as componentes tangencial de  $\vec{E}$  e normal de  $\vec{B}$  sejam nulas, obteremos soluções do tipo onda plana. Teremos então, das equações (4.27) e (4.40), que

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_{l,per}(r) = 0 \quad (4.49)$$

e, da equação (4.31), com  $\vec{\nabla}V = 0$  que

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{u}_{l,tan}(r) = 0. \quad (4.50)$$

Assim, as soluções da equação (4.44), satisfazendo às condições de contorno acima, formam um conjunto completo ortonormal de modos normais:

$$\int_v \vec{u}_l^*(\vec{r}) \vec{u}_{l'}(\vec{r}) dv = \delta_{ll'}, \quad (4.51)$$

onde  $v$  é o volume da cavidade. Considerando a relação de dispersão  $\vec{\omega}_l = c\vec{k}_l$ , onde  $\vec{k}_l$  é o vetor de onda associado a cada modo  $l$ , a equação (4.44) torna-se

$$\nabla^2 \vec{u}_l(\vec{r}) + k_l^2 \vec{u}_l(\vec{r}) = 0, \quad (4.52)$$

cuja solução na cavidade em questão, cúbica de lado  $L$ , pode ser escrita na forma

$$\vec{u}_{l\nu}(\vec{r}) = L^{-\frac{3}{2}} e^{\pm i\vec{k}_l \cdot \vec{r}} \hat{e}_{l\nu}, \quad (4.53)$$

onde  $\vec{k}_l$  corresponde a dois vetores unitários nas direções de polarização ( $\nu = 1, 2$ ). Devido à condição de transversalidade (4.48), os vetores de polarização  $\hat{e}_{l\nu}$  devem ser perpendiculares ao vetor de onda  $\vec{k}_l$ . A periodicidade no espaço das funções harmônicas (4.53) indica o seguinte

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r} + L\hat{e}_x) = \vec{u}(\vec{r} + L\hat{e}_y) = \vec{u}(\vec{r} + L\hat{e}_z). \quad (4.54)$$

Considerando agora que  $k_l$  é o modulo de  $\vec{k}_l$ , as duas equações anteriores nos permitem escrever o seguinte

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r})e^{iLk_{lx}} = \vec{u}(\vec{r})e^{iLk_{ly}} = \vec{u}(\vec{r})e^{iLk_{lz}}, \quad (4.55)$$

ou seja,

$$k_{lx} = \frac{2\pi}{L}l_1, \quad (4.56)$$

$$k_{ly} = \frac{2\pi}{L}l_2, \quad (4.57)$$

$$k_{lz} = \frac{2\pi}{L}l_3. \quad (4.58)$$

com  $l_1, l_2, l_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Assim,

$$\vec{k}_l = \frac{2\pi}{L}(l_1\hat{e}_x + l_2\hat{e}_y + l_3\hat{e}_z). \quad (4.59)$$

Uma vez que já temos a solução da equação (4.44), vamos obter a solução da equação (4.45), de modo a termos solucionado o problema do potencial vetor (equação (4.40)). A equação (4.45) tem a si associada o seguinte polinômio característico

$$\zeta_l^2 + \frac{\sigma}{\epsilon}\zeta_l + \omega_l^2 = 0. \quad (4.60)$$

São de nosso interesse apenas as soluções reais, ou seja, aquelas para as quais  $\omega_l^2 > \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}$ .

Assim, definindo

$$\Omega_l^2 = \omega_l^2 - \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}, \quad (4.61)$$

teremos as seguintes soluções periódicas

$$\zeta_l = \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon} \pm i\Omega_l\right)t \quad (4.62)$$

e, conseqüentemente, a solução da equação (4.45) é dada por

$$q_l(t) = a_l \exp\left(-\frac{\sigma}{2\epsilon}t\right) \sin(\Omega_l t + b_l), \quad (4.63)$$

na qual  $a_l$  e  $b_l$  são constantes de integração. Classicamente, o problema está solucionado: as funções  $\vec{u}_l(\vec{r})$  e  $q_l(t)$  estão completamente especificadas. Assim, para cada operador canônico  $q_l(t)$  e função  $\vec{u}_l(\vec{r})$ , o campo eletromagnético está determinado, posto que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser obtidos pela substituição do operador  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  dado pela equação (4.40) nas equações (4.31) (com  $\nabla V = 0$ ) e (4.27), respectivamente.

## 4.6 Descrição quântica da luz num meio condutor

A descrição quântica da luz, começando por uma descrição clássica, foi feita inicialmente para o caso em que a condutividade  $\sigma$  era nula. Esta quantização do campo eletromagnético no espaço livre pode ser encontrada no capítulo 1 da referência [79], por exemplo. Posteriormente, também foi feita a quantização da luz em meios dielétricos, como pode ser visto, por exemplo, na referência [80]. Nossa intenção neste capítulo é fornecer uma descrição quântica completa da luz se propagando num meio condutor homogêneo, linear e isotrópico. Para alcançar tal intento, devemos resolver a equação de Schrödinger

$$H_l(t)\Psi(q_l(t), t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q_l(t), t), \quad (4.64)$$

na qual  $p_l$  é definido como  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_l}$  e  $[q_l, p_l] = i\hbar$ . Naturalmente,  $H_l$  é o Hamiltoniano dado pela equação (4.46). No intuito de resolver a equação acima, vamos utilizar o método do invariante dinâmico idealizado por Lewis e Riesenfeld (capítulo 2) e já por nós utilizado no

capítulo anterior para estudar a dinâmica quântica de um oscilador harmônico generalizado dependente do tempo. Assim, buscaremos um operador hermitiano não-trivial  $I(t)$  que satisfaça a equação

$$\frac{dI_l}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I_l, H_l] + \frac{\partial I_l}{\partial t} = 0. \quad (4.65)$$

Se tal invariante existir e se ele não contiver operadores com derivadas temporais, a condição (4.65) vai nos permitir construir soluções da equação de Schrödinger (4.64) na seguinte forma

$$\Psi_n(q_l, t) = e^{i\mu_n(t)} \phi_n(q_l, t), \quad (4.66)$$

onde  $\phi_n(q_l, t)$  é uma autofunção de  $I(t)$  com autovalor independente do tempo  $\lambda_n$  e  $\mu_n(t)$  é uma função de fase dada por

$$\hbar \frac{d\mu_n(t)}{dt} = \langle \phi_n | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_l(t)) | \phi_n \rangle. \quad (4.67)$$

Vamos assumir que exista um operador linear invariante da forma

$$I_l(t) = \alpha_l(t)q_l + \beta_l(t)p_l + \gamma_l(t), \quad (4.68)$$

onde  $\alpha_l(t)$ ,  $\beta_l(t)$  e  $\gamma_l(t)$  são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. Desse modo, a equação (4.65) nos leva a

$$\dot{\alpha}_l(t)q_l + \alpha_l(t)\dot{q}_l + \dot{\beta}_l(t)p_l + \beta_l(t)\dot{p}_l + \dot{\gamma}_l(t) = 0. \quad (4.69)$$

Usando o fato de que  $\dot{q}_l = \frac{\partial H_l}{\partial p_l}$  e  $\dot{p}_l = -\frac{\partial H_l}{\partial q_l}$ , a expressão acima fica

$$(\dot{\alpha}_l(t) - \beta_l \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \omega_l^2)q_l + (\dot{\beta}_l(t) - \frac{\alpha_l}{\epsilon} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t})p_l + \dot{\gamma}_l(t) = 0. \quad (4.70)$$

onde utilizamos  $H_l$  dado pela equação (4.46). Assim, exigindo que  $I_l(t)$  satisfaça a equação (4.65), este último resultado (4.70) nos permite escrever que

$$\dot{\alpha}_l(t) = \beta_l(t)\omega_l^2 e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t}, \quad (4.71)$$

$$\dot{\beta}_l(t) = -\frac{\alpha_l(t)}{\epsilon} e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t}, \quad (4.72)$$

$$\dot{\gamma}_l(t) = 0. \quad (4.73)$$

Na solução da equação (4.73), vemos que  $\gamma_l(t)$  é constante. Sem perda de generalidade, faremos  $\gamma_l(t) = 0$ . Assim, nosso problema se restringe a determinar  $\alpha_l(t)$  e  $\beta_l(t)$ . Claro que, uma vez que conheçamos a expressão para  $\beta_l(t)$ ,  $\alpha_l(t)$  ficará completamente determinada a partir da substituição da referida expressão na equação (4.71). No intuito de encontrarmos solução para  $\beta_l(t)$ , vamos derivar a equação (4.72) em relação ao tempo. Teremos então que

$$\ddot{\beta}_l(t) = \left[ -\frac{\alpha_l(t)}{\epsilon} + \frac{\sigma}{\epsilon^2} \alpha_l(t) \right] e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}. \quad (4.74)$$

Substituindo na equação acima  $\dot{\alpha}_l$  dado pela equação (4.71), concluímos que  $\beta(t)$  deve obedecer a seguinte equação

$$\ddot{\beta}_l(t) = -\omega_l^2 \beta_l + \sigma \alpha_l e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}. \quad (4.75)$$

Identificando o último termo à direita na equação (4.75) com  $\frac{\sigma}{\epsilon} \dot{\beta}_l$  (conforme equação (4.72)), percebemos que  $\beta_l(t)$  deve satisfazer à seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{\beta}_l(t) + \frac{\sigma}{\epsilon} \dot{\beta}_l(t) + \omega_l^2 \beta_l(t) = 0. \quad (4.76)$$

Ora, comparando a equação (4.76) com a (4.45), vemos que esta equação descreve a amplitude de um oscilador harmônico clássico amortecido. Sua solução já é por nós conhecida (equação (4.63)). Assim, sendo  $a_l$  e  $b_l$  constantes de integração, e  $\Omega_l$  definida pela equação ((4.61)), a solução da equação (4.76) será dada por

$$\beta_l(t) = a_l \exp\left(-\frac{\sigma}{2\epsilon} t\right) \sin(\Omega_l t + b_l). \quad (4.77)$$

Aqui, destacamos que tomamos apenas as soluções oscilatórias, ou seja, sujeitas à condição de que  $\Omega_l^2 > 0$ . Assim,  $\beta_l(t)$  dada pela equação (4.77) e  $\alpha_l(t)$  pela equação (4.72), nosso operador invariante está completamente determinado. Ele pode ser finalmente escrito na forma

$$I_l(t) = \beta_l(t) p_l - \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\beta}_l(t) q_l. \quad (4.78)$$

Uma vez que nosso operador invariante já foi determinado, passamos para o passo seguinte, que é determinar os autoestados  $|\phi_\lambda\rangle$  de  $I(t)$ . Sabemos, conforme discutimos no capítulo 2



desta tese, que estes autoestados formam um conjunto completo contínuo com autovalores independentes do tempo  $\lambda$  satisfazendo à equação (4.46) e

$$I_l(t) |\phi_\lambda\rangle = \lambda |\phi_\lambda\rangle, \quad (4.79)$$

com a condição

$$\langle \phi_\lambda | \phi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.80)$$

Das equações (4.78) e (4.79), podemos concluir que

$$\left[ i\hbar\beta_l(t) \frac{\partial}{\partial q_l} + \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t) q_l + \lambda \right] |\phi_\lambda\rangle = 0. \quad (4.81)$$

Nesta última equação, usamos a definição  $p_l = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_l}$ . A equação (4.81) pode ser resolvida facilmente. Teremos então que

$$\frac{\partial}{\partial q_l} |\phi_\lambda\rangle = \frac{i}{\hbar\beta_l(t)} \left[ \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t) q_l + \lambda \right] |\phi_\lambda\rangle, \quad (4.82)$$

resultando em

$$|\phi_\lambda\rangle = C \exp \left\{ \frac{i}{\hbar\beta_l(t)} \left[ \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t)}{2} q_l^2 + \lambda q_l \right] \right\}, \quad (4.83)$$

na qual  $C$  é uma constante de integração a ser determinada pela equação (4.80). É fácil verificar, então, que a constante de integração  $C$  é

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_l\hbar}}, \quad (4.84)$$

de modo que as soluções da equação (4.79) serão dadas pela seguinte expressão

$$\phi_\lambda(q_l, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t)}{2\hbar\beta_l(t)} q_l^2 + \frac{i\lambda}{\hbar\beta_l(t)} q_l \right\}. \quad (4.85)$$

Para termos uma determinação completa da função de onda precisamos conhecer também as funções de fase. Por este motivo, procederemos ao cálculo das mesmas. Vamos inicialmente determinar  $\langle \phi_\lambda(q_l, t) | H_l | \phi_\lambda(q_l, t) \rangle$  com  $H_l$  dado pela equação (4.46) e  $|\phi_\lambda\rangle$  pela equação (4.85). Para facilitar nosso procedimento, derivamos com relação a  $q_l$  a equação (4.82). Obteremos

$$\frac{\partial^2 \phi_\lambda}{\partial q_l^2} = \left\{ \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l}{\hbar\beta_l} - \left[ \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l q_l + \lambda}{\hbar\beta_l} \right]^2 \right\} \phi_\lambda. \quad (4.86)$$

Um cálculo um pouco longo, porém direto, nos leva a concluir que

$$\left\langle \phi_\lambda(q_l, t) \left| \frac{e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t} p_l^2}{2\epsilon} \right| \phi_\lambda(q_l, t) \right\rangle = -\frac{i\hbar\dot{\beta}_l}{2\beta_l} + \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2} \left[ \frac{\dot{\beta}_l}{\beta_l} q_l + \frac{\lambda e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{\epsilon\beta_l} \right]^2, \quad (4.87)$$

e, como

$$\left\langle \phi_\lambda(q_l, t) \left| \frac{1}{2} \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \omega_l^2 q_l^2 \right| \phi_\lambda(q_l, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \omega_l^2 q_l^2, \quad (4.88)$$

teremos então, a partir das equações (4.87) e (4.88), nosso primeiro resultado para o cálculo das funções de fase:

$$\langle \phi_\lambda(q_l, t) | H_l | \phi_\lambda(q_l, t) \rangle = -\frac{i\hbar\dot{\beta}_l}{2\beta_l} + \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2} \left\{ \omega_l^2 q_l^2 + \left[ \frac{\dot{\beta}_l}{\beta_l} q_l + \frac{\lambda e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{\epsilon\beta_l} \right]^2 \right\}. \quad (4.89)$$

Agora, procederemos à segunda parte do cálculo referente à determinação das funções de onda. Vamos calcular a derivada de  $|\phi_\lambda(q_l, t)\rangle$  com relação ao tempo. Teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\phi_\lambda(q_l, t)\rangle &= \left\{ -\frac{\dot{\beta}_l}{2\beta_l} + \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar} \left( \frac{\dot{\beta}_l q_l}{\beta_l} \right)^2 + \frac{i\lambda^2 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{\hbar\epsilon\beta_l^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\lambda\dot{\beta}_l q_l}{\hbar\beta_l^2} + \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} q_l^2}{2\hbar\beta_l} (\ddot{\beta}_l + \frac{\sigma}{\epsilon}\dot{\beta}_l) \right\} |\phi_\lambda(q_l, t)\rangle. \end{aligned} \quad (4.90)$$

No termo final do lado direito da equação (4.90) usaremos a equação (4.76). Feito isto, após alguma álgebra, teremos o nosso segundo resultado para o cálculo das funções de fase

$$\left\langle \phi_\lambda(q_l, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right| \phi_\lambda(q_l, t) \right\rangle = -\frac{i\hbar\dot{\beta}_l}{2\beta_l} + \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2} \left\{ \omega_l^2 q_l^2 + \left[ \frac{\dot{\beta}_l}{\beta_l} q_l + \frac{\lambda e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{\epsilon\beta_l} \right]^2 \right\} - \frac{\lambda^2 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\epsilon\beta_l^2}. \quad (4.91)$$

Finalmente, dos resultados dados pelas equações (4.89) e (4.91), temos que

$$\left\langle \phi_\lambda(q_l, t) \left| \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_l \right) \right| \phi_\lambda(q_l, t) \right\rangle = -\frac{\lambda^2 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\epsilon\beta_l^2}. \quad (4.92)$$

Logo, da equação (2.77), concluímos que as funções de fase procuradas por nós são dadas pela seguinte equação

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{\lambda^2}{2\hbar\epsilon} \int_0^t \frac{e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}\tau}}{\beta_l^2(\tau)} d\tau. \quad (4.93)$$

Assim, as soluções da equação de Schrödinger (4.64) são dadas por

$$\Psi_\lambda(q_l, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta_l(t)}} \exp \left\{ i\mu_\lambda(t) + \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t)}{2\hbar\beta_l(t)} q_l^2 + \frac{i\lambda}{\hbar\beta_l(t)} q_l \right\}. \quad (4.94)$$

com  $\mu_\lambda(t)$  dadas pela equação (4.93). Neste ponto, devemos destacar que, quando  $\beta(t)$  for nula, as funções de fase  $\mu_\lambda(t)$  divergirão. Apesar desta divergência, já mostramos na seção 3.2 que as funções de onda serão sempre finitas.

## 4.7 Pacotes de onda Gaussianos, correlações e flutuações

### 4.7.1 Pacotes de onda Gaussianos

Encontrada a solução da equação de Schrödinger (4.64) dada pela equação (4.94), uma construção importante a ser feita é a de soluções do tipo pacotes de onda Gaussianos referentes à equação (4.64). No intuito de realizar este procedimento, o primeiro passo que tomaremos será o de escrever nossa função peso  $g(\lambda)$  na forma seguinte

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{a^2}{4}\lambda^2\right), \quad (4.95)$$

na qual  $a$  representa uma constante real positiva. Também podemos escrever a evolução de um estado geral de Schrödinger na forma

$$\Psi(q_l, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \Psi_\lambda(q_l, t) d\lambda, \quad (4.96)$$

onde  $g(\lambda)$  é uma função peso. Assim, vamos inserir a função peso dada pela equação (4.95) e as soluções da equação de Schrödinger (4.64) dadas pela equação (4.94) na equação (4.96).

Daí, segue que calcularemos a seguinte integral em  $\lambda$

$$\begin{aligned} \Psi(q_l, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{a^2}{4}\lambda^2\right) \right] \\ & \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta_l(t)}} \exp \left\{ i\mu_\lambda(t) + \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}_l(t)}{2\hbar\beta_l(t)} q_l^2 \right. \\ & \left. + \frac{i\lambda}{\hbar\beta_l(t)} q_l \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Como a integral a ser resolvida é em relação a  $\lambda$ , escreveremos a equação (4.93) na forma

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{\lambda^2}{2\hbar} f_l(t). \quad (4.98)$$

onde definimos

$$f_l(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \frac{e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}\tau}}{\beta_l^2(\tau)} d\tau. \quad (4.99)$$

Definiremos também algumas funções do tempo:

$$B(t) = \frac{1}{\left\{ [\beta(t)\hbar a]^2 \left[ 1 + \left( \frac{2f_l(t)}{\hbar a^2} \right)^2 \right] \right\}} \quad (4.100)$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2f_l(t)}{\hbar a^2} \right) \quad (4.101)$$

e

$$C_2(t) = \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} - \frac{2f_l(t)}{\beta^2\hbar^3 a^4} \frac{1}{1 + \frac{4f_l^2(t)}{\hbar a^4}}. \quad (4.102)$$

Com as definições acima, equações (4.100) a (4.102), podemos apresentar o resultado da integral (4.97) numa forma compacta, que é a seguinte

$$\Psi(q_l, t) = \left( \frac{2B(t)}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ i [C_1(t) + C_2(t)q_l^2] \right\} \exp(-B(t)q_l^2). \quad (4.103)$$

Além do exposto acima, podemos observar que a densidade de probabilidade dependente do tempo associada a este pacote Gaussiano é também Gaussiano para um tempo qualquer

$$\rho(q_l, t) = |\Psi(q_l, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_l(t)} e^{-\frac{q_l^2}{\sigma_l^2(t)}}, \quad (4.104)$$

com largura dependente do tempo dada por

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2 a^2 \beta_l^2(t)}{2} \left( 1 + \frac{4f_l^2(t)}{\hbar^2 a^4} \right)}. \quad (4.105)$$

Vemos que o centro do pacote permanece em  $\langle q \rangle = 0$ , enquanto sua largura varia no tempo, como é esperado para um comportamento oscilatório [90, 91, 92]. Podemos verificar também que a função de onda (4.103) é normalizada e a densidade de probabilidade dependente do tempo é conservada

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(q, t)|^2 dq = 1. \quad (4.106)$$

## 4.7.2 Correlações e flutuações quânticas

Como temos interesse no cálculo de flutuações e correlações quânticas, necessitamos calcular alguns valores esperados. Como, por definição,

$$\langle q_l \rangle = \int \psi^*(q_l, t) q_l \psi(q_l, t) dq_l. \quad (4.107)$$

Substituindo  $\psi(q_l, t)$  dada pela equação (4.103) na integral acima, teremos que

$$\langle q_l \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int q_l e^{-2Bq_l^2} dq_l = 0, \quad (4.108)$$

conforme era esperado. Da mesma forma, podemos calcular  $\langle q_l^2 \rangle$  por intermédio da equação

$$\langle q_l^2 \rangle = \int \psi^*(q_l, t) q_l^2 \psi(q_l, t) dq_l, \quad (4.109)$$

que resulta na seguinte integral

$$\langle q_l^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int q_l^2 e^{-2Bq_l^2} dq_l = \frac{1}{4B}. \quad (4.110)$$

Igualmente, podemos calcular os valores esperados de  $p_l$  e  $p_l^2$ . Só que, neste caso, devemos usar a substituição  $p_l = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_l}$ . Teremos então que

$$\langle p_l \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int 2\hbar (C_1(t) - iB(t)) q_l e^{-2Bq_l^2} dq_l = 0. \quad (4.111)$$

Finalmente, podemos calcular

$$\langle p_l^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_2q_l^2+C_1)} e^{-Bq_l^2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q_l^2}\right) e^{i(C_2q_l^2+C_1)} e^{-Bq_l^2} dq_l. \quad (4.112)$$

O resultado da integral acima é dado pela equação a seguir:

$$\langle p_l^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{B} (C_1^2 + B^2). \quad (4.113)$$

Das equações (4.108), (4.110), (4.111) e (4.113), podemos agora obter as flutuações quânticas, tanto da coordenada como do momento. Após alguma álgebra, chegamos ao seguinte resultado

$$\Delta q_l = \sqrt{\langle q_l^2 \rangle - \langle q_l \rangle^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_l(t)}}, \quad (4.114)$$

$$\Delta p_l = \sqrt{\langle p_l^2 \rangle - \langle p_l \rangle^2} = \hbar \sqrt{\frac{x_l^2(t) + y_l^2(t)}{x_l(t)}}. \quad (4.115)$$

onde  $x_l(t)$  e  $y_l(t)$  são dados por

$$x_l(t) = \frac{1}{(\hbar a \beta_l(t))^2 \left(1 + \frac{4f_l^2(t)}{\hbar^2 a^4}\right)}, \quad (4.116)$$

$$y_l(t) = \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\beta}_l(t)}{2\hbar \beta_l(t)} + \frac{2f_l(t)}{\hbar^3 a^4 \beta_l^2(t) \left(1 + \frac{4f_l^2(t)}{\hbar^2 a^4}\right)}. \quad (4.117)$$

Desse modo, o produto da incerteza será da forma

$$\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_l}{x_l}\right)^2}. \quad (4.118)$$

Este produto atinge seu valor mínimo  $\frac{\hbar}{2}$  para um dado instante de tempo  $\tau$  quando  $y_l(\tau) = 0$ , ou seja,

$$\dot{\beta}_l(\tau) = -\frac{4f_l(\tau)e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}\tau}}{\epsilon\beta_l(\tau)[\hbar^2 a^4 + 4f_l^2(\tau)]}. \quad (4.119)$$

Assim, se começarmos com um pacote de incerteza mínima,  $\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2}$  para  $\tau = 0$ , então a condição acima obviamente fica reduzida ao seguinte:  $\dot{\beta}_l(0) = 0$  (notemos que, por definição,  $f_l(0) = 0$ ). Ademais,  $\beta_l(0)$  relaciona-se à largura inicial do pacote de ondas Gaussiano. Isto pode ser visto a partir das equações (4.104) e (4.105). Assim, as condições iniciais necessárias para resolver a equação (4.76) estão afinal completamente estabelecidas. A seguir, calcularemos as correlações quânticas para cada um dos modos do campo quantizado. Elas são definidas como segue [75]

$$C_{1,1} = \frac{1}{2} \langle \{ (q_l - \langle q_l \rangle), (p_l - \langle p_l \rangle) \}_+ \rangle \quad (4.120)$$

onde  $\{ , \}_+$  representa o anti-comutador. Então, assim, usando as equações (4.103) e (4.120), encontraremos as correlações quânticas

$$C_{1,1} = \frac{\hbar}{2} \frac{y_l}{x_l} \quad (4.121)$$

Da expressão acima, podemos ver que, sempre que o estado inicial for descorrelacionado, as correlações quânticas se desenvolvem com o passar do tempo. O aparecimento de correlações vem acompanhando o crescimento na incerteza. De fato, a equação (4.118) pode ser reescrita como

$$\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4C_{1,1}^2}{\hbar^2}}, \quad (4.122)$$

o que implica claramente no fato da incerteza ser mínima para uma correlação nula. E, vice-versa, sempre que a incerteza for mínima, a correlação será nula. Concluindo esta seção, destacamos que a ausência de correlação no produto da incerteza mínima já era esperado, uma vez que qualquer possível correlação existente criaria um vínculo na minimização do referido produto e, assim, este não atingiria seu valor mínimo [76]. De fato, o produto generalizado da incerteza é dado por [77]

$$(\Delta q_l)^2 (\Delta p_l)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [q_l, p_l] \rangle|^2 + C_{1,1}^2. \quad (4.123)$$

Assim, nosso resultado não apenas concorda com a expressão acima como também mostra que, para um pacote Gaussiano, este produto generalizado da incerteza atinge seu menor valor.

## 4.8 Considerações finais

Neste capítulo, nossa contribuição foi a investigação do problema propagação da luz quantizada através de um meio condutor homogêneo com densidade de carga nula. Trabalhamos no gauge de Coulomb considerando nosso campo eletromagnético como estando confinado numa cavidade de forma cúbica de lado  $L$ , permeada por um meio condutor. Consideramos também que o campo estava submetido a condições de contorno periódicas. Reduzimos então este problema àquele de um oscilador harmônico dependente de tempo, descrito pelo Hamiltoniano de Caldirola-Kanai. Também, usamos invariantes lineares e o método do invariante dinâmico para encontrar as funções de onda de Schrödinger para o nosso problema em termos de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador amortecido clássico, cujas densidade de probabilidade, correlações e flutuações quânticas e o produto da incerteza foram determinadas em função das soluções da equação (4.76). Também diagonalizamos o operador invariante linear e vimos que nossa função de onda permite construir soluções do tipo pacotes de onda Gaussianos. Vale lembrar que pacotes de onda Gaussianos são muito comuns e os valores esperados de quantidades físicas nestes estados são, em princípio, facilmente calculáveis.

Um ponto que precisa ser destacado aqui é que, num tratamento de maior rigor, podemos argüir que tanto a permissividade elétrica quanto a susceptibilidade magnética deveriam ser funções complexas da frequência. Segundo Landau *et al.*, no cap. IX da referência [93], a permissividade elétrica, por exemplo, pode ser dada por

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (4.124)$$

na qual  $f(\tau)$  é uma função do tempo e das propriedades do meio. No entanto, conforme Landau *et al.* afirmam, existem substâncias, denominadas de condutores "pobres", para as quais a permissividade e a condutividade podem ser vistas como constantes (reais). Num range de frequências angulares  $\omega$  da ordem de  $4\pi\sigma/\epsilon$ , o corpo se comporta como um condutor comum com condutividade  $\sigma$ . A respeito disso, J. D. Jackson, nas páginas 284-285 da referência [86], diz ainda que há outros materiais para os quais, em certos intervalos de frequência (abaixo das frequências de ressonância), podemos considerar tanto a permissividade elétrica quanto a susceptibilidade magnética como constantes reais. O fato das quantidades  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  serem reais para os materiais por nós considerados garante que nosso Hamiltoniano seja hermitiano.

Aqui, destacamos também que, segundo Glauber e Lewenstein [80], o problema do estudo da eletrodinâmica quântica na presença de dielétricos lineares tem sido largamente estudado resultando no desenvolvimento de vários conceitos, dentre eles o de permitir considerarmos matéria com permissividade elétrica real.

Uma aplicação do modelo aqui estudado tem como exemplo, em Física de partículas, o estudo de partículas com instabilidade de massa, que exibem um comportamento de dependência temporal em relação à mesma. Em colisões núcleo-núcleo, no restabelecimento da simetria quiral é necessário levar em conta os efeitos da variação da massa com o tempo [94]. Finalmente, esperamos que o tratamento desenvolvido neste capítulo possa ser útil ao estudo de outros problemas que venham a envolver propagação da luz em meios com condutividade.



# Capítulo 5

## Quantização do campo eletromagnético em meio condutor

### 5.1 Determinação do operador invariante quadrático

No capítulo anterior, utilizamos o modelo do oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica usando o gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico para dar uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula [95]. O presente capítulo nada mais é do que uma extensão do mesmo. Acompanhando o método desenvolvido no capítulo anterior, vamos estender nossa investigação só que agora utilizando um operador invariante quadrático. Encontraremos as funções de onda exatas para a equação de Schrödinger para a luz num meio condutor com frequência dependente do tempo e um termo crescente exponencialmente com  $\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}$ . No entanto, haverá uma diferença neste capítulo em relação ao anterior. No presente capítulo, utilizaremos o método de transformações unitárias e também construiremos estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo. Nosso modelo adotará um Hamiltoniano individual para cada modo de frequência  $l$ . O Hamiltoniano será dado pela equação (4.46). Como o subscrito  $l$  corresponde a cada um dos modos de frequência, obteremos o Hamiltoniano total para o campo

eletromagnético através da equação (4.47). Nossa intenção neste capítulo é fornecer uma descrição quântica completa da luz se propagando num meio condutor homogêneo, linear e isotrópico, utilizando um operador invariante quadrático. Para alcançar tal intento, devemos resolver a equação de Schrödinger (4.64). Naturalmente,  $H_l$  é o Hamiltoniano dado pela equação (4.46). No intuito de resolver a equação acima, utilizando o método do invariante dinâmico, passaremos a buscar um operador quadrático hermitiano não-trivial  $I(t)$  que satisfaça a equação (4.65). Se tal invariante existir e se ele não contiver operadores com derivadas temporais, a condição (4.65) vai nos permitir construir soluções da equação de Schrödinger (4.64) na forma da equação (4.66), com uma função de fase dada pela equação (4.67). Nosso primeiro passo agora será tentarmos encontrar um operador Hermitiano  $I(t)$  que obedeça à equação (4.65). Assim, seguindo o método do invariante dinâmico, vamos assumir a existência do nosso operador linear invariante  $I_l(t)$  e que o mesmo se apresenta na forma

$$I_l = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} \right) q_l^2 + (\rho p_l - \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho} q_l)^2 \right], \quad (5.1)$$

onde  $\rho = \rho(t)$  é uma função real dependente do tempo sujeita à condição de vínculo

$$\ddot{\rho} + \frac{\sigma}{\epsilon} \dot{\rho} + \omega_l^2 \rho = \frac{1}{\epsilon^2 e^{\frac{2\sigma}{\epsilon} t} \rho^3}. \quad (5.2)$$

Já mostramos na seção 4.4 desta tese, (4.45), que teremos a seguinte equação para  $q_l$

$$\frac{d^2 q_l(t)}{dt^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{dq_l(t)}{dt} + \omega_l^2 q_l(t) = 0. \quad (5.3)$$

## 5.2 Funções de onda de Schrödinger

No intuito de determinar as funções de onda do oscilador harmônico dependente do tempo descrito pelo Hamiltoniano dado pela equação (4.46), devemos inicialmente reescrever nosso operador invariante  $I_l(t)$  dado pela equação (5.1) na forma

$$I_l = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} \right) q_l^2 + (\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho} q_l)^2 + \rho^2 p_l^2 \right] - \frac{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho \dot{\rho}}{2} \{p_l, q_l\}_+, \quad (5.4)$$

que, com a substituição  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$  fica na forma

$$I_l = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} + (\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t})^2 \dot{\rho}^2 \right) q_l^2 - \hbar^2 \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + i\hbar \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho \dot{\rho} \left( 1 + 2q_l \frac{\partial}{\partial q_l} \right) \right]. \quad (5.5)$$

Vamos ainda reescrever a equação (5.5) numa forma que será mais útil às nossas pretensões. Assim, nosso operador invariante  $I_l(t)$  será utilizado na forma

$$I_l = i\hbar\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho \dot{\rho} \left\{ \frac{1}{2} + q_l \frac{\partial}{\partial q_l} - \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{2\hbar\rho} q_l^2 + \frac{1}{2i\hbar\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^3 \dot{\rho}} q_l^2 - \frac{\hbar\rho}{2i\dot{\rho}\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}} \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} \right\}. \quad (5.6)$$

Queremos encontrar as autofunções  $\Phi_n(q_l, t)$  que solucionam o problema dado pela equação (4.64). Para isto, utilizaremos uma transformação unitária. Definiremos o seguinte operador unitário para nossos propósitos

$$U = \exp\left(-\frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{2\hbar\rho} q_l^2\right). \quad (5.7)$$

Assim, faremos a transformação

$$\Phi'_n(q_l, t) = U\Phi_n(q_l, t), \quad (5.8)$$

com  $U$  dado pela equação (5.7). Devemos observar que a transformação unitária (5.8) vai nos permitir reescrever nossa equação de autovalores como

$$I'\Phi'_n(q_l, t) = \lambda_n\Phi'_n(q_l, t), \quad (5.9)$$

onde agora usaremos

$$I'\Phi'_n(q_l, t) = UIU^\dagger\Phi'_n(q_l, t). \quad (5.10)$$

Precisamos então encontrar a forma do operador  $I'$ . Para procedermos tal cálculo, vamos inicialmente registrar alguns resultados que nos serão úteis:

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} = \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{\hbar\rho} q_l U^\dagger, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q_l^2} = \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{\hbar\rho} U^\dagger - \left(\frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{\hbar\rho}\right)^2 q_l^2 U^\dagger, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l} = \frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l}, \quad (5.13)$$

$$U \frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l} = U \frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} \Phi'_n + \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l}. \quad (5.14)$$

Substituindo a equação (5.11) na equação (5.14), poderemos escrever que

$$U q_l \frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l} = \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho}}{\hbar\rho} q_l^2 \Phi'_n + q_l \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l}. \quad (5.15)$$

Agora, usando a equação (5.13), encontramos que

$$\frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l^2} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left[ \frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l} \right], \quad (5.16)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l^2} = \frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q_l^2} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q_l^2} + 2 \frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l}, \quad (5.17)$$

de modo que

$$U \frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l^2} = U \frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q_l^2} \Phi'_n + \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q_l^2} + 2U \frac{\partial U^\dagger}{\partial q_l} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l}. \quad (5.18)$$

Substituindo agora as equações (5.11) e (5.12) na equação (5.18), poderemos escrever que

$$U \frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q_l^2} = \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho}}{\hbar \rho} \Phi'_n + \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q_l^2} + \frac{2i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho}}{\hbar \rho} q_l \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q_l} - \frac{(\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t})^2 \dot{\rho}^2}{\hbar^2 \rho^2} q_l^2 \Phi'_n. \quad (5.19)$$

Nosso próximo passo é, substituindo a equação (5.6) na equação (5.10), obtemos o seguinte

$$I'_l \Phi'_n(q_l, t) = U \left\{ i\hbar \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho \dot{\rho} \left[ \frac{1}{2} + q_l \frac{\partial}{\partial q_l} - \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho}}{2\hbar \rho} q_l^2 + \frac{1}{2i\hbar \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho^3 \dot{\rho}} q_l^2 - \frac{\hbar \rho}{2i\dot{\rho} \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t}} \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} \right] \right\} U^\dagger \Phi'_n(q_l, t). \quad (5.20)$$

Agora, com o auxílio das equações (5.15) e (5.19), calculamos diretamente o lado direito da equação (5.20). Após alguma álgebra, chegamos ao seguinte resultado

$$I'_l \Phi'_n(q_l, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{\rho^2} \right) \Phi'_n(q_l, t). \quad (5.21)$$

Assim, temos finalmente a forma procurada de nosso operador  $I'_l$ , conforme a seguir

$$I'_l = -\frac{\hbar^2}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{\rho^2}. \quad (5.22)$$

Nossa equação de autovalores (5.9), com  $I'_l$  na forma (5.22) fica, afinal,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{\rho^2} \right] \Phi'_n(q_l, t) = \lambda_n \Phi'_n(q_l, t). \quad (5.23)$$

Para resolver a equação de autovalores (5.23), vamos inicialmente reescrevê-la na forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} + \left( \frac{2\lambda_n}{\hbar^2 \rho^2} - \frac{q_l^2}{\hbar^2 \rho^4} \right) \right] \Phi'_n(q_l, t) = 0. \quad (5.24)$$

e introduzir uma nova variável

$$\eta = \frac{q_l}{\rho}. \quad (5.25)$$

Com a introdução desta nova variável, a equação (5.24) vai admitir a seguinte forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda_n - \eta^2) \right] \phi_n(\eta) = 0. \quad (5.26)$$

ou

$$I' \phi_n(\eta) = \lambda_n \phi_n(\eta), \quad (5.27)$$

na qual

$$\Phi'_n(q_l, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \phi_n(\eta) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \phi_n\left(\frac{q_l}{\rho}\right). \quad (5.28)$$

O fator  $\frac{1}{\rho^{1/2}}$  foi introduzido na equação (5.27) para que a condição de normalização

$$\int \Phi_n^*(q_l, t) \Phi'_n(q_l, t) dq = \int \phi_n^*(\eta) \phi_n(\eta) d\eta = 1 \quad (5.29)$$

seja satisfeita. A equação (5.26) representa uma equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, cuja solução é dada por

$$\Phi_n(\eta) = \frac{1}{[\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n]^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\hbar}\right) H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2} \eta\right], \quad (5.30)$$

na qual os autovalores  $\lambda_n$  são dados por

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (5.31)$$

e  $H_n$  é o usual polinômio de Hermite de ordem  $n$ . Devemos agora substituir o resultado para  $\Phi_n$ , dado pela equação (5.30) na equação (5.28), que vai nos fornecer o resultado para  $\Phi'_n(q_l, t)$ . Assim, teremos que

$$\Phi'_n(q_l, t) = \frac{1}{[\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho]^{1/2}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar\rho^2}\right) H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2} \frac{q_l}{\rho}\right]. \quad (5.32)$$

Finalmente, das equações (5.7), (5.8) e (5.32), teremos que  $\Phi_n(q_l, t) = U^\dagger \Phi'_n(q_l, t)$ , resulta em

$$\Phi_n(q_l, t) = \frac{1}{\left[\pi^{\frac{1}{2}} \hbar^{\frac{1}{2}} n! 2^n \rho\right]^{1/2}} \exp\left\{\frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t}}{2\hbar} \left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho^2}\right) q_l^2\right]\right\} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{q_l}{\rho}\right]. \quad (5.33)$$

A equação (5.33) nos fornece as funções de onda para o problema dado pelo Hamiltoniano (4.46) e pela equação de Schrödinger (4.64). No entanto, para a determinação da solução geral  $\Psi(q, t)$  dada pela equação (4.66), ainda falta determinarmos as funções de fase  $\mu_n(t)$ . Isto será nosso objetivo na próxima seção.

### 5.3 Determinação das funções de fase

Para determinar as funções de fase  $\mu_n(t)$  que relacionam as soluções da equação de Schrödinger (4.64) com os autoestados  $\Phi_n(t)$ , da equação (5.33), do operador invariante  $I_l(t)$ , vamos usar a teoria descrita no capítulo 2 desta tese. Por simplicidade, vamos escrever a equação (5.33) na forma

$$\Phi_n(q_l, t) = A e^{-Bq_l^2} H_n, \quad (5.34)$$

onde definimos

$$A = \frac{1}{\left[ \pi^{\frac{1}{2}} \hbar^{\frac{1}{2}} n! 2^n \rho \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.35)$$

e

$$B = -\frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar} \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^2} \right). \quad (5.36)$$

Definindo  $H'_n$  e  $H''_n$  como, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de  $H_n$  com relação a  $q_l$ , temos que

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial q_l} = -2Bq_l \Phi_n + A e^{(-Bq_l^2)} H'_n, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial q_l^2} = -2B \Phi_n + 4B^2 q_l^2 \Phi_n + A e^{(-Bq_l^2)} H''_n - 4ABq_l e^{(-Bq_l^2)} H'_n. \quad (5.38)$$

Levando em consideração as seguintes propriedades dos polinômios de Hermite [126]

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (5.39)$$

$$H''_n(x) = 2xH'_n(x) - 2nH_n(x), \quad (5.40)$$

e a ortogonalidade dos mesmos,

$$\left\langle \Phi_n \left| \frac{\partial^2}{\partial q_l^2} \right| \Phi_n \right\rangle = -2B + 4B^2 q_l^2 + \frac{2n\hbar}{\rho^2} \quad (5.41)$$

de modo que, a partir das equações (4.46) e (5.41), teremos que

$$\langle \Phi_n | H(t) | \Phi_n \rangle = -\frac{\hbar^2}{2\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}} \left[ -2B + 4B^2 q_l^2 - \frac{2n}{\hbar \rho^2} \right] + \frac{1}{2} \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \omega^2(t) q_l^2. \quad (5.42)$$

Um cálculo longo, porém direto, utilizando também a equação (5.2), nos permite escrever também, após alguma álgebra, que

$$\left\langle \Phi_n \left| \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \right| \Phi_n \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}} \left[ -2B + 4B^2 q_l^2 + \frac{1}{\hbar \rho^2} \right] + \frac{1}{2} \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \omega_l^2 q_l^2. \quad (5.43)$$

Assim, substituindo as equações (5.42) e (5.43) na equação (4.67) vem que

$$\hbar \frac{d\alpha_n(t)}{dt} = - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^2(t)} \quad (5.44)$$

de modo que, finalmente encontramos nossas funções de fase

$$\alpha_n(t) = - \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^2(\tau)}. \quad (5.45)$$

## 5.4 Solução geral

Enfim, poderemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger (4.64) para o operador Hamiltoniano (4.46). Para isto, basta inicialmente substituir as equações (5.33) e (5.45) na equação (4.66). Daí, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \Psi_n(q_l, t) = & \frac{1}{[\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho]^1/2} \exp \left\{ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^2(\tau)} \right\} \\ & \exp \left\{ \frac{i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar} \left[ \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \rho^2} \right) q_l^2 \right] \right\} H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q_l}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assim, poderemos finalmente escrever a solução geral como sendo dada por

$$\Psi(q_l, t) = \sum_n c_n \Psi_n(q_l, t), \quad (5.47)$$

na qual  $\Psi_n(q, t)$  representa o vetor de estado solução da equação de Schrödinger (equação 5.46) e  $c_n$  são coeficientes independentes do tempo.

## 5.5 Estados coerentes

Estados coerentes das funções de onda de um oscilador são aqueles que minimizam a relação de incerteza, isto é, os estados nos quais as flutuações da coordenada e do momento

no pacote de ondas se relacionam por

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \quad (5.48)$$

Foi Erwin Schrödinger que, em 1926, descreveu a existência dos mesmos [96]. As propriedades dos estados coerentes são amplamente tratadas na literatura. Os estados coerentes para o oscilador harmônico satisfazem as seguintes propriedades [54, 55, 97, 98]:

- As flutuações  $\Delta q$  e  $\Delta p$  nesses estados são independentes do tempo e  $\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ , conforme já mencionado na equação (5.48), para qualquer instante de tempo;
- Os estados coerentes são autoestados do operador de aniquilação;
- Os estados coerentes são criados a partir do estado fundamental por um operador unitário;
- Eles representam um conjunto completo de estados normalizados, porém não ortogonais.

No intuito de encontrarmos os estados coerentes para o nosso estudo, inicialmente definiremos os seguintes operadores

$$b' = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{q_l}{\rho} + \imath \rho p_l \right] \quad (5.49)$$

e

$$b'^{\dagger} = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{q_l}{\rho} - \imath \rho p_l \right]. \quad (5.50)$$

Nas equações (5.49) e (5.50),  $p_l = -\imath \hbar \frac{\partial}{\partial q_l}$  e  $[b', b'^{\dagger}] = 1$ . Das equações acima, podemos escrever o nosso operador invariante na forma

$$I'_l = \hbar(b'^{\dagger} b' + \frac{1}{2}). \quad (5.51)$$

De acordo com [54, 55], os estados coerentes para  $I'_l$  têm a forma

$$\phi_{\alpha}(\eta, t) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(\imath \alpha_n(t)) \phi_n(\eta). \quad (5.52)$$



Na equação anterior, os  $\alpha_n(t)$  são as fases dadas pela equação (5.45) e  $\alpha$  é um número complexo arbitrário. Substituindo as equações (5.7) e (5.8) na equação (5.28) teremos que

$$\exp\left[-\frac{\imath\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar\rho}q_l^2\right]\Phi_\alpha(q_l, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}}\phi_n(\eta), \quad (5.53)$$

com  $\eta = \frac{q_l}{\rho}$ . Logo, podemos escrever os estados coerentes para o sistema dependente do tempo descrito pelo Hamiltoniano (4.46) na forma

$$\Phi_\alpha(q_l, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}}\exp\left[\frac{\imath\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar\rho}q_l^2\right]\phi_n(\eta). \quad (5.54)$$

Agora, fazendo

$$b = U^\dagger b' U = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{\imath\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar\rho}q_l^2\right]\left[\frac{q_l}{\rho} + \hbar\rho\frac{\partial}{\partial q_l}\right]\exp\left[-\frac{\imath\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}}{2\hbar\rho}q_l^2\right] \quad (5.55)$$

teremos que, aplicando a expressão acima a  $\Phi_\alpha(q_l, t)$ ,

$$b = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho} + \imath(\rho p_l - \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}\dot{\rho}q_l)\right]. \quad (5.56)$$

Daí, decorre logicamente que

$$b^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\frac{q_l}{\rho} - \imath(\rho p_l - \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}\dot{\rho}q_l)\right] \quad (5.57)$$

Devemos notar que, aplicando o operador  $b$  aos estados coerentes, teremos, a partir da equação (5.52), que

$$b|\alpha, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\exp(\imath\alpha_n(t))b|n, t\rangle. \quad (5.58)$$

Mas, como

$$b|n, t\rangle = n^{1/2}|n-1, t\rangle, \quad (5.59)$$

a expressão (5.58) torna-se

$$b|\alpha, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\exp(\imath\alpha_n(t))n^{1/2}|n-1, t\rangle. \quad (5.60)$$

Fazendo nesta última equação a mudança de variáveis  $n \rightarrow n+1$ , a equação acima fica

$$b|\alpha, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n \frac{\alpha^{n+1}}{((n+1)!)^{1/2}}\exp(\imath\alpha_{n+1}(t))(n+1)^{1/2}|n, t\rangle. \quad (5.61)$$

Após alguma álgebra, teremos que

$$b|\alpha, t\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha \alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_{n+1}(t)) |n, t\rangle. \quad (5.62)$$

No entanto, da equação (5.45), temos que

$$\alpha_{n+1}(t) = -(n+1 + \frac{1}{2}) \int_0^t \frac{d\tau}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho^2(\tau)} = \alpha_n(t) + 2\alpha_0(t), \quad (5.63)$$

na qual definimos

$$\alpha_0(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho^2(\tau)}. \quad (5.64)$$

Logo, usando a equação (5.64), a equação (5.62) tomará a forma

$$b|\alpha, t\rangle = \alpha e^{2i\alpha_0} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_n(t)) |n, t\rangle. \quad (5.65)$$

De acordo com a equação anterior, podemos concluir que os estados coerentes (5.54) satisfazem a equação de autovalores [43, 55]

$$b\Phi_\alpha(q_l, t) = \alpha(t)\Phi_\alpha(q_l, t), \quad (5.66)$$

na qual o autovalor  $\alpha(t)$  é definido como

$$\alpha(t) = \alpha e^{2i\alpha_0}, \quad (5.67)$$

com  $\alpha_0$  dado pela equação (5.64).

## 5.6 Relações de incerteza

Para termos a relação de incerteza será necessário encontrarmos os valores esperados das grandezas dinâmicas  $q_l$  e  $p_l$  e dos seus valores quadrados. No intuito deste feito, tomaremos os valores esperados no estado dado pela equação (5.54). Utilizando a equação de autovalores (5.66) podemos calcular o valor esperado de  $q_l$  nos estado coerentes. Devemos para tal escrever  $q_l$  em termos de  $b$  e  $b^\dagger$ . Assim, das equações (5.56) e (5.57), teremos que

$$q_l = \left(\frac{\hbar\rho^2}{2}\right)^{1/2} (b + b^\dagger). \quad (5.68)$$

Logo, fazendo um cálculo direto, encontramos o seguinte resultado

$$\langle \Phi_\alpha(q_l, t) | q_l | \Phi_\alpha(q_l, t) \rangle = (2\hbar |\alpha|^2 \rho^2)^{1/2} \sin(\Lambda(t) + \delta), \quad (5.69)$$

no qual  $\delta$  representa o argumento do número complexo  $\alpha$  e  $\Lambda(t) = -2\alpha_0(t)$ . Da mesma forma, teremos que

$$\langle \Phi_\alpha(q_l, t) | q_l^2 | \Phi_\alpha(q_l, t) \rangle = \hbar \rho^2 \left( 2 |\alpha|^2 \sin^2(\Lambda(t) + \delta) + \frac{1}{2} \right). \quad (5.70)$$

Das equações (5.64) e (5.69), temos a incerteza em  $q$  dada pela equação seguinte

$$\Delta q_l = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^{1/2} \rho. \quad (5.71)$$

Os valores esperados de  $p_l$  e de  $p_l^2$  também podem ser calculados da mesma forma. Primeiro escrevemos  $p_l$  em termos de  $b$  e  $b^\dagger$  e, usando de novo o mesmo procedimento acima, após um longo e tedioso cálculo, poderemos escrever que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\alpha(q_l, t) | p_l | \Phi_\alpha(q_l, t) \rangle &= \left( \frac{2\hbar}{\rho^2} |\alpha|^2 \right)^{1/2} \cos(\Lambda(t) + \delta) \\ &+ (2\hbar \epsilon^2 e^{\frac{2\sigma}{\epsilon} t} |\alpha|^2 \dot{\rho}^2)^{1/2} \sin(\Lambda(t) + \delta) \end{aligned} \quad (5.72)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\alpha(q_l, t) | p_l^2 | \Phi_\alpha(q_l, t) \rangle &= \hbar \epsilon^2 e^{\frac{2\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho}^2 \left[ 2 |\alpha|^2 \sin^2(\Lambda(t) + \delta) + \frac{1}{2} \right] \\ &+ \frac{\hbar}{\rho^2} \left[ 2 |\alpha|^2 \cos^2(\Lambda(t) + \delta) + \frac{1}{2} \right] \\ &+ \left( \frac{2^{1/2} \hbar^{1/2} |\alpha| \epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho}}{\rho^{1/2}} \right)^2 \sin(2(\Lambda(t) + \delta)). \end{aligned} \quad (5.73)$$

o que nos leva ao seguinte

$$\Delta p_l = \left( \frac{\hbar}{2} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + (\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \dot{\rho})^2}. \quad (5.74)$$

Com as relações de incerteza (5.71) e (5.74), podemos escrever o produto da incerteza como

$$\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2} \left[ 1 + (\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon} t} \rho \dot{\rho})^2 \right]^{1/2}. \quad (5.75)$$

O resultado acima nos mostra que os estados coerentes dados pela equação (5.54) não são, em geral, estados de incerteza mínima. No entanto, segundo a referência [106] estes

estados são equivalentes aos bem conhecidos estados comprimidos. Devemos notar que aqui os resultados (5.71) e (5.74) coincidem com aqueles da referência [114], colocando-se  $\rho^2 = g_-(t)/\omega_I$ . Podemos notar também que, quando fazemos a condutividade  $\sigma$ , no termo crescente exponencialmente, igual a zero,  $\omega(t) = \omega_0$  e  $\rho = (\epsilon\omega_0)^{-1/2}$ , os resultados em análise coincidem com aqueles do oscilador harmônico simples, conforme esperado e o produto da incerteza resulta no usual

$$\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2}. \quad (5.76)$$

## 5.7 Estados comprimidos do campo eletromagnético quantizado

Uma classe mais geral de estados de incerteza mínima são conhecidos como estados comprimidos. Estes estados foram introduzidos e estudados inicialmente na área de óptica quântica e são conhecidos também como estados coerentes de dois-fótons [99, 100, 101]. Tratam-se de estados que possuem uma incerteza nas flutuações quânticas de uma das variáveis conjugadas menor do que a dos estados coerentes. Em verdade, devido à exigência do produto da incerteza, a incerteza nas flutuações quânticas das outras variáveis conjugadas deve ser maior do que a dos estados coerentes [76, 102, 103]. A teoria de estados coerentes e comprimidos está bem desenvolvida e possui grande importância tanto em óptica quântica quanto em outras áreas da física [38, 64, 101, 104]. É importante mencionar que os estados comprimidos, em geral, não atingem o valor mínimo do produto da incerteza [76, 99, 103].

Em adição aos resultados da seção anterior, desejamos mostrar na presente seção que os estados  $\Phi_\alpha(q_l, t)$  anteriormente especificados como estados coerentes correspondem a estados comprimidos. Para atingir tal objetivo, introduziremos os operadores usuais de aniquilação e de criação  $a$  e  $a^\dagger$  do oscilador harmônico, os quais são dados pelas seguintes relações

$$a_l = \left(\frac{1}{2\hbar\epsilon\omega_l}\right)^{\frac{1}{2}} [\epsilon\omega_l q_l + ip_l], \quad (5.77)$$

$$a_l^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar\epsilon\omega_l}\right)^{\frac{1}{2}} [\epsilon\omega_l q_l - ip_l]. \quad (5.78)$$

Esses operadores se relacionam com os operadores  $b_l$  e  $b_l^\dagger$  definidos na seção anterior pelas relações a seguir [76, 99, 105, 106]

$$b_l = \chi(t)a_l + \nu(t)a_l^\dagger. \quad (5.79)$$

$$b_l^\dagger = \chi^*(t)a_l^\dagger + \nu(t)^*a_l. \quad (5.80)$$

cujos coeficientes são expressos por

$$\chi(t) = \left(\frac{1}{4\epsilon\omega_l}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\rho_l} - i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho} + \epsilon\omega_l \rho_l \right], \quad (5.81)$$

$$\nu(t) = \left(\frac{1}{4\epsilon\omega_l}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\rho_l} - i\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} \dot{\rho} - \epsilon\omega_l \rho_l \right]. \quad (5.82)$$

Um cálculo direto nos permite escrever que

$$|\chi(t)|^2 - |\nu(t)|^2 = 1. \quad (5.83)$$

Assim, das equações (5.66) e (5.79) a (5.83), vemos que os estados  $\Phi_\alpha(q_l, t)$  são, por definição, iguais aos conhecidos estados comprimidos já descritos na literatura [76, 99, 106]. Podemos escrever as flutuações quânticas de  $q_l$  e  $p_l$  para os estados comprimidos  $\Phi_\alpha(q_l, t)$  em termos dos coeficientes  $\chi(t)$  e  $\nu(t)$ . Desse modo, teremos que

$$(\Delta q_l)^2 = \frac{\hbar}{2\epsilon\omega_l} |\chi(t) - \nu(t)|^2, \quad (5.84)$$

$$(\Delta p_l)^2 = \frac{\hbar\epsilon\omega_l}{2} |\chi(t) + \nu(t)|^2, \quad (5.85)$$

de modo que

$$\Delta q_l \Delta p_l = \frac{\hbar}{2} |\chi - \nu| |\chi + \nu|. \quad (5.86)$$

Observando a equação acima, vemos que o produto da incerteza será mínimo se tivermos  $\chi = \gamma\nu$ , sendo  $\gamma$  real (de acordo com a referência [99]). Ademais, notamos a equivalência entre as relações (5.86) e (5.75).

## 5.8 Breve comentário

Neste capítulo, acompanhando o método desenvolvido no capítulo anterior, estendemos nossa investigação da descrição quântica da luz num meio condutor homogêneo e linear utilizando um operador invariante quadrático. Encontramos as funções de onda exatas para a equação de Schrödinger para a luz num meio condutor com frequência dependente do tempo e um termo crescente exponencialmente com  $\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}$ . Para isso, utilizamos também o método de transformações unitárias e construímos estados coerentes para o oscilador harmônico com frequência constante, porém com o Hamiltoniano exibindo um termo exponencial dependente do tempo. Um ponto a destacar aqui é que o valor esperado para  $q_l$ , conforme prevê a teoria, reproduz aquele da dinâmica clássica. Finalmente, utilizando um procedimento simples e direto, mostramos que os estados coerentes encontrados correspondem a estados comprimidos [107]. Nossa expectativa é de que o desenvolvimento do presente trabalho seja útil na investigação de outros problemas que envolvam a propagação da luz em meios condutores, como, por exemplo, a propagação da luz num meio com densidade de carga variando com o tempo.

# Capítulo 6

## Dinâmica quântica de uma partícula aprisionada por campos oscilantes

### 6.1 O modelo

Nas últimas décadas são vários os estudos acerca da dinâmica quântica de uma partícula aprisionada numa armadilha de Paul [108] a [120]. Uma armadilha de Paul é utilizada para confinar tanto partículas carregadas quanto neutras com o propósito de realizar estudos em espectroscopia de alta resolução e sua aplicação em medidas de tempo. Desde que Wolfgang Paul (1913-1993) recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1989, ao lado de Norman Ramsey (1915-) e Hans Dehmelt (1922-), por sua contribuição ao desenvolvimento de relógios atômicos e precisão do tempo, há um crescente interesse no estudo do mecanismo e das aplicações da armadilha de Paul. Dentre os estudos realizados, um dos que chama a atenção dos pesquisadores é o problema de encontrar funções de onda que dependam explicitamente do tempo para uma partícula aprisionada em armadilhas de Paul. Para tal investigação, diversos métodos têm sido empregados pelos físicos. Só para citar alguns destes métodos, temos o de transformações unitárias [4], a técnica que usa álgebra de Lie [114], o de função tentativa [108, 115] e o de invariantes dinâmicos com operadores invariantes lineares [41]. Nosso procedimento neste capítulo será abordar o problema de

encontrar funções de onda (soluções da equação de Schrödinger) exatas, com dependência temporal, para uma partícula aprisionada por campos oscilantes sujeita a um potencial dependente do tempo do tipo oscilador harmônico unidimensional. O método que utilizaremos neste estudo será o de invariantes dinâmicos, idealizado por Lewis e Riesenfeld e já descrito no capítulo 2 desta tese. Porém, diferentemente do que foi feito por Pedrosa *et al.* [41], em nossa abordagem utilizaremos operadores invariantes quadráticos [36] ao invés dos lineares por eles empregados, bem como utilizaremos o método de transformações unitárias. Podemos antecipar que as funções de onda, as quais são nosso objeto de busca, serão escritas em termos da solução da equação de Mathieu-Hill, as conhecidas funções de Mathieu [121, 122]. A dinâmica de uma partícula confinada numa armadilha de Paul é descrita pelo Hamiltoniano [108] a [111]

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)}{2}q^2, \quad (6.1)$$

no qual  $q$  e  $p$  são os operadores usuais coordenada e momento canonicamente conjugados, satisfazendo a relação de comutação  $[p, q] = -i\hbar$ ,  $\omega^2(t) = k \cos^2(\Omega t)$ , sendo que  $\Omega = \Omega(t)$  é a frequência associada ao campo externo (portanto, não a frequência natural de oscilação do sistema) e  $k$ , uma medida de sua intensidade.

## 6.2 Abordagem do problema

No intuito de investigarmos a dinâmica quântica da partícula aprisionada, sujeita às condições dadas acima, devemos observar que a evolução temporal do vetor de estado  $\Psi(q, t)$  que representa o sistema descrito pelo Hamiltoniano (6.1), deve obedecer à equação de Schrödinger (4.64). Desse modo, o sistema que estamos estudando evolui com o tempo de acordo com a equação de Schrödinger

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 \right\} \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t), \quad (6.2)$$

onde usamos  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ . Para resolver a equação (6.2), passaremos a buscar um operador quadrático hermitiano não-trivial  $I(t)$  que satisfaça a equação (4.65). Se tal invariante



existir e se ele não contiver operadores com derivadas temporais, a condição (4.65) vai nos permitir construir soluções da equação de Schrödinger (4.64) na forma da equação (4.66), com uma função de fase dada pela equação (4.67). Posto que explicitamos nossa linha de estudo para o problema, nosso primeiro passo agora será tentarmos encontrar um operador Hermitiano  $I(t)$  que obedeça à equação (4.65). Assim, seguindo o método do invariante dinâmico, vamos assumir a existência do nosso operador linear invariante  $I(t)$  e que o mesmo apresenta-se na forma

$$I(t) = [\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}_+] , \quad (6.3)$$

na qual  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$  tratam-se de funções reais dependentes do tempo a serem determinadas e  $\{q, p\}_+$  é a notação usual do anti-comutador. O fato de exigirmos que tais funções sejam reais é simplesmente para garantir que nosso operador  $I(t)$  seja hermitiano. Assim, de acordo com a equação (2.49), teremos que

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} \right) q^2 + (\rho p - m \dot{\rho} q)^2 \right] , \quad (6.4)$$

onde  $\rho = \rho(t)$  é uma função real dependente do tempo sujeita à condição de vínculo

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{m^2\rho^3} , \quad (6.5)$$

Devemos apenas ressaltar que, uma vez que nosso operador  $I(t)$  por definição é hermitiano, escolheremos apenas as soluções reais da equação de vínculo acima. Considerando isto, qualquer solução particular (real) dela poderá ser utilizada na construção de um operador invariante conforme procuramos (equação (6.4)). Aqui, destacamos que o invariante nesta forma foi primeiro deduzido por Ermakov e depois por Lewis, motivo pelo qual ele é conhecido na literatura por invariante de Ermakov-Lewis. A equação (6.5) é conhecida na literatura como equação de Pinney [45, 124]. Ela pode ser resolvida com o auxílio de uma solução homogênea [52, 125]. Devemos notar que tal equação pode ser obtida da equação de movimento. Assim, reescrevendo nosso Hamiltoniano (6.1) com a substituição  $p = m\dot{q}$ :

$$H(t) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2(t)}{2}q^2 , \quad (6.6)$$

poderemos verificar que

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q} \quad (6.8)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2(t)q, \quad (6.9)$$

resultando na equação de movimento

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \quad (6.10)$$

que corresponde à equação homogênea associada à equação (6.5). A equação (6.10), na qual  $\omega = \omega(t)$ , também é conhecida na literatura como equação de Mathieu-Hill [41]. Sua solução geral com  $\omega(t) = k^{1/2} \cos[\Omega(t)t]$  é dada por [41, 111, 121, 122]

$$q(t) = A C \left( \frac{k}{2\Omega^2}, -\frac{k}{4\Omega^2}, \Omega t \right) + B S \left( \frac{k}{2\Omega^2}, -\frac{k}{4\Omega^2}, \Omega t \right), \quad (6.11)$$

na qual  $A$  e  $B$  são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e  $C$  e  $S$  são, respectivamente, as funções pares e ímpares de Mathieu [121, 122]. Para obtermos as soluções da equação (6.5), usaremos o seguinte teorema matemático [123]: Se  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  são soluções linearmente independentes de (6.10) e

$$W = q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1 \quad (6.12)$$

é o Wronskiano (que é uma constante), então a solução geral de (6.5) pode ser escrita na forma

$$\rho(t) = \{aq_1^2 + bq_2^2 + 2cq_1q_2\}^{1/2}. \quad (6.13)$$

na qual  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam constantes que satisfazem a seguinte relação

$$ab - c^2 = \frac{1}{m^2W^2} \quad (6.14)$$

Uma vez que já temos duas soluções diferentes e linearmente independentes da equação (6.10) (que corresponde à equação homogênea associada à equação (6.5)), dadas pela equação (6.11), poderemos chamá-las de  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  e, desse modo, as equações (6.11) e (6.13) nos fornecerão a determinação de nosso operador invariante quadrático (6.4) para o problema dado pelo Hamiltoniano (6.1) e pela equação de Schrödinger (6.2).

## 6.3 Soluções para o problema

### 6.3.1 Determinação dos autoestados do operador invariante

No intuito de determinar as funções de onda do oscilador harmônico dependente do tempo descrito pelo Hamiltoniano dado pela equação (6.1), devemos inicialmente reescrever nosso operador invariante  $I(t)$  dado pela equação (6.4) na forma

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} \right) q^2 + (m\dot{\rho}q)^2 \right] - \frac{m\rho\dot{\rho}}{2} \{p, q\}_+, \quad (6.15)$$

que, com a substituição  $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$  torna-se

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} + m^2 \dot{\rho}^2 \right) q^2 - \hbar^2 \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + i\hbar m \rho \dot{\rho} \left( 1 + 2q \frac{\partial}{\partial q} \right) \right]. \quad (6.16)$$

Vamos ainda reescrever a equação (6.16) numa forma que, como veremos adiante, será mais útil às nossas pretensões. Assim, nosso operador invariante  $I(t)$  será utilizado na forma

$$I = i\hbar m \rho \dot{\rho} \left\{ \frac{1}{2} + q \frac{\partial}{\partial q} - \frac{im\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2 + \frac{1}{2i\hbar m \rho^3 \dot{\rho}} q^2 - \frac{\hbar\rho}{2im\dot{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right\}. \quad (6.17)$$

Queremos encontrar as autofunções  $\Phi_n(q, t)$  que solucionam o problema dado pela equação (6.2). Para isto, utilizaremos uma transformação unitária. Definiremos o seguinte operador unitário para nossos propósitos

$$U = \exp \left( -\frac{im\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2 \right). \quad (6.18)$$

Assim, faremos a transformação

$$\Phi'_n(q, t) = U\Phi_n(q, t), \quad (6.19)$$

com  $U$  dado pela equação (6.18). Devemos observar que a transformação unitária (6.19) vai nos permitir reescrever nossa equação de autovalores como

$$I'\Phi'_n(q, t) = \lambda_n\Phi'_n(q, t), \quad (6.20)$$

onde agora usaremos

$$I'\Phi'_n(q, t) = UIU^\dagger\Phi'_n(q, t). \quad (6.21)$$

Precisamos então encontrar a forma do operador  $I'$ . Para procedermos tal cálculo, vamos inicialmente registrar alguns resultados que nos serão úteis:

$$\frac{\partial U^\dagger}{\partial q} = \frac{im\dot{\rho}}{\hbar\rho}qU^\dagger, \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q^2} = \frac{im\dot{\rho}}{\hbar\rho}U^\dagger - \left(\frac{m\dot{\rho}}{\hbar\rho}\right)^2 q^2 U^\dagger, \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q} = \frac{\partial U^\dagger}{\partial q} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q}, \quad (6.24)$$

$$U \frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q} = U \frac{\partial U^\dagger}{\partial q} \Phi'_n + \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q}. \quad (6.25)$$

Substituindo a equação (6.22) na equação (6.25), teremos que

$$Uq \frac{\partial U^\dagger \Phi'_n}{\partial q} = \frac{im\dot{\rho}}{\hbar\rho}q^2 \Phi'_n + q \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q}. \quad (6.26)$$

Agora, usando a equação (6.24), encontramos que

$$\frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{\partial U^\dagger}{\partial q} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q} \right], \quad (6.27)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q^2} \Phi'_n + U^\dagger \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial U^\dagger}{\partial q} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q}, \quad (6.28)$$

de modo que

$$U \frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q^2} = U \frac{\partial^2 U^\dagger}{\partial q^2} \Phi'_n + \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q^2} + 2U \frac{\partial U^\dagger}{\partial q} \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q}. \quad (6.29)$$

Substituindo agora as equações (6.22) e (6.23) na equação (6.29), obteremos que

$$U \frac{\partial^2 U^\dagger \Phi'_n}{\partial q^2} = \frac{im\dot{\rho}}{\hbar\rho} \Phi'_n + \frac{\partial^2 \Phi'_n}{\partial q^2} + \frac{2im\dot{\rho}}{\hbar\rho} q \frac{\partial \Phi'_n}{\partial q} - \frac{m^2 \dot{\rho}^2}{\hbar^2 \rho^2} q^2 \Phi'_n. \quad (6.30)$$

Nosso próximo passo é, substituindo a equação (6.17) na equação (6.21), obteremos o seguinte

$$I' \Phi'_n(q, t) = U \left\{ i\hbar m \rho \dot{\rho} \left[ \frac{1}{2} + q \frac{\partial}{\partial q} - \frac{im\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2 + \frac{1}{2i\hbar m \rho^3 \dot{\rho}} q^2 - \frac{\hbar\rho}{2im\dot{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right] \right\} U^\dagger \Phi'_n(q, t). \quad (6.31)$$

Agora, com o auxílio das equações (6.26) e (6.30), calculamos diretamente o lado direito da equação (6.31). Após alguma álgebra, chegamos ao seguinte resultado

$$I' \Phi'_n(q, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} \right) \Phi'_n(q, t). \quad (6.32)$$

Assim, temos finalmente a forma procurada de nosso operador  $I'$ , conforme a seguir

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2}. \quad (6.33)$$

Nossa equação de autovalores (6.20), com  $I'$  na forma (6.33) fica, afinal,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\rho^2} \right] \Phi'_n(q, t) = \lambda_n \Phi'_n(q, t). \quad (6.34)$$

Para resolver a equação de autovalores (6.34), vamos inicialmente reescrevê-la na forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \left( \frac{2\lambda_n}{\hbar^2\rho^2} - \frac{q^2}{\hbar^2\rho^4} \right) \right] \Phi'_n(q, t) = 0. \quad (6.35)$$

e introduzir uma nova variável

$$\sigma = \frac{q}{\rho}. \quad (6.36)$$

Com a introdução desta nova variável, a equação (6.35) vai admitir a seguinte forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda_n - \sigma^2) \right] \phi_n(\sigma) = 0. \quad (6.37)$$

ou

$$I' \phi_n(\sigma) = \lambda_n \phi_n(\sigma), \quad (6.38)$$

onde

$$\Phi'_n(q, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \phi_n(\sigma) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \phi_n\left(\frac{q}{\rho}\right). \quad (6.39)$$

O fator  $\frac{1}{\rho^{1/2}}$  foi introduzido na equação (6.39) para que a condição de normalização seja satisfeita. A equação (6.37) representa uma equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, cuja solução é dada por

$$\phi_n = \frac{1}{[\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n]^{1/2}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right) H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2}\sigma\right], \quad (6.40)$$

na qual os autovalores  $\lambda_n$  são dados por

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (6.41)$$

e  $H_n$  é o usual polinômio de Hermite de ordem  $n$ . Devemos agora substituir o resultado para  $\Phi_n$ , dado pela equação (6.40) na equação (6.39), que vai nos fornecer o resultado para  $\Phi'_n(q, t)$ . Assim, teremos que

$$\Phi'_n(q, t) = \frac{1}{[\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho]^{1/2}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar\rho^2}\right) H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{q}{\rho}\right]. \quad (6.42)$$

Finalmente, das equações (6.17), (6.18) e (6.42), teremos que  $\Phi_n(q, t) = U^\dagger\Phi'_n(q, t)$ , resulta em

$$\Phi_n(q, t) = \frac{1}{[\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho]^{1/2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\iota}{m\rho^2}\right)q^2\right]\right\} H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2}\frac{q}{\rho}\right]. \quad (6.43)$$

A equação (6.43) nos fornece as funções de onda para o problema dado pelo Hamiltoniano (6.1) e pela equação de Schrödinger (6.2). No entanto, para a determinação da solução geral  $\Psi(q, t)$  dada pela equação (4.66), ainda falta determinarmos as funções de fase  $\mu_n(t)$ . Isto será nosso objetivo na próxima subseção.

### 6.3.2 Determinação das funções de fase

Para determinar as funções de fase  $\mu_n(t)$  que relacionam as soluções da equação de Schrödinger (6.2) com os autoestados  $\Phi_n(t)$ , da equação (6.43), do operador invariante  $I(t)$ , vamos usar a teoria descrita no capítulo 2 desta tese. Por simplicidade, vamos escrever a equação (6.43) na forma

$$\Phi_n(q, t) = Ae^{-Bq^2} H_n, \quad (6.44)$$

na qual definimos

$$A = \frac{1}{[\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho]^{1/2}} \quad (6.45)$$

e

$$B = -\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\iota}{m\rho^2}\right). \quad (6.46)$$

Assim, teremos que, definindo  $H'_n$  e  $H''_n$  como, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de  $H_n$  com relação a  $q$ ,

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial q} = -2Bq\Phi_n + Ae^{(-Bq^2)}H'_n, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial q^2} = -2B\Phi_n + 4B^2 q^2 \Phi_n + A e^{(-Bq^2)} H''_n - 4ABq e^{(-Bq^2)} H'_n. \quad (6.48)$$

Levando também em consideração as seguintes propriedades dos polinômios de Hermite [126]

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (6.49)$$

$$H''_n(x) = 2xH'_n(x) - 2nH_n(x) \quad (6.50)$$

e a ortogonalidade dos mesmos,

$$\left\langle \Phi_n \left| \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right| \Phi_n \right\rangle = -2B + 4B^2 q^2 + \frac{2n\hbar}{\rho^2}, \quad (6.51)$$

teremos, a partir das equações (4.46) e (6.51), que

$$\langle \Phi_n | H(t) | \Phi_n \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ -2B + 4B^2 q^2 - \frac{2n}{\hbar\rho^2} \right] + \frac{1}{2} m\omega^2(t) q^2. \quad (6.52)$$

Um cálculo longo, porém direto, com alguma álgebra, nos permite escrever também que

$$\left\langle \Phi_n \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right| \Phi_n \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ -2B + 4B^2 q^2 + \frac{1}{\hbar\rho^2} \right] + \frac{1}{2} m\omega^2(t) q^2. \quad (6.53)$$

Assim, substituindo as equações (6.52) e (6.53) na equação (4.67) vem que

$$\hbar \frac{d\mu_n(t)}{dt} = - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m\rho^2(t)} \quad (6.54)$$

de modo que, finalmente encontramos nossas funções de fase

$$\mu_n(t) = - \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{m\rho^2(\tau)}. \quad (6.55)$$

### 6.3.3 Solução geral

Enfim, poderemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger (6.2) para o operador Hamiltoniano (6.1). Para isto, basta substituímos as equações (6.43) e (6.55) na equação (4.66). Daí, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} \Psi_n(q, t) = & \frac{1}{[\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho]^{1/2}} \exp \left\{ - \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{m\rho^2(\tau)} \right\} \\ & \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[ \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\nu}{m\rho^2} \right) q^2 \right] \right\} H_n \left[ \left( \frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Poderemos finalmente escrever a solução geral como sendo dada por

$$\Psi(q, t) = \sum_n c_n \Psi_n(q, t), \quad (6.57)$$

na qual  $\Psi_n(q, t)$  representa o vetor de estado solução da equação de Schrödinger (equação 6.56) e  $c_n$  são coeficientes independentes do tempo.

Neste capítulo, abordamos o problema de encontrar funções de onda (soluções da equação de Schrödinger) exatas, com dependência temporal, para uma partícula aprisionada por campos oscilantes sujeita a um potencial dependente do tempo do tipo oscilador harmônico unidimensional. O método que utilizamos neste estudo foi o de invariantes dinâmicos, idealizado por Lewis e Riesenfeld e já descrito no capítulo 2 desta tese. Porém, diferentemente do que foi feito por Pedrosa *et al.* [41], em nossa abordagem utilizamos operadores invariantes quadráticos ao invés dos lineares por eles empregados e também fizemos uso do método de transformações unitárias.



# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas

Em nossa investigação, tratamos inicialmente de um oscilador harmônico forçado generalizado dependente do tempo. No capítulo 3, utilizamos um operador invariante linear à luz do método de invariantes dinâmicos, devidamente descrito no capítulo 2, na intenção de encontrar soluções exatas para a equação de Schrödinger para o nosso objeto de estudo em termos das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Conforme descrevemos, em nossa contribuição construímos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos assim como calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como as correlações entre ambos. Como destaque, mostramos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa. Como caso particular, aplicamos nosso formalismo ao conhecido oscilador forçado de Caldirola-Kanai [127].

Em uma segunda contribuição, fizemos, no capítulo 4, uma descrição quântica da propagação da luz num meio condutor, homogêneo, linear e com densidade de carga nula, usando como modelo um oscilador harmônico dependente de tempo numa abordagem fenomenológica. Utilizamos um gauge de Coulomb, invariantes lineares e o método do invariante dinâmico. Obtivemos funções de onda exatas para este problema em termos de soluções de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude do oscilador amortecido clássico. Além disso, construímos soluções na forma de pacotes de

onda Gaussianos e calculamos as flutuações e as correlações quânticas para cada modo do campo eletromagnético quantizado [95].

No capítulo 5, estendemos nossa investigação desenvolvida no capítulo 4, utilizando agora um operador invariante quadrático. Encontramos as funções de onda exatas para a equação de Schrödinger para a luz num meio condutor com frequência dependente do tempo e um termo crescente exponencialmente com  $\epsilon e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t}$ . No entanto, houve uma diferença: utilizamos o método de transformações unitárias e também construímos estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo [107].

Por fim, concluímos, no capítulo 6, uma última contribuição. Nosso procedimento foi abordar o problema de encontrar funções de onda (soluções da equação de Schrödinger) exatas (com dependência temporal) para uma partícula aprisionada por campos oscilantes sujeita a um potencial dependente do tempo do tipo oscilador harmônico unidimensional. Utilizamos o método de invariantes dinâmicos, idealizado por Lewis e Riesenfeld, porém, diferentemente do que foi feito por Pedrosa *et al.* [41], em nossa abordagem utilizamos operadores invariantes quadráticos ao invés dos lineares por eles empregados. Em adição, aplicamos também o método de transformações unitárias a este último problema [128].

As perspectivas para o método e as aplicações tratadas nesta tese são várias. Com o método aqui utilizado e os operadores invariantes pretendemos investigar no futuro, dentre outros, os seguintes sistemas:

1. Oscilador invertido dependente do tempo submetido a um potencial linear;
2. Oscilador duplo dependente do tempo, sistema que, ao que parece, não teve soluções analíticas e exatas obtidas ainda na literatura;
3. Modelos de universos de FRW e de Sitter [10, 38], os quais podem ser tratados como osciladores harmônicos dependentes do tempo, uma vez que, um campo escalar massivo, quando apropriadamente decomposto em modos, adquire uma dependência temporal a partir de um espaço-tempo de fundo dependente do tempo.
4. Quantização da luz com  $\epsilon = \epsilon(t)$  e  $\mu = \mu(t)$ .

De uma maneira geral, o trabalho desenvolvido nesta tese abre a possibilidade de diversas contribuições.

# Referências Bibliográficas

- [1] SCHIFF, L. I. **Quantum mechanics**. 3a. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1968.
- [2] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of physics**. 4a. ed. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [3] COLEGRAVE, R. K.; ABDALLA, M. S. **A canonical description of the Fabry-Perot cavity**. *Optica Acta* **28**, 1981, p.495-501.
- [4] BROWN, L. S. **Quantum motion in a Paul trap**. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1991, p.526-529.
- [5] LEMOS, N. A.; NATIVIDADE, C. P. **Harmonic oscillator in expanding universes**. *Nuovo Cimento B* **99**, 1987, p.211-225.
- [6] HOLSTEIN, B. R. **The adiabatic propagator**. *Am. J. Phys* **57**, 1989, p.714.
- [7] CHUMAKOV, S. M.; DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. **Correlations functions of the nonstationary quantum singular oscillator**. *J. Phys. A* **19**, 1986, p.3229-3239.
- [8] GAO, X. C.; FU, J.; LI, H.; GAO, J. **Invariant formulation and exact solutions for the relativistic charged Klein-Gordon field in a time-dependent spatially homogeneous electric field**. *Phys. Rev. A* **57**, 1998, p.753-761.

- [9] GAO, X. C.; FU, J.; XU, J.; ZOU, X. **Invariant theory and exact solutions for the quantum Dirac field in a time-dependent spatially homogeneous electric field.** *Phys. Rev. A* **59**, 1999, p.55-63.
- [10] BERTONI, C.; FINELLI, F.; VENTURI, G. **Adiabatic invariants and scalar fields in a de Sitter space-time.** *Phys. Lett. A* **237**, 1998, p.331-336.
- [11] LOUISELL, W. H. **Quantum Statistical Properties of Radiation.** New York: John Wiley and Sons, 1973.
- [12] MEYSTRE, P.; SARGENT, M. **Elements of Quantum Physics.** New York: Springer-Verlag, 1991.
- [13] DEKKER, H. **Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator.** *Phys. Rep.* **80**, 1981, p.1-112.
- [14] UM, C. I.; YEON, K. H.; GEORGE, T. F. **The quantum damped harmonic oscillator.** *Phys. Rep.* **362**, 2002, p.63-192.
- [15] CALDIROLA, P. **Forza non conservativa nella meccanica quantistica.** *Nuovo Cimento* **18**, 1941, p.393.
- [16] CALDIROLA, P. **Quantum theory of nonconservative systems.** *Nuovo Cimento* **77B**, 1983, p.241-261.
- [17] KANAI, E. **On the quantization of the dissipative systems.** *Prog. Theor. Phys.* **3**, 1948, p.440-442.
- [18] DODONOV, V. V.; MAN'KO, V. I. **Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator.** *Phys. Rev. A* **20**, 1979, p.550-560.
- [19] CERVERO, J. J.; VILLAROEL, J. D. **On the quantum theory of the damped harmonic oscillator.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 1984, p.2963-2971.

- [20] GREENBERG, D. M. **A critique of the major approaches to damping in quantum theory.** *J. Math. Phys.* **20**, 1979, p.762.
- [21] ABDALLA, M. S. **Canonical treatment of harmonic oscillator with variable mass.** *Phys. Rev. A* **33**, 1986, p.2870-2876.
- [22] RAY, J. R. **Lagrangians and systems they describe - how not to treat dissipation in quantum mechanics.** *Am. J. Phys.* **47**, 1979, p.626-629.
- [23] HUSIMI, K. **Miscellanea in elementary quantum mechanics II.** *Prog. Theo. Phys.* **9**, 1953, p.381-402.
- [24] KERNER, E. H. **Note on forced and damped oscillator in quantum mechanics.** *Can. J. Phys.* **36**, 1958, p.371-377.
- [25] LIANG, M.; WU, H. **Quantum and classical exact solutions of the time-dependent driven generalized harmonic oscillator.** *Physica Scripta* **68**, 2003, p.41-44.
- [26] KHANDEKAR, D. C.; LAWANDE, S. V. **Exact propagator for a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation.** *J. Math. Phys.* **16**, 1975, p.384.
- [27] KHANDEKAR, D. C.; LAWANDE, S. V. **Exact solution of a time-dependent quantal harmonic oscillator with damping and a perturbative force.** *J. Math. Phys.* **20**, 1979, p.1870.
- [28] SONG, D. Y. **The time-dependent canonical formalism: generalized harmonic oscillator and the infinite square well with a moving boundary.** *Phys. Rev. A* **59**, 1999, p.2616.
- [29] LI, F.; WANG, J.; WEIGUNY, A.; LIN, D. L. **Gauge transformation approach to the exact solutions of a generalized harmonic oscillator.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 1994, p.985-992.

- [30] MAAMACHE, M. **Unitary transformation approach to the exact solution for the singular oscillator.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 1996, p.2833-2838.
- [31] CERVERÓ, J. M.; LEJARRETA, J. D. **The time-dependent canonical formalism: generalized harmonic oscillator and the infinite square well with a moving boundary.** *Europhys. Lett.* **45**, 1999, p.6.
- [32] SONG, D. Y. **Unitary relation between a harmonic oscillator of time-dependent frequency and a simple harmonic with and without an inverse square potential.** *Phys. Rev. A* **62**, 2000, art.014103.
- [33] PARK, T. J. **Canonical transformation for the time-dependent harmonic oscillator.** *Bull. Korean Chem. Soc.* **25**, 2004, p.285-288.
- [34] LEWIS JR., H. R. **Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians.** *Phys. Rev. Lett.* **18**, 1967, p.510-512.
- [35] LEWIS JR. **Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators.** *J. Math. Phys.* **9**, 1968, p.1976-1986.
- [36] LEWIS JR., H. R.; RIESENFELD, W. B. **An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field.** *J. Math. Phys.* **10**, 1969, p.1458-1473.
- [37] PEDROSA, I. A. **Coherent states for certain time-dependent systems.** *Rev. Bras. Fís.* **19**, 1989, p.502-515.
- [38] CARVALHO, A. M. M.; FURTADO, C.; PEDROSA, I. A. **Scalar fields and exact invariants in a Friedmann-Robertson-Walker spacetime.** *Phys. Rev. D* **70**, 2004, 123523.
- [39] PEDROSA, I. A.; FURTADO, C.; ROSAS, A. **Exact linear invariants and quantum effects in the early universe.** *Phys. Lett. B* **651**, 2007, p.384-387.

- [40] PEDROSA, I. A. **Complete exact quantum states of the generalized time-dependent harmonic oscillator.** *Mod. Phys. Lett. B* **18**, 2004, p.1267-1274.
- [41] PEDROSA, I. A.; ROSAS, A.; GUEDES, I. **Exact quantum motion of a particle trapped by oscillating fields.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 2005, p.7757-7763.
- [42] PEDROSA, I. A. **Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems.** *J. Math. Phys.* **28**, 1987, p.2662.
- [43] PEDROSA, I. A. **Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency.** *Phys. Rev. A* **55**, 1997, p.3219-3221.
- [44] PEDROSA, I. A., SERRA, G. P.; GUEDES, I. **Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation.** *Phys. Rev. A* **56**, 1997, p.4300-4303.
- [45] ROGERS, C.; SCHIEF, W. K. **Multi-component Ermakov systems: structure and linearization.** *J. Math. Anal. Appl.* **198**, 1996, p.194-220.
- [46] LEACH, P. G. L. **An exact invariant for a class of time-dependent anharmonic oscillators with cubic anharmonicity.** *J. Math. Phys.* **22**, 1981, p.465.
- [47] NASSAR, A. B. **Quantum fluid-dynamics description of the brownian motion.** *Phys. Lett.* **106A**, 1984, p.43-46.
- [48] WAGNER, W. G.; HAUS, H. A.; MARBURGEN, J. H. **Large-scale self-trapping of optical beams in the paraxial ray approximation.** *Phys. Rev.* **175**, 1968, p.256-266.
- [49] GUILIANO, C. R.; MARBURGEN, J. H.; YARIV, A. **Enhancement of self-focusing threshold in sapphire with elliptical beams.** *Appl. Phys. Lett.* **21**, 1972, p.58.

- [50] CONCHARENKO, A. M.; LOGVIN, Y. A.; SAMSON, A. M.; SHAPOVALOV, p. S.; TUROVETS, S. I. *Phys. Lett. A* **Ermakov hamiltonians systems in nonlinear optics of elliptic Gaussian beams**. **160**, 1991, p.138-142.
- [51] CHOI, J. R. **Quantum state of pendulum under exponentially increasing gravitation**. *Physica A* **310**, 2002, p.109-120.
- [52] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Ermakov systems and quantum-mechanical superposition laws**. *Phys. Rev. A* **24**, 1981, p.2873-2876.
- [53] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Solutions to the time-dependent Schrödinger equation**. *Phys. Rev. A* **25**, 1982, p.2388-2390.
- [54] HARTLEY, J. G; RAY, J. R. **Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator**. *Phys. Rev. D* **25**, 1982, p.382-386.
- [55] RAY, J. R. **Minimum-uncertainty coherent states for certain time-dependent systems**. *Phys. Rev. D* **25**, 1982, p.3417-3419.
- [56] FERREIRA, C. A. S.; ALENCAR, P. T. S.; BASSALO, J. M. F. **Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator in a static magnetic field**. *Phys. Rev. A* **66**, 2002, art.024103.
- [57] MAAMACHE, M.; BOUNAMES, A.; FERKOUS, N. **Comment on "Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator in a static magnetic field"** *Phys. Rev. A* **73**, 1991, art.016101.
- [58] LO, C. P. **Generating displaced and squeezed number states by a general driven time-dependent oscillator**. *Phys. Rev. A* **43**, 1991, p.404-409.
- [59] YEON, K. H.; GEORGE, T. F.; UM, C. I.; in: HAN, D.;KIM, Y. S.; ZACHARY, W. W. (Eds.) *Workshop on Squeezed State and Uncertainty Relations* **3135**, NASA Conference Publication 1992, p.347.



- [60] LUAN, P. G.; TANG, C. S. **Coherent states for the time dependent harmonic oscillator: the step function.** *Phys. Rev. A* **71**, 2005, art.014101.
- [61] MOYA-CESSA, H; GUASTI, M. F. **Lewis-Riesenfeld approach to the solutions of the Schrödinger equation in the presence of a time-dependent linear potencial.** *Phys. Rev. A* **71**, 2005, art.014101.
- [62] DANTAS, C. M. A.; PEDROSA, I. A.; BASEIA, B. **Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential.** *Phys. Rev. A* **45**, 1992, p.1320-1324.
- [63] CHOI, J. R. **Coherent and squeezed states for light in homogeneous linear media by an invariant operator method.** *Int. J. of Theor. Phys.*, **43** 2004, p.2113-2136.
- [64] PEDROSA, I. A.; BEZERRA, V. B. **On the existence of squeezed states in an anisotropic universe.** *Mod. Phys. Lett. A* **12**, 1997, p.1111-1118.
- [65] LIANG, M.; YUAN, B.; ZHUNG, K. **The exact evolution of the time-dependent driven damped harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency.** *Can. J. Phys.* **80**, 2002, p.1559-1569.
- [66] JANNUNSSIS, A. D.; BRODIMAS, G. N.; STRECLAS, A. **Propagator with friction in quantum mechanics.** *Phys. Lett* **74A**, 1979, p.6-10.
- [67] UM, C. I.; YEON, K. H.; KAHNG, W. H. **The quantum damped driven harmonic oscillator.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 1987, p.611-626.
- [68] OH, H. G.; LEE, H. R.; GEORGE, T. F.; UM, C. I. **Exact wave functions and coherent states of a damped driven harmonic oscillator.** *Phys. Rev. A* **39**, 1989, p.5515-5522.
- [69] SONG, D. Y. **Periodic hamiltonian and Berry's phase in harmonic oscillators.** *Phys. Rev. A* **61**, 2000, art.024102.

- [70] KIM, H. C.; LEE, M. H.; JI, J. Y. ;KIM, J. K. **Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent forced harmonic oscillator.** *Phys. Rev. A* **53**, 1996, p.3767-3772.
- [71] AKHUNDOVA, E. A.; MUKHTAROV, M. A. **Smoothed Wigner function of a quantum damped oscillator.** *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 1995, p.5287-5290.
- [72] YEON, K. H.; KIM, D. H.; UM, C. I.; GEORGE, T. F.; PANDEY, L. N. **Relations of a canonical and unitary transformations for a general time-dependent quadratic hamiltonian system.** *Phys. Rev. A* **55**, 1997, p.4023-4029.
- [73] YEON, K. H.; UM, C. I.; GEORGE, T. F. **Time-dependent general quantum quadratic hamiltonian systems.** *Phys. Rev. A* **68**, 2003, art.052108.
- [74] VAIDYANATHAN, R. **Linear invariants of a time-dependent quantal oscillator.** *J. Math. Phys.* **23**, 1982, p.1346.
- [75] BOHM, D. **Quantum Theory.** New York: Prince-Hall, 1962, p. 202.
- [76] STOLER, D. **Equivalence classes of minimum uncertainty packets.** *Phys. Rev. D* **1**, 1970, p.3217-3219.
- [77] POWELL, J. L. Powell; CRASEMAN, B. **Quantum Mechanics.** New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1965, pp. 182-184.
- [78] WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. **Quantum Optics.** Berlin: Springer, 1995.
- [79] BERESTETSKII, E. M.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. **Quantum Electrodynamics.** Course of theoretical Physics, v. 4, 2a. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.
- [80] GLAUBER, J. R.; LEWENSTEIN, M. **Quantum optics of dielectric media.** *Phys. Rev. A* **43**, 1991, p.467.

- [81] PEDROSA, I. A.; GUEDES, I. **Wave functions of the time-dependent inverted harmonic oscillator.** *Mod. Phys. Lett. B* **16**, 2002, p.637.
- [82] CHOI, J. R.; KWON, B. H. **Operator method for a nonconservative harmonic oscillator with and without singular perturbation.** *Int. J. Mod. Phys. B* **16**, 2002, p.4733-4742.
- [83] CHOI, J. R. **Quantum and thermal state for exponentially damped harmonic oscillator with and without inverse quadratic potential.** *Int. J. Mod. Phys. B* **16**, p.1341-1351.
- [84] CHOI, J. R. **The quantum description of the electromagnetic waves in homogeneous conducting linear media.** *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5**, 2003, p.409-413.
- [85] YUCE, C. **Exact solution of the time-dependent harmonic plus an inverse harmonic potential with a time-dependent electromagnetic field.** *Ann. of Phys.* **308**, 2003, p.599-604.
- [86] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics.** 2 edição. New York: John Wiley and Sons, 1975.
- [87] MARION, J. B. **Classical Electromagnetic Radiation.** New York: Academic Press, 1965.
- [88] SHAMOS, M. H. **Great experiments in physics.** New York: Dover Publications, 1987.
- [89] CHOI, R. **The decay properties of a single-photon in linear media.** *Chinese J. Phys.* **41**, 2003, p.257-266.
- [90] ROBINETT, R. W.; BASSETT, L. C. **Analytic results for Gaussian wave packets in four model systems I. Visualization of the kinetic energy.** *Foud. Phys. Lett.* **17**, 2004, p.607-625.

- [91] STYER, D. F. **The motion of wave packets through their expectation values and uncertainties.** *Am. J. Phys.* **58**, 1990, p.742.
- [92] CASTRO, A. S.; CRUZ, N. C. **A pulsating Gaussian wave packet.** *Eur. J. Phys.* **20**, 1962, p.L19-L20.
- [93] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. **Electrodynamics of Continuous Media.** Course of theoretical Physics, v. 8, 2a. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2007.
- [94] ZHANG, Z. G. **Exact solutions of time-dependent Dirac equations and the quantum-classical correspondence.** *Physica Scripta* **74**, 2006, p.218-220.
- [95] LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. **On the quantum description of the light in homogeneous conducting linear media.** *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **41**, 2008, 115503.
- [96] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.; **Quantum Mechanics.** Course of theoretical Physics, v. 3, 3a. ed. Oxford: Pergamon Press, 1994.
- [97] HOWARD, S.; ROY, S. K. **Coherent states of a harmonic oscillator.** *Am. J. Phys.* **55**, 1987, p.1109-1117.
- [98] MARTIN NIETO, M.; SIMMONS JR., L. M. **Coherent states for general potentials I. Formalism.** *Phys. Rev. D* **20**, 1979, p.1321-1331.
- [99] YEON, H. P. **Two-photon coherent states of the radiation field.** *Phys. Rev. A* **13**, 1976, p.2226-2243.
- [100] WALLS, D. F. **Squeezed states of light.** *Nature* **306**, 1983, p.141-146.
- [101] COMBESURE, M. **The squeezed state approach of the semiclassical limit of the time-dependent Schrödinger equation.** *J. Math. Phys.* **33**, 1992, p.3870.

- [102] WANG, X. B.; HIROSHIMA, T.; TOMITA, A.; MAYASH, M. **Quantum information with Gaussian states.** *Phys. Rep.* **448** 2007, p.1.
- [103] WORDKIEWICZ, K. **On the quantum mechanics of squeezed states.** *J. Mod. Opt.* **34**, 1987, p.941-948.
- [104] GRISHCHUK, L. P.; SIDEROV. **Squeezed quantum states of relic gravitons and primordial density fluctuations.** *Phys. Rev. D* **42**, 1990, p.3413-3421.
- [105] PEDROSA, I. A. **Time dependent harmonic oscillator and squeezed states.** *Hadronic J.* **9**, 1987, p.173-176.
- [106] PEDROSA, I. A. **Comment on "Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator"**. *Phys. Rev. D* **36**, 1987, p.1279-1280.
- [107] LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. **On the quantization of the electromagnetic field in conducting media.** *J. Mod. Optics* Artigo aceito para publicação, 2008.
- [108] COOK, R. J.; SHANKLAND, D. G.; WELLS, A. L. **Quantum theory of a particle motion in a rapidly oscillating field.** *Phys. Rev. A* **31**, 1985, p.564-567.
- [109] PAUL, W. **Electromagnetic traps for charged and neutral particles.** *Rev. Mod. Phys.* **62**, 1990, p.531-540.
- [110] COMBESURE, M. **Crystallization of a trapped ions - a quantum approach.** *Ann. Phys.* **204**, 1990, p.113.
- [111] BAUMANN, G. **The Paul trap: a completely integrable model?** *Phys. Lett. A* **162**, 1992, p.464-468.
- [112] RAIZEN, M. G.; GILLIGAN, J. M.; BEREQUIST, J. C.; ITANO, W. M.; WINELAND, D. J. **Ionic crystals in a linear Paul trap.** *Phys. Rev. A* **45**, 1992, p.6493-6501.

- [113] CIRAC, J. I.; PARKINS, A. S.; ZOLLER, P. **"Darked" squeezed states of the motion of a trapped ion.** *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1993, p.556-559.
- [114] JI, J. Y.; KIM, J. K.; KIM, S. P. **Heisenberg-picture approach for the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillator.** *Phys. Rev. A* **51**, 1995, p.4268-4271.
- [115] FENG, M.; WANG, K. L. **Exact solution for the motion of a particle in a Paul trap.** *Phys. Lett. A* **197**, 1995, p.135-138.
- [116] SCHRADE, G.; MAN'KO, V. I.; SCHLEICH, W. P.; GLAUBER, R. J. **Wigner functions in the Paul trap.** *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 1995, p.307-326.
- [117] MARTIN NIETO, M.; TRUAX, D. R. **Coherent states sometimes look like squeezed states and vice-versa: the Paul trap.** *New J. Phys.* **2**, 2000, p.181-189.
- [118] CAMACHO, A. **Quantum nondemolition measurements in a Paul trap.** *Phys. Lett. A* **277**, 2000, p.7-12.
- [119] HAI, W. H.; HUANG, S. X.; GAO, K. L. **Wavepacket trains of a Paul trap.** *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36**, 2003, p.3055-3062.
- [120] CHOI, J. R. **Gaussian Klauder coherent states of a general time-dependent harmonic oscillator.** *Phys. Lett. A* **325**, 2004, p.1-8.
- [121] ABRAMOVITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions.** New York: Dover, 1970, p.721.
- [122] MATHEWS, J.; WALKER, R. L. **Mathematical Methods of Physics.** CA: California Institute of Technology, Benjamin, 1973.
- [123] ELIEZER, C. J.; GRAY, A. **A note on the time-dependent harmonic oscillator.** *J. Appl. Math.* **30**, 1976, p.463-468.

- [124] SCHIEF, W. K. **A discrete Pinney equation.** *Appl. Math. Lett.* **10**, 1997, p.13-15.
- [125] LUTZY, M. **Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator.** *Phys. Lett. A* **68**, 1978, p.3-4.
- [126] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists.** New York: Academic Press, 1995, p. 766-769.
- [127] LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. **On the quantum motion of a generalized time-dependent forced harmonic oscillator.** *Annals of Physics* **323**, 2008, p.2253-2264.
- [128] LOPES DE LIMA, A.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. **Quantum dynamics of a particle trapped by oscillating fields,** *J. Mod. Optics* Artigo aceito para publicação, 2008.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)