



COPPE/UFRJ

CONTORNOS TRANSMISSORES PARA PROBLEMAS TRANSIENTES DE
DIFUSÃO

Michelle de Oliveira Alves

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Webe João Mansur

Rio de Janeiro
Outubro de 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CONTORNOS TRANSMISSORES PARA PROBLEMAS TRANSIENTES DE DIFUSÃO

Michelle de Oliveira Alves

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Dr. Carlos de Oliveira Cardoso, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2010

Alves, Michelle de Oliveira

Contornos transmissores para problemas transientes de difusão/ Michelle de Oliveira Alves. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XIV, 63 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Webe João Mansur.

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 58-60.

1. Elementos infinitos 2. Elementos finitos 3. Difusão.
I. Mansur, Webe João. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que em todos os momentos difíceis mostrou sua real presença ao meu lado.

À minha família, por ser meu suporte e amparo nas horas difíceis e por ter me ensinado todos os valores dos quais, hoje, tanto me orgulho. Em especial à minha mãe Eci, por ser um exemplo de força, caráter e dignidade. Ao meu grande amigo e incentivador, meu querido avô Vicente. Se hoje concluo meu mestrado, é definitivamente graças ao senhor, que sempre me incentivou e me encorajou tanto nos estudos, quanto nas importantes decisões que tive que tomar para chegar onde eu estou.

Ao meu querido namorado Tido, por todo apoio, dedicação e carinho. Obrigada por fazer parte de tudo isso e, a cada dia, me conquistar mais.

Ao meu orientador Webe João Mansur, ao professor Roberto Fernandes e a todos os outros professores dos quais tive o privilégio de receber seus ensinamentos. Ao engenheiro Carlos Cardoso, por ter, há alguns anos, se interessado por este tema e por tê-lo apresentado a mim quando iniciei o mestrado.

Aos meus amigos, que sempre me deram suporte para enfrentar todos os desafios e adversidades. Em especial aos amigos conquistados ao longo deste mestrado, dentre os quais preciso destacar: Rodrigo Camargo, pela coorientação informal e por todas as dicas e ajuda concedidas ao longo deste curso, Raul Flores, João Paulo Lima Santos, Wellington Pereira, Ana Paula Vieira, Viviane Ferreira, Felipe Loureiro, Rodrigo Dias e, ainda, Ivone Araújo. Obrigada por permitirem que os meus dias no laboratório fossem tão alegres e divertidos.

Por fim, agradeço às pessoas que fizeram a distância de casa ser diminuída, meus queridos amigos, Graziela Jannuzzi, Kátia Pereira, Carlos Eduardo Kehrig, Jussara Angelo, Lígia Berbert e Camila Oliveira.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTORNOS TRANSMISSORES PARA PROBLEMAS TRANSIENTES DE
DIFUSÃO

Michelle de Oliveira Alves

Outubro/2010

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Surgem, na prática da engenharia, diversos problemas que envolvem análises em domínios que podem ser considerados infinitos ou semi-infinitos. A simulação deste tipo de problema requer o uso de técnicas numéricas apropriadas. Uma metodologia que vem sendo muito utilizada consiste em acoplar ao método dos elementos finitos, elementos infinitos que funcionam como contornos transmissores. Neste trabalho é apresentado um estudo detalhado da aplicação do método dos elementos finitos em conjunto com o elemento infinito proposto por Zhao e Valliappan para um problema de transferência de calor 1D. Após a descrição do procedimento para implementação computacional deste elemento, apresentam-se diversos exemplos com uma condição de contorno particular para a qual, com o uso do mesmo, não se obtém respostas satisfatórias. Os erros inerentes ao uso deste elemento, para os exemplos em questão, foram analisados, suas causas apontadas e uma possível solução sugerida.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TRANSMITTING BOUNDARIES FOR TRANSIENT DIFFUSION PROBLEMS

Michelle de Oliveira Alves

October/2010

Advisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

Engineering practice gives rise to a variety of problems involving analyses on domains that may be considered infinite or semi-infinite. Simulating this type of problem requires the use of appropriate numerical techniques. A methodology that has gained widespread use is based on coupling the finite element method with infinite elements acting as a transmitting boundary. The present work lays out a detailed study of an application of the finite element method combined with the infinite element proposed by Zhao and Valliappan to the 1D heat conduction problem. After describing this element implementation, various examples are presented with a specific boundary condition for which the method does not yield a satisfactory response. The errors, which are inherent to the application of this element in case of the aforementioned examples, are analyzed, their causes are identified, and a possible solution is proposed.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xi
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1. Aspectos Gerais	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Organização da Dissertação	4
2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	5
2.1. A formulação do método	5
2.2. O MEF aplicado à equação da difusão	10
2.2.1. Discretização do problema de transferência de calor 1D pelo MEF	11
2.2.2. Cálculo das matrizes locais	17
3 - ELEMENTO INFINITO	21
3.1. O elemento infinito	21
3.2. Implementação computacional para o problema 1D	29
3.2.1. Discretização temporal	30
3.3. Análise do exemplo 1D proposto por ZHAO <i>et al.</i> (1993a)	31
3.3.1. Resultados obtidos	32
4 - TESTES REALIZADOS	38
4.1. O problema com um fluxo de calor senoidal como condição de contorno	38

4.2. Simulações executadas.....	39
5 - CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58
APÊNDICE A – Dedução da equação da difusão	61

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Caracterização do domínio e contorno	8
Figura 2 – Funções de interpolação lineares unidimensionais	12
Figura 3 – Funções de interpolação de nós não conectados	16
Figura 4 – Funções de interpolação de nós conectados.....	16
Figura 5 – Função de interpolação do nó i	17
Figura 6 – Mapeamento linear isoparamétrico	18
Figura 7 – Elemento infinito transiente	22
Figura 8 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 1$ m ² / dia	24
Figura 9 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 1$ m ² / dia	24
Figura 10 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 2$ m ² / dia	25
Figura 11 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 2$ m ² / dia	25
Figura 12 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 3$ m ² / dia	26
Figura 13 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 3$ m ² / dia	26
Figura 14 – Modelo discretizado para o problema de transferência de calor 1D.....	32

Figura 15 – Temperatura relativa em $x = 10$ m para $x_L = 40$ m	33
Figura 16 – Temperatura relativa em $x = 20$ m para $x_L = 40$ m	33
Figura 17 – Temperatura relativa em $x = 30$ m para $x_L = 40$ m	34
Figura 18 – Temperatura relativa em $x = 40$ m para $x_L = 40$ m	34
Figura 19 – Temperatura relativa em $x = 30$ m para um intervalo de tempo $t = 5 \times 10^6$ dias	36
Figura 20 - Diferença absoluta entre a resposta obtida e a analítica em $x = 30$ m	37
Figura 21 - Diferença absoluta entre a resposta obtida e a analítica em $x = 40$ m	37
Figura 22 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal	40
Figura 23 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	41
Figura 24 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal	41
Figura 25 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	42
Figura 26 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal	42
Figura 27 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	43
Figura 28 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal	43
Figura 29 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	44
Figura 30 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	46

Figura 31 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 10$ m (calculado nos máximos da resposta analítica).....	46
Figura 32 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	47
Figura 33 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 20$ m (calculado nos máximos da resposta analítica).....	47
Figura 34 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	48
Figura 35 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 30$ m (calculado nos máximos da resposta analítica).....	48
Figura 36 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias	49
Figura 37 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 40$ m (calculado nos mínimos da resposta analítica)	49
Figura 38 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições.....	51
Figura 39 – Temperatura em $x = 15$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições.....	51
Figura 40 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições.....	52
Figura 41 – Temperatura em $x = 70$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em $x = 100$ m	52
Figura 42 – Distribuição de temperatura ao longo do domínio para o fluxo senoidal	53

Figura 43 – Elemento infinito.....	56
Figura 44 – Temperatura na extremidade do elemento tomada como sendo a superposição de funções Heaviside.	56
Figura 45 - Corpo submetido à transferência de calor.....	61
Figura 46 – Fluxo de calor através do elemento infinitesimal	62

1 - INTRODUÇÃO

1.1. Aspectos Gerais

Na engenharia existem diversos problemas que podem ser tratados como problemas de domínio infinito, cujas simulações numéricas requerem o uso de técnicas apropriadas. Análises utilizando elementos finitos foram amplamente utilizadas truncando domínios infinitos em domínios finitos suficientemente grandes. Porém, esta técnica apresenta diversas desvantagens devido à quantidade de dados armazenados pelo tamanho excessivo da malha de elementos finitos: memória requerida e tempo de processamento elevados resultam em alto custo computacional. Além disso, as condições de contorno do problema no infinito não podem ser satisfeitas e, ainda, em problemas dependentes do tempo, como por exemplo, problemas de propagação de onda, transferência de calor, ou transporte de massa, a presença de contornos truncados artificialmente pode causar reflexões não esperadas de volta ao domínio discretizado, provocando resultados com erros consideráveis.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas objetivando-se absorver a energia das ondas no contorno truncado. O tratamento mais eficiente para superar essas dificuldades, segundo ZIENKIEWICZ *et al.* (2000), é o método dos elementos infinitos proposto originalmente por BETTESS (1977, 1980) para problemas estáticos. Tal método se originou pela introdução de um tipo de função de forma para domínios infinitos, as quais eram o produto das chamadas funções de decaimento pelas funções de interpolação polinomiais

convencionais de Lagrange, sendo tais funções de decaimento exponenciais definidas como $\exp(-r/L)$, onde L é um comprimento de decaimento e r é o raio a partir de alguma origem.

Para a solução de problemas dinâmicos, CHOW *et al.* (1981) e MEDINA *et al.* (1983) desenvolveram, na década de 80, diversos modelos de elementos, os quais substituíam as chamadas funções de decaimento do elemento infinito estático por funções de propagação de onda em um elemento infinito dinâmico.

Na década de 90, ZHAO *et al.* (1993a) desenvolveram elementos infinitos para simular problemas transientes de transferência de calor. O fator chave na construção destes elementos é a escolha apropriada das funções que substituem a função de decaimento ou a função de propagação de onda, utilizadas anteriormente em problemas estáticos e dinâmicos.

Além dos exemplos citados acima, existem na literatura outros casos da utilização dos elementos infinitos, como por exemplo, em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993b), (ZHAO e VALLIAPPAN, 1994a), (ZHAO e VALLIAPPAN, 1994b), (YANG, KUO e HUNG, 1996), (KHALILI, VALLIAPPAN, *et al.*, 1997), (ABDEL-FATTAH, HODHOD e AKL, 2000), (WANG, CHEN e SONG, 2006), (DONG e SELVADURAI, 2009), (MOTLEY e PRÉVOST, 2010), dentre outros.

Ao longo dos últimos anos, diversos trabalhos relacionados ao uso de elementos infinitos em conjunto com elementos finitos continuaram a ser desenvolvidos. Afinal, em muitos problemas de engenharia que envolvem domínios infinitos, a obtenção de uma solução precisa se dá por meio de uma modelagem eficaz deste domínio. Tal modelagem provê ferramentas analíticas e numéricas para simular, precisamente e eficientemente, o efeito do domínio externo (região do domínio não discretizada por elementos finitos) sobre o domínio interno (região do domínio discretizada por elementos finitos) do problema. Desta

forma, recursos computacionais podem ser concentrados em aspectos como simulação de múltiplos processos e condições geológicas e geométricas complicadas para o domínio discretizado por elementos finitos.

O acoplamento entre elementos finitos e infinitos considera o domínio do problema dividido em duas partes, sendo o domínio interno simulado por meio de discretização convencional por elementos finitos e o domínio externo simulado por meio do uso de elementos infinitos. Assim, as ondas podem ser propagadas a partir do domínio interno para o infinito sem causar reflexão espúria ou refração na interface entre elementos finitos e infinitos no modelo computacional acoplado.

Algoritmos computacionais que utilizam elementos infinitos constituem poderosas ferramentas de simulação para lidar com uma ampla gama de problemas práticos, tais como a propagação de ondas de terremoto na crosta superficial da Terra nos campos de geofísica e sismologia, a interação dinâmica solo-estrutura nos campos de engenharia civil, geotécnica e de barragem e o fluxo transiente porofluido, a transferência de calor e o transporte de massa no interior da Terra nos campos de geociências e engenharia geoambiental. Alguns destes problemas são tratados em (ZHAO, 2009), onde o autor utiliza o acoplamento entre elementos finitos e infinitos para resolver problemas de propagação de onda, transferência de calor e transporte de massa.

1.2. Objetivos

O principal objetivo do presente trabalho consiste na implementação e análise detalhada do elemento infinito transiente 1D proposto em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a).

Para tanto, são realizados diversos testes para o problema de transferência de calor apresentado pelos autores, porém utilizando diferentes condições de contorno.

1.3. Organização da Dissertação

No capítulo 2 é apresentada uma breve descrição do método dos elementos finitos aplicado ao problema da difusão 1D.

No capítulo 3 é feita a análise sucinta do elemento infinito transiente 1D proposto em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a).

No capítulo 4 são mostrados os resultados de testes realizados utilizando o elemento infinito estudado no capítulo anterior, com diferentes condições de contorno.

No capítulo 5 estão as conclusões e considerações finais.

2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Uma das principais ferramentas utilizadas na engenharia para a solução de problemas práticos que envolvem equações diferenciais, o método dos elementos finitos se originou na década de 50 com o surgimento dos primeiros computadores digitais. Advém da análise matricial de modelos reticulados, propostos com a finalidade de se projetar estruturas de modelos contínuos, sobretudo na engenharia estrutural e na indústria aeronáutica. A partir da década de 70, o método dos elementos finitos passou a ser aplicado também à mecânica dos fluidos e a outras áreas afins, sendo atualmente o método mais geral de solução de equações diferenciais parciais.

2.1. A formulação do método

O objetivo principal do método dos elementos finitos é a transformação da formulação diferencial do problema numa formulação variacional, envolvendo equações integrais. Tal formulação pode ser obtida por meio do uso de diferentes metodologias, como pelo princípio dos trabalhos virtuais e da energia potencial mínima ou do método dos resíduos ponderados, maiores detalhes em (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000) e (BATHE, 1996). A partir da formulação variacional, o problema é resolvido por aproximação, adotando-se para isto uma discretização do domínio em subdomínios, ou seja, o domínio Ω é discretizado em n_e elementos Ω_e e n_n pontos nodais.

Tendo conhecimento da equação diferencial que rege o problema, assim como de suas condições de contorno (valores que a própria função e/ou suas derivadas assumem no mesmo), o problema pode então ser resolvido.

Procura-se a solução \mathbf{u} que atenda ao conjunto de equações diferenciais no domínio Ω regidas pelo operador diferencial $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ e que obedeça as restrições no contorno Γ regidas pelo operador diferencial $\mathbf{B}(\mathbf{u})$. Onde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n(\mathbf{u}) \end{array} \right\} = \mathbf{b} \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n(\mathbf{u}) \end{array} \right\} = \mathbf{g} \text{ em } \Gamma \quad (2.2)$$

Sendo o MEF um método de aproximação, a solução aproximada é dada por:

$$u_j \cong \hat{u}_j = \sum_{i=1}^{n_n} a_{ji} N_i, \text{ com } j = 1, \dots, n_e \quad (2.3)$$

ou, matricialmente:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{a}\mathbf{N}$$

onde:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_e 1} & \cdots & a_{n_e n_n} \end{bmatrix}; \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1^j \quad \cdots \quad \mathbf{N}_{n_e}^j]; \mathbf{N}^j = \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n_n} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Nas equações acima, N_i são funções de forma (ou funções de interpolação) linearmente independentes, definidas localmente para cada elemento e escolhidas de maneira a satisfazerem as condições de contorno (2.2), isto é, $\hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma} = \mathbf{u}|_{\Gamma}$ e a_{ji} são coeficientes a serem determinados. Ou seja, a solução aproximada em cada elemento é obtida pela interpolação dos valores nodais a_{ji} de cada i -ésimo nó do elemento através das funções de interpolação N_i para cada grau de liberdade nodal.

Conforme já mencionado, o objetivo do método dos elementos finitos é transformar a formulação diferencial do problema numa formulação variacional constituída de equações integrais como se segue:

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}_j d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{g}_j d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{F}_j d\Omega \quad (2.5)$$

ou ainda:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_j d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{g}_j d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \mathbf{F}_j d\Omega \quad (2.6)$$

onde:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \Omega_e = \Omega$$

$$\sum_{e=1}^{n_e} \Gamma_e = \Gamma$$

Γ_e refere-se à parte do contorno de Ω_e que se encontra em Γ , conforme a Figura 1.

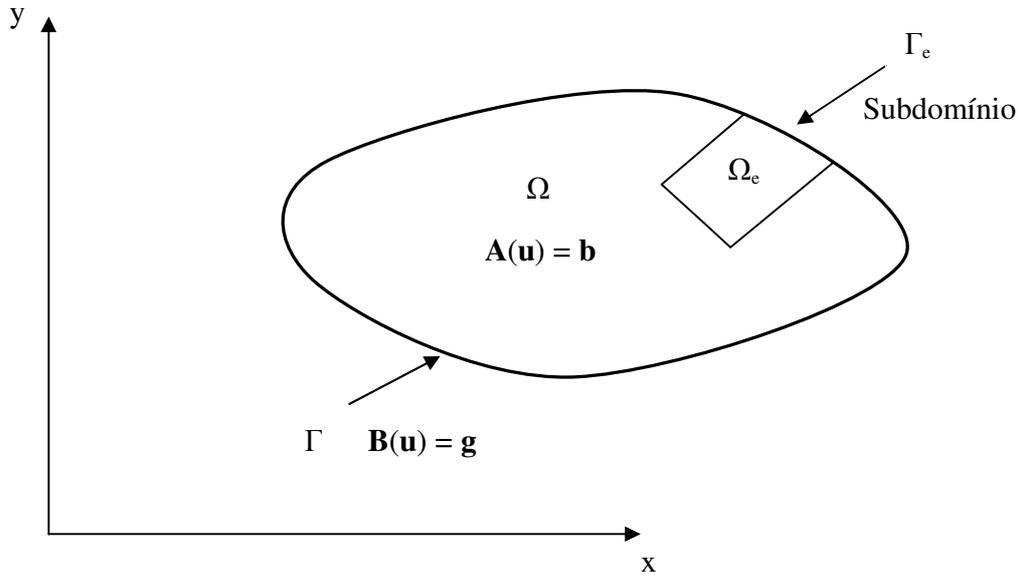


Figura 1 - Caracterização do domínio e contorno

Utilizando o método dos resíduos ponderados como alternativa à formulação variacional, a sentença integral é obtida ponderando-se os erros de aproximação por meio de funções de ponderação, ou seja, o erro é distribuído no domínio Ω e no contorno Γ através da seguinte sentença de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}^T \mathbf{R}_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \bar{\mathbf{W}}^T \mathbf{R}_{\Gamma} d\Gamma \right) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

onde:

$$\mathbf{R}_{\Omega} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}, \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{R}_{\Gamma} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{g}, \text{ em } \Gamma$$

\mathbf{W} e $\bar{\mathbf{W}}$ são funções de ponderação, $\mathbf{W} = (W_1 \ \dots \ W_{n_n})^T$, linearmente independentes, que podem ser distintas.

Prosseguindo com o desenvolvimento, a sentença de resíduos ponderados pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\mathbf{A}(\mathbf{aN}) - \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{W}}^T (\mathbf{B}(\mathbf{aN}) - \mathbf{g}) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Cabe ressaltar a necessidade de se evitar que os integrandos da sentença de resíduos ponderados contenham termos infinitos. Para tanto, de acordo com (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 2006), se as integrais em (2.8) contiverem derivadas de ordem S , torna-se necessário assegurar que a aproximação seja contínua até a derivada de ordem $S-1$, ou seja, pertença à classe de funções C^{S-1} .

Em diversos casos é possível reduzir a ordem dos operadores diferenciais \mathbf{A} e \mathbf{B} da expressão acima, possibilitando, dessa forma, a utilização de funções de forma de ordem mais baixa. No caso unidimensional, adota-se para tanto a integração por partes e no caso bidimensional, faz-se uso do teorema da divergência, detalhado em (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000), (BATHE, 1996) e (MANSUR, 2003). A expressão acima assume a chamada forma fraca:

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}(\mathbf{W})^T (\mathbf{D}(\mathbf{aN}) - \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}(\bar{\mathbf{W}})^T (\mathbf{F}(\mathbf{aN}) - \mathbf{g}) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

onde, usualmente, os operadores diferenciais \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{F} são de ordem mais baixa do que os originais \mathbf{A} e \mathbf{B} . Nesse caso, uma ordem de continuidade menor é exigida para as funções de forma N_i , ao passo que para as funções de ponderação W_j e \bar{W}_j uma ordem de continuidade maior passa a ser necessária.

Um dos métodos de ponderação mais utilizados é o método de Galerkin que, por adotar como função de ponderação a mesma função adotada como função de forma, gera frequentemente, de acordo com (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000), matrizes simétricas.

2.2. O MEF aplicado à equação da difusão

Seja a equação da difusão, deduzida no apêndice A:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q_B - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

onde u é a temperatura, ρ e c são a densidade e o calor específico do material, respectivamente e λ_x , λ_y e λ_z são as condutividades térmicas correspondentes aos eixos principais x , y e z e q_B é quantidade de calor gerado por unidade de volume na unidade de tempo.

Considerando o meio homogêneo e isotrópico, λ_x , λ_y e λ_z são constantes no espaço, portanto:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q_B - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

A equação acima pode ser resolvida conhecendo-se as condições de contorno e condições iniciais do problema:

$$u|_{\Gamma_u} = u_\Gamma, \text{ em } \Gamma_u \quad (2.12)$$

$$\lambda_n \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma_q} = q_\Gamma, \text{ em } \Gamma_q \quad (2.13)$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y), \text{ em } t = 0 \text{ para todo o domínio } \Omega \quad (2.14)$$

onde u_Γ é a temperatura prescrita na superfície Γ_u , λ_n é a condutividade térmica do corpo, n denota o eixo coordenado na direção do vetor unitário n normal à superfície, q_Γ é o valor prescrito do fluxo de calor entrando na superfície Γ_q e $\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma$, sendo $\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$. A

equação (2.12) é conhecida como condição de contorno essencial ou de Dirichlet e a (2.13) como condição de contorno natural ou de Neumann.

2.2.1. Discretização do problema de transferência de calor 1D pelo MEF

Seja o problema transiente de transferência de calor 1D representado pela equação diferencial abaixo:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_B - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.15)$$

e as seguintes condições de contorno e inicial, respectivamente:

$$u|_{\Gamma_u} = u_r, \text{ em } \Gamma_u$$

$$\lambda_x \frac{\partial u}{\partial x} |_{\Gamma_q} = q_r \text{ em } \Gamma_q \quad (2.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ em } t = 0 \text{ para todo o domínio } \Omega$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados, equação (2.7), à equação (2.15), tem-se:

$$\int_{\Omega} w \left(\lambda_x \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + q_B \right) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \bar{w} (\hat{u} - \hat{u}_r) d\Gamma + \lambda_x \int_{\Gamma_q} \bar{\bar{w}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.17)$$

que pode ser escrita como:

$$\int_{x_i}^{x_f} w \left(\lambda_x \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \rho c \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + q_B \right) dx + [\bar{w} (\hat{u} - \hat{u}_r)]_{\Gamma_u} + \lambda_x \left[\bar{\bar{w}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} \right) \right]_{\Gamma_q} = 0 \quad (2.18)$$

onde, separando os termos no integrando obtém-se:

$$\lambda_x \int_{x_i}^{x_f} w \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} dx - \rho c \int_{x_i}^{x_f} w \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} dx + \int_{x_i}^{x_f} w q_B dx + [\bar{w}(\hat{u} - \hat{u}_\Gamma)]_{\Gamma_u} + \lambda_x \left[\bar{w} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial x} \right) \right]_{\Gamma_q} = 0 \quad (2.19)$$

Fazendo uso de funções de interpolação lineares, conforme a Figura 2, onde ao longo do domínio ($0 \leq x \leq L_x$) as funções de interpolação variam linearmente com x para cada elemento, a aproximação é feita em partes. Para tanto, associa-se uma função de interpolação setorial N_j a cada nó do domínio. Tais funções têm a propriedade de serem diferentes de zero apenas nos elementos associados ao nó j , sendo $N_j = 1$ no nó j e zero em todos os outros. Sendo assim, a aproximação será:

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{n_n} N_j(x) u_j \quad (2.20)$$

onde:

$$N_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x = x_j \\ 0, & \text{para } x = x_i \text{ (} i \neq j \text{)} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$N_j(x) = \begin{cases} -\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} + 1, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \end{cases} \quad (2.22)$$

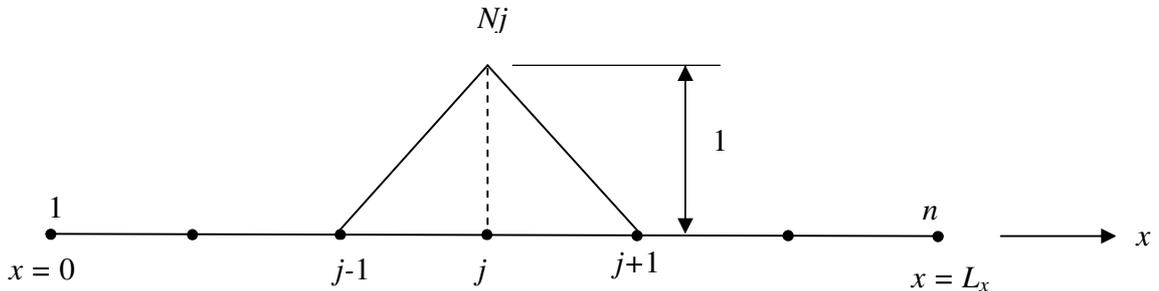


Figura 2 – Funções de interpolação lineares unidimensionais

Adotando o método de ponderação de Galerkin, onde:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n_n} N_i(x) w_i \quad (2.23)$$

prosseguir-se o desenvolvimento. As duas primeiras parcelas da equação (2.19) serão analisadas separadamente como se segue:

- Parcela 1:

$$\lambda_x \int_{x_i}^{x_f} w \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} dx$$

Utilizando integração por partes:

$$\int_a^b u dv = [u.v]_a^b - \int_a^b v du \quad (2.24)$$

e as funções de aproximação (2.20) e de ponderação (2.23), obtém-se:

$$\lambda_x \left\{ \left[w \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] - \int_{x_i}^{x_f} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} dx \right\} - \lambda_x \left\{ \sum_{i=1}^{n_n} w_i \int_{x_i}^{x_f} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^{n_n} N_j u_j \right) \frac{dN_i}{dx} dx \right\} + \lambda_x \sum_{i=1}^{n_n} w_i \left[N_i \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_f}$$

onde, pela arbitrariedade dos coeficientes w_i , chega-se à:

$$-\lambda_x \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) u_j + \lambda_x \left[N_j \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_f}, \text{ com } i = 1, \dots, n_n \quad (2.25)$$

- Parcela 2:

$$-\rho c \int_{x_i}^{x_f} w \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} dx$$

Neste caso, como a função de aproximação é dependente apenas de x , tem-se:

$$\frac{du}{dt}(x) \equiv \frac{d\hat{u}}{dt}(x) = \sum_{j=1}^{n_n} N_j(x) \dot{u}_j$$

e, assim:

$$\begin{aligned} & -\rho c \sum_{i=1}^{n_n} w_i \int_{x_i}^{x_f} N_i \left(\sum_{j=1}^{n_n} N_j \dot{u}_j \right) dx \\ & -\rho c \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} N_j N_i dx \right) \dot{u}_j, \text{ com } i = 1, \dots, n_n \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.25) e (2.26) em (2.19), tem-se:

$$\begin{aligned} & -\lambda_x \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) u_j + \lambda_x \left[N_j \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_f} - \rho c \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} N_j N_i dx \right) \dot{u}_j + \\ & \quad + \int_{x_i}^{x_f} w q_B dx + [\bar{w}(\hat{u} - \hat{u}_\Gamma)]_{\Gamma_u} + \lambda_x \left[\bar{w} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial x} \right) \right]_{\Gamma_q} = 0 \\ & \lambda_x \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right) u_j + \rho c \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{x_i}^{x_f} N_j N_i dx \right) \dot{u}_j = \\ & \quad = \int_{x_i}^{x_f} w q_B dx + [\bar{w}(\hat{u} - \hat{u}_\Gamma)]_{\Gamma_u} + \lambda_x \left[\bar{w} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial x} \right) \right]_{\Gamma_q} + \lambda_x \left[N_j \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_f} \end{aligned} \quad (2.27)$$

que pode ser escrito na forma:

$$\sum_{j=1}^{n_n} K_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{n_n} C_{ij} \dot{u}_j = f_i, \text{ com } i = 1, \dots, n_n \quad (2.28)$$

onde:

$$K_{ij} = \lambda_x \int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx, \text{ com } i = 1, \dots, n_n \quad (2.29)$$

$$C_{ij} = c \rho \int_{x_i}^{x_f} N_j N_i dx, \text{ com } i = 1, \dots, n_n \quad (2.30)$$

$$f_i = \int_{x_i}^{x_f} w q_B dx + [\bar{w}(\hat{u} - \hat{u}_\Gamma)]_{\Gamma_u} + \lambda_x \left[\bar{w} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial x} \right) \right]_{\Gamma_q} + \lambda_x \left[N_j \frac{du}{dx} \right]_{x_i}^{x_f} \quad (2.31)$$

Matricialmente, pode-se escrever:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (2.32)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_n} & \cdots & K_{n_n n_n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n_n} & \cdots & C_{n_n n_n} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n_n} \end{bmatrix}$$

Sendo \mathbf{K} a matriz de condutividade, \mathbf{C} a matriz de capacidade térmica e \mathbf{f} o vetor dos termos independentes.

Cabe ressaltar algumas observações a respeito das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{C} (RIBEIRO, 2003):

- São matrizes simétricas:

$$K_{ij} = \lambda_x \int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \lambda_x \int_{x_i}^{x_f} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = K_{ji}$$

$$C_{ij} = c\rho \int_{x_i}^{x_f} N_i N_j dx = c\rho \int_{x_i}^{x_f} N_j N_i dx = C_{ji}$$

- São matrizes esparsas:

Não estando o nó i conectado ao nó j , isto é, se não pertencem ao mesmo elemento, os suportes das funções de interpolação possuem, para este caso, interseção vazia e os coeficientes K_{ij} e C_{ij} serão nulos, conforme pode ser visto na Figura 3.

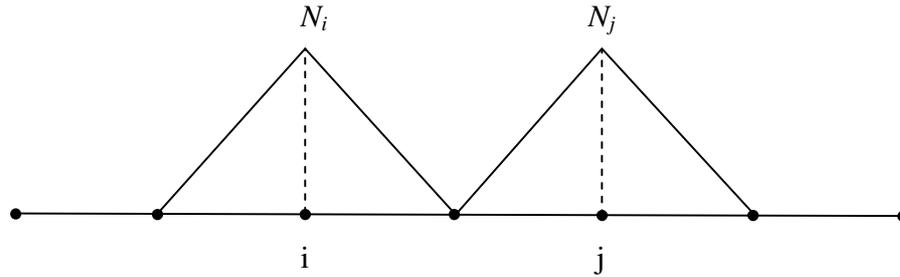


Figura 3 – Funções de interpolação de nós não conectados

- Os coeficientes K_{ij} e C_{ij} podem ser determinados efetuando-se a integral apenas no elemento que conecta os nós i e j , conforme a Figura 4.

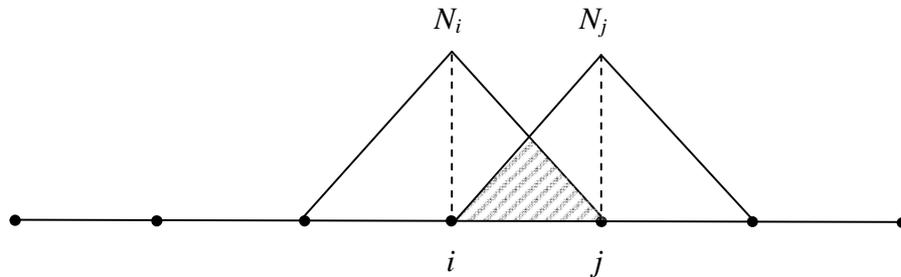


Figura 4 – Funções de interpolação de nós conectados

$$K_{ij} = \lambda_x \int_0^{L_x} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \lambda_x \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

$$C_{ij} = c\rho \int_0^{L_x} N_i N_j dx = c\rho \int_{x_i}^{x_j} N_i N_j dx$$

- Os coeficientes da diagonal principal são positivos e diferentes de zero:

$$K_{ii} = \lambda_x \int_{x_i}^{x_j} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx > 0$$

$$C_{ij} = c\rho \int_{x_i}^{x_j} (N_i)^2 dx > 0$$

- Os coeficientes da diagonal principal podem ser calculados efetuando-se a integral somente nos elementos conectados pelo correspondente nó, conforme a Figura 5, onde o nó i conecta os elementos m e n :

$$K_{ii} = \lambda_x \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx = \lambda_x \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx + \lambda_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx$$

$$C_{ij} = c\rho \int_{x_i}^{x_f} (N_i)^2 dx = c\rho \int_{x_{i-1}}^{x_i} (N_i)^2 dx + c\rho \int_{x_i}^{x_{i+1}} (N_i)^2 dx$$

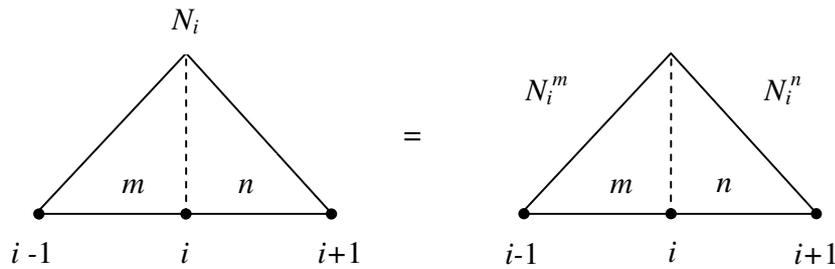


Figura 5 – Função de interpolação do nó i

2.2.2. Cálculo das matrizes locais

Para resolver a equação é necessário calcular os coeficientes das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{C} e os termos independentes através de integração, em nível de elemento, no interior do domínio e no seu contorno. Tal integração pode ser efetuada diretamente no domínio real do problema, porém em problemas práticos muitas vezes uma geometria complexa deve ser modelada, onde, por exemplo, os elementos são distorcidos. Por isso, utiliza-se elementos isoparamétricos, mostrados na Figura 6, nos quais a geometria é mapeada em um sistema

local de coordenadas naturais, utilizando as mesmas funções de interpolação da aproximação. Estando a solução aproximada e suas derivadas em função destas coordenadas, as integrais podem ser efetuadas facilmente de forma analítica ou numérica.

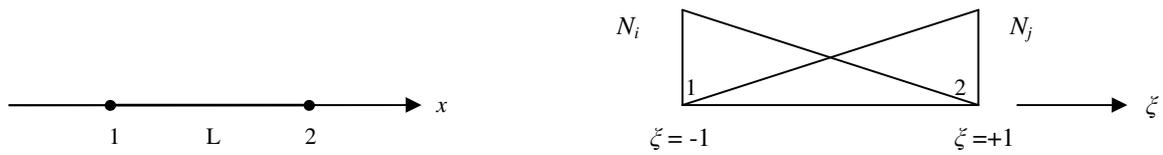


Figura 6 – Mapeamento linear isoparamétrico

- Funções de interpolação lineares:

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad N_j = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.33)$$

$$\frac{dN_i}{d\xi} = -\frac{1}{2} \quad \frac{dN_j}{d\xi} = \frac{1}{2}$$

- Geometria:

$$x(\xi) = N_i x_i + N_j x_j \quad (2.34)$$

Substituindo (2.33) em (2.34):

$$x(\xi) = \frac{x_i}{2}(1 - \xi) + \frac{x_j}{2}(1 + \xi) \quad (2.35)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_j - x_i}{2} = \frac{l_e}{2}$$

portanto,

$$dx = \frac{l_e}{2} d\xi \quad (2.36)$$

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{2}{l_e}$$

$$\frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{dN_j}{d\xi} \frac{2}{l_e}$$

Cálculo dos coeficientes K_{ij} da matriz local \mathbf{K}^e do elemento e :

$$K_{ij} = \lambda_x \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{-1}^1 \frac{dN_j}{d\xi} \frac{2}{l_e} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{2}{l_e} \frac{l_e}{2} d\xi \right), \text{ com } i = 1, \dots, n_n$$

$$K_{ij} = \lambda_x \sum_{j=1}^{n_n} \left(\frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{dN_j}{d\xi} \frac{dN_i}{d\xi} d\xi \right), \text{ com } i = 1, \dots, n_n$$

$$K_{11} = \lambda_x \left(\frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_1}{d\xi} d\xi \right) = \lambda_x \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2} \right)^2 d\xi = \lambda_x \frac{1}{l_e}$$

$$K_{12} = K_{21} = \lambda_x \left(\frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{dN_1}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} d\xi \right) = \lambda_x \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) d\xi = -\lambda_x \frac{1}{l_e}$$

$$K_{22} = \lambda_x \left(\frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \frac{dN_2}{d\xi} \frac{dN_2}{d\xi} d\xi \right) = \lambda_x \frac{2}{l_e} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 d\xi = \lambda_x \frac{1}{l_e}$$

Logo:

$$\mathbf{K}^e = \lambda_x \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & -\frac{1}{l_e} \\ -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Cálculo dos coeficientes C_{ij} da matriz \mathbf{C}^e do elemento e :

$$C_{ij} = c\rho \sum_{j=1}^{n_n} \left(\int_{-1}^1 N_j N_i \frac{l_e}{2} d\xi \right), \text{ com } i = 1, \dots, n_n$$

$$C_{11} = c\rho \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi) \frac{1}{2}(1-\xi) d\xi = c\rho \frac{l_e}{8} \int_{-1}^1 (1-\xi)^2 d\xi = c\rho \frac{l_e}{3}$$

$$C_{12} = C_{21} = c\rho \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-\xi) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi = c\rho \frac{l_e}{8} \int_{-1}^1 (1-\xi)(1+\xi) d\xi = c\rho \frac{l_e}{6}$$

$$C_{22} = c\rho \frac{l_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1+\xi) \frac{1}{2}(1+\xi) d\xi = c\rho \frac{l_e}{8} \int_{-1}^1 (1+\xi)^2 d\xi = \frac{l_e}{3}$$

$$\mathbf{C}^e = c\rho \begin{bmatrix} \frac{l_e}{3} & -\frac{l_e}{6} \\ -\frac{l_e}{6} & \frac{l_e}{3} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

As matrizes locais são utilizadas na montagem das matrizes globais (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000) para a formação do sistema de equações (2.32)

Conhecendo-se as condições de contorno e fonte do problema, o mesmo pode então ser resolvido.

3 - ELEMENTO INFINITO

Existem na literatura diversos tipos de contornos transmissores desenvolvidos para serem acoplados a problemas de domínio infinito, como por exemplo, problemas de difusão, percolação e propagação de ondas. ZHAO *et al.* (1993a) apresentaram um modelo de elemento infinito com características relevantes, que será abordado em detalhe neste capítulo.

3.1. O elemento infinito

Um elemento infinito para problemas transientes de transferência de calor é construído a partir da escolha adequada de uma função de forma para o mesmo, que, neste caso, é uma *função de transferência de calor*.

Partindo do pressuposto de que a forma geral da função de transferência de calor de um elemento infinito pode ser derivada de alguma solução fundamental, um problema de transferência de calor transiente em um meio semi-infinito 1D é utilizado a fim de se obter a solução fundamental relacionada.

A equação que governa o problema 1D de condução e convecção de calor, onde há fluxo de fluido na direção positiva do eixo x , é:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\rho V_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1)$$

onde c e ρ são o calor específico e a densidade do meio, respectivamente, λ_x é a condutividade térmica do meio na direção x , V_x é a velocidade do fluxo de fluido na direção x e u é a temperatura relativa do meio.

A equação (3.1) trata da transferência de calor em fluidos, visto que a parcela referente à convecção tem relevância no processo de transferência de calor. Contudo, se o problema analisado for de transferência de calor em sólidos, o efeito da convecção pode ser desprezado e, assim, o termo que inclui a velocidade é eliminado da equação.

A solução da equação (3.1), para uma temperatura inicial do tipo Delta de Dirac na origem do sistema global, pode ser expressa por:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{c\rho}{4\pi\lambda_x t}} e^{-\frac{c\rho(x-V_x t)^2}{4\lambda_x t}} \quad (3.2)$$

Na Figura 7, onde está representado o elemento infinito em questão, o nó 1 tem coordenada global $x = x_1$ e coordenada local $\xi = 0$. Já o nó 2, definido apenas para expressar a relação entre a direção positiva do eixo x e a direção positiva do eixo ξ , tem coordenada global $x = x_2$ e coordenada local $\xi = 1$. A temperatura relativa do nó 1, para um dado instante de tempo t , pode ser expressa como:

$$u(x_1,t) = \sqrt{\frac{c\rho}{4\pi\lambda_x t}} e^{-\frac{c\rho(x_1-V_x t)^2}{4\lambda_x t}} \quad (3.3)$$

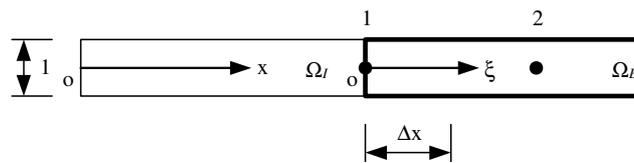


Figura 7 – Elemento infinito transiente

A temperatura relativa em qualquer ponto dentro do elemento infinito, fazendo $x = x_1 + \Delta x$ em coordenadas globais, pode ser escrita como:

$$u(x_1 + \Delta x, t) = u(x_1, t) e^{-\frac{c\rho[\Delta x^2 + \Delta x(2x_1 - 2V_x t)]}{4\lambda_x t}} \quad (3.4)$$

Nota-se que $\xi = \Delta x$ para o elemento infinito 1D e com isso, a função de transferência de calor pode ser expressa por:

$$F_{ht}(\xi, t) = e^{\frac{-c\rho[\xi^2 + 2\xi(x_1 - V_x t)]}{4\lambda_x t}} \quad (3.5)$$

Assim sendo, no interior do elemento infinito, o campo de temperatura relativa pode ser escrito como:

$$u(\xi, t) = u_1 F_{ht}(\xi, t) = u_1 N_1 \quad (3.6)$$

onde u_1 é a temperatura relativa nodal do elemento infinito, u é a temperatura relativa dentro do elemento e N_1 é a função de forma do elemento infinito que, para problemas 1D, é idêntica à função de transferência de calor do mesmo.

Nas figuras 8 a 13, está representada a distribuição da função de transferência de calor do elemento infinito para diversos casos, onde se assume que não há fluxo de fluido, de modo que $V_x = 0$, e denomina-se $\kappa = \lambda_x / c\rho$. Observa-se que não apenas o calor específico, a densidade e a condutividade térmica do meio, têm considerável influência na função de transferência de calor do elemento, mas também o instante de tempo na análise. A consideração do efeito da variável tempo é responsável por formar as características do presente elemento infinito.

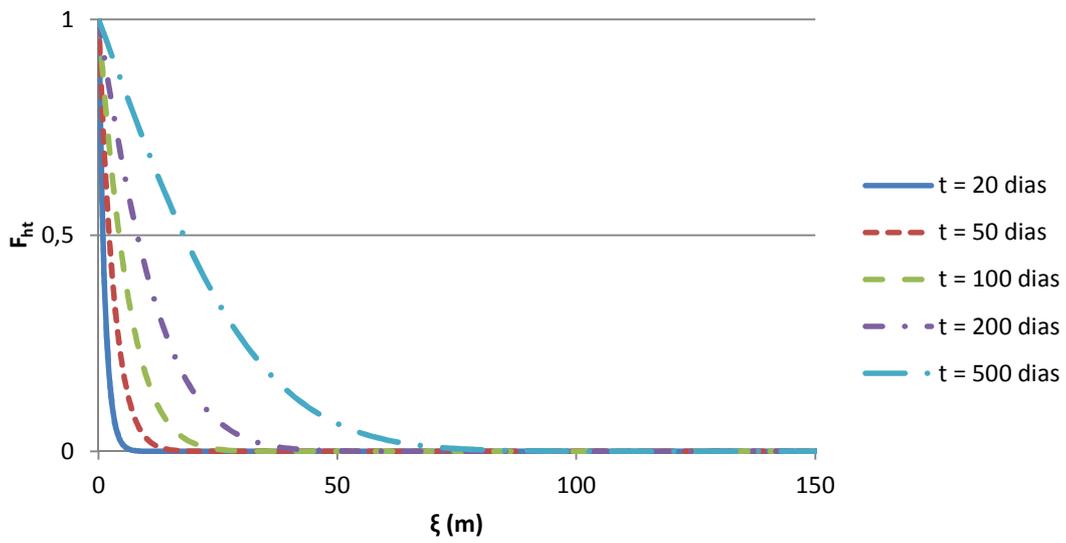


Figura 8 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 1 \text{ m}^2 / \text{dia}$

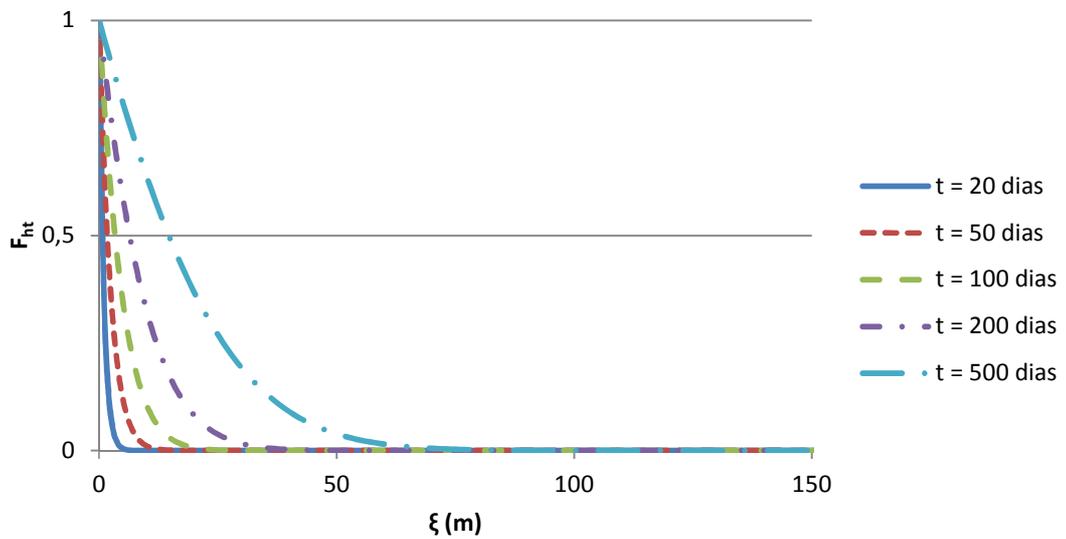


Figura 9 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 1 \text{ m}^2 / \text{dia}$

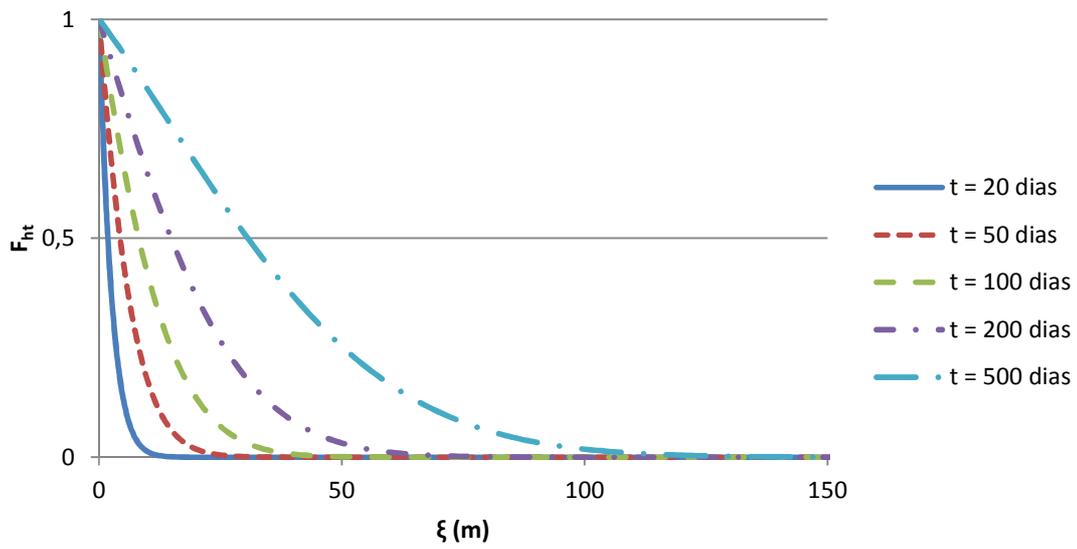


Figura 10 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 2$ m² / dia

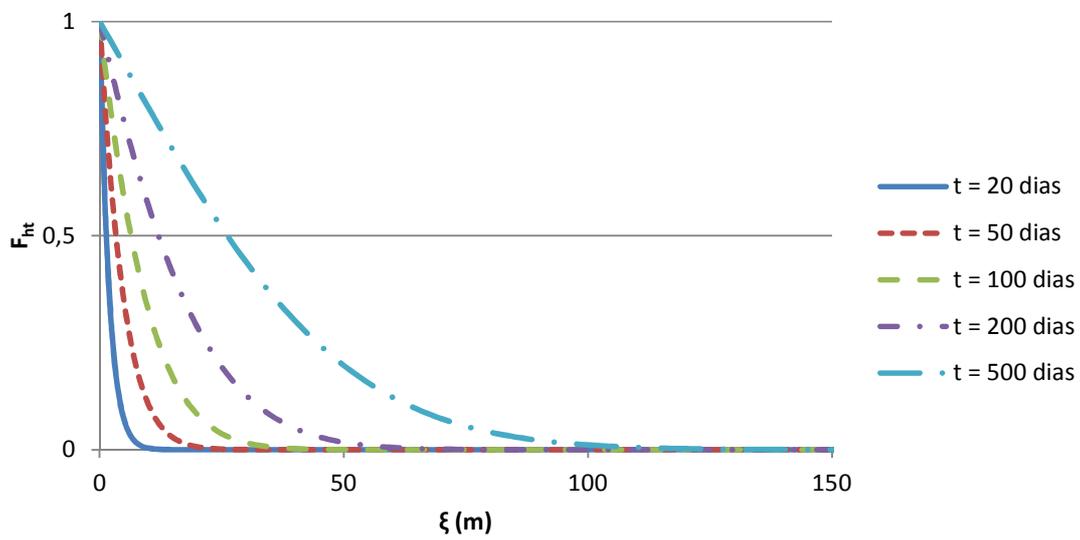


Figura 11 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 2$ m² / dia

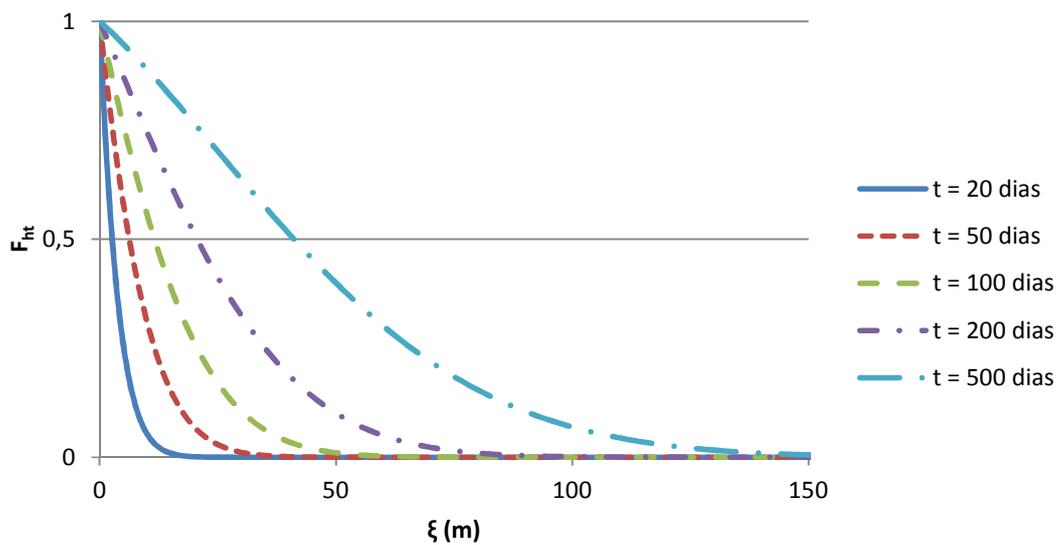


Figura 12 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 30$ m e $\kappa = 3 \text{ m}^2 / \text{dia}$

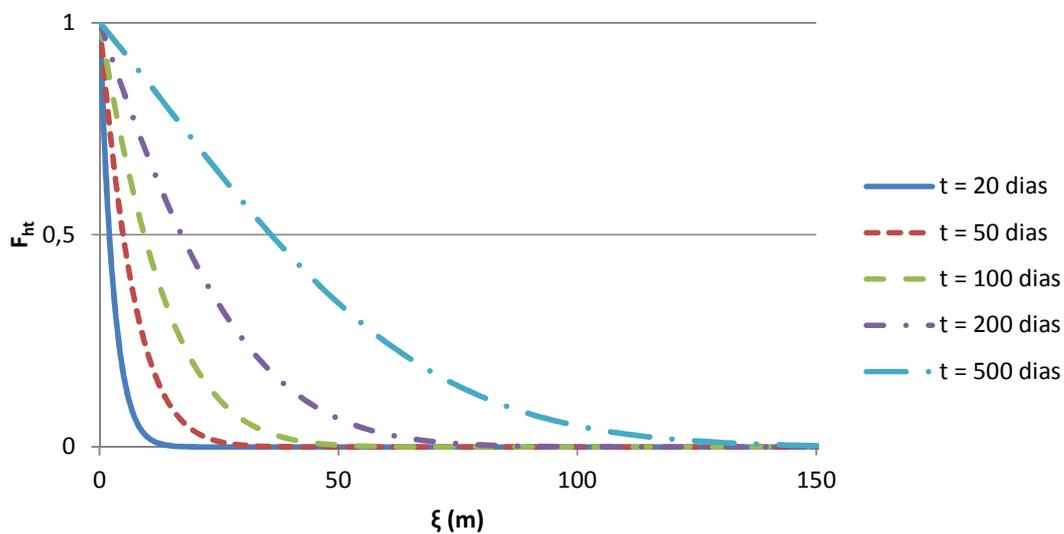


Figura 13 - Distribuição da função de transferência de calor do elemento para $x_1 = 40$ m e $\kappa = 3 \text{ m}^2 / \text{dia}$

Através do método dos elementos finitos, a equação (3.1) pode ser discretizada e as matrizes de propriedade para ambos os elementos, finitos e infinitos, podem ser obtidas. Para os elementos finitos, serão obtidas conforme visto no capítulo anterior. Já as matrizes de propriedades para o elemento infinito 1D podem ser obtidas como se segue:

$$K_{11} = \lambda_x \int_s \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) ds \quad (3.7)$$

$$H_{11} = \int_s \left(V_x N_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) ds \quad (3.8)$$

$$C_{11} = c\rho \int_s (N_1 N_1) ds \quad (3.9)$$

onde K_{11} , H_{11} e C_{11} são as matrizes de propriedade do elemento infinito, denominadas, respectivamente, matriz de condução, matriz de convecção e matriz de capacidade térmica; e s é o comprimento do elemento.

Tais matrizes se degeneram em números reais, uma vez que apenas o nó 1 e a função de transferência de calor do elemento são usadas para descrever o campo de temperatura relativa no interior do elemento infinito.

As equações (3.7) a (3.9) são resolvidas por meio da seguinte relação de mapeamento entre os sistemas de coordenadas global e local:

$$x = (1 - \xi)x_1 + \xi x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)\xi \quad (3.10)$$

Portanto:

$$ds = dx = (x_2 - x_1)d\xi \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.10) a (3.12) nas equações (3.7) a (3.9), as matrizes de propriedades do elemento infinito podem ser reescritas como:

$$K_{11} = \lambda_x \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \right) \frac{1}{x_2 - x_1} d\xi \quad (3.13)$$

$$H_{11} = \int_0^{\infty} \left(V_x N_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (3.14)$$

$$C_{11} = c\rho \int_0^{\infty} (N_1 N_1) (x_2 - x_1) d\xi \quad (3.15)$$

Nota-se que para o elemento infinito transiente 1D apresentado, as equações (3.13) a (3.15) podem ser calculadas analiticamente e os resultados são:

$$K_{EI} = \sqrt{\frac{c\rho\lambda_x}{8t}} e^{k^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + ke^{-k^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(k) \right] \quad (3.16)$$

$$H_{EI} = -\frac{1}{2} V_x \quad (3.17)$$

$$C_{EI} = \sqrt{2c\rho\lambda_x t} e^{k^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(k) \right] \quad (3.18)$$

onde:

$$k = (x_1 - V_x t) \sqrt{\frac{c\rho}{2\lambda_x t}} \quad (3.19)$$

e K_{EI} , H_{EI} e C_{EI} são, respectivamente, os valores numéricos das matrizes de condutividade, de convecção e de capacidade térmica do elemento infinito.

3.2. Implementação computacional para o problema 1D

Nesta seção é apresentado o desenvolvimento que serve de base à implementação computacional do problema de transferência de calor 1D num meio sólido ($V_x = 0$) semi-infinito. Tal implementação é feita considerando o elemento infinito analisado anteriormente acoplado ao nó final da malha 1D utilizada na discretização pelo MEF. Conforme visto no capítulo anterior, o problema da transferência de calor, em sua forma matricial semi-discreta é:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (3.20)$$

Como o elemento infinito é acoplado ao ultimo nó da malha de discretização e as matrizes de propriedade do mesmo se degeneram em números reais, sua consideração é feita simplesmente somando-se esses valores numéricos aos respectivos coeficientes das matrizes do MEF, correspondentes à posição do nó final da malha.

A matriz de condutividade global passa a ser:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \mathbf{0} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & \\ & K_{32} & K_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & K_m + K_{EI} \end{bmatrix}$$

e a matriz de capacidade térmica global fica:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & & & \mathbf{0} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & \\ & C_{32} & C_{33} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & C_m + C_{EI} \end{bmatrix}$$

A principal mudança nas matrizes acima é que as mesmas passam a ser dependentes do tempo, já que K_{EI} e C_{EI} possuem essa característica.

3.2.1. Discretização temporal

Sendo a equação (3.20) um sistema de equações diferenciais ordinárias, qualquer técnica de diferenças finitas para aproximar a velocidade em termos do deslocamento pode ser usada.

Admitindo uma variação linear para u , em cada ponto x_i , entre t_i e $t_i + \Delta t$ e uma aproximação por diferenças progressivas, tem-se:

$$u(x_i, t_i + \theta \Delta t) = \theta u(x_i, t_i + \Delta t) + (1 - \theta) u(x_i, t_i) \quad (3.21)$$

$$\dot{u}(x_i, t_i + \theta \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} (u(x_i, t_i + \Delta t) - u(x_i, t_i)) \quad (3.22)$$

Considerando a variável u , a cada passo de tempo, na forma vetorial:

$${}^{t_i} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x_1, t_i) \\ u(x_2, t_i) \\ \vdots \\ u(x_i, t_i) \\ \vdots \\ u(x_n, t_i) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

e substituindo (3.21) e (3.22) em (3.20), chega-se a:

$$\left(\theta \mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t_i + \Delta t} \mathbf{u} = \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - (1 - \theta) \mathbf{K} \right] {}^{t_i} \mathbf{u} + (1 - \theta) {}^{t_i} \mathbf{f} + \theta {}^{t_i + \Delta t} \mathbf{f} \quad (3.24)$$

Segundo WROBEL (1989), os valores mais comumente adotados para θ são $1/2$, $2/3$

e 1. Utilizando $\theta = \frac{1}{2}$, chega-se a:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t_i+\Delta t}\mathbf{u} = \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{K}\right]^{t_i}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\left({}^{t_i}\mathbf{f} + {}^{t_i+\Delta t}\mathbf{f}\right) \quad (3.25)$$

que pode ser escrito na forma:

$$\hat{\mathbf{K}}^{t_i+\Delta t}\mathbf{u} = {}^{t_i}\hat{\mathbf{R}} \quad (3.26)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{K}} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\right) \quad (3.27)$$

$${}^{t_i}\hat{\mathbf{R}} = \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} - \frac{1}{2}\mathbf{K}\right]^{t_i}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\left({}^{t_i}\mathbf{f} + {}^{t_i+\Delta t}\mathbf{f}\right) \quad (3.28)$$

3.3. Análise do exemplo 1D proposto por ZHAO *et al.* (1993a)

O algoritmo para o elemento infinito em questão foi devidamente implementado e o exemplo para o caso 1D, proposto em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a), foi analisado. Os resultados obtidos para este exemplo foram compatíveis e muitas vezes até melhores do que os apresentados por ZHAO *et al.* (1993a).

O exemplo em questão trata da análise de um problema de transferência de calor 1D em um meio sólido semi-infinito constituído de argila. Como mostrado na Figura 14, supondo que exista uma diferença de temperatura unitária em $x = 0$, o calor se propagará a partir da fonte até o infinito devido à condução. O sistema discretizado é modelado por cinco elementos finitos e um elemento infinito.

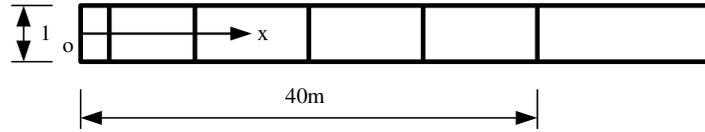


Figura 14 – Modelo discretizado para o problema de transferência de calor 1D

Os seguintes parâmetros da argila são usados nesta análise: $c = 0,22 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$, $\rho = 1,8 \text{ t/m}^3$ e $\lambda_x = 25,92 \text{ kcal/m dia}^\circ\text{C}$. Assume-se, também, que não há fluxo de fluido no meio, por isso, $V_x = 0$. A temperatura relativa em $x = 0$ é $u_0 = 1^\circ\text{C}$ e o comprimento do domínio modelado por elementos finitos é de 40 m. O intervalo de tempo escolhido na análise é $\Delta t = 300$ dias. A fim de julgar a eficiência do elemento infinito, o problema foi abordado com as seguintes condições:

- 1) $x_L = 40 \text{ m}$ sem o elemento infinito e contorno fixo, ou seja, $u = 0$ em x_L ;
- 2) $x_L = 40 \text{ m}$ sem o elemento infinito e contorno livre, ou seja, $\frac{du}{dx} = 0$ em x_L ;
- 3) $x_L = 40 \text{ m}$ com o elemento infinito acoplado ao final da malha de elementos finitos.

Os resultados são comparados a seguir.

3.3.1. Resultados obtidos

Os gráficos a seguir mostram a distribuição da temperatura relativa versus o tempo, para o problema de transferência de calor em questão.

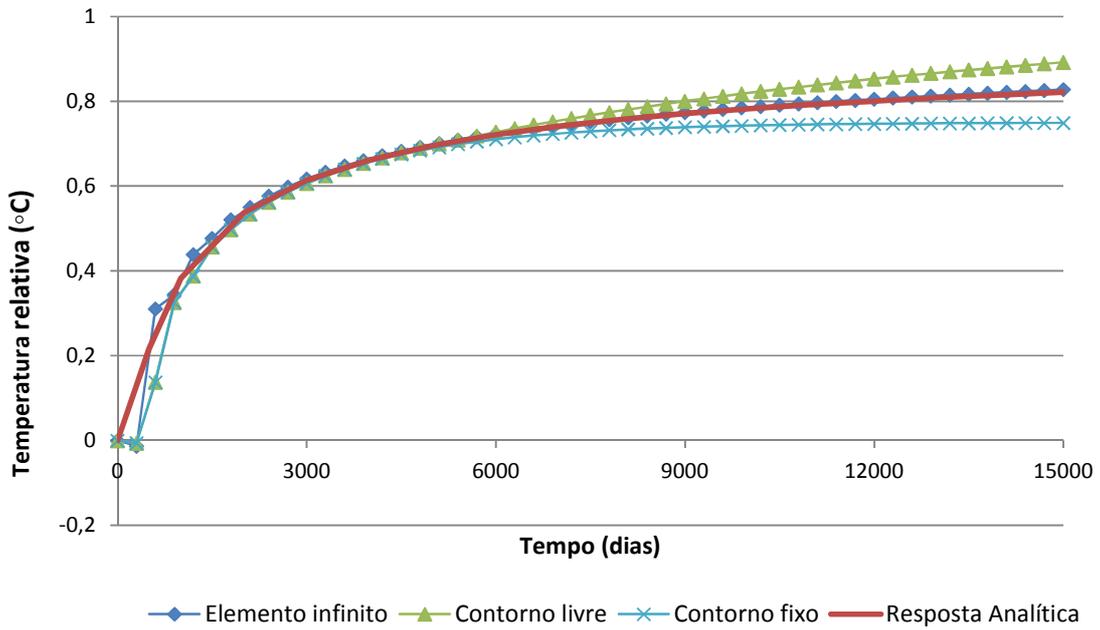


Figura 15 – Temperatura relativa em $x = 10$ m para $x_L = 40$ m

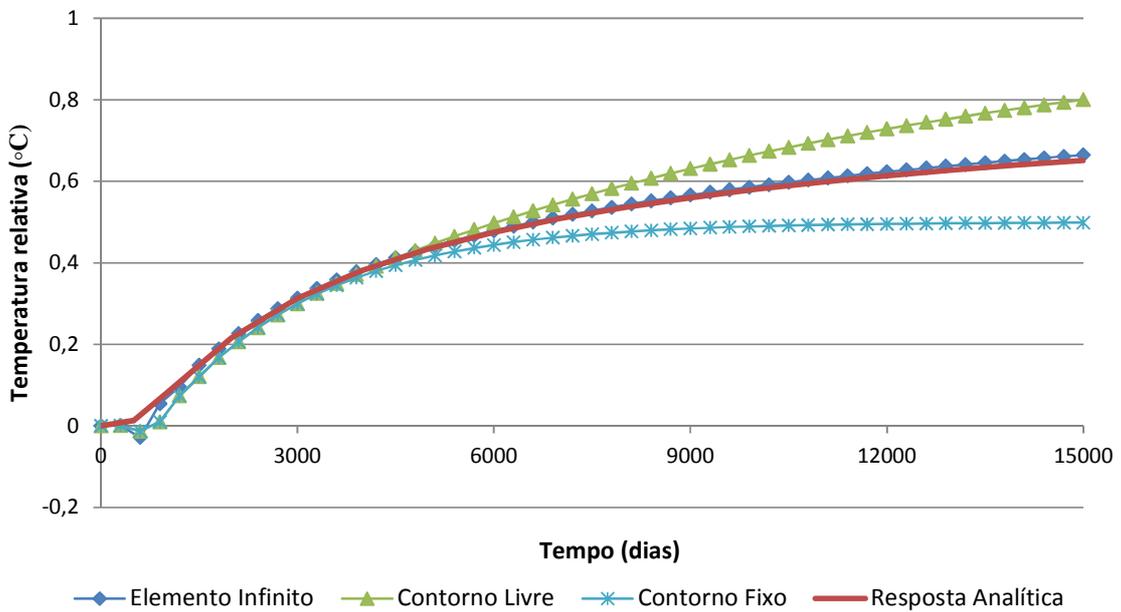


Figura 16 – Temperatura relativa em $x = 20$ m para $x_L = 40$ m

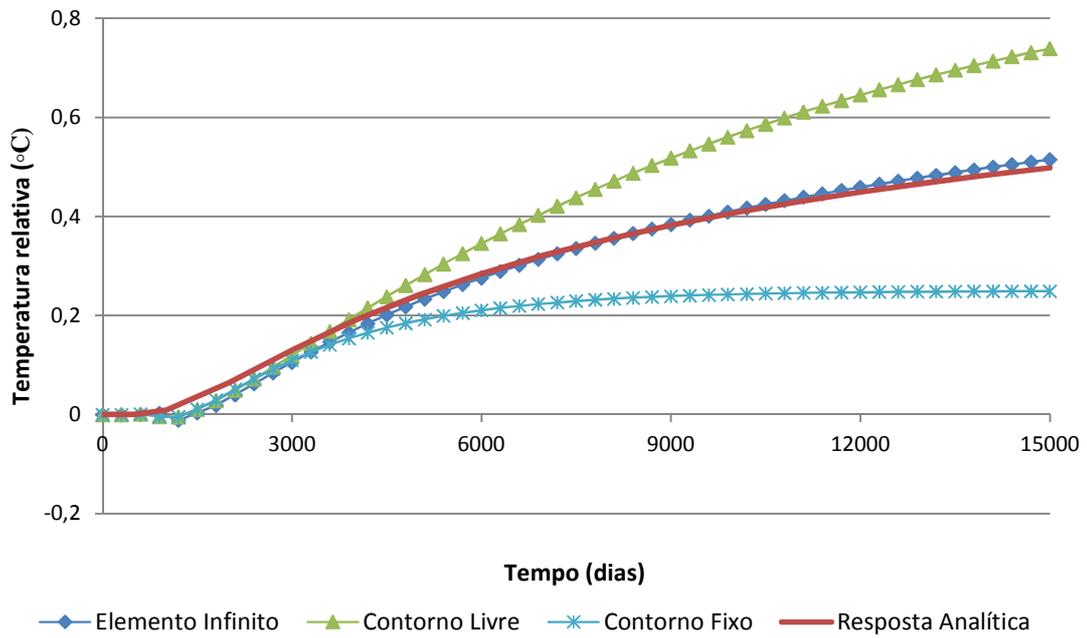


Figura 17 – Temperatura relativa em $x = 30$ m para $x_L = 40$ m

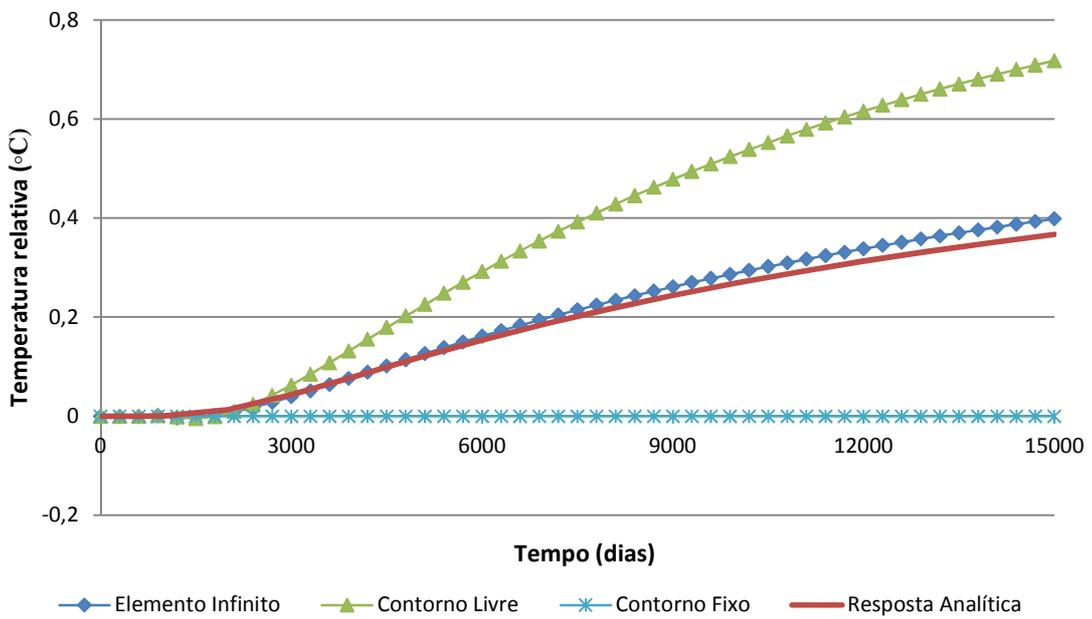


Figura 18 – Temperatura relativa em $x = 40$ m para $x_L = 40$ m

Analisando tais gráficos nota-se que existe uma boa comparação da solução analítica (CARSLAW e JAEGER, 1959) com a solução numérica obtida acoplado à malha de elementos finitos, o elemento infinito de ZHAO *et al.* (1993a). Já com o uso dos contornos artificiais, fixo e livre, a precisão dos resultados numéricos se torna ruim. Isto se deve às reflexões espúrias que ocorrem no contorno artificial, já que o campo de temperatura relativa refletido se propaga a partir deste contorno para o interior do domínio discretizado.

No caso do contorno livre, a onda de calor é refletida com a mesma fase. Já para o contorno fixo, a mesma é refletida com fase invertida. Sendo assim, geralmente, a temperatura do sistema é consideravelmente superestimada quando é usado contorno artificial livre e subestimada quando se usa contorno artificial fixo. Ou seja, em ambos os casos, tanto para o contorno artificial fixo quanto para o livre, o domínio a ser discretizado por elementos finitos deve ser grande o suficiente para evitar reflexões espúrias no contorno truncado artificialmente. Caso contrário, o campo de temperatura relativa refletido interfere nos resultados numéricos.

Embora um pequeno erro exista entre a solução analítica e a solução numérica utilizando o elemento infinito de ZHAO *et al.* (1993a), este erro diminui com o passar do tempo. Este fenômeno pode ser observado nas figuras 19 a 21. Na Figura 19 está representada a temperatura relativa em $x = 30$ m para um intervalo de tempo bem maior ($t = 5 \times 10^6$ dias), onde fica claro o comportamento convergente da resposta. Já nas figuras 20 e 21, está mostrada a diferença absoluta entre a resposta obtida e a analítica, devido ao uso de diferentes contornos, para um intervalo de tempo $t = 150.000$ dias.

Conclui-se que o emprego do presente elemento é uma maneira eficiente de modelar o domínio infinito para o problema de transferência de calor analisado, já que o campo de

temperatura relativa refletido pode ser bastante diminuído, comparado com o uso dos contornos artificiais, livre ou fixo.

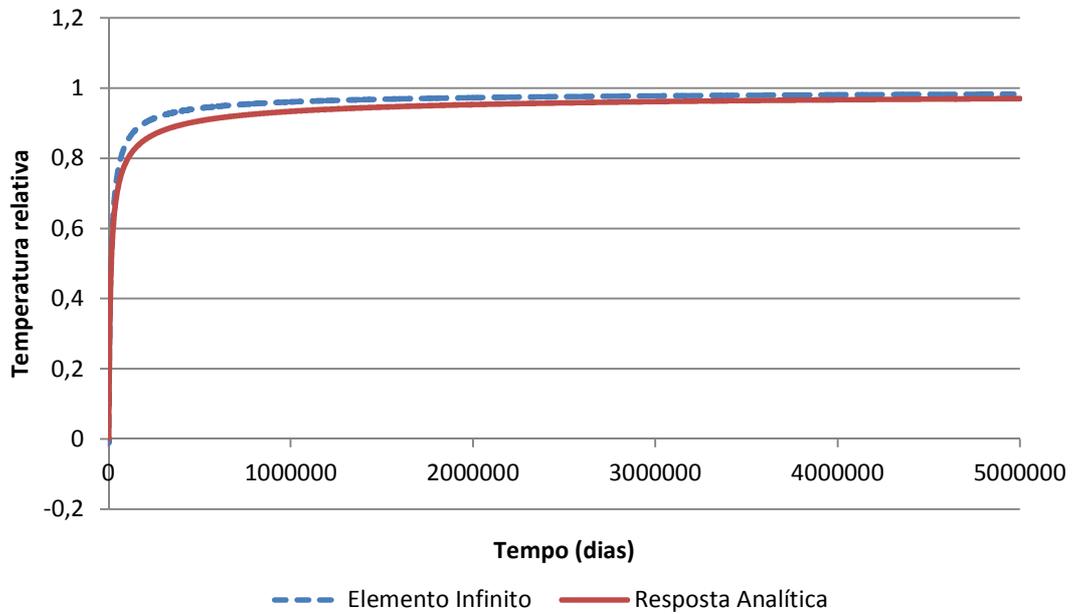


Figura 19 – Temperatura relativa em $x = 30$ m para um intervalo de tempo $t = 5 \times 10^6$ dias

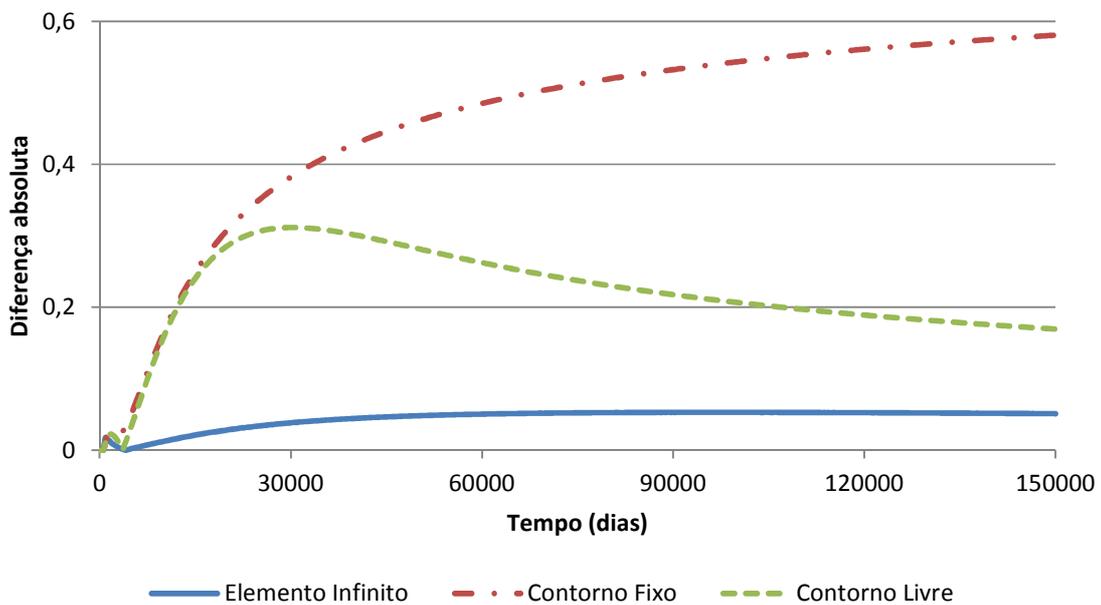


Figura 20 - Diferença absoluta entre a resposta obtida e a analítica em $x = 30$ m

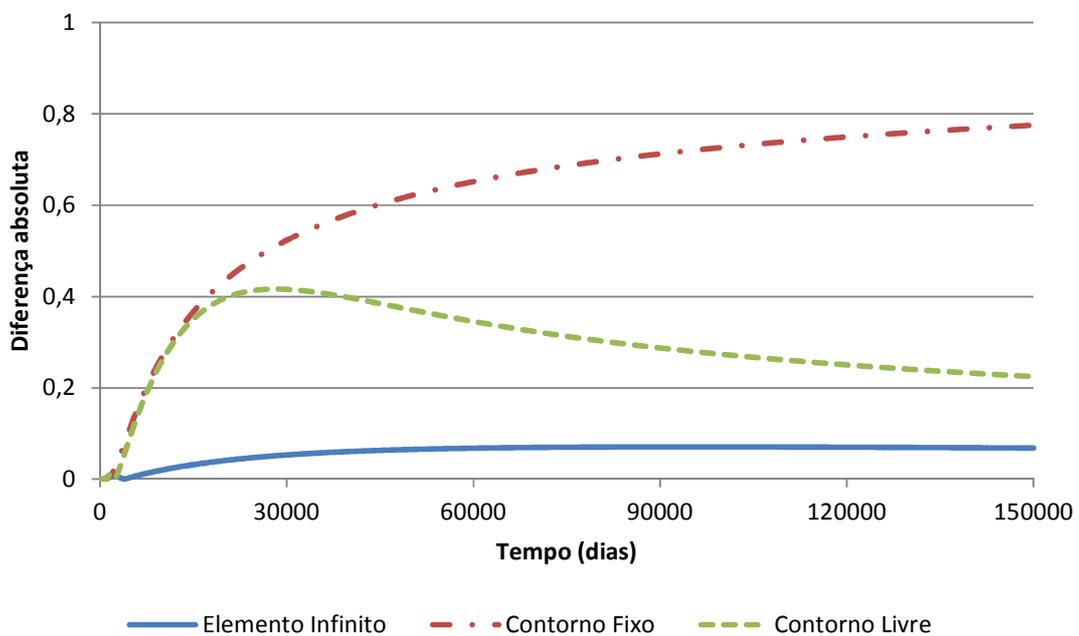


Figura 21 - Diferença absoluta entre a resposta obtida e a analítica em $x = 40$ m

4 - TESTES REALIZADOS

Visando analisar o possível emprego do elemento infinito em questão em outros tipos de problemas de transmissão de calor por difusão, são feitos aqui alguns testes para casos com diferentes condições de contorno.

No exemplo do capítulo anterior, a condição de contorno do problema é uma diferença de temperatura unitária na origem do sistema, o que exige um fluxo de calor positivo e decrescente com o tempo até a estabilização da temperatura no interior do domínio. Uma maneira mais adequada de testar o elemento infinito é em um problema onde a injeção de calor no meio é variável, ora positiva, ora negativa, como por exemplo, para um fluxo senoidal.

4.1. O problema com um fluxo de calor senoidal como condição de contorno

Seja o problema de transferência de calor abaixo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

onde $\kappa = \frac{\lambda_x}{c\rho}$ é a difusividade térmica, com as seguintes condições de contorno:

$$u(x) = 0 \text{ em } t = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \text{sen}(\omega t - \varepsilon) \text{ em } x = 0 \quad (4.3)$$

A resposta analítica para o problema 1D de transferência de calor por difusão com um fluxo senoidal na extremidade esquerda do domínio é dada por (CARSLAW e JAEGER, 1959):

$$u = \frac{1}{\lambda_x} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega}} e^{-x\sqrt{\omega/2\kappa}} \sin\left(\omega t + \varepsilon - \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\omega/2\kappa}\right) - \frac{2\kappa}{\lambda_x \pi} \int_0^\infty (\kappa \mu^2 \sin \varepsilon - \omega \cos \varepsilon) \cos(\omega x) e^{-\kappa \mu^2 t} d\mu \quad (4.4)$$

Conhecendo, então, a resposta analítica do problema, foram realizados diversos testes. Tais testes consideraram a variação da discretização da malha de elementos finitos mediante o aumento ou a diminuição da quantidade e do tamanho dos elementos e, ainda, a variação do passo de tempo da discretização temporal (Δt).

4.2. Simulações executadas

Considerando o mesmo problema do capítulo anterior, ou seja, análise da transferência de calor em um meio sólido semi-infinito constituído de argila, com os parâmetros $c = 0,22 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$, $\rho = 1,8 \text{ t/m}^3$ e $\lambda_x = 25,92 \text{ kcal/m dia}^\circ\text{C}$ e adotando $\omega = 0,001 \text{ s}^{-1}$ e $\varepsilon = 0$ para todos os casos, foram realizados três testes.

Para cada caso rodado, foram considerados dois passos de tempo, $\Delta t = 30$ dias e $\Delta t = 300$ dias, sendo que para o primeiro caso, mesmo com uma diferença pequena, a resposta se aproximou mais da resposta analítica. Sendo assim, serão considerados aqui os testes realizados com $\Delta t = 30$ dias. Todos os testes foram realizados abordando as três condições abaixo:

- 1) Sem o elemento infinito e contorno fixo, ou seja, $u = 0$ em x_L ;

2) Sem o elemento infinito e contorno livre, ou seja, $\frac{du}{dx} = 0$ em x_L ;

3) Com o elemento infinito acoplado ao final da malha de elementos finitos.

Como esperado, considerando os contornos artificiais fixo e livre, a resposta obtida apresentou erros consideráveis, piorando com o passar do tempo. Sendo assim, são mostradas apenas para o Teste 1.

Teste 1: Utilizando a mesma discretização espacial do exemplo 1D apresentado em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a), ou seja, $L = 40$ m e $n_e = 5$, tem-se os seguintes resultados:

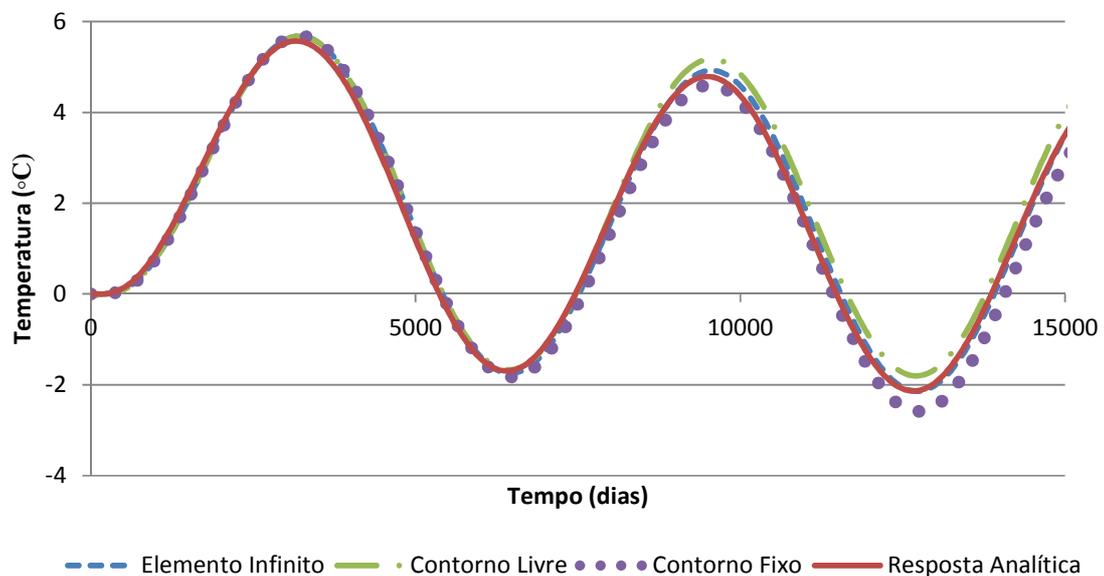


Figura 22 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal

Para um intervalo de tempo dez vezes maior, considerando apenas o elemento infinito, visto que os contornos artificiais não apresentam bons resultados, tem-se:

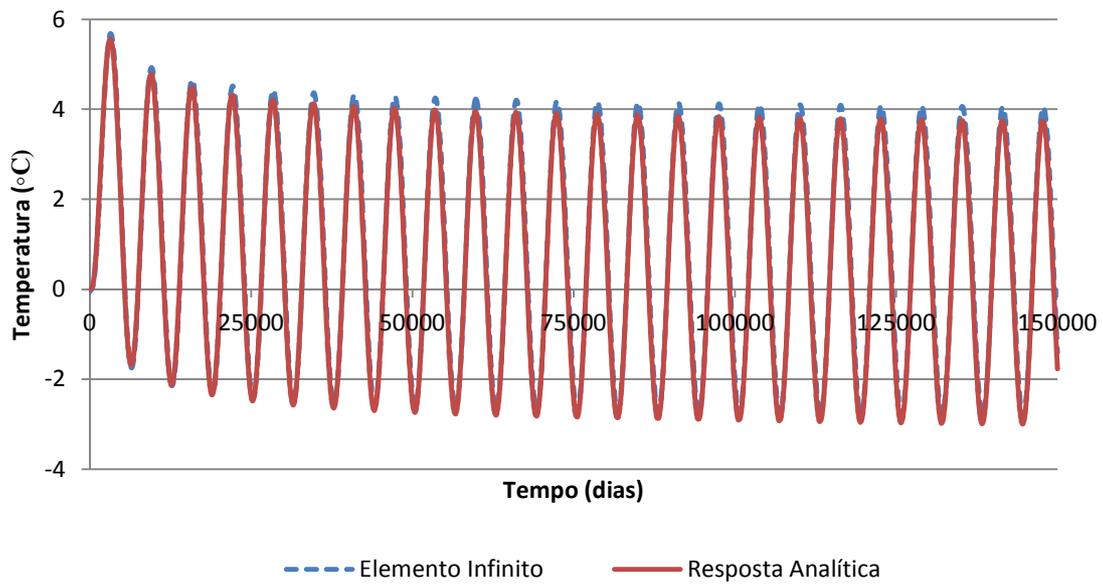


Figura 23 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

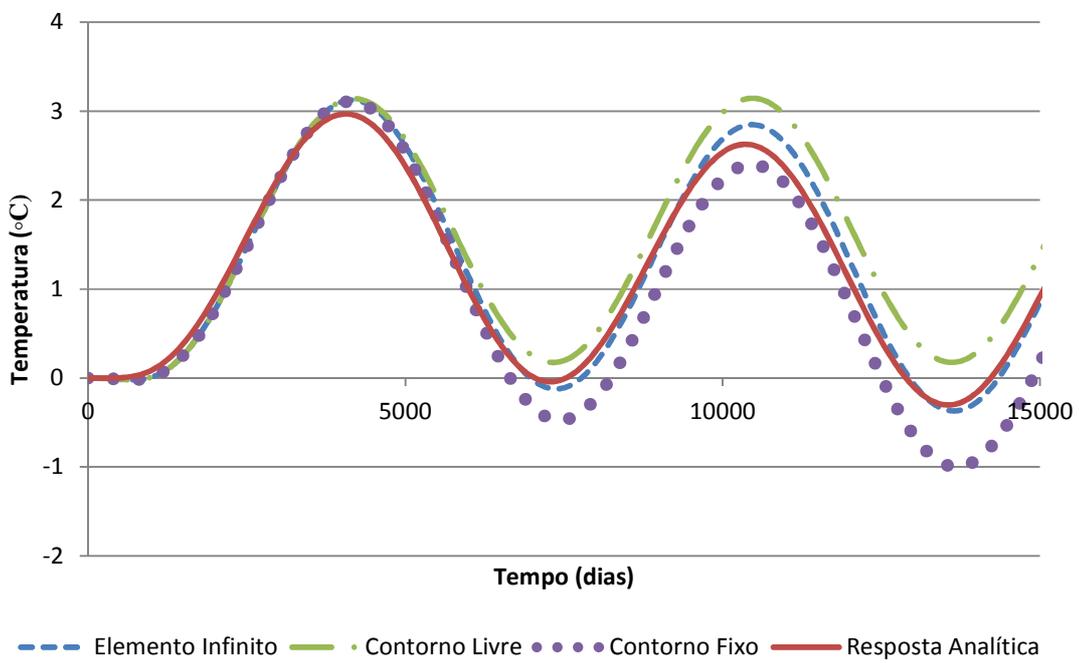


Figura 24 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal

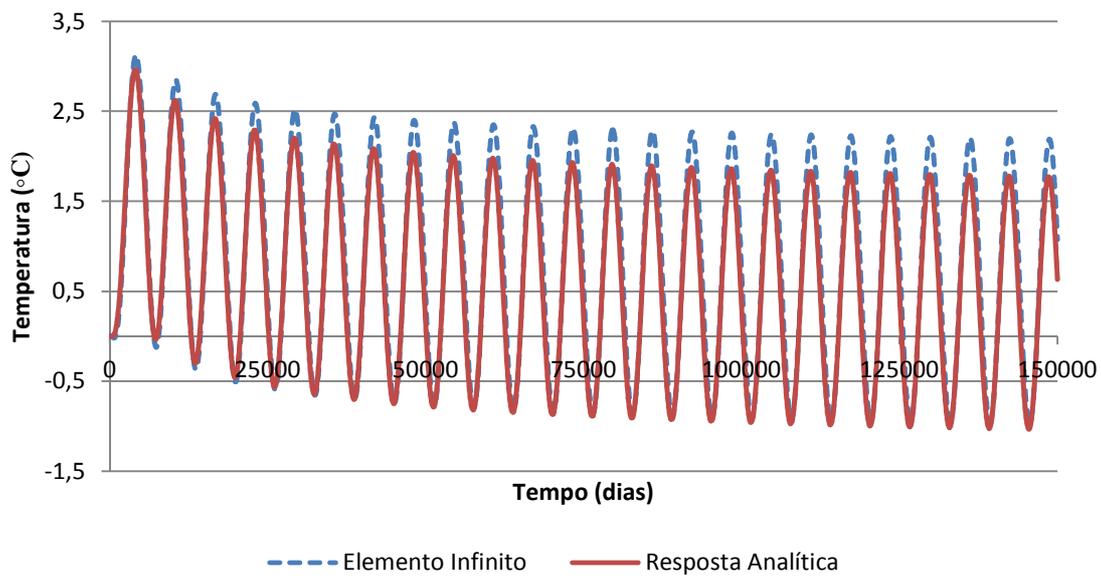


Figura 25 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

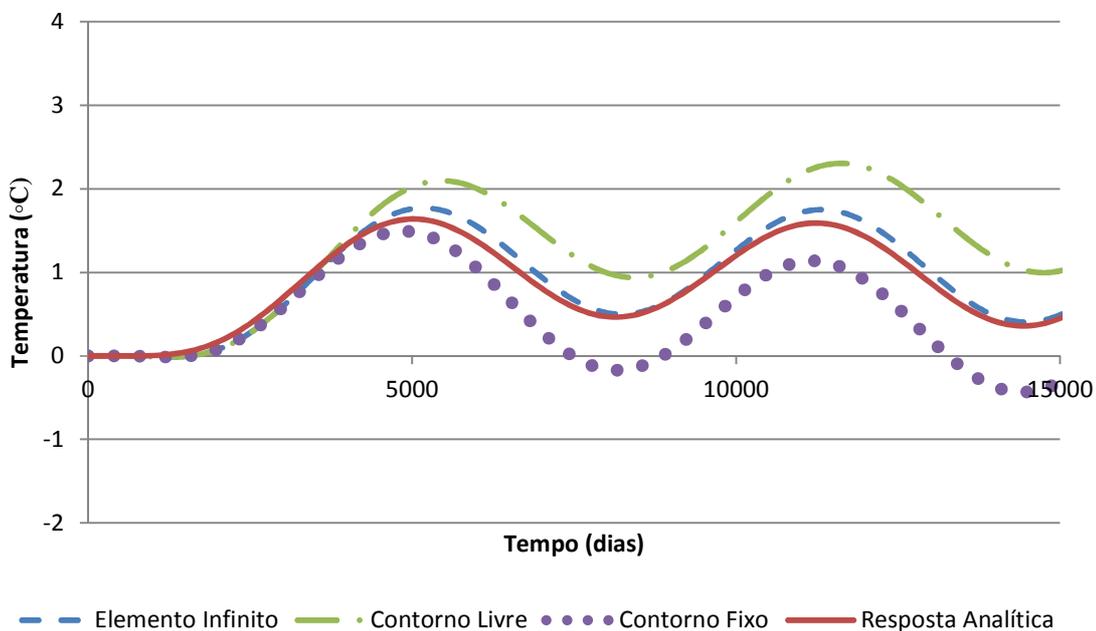


Figura 26 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal

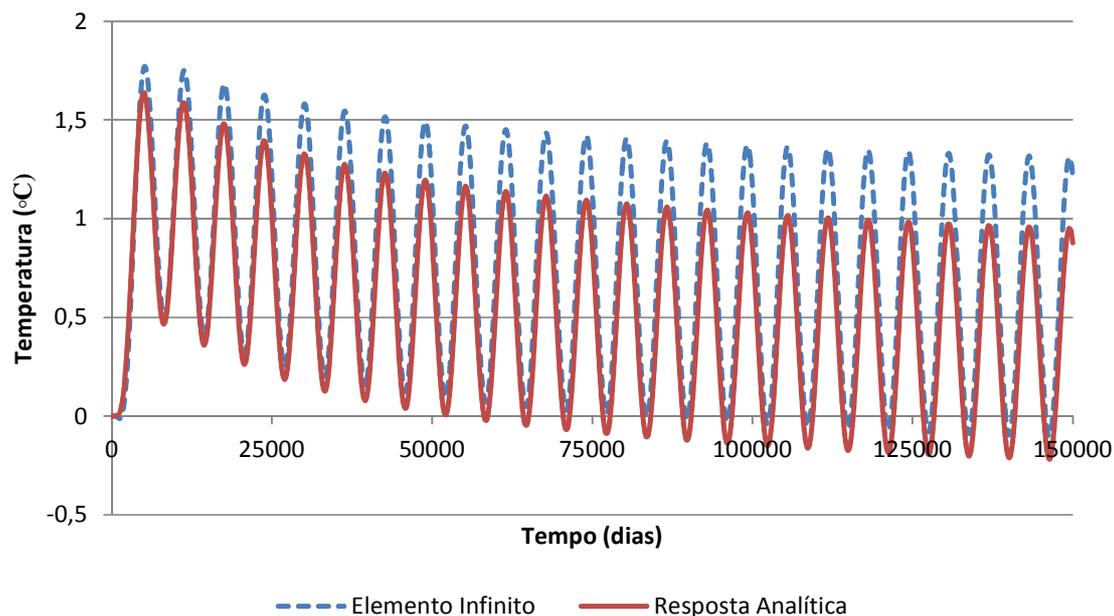


Figura 27 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

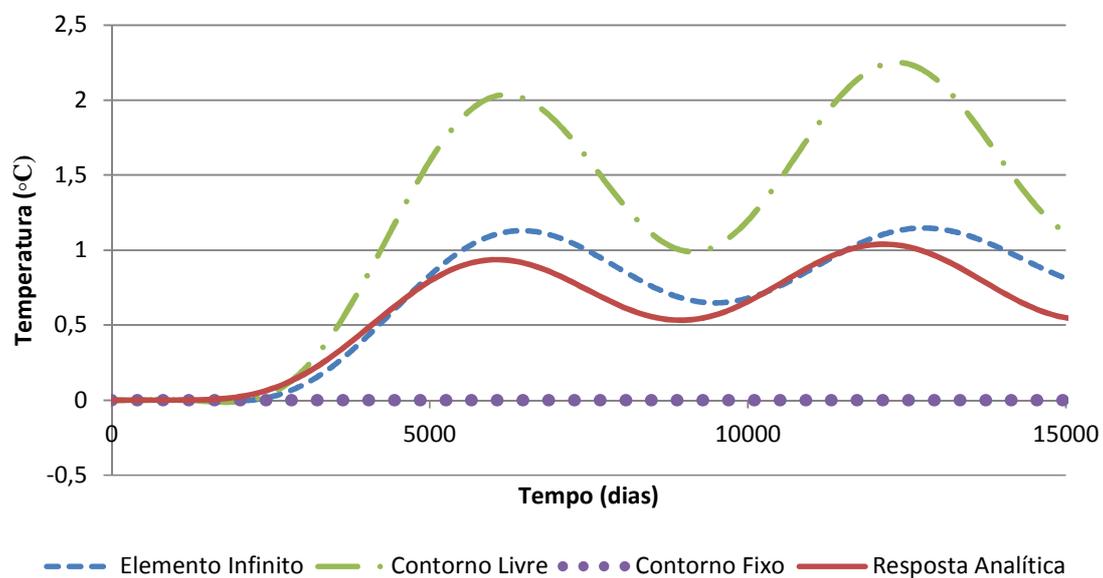


Figura 28 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal

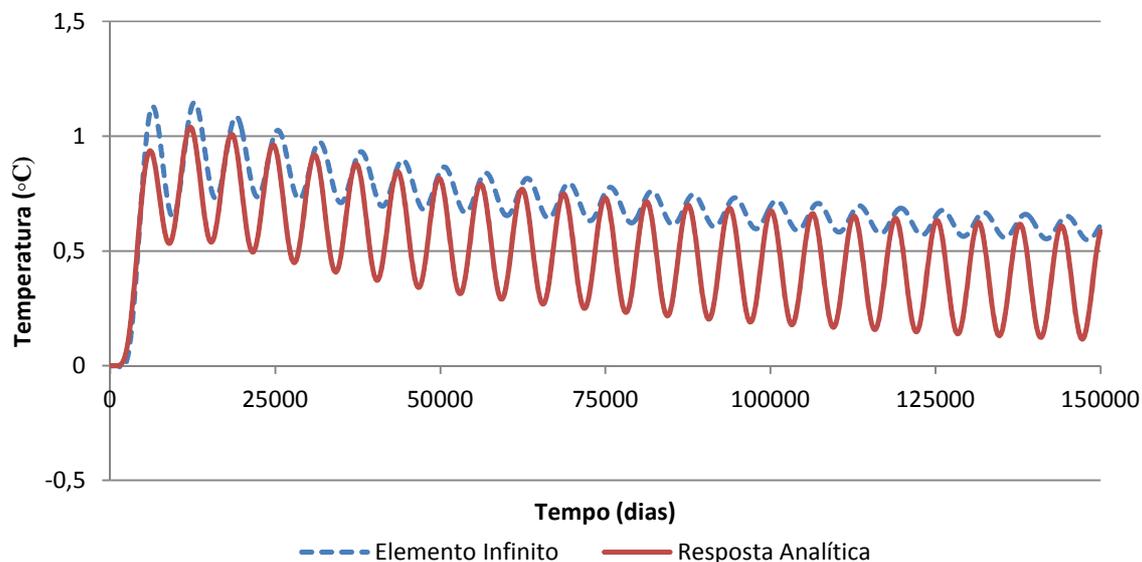


Figura 29 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

Percebe-se, analisando os gráficos acima, que a resposta piora à medida que se aproxima da extremidade final do domínio, onde se encontra o elemento infinito, e que neste ponto a resposta se afasta totalmente da analítica. Isso pode ser explicado pela característica da função de forma do elemento infinito em questão. Por se tratar de uma função que apresenta um decaimento exponencial, a mesma só agrega à temperatura na extremidade final da malha (nó inicial do elemento infinito) um decaimento para o interior do elemento infinito com este aspecto. Ou seja, a variação de temperatura no interior do elemento infinito não se comporta conforme a variação de temperatura no restante do domínio.

A resposta para o elemento infinito em $x = 10$ m apresenta um resultado razoável, porque este ponto do domínio se encontra bastante afastado da extremidade onde está o elemento infinito, ou seja, o efeito que a mudança na configuração da distribuição de

temperatura a partir do elemento infinito provoca no restante do domínio não influencia numa escala apreciável a temperatura em $x = 10$ m .

Teste 2: Discretizando mais a malha de elementos finitos, isto é, utilizando agora, para $L = 40$ m , 40 elementos igualmente espaçados, os resultados se mostram melhores. Junto aos gráficos da resposta, são mostrados também os gráficos de erro, nos quais pode-se ver que estes ainda são relevantes.

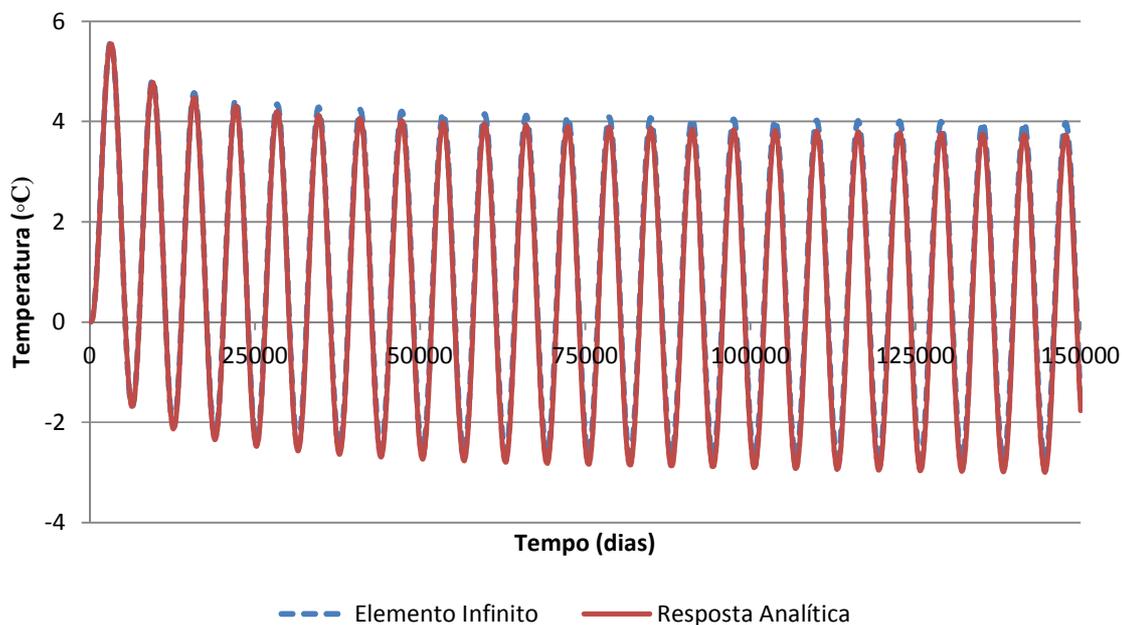


Figura 30 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

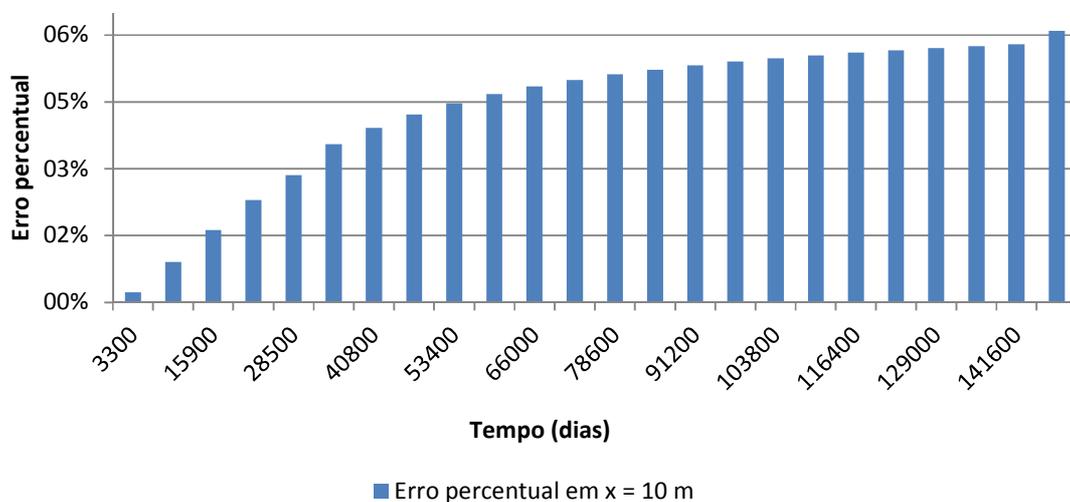


Figura 31 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 10$ m (calculado nos máximos da resposta analítica)

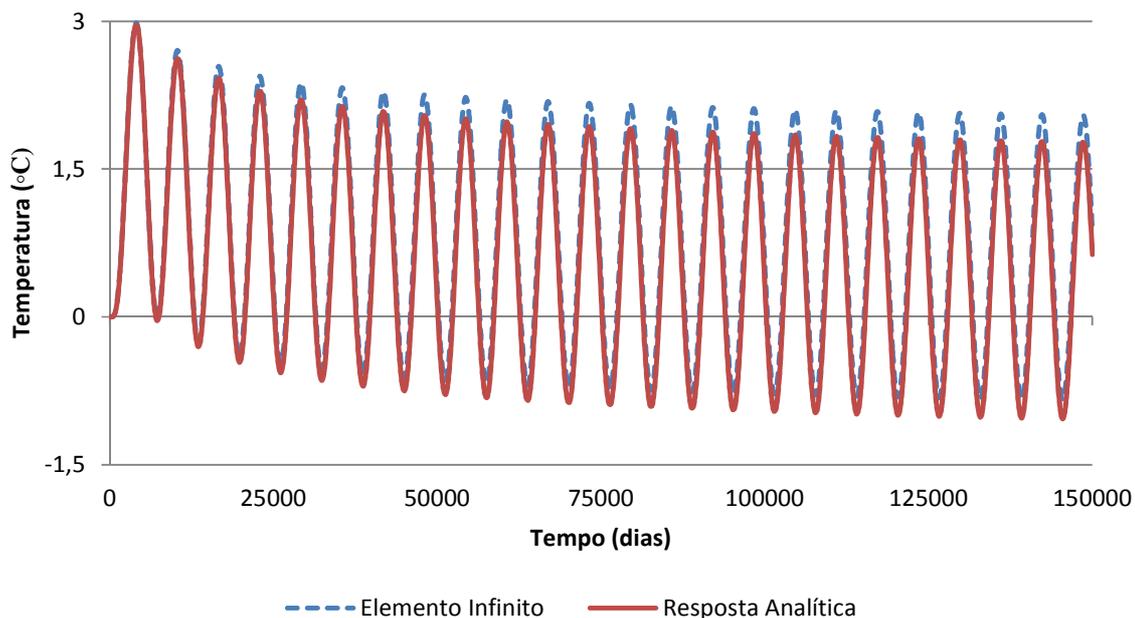


Figura 32 – Temperatura em $x = 20$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

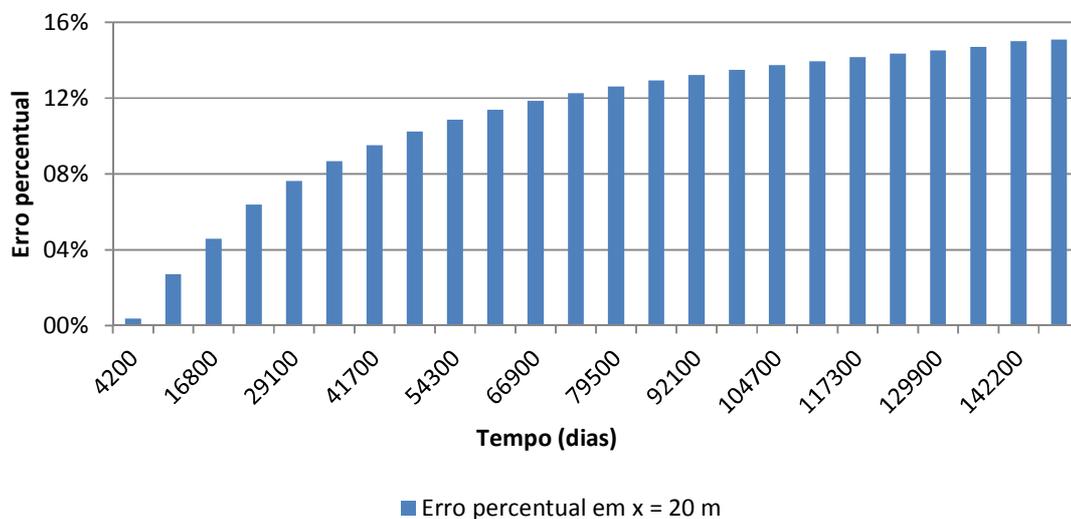


Figura 33 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 20$ m (calculado nos máximos da resposta analítica)

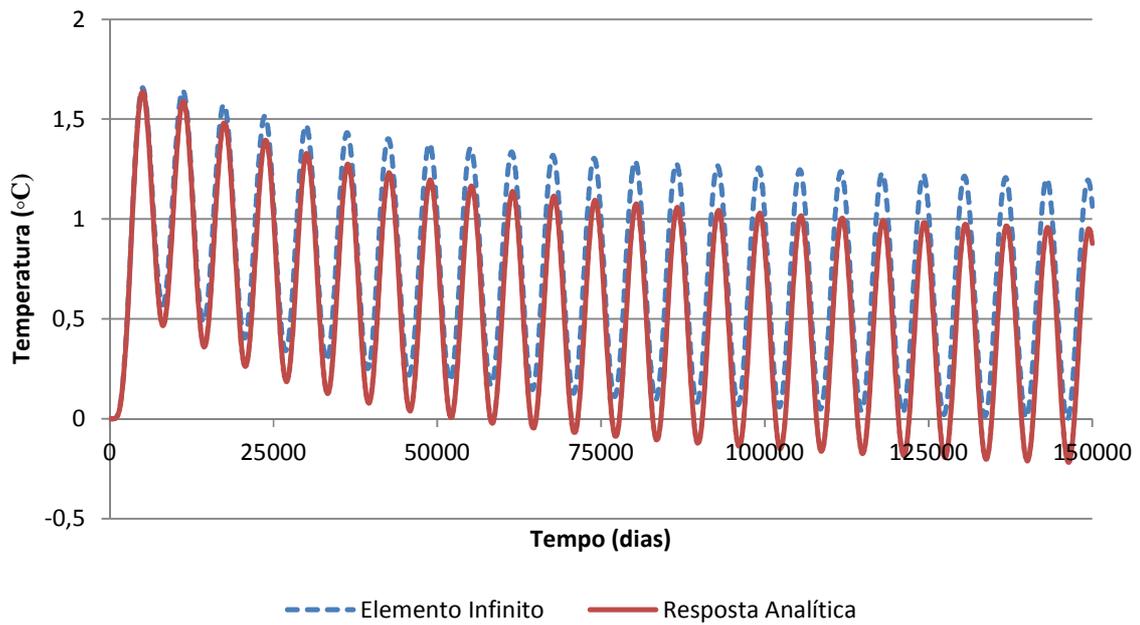


Figura 34 – Temperatura em $x = 30$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

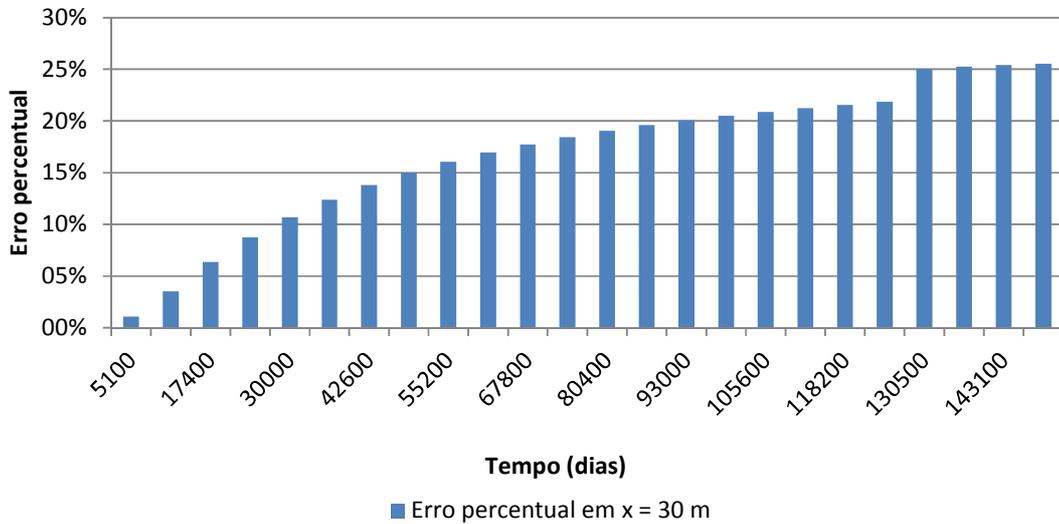


Figura 35 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 30$ m (calculado nos máximos da resposta analítica)

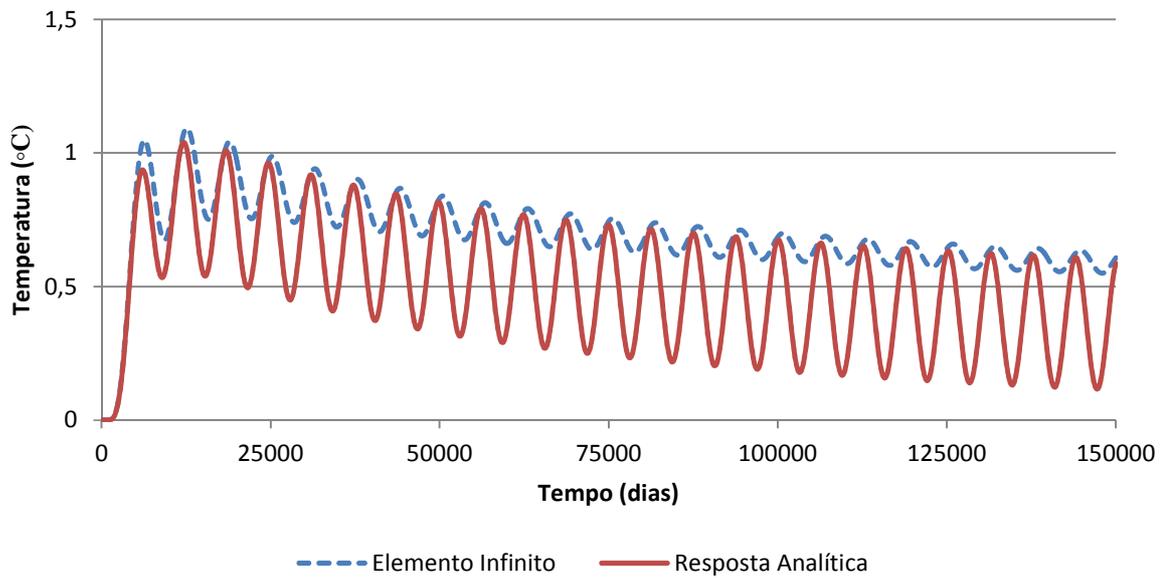


Figura 36 – Temperatura em $x = 40$ m para o fluxo senoidal e um intervalo de tempo de $t = 150.000$ dias

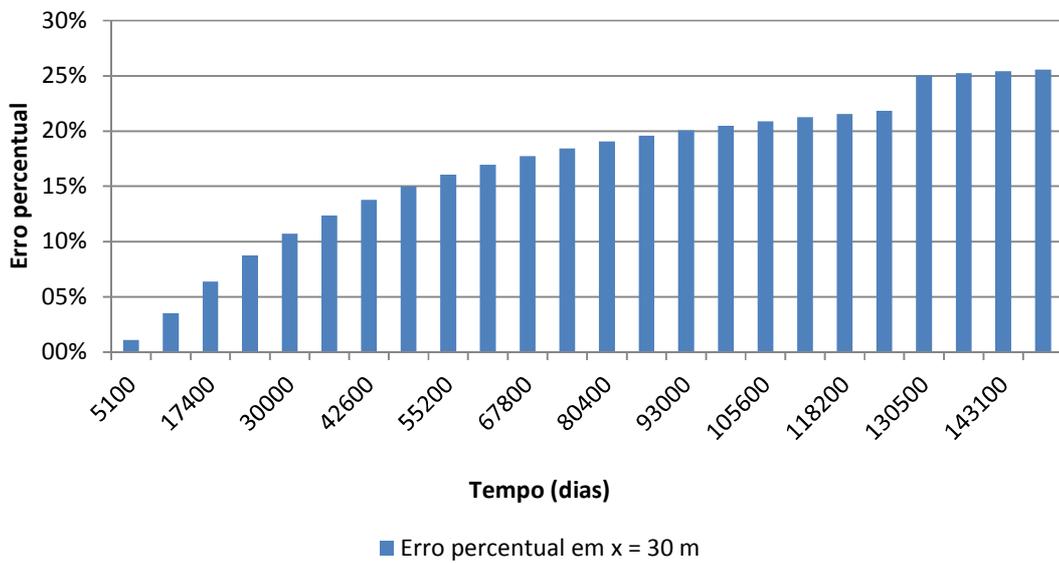


Figura 37 - Erro percentual relativo entre a resposta obtida com o uso do elemento infinito e a resposta analítica em $x = 40$ m (calculado nos mínimos da resposta analítica)

A fim de facilitar a visualização dos gráficos de erros mostrados anteriormente, são considerados nos mesmos apenas os erros relativos em pontos particulares ao longo do tempo. Especificamente, são tomados para $x = 10$ m, $x = 20$ m e $x = 30$ m erros relativos nos pontos de máximo da resposta analítica, onde observam-se as maiores diferenças entre a mesma e a resposta obtida utilizando o elemento infinito. Seguindo o mesmo critério para $x = 40$ m, tais erros são tomados nos pontos de mínimo da resposta analítica.

Como no exemplo anterior, novamente é possível observar o quanto a resposta se afasta da analítica à medida que se aproxima do elemento infinito, o que se confirma pelos gráficos de erro. Percebe-se, ainda, que a amplitude do erro aumenta com o aumento de x , ou seja, quanto mais próximo do elemento infinito, maior o erro.

Teste 3: Comparação da resposta para um mesmo ponto x do domínio, discretizado com elementos finitos espaçados de metro em metro, com o elemento infinito em diferentes posições ao longo do mesmo. Os gráficos são apresentados para um intervalo de tempo específico, de modo a facilitar a visualização do comportamento de cada resposta.

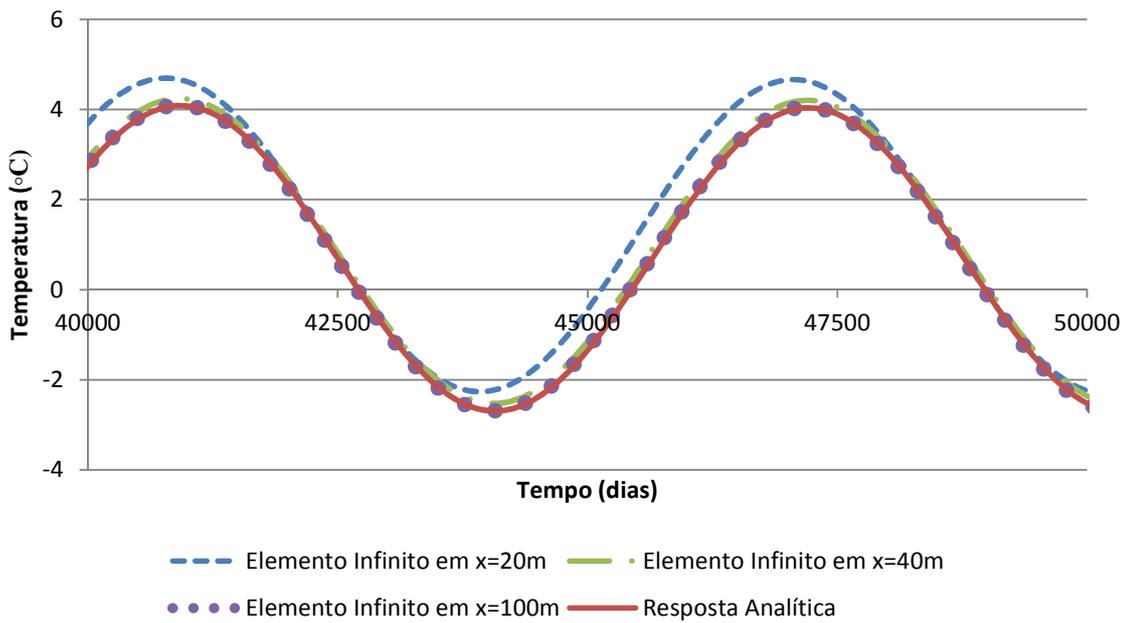


Figura 38 – Temperatura em $x = 10$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições

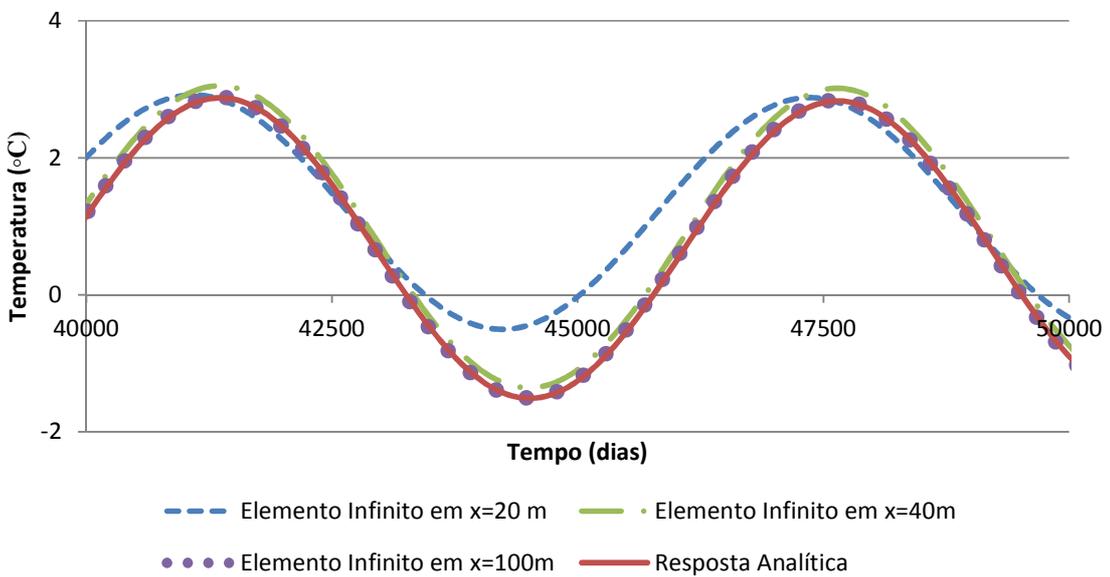


Figura 39 – Temperatura em $x = 15$ m para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições

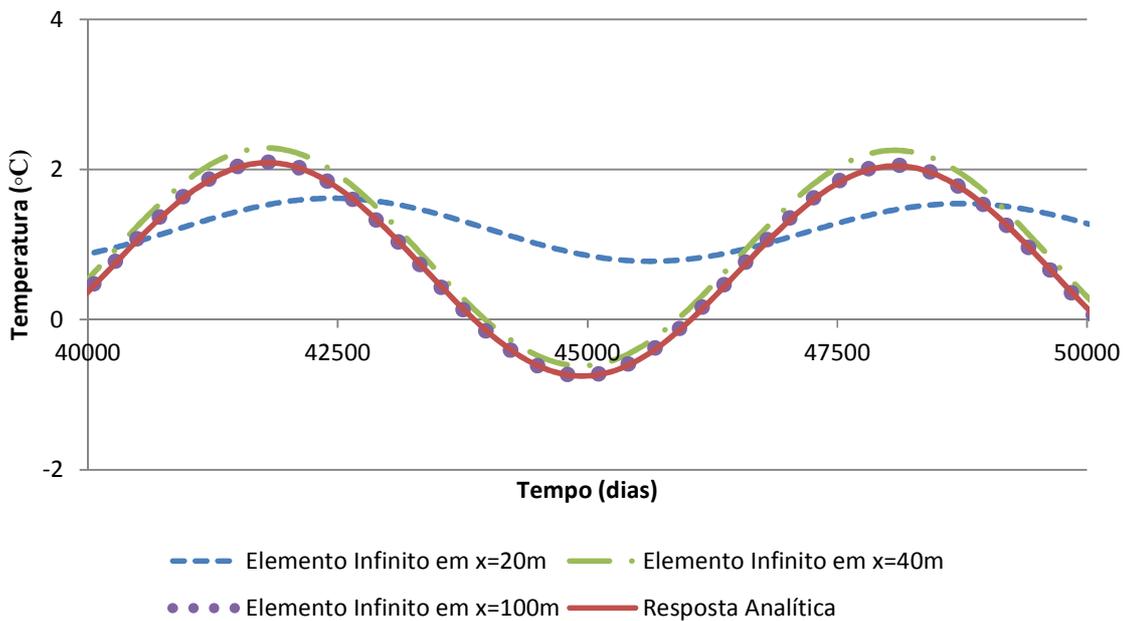


Figura 40 – Temperatura em $x = 20\text{ m}$ para o fluxo senoidal e o elemento infinito em diferentes posições

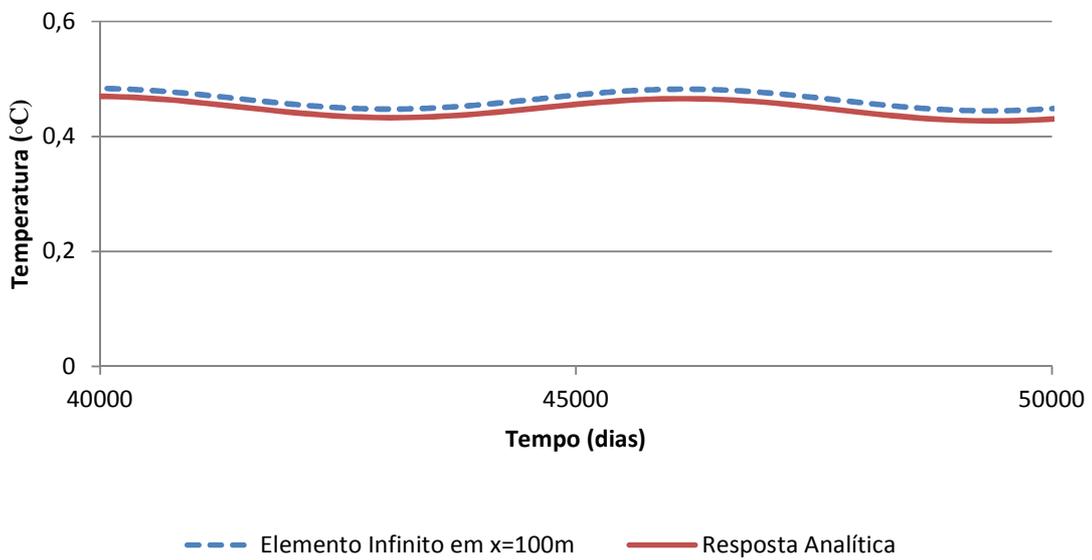


Figura 41 – Temperatura em $x = 70\text{ m}$ para o fluxo senoidal e o elemento infinito em $x = 100\text{ m}$

Neste exemplo pode-se notar o quanto a posição do elemento infinito influencia os resultados. Percebe-se novamente que, para um ponto qualquer do domínio, quanto mais este estiver afastado do elemento infinito, melhor será sua resposta. Com o elemento infinito em $x = 100 \text{ m}$, as respostas em $x = 10 \text{ m}$, $x = 15 \text{ m}$ e $x = 20 \text{ m}$ praticamente coincidem com a analítica e em $x = 70 \text{ m}$ ainda é bastante próxima à mesma. Isto se deve ao fato, que a partir de um certo ponto do domínio, a distribuição de temperatura passa a ter uma forma quase exponencial e aproximadamente constante no tempo, como pode ser visto na Figura 42, onde é mostrada a resposta analítica do problema ao longo do domínio. Ou seja, o comportamento passa a ser similar ao da função de forma do elemento infinito. Sendo assim, esta passa a representar melhor a distribuição real de temperatura do problema e a resposta obtida passa a se aproximar mais da analítica.

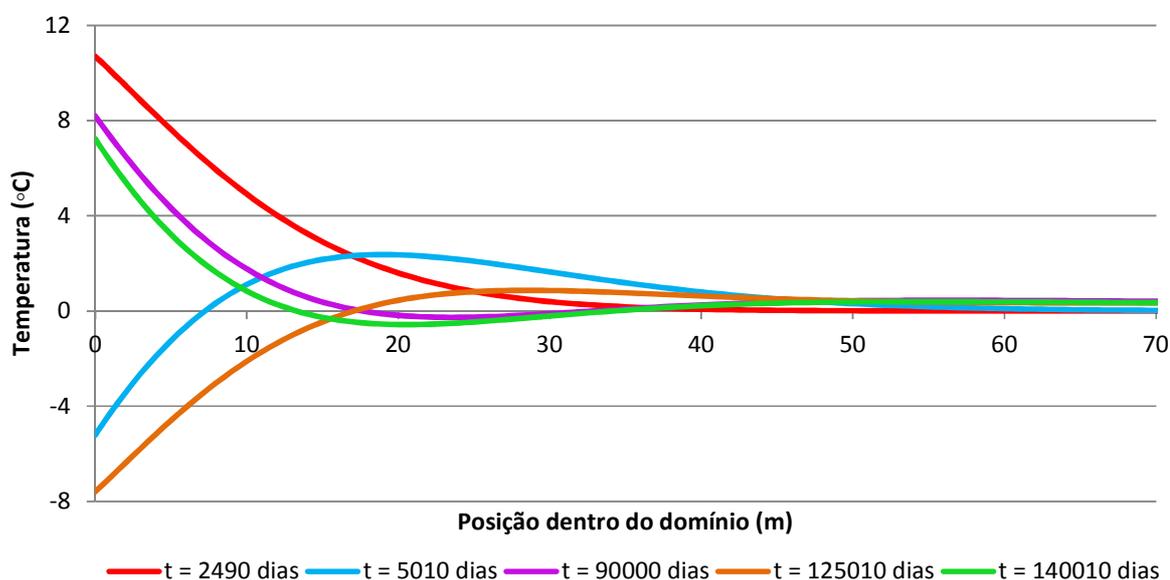


Figura 42 – Distribuição de temperatura ao longo do domínio para o fluxo senoidal

5 - CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme observado, o elemento infinito 1D proposto por ZHAO *et al.* (1993a) apresenta bons resultados para problemas da transferência de calor com comportamento suave, conforme visto no exemplo analisado onde foi considerada uma diferença de temperatura unitária na origem do sistema. Este exemplo ilustra que o elemento pode ser utilizado em diversos casos práticos, por vezes encontrados nos campos da engenharia. Porém, este elemento não apresentou a mesma resposta satisfatória para o problema do fluxo senoidal estudado. Isto porque, para que se possa considerar corretamente, num dado instante de tempo, a temperatura em qualquer ponto no interior do elemento infinito, é necessário conhecer e levar em conta todo o histórico de variação de temperatura em sua extremidade.

Em (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a), a função de forma adotada para o elemento infinito foi:

$$F_{ht}(\xi, t) = e^{\frac{-c\rho[\xi^2 + 2\xi(x_1 - V_x t)]}{4\lambda_x t}}$$

que é apenas uma função de transferência adimensional, por isso funciona somente como um multiplicador, dando a temperatura relativa no interior do elemento infinito apenas em relação à temperatura relativa nodal do mesmo no tempo atual. Conforme já mencionado, sendo esta função de forma uma função que apresenta um decaimento exponencial, a mesma só agrega à temperatura na extremidade final da malha (nó inicial do elemento infinito) um decaimento para o interior do elemento infinito com este aspecto. No entanto, quando a temperatura na extremidade do elemento infinito sofre uma variação arbitrária no tempo, como ocorre no exemplo do fluxo senoidal prescrito, a distribuição real de temperatura

relativa no interior deste não obedece mais a distribuição prevista por $F_{ht}(\xi, t)$. Sendo assim, a variação de temperatura no interior do elemento infinito não representa adequadamente a solução do problema, já que o histórico de temperaturas no nó do elemento infinito influencia a distribuição em seu interior.

O efeito das considerações acima pode ser observado nos resultados dos testes realizados, mostrados no capítulo 4. A má representação da distribuição de temperaturas no interior do elemento infinito influencia de modo significativo a resposta do problema, sendo esta influência tanto maior quanto mais próximo a este elemento.

Apesar de o elemento infinito dissipar energia para fora do domínio computacional em quantidade adequada, conforme observado no exemplo de (ZHAO e VALLIAPPAN, 1993a), o faz de forma incorreta, gerando respostas inadequadas em sua vizinhança. Já os pontos mais afastados desta região, em problemas difusivos com baixa condutividade térmica (caso analisado), não são afetados significativamente, visto que a perturbação gerada pelo elemento infinito, antes que se propague, é dissipada localmente.

A fim de corrigir este problema, é necessário, portanto, adotar uma outra função de forma para o elemento infinito, que considere todo o histórico da temperatura em sua extremidade.

Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se o emprego de uma função de forma baseada em superposições de respostas a funções do tipo Heaviside. Neste caso, a temperatura relativa na extremidade do elemento infinito, nó 1 na Figura 43, é considerada como sendo a superposição de várias funções Heaviside, cada uma com diferentes amplitudes e deslocamentos no tempo, de modo a representar com boa aproximação

Adotando-se as expressões acima no desenvolvimento de um novo elemento infinito, ou seja, com uma nova função de forma, espera-se resultados melhores para um problema como aquele com um fluxo senoidal como condição de contorno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL - FATTAH, T. T., HODHOD, H. A., AKL, A. Y., 2000, "A Novel Formulation of Infinite Elements for Static Analysis", Computers and Structures, v. 77, pp. 371 - 379.
- BATHE, K. J., 1996, Finite Element Procedures. New Jersey, Prentice Hall.
- BETTES, P., 1977, "Infinite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, pp. 53 - 64.
- BETTES, P., 1980, "More on infinite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 15, pp. 1613 - 1626.
- CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C., 1959, Conduction of heat in Solids. 2. ed. Oxford, Clarendon Press.
- CHOW, Y. K., SMITH, I. M., 1981, "Static and Periodic Infinite Solid Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 17, pp. 503 - 526.
- DONG, W., SELVADURAI, A. P. S., 2009, "A Combined Finite and Infinite Element Approach for Modeling Spherically Symmetric Transient Subsurface Flow", Computer & Geosciences, v. 35, pp. 438 - 445.
- KHALILI, N., VALLIAPPAN, S., YAZDI J. T., YAZDCHI, M., 1997, "1D Infinite Element for Dynamic Problems in Saturated Porous Media", Communications in Numerical Methods in Engineering, v. 13, pp. 727-738.

- MANSUR, W. J., 2003, Métodos Numéricos em Recursos Hídricos I. Notas de Aula - Elementos Finitos, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- MEDINA, F., TAYLOR, R. L., 1983, "Finite Element Techniques for Problems of Unbounded Domains", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 19, pp. 1209 - 1226.
- MOTLEY, M. R., PRÉVOST, J. H., 2010, "Simulation of Transient Heat Conduction Using One-dimensional Mapped Infinite Element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 83, pp. 598-610.
- RIBEIRO, F. L. B., 2003, Introdução ao Método dos Elementos Finitos. Notas de Aula do Prof. Fernando L. B. Ribeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- WANG, G., CHEN, L., SONG, C., 2006, "Finite-Infinite Elements for Dynamic Analysis of Axisymmetrically Saturated Composite Foundations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 67, pp. 916-932.
- WROBEL, L. C., 1989, Métodos Numéricos em Recursos Hídricos. v. 1. Rio de Janeiro, ABRH.
- YANG, Y.-B., KUO, S.-R., HUNG, H.-H., 1996, "Frequency-Independent Infinite Elements for Analysing Semi-infinite Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, pp. 3553-3569.
- ZHAO, C., 2009, Dynamic and Transient Infinite Elements - Theory and Geophysical, Geotechnical and Geoenvironmental Applications. Berlin, Springer.

- ZHAO, C., VALLIAPPAN, S., 1993a, "Mapped Transient Infinite Elements for Heat Transfer Problems in Infinite Media", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 108, pp. 119-131.
- ZHAO, C., VALLIAPPAN, S., 1993b, "Transient Infinite Elements for Seepage Problems in Infinite Media", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 17, pp. 323-341.
- ZHAO, C., VALLIAPPAN, S., 1994a, "Numerical Modeling of Transient Contaminant Migration Problems in Infinite Porous Fractured Media Using Finite/Infinite Element Technique. Part I: Theory", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 18, pp. 523-541.
- ZHAO, C., VALLIAPPAN, S., 1994b, "Numerical Modeling of Transient Contaminant Migration Problems in Infinite Porous Fractured Media Using Finite/Infinite Element Technique. Part II: Parametric Study", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 18, pp. 543-564.
- ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K., 2006, *Finite Elements and Approximation*. Mineola, NY, Dover Publications.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., 2000, *The Finite Element Method*. v. 1, 5 ed. Oxford, Butterworth Heinemann.

APÊNDICE A – Dedução da equação da difusão

Neste apêndice são deduzidas as equações diferenciais que regem o problema da transferência de calor. Para isso, considera-se o corpo sólido tridimensional em equilíbrio, de domínio Ω , representando na Figura 45. Neste caso, assume-se como pressuposto que as partículas materiais do corpo estão em repouso, ou seja, não existe convecção e, ainda, nenhuma mudança de fase ou no calor latente do material ocorre. Assumindo que o mesmo obedece às Leis de Fourier para a condução de calor:

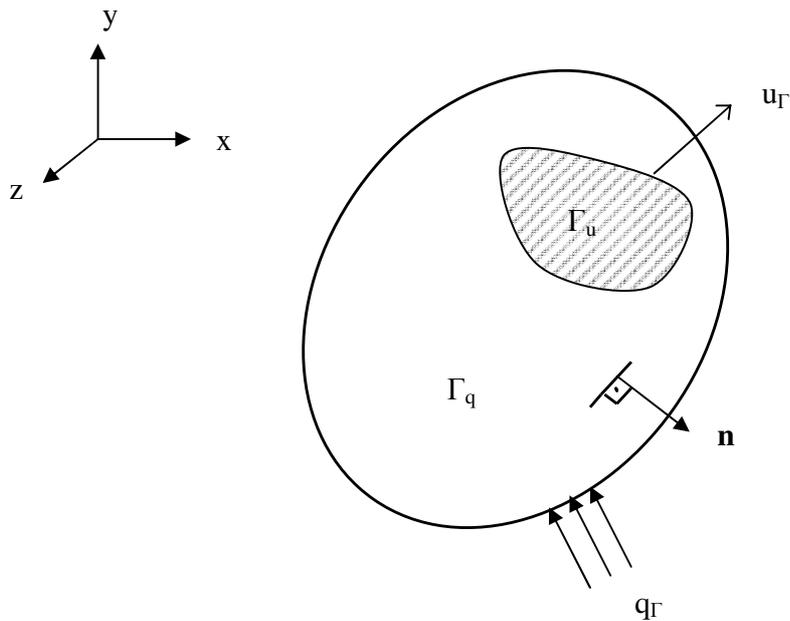


Figura 45 - Corpo submetido à transferência de calor

$$q_x = \lambda_x \frac{\partial u}{\partial x}; \quad q_y = \lambda_y \frac{\partial u}{\partial y}; \quad q_z = \lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

onde q_x , q_y e q_z são os fluxos de calor conduzidos por unidade de área, u é a temperatura do corpo e λ_x , λ_y e λ_z são as condutividades térmicas correspondentes aos eixos principais x , y

e z . Pode-se chegar à equação diferencial que governa o problema transiente de difusão mediante o equilíbrio de fluxo no domínio infinitesimal representado pelo elemento infinitesimal de lados dx , dy e dz da figura a seguir.

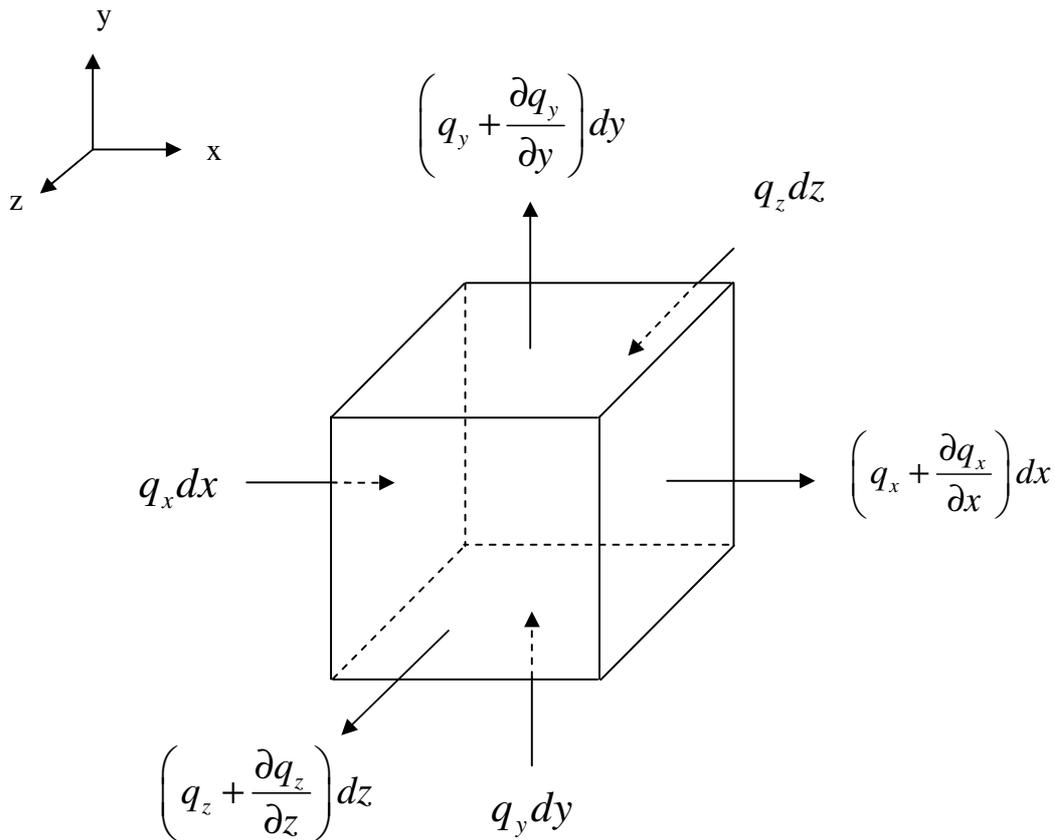


Figura 46 – Fluxo de calor através do elemento infinitesimal

Para que haja conservação de calor é necessário o equilíbrio de fluxo em cada subdomínio de Ω . Ou seja, a diferença entre os fluxos que entram e os que saem do elemento infinitesimal, somada à quantidade de calor gerado no mesmo e à parcela referente

ao fluxo de calor liberado na unidade de tempo devido à mudança de temperatura, devem se anular.

$$dydz \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) + dx dz \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) + dx dy \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - q_z \right) + q_B dx dy dz - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_B - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Onde ρ é densidade, c é o calor específico do material e q_B é quantidade de calor gerado por unidade de volume na unidade de tempo.

Levando (A.1) em (A.3), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q_B - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)