Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Bifurcações de Pontos de Equilíbrio

Juliana Martins

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi

2010

510	Martins, Juliana
M386b	Bifurcações de Pontos de Equilíbrio/ Juliana Martins- Rio Claro: [s.n.], 2010.
	47 f. : il., figs.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
	Orientadora: Simone Mazzini Bruschi
	1. Matemática. 2. p-Laplaciano. 3. Quasilinear. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Juliana Martins
Bifurcações de Pontos de Equilíbrio

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Simone Mazzini Bruschi
Orientadora

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile
Departamento de Matemática - UFSCar

Profa. Dra. Marta Cilene Gadoti
Departamento de Matemática - Unesp-Rio Claro

Rio Claro, 07 de Maio de 2010

Aos meus pais Valdecy e Honória,
com todo amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, por me ajudar em todos os momentos da minha vida, iluminando, dando forças, abrindo portas e guiando meus passos.

A Professora Dr(a). Simone Mazzini Bruschi, meu sincero agradecimento pela orientação, pela dedicação, pela amizade, pelo respeito que sempre teve por mim.

Aos meus pais Valdecy e Honória pela educação que me deram, pelo carinho e dedicação, por estar sempre presente me apoiando em tudo o que faço. Amo muito vocês.

A minha irmã Karina, pelas orações nos momentos difíceis, e ao meu irmão Emerson, que serviu de inspiração nos meus estudos, te admiro muito.

Ao meu noivo Eric, um grande companheiro, pela paciência, carinho e compreensão, por acreditar em mim e sempre me incentivar nos momentos de desânimo e dificuldades.

Ao Javim, grupo de amigos da faculdade, pelas risadas e momentos que jamais serão esquecidos e também é lógico por compartilhar o conhecimento de vocês. Em especial a Paula que sempre esteve ao meu lado. E também aos amigos do Mestrado profissional, principalmente o Gustavo, Jura, Newton e Lili.

As amigas de São José do Rio Preto, que apesar da distância, sempre tiveram presente me apoiando.

Aos professores do departamento de matemática da UNESP-Rio Claro, pela amizade, apoio, e por confiarem em mim.

Resumo

Neste trabalho caracterizamos o conjunto dos pontos de equilíbrio de um problema parabólico quasilinear governado pelo p-Laplaciano, $p > 2$, e do problema parabólico governado pelo Laplaciano.

Palavras-chave: Matemática, p-Laplaciano, Quasilinear.

Abstract

In this work we give a characterization set of the equilibrium points of a parabolic problem quasi-linear governed by the p-Laplacian, $p > 2$, and the a parabolic problem governed by the Laplacian

Keywords: Mathematica, p-Laplacian, quasi-linear.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Este trabalho foi baseado nos artigos [1] e [2] e tem por objetivo principal o estudo de bifurcações, com respeito ao parâmetro λ de pontos de equilíbrio para o problema parabólico quasilinear governado pelo p-Laplaciano, $p > 2$, $r > 0$ dado por

$$\begin{cases} \phi_t = \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{p-2}\phi(1 - |\phi|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, & 0 \leq t < +\infty \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), & x \in (0,1) \end{cases} \tag{1.1}$$

e o problema semilinear dado por

$$\begin{cases} \phi_t = \lambda\phi_{xx} + \phi(1 - |\phi|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, & 0 \leq t < +\infty \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{1.2}$$

Desde que estudamos pontos de equilíbrio de (1.1) e (1.2) trabalhamos com as equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{p-2}\phi(1 - |\phi|^r) = 0, & x \in (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

e

$$\begin{cases} \lambda\phi_{xx} + \phi(1 - |\phi|^r) = 0, & x \in (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Para determinarmos o conjunto das soluções estacionárias de (1.1) e (1.2) utilizamos um método conhecido como "time-map", método que ajusta a velocidade inicial das soluções de um problema de valor inicial a fim de garantir as condições de fronteiras desejadas.

Neste trabalho procuramos uniformizar a notação dos artigos [1] e [2] e da dissertação de mestrado [3], de forma a facilitar a compreensão das semelhanças e diferenças entre os conjuntos dos pontos de equilíbrio.

O trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos básicos. No Capítulo 3 caracterizamos o conjunto das soluções estacionárias de (1.1) e (1.2) e o estudo de bifurcações, com respeito ao parâmetro λ.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e resultados que são utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Integração de Lebesgue

Os conjuntos aqui mencionados estão todos contidos no conjunto dos números reais. Consideremos intervalos $I \subset \mathbb{R}$ da forma $I = [a, b)$, onde a e b são finitos. Quando $a = b$ dizemos que I é degenerado e escrevemos $I = \emptyset$. Denotamos o comprimento de I por $l(I) = b - a$.

Definição 2.1. *Definimos a medida exterior de Lebesgue, ou simplesmente medida exterior, de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ qualquer por*

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} l(I_n) : \textit{ onde } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \textit{ é tal que } A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\},$$

ou seja, o ínfimo é tomado sobre todas as coleções de intervalos da forma descrita antes, e que cobrem o conjunto A.

Definição 2.2. *Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é mesurável segundo Lebesgue, ou então Lebesgue mensurável, ou ainda simplesmente mensurável se para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ temos*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Observação 2.1. Se E é um conjunto mensurável, denotamos $m^*(E)$ por $m(E)$.

Definição 2.3. *Seja f uma função real definida em um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ mensurável. Dizemos que f é uma função Lebesgue mensurável, ou simplesmente mensurável, se para todo escalar real α, o conjunto $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ for mensurável.*

Definição 2.4. *Se uma certa propriedade é válida para um conjunto exceto para um subconjunto deste de medida nula, isto é, a propriedade é válida para quase todos os pontos do conjunto, utilizamos a notação q.t.p para abreviar quase todos os pontos.*

Teorema 2.1. *Sejam $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde E é um conjunto mensurável, com f função mensurável. Se $f = g$ q.t.p, então a função g também é mensurável.*

Definição 2.5. *Se A é um conjunto qualquer, definimos a função característica χ_A do conjunto A como sendo*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A. \end{cases}$$

Notemos que χ_A é mensurável se, e somente se, A é mensurável.

Primeiramente definimos a integral para a classe das funções mensuráveis não negativas e depois estenderemos o conceito para uma função mensurável qualquer. Inicialmente suponhamos que estas funções estão definidas para todo x real.

Definição 2.6. *Uma função φ a valores reais é chamada simples se é mensurável e se assume somente um número finito de valores. Se $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ são os valores que φ assume e $A_i = \{x; \varphi(x) = \alpha_i\}$, para $i = 1, ..., n$, então $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$.*

Os conjuntos A_i são mensuráveis se φ é uma função mensurável (ver [4]).

Definição 2.7. *Seja φ uma função simples e mensurável, então*

$$\int \varphi dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i),$$

sendo α_i e A_i, para $i = 1, \cdots, n$ como anteriormente é chamada integral de φ.

Definição 2.8. *Para qualquer função mensurável não negativa f, a integral de f em $\mathbb{R}$ é dada por*

$$\int f dx = \sup\{\int \varphi dx\ ;\ \varphi \leq f \text{ e } \varphi \text{ é mensurável simples }\}.$$

Teorema 2.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funções mensuráveis. Se $f \leq g$, então $\int f dx \leq \int g dx$.*

Teorema 2.3 (Lema de Fatou)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções não negativas mensuráveis e $f_n(x) \to f(x)$ em q.t.p. Então*

$$\lim inf \int f_n dx \geq \int f dx.$$

Como consequência do Lema de Fatou temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *(Convergência Monótona de Lebesgue). Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $n = 1, 2, ...$, uma sequência de funções mensuráveis tais que para cada $x \in \mathbb{R}$, a sequência numérica $(f_n(x))$ é não decrescente e $f_n(x) \to f(x)$, para todo x. Então*

$$\int f dx = \lim \int f_n dx,$$

em outras palavras,

$$\int \lim f_n dx = \lim \int f_n dx.$$

Demonstração. Tomando $f = \lim f_n$ e aplicando o Lema de Fatou, temos

$$\lim \int f_n dx \geq \int f dx.$$

Por outro lado, $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, logo pelo teorema 2.2 temos

$$\int f_n dx \leq \int f dx, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim \int f_n dx \leq \int f dx.$$

Como $\lim \int f_n dx \geq \int f dx$ e $\int f_n dx \leq \int f dx$, temos que

$$\lim \int f_n dx = \int f dx$$

como queríamos demonstrar. □

Estenderemos agora a definição de integral para uma grande classe de funções mensuráveis, não necessariamente não negativas. As funções em questão poderão ter valores estendidos. Daremos condições de integrabilidade e, para aquelas que satisfizerem estas condições, chamaremos de Lebesgue integráveis ou integrável em relação a Lesbegue.

Definição 2.9. *Se $f(x)$ é uma função real qualquer, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ são as partes positiva e negativa de f, respectivamente.*

Teorema 2.5. *Seja f uma função real qualquer, valem as seguintes informações.*

i) $f = f^+ - f^-$.

ii) $|f| = f^+ + f^-$.

iii) $f^+, f^- \geq 0$.

iv) *f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são ambas mensuráveis.*

Definição 2.10. *Se f é uma função mensurável e $\int f^+ dx < \infty$, $\int f^- dx < \infty$, dizemos que f é integrável e sua integral é dada por*

$$\int f(x)dx = \int f^+ dx - \int f^- dx.$$

Observamos que uma função mensurável f é integrável se, e somente se, $|f|$ o é, e então

$$\int |f| dx = \int f^+ dx + \int f^- dx.$$

Definição 2.11. *Se f é uma função mensurável tal que ao menos uma das integrais $\int f^+ dx$, $\int f^- dx$ é finita, então*

$$\int f(x)dx = \int f^+ dx - \int f^- dx.$$

Pela definição anterior, são permitidas as integrais terem valores infinitos, então essa definição é uma extensão da definição 2.8. Mas f é dita integrável somente se as condições da definição 2.10 são satisfeitas, isto é, se $|f|$ tem integral finita.

A seguir enunciamos um teorema e uma proposição que utilizamos na demonstração do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 2.6 (Propriedades)**.** *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções integráveis. São válidas as afirmações:*

(i) *af é integrável e $\int af dx = a \int f dx$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.*

(ii) *$f + g$ é integrável e $\int f + g dx = \int f dx + \int g dx$.*

(iii) *Se $f = 0$ q.t.p então $\int f dx = 0$.*

(iv) *Se $f \leqslant g$ q.t.p então $\int f dx \leqslant \int g dx$.*

(v) *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ são mensuráveis e tais que $A \cap B = \emptyset$ então*

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx.$$

Proposição 2.1. *Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, tais que $|f| \leqslant |g|$ q.t.p e g é integrável então f é integrável.*

Teorema 2.7 (Teorema da Convegência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $n = 1, 2, ...$, uma sequência de funções mensuráveis tais que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ em q.t.p, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável e $f_n(x) \to f(x)$ em q.t.p. Então f é integrável e*

$$\lim \int f_n dx = \int f dx.$$

Demonstração. Como para cada natural n temos $|f_n| \leqslant g$, segue que $|f| \leqslant g$. Logo pela proposição 2.1 temos que para qualquer n, as funções f_n e f são integráveis. Temos também que $(g + f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de funções não negativas mensuráveis, assim, pelo Lema de Fatou obtemos

$$\liminf \int (g + f_n) dx \geqslant \int \liminf (g + f_n) dx.$$

Então $\int g dx + \liminf \int f_n dx \geqslant \int g dx + \int f dx$ e como g é integrável temos $\int g dx < \infty$ e daí

$$\liminf \int f_n dx \geqslant \int f dx. \tag{2.1}$$

Agora, a sequência $(g-f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é também de funções mensuráveis não negativas. Logo, pelo Lema de Fatou novamente obtemos

$$\liminf \int (g-f_n)dx \geqslant \int \liminf\,(g-f_n)dx.$$

Então $\displaystyle\int gdx - \limsup \int f_n dx \geqslant \int g - \int f$ e, sendo g integrável temos

$$\limsup \int f_n dx \leqslant \int f dx. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) temos

$$\limsup \int f_n dx \leqslant \int f dx \leqslant \liminf \int f_n dx,$$

ou seja,

$$\lim \int f_n dx = \int f dx.$$

□

2.2 Propriedades Gerais das Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção iremos enunciar os principais resultados referentes a existência e unicidade de soluções, a definição de ponto de equilíbrio e também de bifurcação de ponto de equilíbrio.

Iremos considerar aqui o problema de Cauchy dado por

$$x' = f(t,x) \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R}\times E$ sendo $E=\mathbb{R}^n$. Um elemento de $\mathbb{R}\times E$ será denotado por $(t,x), t\in\mathbb{R}$ e $x=(x_1,...,x_n)$ em E. Adotaremos em $\mathbb{R}\times E$ a norma $|(t,x)| = max\{|t|,|x|\}$, onde $|x|$ denota uma norma em E.

Seja $f:\Omega\to E$ uma aplicação contínua e seja $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo não degenerado.

Definição 2.12. *Uma função diferenciável $\varphi: I\to E$ chama-se solução da equação*

$$x' = f(t,x)$$

no intervalo I se:

i) o gráfico de φ em I, isto é, $\{(t,\varphi(t)); t\in I\}$ está contido em Ω.

ii) $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ para todo $t\in I$.

Definição 2.13. *Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitiziana em Ω relativamente a segunda variável se existe uma constante K tal que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y| \tag{2.4}$$

para todo $(t,x),(t,y) \in \Omega$, K é chamada de constante de Lipschitz de f.

Lema 2.1 (Lema de Contração)**.** *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração, isto é, $d(F(x),F(y)) \leq Kd(x,y)$, para $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo p, por F, isto é, $F(p) = p$.*

Corolário 2.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \to X$ é contínua e, para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por F.*

Teorema 2.8. *(Teorema de Picard.) Seja f contínua e Lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t-t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x-x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω então existe uma única solução de*

$$x' = f(t,x) \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α, onde $\alpha = min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração. Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$ com métrica

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \to E$ função composta definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, \; t \in I_\alpha. \tag{2.5}$$

Destacamos as seguintes propriedades de F:

i) $F(X) \subseteq X$.

ii) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Provaremos primeiro o item i).

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds \Big| \\ &\leq M|t-t_0| \\ &\leq M\alpha \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Com isso provamos que $F(X) \subseteq X$.

Agora, mostraremos o item *ii*).

De fato, para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n|t-t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \ t \in I_\alpha, \tag{2.6}$$

onde K é uma constante de Lipschitz de f.

Mostramos que esta desigualdade é válida por indução finita em n.

Para $n = 0$ temos que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, \ t \in I_\alpha.$$

Suponhamos válida para $n = k$, ou seja,

$$|F^k(\varphi_1)(t) - F^k(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^k|t-t_0|^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2), \ t \in I_\alpha.$$

E temos que provar que vale para $n = k+1$

$$\begin{aligned}
|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \\
&\leq \Big| \int_{t_0}^{t} |f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_1)(s))| ds \Big| \\
&\leq \Big| \int_{t_0}^{t} K|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_1)(s)| ds \Big| \\
&\leq K \Big| \int_{t_0}^{t} \frac{K^k(t_0 - s)^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \Big| \\
&= \frac{K^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2)
\end{aligned}$$

portanto, $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \dfrac{K^n\alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$ e, para n grande, $\dfrac{K^n\alpha^n}{n!} < 1$, pois este é o termo geral cuja soma é $\exp^{k\alpha}$, onde F^n é uma contração de X. Pelo corolário do Lema da Contração, existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$, e isto prova o teorema.

□

Corolário 2.2. *Seja Ω aberto em $\mathbb{R} \times E$ e seja $f : \Omega \to E$ contínua com $D_2 f$ também contínua. Para todo ponto (t_0, x_0) em Ω existe uma vizinhança $V = I(t_0) \times B(x_0)$ tal que $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ tem uma única solução em $I(t_0)$. Além disso, o gráfico desta solução está contido em V.*

Se φ é uma solução da equação diferencial em um intervalo I dizemos $\hat{\varphi}$ é uma continuação de φ se $\hat{\varphi}$ é definida em um intervalo $\hat{I}$ contido em I, $\hat{\varphi}$ coincide com φ em I e $\hat{\varphi}$ satisfaz a equação diferencial em $\hat{I}$. Uma solução φ é não continuada se não existir essa continuação, ou seja, o intervalo é o intervalo máximo de existência da solução.

Lema 2.2. *Seja f contínua e limitada num aberto Ω de $\mathbb{R} \times E$ então qualquer solução $\varphi(t)$ de $x' = f(t, x)$ definida em um intervalo (a, b) é tal que $\varphi(a+0)$ e $\varphi(b-0)$ existe. Se $f(b, \varphi(b-0))$ é definida de modo que $f(t, x)$ é contínua em $(b, \varphi(b-0))$. Então $\varphi(t)$ é uma solução de $x' = f(t, x)$ em $(a, b]$. A mesma observação vale para a extremidade esquerda.*

Teorema 2.9. *Seja f contínua num aberto Ω de $\mathbb{R} \times E$ e $\varphi(t)$ é uma solução de $x' = f(t, x)$ em algum intervalo, então existe φ contínua para um intervalo maximal de existência. Além disso, se (a, b) é um intervalo maximal de existência de uma solução x de $x' = f(t, x)$, então $(t, x(t))$ tende a fronteira de Ω quando $t \to a$ e $t \to b$.*

Agora, para finalizar vamos enunciar as definições de ponto de equilíbrio e de ponto de bifurcação que serão utilizadas.

Definição 2.14. *Se $\bar{x}$ é um zero de f, isto é, $f(\bar{x}) = 0$, então $x(t) \equiv \bar{x}$ é solução de $x' = f(x)$ e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto $\bar{x}$ é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.*

Agora definimos ponto de bifurcação. Consideramos $f : \mathbb{R} \times B_1 \to B_2$, e B_1, B_2 espaços de Banach.

Definição 2.15. *Suponhamos que $\Gamma : (\lambda, x(\lambda))$ é uma curva de solução de $f(\lambda, x) = 0$. Seja $(\lambda_0, x_0) \equiv (\lambda_0, x(\lambda_0))$ um ponto interior dessa curva, com a propriedade que toda vizinhança (λ_0, x_0) em $\mathbb{R} \times B_1$ contém soluções que não são de Γ. Então (λ_0, x_0) é chamado de ponto de bifurcação com respeito a curva Γ. Soluções de $f(\lambda, x) = 0$ próximas (λ_0, x_0) e que não pertecem a curva Γ, são muitas vezes chamados de "conjunto de bifurcação".*

Essa definição e alguns resultados são encontrados em [5].

3 Bifurcações de Pontos de Equilíbrios

Neste capítulo, apresentamos o estudo de bifurcações, com respeito ao parâmetro $\lambda > 0$, de pontos de equilíbrio para o problema parabólico quasilinear governado pelo p-Laplaciano, $p > 2$, $r > 0$ dado por

$$\begin{cases} \phi_t = \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{p-2}\phi(1-|\phi|^r), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, \quad 0 \leq t < +\infty \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

e o problema semilinear dado por

$$\begin{cases} \phi_t = \lambda\phi_{xx} + \phi(1-|\phi|^r), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, \quad 0 \leq t < +\infty \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.2}$$

Os problemas quasilinear (3.1) e semilinear (3.2) são estudados respectivamente em [6] e [7].

3.1 Problema Auxiliar e a Função Time Mapping

Os pontos de equilíbrio de (3.1) e (3.2) são soluções das equações

$$\begin{cases} \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{p-2}\phi(1-|\phi|^r) = 0, \quad x \in (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{cases} \lambda\phi_{xx} + \phi(1-|\phi|^r) = 0, \quad x \in (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Este estudo foi baseado nos artigos [1] e [2] e na dissertação de mestrado [3].

O estudo do conjunto dos pontos de equilíbrio é importante, pois o atrator é caracterizado através do conjunto instável dos pontos de equilíbrio (ver [7]).

Consideremos o seguinte problema auxiliar de valor inicial

$$\begin{cases} \lambda(\psi_p)_x + f_p(\phi) = 0, \quad x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = 0 \ \ \psi_p(0) = \alpha_p, \end{cases} \tag{3.5}$$

sendo que α_p é um parâmetro, $\psi_p = |\phi_x|^{p-2}\phi_x$ e $f_p(\phi) = |\phi|^{p-2}\phi(1 - |\phi|^r)$.

Vamos utilizar o método conhecido por "time-map", para estudar a equação (3.5).

Observamos que se encontrarmos uma solução ϕ de (3.5) que satisfaz a condição $\phi(1) = 0$, ϕ também será solução do problema (3.3) se $p > 2$ ou do problema (3.4) se $p = 2$. Com o intuito de obter soluções de (3.5) satisfazendo $\phi(1) = 0$ vamos variar α_p e analisaremos o retrato de fase de (3.5).

Denotaremos por $\phi(\cdot, \alpha_p)$ a solução de (3.5) com $\phi(0) = 0$ e $\psi_p(0) = \alpha_p$.

Definimos $F_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} F_p(\phi) &= \int_0^\phi f_p(s)ds \\ &= \int_0^\phi |s|^{p-2}s(1 - |s|^r)ds \\ &= \frac{|\phi|^p}{p} - \frac{|\phi|^{p+r}}{p+r}. \end{aligned}$$

Observe que F_p é estritamente crescente em $[0, 1]$, pois

$$F_p'(\phi) = f_p(\phi) = |\phi|^{p-2}\phi(1 - |\phi|^r) > 0,$$

para $\phi \in [0, 1]$.

Agora, multiplicando a equação de (3.5) por ϕ_x temos

$$\lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x\phi_x + \phi_x f_p(\phi) = 0.$$

Integrando de 0 a x obtemos a expressão

$$\int_0^x \lambda(|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s))_x\phi_x(s) + \phi_x(s)f_p(\phi(s))ds = 0.$$

Observação 3.1. Se $p = 2$, ϕ é de classe C^2, pois $\phi_{xx} = -\dfrac{f_p(\phi)}{\lambda}$. Se $p > 2$, ϕ é duas vezes diferenciável a menos de um conjunto de medida nula (ver [3]).

Assim,

$$\int_0^x \lambda((p-2)|\phi_x(s)|^{p-3}\phi_{xx}(s)|\phi_x(s)| + |\phi_x(s)|^{p-2}\phi_{xx}(s))\phi_x(s) + \phi_x(s)f_p(\phi(s))ds = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^x \lambda((p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)) + \phi_x(s)f_p(\phi(s))ds = 0.$$

Como $\dfrac{d}{ds}F_p(\phi(s)) = f_p(\phi(s))\phi_x(s)$, então

$$\int_0^x \lambda((p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)) + \frac{d}{ds}F_p(\phi(s))ds = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds + \int_0^x \frac{d}{ds}F_p(\phi(s))ds = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds + [F_p(\phi(s))]_0^x = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds + F_p(\phi(x)) - F_p(\phi(0)) = 0, \tag{3.6}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Vamos resolver

$$\lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds.$$

Fazendo $u = \phi_x(s)$ temos que

$$\lambda(p-1)\int_0^x |\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds = \lambda(p-1)\int_{\phi_x(0)}^{\phi_x(x)} |u|^{p-2}udu.$$

Fazendo agora, a mudança $v = u^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda(p-1)\int_0^x |\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)ds &= \frac{\lambda(p-1)}{2}\int_{\phi_x^2(0)}^{\phi_x^2(x)} |v|^{\frac{p-2}{2}}dv \\
&= \frac{\lambda(p-1)}{2}\Big[\frac{2|v|^{\frac{p}{2}}}{p}\Big]_{\phi_x^2(0)}^{\phi_x^2(x)} \\
&= \frac{\lambda(p-1)}{p}[|\phi_x^2(x)|^{\frac{p}{2}} - |\phi_x^2(0)|^{\frac{p}{2}}] \\
&= \frac{\lambda(p-1)}{p}[|\phi_x(x)|^p - |\phi_x(0)|^p].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}(|\phi_x(x)|^p - |\phi_x(0)|^p) + F_p(\phi(x)) - F_p(\phi(0)) = 0.$$

Como $F_p(\phi(0)) = 0$, temos que

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x(x)|^p - \frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x(0)|^p + F_p(\phi(x)) = 0, \tag{3.7}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$, desde que $|\psi_p(x)| = |\phi_x(x)|^{p-1}$, segue que, $|\psi_p(x)|^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x(x)|^p$, e assim

$$|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}} = |\psi_p(0)|^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x(0)|^p.$$

Assim, voltando na relação (3.7) temos que

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}|\psi_p|^{\frac{p}{p-1}} + F_p(\phi) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.8}$$

A seguir definimos α_{p_0} e $\phi_{\alpha,p}$ como segue

$$F_p(1) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_{p_0}|^{\frac{p}{p-1}} \tag{3.9}$$

$$F_p(\phi_{\alpha,p}) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}}, \tag{3.10}$$

sendo que $\phi_{\alpha,p} \in (0,1]$, $\phi_{\alpha,p}$ tem valor máximo de ϕ e α_{p0} é a "velocidade" máxima para que ϕ tenha seu primeiro máximo igual a 1.

Notemos que como F_p e $|\psi_p|$ são funções pares e por (3.8) temos que o retrato de fase $\phi\psi$ é simétrico em relação aos eixos ϕ e ψ , logo basta olhar o primeiro quadrante. Da equação (3.5) temos que se $0 < \phi < 1$, então ψ_p é decrescente, e se $\phi > 1$, ψ_p é crescente. Analisando o conjunto

$$A_{\alpha,p} = \{(\phi,\psi) \in \mathbb{R}^2 | G_{p,\lambda}(\phi,\psi) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}}\},$$

onde $G_{p,\lambda}(\phi,\psi) = \dfrac{\lambda(p-1)}{p}|\psi_p|^{\frac{p}{p-1}} + F_p(\phi)$ e utilizando que F_p é injetora em $[0,1]$, obtemos o seguinte retrato de fase.

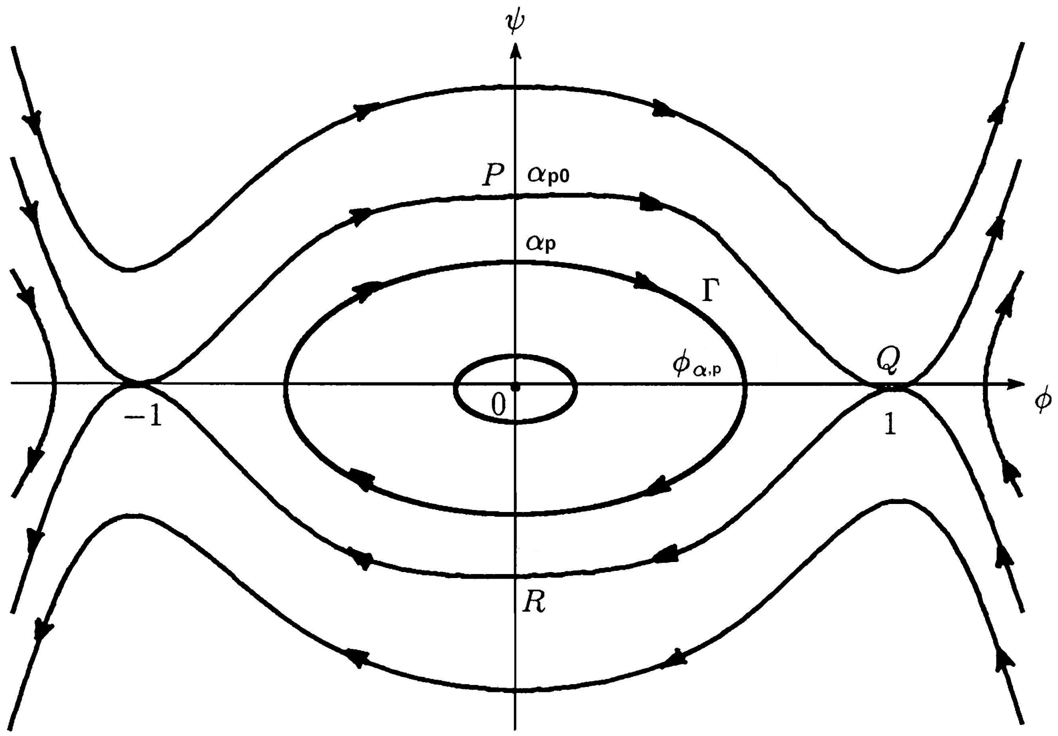

Figura 3.1: Retrato de fase de $\phi\psi$ de (3.5)

Pelo retrato de fase temos que se $\alpha_p = \alpha_{p0}$, então $\psi_p = 0$, e assim $\phi = 1$. De maneira análoga, se $\alpha_p < \alpha_{p0}$, então $\psi_p = 0$ e portanto $\phi = \phi_{\alpha,p}$. Da mesma forma $\alpha_p > \alpha_{p0}$, então $\phi = 1$ o que implica que $\psi_p > 0$.

Observação 3.2. Observe que quando tomamos $\alpha_p < \alpha_{p0}$, α_p como sendo "velocidade" inicial, temos que $\phi_{\alpha,p}$ é um valor extremo de ϕ e no caso $p > 2$, quando tomamos $\alpha_p = \alpha_{p_0}$ temos que ϕ atinge seu primeiro máximo em $\phi_{\alpha,p_0} = 1$. Ainda pelo retrato de fase percebemos que se $\alpha_p > \alpha_{p_0}$, $\phi(\cdot, \alpha_p)$ é solução de (3.5), mas não é de (3.3) se $p > 2$ e de (3.4) se $p = 2$, pois não satisfaz $\phi(1, \alpha_p) = 0$. Como estamos interessados em soluções de (3.3) e (3.4), consideraremos de agora em diante $\alpha_p \in (0, \alpha_{p_0}]$ (já que se ϕ é solução, $-\phi$ também é, e se $\alpha_p = 0$ a única solução de (3.5) é a trivial). Veremos mais adiante que quando $\alpha_p = \alpha_{p_0}$ em $p = 2$, ϕ é solução do problema (3.5) mais não será solução do problema (3.4).

Definimos

$$X_p(\alpha_p) = X(\alpha_p, \lambda) = \inf\{x \in (0, +\infty); \phi_x(x, \alpha_p) = 0\}.$$

Consideramos x como a variável tempo, temos que $X_p(\alpha_p)$ significa o menor tempo necessário para a órbita que saiu de $(0, \alpha_p)$ chegar em $(\phi_{\alpha,p}, 0)$ sobre a curva Γ no retrato de fase 3.1, ou seja, o tempo necessário para que a curva atinja seu primeiro máximo. Devido a essa interpretação a função $X_p(\alpha_p)$ é conhecida como função "time-map".

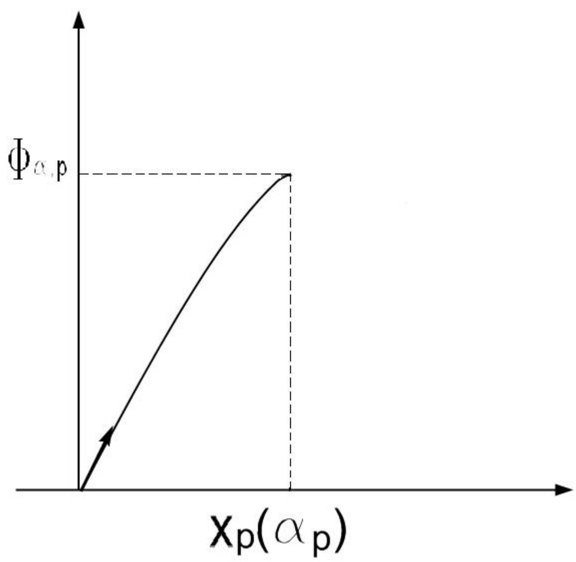

Figura 3.2: Gráfico de x em função de ϕ

Já vimos anteriormente que $|\psi_p|^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x|^p$ e definimos $F_p(\phi_{\alpha,p})$ como em (3.10), substituindo em (3.8) temos que

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x|^p + F_p(\phi) = F_p(\phi_{\alpha,p}) \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^p = F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi) \Rightarrow$$

$$\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^p = \frac{p}{\lambda(p-1)}(F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi)),$$

ou ainda,

$$\left|\frac{d\phi}{dx}\right| = \Big(\frac{p}{\lambda(p-1)}(F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi))\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Podemos considerar x em função de ϕ, pois ϕ é uma função bijetora no intervalo $(0, X_p(\alpha_p))$ em $(0, \phi_{\alpha,p})$, logo inversível.

Assim,

$$\left|\frac{dx}{d\phi}\right| = \Big(\frac{p}{\lambda(p-1)}(F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi))\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{3.11}$$

Daí, se $\phi_{\alpha,p}$ é máximo,

$$\int_0^{\phi_{\alpha,p}} \frac{dx}{d\phi}(\phi)d\phi = x(\phi_{\alpha,p}) - x(0) = X_p(\alpha_p),$$

e, se $\phi_{\alpha,p}$ é mínimo,

$$-\int_{\phi_{\alpha,p}}^0 \frac{dx}{d\phi}(\phi)d\phi = x(\phi_{\alpha,p}) - x(0) = X_p(\alpha_p).$$

Portanto, $X_p(\alpha_p)$ é uma função de $(0, \alpha_{p0}]$ em $(0, \infty]$, onde

$$\begin{aligned} X_p(\alpha_p) &= \int_0^{\phi_{\alpha,p}} \frac{dx}{d\phi}(\phi)d\phi \\ &= \Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\phi_{\alpha,p}} (F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi))^{-\frac{1}{p}} d\phi \\ &= \Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} I_p(\phi_{\alpha,p}). \end{aligned}$$

Podemos substituir $\left|\frac{dx}{d\phi}\right|$ pela equação (3.11), pois como F_p é injetora em $(0,1)$ temos que $F_p(\phi_{\alpha,p}) = F_p(\phi)$ no intervalo $[0, \phi_{\alpha,p}]$ somente se $\phi = \phi_{\alpha,p}$ e ele está no extremo do intervalo de integração.

Denotamos $I_p(\phi_{\alpha,p}) = \int_0^{\phi_{\alpha,p}} (F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi))^{-\frac{1}{p}} d\phi$, onde $\phi_{\alpha,p} \in (0,1]$, pois muitas vezes é mais convêniente analisarmos o que acontece com $I_p(\phi_{\alpha,p})$ do que $X_p(\alpha_p)$.

Veremos a seguir um lema que nos dá informações importantes sobre $I_p(\cdot)$, consequentemente, $X_p(\cdot)$.

Lema 3.1. *Para $p \geq 2$ temos que $I_p(\cdot)$ é estritamente crescente em $(0,1)$ e contínua em $(0,1]$ para $p > 2$ e em $(0,1)$ para $p = 2$.*

i) Para caso $p > 2$ temos que $\lim_{a\to 1^-} I_p(a) = I_p(1)$ é finito e além disso $\lim_{a\to 0^+} I_p(a) = I_{p0}$, onde $I_{p0} = p^{\frac{1}{p}} \int_0^1 (1 - t^p)^{-\frac{1}{p}} dt$.

ii) Para caso $p = 2$ temos que $\lim_{a\to 1^-} I_2(a) = \infty$ e além disso $\lim_{a\to 0^+} I_2(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Demonstração. Como $\phi = 1$ é um ponto de máximo local de F_p, temos que $F_p'(1) = 0$. Pela expansão em Taylor de F_p, obtemos que

$$F_p(\phi) = F_p(1) + F_p'(1)(\phi - 1) + \frac{F_p''(1)(\phi - 1)^2}{2} + o(\phi - 1)^2.$$

Portanto temos que

$$F_p(\phi) - F_p(1) = \frac{F_p''(1)(\phi - 1)^2}{2} + o(\phi - 1)^2,$$

ou ainda,

$$\frac{F_p(\phi) - F_p(1)}{(\phi - 1)^2} = \frac{F_p''(1)}{2} + o(k),$$

sendo k uma constante.

Portanto $F_p(1) - F_p(\phi) = O((\phi - 1)^2)$.

Mostremos que $I_p(1)$ é um número real se $p > 2$.

Como $\lim_{\phi\to 1} \frac{F_p(1) - F_p(\phi)}{(1 - \phi)^2} = -\frac{F_p''(1)}{2} = \frac{r}{2} > 0$, temos que

$$\lim_{\phi\to 1} \frac{(1 - \phi)^2}{F_p(1) - F_p(\phi)} = \frac{2}{r} \Rightarrow$$

$$\lim_{\phi\to 1} \Big(\frac{(1 - \phi)^2}{F_p(1) - F_p(\phi)}\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\phi\to 1} \frac{(1 - \phi)^{\frac{2}{p}}}{(F_p(1) - F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}} = \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Logo existe $\delta > 0$ tal que se $|\phi - 1| < \delta$ então

$$\Big|\frac{(1 - \phi)^{\frac{2}{p}}}{(F_p(1) - F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}} - \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big| < \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{(F_p(1) - F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}} < \frac{3}{2}\Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(1 - \phi)^{\frac{2}{p}}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
I_p(1) &= \int_0^1 \frac{1}{(F_p(1)-F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}}d\phi \\
&= \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(F_p(1)-F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}}d\phi + \int_{1-\delta}^1 \frac{1}{(F_p(1)-F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}}d\phi \\
&< \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(F_p(1)-F_p(\phi))^{\frac{1}{p}}}d\phi + \int_{1-\delta}^1 \frac{3}{2}\Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}}d\phi < \infty,
\end{aligned}
$$

se $p > 2$.

Portanto $I_p(1)$ é um número real.

Mostremos agora que $\lim_{a\to 1^-} I_2(a)$ não é finito.

Como $\lim_{\phi\to 1} \frac{F_2(1)-F_2(\phi)}{(1-\phi)^2} = -\frac{F_2''(1)}{2} = \frac{r}{2} > 0$, temos que

$$\lim_{\phi\to 1} \frac{(1-\phi)^2}{F_2(1)-F_2(\phi)} = \frac{2}{r} \Rightarrow$$

$$\lim_{\phi\to 1} \Big(\frac{(1-\phi)^2}{F_2(1)-F_2(\phi)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\phi\to 1} \frac{(1-\phi)}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}} = \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo existe $\delta > 0$ tal que se $|\phi - 1| < \delta$ então

$$\Big|\frac{(1-\phi)}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}} - \Big(\frac{2}{r}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big| < \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{2r}}\frac{1}{(1-\phi)} < \frac{1}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi &= \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi + \int_{1-\delta}^1 \frac{1}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi \\
&> \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(F_2(1)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi + \int_{1-\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{2r}}\frac{1}{(1-\phi)}d\phi = \infty,
\end{aligned}
$$

se $p = 2$.

Portanto $\lim_{a\to 1^-} I_2(a) = \infty$.

Fazendo a mudança de variável $\phi = as$ em $I_p(a) = \displaystyle\int_0^a (F_p(a) - F_p(\phi))^{-\frac{1}{p}}$, com $0 \le s < 1$ e $0 < a \le 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_p(a) &= \int_0^a (F_p(a) - F_p(\phi))^{-\frac{1}{p}} d\phi \\
&= a\int_0^1 (F_p(a) - F_p(as))^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\int_0^a f_p(t)dt - \int_0^{as} f_p(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\int_0^a f_p(t)dt + \int_{as}^{0} f_p(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\int_{as}^a f_p(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\int_{as}^a |t|^{p-2}t(1-|t|^r)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\Big[\frac{t^p}{p} - \frac{t^{p+r}}{p+r} \Big]_{as}^{a} \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(\frac{a^p}{p} - \frac{a^{p+r}}{p+r} - \frac{(as)^p}{p} + \frac{(as)^{p+r}}{p+r} \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(a^p\Big(\frac{1-s^p}{p}\Big) + a^{p+r}\Big(\frac{-1+s^{p+r}}{p+r}\Big) \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= a\int_0^1 \Big(a^p\Big(\frac{1-s^p}{p} - a^r\Big(\frac{1-s^{p+r}}{p+r}\Big)\Big) \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{1-s^p}{p} - a^r\frac{(1-s^{p+r})}{p+r} \Big)^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}} ds,
\end{aligned}
$$

onde $\Phi(s,a) = \dfrac{1-s^p}{p} - a^r\dfrac{(1-s^{p+r})}{p+r} > 0$ para $s \in [0,1)$.

Mostremos que $I_p(\cdot)$ é contínua em $(0,1]$ para $p > 2$.

Seja $a_0 \in (0,1]$ arbitrário.

Consideremos $\{a_n\}$ uma sequência crescente contida em $(0,1]$ tal que $a_n \to a_0^-$ e definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(t) = \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_n)^r \Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Notemos que para $t \in (0,1)$,

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1 \Rightarrow \varphi_n(t) < \varphi_{n+1}(t).$$

Temos também que $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$, para todo $t \in (0,1)$. Logo segue do Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)dt = \int_0^1 \varphi_0(t)dt,$$

e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{a_n\to a_0^-} I_p(a_n) &= \lim_{a_n\to a_0^-}\int_0^1 \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_n)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}dt\\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_0)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}dt\\ &= I_p(a_0).\end{aligned}$$

Seja $a_0 \in [0,1)$ arbitrário.

Consideremos agora $\{a_n\}$ uma sequência decrescente contida em $(0,1]$ tal que $a_n \to a_0^+$ e definimos, da mesma forma, para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$\varphi_n(t) = \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_n)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Notemos que para $t \in (0,1)$,

$$0 < a_{n+1} < a_n < 1 \Rightarrow \varphi_{n+1}(t) < \varphi_n(t).$$

Temos também que $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$, para todo $t \in (0,1)$. Ainda, $\varphi_1(t) \in L^1$, pois

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_1(t)dt &= \int_0^1 \Big(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r}(a_1)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}dt\\ &\leq \int_0^1 \Big(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r}(1)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}\\ &= I_p(1) < \infty.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)dt = \int_0^1 \varphi_0(t)dt,$$

e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{a_n\to a_0^+} I_p(a_n) &= \lim_{a_n\to a_0^+}\int_0^1 \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_n)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}dt\\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1-t^p}{p} - \frac{(1-t^{p+r})}{p+r}(a_0)^r\Big)^{-\frac{1}{p}}dt\\ &= I_p(a_0).\end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{a_n\to a_0} I_p(a_n) = I_p(a_0)$ e $I_p(\cdot)$ é contínua em $(0,1]$.

Derivando I_p com relação à a obtemos que

$$I'_p(a) = \int_0^1 -\frac{1}{p}\Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}-1}\Phi'(s,a)ds.$$

Seja $\Psi(s,a) = -\Phi'(s,a)$. Temos então que

$$I'_p(a) = \frac{1}{p}\int_0^1 \Psi(s,a)\Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}-1}ds. \tag{3.12}$$

Observe que $\Phi'(s,a) = -ra^{r-1}\dfrac{1-s^{p+r}}{p+r} < 0$, se $s \in [0,1)$. Assim temos que $I'_p(a) > 0$ em $(0,1)$ e dessa forma $I_p(\cdot)$ é estritamente crescente em $(0,1)$.

Mostremos também que $\lim_{a\to 0^+} I_p(a) = I_{p0}$, onde $I_{p0} = p^{\frac{1}{p}}\int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}}dt$.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+} I_p(a) &= \lim_{a\to 0^+}\int_0^1 \Big(\frac{1-s^p}{p} - a^r\frac{(1-s^{p+r})}{p+r}\Big)^{-\frac{1}{p}}ds \\
&= \int_0^1 \Big(\frac{1-s^p}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}}ds \\
&= p^{\frac{1}{p}}\int_0^1 (1-s^p)^{-\frac{1}{p}}ds.
\end{aligned}$$

Assim $\lim_{a\to 0^+} I_p(a) = I_{p0}$, onde $I_{p0} = p^{\frac{1}{p}}\int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}}dt < \infty$.

Agora, antes de mostrarmos a continuidade de $I_p(\cdot)$ em $(0,1)$ para $p=2$, vamos mostrar que ela é estritamente crescente nesse intervalo, e para isso faremos algumas considerações.

Dado a considere a mudança de variável $y^2 = \dfrac{F_2(\phi)}{F_2(a)}$, $0 \le y \le 1$ e derivando em relação a ϕ temos

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{f_2(\phi)}{2yF_2(a)} > 0,$$

pois $f_2(\phi) > 0$, para $\phi \in (0,1)$ e $F_2(a) > 0$, para $a \in (0,1]$.

Logo, y é estritamente crescente em $(0,1)$.

Vimos que, $I_2(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{(F_2(a)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi$.

Assim, fazendo a mudança de variável $y^2 = \dfrac{F_2(\phi)}{F_2(a)}$ dada acima, temos

$$\begin{aligned}
I_2(a) &= \int_0^a \frac{1}{(F_2(a)-F_2(\phi))^{\frac{1}{2}}}d\phi \\
&= \int_0^1 \frac{2yF_2(a)}{f_2(\phi)(F_2(a)-y^2F_2(a))^{\frac{1}{2}}}dy \\
&= \int_0^1 \frac{2yF_2(a)}{f_2(\phi)\sqrt{(F_2(a)(1-y^2)}}dy \\
&= \int_0^1 \frac{2yF_2(a)}{f_2(\phi)\sqrt{(F_2(a)}\sqrt{(1-y^2)}}dy \\
&= \int_0^1 \frac{2y\sqrt{F_2(a)}}{f_2(\phi)\sqrt{(1-y^2)}}dy.
\end{aligned}$$

Observe que y depende continuamente de a e ϕ, e ϕ depende de y e a, assim o integrando é contínuo em a, e portanto, $I_2(a)$ é contínua em $a \in (0,1]$.

Agora, para terminarmos a demonstração temos que mostrar que $\lim_{a\to 0^+} I_2(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. Consideremos $0 < \epsilon < 1$. Se $x \geq 0$, definimos

$$g(x) = f_2(x) - (1+\epsilon)x.$$

Como $g'(x) = f_2'(x) - (1+\epsilon)$ e $g'(0) = f_2'(0) - 1 - \epsilon = -\epsilon < 0$. Desde que $g \in C^1$ temos que g é decrescente em uma vizinhança $[0, \overline{\delta}]$ de 0. Assim, $g(x) < g(0) = 0$, e então $f_2(x) \leq (1+\epsilon)x$, para $x \in [0, \overline{\delta}]$.

Se tomarmos $h(x) = f_2(x) - (1-\epsilon)x$ temos de forma análoga que $f_2(x) \geq (1-\epsilon)x$, para $x \in [0, \tilde{\delta}]$.

Logo, para cada $0 < \epsilon < 1$, tomando $0 < \delta \leq \min\{\overline{\delta}, \tilde{\delta}\}$ temos que se $0 \leq x \leq \delta$, então

$$(1-\epsilon)x \leq f_2(x) \leq (1+\epsilon)x. \tag{3.13}$$

Para $0 \leq \phi \leq \delta$, integrando a relação (3.13) de 0 a ϕ, temos

$$\int_0^\phi (1-\epsilon)x dx \leq \int_0^\phi f_2(x)dx \leq \int_0^\phi (1+\epsilon)x dx,$$

ou seja,

$$(1-\epsilon)\frac{\phi^2}{2} \leq F_2(\phi) \leq (1+\epsilon)\frac{\phi^2}{2}.$$

Como $F_2(\phi) = F_2(a)y^2$ temos

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon)\phi^2 \leq F_2(a)y^2 \leq \frac{1}{2}(1+\epsilon)\phi^2,$$

ou seja,

$$\Big(\frac{(1-\epsilon)}{2F_2(a)}\Big)^{\frac{1}{2}}\phi < y < \Big(\frac{(1+\epsilon)}{2F_2(a)}\Big)^{\frac{1}{2}}\phi,$$

desde que $0 < \phi < \delta$, para todo $y \in (0,1)$.

Como $(1-\epsilon)\phi \leq f_2(\phi) \leq (1+\epsilon)\phi$, temos

$$\frac{1}{(1+\epsilon)\phi} \leq \frac{1}{f_2(\phi)} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)\phi}.$$

Assim, se $0 < \phi \leq \delta$, obtemos

$$\Big(\frac{1-\epsilon}{2F_2(a)(1+\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}} < \frac{y}{f_2(\phi)} < \Big(\frac{1+\epsilon}{2F_2(a)(1-\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando essa expressão por $\dfrac{2\sqrt{F_2(a)}}{\sqrt{1-y^2}}$ e integrando 0 a 1 temos

$$2\Big(\frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy \leq \int_0^1 \frac{2y\sqrt{F_2(a)}}{f_2(\phi)\sqrt{1-y^2}}dy \leq \Big(\frac{1+\epsilon}{2(1-\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy,$$

ou seja,

$$\Big(\frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\pi < I_2(a) < \Big(\frac{1+\epsilon}{2(1-\epsilon)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\pi.$$

Fazendo $\epsilon \to 0^+$ temos que $\delta \to 0$, logo segue que

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq \lim_{a\to 0^+} I_2(a) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Portanto, $\lim\limits_{a\to 0^+} I_2(a) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

Observação 3.3. Temos que a função que associa a cada α_p um $\phi_{\alpha,p}$ é uma função estritamente crescente de classe C^1 em $(0,\alpha_{p_0})$, para cada p.

De fato, como

$$F_p(\phi_{\alpha,p}) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}}$$

é estritamente crescente em α_p e ainda $F_p(\phi_{\alpha,p}) \to 0$ quando $\alpha_p \to 0$, temos então que

$$\phi_{\alpha,p} = F_p^{-1}\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}}\Big)$$

é estritamente crescente e obtemos que

$$\phi'_{\alpha,p} = \frac{1}{F_p'\Big(F_p^{-1}(\frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_p|^{\frac{p}{p-1}})\Big)}(\lambda|\alpha_p|^{\frac{1}{p-1}}).$$

Portanto $\phi_{\alpha,p} \in C^1(0,\alpha_{p_0})$.

Pela observação anterior temos que para $p \geq 2$ se α_p decresce, então $\phi_{\alpha,p}$ decresce. Pelo Lema 3.1, $I_p(\cdot)$ é estritamente crescente em $(0,1)$, então $X_p(\alpha_p) =$

$\left(\dfrac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I_p(\phi_{\alpha,p})$ também decresce, mas há um valor mínimo $X_{p0}(\alpha_p) = \left(\dfrac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I_{p0}$. Assim, por menor que seja a velocidade inicial, a solução ϕ atingirá seu primeiro máximo após $X_{p0}(\alpha_p) = \left(\dfrac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I_{p0}$.

Pelo Lema 3.1 e observando que para $p \geq 2$, $I_p'(0) = 0$, temos a seguinte representação gráfica para $I_p(\cdot)$.

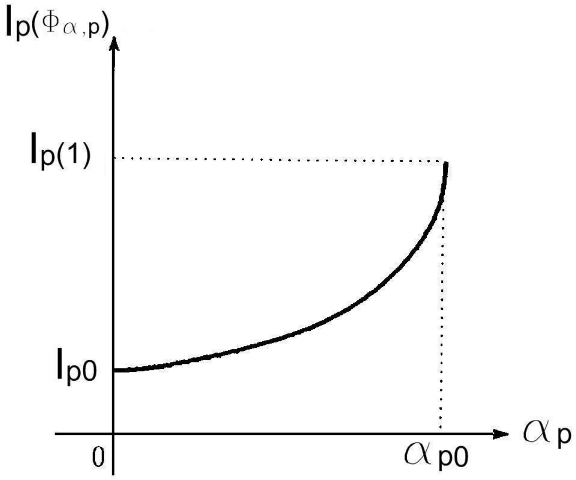

Figura 3.3: Representação de $I_p(\cdot)$

Ainda analisando o Lema 3.1 temos que para o caso $p > 2$ como $I_p(1) < \infty$, então $X_p(\alpha_p) < \infty$ e assim no plano de fase $\phi\psi$, a órbita que começa em $P = (0, \alpha_{p_0})$ atinge $Q = (1, 0)$ em um tempo finito $X_p(\alpha_{p_0})$ e como $\tilde{\phi} \equiv 1$ satisfaz a equação de (3.5), depois de chegar em $Q = (1, 0)$, uma órbita pode permanecer lá por qualquer tempo finito antes de ir para $R = (0, -\alpha_{p_0})$, a esse tempo finito que a solução é constante e igual a 1 é que chamamos de patamar de ϕ. Observe que isso só ocorre quando $\alpha_p = \alpha_{p0}$, pois o ponto $(\phi_{\alpha,p}, 0) = (1, 0)$ é o único ponto de equilíbrio de (3.5) para $\alpha_p \in (0, \alpha_{p0}]$.

Como para $p > 2$ quando $\alpha_p = \alpha_{p0}$ atingimos $\phi = 1$ e podemos permanecer constante e igual a 1 por qualquer tempo finito, iremos obter infinitas soluções nesse caso.

Já no caso semilinear $p = 2$, vimos no Lema 3.1 que $I_2(a)$ tende ao infinito quando a tende a 1, ou seja, as soluções estacionárias não atingem o máximo 1 (ou o mínimo -1) em tempo finito, isto é, a orbita que sai de P não alcança Q em um tempo finito.

Dessa forma concluimos que para $0 < \alpha_p < \alpha_{p_0}$ as soluções não formam patamares, só terá patamar quando $\alpha_p = \alpha_{p0}$ e isso só ocorrerá para $p > 2$, ou seja, no caso $p = 2$ não forma patamar.

3.2 O conjunto $E_{\lambda,p}$

Antes de mostrarmos os principais resultados desta seção, referentes a estrutura de $E_{\lambda,p}$, onde $E_{\lambda,p}$ é o conjunto de todas as soluções estacionárias, consideraremos algumas definições e relações que serão necessárias para as demonstrações desses resultados.

Seja $Y_p(\alpha_p)$ a distância entre duas raízes adjacentes de $\phi(\cdot,\alpha_p)$. Então sendo α_p, $\phi_{\alpha,p}$ como em (3.9) e (3.10) e $C_{\lambda,p} = \Big(\dfrac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}}$, temos que

$$Y_p(\alpha_p) = 2X_p(\alpha_p) = 2C_{\lambda,p}\int_0^{\phi_{\alpha,p}} (F_p(\phi_{\alpha,p}) - F_p(\phi))^{-\frac{1}{p}} d\phi = 2C_{\lambda,p} I_p(\phi_{\alpha,p}),$$

para $\alpha_p \in (0, \alpha_{p_0})$.

No caso $p > 2$ se $\alpha_p = \alpha_{p_0}$, vimos que ϕ alcança o máximo 1 ou o mínimo -1. Dai, temos que $\phi(\cdot,\alpha_{p_0})$, vai formar patamar, e portanto satisfazer a seguinte equação.

$$\begin{cases} \phi(x,\alpha_{p_0}) = 0 & \text{para } x = 0 \text{ e } 2X_p(\alpha_{p_0}) + d \\ 0 < \phi(x,\alpha_{p_0}) < 1 & \text{para } x \in (0, X_p(\alpha_{p_0})) \cup (X_p(\alpha_{p_0}) + d, 2X_p(\alpha_{p_0}) + d) \\ \phi(x,\alpha_{p_0}) = 1 & \text{para } x \in [X_p(\alpha_{p_0}), X_p(\alpha_{p_0}) + d], \end{cases}$$

onde $d \in [0,\infty)$ é uma constante arbitrária. Desse modo temos infinitas soluções, ou seja, temos que $Y_p(\cdot)$ é uma aplicação multívoca em $(0,\alpha_{p_0}]$, com $Y_p(\alpha_{p_0}) = [2C_{\lambda,p}I_p(1),\infty)$.

A figura 3.4 representa o gráfico de $\phi(x,\alpha_{p0})$ com duas raízes entre $(0,1)$ e com $TP = \sum_{i=1}^{3} d_i$, onde TP é a soma dos patamares d_i.

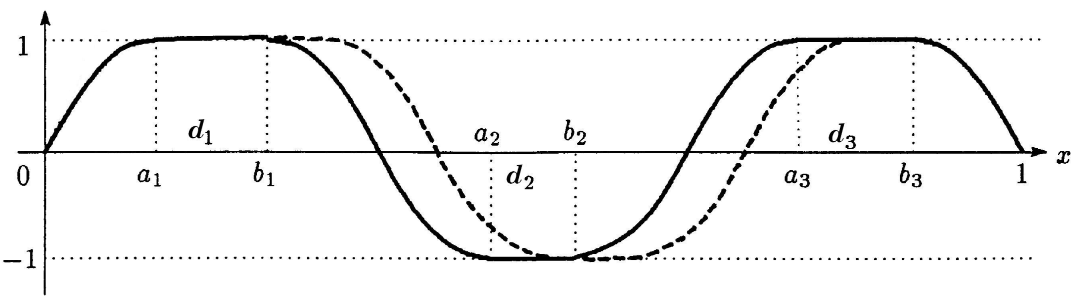

Figura 3.4: Patamar

A partir deste momento denotaremos por TP o tempo de parada, ou seja, tempo em que a solução $\phi(\cdot,\alpha_{p0})$ é constante e igual a 1. Como já foi mencionado anteriormente, o retrato de fase é simétrico em relação a ϕ e ψ, ou seja, o x-tempo que a solução leva para sair do eixo-x e atingir o ponto de máximo (ou mínimo) é igual ao tempo que a solução leva para sair do ponto de máximo (ou mínimo) e chegar no eixo-x, e a esse tempo denotamos por $X_p(\alpha_p)$ para qualquer $\alpha_p \in (0,\alpha_{p0}]$ se $p > 2$ e $\alpha_p \in (0,\alpha_{p0})$ se $p = 2$.

Seja l o número de raízes de ϕ em $(0,1)$.

Assim

$$2(l+1)X_p(\alpha_p) + TP = 1, \tag{3.14}$$

se $p > 2$ e no caso $p = 2$, $TP = 0$

$$2(l+1)X_p(\alpha_p) = 1. \tag{3.15}$$

Denotamos por $E^l_{\lambda,p} = \{\phi \in E_{\lambda,p} : \phi \text{ tem } l \text{ raízes em } (0,1) \text{ e } \phi_x(0) > 0\}$, e $-E^l_{\lambda,p} = \{-\phi : \phi \in E^l_{\lambda,p}\}$, onde $l \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1]$ e $p \geq 2$, definimos

$$\lambda_k(a,p) = \frac{p}{p-1}(2(k+1)I_p(a))^{-p}.$$

Lema 3.2. *Temos que $\phi(\cdot,\alpha_p) \in E^l_{\lambda,p}$ se, e somente se, existem constantes $C_i \in Y_p(\alpha_p)$, para $i = 1,...,l+1$ de modo que $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, para $l \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. Seja $\alpha_p < \alpha_{p0}$. Se $\phi(\cdot,\alpha_p) \in E^l_{\lambda,p}$, então $\phi(\cdot,\alpha_p)$ possui l raízes e não possui patamares, logo pela relação (3.15) temos que $2(l+1)X_p(\alpha_p) = 1$. Tomando $C_i = 2X_p(\alpha_p)$, $i = 1,...,l+1$, temos que cada $C_i \in Y_p(\alpha_p)$ e $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, onde $C_i = 2X_p(\alpha_p) \in Y_p(\alpha_p)$ para cada i, então $\phi(\cdot,\alpha_p)$ satisfaz a condição de fronteira $\phi(1,\alpha_p) = 0$ e portanto é solução de (3.3) e (3.4).

Analogamente, seja $\alpha_p = \alpha_{p0}$. Se $\phi(\cdot,\alpha_{p0}) \in E^l_{\lambda,p}$ então ϕ possui l raízes em $(0,1)$ e consequentemente $l+1$ patamares, logo $TP = \sum_{i=1}^{l+1} d_i$, onde d_i é o comprimento do i-ésimo patamar. Pela relação (3.14) temos que

$$1 = 2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) + \sum_{i=1}^{l+1} d_i = \sum_{i=1}^{l+1}(2X_p(\alpha_{p0}) + d_i),$$

logo, tomando $C_i = 2X_p(\alpha_{p0}) + d_i$, para todo $i = 1,...,l+1$, temos que $C_i \in Y_p(\alpha_{p0})$ e $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, onde $C_i = 2X_p(\alpha_{p0}) + d_i \in Y_p(\alpha_{p0})$ para cada i, então $\phi(\cdot,\alpha_{p0})$ satisfaz a condição de fronteira $\phi(1,\alpha_{p0}) = 0$ e portanto é solução de (3.3).

□

Teorema 3.1. *Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$*

$$\lambda_k = \frac{p}{p-1}(2(k+1)I_0)^{-p}.$$

Então temos que

i) Se $\lambda_0 \leq \lambda$, então $E_{\lambda,p} = \{0\}$.

ii) Se $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, então $E_{\lambda,p} = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E^l_{\lambda,p}\}$, onde $E^l_{\lambda,p}$ possui as propriedades:

a) $E^0_{\lambda,p} = \{\phi^0_{\lambda,p}\}$ para $\lambda > 0$.

b) Se $\lambda_l(1) \leq \lambda$, para $l = 1, 2, ...,$ então $E^l_{\lambda,p} = \{\phi^l_{\lambda,p}\}$.

c) Se $0 < \lambda < \lambda_l(1)$, para $l = 1, 2, ...,$ então existe uma relação bijetora entre $E^l_{\lambda,p}$ e $[0, 1]^l$.

Em particular, o problema (3.3) e (3.4) possui uma única solução positiva se, e somente se, $\lambda < \lambda_0$.

Observe que no caso $p = 2$, $E^l_{\lambda,p}$ possui apenas as propriedades a) e b), pois não existe $\lambda_k(1)$ portanto $E^l_{\lambda,p} = \{\phi^l_{\lambda,p}\}$.

Demonstração. Como $\lambda_0 = \dfrac{p}{p-1}(2I_{p0})^{-p}$, temos que $2I_{p0} = \Big(\dfrac{p}{\lambda_0(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
Y_p(0) &= \lim_{\alpha_p \to 0} Y_p(\alpha_p) \\
&= \lim_{\alpha_p \to 0} 2X_p(\alpha_p) \\
&= \lim_{\phi_{\alpha,p} \to 0} 2\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} I_p(\phi_{\alpha,p}) \\
&= 2\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} \lim_{\phi_{\alpha,p} \to 0} I_p(\phi_{\alpha,p}) \\
&= 2\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} I_{p0} \\
&= \Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{p}{\lambda_0(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\frac{\lambda}{\lambda_0}\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, I_p é estritamente crescente, $\alpha_p \mapsto \phi_{\alpha,p}$ é uma função estritamente crescente e $Y_p(\alpha_p) = 2\Big(\dfrac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} I_p(\phi_{\alpha,p})$ então temos que Y_p é uma função estritamente crescente.

Pelo fato de Y_p ser uma função estritamente crescente temos que

$$Y_p(\alpha_p) > Y_p(0) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda_0}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

para $\alpha_p \in (0, \alpha_{p0}]$.

Assim, se $\lambda_0 \leq \lambda$, temos que $Y_p(\alpha_p) > 1$, para qualquer $\alpha_p \in (0, \alpha_{p0}]$.

Logo, a única solução de (3.3) e (3.4) é a trivial.

Consideremos agora o caso $\lambda < \lambda_0$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos que para $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, exista $\phi = \phi(\cdot, \bar{\alpha_p}) \in E_{\lambda,p}$, tal que ϕ possui $k+1$ raízes ou mais em $(0,1)$.

Da definição de λ_{k+1}, temos que

$$2(k+2)I_{p0} = \Big(\frac{p}{\lambda_{k+1}(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora,

$$2(k+2)I_{p0} = 2(k+2)\lim_{a\to 0^+} I_p(a) < 2(k+2)I_p(\phi_{\bar{\alpha},p}) = 2(k+2)\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}} X_p(\bar{\alpha_p}),$$

ou seja,

$$2(k+2)I_{p0} < 2(k+2)\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{-\frac{1}{p}} X_p(\bar{\alpha_p}) = 2(k+2)\Big(\frac{p}{\lambda(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}} X_p(\bar{\alpha_p}).$$

Assim,

$$\Big(\frac{p}{\lambda_{k+1}(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}} < 2(k+2)\Big(\frac{p}{\lambda(p-1)}\Big)^{\frac{1}{p}} X_p(\bar{\alpha_p}) \Rightarrow$$

$$\Big(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} < 2(k+2)X_p(\bar{\alpha_p}).$$

Como $\lambda_{k+1} \leq \lambda$ e pela relação (3.14) temos que

$$1 \leq \Big(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\Big)^{\frac{1}{p}} < 2(k+2)X_p(\bar{\alpha_p}) \leq 1,$$

o que é um absurdo.

Portanto se $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, temos que $E^{k+i}_{\lambda,p} = \emptyset$, para todo $i \geq 1$ e $E_{\lambda,p} = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E^l_{\lambda,p}\}$.

Estudaremos agora a estrutura de $E^l_{\lambda,p}$, para $l \in \mathbb{N}^*$. Da definição de $\lambda_l(1)$ temos que

$$2(l+1)I_p(1) = \Big(\frac{p}{(p-1)\lambda_l(1)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo,

$$2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) = 2(l+1)\Big(\frac{\lambda(p-1)}{p}\Big)^{\frac{1}{p}} I_p(1) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda_l(1)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $\lambda > \lambda_l(1)$ então $2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) > 1$. Como $X_p(\cdot)$ é estritamente crescente, dado $\dfrac{1}{2(l+1)} \in Im(X_p)$, existe um único $\tilde{\alpha_p} \in (0, \alpha_{p0}]$ tal que $X_p(\tilde{\alpha_p}) = \dfrac{1}{2(l+1)}$, o que implica, $2(l+1)X_p(\tilde{\alpha_p}) = 1$. Note que $\tilde{\alpha_p} \neq \alpha_{p0}$, pois se $\tilde{\alpha_p} = \alpha_{p0}$, então

$$1 = 2(l+1)X_p(\tilde{\alpha_p}) = 2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) > 1,$$

o que é uma contradição. Neste caso, tomando $C_i = 2X_p(\tilde{\alpha_p})$, para todo $i = 1, ..., l+1$ temos que $C_i \in Y_p(\tilde{\alpha_p})$ e $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ e assim pelo Lema 3.2 temos que $\phi^l_{\lambda,p} = \phi(\cdot, \tilde{\alpha_p}) \in E^l_{\lambda,p}$. A monotonicidade de $X_p(\cdot)$ garante que $E^l_{\lambda,p} = \{\phi^l_{\lambda,p}\}$.

Se $\lambda = \lambda_l(1)$, temos $2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) = 1$. Então, tomando $C_i = 2X_p(\alpha_{p0})$ temos $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ e também pelo Lema 3.2 segue que $\phi^l_{\lambda,p} = \phi(\cdot, \alpha_{p0}) \in E^l_{\lambda,p}$ e $\phi(\cdot, \alpha_{p0})$ não possui patamares nesse caso.

Portanto se $\lambda \geq \lambda_l(1)$, temos que $E^l_{\lambda,p} = \{\phi^l_{\lambda,p}\}$.

Se $\lambda < \lambda_l(1)$ então $2(l+1)X_p(\alpha_{p0}) < 1$. Tomando $C_i = 2X_p(\alpha_{p0}) + d_i$ para todo $i = 1, ..., l+1$ de forma que $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, onde cada d_i é tomado arbitrariamente desde que $\sum_{i=1}^{l+1} d_i = 1 - 2(l+1)X_p(\alpha_{p0})$, temos novamente pelo Lema 3.2 que $\phi(\cdot, \alpha_{p0}) \in E^l_{\lambda,p}$. Nesse caso, $E^l_{\lambda,p}$ consiste de uma infinidade de soluções ϕ de (3.3) com as seguintes propriedades: existem $(l+1)$ intervalos $J_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, ..., l+1$, tal que $\sum_{i=1}^{l+1} b_i - a_i = TP$ e

$$\begin{cases} |\phi(x)| = 1 & \text{se } x \in J_i,\ i = 1, ..., l+1 \\ |\phi(x)| < 1 & \text{se } x \in [0,1] \backslash \bigcup_{i=1}^{l+1} J_i \end{cases}$$

onde $|J_i| = b_i - a_i = d_i$ é o comprimento do i-ésimo patamar.

Dessa forma

$$R^l_{\lambda,p} = \Big\{(d_1, ..., d_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{l+1} d_i = TP \text{ e cada } d_i \geq 0\Big\}.$$

Existe uma relação bijetora entre $E^l_{\lambda,p}$ e $R^l_{\lambda,p}$, pois dado $d = (d_1, ..., d_{l+1}) \in R^l_{\lambda,p}$, existe uma única $\phi(\cdot, \alpha_{p0}) \in E^l_{\lambda,p}$ tal que cada d_i é o comprimento do seu i-ésimo patamar. E dada $\phi \in E^l_{\lambda,p}$, sabemos que ϕ possui $l+1$ patamares, logo basta tomarmos d_i = comprimento do i-ésimo patamar. Note que essa relação, que denotaremos por $g : R^l_{\lambda,p} \to E^l_{\lambda,p}$ é contínua.

Seja $T = \{(x_1, ..., x_l) : 0 \leq x_i \leq 1 \ e \ x_1 + ... + x_l \leq 1\}$.

Considere a aplicação de T em $R^l_{\lambda,p}$ dada por

$$h : (x_1, x_2, \ldots, x_l) \to (TP_1, TP_2, \ldots, TP_{l+1}),$$

onde $TP_i = x_i TP$, para $i = 1, \ldots, l$ e $TP_{l+1} = (1 - x_1 - \cdots - x_l)TP$ que é uma relação bijetora entre $R^l_{\lambda,p}$ e T.

Agora para finalizar considere a aplicação C de T em $[0,1]^l$ dada pelo seguinte procedimento.

Para cada ponto P do hiperplano $x_1+x_2+\ldots+x_l=1$ considere a reta determinada pela origem O e por P. Esta reta intercepta o cubo l-dimensional, $[0,1]^l$, em apenas um ponto Q, utilizando a bijeção entre os segmentos OP e OQ temos que $C: T \to [0,1]^l$ é bijetora. $\square$

4 Conclusão

Ao final deste trabalho gostaríamos de ressaltar a diferença entre o conjunto dos pontos de equilíbrio do problema quasilinear, governado pelo p-Laplaciano, $p > 2$ e o conjunto dos pontos de equilíbrio do problema semilinear, $p = 2$.

Para isso, observamos no Lema 3.1 que as soluções do problema estacionário podem ter valor de máximo e mínimo igual a 1 e -1, que são raízes de f, ou seja, $\phi(x) \equiv 1$ e $\phi(x) \equiv -1$ satisfaz a equação (3.3). Sendo assim, os pontos de equilíbrio que atingem os extremos 1 e -1 podem ficar constante e igual a 1 e -1 por qualquer tempo finito no intervalo $(0, TP)$, ou seja, formam patamares. Observe que embora a soma dos comprimentos de todos os patamares seja constante, ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} d_i = TP$, sendo l o número de raízes entre $(0, 1)$, o tempo TP pode ser distribuido livremente entre os d_i' s, desde que satisfaça a condição $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} d_i = TP$. Assim, podem haver infinitas soluções de equilíbrio com um mesmo número de raízes.

Isso não ocorre no problema semilinear, pois nesse caso a solução de (3.5) não atinge os valores extremos 1 e -1 em tempo finito, como mostra o Lema 3.1, isto é, $TP = 0$, logo não formam patamares. Sendo assim, há somente um número finito de solução.

Uma outra diferença relevante entre o problema estacionário e o semilinear é o conjunto de bifurcações.

Seja $\Gamma = (\lambda, 0)$ uma curva de solução de $\lambda(\phi) = 0$ e $(\lambda_l, 0)$ ponto interior da curva Γ.

Para o problema semilinear, pelo Teorema 3.1 temos que para $\lambda \geq \lambda_0$ a única solução é a trivial. Para $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_0$ temos a solução trivial e bifurcam de $(\lambda_0, 0)$ mais duas soluções ($\phi^0_{\lambda_0,2}$ e $-\phi^0_{\lambda_0,2}$), ou seja, $E_{\lambda,2} = \{0\} \cup \{\pm E^0_{\lambda,2}\}$, onde $\pm E^0_{\lambda,2} = \{\pm\phi^0_{\lambda_0,2}\}$. Para $\lambda_2 \leq \lambda < \lambda_1$ temos a solução trivial, as soluções anteriores e bifurcando de $(\lambda_1, 0)$ temos ($\phi^1_{\lambda_1,2}$ e $-\phi^1_{\lambda_1,2}$), isto é, $E_{\lambda,2} = \{0\} \cup \displaystyle\bigcup_{l=0}^{1} \{\pm E^l_{\lambda,2}\}$. E assim sucessivamente, ou seja, para $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$ temos a solução trivial, as soluções anteriores e bifurcando de $(\lambda_l, 0)$ temos mais duas soluções, isto é, $E_{\lambda,2} = \{0\} \cup \displaystyle\bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E^l_{\lambda,2}\}$. Portanto, nesse caso, as soluções bifurcam da solução nula aos pares, como podemos observar na figura 4.1.

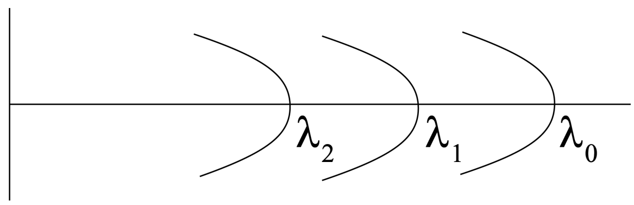

Figura 4.1: Bifurcação

Para o problema quasilinear, temos que o padrão de bifurcação ocorre similar ao caso semilinear, embora quando λ cruza o valor $\lambda_l(1)$, a solução com l raízes entre $(0, 1)$, atinge o valor máximo 1, respectivamente mínimo -1 e pode ocorrer patamar. Assim, para $l \geq 1$, surge um conjunto infinito de soluções.

Referências

[1] YAMADA, S. T. e Y. Asymptotic properties of a reaction diffusion equation with degenerate p-laplacian. *Nonlinear Analysis*, v. 42, p. 41–46, 2000.

[2] INFANTE, N. C. e E. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. *Appl. Anal.*, v. 4, p. 17–37, 1974.

[3] JUNGES, T. *Propriedades Assintóticas de uma Equação de Reação e Difusão com o p-Laplaciano Degenerado*. São Carlos: Dissertação de Mestrado, 2006.

[4] BARRA, G. D. *Measure Theory and Integration*. New York: Ellis Horwood Ltda. - John Wiley & Sons Limited, 1981.

[5] SMOLLER, J. A. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. New York: Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, 1982.

[6] GENTILE, A. N. C. e C. Asymptotic behavior of non linear parabolic equations with monotone principal part. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 280, p. 252–272, 2003.

[7] HALE, J. K. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Providence: Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, 1988.

[8] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publicatins, Inc., Mineola, 1997.