

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

SILVIO FIGUEIREDO GOMES JÚNIOR

ÍNDICE DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAL EM DEA BASEADO EM PROPRIEDADES  
VETORIAIS

NITERÓI  
2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SILVIO FIGUEIREDO GOMES JÚNIOR

ÍNDICE DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAL EM DEA BASEADO EM PROPRIEDADES  
VETORIAIS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor. Área de concentração: Sistemas, Apoio à Decisão e Logística.

Orientador: Prof. Dr. JOÃO CARLOS CORREIA BAPTISTA SOARES DE MELLO

Niterói  
2010

SILVIO FIGUEIREDO GOMES JÚNIOR

ÍNDICE DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAL EM DEA BASEADO EM PROPRIEDADES  
VETORIAIS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor. Área de concentração: Sistemas, Apoio à Decisão e Logística.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. JOÃO CARLOS CORREIA BAPTISTA SOARES DE MELLO - Orientador  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. LIDIA ANGULO MEZA  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. EDSON CATALDO  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. LUIZ BIONDI NETO  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. JÚLIO NICHIOKA  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Niterói  
2010

Dedico este trabalho aos meus pais, Silvio e Cecília, por todo esforço e incentivo durante toda minha vida. Vamos superar todos os obstáculos da vida juntos.

Amo muito vocês!!!!

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela força nos momentos difíceis!

Ao meu orientador, Prof. João Carlos Correia Baptista Soares de Mello, por todo incentivo durante esta caminhada. Não teria conseguido sem a sua ajuda.

À minha co-orientadora, professora Lídia Angulo Meza pelo apoio e paciência.

À Prof<sup>a</sup>. Maria Helena Campos Soares de Mello por todo carinho e atenção de uma verdadeira mãe a mim dedicados.

Aos meus filhos, Gabriel Raeli e Júlia Raeli. Suas existências me fazem forte.

Ao meu irmão e amigo André Raeli por todo incentivo e ajuda.

Ao Fernando, pela força e motivação para vencer sempre.

Às fofas, Maria Cecília e Eliane, companheiras de caminhada nesta jornada.

A todos os amigos que, direta ou indiretamente, me incentivaram à realização deste trabalho.

À FAPERJ – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

### **1 INTRODUÇÃO**, p. 12

#### 1.1 MOTIVAÇÃO, p. 12

#### 1.2 OBJETIVO, p. 14

#### 1.3 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA), p. 16

### **2 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA)**, p. 17

#### 2.1 MODELO CCR, p. 20

##### 2.1.1 Modelo CCR Orientado a *Inputs*, p. 20

##### 2.1.2 Modelo CCR Orientado a *Outputs*, p. 22

#### 2.2 MODELO BCC, p. 23

#### 2.3 COMPARAÇÃO ENTRE A MEDIDA DE FARRELL E A EFICIÊNCIA PARETO-KOOPMANS, p. 25

#### 2.4 PROPRIEDADES DESEJÁVEIS DAS MEDIDAS DE EFICIÊNCIA, p. 26

### **3 PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJETIVO**, p. 30

#### 3.1 OTIMIZAÇÃO DE UMA DAS FUNÇÕES OBJETIVO, RESTRINGINDO AS OUTRAS, p. 31

#### 3.2 SOMA PONDERADA DAS FUNÇÕES OBJETIVO, p. 31

#### 3.3 MINIMIZAÇÃO DA DISTÂNCIA A UM PONTO DE REFERÊNCIA, p. 32

#### 3.4 COMENTÁRIOS ADICIONAIS, p. 34

### **4 MODELOS PARA DETERMINAÇÃO DE ALVOS**, p. 35

#### 4.1 MODELO DE THANASSOULIS E DYSON (1992), p. 37

#### 4.2 MODELO DE ZHU (1996), p. 39

#### 4.3 MODELO MORO-D, p. 43

#### 4.4 MODELO MORO-D-R, p. 46

##### 4.4.1 Validação do Uso do Modelo MORO-D-R, p. 47

##### 4.4.2 Comparação Entre os Modelos MORO-D e MORO-D-R, p. 50

##### 4.4.3 Vantagens da Utilização do Modelo MORO-D-R, p. 54

##### 4.4.4 Exemplo Numérico de Utilização do Modelo MORO-D-R, p. 55

## **5 MEDIDAS DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS, p. 59**

### **5.1 ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A *INPUTS* OU *OUTPUTS*, p. 60**

5.1.1 Medida de Russell Orientada a *Inputs*, p. 60

5.1.2 Medida Ponderada de Russell, p. 61

5.1.3 Medida de Zieschang Orientada a *Inputs*, p. 62

5.1.4 Medida Assimétrica de Färe Orientada a *Inputs*, p. 63

### **5.2 ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A *INPUTS* E *OUTPUTS*, p. 64**

5.2.1 Medida de Russell Não Orientada, p. 64

5.2.2 Medida de Russell Não Orientada Melhorada, p. 65

5.2.3 Medida de Escala Ajustada, p. 68

5.2.4 Medida de Eficiência Vetorial, p. 69

## **6 EFICIÊNCIA NÃO-RADIAL BASEADA EM CONCEITOS VETORIAIS, p. 75**

6.1 EFICIÊNCIA NÃO-RADIAL PARA O CASO BI-DIMENSIONAL, p. 76

6.2 PROPRIEDADES DO ÍNDICE VETORIAL, p. 80

6.3 DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES DO ÍNDICE VETORIAL, p. 81

6.4 EFICIÊNCIA VETORIAL NÃO-RADIAL PARA O CASO N-DIMENSIONAL, p. 98

## **7 ESTUDO DE CASO: ANÁLISE DE EFICIÊNCIA DOS POLOS DO CEDERJ, p. 99**

7.1 INTRODUÇÃO, p. 99

7.2 DETERMINAÇÃO DE ALVOS ALTERNATIVOS, p. 103

## **8 CONCLUSÕES, p. 111**

## **9 BIBLIOGRAFIA, p. 113**

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 – Fronteiras de eficiência DEA, p. 20
- Figura 2.2 – Medida de Farrell e Koopmans Eficiência, p. 25
- Figura 3.1 – Funções de distância utilizando as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ , p. 33
- Figura 4.1 – Projeções de uma DMU na fronteira definida pelo modelo BCC, p. 35
- Figura 4.2 – Projeções com dominância, p. 38
- Figura 4.3 – Projeções sem dominância e com dominância, p. 44
- Figura 4.4 – Fronteira de produção, p. 52
- Figura 4.5 – Fronteira de produção, p. 52
- Figura 4.6 – Projeção da DMU C na fronteira de eficiência, p. 53
- Figura 4.7 – Fronteira de eficiência do exemplo numérico, p. 56
- Figura 4.8 – Alvos das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência, p. 58
- Figura 5.1 – Representação bidimensional da fronteira DEA BCC, p. 70
- Figura 5.2 – Projeções radiais de uma DMU numa face fictícia da fronteira de eficiência, p. 73
- Figura 6.1 – Representação bidimensional da fronteira DEA-BCC, p. 77
- Figura 6.2 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU B, p. 85
- Figura 6.3 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU E, p. 86
- Figura 6.4 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU C, p. 87
- Figura 6.5 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU A, p. 87
- Figura 6.6 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU D, p. 88
- Figura 6.7 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU F, p. 88
- Figura 6.8 – Representação bidimensional da fronteira DEA-BCC, p. 90
- Figura 6.9 – Deslocamento da DMU A, p. 95

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1 – Dados do modelo numérico, p. 55
- Tabela 4.2 – Resultados fornecidos pelo ADBASE para o exemplo numérico, p. 57
- Tabela 6.1 – Valores dos *inputs* e *output* do exemplo numérico, p. 84
- Tabela 6.2 – Eficiências das DMUs do exemplo numérico, p. 89
- Tabela 7.1 – Pólos CEDERJ e dados do modelo, p. 101
- Tabela 7.2 – Eficiência DEA-BCC dos pólos CEDERJ, p. 101
- Tabela 7.3 – Pesos das variáveis do modelo DEA-BCC para os pólos CEDERJ, p. 102
- Tabela 7.4 – Alvos radiais do modelo DEA-BCC para os pólos CEDERJ, p. 102
- Tabela 7.5 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Itaperuna, p. 105
- Tabela 7.6 – Soluções do TRIMAP para o pólo de São Pedro da Aldeia, p. 105
- Tabela 7.7 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Macaé, p. 105
- Tabela 7.8 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Três Rios, p. 106
- Tabela 7.9 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Cantagalo, p. 106
- Tabela 7.10 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Saquarema, p. 106
- Tabela 7.11 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Campo Grande, p. 107
- Tabela 7.12 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Petrópolis, p. 107
- Tabela 7.13 – Eficiências para as soluções dominadas do modelo MORO-D-R com *benchmark* único, p. 108
- Tabela 7.14 – Distâncias euclidianas entre as coordenadas pólos ineficientes e eficientes, p. 109
- Tabela 7.15 – *Rankings*, p. 110

## RESUMO

Os modelos clássicos de DEA (Análise Envoltória de Dados) determinam a eficiência de uma unidade produtiva, chamada DMU (Decision Making Unit) segundo redução dos *inputs* ou aumento dos *outputs* equiproporcionalmente. Trabalhos posteriores aos modelos DEA clássicos propõem índices de eficiência DEA baseados em projeções na fronteira eficiente que são obtidas através de variações não proporcionais de *inputs* e *outputs*. Índices obtidos desta forma são chamados de não radiais. Além disso, os modelos DEA clássicos fornecem um único alvo radial para cada DMU, conforme a orientação do modelo, que pode ser à *input* ou à *output*. Como no caso do índice de eficiência, outros modelos foram propostos ao longo dos anos para determinação de alvos alternativos, não radiais, aos fornecidos pelos modelos DEA clássicos. Este trabalho propõe um índice baseado em propriedades vetoriais para o cálculo da eficiência em DEA quando uma DMU é projetada em alvos alternativos. Para isso, apresentam-se alguns modelos de determinação destes alvos não radiais em DEA. Dentre estes modelos, apresenta-se o modelo MORO-D-R, que é um modelo multiobjetivo derivado do modelo MORO-D para determinação destes alvos não radiais sem a necessidade de introduzir preferências do decisor. Neste trabalho é apresentado, principalmente, um novo índice de eficiência não radial em DEA baseado em propriedades vetoriais, chamado índice IV. Este índice considera na sua formulação que a eficiência depende da direção de projeção da DMU, diferentemente dos índices de eficiência não radiais existentes que são baseados em médias aritméticas ou médias ponderadas. Assim, os índices não radiais existentes não consideram as características vetoriais da eficiência. É feita uma comparação entre o índice IV e os demais índices descritos no trabalho. São mostradas as vantagens do índice IV, como a possibilidade de se medir a eficiência de uma DMU conhecendo seu alvo bem como algumas de suas desvantagens, pois não impede o aparecimento de eficiências negativas. Determina-se então em que condições estas desvantagens não aparecem. É feito um estudo de caso para avaliar a eficiência dos pólos do CEDERJ (Centro de Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro) que formaram alunos do curso de Licenciatura em Matemática no primeiro semestre de 2009. Além de ter flexibilidade gerencial ao se ter múltiplos alvos alternativos com o modelo MORO-D-R, a utilização do índice de eficiência IV permite aos gestores o cálculo da eficiência destes pólos segundo o alvo não radial escolhido, o que não ocorre nos modelos DEA clássicos.

Palavras-chave: DEA. Eficiência vetorial. Multiobjetivo. Projeção não radial.

## ABSTRACT

The classical DEA (Data Envelopment Analysis) models determine the efficiency of a decision making unit, called DMU. The efficiency index is calculated based on proportional reduction of inputs or proportional increasing of outputs. Subsequent works proposed DEA efficiency indexes based on non-proportional changes of inputs and outputs. Indexes obtained this way are called non-radial. Moreover, classical DEA models provide a single radial target for each inefficient DMU. The target is calculated based on the model orientation, to inputs or to outputs. As with the efficiency index, other models have been proposed over the years to determine alternative non radial targets to those provided by classical DEA models. This thesis presents a new efficiency index based on vector properties, called IV index, when a DMU is projected on alternative targets. First, we present some models to determine non-radial targets in DEA. Among these models, we present a model derived from the multiobjective MORO-D model called MORO-D-R. This model determines the non-radial targets without the need for decision-maker preferences. Afterwards, we present the development of IV index. In its formulation, we consider that the efficiency index depends on the DMUs target direction, in opposition to other existing non radial efficiency indexes based on arithmetic or weighted averages. Hence, the indexes prior to the IV index do not take into account the vector characteristics to measure the efficiency. We make a comparison among the IV index and other non-radial indexes described in this work. We show the advantages of the IV index, like the possibility of measuring the efficiency of a DMU when we know its non-radial target. One disadvantage is that the IV index does not prevent the appearance of negative efficiency indexes, but we shown the conditions under which these do not appear. A case study is carried on to evaluate the efficiency of the CEDERJ's centers that have graduated Mathematic students in the first term of 2009. In addition to the managerial flexibility in having alternative, non radial, targets with the MORO-D-R, the use of the IV index enables managers to calculate the efficiency index of the centers according to the chosen non radial targets, which does not occur in classical DEA models.

Key-words: DEA. Multiobjective. Non-radial projection. Vector efficiency.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*), também chamada Análise Envoltória de Dados é uma abordagem não paramétrica para estimar fronteiras de produção e obter índices de eficiência. Segundo Pastor et al. (1999), o seu início significou um novo modo de medir a eficiência de unidades.

A metodologia DEA faz uso de Problemas de Programação Linear (PPL) e assume que o conjunto de produção é convexo. Assim, o modelo propõe construir uma fronteira não paramétrica linearmente convexa a partir do conjunto de dados. Esta definição tenta expressar a eficiência de Pareto-Koopmans, definida por Koopmans (1951), onde uma unidade produtiva, chamada DMU (*Decision Making Unit*) é Pareto-Koopmans eficiente se e somente se é tecnologicamente impossível aumentar qualquer produto (denominado *output*) e/ou reduzir qualquer insumo (denominado *input*) sem simultaneamente reduzir outro *output* e/ou aumentar qualquer outro *input* (CHARNES; COOPER, 1985). Para visão mais detalhada e matematicamente mais rigorosa, ver Banker, Charnes e Cooper (1984), Charnes et al. (1994) e Farrell (1957). Nos anos seguintes diversos trabalhos desenvolveram sua metodologia e expandiram suas aplicações, Seiford e Thrall (1990), Lovell (1993), Coelli (1995), Mukherjee (1997). Os modelos DEA constroem a fronteira de produção (fronteira de melhor prática) a partir das informações de todas as unidades produtivas que compõem o conjunto que será analisado. Nesses modelos, as unidades eficientes se localizam sobre a fronteira e as menos eficientes ficam abaixo.

Em um primeiro momento, uma das vantagens da metodologia DEA, quando usada para medir a eficiência técnica, é que ela pode produzir automaticamente alvos para as unidades classificadas como ineficientes. Tais alvos podem ser virtuais ou reais, ou seja, podem ser uma combinação linear das unidades eficientes de referência ou uma própria

unidade eficiente da fronteira. A metodologia é capaz, portanto, de descrever a determinação de um conjunto de pesos, que indica a combinação de unidades eficientes para comparação com cada ineficiente e que representa a proporção de redução *inputs* ou o aumento de *outputs* que uma unidade ineficiente poderia proceder para tornar-se eficiente. Essa é uma importante característica da metodologia que a torna de grande valor prático.

No entanto, como já havia sido notado por Färe e Lovell (1978) (é interessante notar no mesmo ano em que DEA foi introduzida), folgas podem acontecer nos *inputs* e/ou nos *outputs*, ou seja, uma DMU podia ser classificada como eficiente, quando na verdade ela não cumpria as condições de eficiência de Pareto-Koopmans. O fato é que a medida de Farrell só é capaz de medir a eficiência radial, ou seja, a eficiência quando se mantém constante o nível de *outputs* e reduz o nível dos *inputs* (modelo orientado a *input*) ou quando se mantém o nível dos *inputs* e aumenta o nível de *outputs* (modelo orientado a *outputs*). Assim, uma DMU pode ser classificada como eficiente por Farrell e, no entanto, não ser Pareto-Koopmans eficiente.

Para resolver esse problema, índices que expressem corretamente a eficiência Pareto-Koopmans tem sido propostos por vários pesquisadores ao longo dos anos. Para isso foi deixada de lado a idéia de equiproporcionalidade, surgindo desta forma os índices de eficiência não radiais (CHARNES et al., 1979, 1985; FÄRE; LOVELL, 1978; RUGGIERO; BRETSCHNEIDER, 1998; ZIESCHANG, 1984; PASTOR et al., 1999; TONE, 2001). Considera-se então que, em DEA, projeções não radiais são aquelas em que o nível dos *inputs* e/ou dos *outputs* variam de forma não proporcional.

É importante ressaltar que os modelos para determinação de alvos não radiais consideram dois casos distintos para a determinação destes alvos:

- 1º) Considera a projeção radial da DMU e, se esta projeção ocorrer em uma região não Pareto eficiente da fronteira, esta DMU é projetada para o ponto Pareto eficiente mais próximo.
- 2º) A DMU é projetada um ponto Pareto eficiente da fronteira que seja mais apropriado aos interesses dos decisores.

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica de modelos não radiais na determinação de alvos e dos índices não radiais propostos em DEA. Entretanto, os modelos para determinação de alvos não fornecem um índice de eficiência para a DMU, o que impede a criação de um *ranking* destas DMUS e, assim, não permitem uma comparação entre elas.

Já os modelos para cálculo de índices não radiais existentes são baseados em média aritmética ou média ponderada, sem considerar, a priori, as direções de projeção da DMU na fronteira de eficiência. Além disso, os pontos de projeção das DMUs são obtidos sem nenhuma interferência por parte do decisor. Desta forma, não se pode afirmar se as projeções representam situações vantajosas para os problemas gerenciais reais, como será visto ao longo deste trabalho.

Estes índices baseados em somas perdem o sentido para o cálculo da eficiência em relação à geometria do problema, já que estão baseados em distâncias euclidianas. Já os índices baseados em ponderações exigem arbitrariedade por parte do decisor, o que é uma contrariedade dos paradigmas de DEA.

Uma tentativa de criação de um índice vetorial, ou seja, considerando que a eficiência depende também da direção de projeção da DMU na fronteira, foi feita por Soares de Mello et al. (2005). Segundo os autores, não se chegou a um índice de eficiência mas sim a um majorante deste índice. Além disso, a sua formulação apresenta restrições quanto a sua utilização.

Como mencionado, nos modelos existentes não há escolha do ponto de projeção da DMU na fronteira. Este ponto é definido pelo modelo e não há nenhuma garantia que o ponto é melhor que qualquer outro ponto sobre a fronteira. Assim, há uma dificuldade em se calcular a eficiência de uma DMU quando se conhece o ponto da fronteira onde esta DMU deve ser projetada (CHARNES et al., 1979, 1985; FÄRE; LOVELL, 1978; RUGGIERO; BRETSCHNEIDER, 1998; ZIESCHANG, 1984; FÄRE, 1975; FÄRE et al., 1983; COOPER; PASTOR, 1995; PASTOR et al., 1999; TONE, 2001).

As complexidades matemáticas destes modelos e o fato de não poder definir o ponto de projeção dificultam o entendimento do problema pelos gestores. Por isso, necessita-se de uma metodologia que proporcione aos agentes de decisão um entendimento melhor do processo.

## 1.2 OBJETIVO

Identificados os problemas descritos em 1.1, verifica-se a necessidade de desenvolvimento de um índice capaz de medir a eficiência de uma DMU quando esta é projetada de forma não radial na fronteira de eficiência.

Assim, este trabalho tem como objetivo principal apresentar, em caráter inédito, um novo índice de eficiência para uma DMU, desenvolvido utilizando os conceitos vetoriais da eficiência e atendendo às propriedades desejáveis aos índices de eficiência (expressas na seção 2.4), denominado índice IV.

Este índice IV será desenvolvido para o cálculo da eficiência em projeções não radiais de uma DMU na fronteira de eficiência e não pretende substituir os índices de eficiência calculados pelos modelos DEA clássicos (BCC e CCR). Pelo contrário, faz-se uma integração entre estes índices ao definir que uma das propriedades do índice de eficiência IV é ter os índices calculados pelos modelos DEA-BCC clássicos como casos particulares do índice de eficiência IV quando ocorrem projeções radiais.

A grande vantagem do índice IV é de poder calcular a eficiência de uma DMU, uma vez conhecido o ponto de projeção (alvo) desta DMU. A escolha do alvo é importante pois possibilita a projeção da DMU em um alvo não radial real, ao invés de alvos virtuais (alvos formados por uma combinação linear das DMUs eficientes) como pode ocorrer nos modelos DEA clássicos. Estes alvos virtuais podem não possuir sentido gerencial, o que dificulta o entendimento do processo pelos gestores. Assim, os alvos para as DMUs ineficientes podem ser escolhidos pelos gestores dentre as DMUs eficientes ou definidos através de modelos para identificação de alvos alternativos em DEA que serão apresentados no capítulo 4.

Desta forma, o índice de eficiência IV possui a vantagem de permitir que uma DMU ineficiente seja projetada na DMU extremo eficiente mais vantajosa, ou seja, a DMU eficiente que lhe proporciona a maior eficiência.

Um estudo de caso é apresentado no capítulo 7 com a avaliação da eficiência dos pólos do CEDERJ (Centro de Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro) que formaram alunos no curso de Licenciatura em Matemática no 2º semestre de 2009. Como pode ser visto nos resultados deste estudo de caso, nem sempre a projeção no alvo que fornece a maior eficiência é a projeção na DMU mais próxima, ou seja, aquela que possui a menor distância euclidiana. Além disso, a utilização do índice IV permite a criação de *ranking* baseado em DEA sem pesos zero.

Além da apresentação do índice de eficiência vetorial, faz-se ainda uma integração deste índice com o modelo multiobjetivo para determinação de alvos alternativos em DEA apresentado na seção 4.4 deste trabalho e denominado MORO-D-R. O modelo MORO-D-R fornece os índices de variação de *inputs* e *outputs* para a DMU se tornar eficiente. Estes índices são utilizados para o cálculo da eficiência pelo índice de eficiência IV.

O modelo MORO-D-R é uma variação do modelo MORO-D, modelo multiobjetivo para determinação de alvos alternativos em DEA apresentado por Angulo Meza (2002), Soares de Mello et al. (2003), Lins et al. (2004), Quariguasi Frota Neto; Angulo Meza (2007). A vantagem do modelo MORO-D-R sobre o modelo MORO-D é diminuir o trabalho computacional, evitar inviabilidade do modelo e possuir uma região viável maior que o modelo MORO-D.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No capítulo 2 é feita uma revisão da metodologia DEA, uma comparação entre a medida de Farell e a definição de eficiência de Pareto-Koopmans e são apresentadas as propriedades desejáveis para uma medida de eficiência. A seção 3 apresenta uma revisão de programação linear multiobjetivo e a seção 4 faz uma revisão dos modelos para determinação de alvos, apresentando ainda o modelo MORO-D-R. Ademais, na seção 5, é apresentado o estudo dos índices de eficiência não radiais. Na seção 6 é proposto um novo índice de eficiência não radial em DEA baseado na direção de projeção da DMU e considera os conceitos vetoriais da eficiência, denominado índice IV. Faz-se ainda um estudo das propriedades deste índice. Um estudo de caso da eficiência dos pólos do CEDERJ é apresentado na seção 7. Finalmente, na seção 8 aparecem as conclusões e proposições de continuação deste trabalho.

## 2 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (DEA)

O estudo da eficiência de unidades produtivas apresenta diversos enfoques, sendo alguns deles descritos ao longo deste trabalho. Para se entender de forma clara este conceito, deve-se compreender a diferença entre eficácia, produtividade e eficiência.

A eficácia está ligada apenas ao que é produzido, sem levar em conta os recursos usados para a produção. Pode-se então dizer que eficácia é a capacidade da unidade produtiva atingir a produção que tinha como meta.

Já o conceito de produtividade se preocupa não apenas com o que foi produzido (que neste trabalho serão chamados de *outputs*), mas também com as quantidades dos recursos utilizados na produção (denominados aqui por *inputs*). O quociente entre essas duas quantidades é chamado de produtividade. Como é o resultado da divisão de duas quantidades diferentes, a produtividade tem unidades de medida diferentes para cada caso.

Além disso, quando se têm várias empresas que desenvolvem atividades semelhantes, pode-se comparar as suas produtividades e investigar porque razão umas são mais produtivas que outras. De forma genérica, uma empresa é mais produtiva que outra porque tomou decisões que lhe permitem aproveitar melhor os recursos. O importante é que a maior produtividade é, via de regra, decorrente de alguma decisão tomada. Portanto, do ponto de vista deste tipo de análise, as unidades produtoras tomaram decisões e, por isso serão, doravante, denominadas por DMU (*Decision Making Unit*).

Desta comparação entre a produtividade de diferentes DMUs surge o conceito de eficiência. Assim, eficiência é um conceito relativo. Compara o que foi produzido, dado os recursos disponíveis, com o que poderia ter sido produzido com os mesmos recursos. Há importantes distinções na forma de avaliar a quantidade mencionada. Os chamados métodos paramétricos supõem uma relação funcional pré-definida entre os recursos e o que foi produzido. Normalmente, usam médias para determinar o que poderia ter sido produzido.

Da interpretação de eficiência de Debreu (1951) e posteriormente Farrel (1957) proporcionou-se a primeira medida de eficiência como sendo a máxima redução equiproporcional de todos os *inputs* enquanto são mantidos os *outputs* constantes, isso para uma eficiência do ponto de vista dos *inputs*, e o máximo aumento dos *outputs* enquanto se mantém os *inputs* constantes, para o ponto de vista dos *outputs*. Estas primeiras medidas foram formalizadas por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e Banker, Charnes e Cooper (1984) e são chamadas de Análise Envoltória de Dados (do inglês *Data Envelopment Analysis* – DEA) clássica, pois são, também, as mais simples.

Assim, DEA é uma metodologia com base na programação matemática que utiliza problemas de programação linear (PPL) para determinar a eficiência de unidades de tomada de decisão, denominadas DMU's.

As DMU's podem ser quaisquer tipo de organização (como indústrias, lojas, escolas, entre outros) e devem ser avaliadas segundo a mesma ótica, ou seja, o conjunto de unidades adotado em uma análise DEA deve ter em comum a mesma utilização de fatores de produção (denominados *inputs*) para produção de um mesmo conjunto de produtos (denominados *outputs*) e ter autonomia na tomada de decisões (ESTELLITA LINS; ÂNGULO MEZA, 2000).

A avaliação de eficiência relativa gerada pelo DEA com respeito a uma DMU é definida como a razão da soma ponderada dos níveis *outputs* pela soma ponderada dos seus *inputs*. A formulação original DEA (CHARNES; COOPER; RHODES, 1978) e suas consequentes extensões podem ser encontradas em Cooper et al. (1999) e Thanassoulis (2001). Desta forma, DEA determina uma fronteira linear por partes separando as DMUs eficientes das ineficientes. As unidades da fronteira são classificadas como eficientes. O índice de eficiência é calculado em função da forma de projeção das ineficientes na fronteira.

A modelagem DEA tem os seguintes objetivos:

- Identificar as origens e quantidades de ineficiência das DMUs, analisando suas dimensões relativas a entradas e/ou saídas.
- A determinação da eficiência das DMUs, contemplando uma a uma, relativamente a todas as outras. DEA faz uma ordenação das DMUs e pode, sob determinadas condições, ser usado como ferramenta multicritério na problemática da ordenação.
- Estabelecimento de estratégias de produção que maximizem a eficiência das DMUs avaliadas, corrigindo as ineficientes através da determinação de alvos.

Pereira (1995) destaca algumas características da metodologia DEA que reforça sua vocação como uma das principais ferramentas para a análise de eficiência:

- Constrói uma fronteira de eficiência a partir da análise de todas as variáveis em estudo;
- Não necessita da definição a priori de uma função de produção;
- O cálculo da eficiência é feito a partir da consideração de diferentes combinações de *inputs* e *outputs*;
- Fornece um conjunto de referência para cada DMU ineficiente.

Embora várias formas da fronteira possam ser determinadas, existem dois modelos que são considerados clássicos: CCR e BCC. Estes dois modelos têm seus nomes associados a seus autores: CCR (Charnes, Cooper e Rhodes) e BCC (Banker, Charnes e Cooper). O modelo CCR, também conhecido como CRS (*Constant Returns to Scale*), trabalha com retorno constante de escala, enquanto o modelo BCC, também conhecido como VRS (*Variable Returns to Scale*), considera retornos variáveis de escala, permitindo a introdução do conceito de economia de escala.

O índice de eficiência é calculado em função da forma de projeção das DMUs ineficientes na fronteira.

A orientação do modelo indica como uma DMU irá atingir a fronteira de eficiência. É possível orientá-la de duas formas: orientação a *inputs* ou orientação a *outputs*. Se um modelo é orientado a *inputs*, significa que as DMUs tentarão atingir a fronteira realizando uma diminuição de seus recursos, sem que seus resultados sejam alterados. Se um modelo é orientado a *outputs*, as DMUs tentarão atingir a fronteira maximizando seus resultados, mantendo constantes seus recursos disponíveis.

A figura 2.1 representa os modelos CCR e BCC para uma fronteira bidimensional. Nesta figura, a eficiência da DMU E é dada por  $\frac{\overline{E''E'}}{E''E}$  para o modelo BCC, e por  $\frac{\overline{E''E''''}}{E''E}$  no modelo CCR, ambos para orientação a *inputs*.

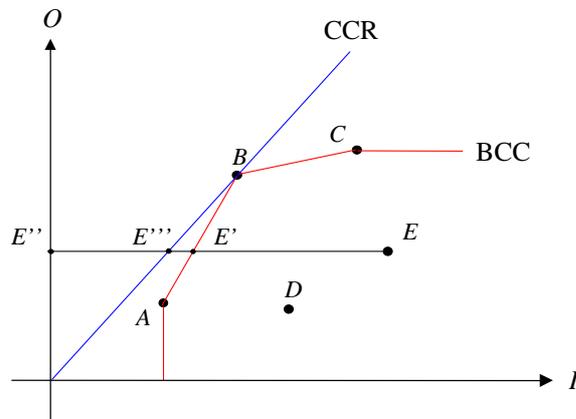


Figura 2.1 – Fronteiras de eficiência DEA

## 2.1 MODELO CCR

O modelo CCR, apresentado originalmente por Charnes et al. (1978), trabalha com retornos constantes de escala, isto é, qualquer variação nos recursos (*inputs*) produz variação proporcional nos produtos (*outputs*). Esse modelo é igualmente conhecido como modelo CRS – *Constant Returns to Scale*.

### 2.1.1 Modelo CCR Orientado a *Inputs*

Este modelo determina a eficiência pela otimização da divisão entre a soma ponderada dos produtos (*output virtual*) e a soma ponderada dos recursos (*input virtual*) que generaliza a definição de Farrell (1957). O modelo é denominado orientado a *input* pois mantém constante o nível dos *outputs*, reduzindo a quantidade de *inputs* para uma DMU atingir a fronteira de eficiência.

O modelo constrói uma superfície linear por partes, não paramétrica, sobre os dados. No lugar de uma ponderação igual para todas as DMUs, o modelo permite a escolha de pesos para cada variável, da forma que lhe seja mais favorável, desde que esses pesos, quando aplicados às outras DMUs não gerem uma razão superior à unidade. A formulação dessas condições são apresentadas pelas equações (2.1) a seguir:

$$\text{Max } Eff_0 = \left( \frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{i0}} \right)$$

sujeito a (2.1)

$$\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

$$u_j \text{ e } v_i \geq 0 \quad \forall j, i$$

onde:  $Eff_0$  - eficiência da DMU O que é a DMU em análise;

$r$  – número total de *inputs*

$s$  – número total de *outputs*

$n$  – número de DMUs

$u_j, v_i$  - pesos de *outputs* e *inputs* respectivamente;

$x_{ik}, y_{jk}$  - *inputs*  $i$  e *outputs*  $j$  da DMU  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ;

$x_{i0}, y_{j0}$  - *inputs*  $i$  e *outputs*  $j$  da DMU O.

Esse problema de programação fracionária pode ser transformado em um problema de programação linear (PPL), obrigando o denominador da função objetivo a ser igual a uma constante, normalmente igual à unidade.

O modelo CCR passa então a ser apresentado como nas equações (2.2), onde  $h_0$  é a eficiência da DMU<sub>0</sub>. A DMU<sub>0</sub> é a DMU que está sendo analisada;  $v_i$  e  $u_r$  são os pesos de *inputs*  $i$ , e *outputs*  $r$ , respectivamente;  $x_{ij}$  e  $y_{rj}$  são os *inputs*  $i$  e *outputs*  $r$  da DMU  $j$ .

$$\text{Max } h_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

O PPL usado até aqui é chamado modelo dos multiplicadores para uma DMU<sub>0</sub>. Este modelo é chamado dessa forma pois determina os pesos ou multiplicadores das variáveis de uma DMU.

Com base no Modelo dos Multiplicadores (primal) é possível desenvolver o seu dual, conhecido como Modelo do Envelope, que pelo teorema da dualidade forte, apresentará o mesmo valor ótimo para a função objetivo, quando esse existir (BREGALDA; BORNSTEIN, 1981). O conjunto de equações (2.3) representam o modelo do Envelope orientado aos *inputs*:

Min  $\theta$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$\theta$  irrestrita.

Neste modelo  $\theta$  é a eficiência, que é multiplicada por todos os *inputs* de forma a obter valores que coloquem a DMU na fronteira eficiente através da redução dos *inputs* e  $\lambda_j$  representa a contribuição da DMU  $j$  na formação do alvo da DMU em avaliação.

### 2.1.2. Modelo CCR Orientado a *Output*

Alternativamente pode-se desenvolver um modelo para maximização das saídas mantendo-se inalteradas as entradas (orientação a *output*). As variáveis de decisão do modelo são as mesmas apresentadas no conjunto de equações (2.1). O modelo com orientação a *output* é apresentado pelas equações (2.4). Com a orientação a *output*,  $h_0$  sempre assume valores superiores à unidade, por isso, a eficiência é agora definida como sendo o inverso de

$$h_0, \text{ isto é, } h_0 = \frac{1}{Eff_0}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Min } h_0 &= \sum_{i=1}^r v_i x_{i0} \\
\text{s.a.} \\
\sum_{j=1}^s u_j y_{j0} &= 1 \\
\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} &\leq 0, \quad k=1, \dots, n \\
u_j \text{ e } v_i &\geq 0 \quad \forall j, i
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Assim como no modelo CCR orientado a *input*, é possível deduzir o Modelo do Envelope – o dual equivalente a esse modelo de orientação a *output*. O conjunto de equações (2.5) apresenta esse modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Max } h_0 \\
\text{s.a.} \\
x_{i0} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k &\geq 0, \quad i=1, \dots, r \\
-h_0 y_{j0} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k &\geq 0, \quad j=1, \dots, s \\
\lambda_k &\geq 0, \quad \forall k
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Os modelos CCR orientados a *input* e a *output* identificam o mesmo conjunto de DMUs eficientes e ineficientes (COELLI et al., 1998), ou seja, o modelo é invariante com relação à sua orientação, estimando assim a mesma fronteira eficiente.

## 2.2 MODELO BCC

O modelo BCC, devido a Banker et al. (1984), considera retornos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade. Por isso, esse modelo também é conhecido como VRS – *Variable Returns to Scale*. Ao obrigar que a fronteira seja convexa, o modelo BCC permite que DMUs que operam com baixos valores de *inputs* tenham retornos crescentes de escala e as que operam

com altos valores tenham retornos decrescentes de escala. Matematicamente, a convexidade da fronteira equivale a uma restrição adicional ao Modelo do Envelope da soma dos pesos ser igual a 1. O Modelo do Envelope com orientação a *inputs* é apresentado em (2.6).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } h_0 \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq h_0 \cdot x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

E com orientação a *output* nas equações (2.7):

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } h_0 \\
 & \text{s.a.} \\
 & x_{i0} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0, \quad \forall i \\
 & -h_0 y_{j0} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0, \quad \forall j \\
 & \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \\
 & \lambda_k \geq 0, \quad \forall k
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como nos modelos CCR, os duais dos PPLs (2.6) e (2.7) geram os modelos BCC dos Multiplicadores orientados a *inputs* e *outputs*, respectivamente.

### 2.3 COMPARAÇÃO ENTRE A MEDIDA DE FARRELL E A EFICIÊNCIA PARETO – KOOPMANS

Da definição eficiência de Pareto-Koopmans, uma DMU é eficiente se e somente se é tecnologicamente impossível aumentar qualquer *output* (e/ou reduzir qualquer *input*) sem simultaneamente reduzir outro *output* (e/ou aumentar qualquer outro *input*) (KOOPMANS, 1951). Porém, o índice obtido a partir dos modelos DEA clássicos, chamado de radial, nem sempre identifica as DMUs Pareto-Koopmans eficientes.

A partir do exemplo extraído de Ruggiero (2000), a figura 2.2 será utilizada para comparar as DMUs eficientes segundo os modelos DEA clássico, também chamado de medida de Farrell, com o conceito de eficiência de Pareto-Koopmans.

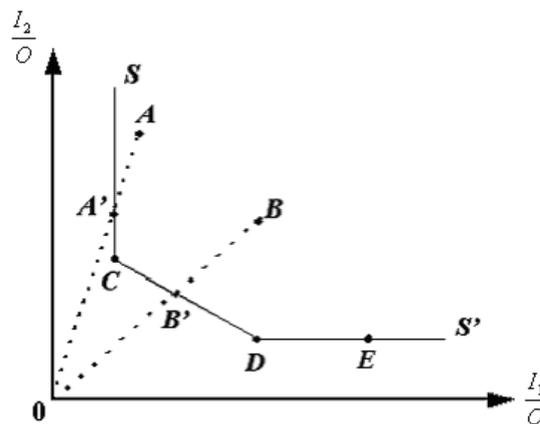


Figura 2.2 – Medida de Farrell e Koopmans Eficiência

A figura 2.2 apresenta o exemplo de uma fronteira DEA CCR, com 3 variáveis, sendo 2 *inputs* e 1 *output*, na qual as DMUs eficientes C e D definem a fronteira. A fronteira de produção está representada no plano bidimensional e assim, para conseguir representar a esta fronteira, nos eixos das abcissas e das ordenadas estão descritos, respectivamente, a divisão do *input* 1 pelo *output* e a divisão do *input* 2 pelo *output*.

Observa-se que a DMU E, apesar de eficiente, tem um comportamento diferente das demais. Enquanto para as DMUs C e D só é possível reduzir um *input* e permanecer na região viável de produção aumentando o outro (ou diminuindo o *output*), a DMU E pode diminuir o *input* 1 mantendo constante o *input* 2 e mesmo assim permanecer na região viável de

produção. Essa quantidade que ainda é possível ser reduzida é conhecida como folga. Observa-se, assim, que apesar de ser 100% eficiente pela medida de Farrell, a DMU E não é tão eficiente quanto às outras unidades eficientes.

Logo pode-se dizer que as DMUs A e B são Farrell ineficientes, as DMUs C, D e E são Farrell eficientes já que não é possível equiproporcionalmente reduzir ambos os *inputs* enquanto simultaneamente são mantidos os *outputs*. Além disso, somente as DMUs C e D são eficientes do ponto de vista Pareto-Koopmans.

Da mesma forma avaliando se as projeções radiais na fronteira eficiente das DMUs A e B, se observa que a medida de eficiência técnica para A e B é dada, respectivamente, por  $OA'/OA$  e  $OB'/OB$ . Entretanto, é questionável se o ponto A' é um ponto eficiente, já que é possível reduzir a quantidade CA' do *input* 2 e ainda produzir a mesma quantidade de *output*. Novamente se encontra uma quantidade que ainda é possível ser reduzida, conhecida como folga. Assim, os pontos A' e E não cumprem as condições de eficiência de Pareto-Koopmans, pois pode ser verificada a presença de folgas, o que proporciona que seja reduzido algum *input* ou aumentado algum *output*, sem piorar nenhum outro *input* ou *output*.

## 2.4 PROPRIEDADES DESEJÁVEIS DAS MEDIDAS DE EFICIÊNCIA

Färe e Lovell (1978) foram os primeiros que propuseram um conjunto de propriedades que uma medida de eficiência deveria satisfazer segundo a definição Pareto-Koopmans. Embora este enunciado tenha sido para o caso particular de uma medida orientada aos *inputs*, elas podem ser também utilizadas de forma análoga para o caso dos *outputs*.

As propriedades sugeridas são as seguintes:

- A eficiência só deve ser atribuída às DMUs Pareto-Koopmans eficientes, isto é, só as DMUs Pareto-Koopmans eficientes devem ter um índice de eficiência igual a 1;
- Ao calcular a eficiência de uma unidade ineficiente a DMU é comparada com DMUs Pareto-Koopmans eficientes;
- Homogeneidade de grau  $-1$ , isto é, se for assumida orientação a *inputs*, se os *inputs* aumentam em uma proporção dada, o índice de eficiência deve diminuir na

mesma proporção. Se for assumida orientação aos *outputs*, a interpretação é análoga;

- Assumindo orientação aos *inputs*, o índice de eficiência deve ser estritamente monotônico decrescente em cada *input*. Em outras palavras, cada vez que um *input* cresce, o índice de eficiência deve diminuir.

Estas propriedades foram propostas pelos autores na área da teoria econômica. Também foi mostrado por Färe e Lovell (1978) que a medida de eficiência de DEA clássico (medida de Farrell) só satisfaz a propriedade de homogeneidade de grau -1.

Assim, não faz sentido dizer que uma DMU deve ser comparada apenas às DMUs Pareto-Koopmans eficientes uma vez que os modelos DEA clássicos utilizam projeções radiais para que uma DMU ineficiente atinja a fronteira de produção, podendo assim ser projetada em regiões fracamente eficientes da fronteira. Além disso, a propriedade de homogeneidade só é válida para os modelos CCR, que trabalham com retornos constantes de escala.

Mais tarde, Cooper e Pastor (1995) apresentaram propriedades similares, adicionando outras:

- O índice de eficiência deve ser maior que zero e menor ou igual a 1;
- A eficiência igual a 1 só deve ser atribuída a DMU Pareto-Koopmans eficiente;
- Unidades invariantes: A medida de eficiência deve ser invariável em relação às unidades de medida dos *inputs* e *outputs*.
- Fortemente monotônico nos *inputs* e nos *outputs*: Um aumento nos *inputs* ou uma redução nos *outputs* deve reduzir a eficiência da DMU em análise.

As duas primeiras significam que a medida de eficiência é limitada por 0 e 1, atingindo o topo, no valor 1 se, e somente se, a DMU em análise é Pareto-Koopmans eficiente. A terceira propriedade garante que os valores da eficiência são independentes das unidades de medida dos *inputs* e *outputs* considerados. A quarta propriedade requer sensibilidade do aumento de *inputs* e redução de *outputs* em uma única direção, ou seja, um aumento em algum *input* ou uma redução em algum *output*, mantendo todos os demais fatores constantes, deve reduzir o valor do índice de eficiência.

Ao definir que o índice de eficiência deve estar compreendido entre 0 e 1, Cooper e Pastor (1995) tratam a eficiência como um escalar, não tratando assim do ponto onde a DMU está sendo projetada. Este é um grande problema dos índices de eficiência, pois são tratados como escalares e não como vetoriais. Além disso, Soares de Mello et al. (2008) afirmam que, no caso do modelo DEA BCC, o modelo dos multiplicadores é obtido através do dual do modelo do envelope. Como este modelo tem uma restrição de igualdade, existe uma variável livre no modelo dos multiplicadores e, portanto, não se pode garantir a não negatividade dos índices de eficiência quando os pesos de uma DMU são utilizados para outra, em situações típicas de Avaliação Cruzada (SEXTON, 1986) ou no cálculo de alguns índices de eficiência não radial (GONZALEZ-ARAYA, 2003; LINS et al., 2004). Assim, nem sempre pode-se garantir que um índice de eficiência esteja entre os valores 0 e 1.

Cooper e Pastor (1995) notaram que a monotonicidade no índice de eficiência não é uma propriedade usual e é muito difícil de alcançá-la. Isto leva alguns autores a considerar outras propriedades, tais como, fracamente monotônica ou decrescente nos valores relativos das folgas. Além disso, esta propriedade e a propriedade de “unidades invariantes” são mutuamente excludentes.

As seguintes propriedades encontradas em Tone (2001) são consideradas importantes ao se desenvolver medidas de eficiência:

- Unidades invariantes: a medida deve ser invariante em relação às unidades em quais os *inputs* e *outputs* são medidos;
- Monótona: a medida deve ser monotonicamente decrescente em cada folga nos *inputs* e nos *outputs*;
- Translação invariante: a medida deve ser invariante sob translações paralelas do sistema de coordenadas aplicado;
- Dependente do conjunto de referência: a medida deve ser determinada somente consultando o conjunto de referência da DMU, ou seja, não pode ser influenciada por valores extremos, como por exemplo, valores máximos ou mínimos do conjunto de dados observados.

A propriedade “Translação invariante” só é válida para modelos BCC, ou seja, depende da presença da restrição de convexidade  $\left( \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right)$ . Assim, somente modelos com rendimento variáveis de escala podem ser invariáveis segundo a translação.

Por esta razão, esta propriedade é incompatível com a propriedade da homogeneidade, válida somente para modelos CCR. A propriedade da homogeneidade está relacionada com a proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* e assim a fronteira de eficiência passa obrigatoriamente pela origem. Com uma translação da fronteira, esta deixaria de passar pela origem.

### 3 PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTI OBJETIVO

Existem diversos casos em que mais de um objetivo, muitas vezes conflitantes, podem ocorrer quando tenta-se encontrar a melhor solução possível para um problema de otimização. Nestes casos a Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) se apresenta como uma forma de encontrar uma solução, pois, dado que existem múltiplos objetivos, ter-se-á um conjunto de soluções eficientes, chamadas de não dominadas, para o problema. (LOBIANCO; ANGULO MEZA, 2008; ANGULO MEZA et al., 2006).

A utilização de problemas multiobjetivo pode representar uma grande vantagem com relação à programação linear mono-objetivo, pois considera vários aspectos de um problema. Além disso, enquanto que ao otimizar um problema de programação linear mono-objetivo (ou na otimização escalar) é obtida uma solução ou um conjunto de soluções ótimas, com um mesmo valor na função objetivo, na otimização de problemas linear multiobjetivos (ou na otimização vetorial) obtém-se um conjunto de soluções eficientes, também chamadas de não dominadas, não comparáveis entre si em termos dos valores das funções objetivo, dentre as quais o decisor ou usuário pode escolher levando em consideração aspectos operacionais e gerenciais.

Este conjunto de soluções eficientes, ou não dominadas (ÁVILA et al., 2003), apresenta as seguintes propriedades:

- Quaisquer pares de soluções do conjunto não dominado devem ser não dominadas uma em relação à outra;
- Quaisquer das soluções não contidas no conjunto não dominado devem ser dominadas por, no mínimo, uma solução no conjunto não dominado.

Estas soluções são Pareto Ótimas (TAKAHASHI, 2007) em que um conjunto de soluções é eficiente quando está formado por soluções viáveis tais que não existe outra

solução viável que forneça uma melhora em uma função objetivo sem provocar uma piora em pelo menos uma outra função objetivo. (ROMERO, 1993).

Existem vários métodos para determinar estas soluções não dominadas no sentido de Pareto. Todos eles utilizam um processo de escalarização, que consiste na transformação do problema multiobjetivo em um problema de otimização de uma função escalar substituta, cuja solução ótima é também uma solução não dominada do problema PLMO, incluindo parâmetros de informação das preferências do decisor. A função substituta utilizada para construir um equivalente escalar do problema PLMO chama-se de função escalarizante ou função de escalarização (ÁVILA et al., 2003).

Existem três tipos de funções de escalarização utilizadas e consistem:

- Na otimização de uma das funções objetivo restringindo as outras;
- Na soma ponderada das funções objetivo ou método das ponderações;
- Em uma métrica ou distância a um ponto de referência ou ponto ideal.

### 3.1 OTIMIZAÇÃO DE UMA DAS FUNÇÕES OBJETIVO, RESTRINGINDO AS OUTRAS

Neste processo, uma das funções objetivo é escolhida como função substituta, em geral aquela que o decisor considera como a mais importante, enquanto que os outros objetivos são tratados como restrições, com valores mínimos que o mesmo está disposto a aceitar.

Segundo vários autores tais como Ávila et al. (2003) e Takahashi (2007), a determinação de valores mínimos para as restrições das funções que eram funções objetivos não é uma tarefa trivial. Além disso, dependendo da fixação da função a otimizar, o modelo pode se tornar pouco flexível e, conseqüentemente, seus resultados muito dependentes da função selecionada e dos valores mínimos estipulados.

### 3.2 SOMA PONDERADA DAS FUNÇÕES OBJETIVO

Um método clássico, de fácil compreensão e o mais utilizado, é a soma ponderada das funções objetivo. A função escalarizante é a soma ponderada das funções objetivo, desta forma obtém-se o modelo apresentado em (3.1).

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \lambda_1.f_1(x) + \lambda_2.f_2(x) + \dots + \lambda_p.f_p(x) \\
& \text{Sujeito a:} \\
& \underline{x} \in X \\
& \lambda \in \Lambda \\
& \text{onde } \Lambda = \{ \lambda: \lambda \in \mathfrak{R}^p, \sum \lambda_k = 1, \lambda_k > 0, k=1, 2, \dots, p \}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Neste modelo, é dado um peso,  $\lambda_p$ , a cada uma das  $p$  funções objetivo, tal que a soma dos pesos dados a cada função objetivo seja igual 1. Kornbluth (1974) notou que diferentes conjuntos de pesos das funções objetivo levam às mesmas soluções não dominadas. De fato, os intervalos de variação dos  $\lambda_p$  são chamados de regiões de indiferença, isto é, uma região ou intervalo em que os pesos,  $\lambda_p$ , das funções objetivos podem variar e a solução continuar eficiente. Uma característica desta função de escalarização é que somente gera os pontos extremos da fronteira não dominada e não os pontos interiores, que também são não dominados.

Este enfoque é a base do Simplex Multiobjetivo (ZELENY, 1973).

### 3.3 MINIMIZAÇÃO DA DISTÂNCIA A UM PONTO DE REFERÊNCIA

Neste enfoque pretende-se calcular uma solução eficiente admissível que esteja tão perto quanto possível (segundo uma dada métrica) das aspirações do decisor, uma solução ideal ou outro ponto de referência fornecido.

Pode-se definir em  $\mathfrak{R}^n$  uma métrica  $L_p$  que mede a distância entre dois pontos, isto é, trata-se de uma função de distância que atribui a cada par de vetores  $\underline{z}^1, \underline{z}^2 \in \mathfrak{R}^n$ , um escalar  $\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\| \in \mathfrak{R}$ .

Para a métrica  $L_p$  a distância entre dois pontos em  $\mathfrak{R}^n$  é dada por (3.2).

$$\begin{aligned}
\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\|_p &= \left[ \sum_{i=1}^n |z_i^1 - z_i^2|^p \right]^{1/p}, p \in \{ 1, 2, \dots \}. \\
\|\underline{z}^1 - \underline{z}^2\|_\infty &= \max |z_i^1 - z_i^2|, i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Na figura 3.1, obtida de (ÁVILA et al., 2003), são apresentados os pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_\infty$  que minimizam as distâncias a  $z^*$ , utilizando-se as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$  respectivamente. Na figura 3.1,  $z^*$  representa o ponto de referência definido pelo decisor.

Desta família de métricas pode-se destacar a métrica  $L_1$ , que representa o somatório das distâncias em todas as componentes, e chamada “city block”, a  $L_2$ , distância euclideana, e  $L_\infty$ , distância de Tchebycheff, onde é considerado apenas o pior caso, isto é, a maior diferença entre as componentes dos vetores (ÁVILA et al., 2003).

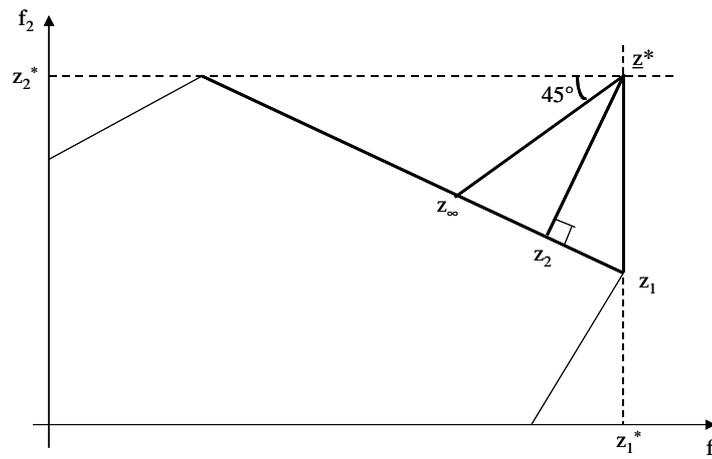


Figura 3.1 – Funções de distância utilizando as métricas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_\infty$ .

A minimização da distância à solução ideal (ou outro ponto de referência do decisor) pode ser interpretada como a minimização do “desconforto” de obter uma solução não dominada de compromisso  $z^0$  ao invés do ponto ideal  $z^*$  (CLÍMACO et al., 1996).

Utilizando este enfoque é possível obter todos os pontos da fronteira não dominada, sejam estes pontos extremos ou não da região eficiente. Esta é a base de vários métodos utilizados na atualidade tais como Pareto Race (KORHONEN; WALLENIUS, 1988), que percorre toda a fronteira de eficiência através de interações com o decisor e o TRIMAP (CLÍMACO; ANTUNES, 1987, 1989) e ADBASE (STEUER, 1983) que fornecem pontos extremos da fronteira de eficiência. Este último utiliza o método das ponderações para determinar os pontos extremos das soluções não dominadas para problemas lineares multiobjetivo. O ADBASE é um software não interativo, pois encontra todos os pontos sem a participação do decisor no processo. Já nos métodos TRIMAP e Pareto Race, o decisor pode examinar cada solução gerada e as respostas são utilizadas para gerar uma solução melhorada. Esta é uma das vantagens do enfoque interativo.

### 3.4 COMENTÁRIOS ADICIONAIS

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um índice não radial para o cálculo de eficiência. Entretanto, para este cálculo, precisa-se definir inicialmente o ponto de projeção da DMU na fronteira de eficiência, denominado alvo.

O enfoque multiobjetivo é utilizado para a determinação dos alvos alternativos sobre a fronteira de eficiência. Para isso, será utilizado o modelo multiobjetivo denominado MORO-D-R que será descrito na seção 4.4. Para o cálculo das soluções deste modelo, será utilizado o software TRIMAP (CLÍMACO; ANTUNES, 1987, 1989).

#### 4 MODELOS PARA DETERMINAÇÃO DE ALVOS

Entre os resultados fornecidos por DEA, encontram-se (além da medida de eficiência) as estimativas específicas das mudanças desejadas nas variáveis da DMU ineficiente para esta atingir a eficiência. Estas estimativas são chamadas de alvos ou projeções eficientes e estão baseadas em DMUs eficientes que servem como referência para a ineficiente, e constituem um conjunto chamado de *conjunto de referência*.

Nos modelos baseados no índice de eficiência radial estes alvos dependem da orientação do modelo, podendo ser orientado a *input* ou a *output*. Considere a figura 4.1 para o exemplo do modelo BCC. Os alvos para a DMU A dependem da orientação. A direção definida por AA' representa a projeção radial da DMU A com orientação a *input*. A direção AA'' representa a projeção radial com orientação a *output*.

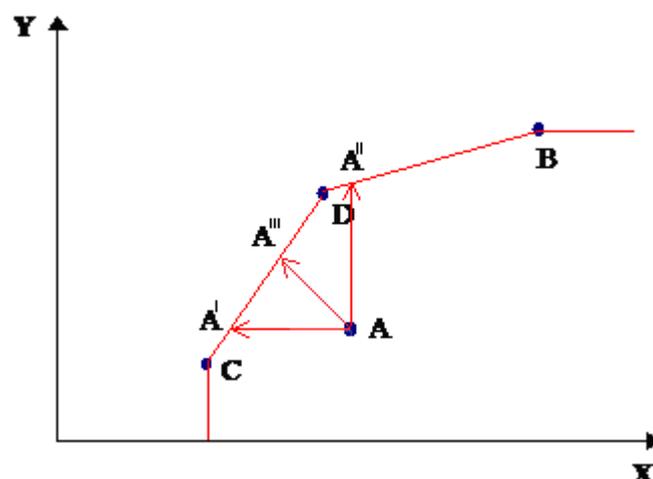


Figura 4.1 – Projeções de uma DMU na fronteira definida pelo modelo BCC

Do ponto de vista da gerência é possível que existam alvos que sejam preferíveis àqueles fornecidos pelos modelos que supõem projeção radial na fronteira. Por exemplo, o

alvo pode ser um ponto que seja a minimização de alguns *inputs* e a maximização de alguns *outputs*. Também pode acontecer que o ponto seja a projeção de reduções ou aumentos independentes para cada variável. Estas projeções são chamadas de não radiais. A direção definida por AA'' da figura 4.1 representa uma possível projeção não radial da DMU A na fronteira de eficiência. Em muitos casos, projeções radiais projetam uma DMU em uma região fracamente eficiente da fronteira, ou seja, regiões da fronteira onde existem folgas e, desta forma, ainda pode-se reduzir o valor do *input* ou aumentar o nível do *output* que a DMU continua eficiente. Desta forma, é possível reduzir (aumentar) o nível do *input* (*output*) mantendo constante o nível de *output* (*input*), ou seja, existem folgas nas variáveis que podem ainda ser eliminadas. Neste caso, os modelos com projeções não radiais podem determinar o melhor ponto de projeção de forma a minimizar ou reduzir as folgas. Este tipo de projeção identifica o ponto da fronteira Pareto eficiente mais próximo do alvo radial no qual a DMU foi projetada inicialmente. Um outro enfoque, que é considerado neste trabalho, é a identificação de um ponto de projeção não radial sobre a fronteira de eficiência que represente vantagens de projeção para a DMU e, uma vez identificado este alvo, calcular o valor da eficiência da DMU em relação a este ponto.

Vários pesquisadores dedicaram-se ao estudo da determinação dos alvos ou projeções eficientes, chamados na literatura de *target models*, através de diversos enfoques. O enfoque mais estudado é o que utiliza modelos baseados em estruturas de preferências fornecidos pelo decisor. Tal como indica seu nome, neste enfoque inclui-se informações a priori fornecidas pelo usuário ou decisor sobre a importância relativa das variáveis. Desta forma, os julgamentos de valor são incluídos no modelo para achar um alvo que esteja em concordância com as suas necessidades, limitações, recursos, etc. Apresenta-se a seguir três modelos para determinação de alvos que utilizam a estrutura de preferências, Thanassoulis e Dyson (1992), Zhu (1996) e MORO-D (ANGULO MEZA, 2002). Estes modelos são não radiais, uma vez que a redução nos *inputs* ou aumentos dos *outputs* não é realizada da forma equiproporcional. Em seguida, propõe-se um quarto modelo, denominado MORO-D-R, baseado no modelo MORO-D, com vantagens de utilização em relação aos demais modelos descritos (GOMES JÚNIOR et al., 2010).

#### 4.1 MODELO DE THANASSOULIS E DYSON (1992)

Thanassoulis e Dyson (1992) apresentam este modelo baseado em uma estrutura de preferências que utiliza pesos para as mudanças. Para uma DMU  $j_0$ , o modelo divide os *inputs* e *outputs* em duas categorias: a primeira categoria dos que se deseja melhorar, conjuntos  $I_0$  para os *inputs* e  $R_0$  para os *outputs*, e a segunda categoria dos que se deseja manter:  $\bar{I}_0$  e  $\bar{R}_0$ , formulado a seguir no modelo (4.1):

$$\text{Maximizar } \sum_{r \in R_0} w_r^+ \phi_r - \sum_{i \in I_0} w_i^- \varphi_i + \varepsilon \left( \sum_{i \in I_0} s_i^- + \sum_{r \in R_0} s_r^+ \right) \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} = 0, r \in R_0, \quad (4.2)$$

$$\varphi_i x_{ij_0} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = 0, i \in I_0, \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rj_0}, r \in \bar{R}_0, \quad (4.4)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ij_0}, i \in \bar{I}_0, \quad (4.5)$$

$$\phi_r \geq 1, \forall r \in R_0, \quad (4.6)$$

$$\varphi_i \leq 1, \forall i \in I_0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_j \geq 0, \forall j, \quad (4.8)$$

$$s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i \in \bar{I}_0 \text{ e } \forall r \in \bar{R}_0 \quad (4.9)$$

A estrutura de preferências do decisor é expressa através dos pesos  $w_r^+$  e  $w_i^-$  a serem atribuídos aos fatores  $\phi_r$  e  $\varphi_i$ , onde  $\phi_r$  reflete o aumento percentual no *output*  $r$ , e  $\varphi_i$  reflete a redução percentual no *input*  $i$  para se atingir o alvo.

Na função objetivo deste modelo (4.1) deseja-se maximizar a ponderação dos aumentos nos *outputs* e das reduções nos *inputs*. As restrições deste modelo são muito parecidas com as restrições do modelo do envelope de ambas orientações. A restrição (4.2) corresponde à orientação a *output* e a restrição (4.3) corresponde à orientação a *input*. Isto é,

aumenta-se o *output* ou reduz-se o *input* até o nível determinado pelas DMUs que compõem a fronteira. Estas melhoras ou projeções são consideradas para os conjuntos que se deseja melhorar,  $I_0$  e  $R_0$ . Para os conjuntos complementares,  $\bar{I}_0$  e  $\bar{R}_0$ , temos as restrições (4.4) e (4.5) relativos aos *outputs* e *inputs*, respectivamente.

Ao incrementarem-se restrições para  $\phi_r$  e  $\phi_i$  (equações 4.6 - 4.7) indica-se que o nível dos *outputs* deve permanecer igual ou aumentar, e que o nível dos *inputs* deve permanecer constante ou diminuir, isto é, considera-se dominância. A figura 4.2 representa este conceito, assim a DMU A pode ser projetada em qualquer ponto situado na região da fronteira de eficiência localizado entre as projeções radiais desta DMU.

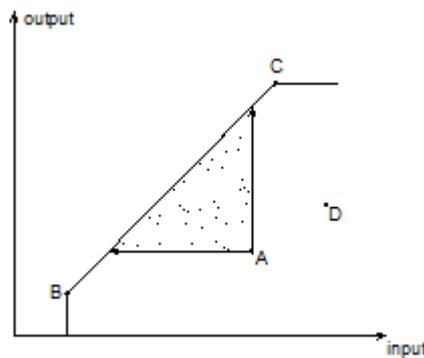


Figura 4.2 – Projeções com dominância

Se no modelo  $\phi_r^* = \phi_i^* = 1, \forall r \in R_0$ , e  $i \in I_0$  e  $s_r^{+*} = s_i^{-*} = 0 \forall r \in \bar{R}_0$  e  $i \in \bar{I}_0$ , então a DMU  $j_0$  é Pareto eficiente, caso contrário a DMU  $j_0$  é ineficiente, e o alvo para DMU ineficiente é expresso pelas equações (4.10 - 4.13):

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \in R_0, \quad (4.10)$$

$$y_{rj_0}^* = y_{rj_0} + s_r^{+*}, \quad \forall r \in \bar{R}_0, \quad (4.11)$$

$$x_{ij_0}^* = \phi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \in I_0, \quad (4.12)$$

$$x_{ij_0}^* = x_{ij_0} - s_i^{-*}, \quad \forall i \in \bar{I}_0. \quad (4.13)$$

Este modelo pode ser utilizado interativamente pelo decisor testando diferentes conjuntos de pesos e permitindo ao decisor controlar a busca de alvos mais apropriados para a DMU.

Cabe destacar que este modelo somente indica se a DMU é eficiente ou não e sua projeção, mas não fornece um índice de eficiência para a DMU.

#### 4.2 MODELO DE ZHU (1996)

Zhu (1996) definiu vários modelos com estruturas de preferências baseados na medida de eficiência de Russell (seção 5.1), primeiro para *inputs* e *outputs* separadamente, e em seguida propôs um modelo para *inputs* e *outputs* conjuntamente.

O modelo com orientação a *input* é definido como segue. Sejam  $w_i^-$  ( $i = 1 \dots m$ ) os pesos definidos pelo usuário ou decisor que refletem as preferências nos níveis dos *inputs*. Logo o modelo para determinação de um alvo com orientação a *input* é definido pelas equações (4.14 - 4.17):

$$\text{Minimizar } \frac{\sum_i w_i^- \phi_i}{\sum_i w_i^-} \quad (4.14)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (4.15)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \phi_i x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.16)$$

$$\phi_i, \text{ irrestrito } \forall i, \lambda, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, r, \epsilon > 0. \quad (4.17)$$

Se  $w_i^- = 0$  então  $\phi_i = 1$ , um desses pesos deve ser não nulo. Quanto maior peso  $w_i^-$ , maior a prioridade da redução do  $i$ -ésimo *input*.

Zhu (1996) mostrou que:  $\phi_i \geq 0$  e  $s_i^- = 0$  para todo  $i$ , e que o valor ótimo da função objetivo não é maior do que 1, e é igual a 1 se e somente se  $\phi_i^* = 1, \forall i$ .

Se o valor ótimo de (4.14 – 4.17) for 1 e  $s_r^{+*} = 0, \forall r$ , então a DMU 0 é eficiente; caso contrário é ineficiente e o alvo para a DMU 0 que está sendo avaliada é definida pelas equações (4.18 - 4.19):

$$y_{rj_0}^* = y_{rj_0} + s_r^{+*}, \quad \forall r \quad (4.18)$$

$$x_{ij_0}^* = \phi_i^* x_{ij_0} \quad \forall i \quad (4.19)$$

Note-se que alguns  $\phi_i^*$  podem ser maiores do que 1, isto é, considera que pode ser aumentado o nível de consumo de um recurso. Este modelo também pode considerar a existência de *inputs* não controláveis (*inputs* que não estão no controle da unidade). Neste caso o peso correspondente é zero.

Considerando os caso dos *outputs*, seja  $\phi_r$ , ( $r = 1, \dots, s$ ) os pesos definidos pelo usuário que refletem as suas preferências com relação aos *outputs*. Logo o modelo para determinação de alvos para a DMU 0 é definido pelas equações (4.20 - 4.23):

$$\text{maximizar } \frac{\sum_{r=1}^s w_r^+ \phi_r}{\sum_{r=1}^s w_r^+} \quad (4.20)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi_r y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (4.21)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.22)$$

$$\phi_r \text{ irrestritos } \forall i; s_i^-, s_r^+, w_r^+ \geq 0, \forall i, r, \epsilon > 0. \quad (4.23)$$

Se alguns  $w_r^+ = 0$ , então  $\phi_r = 1$ , ao menos um  $w_r^+$  deve ser positivo. Este modelo considera o caso oposto ao anterior, maximizando a soma ponderada dos *outputs*. São observadas as mesmas restrições que nos modelos do envelope padrão com orientação a *output*, incluindo-se as folgas, mas com um fator de aumento individual para cada *output*.

Note que se todos os pesos forem iguais, os aumentos serão proporcionais, o que caracteriza o modelo CCR.

Também foi demonstrado que  $\phi_r \geq 0$  e  $s_r^+ = 0, \forall r$ , e que o valor ótimo da função objetivo não é menor do que 1, e é igual a 1 se e somente se  $\phi_r^* = 1, \forall r$ . Se o valor ótimo de (4.20 – 4.23) é igual a 1 e  $s_i^- = 0$ , então a DMU 0 é eficiente; caso contrário é ineficiente e o alvo para esta DMU é definido por (4.24 - 4.25):

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \quad (4.24)$$

$$x_{ij_0}^* = x_{ij_0} - s_i^- \quad \forall i \quad (4.25)$$

Note que alguns  $\phi_r^*$  podem ser menores do que 1, isto significa que pode ser permitida uma redução nos níveis de produção de *outputs*. Se alguns *outputs* forem fixados de forma exógena, o peso correspondente é zero.

Baseado nos dois modelos anteriores, Zhu propõe um modelo que considere *inputs* e *outputs* apresentado a seguir pelas equações (4.26 - 4.30):

$$\text{Maximizar } \frac{\sum_{r=1}^s w_r^+ \phi_r - \sum_{i=1}^m w_i^- \phi_i}{\sum_{r=1}^s w_r^+ - \sum_{i=1}^m w_i^-} \quad (4.26)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi_r y_{rj_0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (4.27)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \phi_i x_{ij_0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.28)$$

$$\phi_i, \phi_r \text{ irrestritos } \forall i, r, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, r, \epsilon > 0. \quad (4.29)$$

$$\text{Onde } \sum_{r=1}^s w_r^+ - \sum_{i=1}^m w_i^- = 1 \quad (4.30)$$

Pode-se notar que este modelo é uma combinação dos dois modelos anteriores. Observa-se que as restrições correspondente a cada variável contém os fatores de variação individual (equações 4.27 e 4.28). A função objetivo (4.26) é a união das funções objetivo dos modelos anteriores.

Este modelo é muito parecido com o modelo proposto por Thanassoulis e Dyson (1992), embora no modelo de Zhu (1996) as restrições são as mesmas, tanto para as variáveis que se deseja mudar, quanto para as que não. A grande diferença é que o modelo de Zhu não considera dominância, pois  $\phi_i$  e  $\phi_r$  não são restritos, admitindo-se assim uma redução nos *outputs* e/ou um aumento nos *inputs* para atingir a fronteira eficiente. Isto pode acontecer quando se considera viável e preferível, do ponto de vista da gerência, um aumento nos *inputs* (redução dos *outputs*) para atingir a fronteira eficiente. Por exemplo, casos de legislação trabalhista onde nenhum trabalhador pode ser demitido (grandes custos e má imagem pública) ou onde existe super produção de um item no mercado.

Às variáveis que não se deseja modificar ou são não controláveis outorga-se peso zero.

Se  $w_r^+ = 0, \forall r$  então estamos no caso *outputs* (4.20 – 4.23) (o mesmo acontece se  $w_i^- = 0, \forall i$ , estamos no caso dos *inputs* (4.14 – 4.17)).

Zhu (1996) demonstrou que  $\phi_i, \phi_r \geq 0$  e  $s_r^{+*} = s_i^{-*} = 0, \forall i, r$ , e o valor ótimo para a função objetivo (4.26) do modelo é igual a 1 se  $\phi_r^* = \phi_i^* = 1, \forall i, r$ .

Da mesma forma que nos modelos anteriores, se  $\phi_r^* = \phi_i^* = 1$  e  $s_r^{+*} = s_i^{-*} = 0$ , então a DMU  $j_0$  é Pareto eficiente, caso contrário é ineficiente, e o alvo para a DMU  $j_0$  é definido por (4.31 – 4.32):

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \quad (4.31)$$

$$x_{ij_0}^* = \phi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \quad (4.32)$$

Este modelo pode ser utilizado interativamente pelo decisor, testando diferentes conjuntos de pesos e permitindo ao decisor controlar a busca de alvos mais apropriados para a DMU.

Conforme descrito por Angulo Meza (2002) e Clímaco et al. (2008), estes modelos apresentam uma dificuldade importante: a escolha dos pesos a serem atribuídos aos fatores  $\phi_r$  e  $\phi_i$ . Não se têm limites para estes pesos nem se sabe seus possíveis valores antes de testar os

modelos; somente a tentativa e erro nos fornecem uma idéia das dimensões e das suas possíveis variações. Este processo não é sistemático, não há garantias de uma busca exaustiva de todas as possíveis soluções de interesse do usuário. Além disso, também não se sabe como variar os pesos de modo a obter soluções diferentes (alvos diferentes) das já obtidas.

#### 4.3 MODELO MORO-D

O modelo MORO-D (*MultiObjective for Ratio Optimization with Dominance*) apresentado em Angulo Meza (2002), Soares de Mello et al.(2003), Lins et al.(2004), Quariguasi-Frota Neto e Angulo Meza (2007) é um modelo multiobjetivo para determinação de um conjunto de alvos para uma DMU ineficiente. Assim como nos modelos de Thanassoulis e Dyson (1992) e Zhu (1996), apresentados anteriormente, a idéia principal deste modelo é que os aumentos nos *outputs* e as reduções nos *inputs* são realizadas independentemente. A diferença do modelo MORO-D para os demais é que não há necessidade de definição dos pesos pelos decisores para a determinação dos alvos.

Anos após a apresentação do modelo MORO-D, Clímaco et al. (2008) verificaram que este modelo possui características semelhantes às do algoritmo proposto por Golany (1988), cujo objetivo é determinar um vetor de *outputs* possíveis, que seja eficiente para um vetor de *inputs* dado. Para atingir este objetivo utilizou-se um enfoque PLMO interativo para gerar um conjunto de pontos eficientes a serem considerados pela DMU.

Este modelo é uma variação do modelo MORO (*MultiObjective for Ratio Optimization*) apresentado por Angulo Meza (2002). A diferença entre eles está na forma de projeção da DMU na fronteira de eficiência. No modelo MORO, a projeção pode ocorrer em qualquer ponto da fronteira de eficiência enquanto que, no modelo MORO-D, as restrições de dominância impedem que o nível dos *inputs* aumente assim como não se pode reduzir o nível de *outputs*. As figuras 4.3a e 4.3b representam as projeções nos modelos MORO e MORO-D, respectivamente.

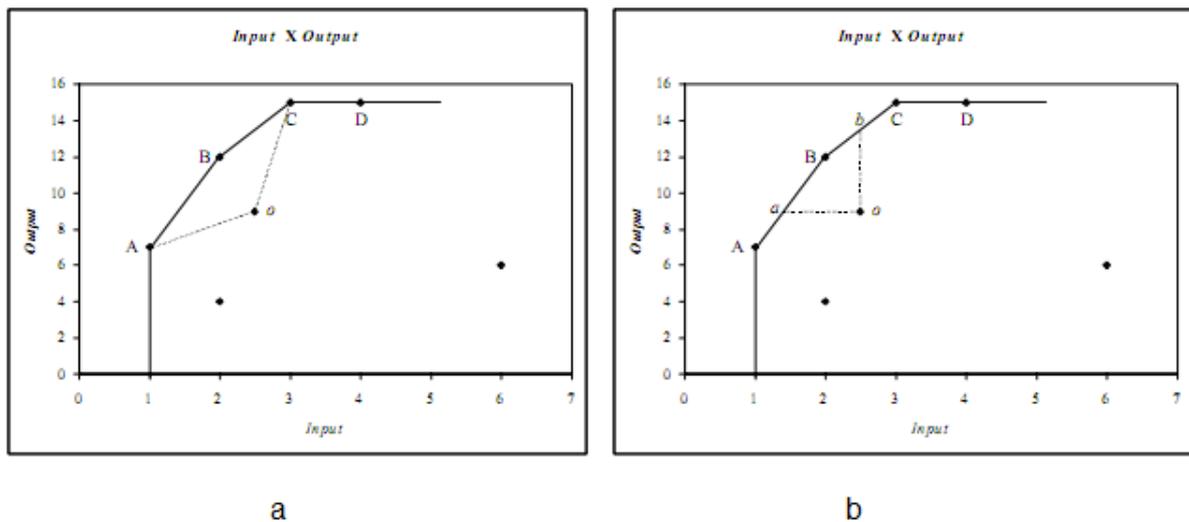


Figura 4.3 – Projeções sem dominância e com dominância

Em (4.33 – 4.37) é apresentado o modelo multiobjetivo MORO-D versão CRS (Retorno Constante de Escala).

$$\begin{aligned} & \max \phi_1 \\ & \dots\dots \\ & \max \phi_s \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} & \min \varphi_1 \\ & \dots\dots \\ & \min \varphi_m \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \quad (4.34)$$

$$\varphi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.35)$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \quad (4.36)$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.37)$$

O modelo apresentado em (4.33 – 4.37) possui uma função objetivo para a projeção de cada variável. Assim  $\phi_r$ , representa o aumento para cada *output*  $r$ , e  $\varphi_i$ , representa a redução para cada *input*  $i$ . As restrições (4.34) e (4.35) do modelo garantem que o alvo encontrado esteja na fronteira eficiente. As restrições (4.36) e (4.37) garantem que a DMU seja dominada

pelo alvo no sentido de Pareto, isto é, o alvo não pode ter nenhum *input* maior nem nenhum *output* menor do que a DMU. Este modelo é a versão CRS, pois considera proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*. Já na versão VRS (Retorno Variável de Escala) deve ser incluída a restrição de convexidade (4.38).

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (4.38)$$

Pode-se observar que o modelo (4.33 – 4.37) possui  $s + m$  funções objetivo, isto é, a quantidade total de funções objetivo é igual à quantidade total de variáveis (*outputs* + *inputs*) do modelo DEA. Tem-se  $s$  variáveis  $\phi$ ,  $m$  variáveis  $\varphi$  e  $n$  variáveis  $\lambda$ , um total de  $s + m + n$  variáveis de decisão do modelo multiobjetivo. Com relação às restrições, para a versão CRS temos  $2s + 2m$  restrições de igualdade. As variáveis de decisão do modelo multiobjetivo são  $\phi_s, \lambda_j, \varphi_m$ .

As restrições do modelo (4.33 – 4.37) são semelhantes às dos modelos do envelope tradicional. A diferença é que no modelo MORO-D as restrições de desigualdade, são substituídas por restrições de igualdade. Esta substituição garante que os alvos sejam pontos fortemente eficientes, mas apresenta inconvenientes de ordem computacional (ANGULO MEZA, 2002). Se a DMU for eficiente, logo estará na fronteira encontrando-se na fronteira Pareto eficiente ou fortemente eficiente e assim  $\phi_r^* = \varphi_i^* = 1, \forall r, i$ . Caso contrário, os alvos para os *outputs* são dados por (4.39) e os alvos para os *inputs* são dados por (4.40).

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \quad (4.39)$$

$$x_{ij_0}^* = \varphi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \quad (4.40)$$

O valor final  $y_{rj_0}^*$  e  $x_{ij_0}^*$  depende dos valores que os decisor escolheu para  $\phi_r^*$  e  $\varphi_i^*$  dentre as soluções não dominadas apresentadas no modelo (4.33 - 4.37). Desta forma, é possível obter alvos alternativos baseados nas preferências do decisor. Vale ressaltar que o decisor participa do processo escolhendo o alvo preferido entre os alvos apresentados, entretanto, os alvos apresentados pelo modelo não necessitam de informação a priori do decisor.

Além das dificuldades computacionais, as restrições de igualdade restringem a região viável do problema na fronteira de eficiência (GOMES JÚNIOR et al., 2010) e tornam trivial e sem interesse certas análises como o estudo do ponto Nadir (METEV; GUEORGUIEVA, 2000). Além disso, podem tornar inviável a solução do modelo.

Os modelos de determinação de alvos em DEA de Thanassoulis e Dyson (1992), Zhu (1996) e o modelo MORO-D foram formulados para lidar com situações nas quais a projeção equiproporcional das variáveis não representa uma situação real nem ideal para o usuário ou decisor. No entanto, a utilização do modelo MORO-D pode apresentar as dificuldades apresentadas no parágrafo anterior e, por isso, propõe-se na seção 4.4 um novo modelo multiobjetivo para determinação de alvos nos modelos DEA, derivado do modelo MORO-D, relaxando suas restrições de igualdade.

#### 4.4 MODELO MORO-D-R

Na seção anterior, o modelo MORO-D foi apresentado e certas limitações foram destacadas. Com o objetivo de sobrepujar essas limitações, Gomes Júnior et al. (2010) propõem o modelo MORO-D-R, ou seja, um modelo multiobjetivo com uma relaxação das igualdades do modelo MORO-D. O modelo é descrito nas equações (4.41 – 4.45).

$$\begin{aligned} & \max \phi_1 \\ & \dots\dots \\ & \max \phi_s \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} & \min \varphi_1 \\ & \dots\dots \\ & \min \varphi_m \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s \tag{4.42}$$

$$\varphi_i x_{ij_0} \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{4.43}$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \tag{4.44}$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{4.45}$$

No modelo (4.41 – 4.45), tal como no modelo (4.33 – 4.37), tem-se  $s + m$  funções objetivo, isto é, quantidade total de funções objetivo igual à quantidade total de variáveis (*inputs + outputs*) do modelo DEA. Tem-se  $s$  variáveis  $\phi$ ,  $m$  variáveis  $\varphi$  e  $n$  variáveis  $\lambda$ , um total de  $s + m + n$  variáveis de decisão do modelo multiobjetivo. Com relação às restrições, para a versão CRS temos  $2s + 2m$  restrições de igualdade. As variáveis de decisão do modelo multiobjetivo continuam sendo  $\phi_s, \lambda_j, \varphi_m$ . No modelo (4.41 – 4.45), observa-se que os dois primeiros conjuntos de restrições são iguais aos do modelo do envelope, pois utiliza desigualdades.

#### 4.4.1 Validação do Uso do Modelo MORO-D-R

Para que se possa usar o modelo MORO-D-R em substituição ao modelo MORO-D é necessário verificar qual a relação existente entre o conjunto de soluções dos dois modelos. Para embasar as demonstrações necessárias serão, em seguida, revistos alguns conceitos:

##### - Fronteira de Produção

Segundo Lins e Angulo Meza (2000) um conjunto de possibilidades de produção  $T$  (região viável) possui as seguintes propriedades:

1ª propriedade: Convexidade: Se  $(x_j, y_j) \in T, j = 1, \dots, n$  e  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$  são escalares não negativos tais que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  então:

$$\left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_j \right) \in T \quad (4.46)$$

2ª propriedade: Ineficiência

$$\text{Se } (x, y) \in T \text{ e } \bar{x} \geq x \rightarrow (\bar{x}, y) \in T \quad (4.47)$$

$$\text{Se } (x, y) \in T \text{ e } \bar{y} \leq y \rightarrow (x, \bar{y}) \in T \quad (4.48)$$

3ª propriedade: Raio ilimitado (no caso de fronteira CRS)

$$\text{Se } (x, y) \in T \rightarrow (kx, ky) \in T, \forall k > 0 \quad (4.49)$$

Além destas propriedades, Lins e Calôba (2006), descrevem as seguintes definições e teoremas:

- Um conjunto  $T \subset \mathfrak{R}^n$  é convexo se e somente se  $\forall x_1$  e  $x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ )  $\in T$ , se  $x$  é combinação linear convexa de  $x_1$  e  $x_2 \Rightarrow x \in T$ .
- O conjunto  $T$  das soluções viáveis de um problema de programação linear (PPL):  $\text{Min } Q(x)$ , tal que  $A \cdot x = b$  e  $x \geq 0$  é um conjunto convexo.
- $x \in T$  é vértice do conjunto  $T$  de soluções viáveis de um PPL, se não pode ser obtido como combinação linear convexa de nenhum par de pontos distintos de  $T$ .
- Dado um PPL com um conjunto de soluções viáveis  $T$ ,  $x$  é vértice de  $M$  se e somente se  $x$  for solução básica viável.

#### - Fronteira Pareto eficiente (formulação não arquimediana)

Seja  $L(y)$  um conjunto de *inputs* e  $h(x, y) = \min\{h/hx \in L(y), h \geq 0\}$  onde  $h$  é o menor valor, sempre menor que 1, tal que, multiplicado pelo vetor de insumos da DMU, resulta em uma redução equiproporcional destes insumos.

Seja  $L_s(y) = \{x/h(x, y) = 1\}$  a fronteira de produção para um dado conjunto de *outputs*  $y$ . Esta fronteira pode conter duas DMUs com o mesmo valor de produto e dois vetores de insumo da forma:

$$x' = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \in L_s(y) \quad (4.50)$$

$$x'' = (x_1, \dots, x_i + d, \dots, x_m) \in L_s(y) \quad (4.51)$$

Com  $d > 0$ ,  $x''$  é, portanto, Pareto ineficiente. Assim  $L_s(y)$  define a fronteira fracamente eficiente.

Seja agora  $L_E(y) = \{[x/h(x,y) = 1] \wedge \exists \bar{x} < x \text{ tal que } \bar{x} \in L(y)\}$  o conjunto é Pareto eficiente.

As DMUs eficientes encontradas pelos modelos DEA definem os vértices da fronteira linear por partes  $L_S(y)$ , que não corresponde à fronteira  $L_E(y)$ . Estes modelos irão promover o máximo deslocamento de uma DMU ineficiente na direção radial, enquanto pertence ao conjunto de possibilidades de produção, T.

Assim, a folga dada por  $(hx_0 - \sum \lambda_j x_j)$  não diz se esta projeção está na fronteira  $L_S(y)$  ou  $L_E(y)$ .

Para se distinguir em qual região da fronteira de eficiência encontra-se a projeção da DMU, será utilizado o modelo não arquimediano descrito em (4.52 – 4.55), pois, como descrito na seção 2, os modelos DEA clássicos são incapazes de distinguir um DMU eficiente segundo a medida de Farrell da eficiência de Pareto-Koopmans.

#### - Modelo do envelope CRS não arquimediano com orientação a *input*

É necessário demonstrar que os modelos MORO-D e MORO-D-R apresentam as mesmas soluções. Para auxiliar nesta demonstração, apresenta-se a seguir o modelo não arquimediano CRS que será utilizado na seção 4.4.2 como base para expressar o modelo MORO-D-R não arquimediano para comparar os resultados obtidos pelos modelos MORO-D e MORO-D-R.

O modelo não arquimediano CRS (4.52 – 4.55) que maximiza a soma das folgas depois de projetar a DMU na fronteira faz a distinção entre a fronteira  $L_S(y)$  e  $L_E(y)$ , distinguindo uma DMU Farrell eficiente de uma outra DMU Pareto-Koopmans eficiente. Essa distinção é feita da seguinte forma: se uma DMU tem eficiência  $h$  igual a 1 no modelo CRS clássico e no modelo (4.52 – 4.55), ela pertence a  $L_E(y)$ , sendo Pareto-Koopmans eficiente. Se no modelo CRS tem  $h$  igual a 1 e no modelo (4.52 – 4.55) tem  $h$  menor que 1, então a DMU pertence a  $L_S(y)$ , ou seja, é uma DMU Farrell eficiente.

$$\text{Minimizar } h - \varepsilon \sum_i s_i^+ - \varepsilon \sum_i s_i^- \quad (4.52)$$

sujeito a:

$$hx_0 - \sum x_j \lambda_j - s^- = 0 \quad (4.53)$$

$$\sum y_j \lambda_j - s^+ = y_0 \quad (4.54)$$

$$\lambda_j, s^+, s^- \geq 0 \quad (4.55)$$

No modelo (4.52 – 4.55),  $s^-$  representa as folgas relativas aos *inputs* e  $s^+$  representa a folga relativa aos *outputs*.

#### 4.4.2 Comparação entre os Modelos MORO-D e MORO-D-R

Para se mostrar a equivalência dos modelos (4.33 – 4.37) e (4.41 – 4.45), precisa-se provar que ambos sempre fornecem a mesma solução de um determinado problema. Para isso, inicialmente será demonstrado, por redução ao absurdo que as soluções apresentadas por ambos não podem ser diferentes quando os alvos de uma DMU ineficiente está localizado na fronteira Pareto eficiente ( $L_E(y)$ ). Ou seja, inicia-se o processo supondo que cada modelo apresenta uma solução diferente e, por absurdo, verifica-se que isto é impossível, contrariando a proposição inicial, tornando então as soluções iguais.

Seja então o conjunto solução do modelo MORO-D  $\{\phi_r^*, \phi_i^*\} \forall r, i$ . Este conjunto solução garante que a DMU  $j_0$  seja projetada na fronteira  $L_E(y)$ . De fato, as restrições de igualdade obrigam a que todas as folgas  $s^-$  e  $s^+$  sejam nulas, o que garante a equivalência do modelo CRS clássico e o modelo não arquimediano (4.52 – 4.55) que é a condição imposta para que a fronteira seja fortemente eficiente.

Já para o modelo MORO-D-R é possível existirem folgas estritamente positivas no conjunto solução, o que impede, a priori, verificar se o alvo pertence a  $L_E(y)$ . Assim, deve-se utilizar o modelo não arquimediano associado ao modelo MORO-D-R, apresentado em (4.56 – 4.60):

$$\begin{aligned} & \max \phi_1 + \varepsilon \cdot s_1^+ \\ & \dots\dots \\ & \max \phi_s + \varepsilon \cdot s_s^+ \quad (4.56) \\ & \min \phi_1 - \varepsilon \cdot s_1^- \\ & \dots\dots \end{aligned}$$

$$\min \varphi_m - \varepsilon \cdot s_m^-$$

Sujeito a:

$$\varphi_r y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \quad (4.57)$$

$$\varphi_i x_{ij_0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.58)$$

$$\varphi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s \quad (4.59)$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.60)$$

Seja agora o conjunto solução do modelo MORO-D-R  $\{\varphi'_r, \varphi'_i\} \forall r, i$  do modelo não arquimediano associado ao modelo MORO-D-R, ou seja, é o conjunto de soluções fortemente eficientes do modelo MORO-D-R.

O que se quer demonstrar é que o conjunto de soluções fortemente eficientes fornecidas pelos dois modelos (MORO-D e MORO-D-R) é igual. Para tal supõe-se o contrário, ou seja, que esses modelos admitem soluções diferentes. Esta suposição equivale a dizer que  $\varphi'_r < \varphi_r^*$  e  $\varphi'_i > \varphi_i^*$ , pois a solução do modelo MORO-D  $\{\varphi_r^*, \varphi_i^*\}$  está na fronteira Pareto eficiente  $L_E(y)$  e as únicas variações possíveis em uma solução quando esta se encontra na fronteira fracamente eficiente  $L_S(y)$  são valores menores para *outputs* ou valores maiores para *inputs*. Assim, analisando as funções objetivo, percebe-se que a existência de folgas estritamente positivas faz com que o valor da função objetivo aumente, no caso dos *outputs* e diminua no caso dos *inputs*.

Pela estrutura dos modelos isso só pode ocorrer se os valores  $s_r^+$  e  $s_i^-$  do modelo MORO-D-R não arquimediano forem estritamente positivos.

Entretanto, como as projeções se dão na fronteira  $L_E(y)$ , as folgas  $s_r^+$  e  $s_i^-$  são, necessariamente, iguais a zero. Chega-se assim a uma contradição o que invalida a hipótese e caracteriza a demonstração da negação da hipótese pelo método da redução ao absurdo.

Como a hipótese era que  $\varphi'_r \neq \varphi_r^*$  e  $\varphi'_i \neq \varphi_i^*$ , então a sua negação é que  $\varphi'_r = \varphi_r^*$  e  $\varphi'_i = \varphi_i^*$ . Assim, os resultados dos modelos MORO-D e MORO-D-R são iguais quando se consideram apenas projeções na região Pareto eficiente da fronteira ( $L_E(y)$ ).

Uma vez comparada a equivalência das soluções entre os modelos MORO-D e MORO-D-R na região Pareto eficiente da fronteira, deseja-se mostrar agora esta equivalência para as demais regiões da fronteira, ou seja, a região Farrell eficiente da fronteira  $L_s(y)$ .

Seja, então,  $L_s(y) = \{x/h(x, y) = 1\}$  a fronteira de produção para um dado conjunto de *outputs*  $y$ .

Sejam duas DMUs, A e B, pertencentes a esta fronteira com o mesmo valor de produto e dois vetores de insumo da forma:

$$A = (x', y_i), \text{ onde } x' = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \in L_s(y)$$

$$B = (x'', y_i), \text{ onde } x'' = (x_1, \dots, x_i + d, \dots, x_m) \in L_s(y)$$

com  $d > 0$ , sendo a DMU B, portanto, Pareto ineficiente, conforme figura 4.4.

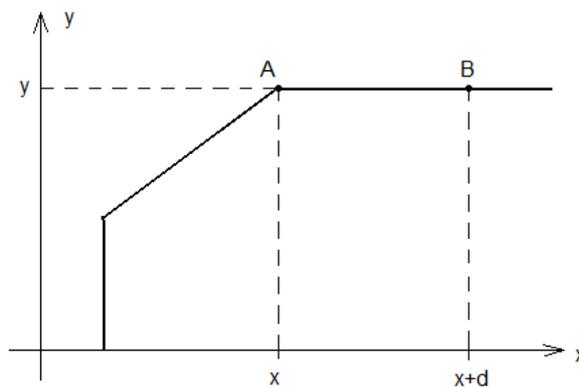


Figura 4.4 – Fronteira de produção

Seja, agora, uma DMU C qualquer, não eficiente, ou seja, a ponto C está localizado fora da fronteira de produção, conforme figura 4.5.

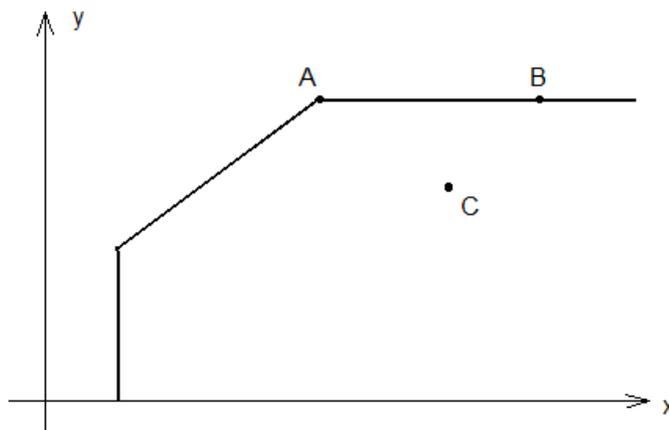


Figura 4.5 – Fronteira de produção

Seja o conjunto solução do modelo MORO-D  $\{\phi_r^*, \varphi_i^*\} \forall r, i$ , que projeta a DMU C na fronteira  $L_E(y)$ , mais precisamente no ponto A (figura 4.4), uma vez que as restrições de igualdade do modelo forçam que todas as folgas  $s^-$  e  $s^+$  relativas aos *inputs* e aos *outputs*, respectivamente, sejam nulas.

Seja agora um conjunto solução T do modelo MORO-D-R  $\{\phi_r', \varphi_i^*\} \forall r, i$  com  $\phi_r' > \phi_r^*$  que projeta a DMU C na fronteira  $L_S(y)$ , no ponto  $C'$ ,  $C' = (x, y)$  onde  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$  conforme figura 4.6:

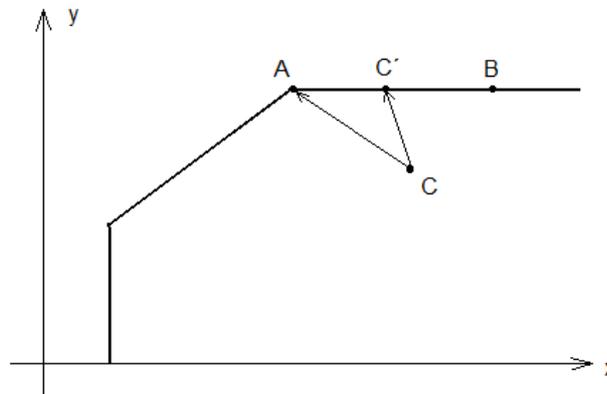


Figura 4.6 – Projeção da DMU C na fronteira de eficiência

O ponto  $C'$  é uma combinação linear convexa dos pontos A e B e não é vértice de T, assim, é possível melhorar os valores eficientes do vetor dos *inputs* da projeção da DMU C sem piorar os valores do vetor dos *outputs* desta DMU projetados na fronteira, ou seja:

Seja  $c^T \cdot x'$  as coordenadas do vetor dos *inputs* da DMU A,  $c^T \cdot x''$  as coordenadas do vetor dos *inputs* da DMU B e  $c^T \cdot x$ , as coordenadas do vetor dos *inputs* da projeção da DMU C na fronteira  $L_S(y)$ .

Considere, sem perda de generalidade, que  $c^T \cdot x' \leq c^T \cdot x''$ , pois se quer minimizar o vetor dos *inputs*.

Pela propriedade de convexidade descrita em 4.4.1, pode-se escrever:

$$c^T \cdot x = \alpha \cdot c^T \cdot x' + (1 - \alpha) \cdot c^T \cdot x'' \quad (4.61)$$

$$c^T \cdot x' = \alpha \cdot c^T \cdot x' + (1 - \alpha) \cdot c^T \cdot x' \leq \alpha \cdot c^T \cdot x' + (1 - \alpha) \cdot c^T \cdot x'' = c^T \cdot x \quad (4.62)$$

$$c^T \cdot x'' = \alpha \cdot c^T \cdot x'' + (1 - \alpha) \cdot c^T \cdot x'' \geq \alpha \cdot c^T \cdot x' + (1 - \alpha) \cdot c^T \cdot x'' = c^T \cdot x \quad (4.63)$$

Assim, conclui-se que:

$$c^T .x' \leq c^T .x \leq c^T .x'' \quad (4.64)$$

Desta forma, o vetor dos *inputs* pode ser sucessivamente melhorado. Como  $c^T .x$  equivale a  $\phi_r' .x$ , verifica-se que  $\exists (\phi_r'' .x, \phi_i^* .y) < (\phi_r' .x, \phi_i^* .y)$  capaz de projetar a DMU C em um ponto intermediário entre A e C', também eficiente até que a projeção da DMU C atinja os valores do ponto  $(\phi_r^* .x, \phi_i^* .y)$  que é exatamente o ponto A e vértice do conjunto T. A partir deste ponto, então, não se consegue uma redução nos *inputs* que não gere uma redução dos *outputs* ou vice-versa, pois, como descrito na seção 4.4.1, este ponto, por ser um vértice do conjunto T, não pode ser obtido como combinação linear convexa de nenhum par de pontos distintos de T.

Assim, a projeção de uma DMU ineficiente na fronteira utilizando o modelo MORO-D-R também ocorre em uma região da fronteira  $L_E(y)$ , sendo igual à solução fornecida pelo modelo MORO-D.

Concluindo assim que os modelos MORO-D e MORO-D-R sempre apresentam os mesmos resultados e projetam uma DMU em uma região da fronteira Pareto-eficiente. Desta forma, os modelos MORO-D e MORO-D-R são equivalentes.

#### 4.4.3 Vantagens da Utilização do Modelo MORO-D-R

O modelo MORO-D possui como região viável, somente a própria fronteira Pareto-eficiente, pois apresenta folgas nulas para todas as variáveis do modelo. Já, o modelo MORO-D-R apresenta uma região viável maior, incluindo, além dos pontos compreendidos na fronteira Pareto-eficiente, os pontos da fronteira não Pareto-eficiente e a região interior à estas fronteiras. Este conjunto de soluções viáveis maior pode ser vantajoso dependendo do problema em análise, pois fornece um número maior de opções de soluções para um problema gerencial.

Outro ponto importante é que o modelo MORO-D apresenta restrições de igualdade, gerando maior complexidade computacional. No modelo MORO-D-R estas restrições de igualdade foram relaxadas para restrições de desigualdade, possuindo assim soluções computacionais mais simples que o modelo MORO-D. Além disso, as restrições de

desigualdade podem evitar inviabilidade de solução do modelo, que pode ocorrer no modelo MORO-D causada pelas restrições de igualdade.

No entanto, estes modelos, apesar de serem vantajosos por projetarem uma DMU na fronteira de forma não-radial, o que pode ser mais conveniente em muitos problemas reais, eles ainda não fornecem um índice de eficiência para a DMU. Por isso, não é possível uma ordenação das DMUs ou mesmo das soluções. Para contornar este problema, apresenta-se a seguir os índices de eficiência encontrados na literatura e propõe-se um novo índice, baseado nos conceitos vetoriais inerentes à eficiência, apresentando as vantagens de sua utilização. Este novo índice proposto é o grande diferencial deste estudo, pois, além de considerar os conceitos vetoriais ligados à eficiência, permite uma maior liberdade aos gestores na determinação do ponto onde se deseja projetar a DMU, já que passa a ser conhecida a eficiência da DMU ineficiente em relação a cada alvo apresentado como solução do problema que estiver sendo estudado.

Um exemplo de aplicação do modelo MORO-D-R foi apresentado em Gomes Júnior et al. (2010) e está descrito no item 4.4.4.

#### 4.4.4 Exemplo Numérico de Utilização do Modelo MORO-D-R

Sejam os dados apresentados na tabela 4.1 representando um conjunto com 6 DMUs, cada uma com 2 *inputs* e 1 *output* com suas respectivas eficiências calculadas pelo modelo DEA-CRS clássico orientado a *input*.

Tabela 4.1 – Dados do exemplo numérico

DMUs	Input 1	Input 2	Output	Eficiência CRS Input
A	1	4	10	0,9090
B	2	2	9	0,7200
C	1	3	11	1,0000
D	4	2	13	0,6419
E	3	1	14	1,0000
F	4	4	9	0,3600

As DMUs C e E definem a fronteira de eficiência. Na figura 4.7, o segmento de reta CE representa a fronteira Pareto eficiente, o segmento de reta vertical com início em C e o

segmento de reta horizontal com início em E representam a fronteira fracamente eficiente, pois, mesmo uma DMU estando nestes trechos da fronteira, é possível aumentar o valor do *output* e/ou reduzir o valor do *input* e esta DMU ainda estará sobre a fronteira (se desloca para baixo caso esteja no trecho vertical ou para a esquerda se estiver no segmento horizontal). Os eixos coordenados da figura 4.7 representam a divisão do *input* 1 pelo *output* no caso do eixo das abcissas e a divisão do *input* 2 pelo *output* no caso do eixo das coordenadas.

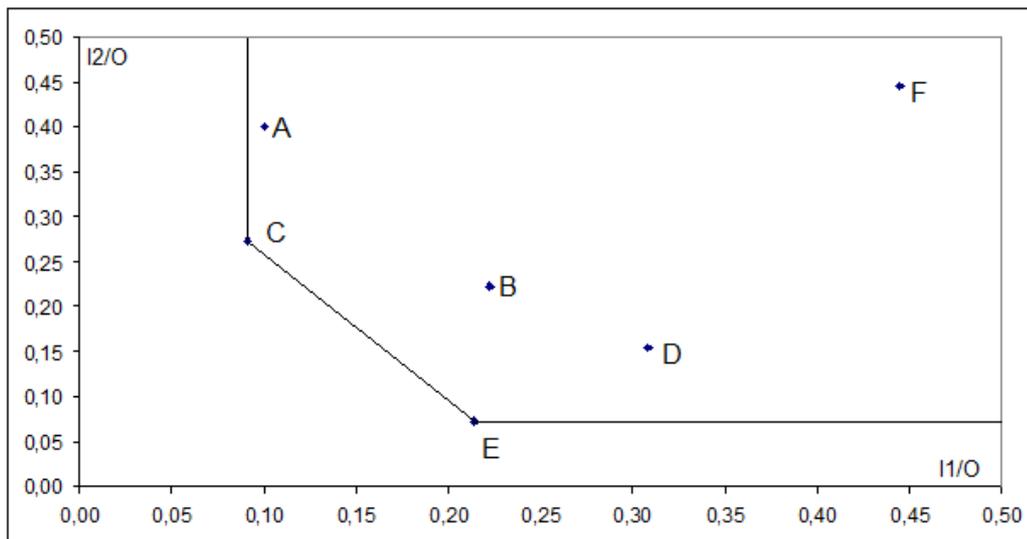


Figura 4.7 – Fronteira de eficiência do exemplo numérico

As DMUs A, B, F e D são ineficientes e encontram-se no interior da região definida pela fronteira de eficiência. Deve-se então encontrar os alvos para estas DMUs de forma a torná-las eficientes. Será utilizado inicialmente a formulação do modelo MORO-D (4.33 – 4.37) e, posteriormente, a formulação do modelo MORO-D-R (4.41 – 4.45) para verificar a igualdade das soluções, como demonstrado no item 4.4.2.

Em (4.65) e (4.66) estão discriminados os PPLs (Problemas de Programação Linear) versão CRS dos modelos MORO-D e MORO-D-R, respectivamente, para a DMU B. Esta DMU tem como referência as DMUs C e E pois são as DMUs eficientes do conjunto de dados. Os PPLs para as DMUs A, D e F são equivalentes, alterando apropriadamente os valores de seus *inputs* e *outputs* conforme a DMU que está sendo analisada.

$$\max \phi_1$$

$$\min \varphi_1$$

$$\min \varphi_2$$

$$\max \phi_1$$

$$\min \varphi_1$$

$$\min \varphi_2$$

Sujeito a:

$$9.\phi_1 = 11.\lambda_1 + 14.\lambda_2 \quad (4.65)$$

$$2.\phi_1 = 1.\lambda_1 + 3.\lambda_2$$

$$2.\phi_2 = 3.\lambda_1 + 1.\lambda_2$$

$$\phi_1 \geq 1$$

$$\phi_1 \leq 1$$

$$\phi_2 \leq 1$$

Sujeito a:

$$9.\phi_1 \leq 11.\lambda_1 + 14.\lambda_2 \quad (4.66)$$

$$2.\phi_1 \geq 1.\lambda_1 + 3.\lambda_2$$

$$2.\phi_2 \geq 3.\lambda_1 + 1.\lambda_2$$

$$\phi_1 \geq 1$$

$$\phi_1 \leq 1$$

$$\phi_2 \leq 1$$

### - Resolução do modelo MORO-D

Utilizou-se o *software* ADBASE (STEUER, 1983) que incorpora o modelo simplex multiobjetivo para resolver os problemas de programação linear multiobjetivo fornecidos pelo modelo MORO-D e obter o conjunto de solução não dominadas extremas. Estas soluções fornecem os valores de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_1$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  para as DMUs ineficientes A, B, D e F, assim como os alvos, ou seja, os novos níveis dos *inputs* e *output* que projetam a respectiva DMU na fronteira de eficiência. Estes resultados estão apresentados na tabela 4.2.

Os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  representam as reduções que devem sofrer os valores dos *inputs* 1 e 2, respectivamente, e  $\phi_1$  representa o acréscimo que deve sofrer o *output* para que a DMU atinja o alvo especificado, sobre a fronteira de eficiência. As variáveis  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  representam as contribuições das DMUs eficientes na formação dos alvos da DMU analisada, onde  $\lambda_1$  está associado à DMU C e  $\lambda_2$  está associado à DMU E.

Tabela 4.2 – Resultados fornecidos pelo ADBASE para o exemplo numérico

DMUs	A	B	C	D	E	F
Input 1 ( $x_1$ )	1	2	1	4	3	4
Input 2 ( $x_2$ )	4	2	3	2	1	4
Output ( $y_1$ )	10	9	11	13	14	9
$\phi_1$	1,000	1,000	-	1,000	-	1,000
$\phi_2$	0,750	1,000	-	1,000	-	1,000
$\phi_1$	1,100	1,389	-	1,558	-	2,778
$\lambda_1$	1,000	0,500	-	0,250	-	1,000
$\lambda_2$	0,000	0,500	-	1,250	-	1,000
$\phi_1 \cdot x_1$	1,000	2,000	-	4,000	-	4,000
$\phi_2 \cdot x_2$	3,000	2,000	-	2,000	-	4,000
$\phi_1 \cdot y_1$	11,000	12,500	-	20,250	-	25,000

Utilizando os resultados fornecidos pela tabela 4.2, construiu-se a figura 4.8 que representa as projeções (alvos) das DMUs A, B, D e F na fronteira de eficiência com os valores encontrados pelo modelo MORO-D.

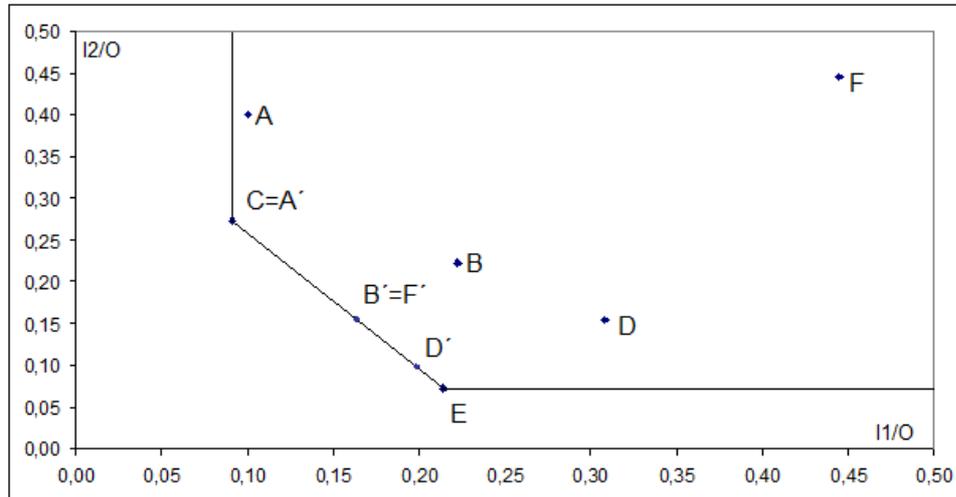


Figura 4.8 – Alvos das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência

#### - Resolução do modelo MORO-D-R

Como era de se esperar, os resultados de todas as variáveis para todas as DMUs no modelo MORO-D-R são iguais aos resultados fornecidos pelo modelo MORO-D, apresentado então, como solução, as mesmas projeções mostradas na figura 4.2.

Uma vez que ambos os modelos apresentam as mesmas soluções, a utilização do modelo MORO-D-R permite uma maior simplicidade computacional por apresentar restrições de desigualdade. Além disso o modelo MORO-D-R apresenta regiões de indiferença aos pesos de dimensão completa, o que permite a utilização de métodos baseados na área dessas regiões, como o TRIMAP (CLIMACO; ANTUNES, 1989). A restrição de desigualdade ainda expande o espaço de soluções viáveis, o que permite uma maior riqueza nas análises baseadas, por exemplo, em ponto ideal e ponto Nadir (anti-ideal), o que não é escopo deste trabalho.

## 5 MEDIDAS DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS

Com o fim de evitar que DMUs não Pareto-Koopmans eficientes fossem classificadas como eficientes, problemas estes ocasionados pelas projeções radiais das DMUs na fronteira fracamente eficiente da função de produção, foram desenvolvidos outros modelos em DEA que conseguissem classificar as DMUs segundo a definição de eficiência Pareto-Koopmans.

Segundo análise de Souza e Angulo Meza (2006), os primeiros modelos desenvolvidos em DEA que procuraram resolver esta deficiência foram denominados Modelos Não Arquimedianos introduzido por Charnes et al. (1979) e os Modelos DEA Aditivos, Charnes et al. (1985).

A formulação da função objetivo de um modelo do envelope não arquimediano orientado a *inputs* é a seguinte:

$$\text{Min } \theta - \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right) \quad (5.1)$$

O modelo DEA aditivo, também introduzido por Charnes et al. (1985), tem a seguinte função objetivo.

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{r0}} + \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{i0}} \quad (5.2)$$

O modelo DEA Aditivo não fornece um índice de eficiência e não é invariante à mudança de escala.

Para resolver o problema de identificar DMUs não Pareto-Koopmans eficientes como eficientes, outros índices propostos nas pesquisas em DEA são os índices de eficiência não radiais (SOUZA; ANGULO MEZA, 2006).

Cabe ressaltar que pode-se fazer uma distinção entre dois tipos de projeção não radial. O primeiro tipo caracteriza por determinar o ponto da fronteira Pareto-Koopmans eficiente mais próximo (através de uma redução nos *inputs* ou em um aumento nos *outputs*) do ponto fracamente eficiente onde a DMU foi inicialmente projetada de forma radial. O segundo tipo caracteriza-se por uma projeção não radial onde a DMU é projetada em um ponto qualquer da fronteira Pareto-Koopmans eficiente (pode ser definido pelo decisor ou por métodos para determinação de alvos alternativos), sofrendo simultaneamente, e de forma independente para cada variável, redução nos *inputs* e aumento nos *outputs*.

Descreve-se a seguir, na seção 5.1, alguns índices não radiais propostos em DEA, onde são apresentados os modelos e as propriedades mais importantes de cada medida.

Em cada índice de eficiência são assumidos,  $n$  DMUs,  $m$  *inputs* e  $s$  *outputs*.

## 5.1 ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A *INPUTS* OU *OUTPUTS*

### 5.1.1 Medida de Russell Orientada a *Inputs*

A medida de Russell proposta por Färe e Lovell (1978) minimiza a média aritmética não ponderada da redução proporcional de todos *inputs* individuais mantendo constante o nível de *outputs*.

Pode-se calcular a eficiência de Russell orientada aos *inputs* para uma dada DMU<sub>0</sub> com o seguinte modelo de programação linear (5.3 – 5.6), Ruggiero e Bretschneider (1998):

$$\text{Min } \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (5.3)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.4)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (5.6)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Observa-se que a cada *input* está associada uma redução, a função objetivo é a média aritmética simples das reduções em cada *input*.

Pode-se notar que as restrições da medida de Russell são muito parecidas com as do modelo do envelope CCR, porém tem-se a introdução da variável  $\theta_i$ , ou seja, para cada *input* há uma redução independente. Assim, ao invés da redução equiproporcional em todos os *inputs* determina-se a máxima soma das reduções nos *inputs*.

Como provaram Färe e Lovell (1978) e Russell (1985) a medida de Russell satisfaz todas as propriedades desejáveis a uma medida de eficiência exceto a propriedade da homogeneidade, pois apresenta a restrição de convexidade (5.6). Desta forma, esta medida não é aplicável a casos onde são utilizados modelos DEA-CCR. Verifica-se que não se tem controle sobre a escolha do ponto de projeção da DMU na fronteira e, além disso, o valor encontrado para a eficiência é uma média que não possui sentido físico.

A versão de *outputs* da medida de Russell foi definida analogamente por Färe et al. (1985).

### 5.1.2. Medida Ponderada de Russell

Um problema na utilização da medida de Russell pode ser atribuído à suposição inválida de pesos iguais para os *inputs*, pois os recursos têm um impacto diferenciado nos *outputs* no processo de produção.

Para acomodar diferentes pesos no processo de produção Ruggiero e Bretschneider (1998) fizeram uma extensão da Medida de Russell. Considerando retornos variáveis de escala a medida ponderada de Russell para cada  $DMU_0$  pode ser calculada como solução do modelo de programação linear (5.7 – 5.10):

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m w_i \theta_i \quad (5.7)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.9)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (5.10)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Neste modelo, é assumido que os pesos  $w_i$  devem ser conhecidos a priori. Por isto, esta medida deve se considerada semiparamétrica. Assim, pode ser requerido um primeiro estágio de regressão ou uma programação linear para determinar esses pesos. Para que a solução deste problema sempre resulte em 1 como máxima eficiência, a soma desses pesos deve ser igual a 1. A performance da medida ponderada de Russell depende da habilidade de definir corretamente os pesos dos fatores, que nem sempre é uma tarefa simples ou conhecida.

Como na medida de Russell, a medida ponderada de Russell satisfaz 3 das 4 propriedades desejáveis para uma medida de eficiência propostas por Färe e Lovell, assumindo todos os pesos dos fatores positivos, da mesma forma que a medida de Russell anterior. Não satisfaz a propriedade da homogeneidade. Também verifica-se que não há controle sobre o ponto de projeção da DMU na fronteira e a determinação dos pesos não é uma tarefa simples. Além disso, o valor encontrado para a eficiência é dependente do conjunto de pesos escolhido, não possuindo um significado definido.

### 5.1.3 Medida de Zieschang Orientada a *Inputs*

Ziezchang (1984) procurou evitar o cálculo da eficiência com as folgas usando elementos, primeiramente, da medida de Debreu-Farrell (DEBREU, 1951; FARRELL, 1957), que vale a pena lembrar é uma medida radial, com um índice não radial, a Medida de Russell (FÄRE; LOVELL, 1978).

A medida de Zieschang (1984) é calculada em duas etapas. Na primeira, os *inputs* são reduzidos equiproporcionalmente até atingir a fronteira eficiente e, na segunda etapa, cada *input* é reduzido até atingir região Pareto-Koopmans eficiente. Nesta segunda etapa, busca-se eliminar as folgas.

Na resolução da primeira etapa obtém-se a proporção  $\theta^*$ , em que todos os *inputs* devem ser reduzidos. Para a segunda etapa são assumidos os valores dos *inputs* reduzidos na proporção  $\theta^*$ , ou seja, os *inputs* do modelo multiplicados pela eficiência  $\theta^*$ , aí então o problema deve ser resolvido com a medida de Russell.

A formulação da medida de Zieschang orientada aos *inputs*, para a DMU<sub>0</sub>, é a apresentada em (5.11 – 5.13):

$$\text{Min } \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (5.11)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i (\theta^* x_{i0}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.12)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.13)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

O índice de eficiência fornecido pela medida de Zieschang orientada aos *inputs* é calculado segundo a fórmula (5.14):

$$Z = \theta^* \times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i^*. \quad (5.14)$$

O ponto de projeção da DMU na fronteira é encontrado sem nenhum controle por parte do decisor. O modelo busca o ponto Pareto eficiente mais próximo do ponto de projeção radial sofrida inicialmente pela DMU.

Estes modelos podem ser facilmente deduzidos para os *outputs*.

#### 5.1.4. Medida Assimétrica de Färe Orientada a *Inputs*

A medida assimétrica de Färe (FÄRE, 1975; FÄRE et al., 1983) também é obtida com duas etapas, primeiro, cada *input* da DMU em análise é reduzido individualmente e os outros *inputs* são mantidos constantes. Posteriormente, é selecionada a menor das reduções dos *m inputs*. O modelo da medida assimétrica de Färe orientada aos *inputs* é apresentado em (5.15 – 5.18):

$$\text{Min } \theta_i \quad (5.15)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad \forall i \neq i_a \quad (5.16)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0}, \quad i = i_a \quad (5.17)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s \quad (5.18)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Desta forma, na análise de eficiência de uma dada DMU<sub>0</sub>, são resolvidos  $m$  modelos lineares e a medida assimétrica de Färe é definida em (5.19):

$$\text{Min } \{ \theta_i^* \}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.19)$$

O valor da eficiência encontrado neste modelo considera apenas o menor valor do índice de redução dos  $m$  *inputs* do modelo, assim, não representa nenhum significado concreto. O valor da eficiência de uma DMU dependerá apenas de uma de suas variáveis e não de todo o conjunto.

Este modelo também pode ser reformulado para a maximização dos *outputs*.

## 5.2 ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A *INPUTS* E *OUTPUTS*

### 5.2.1 Medida de Russell Não Orientada

Proposta por Färe et al. (1985) a medida de Russell não orientada é definida como uma combinação de forma aditiva das medidas de Russell orientada aos *inputs* e aos *outputs*.

Para uma dada DMU<sub>0</sub> o valor desta medida pode ser obtido a partir da formulação DEA (5.20 – 5.22):

$$\text{Min } \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \quad (5.20)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.21)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.22)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Este modelo satisfaz às 4 propriedades básicas listadas por Cooper e Pastor (1995).

Como na medida de Russell e na medida ponderada de Russell, verifica-se que o ponto de projeção da DMU na fronteira é encontrado por este modelo sem nenhum controle do decisor e o valor encontrado para a eficiência não possui um significado definido.

### 5.2.2 Medida de Russell Não Orientada Melhorada

A medida de Russell não orientada melhorada foi proposta por Pastor et al. (1999) como uma alternativa para evitar as dificuldades mencionadas da medida de Russell não orientada apresentada anteriormente. Ao invés de combinar as medidas de Russell orientada aos *inputs* e aos *outputs* de maneira aditiva, como na função objetivo (5.20), a medida de Russell não orientada melhorada, propõe um coeficiente entre estas duas medidas (5.23).

O resultado desta combinação é o modelo (5.23 – 5.26):

$$\text{Min } \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \quad (5.23)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.24)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.25)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.26)$$

A função objetivo (5.23) é o quociente entre a eficiência média dos *inputs* e a eficiência média dos *outputs* (PASTOR et al., 1999).

Como pode ser observado o modelo (5.23 – 5.26) não é um modelo de programação linear. Através das substituições de variáveis descritas em (5.27 – 5.28) se inicia o procedimento para linearização do modelo:

$$\theta_i = \frac{x_{i0} - s_i^-}{x_{i0}} = 1 - \frac{s_i^-}{x_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.27)$$

$$\phi_r = \frac{y_{r0} + s_r^+}{y_{r0}} = 1 + \frac{s_r^+}{y_{r0}}, \quad r = 1, \dots, s. \quad (5.28)$$

Reformulando o modelo (5.23 – 5.26) substituindo as equações (5.27) e (5.28) é obtido o modelo mostrado em (5.29 – 5.31), onde a medida é expressa em termos das folgas totais (PASTOR et al., 1999).

$$\text{Min} \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{r0}}} \quad (5.29)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.30)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.31)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

O índice de eficiência formulado na equação (5.29) é idêntico ao índice formulado por Tone (2001), denominado Medida de Eficiência Baseada nas Folgas ou SBM (*Slacks-Based Measure*), no qual  $s^-$  e  $s^+$  indicam o excesso de *inputs* e a redução de *outputs*, respectivamente, e representam as folgas.

Para transformar tanto SBM ou a medida de Russell não orientada em um modelo de programação linear é usada a transformação de variáveis proposta por Charnes e Cooper (1962). A substituição de variáveis é expressa em (5.32 – 5.35):

$$\beta = \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}} \right)^{-1}, \quad (5.32)$$

$$t_{i0}^- = \beta s_{i0}^-, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.33)$$

$$t_{r0}^+ = \beta s_{r0}^+, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.34)$$

$$\mu_j = \beta \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.35)$$

Esta substituição de variáveis resulta no modelo linear (5.36 – 5.39):

$$\text{Min } \beta - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_i^-}{x_{i0}} \quad (5.36)$$

Sujeito a

$$\beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{t_r^+}{y_{r0}} = 1, \quad (5.37)$$

$$-\beta x_{i0} + \sum_{j=1}^n \mu_j x_{ij} + t_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.38)$$

$$-\beta y_{r0} + \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} - t_r^+ = 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.39)$$

$$t_i^-, t_r^+ \geq 0, \quad \forall i, r$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Uma das mais importantes características dos modelos DEA são os seus duais, onde se podem fazer avaliações da eficiência através de interpretações econômicas. Fazendo essa consideração, Tone (2001) formulou o dual do seu modelo SBM (*Slacks-Based Measure*). Este dual pode ser interpretado como a maximização do lucro, ao contrário da maximização do coeficiente no modelo CCR clássico. Isto tem grande contribuição no potencial de aplicação deste modelo.

Comparando a medida de Russell melhorada e a SBM (TONE, 2001), pode-se observar que elas são semelhantes no que diz respeito à forma de lidar com as folgas. Além disso, fornecem medidas de eficiência entre 0 e 1, também são monotonicamente decrescentes em relação às folgas e utilizam as mesmas transformações de variáveis para linearizar suas funções objetivos.

Contudo, elas diferem das seguintes maneiras:

- A medida de Russell é uma média aritmética e seu significado não é claro, enquanto a medida SBM pode ser interpretada como um produto das ineficiências dos *inputs* pelas ineficiências dos *outputs* (TONE, 2001).
- A medida de Russell não tem um dual definido.
- Färe et al. (1978, 1994) introduziram a medida de Russell orientada aos *inputs* (*outputs*), que é equivalente a SBM orientada ao *input* (*output*) se somente tratarmos o numerador (denominador).

### 5.2.3 Medida de Escala Ajustada

A medida de escala ajustada, mais conhecida como RAM (*Range-Adjusted Measure*), foi desenvolvida por Cooper e Pastor (1995). A formulação desta medida (5.40 – 5.43) é uma modificação do Modelo Aditivo proposto por Charnes et al. (1985), tendo-se:

$$\text{Max } \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \quad (5.40)$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.41)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (5.42)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (5.43)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

As variáveis de escala  $R_i^-$  e  $R_r^+$  são obtidas através das equações (5.44 – 5.45):

$$R_i^- = \hat{x}_i - \check{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.44)$$

$$R_r^+ = \hat{y}_r - \check{y}_r, \quad r = 1, \dots, s. \quad (5.45)$$

Onde:

$$\hat{x}_i = \text{Max}_{j=1, \dots, n} \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \check{x}_i = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.46)$$

$$\hat{y}_r = \text{Max}_{j=1, \dots, n} \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s, \quad \check{y}_r = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s. \quad (5.47)$$

A função objetivo (5.40) mede as ineficiências dos *inputs* e dos *outputs*, logo uma nova medida de eficiência é dada por (COOPER et al., 1999), expressa pela equação (5.48).

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{m + s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \quad (5.48)$$

Na equação (5.48), a eficiência é igual a 1, se e somente se, as folgas  $s_i^-$  e  $s_r^+$  forem iguais a zero.

As propriedades desta medida por Pastor et al. (1999) são as seguintes:

- $0 \leq \Gamma \leq 1$ ;
- É invariante em relação às unidades de medida;
- É fortemente monotônica;
- É invariante em relação à translação.

Entre as propriedades da medida RAM, foram citadas em Sueyoshi e Sekitani (2006) as propriedades unidades invariantes e translação invariante.

#### 5.2.4 Medida de Eficiência Vetorial

Diferentemente dos trabalhos apresentados anteriormente, Soares de Mello et al. (2005) deixam de tratar a eficiência como um escalar e definem a eficiência como um vetor.

Uma vez que a eficiência de uma DMU depende do ponto em que esta DMU é projetada, ela é caracterizada por um número e por uma direção.

A figura 5.1 representa esta formulação. O vetor  $\vec{e}_f$ , chamado vetor eficiência, tem como coordenadas aparentes o simétrico da eficiência orientada a *inputs* e a eficiência orientada a *outputs*. O simétrico da eficiência orientada a *inputs* é usado no lugar da própria eficiência, visto que a projeção é feita na direção decrescente do eixo horizontal. O vetor  $\vec{v}$ , com origem no ponto *o* e extremidade no ponto *p*, determina a direção de projeção da DMU localizada no ponto *o* (o ponto *p* é o alvo no qual a DMU é projetada). Desta forma, o vetor  $\vec{v}$  determina também a direção da projeção do vetor eficiência  $\vec{e}_f$  e faz um ângulo  $\theta$  com este vetor.

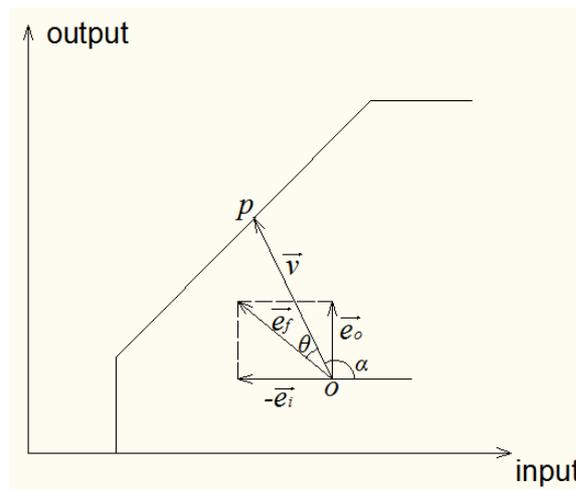


Figura 5.1 – Representação bidimensional da fronteira DEA BCC

A figura 5.1 representa o caso bidimensional. Posteriormente os autores expandem o desenvolvimento para o caso multidimensional.

Matematicamente, o vetor eficiência  $\vec{e}_f$  é dado por (5.49), onde  $e_i$  e  $e_o$  são as eficiências nas orientações a *inputs* e *outputs*.

$$\vec{e}_f = -e_i \cdot \vec{i} + e_o \cdot \vec{j} \quad (5.49)$$

O módulo do vetor eficiência  $\vec{e}_f$  quando este é projetado na direção do vetor  $\vec{v}$  é dado pela expressão (5.50):

$$\left| \vec{e}_{f \rightarrow v} \right| = e_f \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (5.50)$$

Soares de Mello et al. (2005) mostram que a eficiência direcional máxima é obtida na direção do vetor eficiência  $\vec{e}_f$  e, por isso, a formulação (5.50) apresenta inconsistência.

Quando  $e_o = e_i = e$ , tem-se  $\left| e_{f_{MAX}} \right| = e \cdot \sqrt{2} > 1$ , contrariando as propriedades propostas para os índices de eficiência. Assim, os autores utilizam um fator de correção, dividindo a expressão por  $(-\cos \alpha + \text{sen} \alpha)$ .

A expressão  $(-\cos \alpha + \text{sen} \alpha)$  não terá valor nulo pois a formulação considera projeções dominadas. Sendo assim  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Então o índice de eficiência passa a ser expressão por (5.51):

$$\left| \vec{e}_{f \rightarrow v} \right| = \frac{e_f \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}{-\cos \alpha + \text{sen} \alpha} \quad (5.51)$$

Entretanto, como mostrado por Soares de Mello et al. (2005), este conceito pode ser estendido para o caso n-dimensional. No caso bidimensional, a direção de projeção é determinada através de um único ângulo  $\alpha$ . Para dimensões superiores, vários ângulos devem ser considerados. Estes ângulos são determinados através dos cossenos diretores do vetor que indica a direção de projeção, ou seja, pelas coordenadas do unitário deste vetor. Assim, o índice proposto é expresso pela equação (5.52), onde  $\cos \alpha_i$  é a i-ésima coordenada do unitário do vetor de projeção.

$$\left| \vec{e}_{f \rightarrow v} \right| = \frac{e_f \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}{\sum_{i=1}^{m+s} \cos \alpha_i} \quad (5.52)$$

Neste índice, considera-se que o vetor eficiência tem número de coordenadas igual à dimensão do problema em análise, isto é, a soma do número de *inputs* ( $m$ ) e do número de *outputs* ( $s$ ).

Cada coordenada do vetor está associada aos índices de aumento dos *outputs*  $\phi$  e redução dos *inputs*  $\varphi$ , conforme ajustes definidos por Soares de Mello et al. (2005). Estes índices de aumento dos *outputs* e redução dos *inputs* são calculados, respectivamente, segundo os PPLs (5.53 – 5.57) e (5.58 – 5.62), que considera projeções radiais de cada variável do problema.

$$\text{Min } \varphi_i \quad (5.53)$$

Sujeito a:

$$\varphi_i \cdot x_{i0} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ji}, \quad i = i_0 \quad (5.54)$$

$$x_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ji}, \quad i = 1, \dots, m; i \neq i_0 \quad (5.55)$$

$$y_k \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{jk}, \quad k = 1, \dots, s \quad (5.56)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (5.57)$$

$$\text{Max } \phi_k \quad (5.58)$$

Sujeito a:

$$x_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_{ji}, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.59)$$

$$\phi_k \cdot y_{k0} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{jk}, \quad k = k_0 \quad (5.60)$$

$$y_k \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_{jk}, \quad k = 1, \dots, s; k \neq k_0 \quad (5.61)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (5.62)$$

É importante destacar que os desenvolvimentos apresentados neste índice consideraram que as projeções orientadas a *input*, a *output* ou não radiais teriam os alvos sempre na mesma face. Porém, como pode ser observado na figura 5.2, nem sempre isso

acontece. Neste caso, este índice supõe que os alvos encontram-se no segmento BC, quando na verdade estão na face CD. Portanto, a eficiência direcional calculada é maior ou igual à eficiência direcional real. Os autores afirmam então não terem definido um índice, mas um majorante do índice de eficiência quando a projeção do vetor eficiência ocorre sobre ele mesmo, como demonstrado em Soares de Mello et al. (2005).

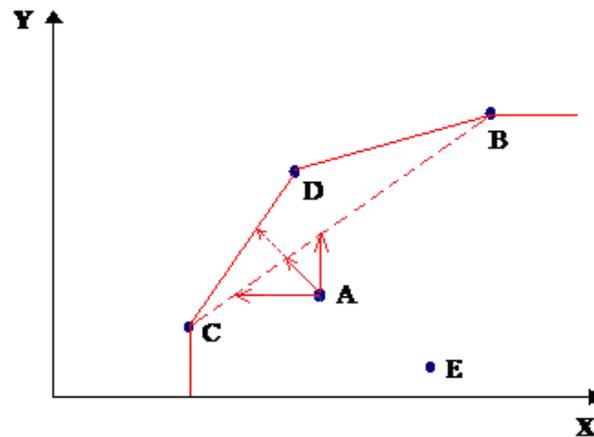


Figura 5.2 – Projeções radiais de uma DMU numa face fictícia da fronteira de eficiência

Além do limite superior do índice de eficiência, calculado pela equação (5.52), esta formulação propõe também o cálculo de um limite inferior para este índice.

Para o cálculo do limite inferior, Soares de Mello et al. (2005) propõem estender a face onde o alvo é projetado e calcular as eficiências orientadas a *input* e a *output* em relação a uma fronteira fictícia, composta apenas por esta face. Como a DMU em observação está mais afastada desta fronteira fictícia que da fronteira real, estes cálculos fornecem um valor inferior à eficiência direcional real. No caso em que os valores dos limites superior e inferior forem iguais, ou seja, todas as projeções ocorrem na mesma face, ter-se-á o valor exato da eficiência direcional. Assim, o índice de eficiência vetorial, para o caso bidimensional da figura 5.2, possui como limites inferior e superior definidos pela equação (5.63).

$$\frac{(ax_0 + b)(y_0 - b)\cos \alpha + ax_0 y_0 \operatorname{sen} \alpha}{ax_0(ax_0 + b)(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)} \leq \left| \vec{e}_f \right| \leq \frac{-e_i \cos \alpha + e_0 \operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} \quad (5.63)$$

Como observado pelos autores, a determinação do limite inferior exige o cálculo da equação da face de projeção, o que pode acarretar problemas computacionais de ordem de dimensão superior (DULÁ, 2002; GONZALEZ ARAYA, 2003).

## 6 EFICIÊNCIA NÃO-RADIAL BASEADA EM CONCEITOS VETORIAIS

Os índices de eficiência de Russell e suas derivações, as medidas de eficiência de Zieschang, medidas de eficiência de Färe ou as medidas de escala ajustada, descritas no capítulo 5 são baseadas em média aritmética ou média ponderada, sem considerar, a priori, as direções de projeção da DMU na fronteira de eficiência, ou seja, não consideram os conceitos vetoriais ligados à eficiência, assim, estes índices não possuem um significado definido.

Além disso, os índices baseados em somas perdem o sentido para o cálculo da eficiência em relação à geometria do problema, já que está baseado apenas em distâncias euclidianas. Nijkamp e Suzukia (2009) apresentam um método para a minimização de distâncias euclidianas. A menor distância euclidiana entre uma DMU ineficiente e um alvo nem sempre apresenta a maior eficiência para esta DMU como será visto no estudo de caso deste trabalho (capítulo 7). Já os índices baseados em ponderações exigem arbitrariedade por parte do decisor, o que é uma contrariedade dos paradigmas de DEA. Além disso, diversos destes índices não atendem à propriedade do índice radial ser caso particular do índice não radial, apresentado na seção 6.3.

O primeiro conceito de índice de eficiência que considera a eficiência como um vetor surgiu, então, com Soares de Mello et al. (2005) como mostrado na seção 5.2.4. Entretanto, como constatado pelos próprios autores, o desenvolvimento não chegou a um índice, mas a um majorante do índice, calculado em casos particulares.

Apresenta-se, a seguir, em caráter inédito, o desenvolvimento de um índice de eficiência para projeções não radiais em DEA que aborda os conceitos vetoriais propostos até então, mas possui a vantagem de ser aplicável independente da face de projeção na fronteira das variáveis do problema, resolvendo as limitações do majorante do índice de eficiência proposto por Soares de Mello et al. (2005). Este novo índice de eficiência, denominado **índice IV**, será desenvolvido apenas para os casos de projeções não radiais dominadas pois, como será descrito mais adiante, projeções não dominadas podem gerar distorções no índice de

eficiência. Este é o grande diferencial deste trabalho, pois deixa de tratar a eficiência como média, passando a tratá-la vetorialmente.

Além disso, o índice desenvolvido permite, uma vez escolhido o ponto de projeção de uma DMU na fronteira de produção, calcular sua eficiência em relação a este ponto. Os índices desenvolvidos anteriormente não permitiam a escolha do ponto de projeção pelo decisor pois o ponto de projeção era determinado sem o controle do decisor.

Esta é uma grande vantagem do índice IV em relação aos outros índices apresentados no capítulo 5, pois proporciona aos gestores a escolha de alvos reais na fronteira ao invés de alvos virtuais. Alvos virtuais são muitas vezes fornecidos pelos modelos DEA clássicos ou outros métodos para determinação de alvos não radiais. Estes alvos virtuais, apesar de matematicamente viáveis, geralmente não possuem nenhum significado gerencial.

Além disso, o índice de eficiência IV possui a vantagem de permitir que uma DMU ineficiente seja projetada na DMU extremo eficiente mais vantajosa, ou seja, a DMU eficiente que lhe proporciona a maior eficiência, como será visto no estudo de caso apresentado no capítulo 7. Neste estudo de caso, pode-se ver que nem sempre a DMU extremo eficiente mais próxima é o alvo que fornece a maior eficiência.

O índice de eficiência IV permite ainda a criação de *ranking* baseado em DEA segundo as melhores projeções de cada DMU.

Este índice será desenvolvido para os casos de modelos DEA-BCC porque os modelos DEA-CCR clássicos definem que o valor da eficiência nos casos radiais dos modelos com orientação a *inputs* e dos modelos com orientação a *outputs* possuem valores iguais, entretanto, não fazem nenhuma menção aos casos de projeções não-radiais.

## 6.1 EFICIÊNCIA VETORIAL NÃO-RADIAL PARA O CASO BIDIMENSIONAL

Não faz sentido tratar a eficiência como um escalar, uma vez que esta grandeza depende do ponto de projeção da DMU na fronteira e, por isso, ela é caracterizada por um número e por uma direção de projeção. Grandezas caracterizadas desta forma são vetoriais.

O desenvolvimento do índice de eficiência não radial está baseado nas propriedades vetoriais do problema, ou seja, para uma DMU atingir a fronteira de eficiência, ela deve se deslocar até esta fronteira em uma direção que é determinada pelo decisor, através da escolha do alvo. Além disso, deve-se considerar o conceito de dominância da projeção onde nenhum *input* pode aumentar de valor assim como nenhum *output* pode ter seu nível diminuído. Como

descrito em Soares de Mello et al. (2005) e Gonzalez Araya (2003), projeções não dominadas podem gerar distorções no valor da eficiência como:

- a projeção de uma DMU em uma região não Pareto-Koopmans eficiente é, de alguma maneira, arbitrária e não apresenta *trade-offs* que tenham algum sentido para a DMU;
- o valor da eficiência pode ser superestimado, no sentido de não estar refletindo a presença de grandes folgas.

A figura 6.1 ilustra os conceitos que serão utilizados para a obtenção do índice IV, baseado nos conceitos vetoriais da eficiência. O desenvolvimento será feito para o caso bidimensional e generalizado posteriormente para o caso multidimensional.

Seja a DMU A, de coordenadas  $(x, y)$ . Os modelos DEA clássicos projetam esta DMU sobre a fronteira no ponto  $A'$  quando o modelo possui orientação a *input* e no ponto  $A''$  quando o modelo possui orientação a *output*. No entanto, por um motivo gerencial qualquer, estas projeções podem não ser satisfatórias. Deseja-se então calcular a eficiência da DMU A quando seu ponto de projeção na fronteira de eficiência, considerando dominância, é o alvo determinado pelo ponto P, de coordenadas  $(x_E, y_E)$ . A direção determinada pela DMU A e o ponto P definem um ângulo  $\alpha$  com o eixo horizontal, que é a direção de projeção da DMU A na fronteira de eficiência.

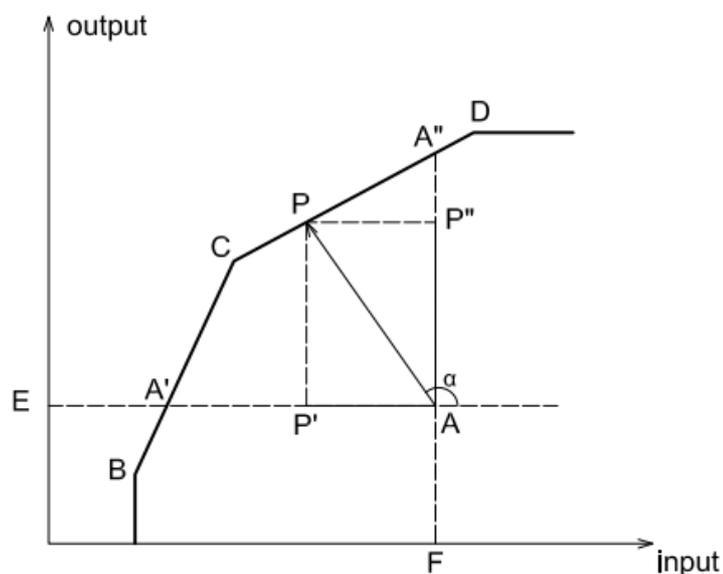


Figura 6.1 – Representação bidimensional da fronteira DEA-BCC.

Para calcular a eficiência da DMU A, quando esta possui o ponto P como alvo, utilizam-se os conceitos de eficiência e ineficiência dos modelos DEA clássicos. O índice será desenvolvido utilizando-se os conceitos de ineficiência ao invés da eficiência para permitir que o índice formulado atenda às propriedades definidas na seção 6.2. Considera-se que a ineficiência de uma DMU é o complemento da sua eficiência para atingir a unidade.

A eficiência com orientação a *input* ou com orientação a *output* nos modelos DEA clássicos são dadas pela razão entre a distância da projeção da DMU na fronteira de eficiência até o eixo coordenado e a distância entre a DMU e o eixo coordenado. Assim, para a DMU A, as eficiências orientadas a *input* e a *output*, calculadas pelos modelos DEA clássicos, são dadas, respectivamente, pelas equações (6.1) e (6.2).

$$e_{fi} = \frac{\overline{EA'}}{\overline{EA}} \quad (6.1)$$

e

$$e_{fo} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FA''}} \quad (6.2)$$

Por outro lado, a ineficiência é dada pela razão entre a distância entre a DMU e sua projeção na fronteira e a distância entre a DMU e o eixo coordenado. Para a DMU A, as ineficiências com orientação a *input* e com orientação a *output* são dadas, respectivamente, pelas equações (6.3) e (6.4).

$$\overline{e_{fi}} = 1 - e_{fi} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{EA}} \quad (6.3)$$

e

$$\overline{e_{fo}} = 1 - e_{fo} = \frac{\overline{AA''}}{\overline{FA''}} \quad (6.4)$$

O que se deseja é calcular o índice de eficiência da DMU quando esta se projeta na fronteira segundo uma projeção não radial, uma vez que o seu ponto de projeção é conhecido (ponto P).

Como descrito, a DMU A se projeta na fronteira de eficiência no alvo determinado pelo ponto P, definindo uma direção de projeção  $\alpha$  com o eixo horizontal. A DMU A possui coordenadas (x, y) e as coordenadas do ponto P são conhecidas e denominadas ( $x_E$ ,  $y_E$ ).

A projeção horizontal do ponto P se relaciona com a ineficiência da DMU A se esta fosse projetada somente com orientação a *input*, dada pela equação (6.5) e a projeção vertical do ponto P está relacionada com a ineficiência da DMU A em relação à orientação a *output* conforme a equação (6.6).

$$\overline{e_{f_i}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{EA}} \quad (6.5)$$

e

$$\overline{e_{f_o}} = \frac{\overline{AP''}}{\overline{FP''}} \quad (6.6)$$

Desta forma, a ineficiência não radial da DMU A quando esta tem como projeção o alvo definido pelo ponto P pode ser calculado pela equação (6.7).

$$\overline{e_f} = \sqrt{\overline{e_{f_i}}^2 + \overline{e_{f_o}}^2} = \sqrt{\frac{\overline{AP'}^2}{\overline{EA}^2} + \frac{\overline{AP''}^2}{\overline{FP''}^2}} \quad (6.7)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos A, E, F, P e suas projeções P' e P'', temos a equação (6.8).

$$\overline{e_f} = \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.8)$$

Uma DMU eficiente deve ter o valor máximo da eficiência e este valor deve ser igual a 1 (COOPER; PASTOR, 1995). Assim, a eficiência IV da DMU A quando projetada no alvo especificado pelo ponto P é igual à diferença entre a unidade e sua ineficiência, dada pela equação (6.9).

$$e_f = h = 1 - \overline{e_f} \Rightarrow h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.9)$$

As coordenadas do ponto P, que é o alvo da DMU na fronteira, são definidas pelas funções objetivo do modelo MORO-D-R (4.41 – 4.45) e calculadas pelas equações (6.10) e (6.11) para o *input* e o *output*, respectivamente. Assim, as coordenadas do ponto P são:

$$x_E = \phi \cdot x \quad (6.10)$$

$$y_E = \phi \cdot y \quad (6.11)$$

Na equação (6.10),  $\varphi$  representa a redução que deve sofrer o *input* da DMU A e na equação (6.11),  $\phi$  representa o aumento que deve ter o *output* da DMU A.

Substituindo as expressões (6.10) e (6.11) na expressão (6.9), o índice IV de eficiência não radial baseado em conceitos vetoriais de uma DMU quando projetada em um ponto P sobre a fronteira é definida pela expressão (6.12).

$$h = 1 - \sqrt{(1 - \varphi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} \quad (6.12)$$

O desenvolvimento do índice IV considerou a ineficiência, ao invés da eficiência, pois, como será definido na seção 6.2, uma das propriedades deste índice é que as projeções radiais devem ser casos particulares da projeção não radial. O desenvolvimento desta forma permite que esta propriedade seja satisfeita. Se, ao invés desta formulação, o desenvolvimento do índice for feito utilizando as eficiências, nos casos radiais teremos os valores da unidade no termo referente à variável que não sofre variação. Por este motivo, a eficiência da DMU seria maior que a eficiência fornecida pelos modelos DEA clássicos, não atendendo à propriedade dos casos particulares.

Na seção 6.2 definem-se as propriedades que devem ser satisfeitas pelo índice de eficiência IV, definidas a partir das propriedades que os índices de eficiência devem satisfazer, descritas no capítulo 2. As demonstrações destas propriedades são feitas na seção 6.3.

## 6.2 PROPRIEDADES DO ÍNDICE VETORIAL

- I. O índice de eficiência deve ser menor ou igual a 1;
- II. A eficiência da DMU na fronteira de eficiência deve ser igual a 1;
- III. Projeções radiais a *input* ou a *output* devem ser casos particulares da projeção não-radial;
- IV. Unidades invariantes: a medida deve ser invariante em relação às unidades em quais os *inputs* e *outputs* são medidos;
- V. Decrescente em relação à fronteira: a medida deve ser monotonicamente decrescente à medida que a DMU se afasta da fronteira;

- VI. Dependente do ponto de referência: a medida deve ser determinada somente consultando o ponto de referência da DMU, ou seja, uma vez determinado o alvo da DMU, sua eficiência depende apenas das coordenadas deste alvo.

### 6.3 DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES DO ÍNDICE VETORIAL

*PROPRIEDADE I: O índice de eficiência deve ser menor ou igual a 1.*

O valor da eficiência  $h$  calculado pelo índice IV é dado pela equação (6.13):

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.13)$$

Alterando o lado da unidade na equação e elevando ambos os termos ao quadrado, encontra-se a equação (6.14):

$$(h - 1)^2 = \left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2 \quad (6.14)$$

Definindo a função  $t$ ,  $t = (h - 1)^2$ , encontra-se a expressão (6.15):

$$t = \left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2 \quad (6.15)$$

O estudo o comportamento da função  $t$  pode ser feito através do cálculo de suas derivadas parciais, definidas pelas expressões (6.16) e (6.17):

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2 \cdot x_E \cdot (x - x_E)}{x^3} \quad (6.16) \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{-2 \cdot (y_E - y)}{y_E^2} \quad (6.17)$$

Os pontos extremos da função são os pontos onde  $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial t}{\partial y} = 0$ . Nestas condições, tem-se as equações (6.18) e (6.19):

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = x_E \quad (6.18) \quad \text{e} \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = y_E \quad (6.19)$$

Assim, o único ponto crítico da função  $t$  é o ponto  $(x_E, y_E)$ .

Para verificar se este ponto é ponto de máximo ou ponto de mínimo da função, calcula-se o determinante Hessiano da função  $t$  neste ponto, dado por (6.20).

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y \cdot \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (6.20)$$

Para o cálculo do determinante Hessiano dado em (6.20), é necessário o cálculo das derivadas parciais de segunda ordem da função  $t$ , dadas em (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{-4 \cdot x \cdot x_e + 6 \cdot x_E^2}{x^4} \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \Big|_{(x_E, y_E)} = \frac{2}{x_E^2} \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \cdot \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial x \cdot \partial y} \Big|_{(x_E, y_E)} = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y \cdot \partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial y \cdot \partial x} \Big|_{(x_E, y_E)} = 0 \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{2}{y_E^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \Big|_{(x_E, y_E)} = \frac{2}{y_E^2} \quad (6.24)$$

Assim, o determinante Hessiano da função  $t$  no ponto  $(x_E, y_E)$  é dado em (6.25):

$$H(x_E, y_E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_E^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y_E^2} \end{vmatrix} = \frac{4}{x_E^2 \cdot y_E^2} > 0 \quad (6.25)$$

Como o hessiano é sempre positivo, a função tem sempre a mesma concavidade, portanto o extremo local é também extremo absoluto da função. Além disso, como  $H(x_E, y_E) > 0$  e  $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(x_E, y_E) + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(x_E, y_E) > 0$ , o ponto  $(x_E, y_E)$  é ponto de mínimo da função  $t$ .

Uma vez que  $h = 1 - \sqrt{t}$ , o ponto  $(x_E, y_E)$  é ponto de máximo da função  $h$ .

Como o valor da eficiência  $h$  é dado pela equação (6.13), o seu valor máximo é dado em (6.26).

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \Rightarrow h(x_E, y_E) = 1 \quad (6.26)$$

Verifica-se então que o valor máximo que a função pode assumir é igual a 1, demonstrando a propriedade 1. Assim, o valor máximo do índice IV é igual a 1.

Como é possível notar, o índice desenvolvido neste trabalho não possui limite inferior definido. Este limite não se justifica pois, mesmo os modelos DEA-BCC clássicos, podem admitir, implicitamente, eficiências negativas. As eficiências negativas surgem pelo fato das restrições do modelo DEA-BCC orientado a *input* apenas imporem que os pesos de uma DMU quando aplicados aos *inputs* e *outputs* de outras DMUs gerem eficiências não superiores a 1. Como uma das variáveis é livre e números negativos são evidentemente inferiores a 1, não há impedimento para surgirem eficiências negativas (SOARES DE MELLO et al., 2002; WU et al., 2009).

No entanto, é desejável que os valores calculados da eficiência não sejam negativos (COOPER; PASTOR, 1995).

Assim, uma vez definido o alvo de uma DMU, é necessário um estudo para identificar, na região viável de produção, as possíveis localizações das DMUs que não terão eficiência negativa quando projetadas no alvo escolhido. Por outro lado, deve-se identificar, na fronteira de produção, qual região uma DMU pode ser projetada para não ter eficiência negativa.

Ambas as regiões são limitadas pela equação (6.27), que define o limite máximo para a ineficiência igual a 1.

$$\left(\frac{x-x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E-y}{y_E}\right)^2 = 1 \quad (6.27)$$

Para a análise do comportamento da função definida pela equação (6.27), será utilizado um exemplo numérico com 6 DMUs genéricas, com 1 *input* e 1 *output*, cujos valores são apresentados na tabela 6.1.

Primeiramente, avaliou-se a eficiência DEA das DMUs utilizando o modelo BCC (VRS) orientado a *input* e, posteriormente, a eficiência no modelo BCC (VRS) orientado a *output*, ambos apresentados na tabela 6.1. Pode-se verificar que, nos dois modelos, as DMUs B, C e E são as DMUs eficientes e, portanto, as que formam a fronteira de produção.

Tabela 6.1 – Valores dos *inputs* e *output* do exemplo numérico

DMU	Input	Output	Eficiência	
			Input	Output
A	5	8	0,6	0,8695
B	1	6	1	1
C	9	10	1	1
D	8	7	0,25	0,7143
E	4	9	1	1
F	11	2	0,0909	0,2

Uma vez definida a fronteira de produção, formada pelas semi-retas que unem o conjunto de DMUs de referência, ou seja, as DMUs eficientes do conjunto de dados, dois estudos distintos podem ser realizados: o primeiro é verificar, uma vez definido o alvo, quais pontos da região viável podem ser projetados neste alvo de modo a não encontrar eficiência negativa e, o segundo estudo é determinar os pontos da fronteira de eficiência nos quais uma DMU pode ser projetada de forma a não possuir eficiência negativa.

Para o primeiro estudo, escolhe-se inicialmente o alvo onde os pontos da região viável devem ser projetados. Assim, escolhendo inicialmente a DMU B como alvo, traçou-se a curva limite para que o índice de eficiência vetorial não seja negativo. A equação (6.27) define uma curva cujos pontos em seu interior podem ser projetados no alvo escolhido, possuindo eficiência positiva. Os pontos sobre a curva representam os pontos que possuem eficiência

nula quando projetados no alvo escolhido. A figura 6.2 apresenta a fronteira de produção do conjunto de dados e a curva limite para eficiência positiva definida pela equação (6.27).

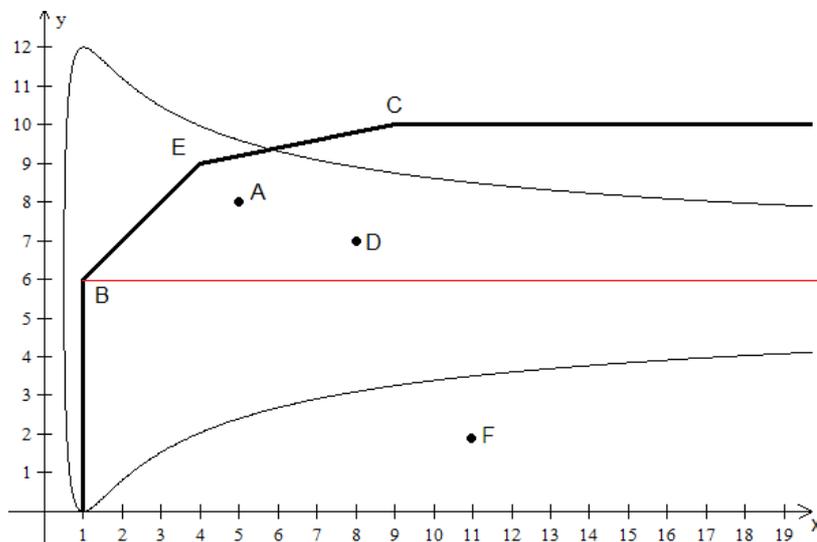


Figura 6.2 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU B

Pode-se verificar que a curva apresenta pontos de máximo e mínimo local cujas abscissas são iguais à coordenada do *input* da DMU de referência (DMU B). Além disso, esta curva define, sobre o conjunto viável de produção, duas regiões nas quais o índice de eficiência das DMUs ali localizadas sejam negativos caso esta DMU seja projetada da DMU B. Uma região localizada acima da parte superior curva e abaixo da fronteira de produção e outra região localizada abaixo da parte inferior da curva e acima do eixo das abscissas.

Entretanto, é importante destacar que o índice IV foi desenvolvido para projeções dominadas. Desta forma, para que uma DMU possa ser projetada na DMU B, o valor do seu *input* deve ser maior que o *input* da DMU B e o valor do seu *output* deve ser menor do que o *output* da DMU B. Assim, esta DMU deve estar localizada à direita de uma reta vertical que passe pela DMU B, assim como abaixo de uma reta horizontal que passe pela DMU B.

Esta propriedade é importante pois impossibilita que DMUs localizadas acima da parte superior curva sejam projetadas na DMU B, assim como DMUs que estejam à esquerda da curva. Por esta razão, nos estudos a seguir, a parte superior da curva foi desconsiderada por não influenciar no estudo, já que o índice IV considera apenas projeções dominadas e esta região da curva não provoca nenhuma alteração no conjunto de DMUs possíveis de ser projetado na DMU alvo.

No entanto, ainda é possível encontrar DMUs com índice de eficiência IV negativo, que seria a eficiência da DMU localizada abaixo da região inferior da curva limite e acima do eixo das abscissas, como acontece com a DMU F, por exemplo. Porém, uma DMU localizada nesta região teria práticas de produção muito ruins, pois estaria consumindo valores elevados de *input* para produção de baixo nível de *output*, o que raramente acontece.

A seguir, as figuras 6.3 e 6.4 apresentam a fronteira de produção do conjunto de dados e as curvas limites para que o índice de eficiência IV não seja negativo, tomando como alvo as DMUs E e C, respectivamente.

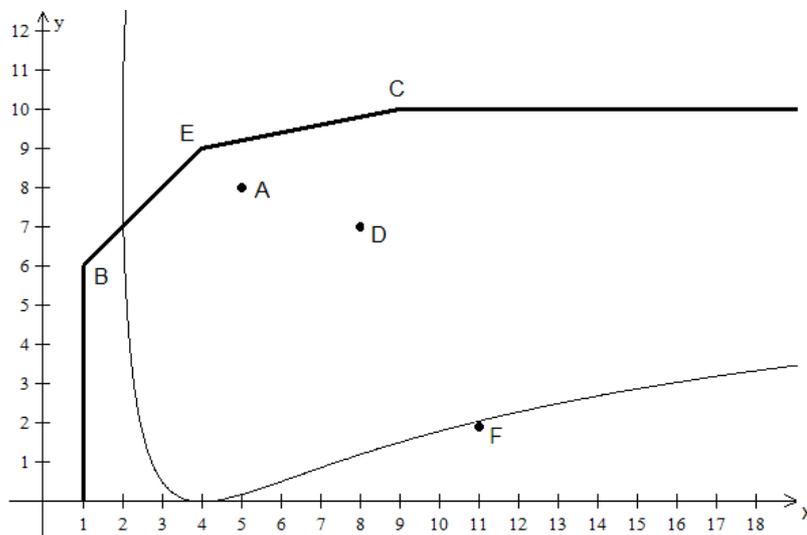


Figura 6.3 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU E

Na figura 6.3, verifica-se que a DMU F terá índice de eficiência IV negativo se o seu alvo de projeção for a DMU E, assim como acontece quando esta DMU possui como alvo a DMU B (figura 6.2). Já se o alvo for a DMU C, nenhuma outra DMU do conjunto de dados terá o índice de eficiência IV negativo (figura 6.4).

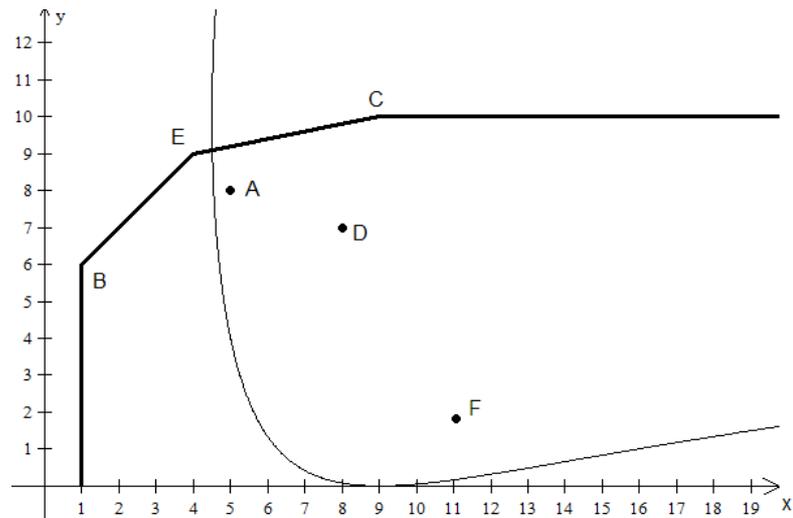


Figura 6.4 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para  $ef > 0$  tendo como alvo a DMU C

O segundo estudo a ser realizado se refere à análise do problema anterior de forma inversa, ou seja, dada uma DMU ineficiente, determinar a região da fronteira na qual esta DMU pode ser projetada de forma que o índice de eficiência IV não seja negativo.

Utilizando ainda o conjunto de dados do exemplo numérico apresentado na tabela 6.1 e a equação (6.27), definimos o conjunto de alvos onde as DMUs ineficientes A, D e F podem ser projetadas para que suas eficiências não sejam negativas.

Verifica-se que a equação (6.27) define uma curva na qual a região em seu interior constituem os pontos onde a ineficiência é menor que 1, garantindo uma eficiência IV não negativa.

A figura 6.5 apresenta a região onde a DMU A pode ser projetada para que sua eficiência IV não seja negativa. Pode-se verificar que, para projeções dominadas, qualquer ponto onde esta DMU seja projetada, seu índice de eficiência IV será maior que zero.

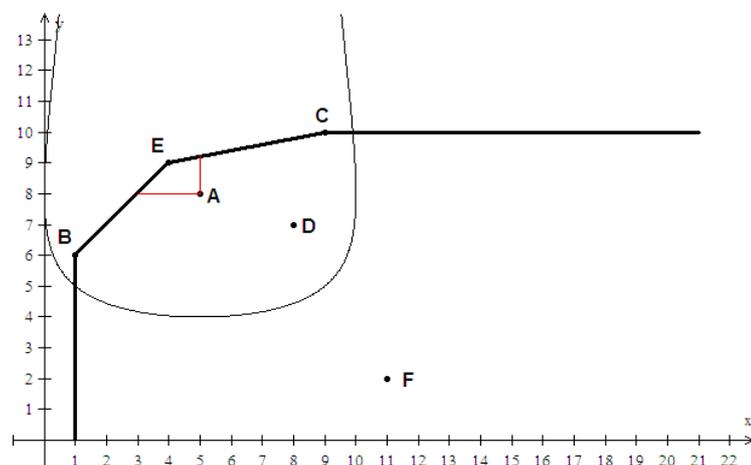


Figura 6.5 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU A

De forma análoga, a figura 6.6 apresenta a região da fronteira onde a DMU D pode ser projetada para que sua eficiência IV não seja menor que zero. Verifica-se também que seu índice de eficiência IV será maior que zero para qualquer projeção dominada desta DMU na fronteira de produção.

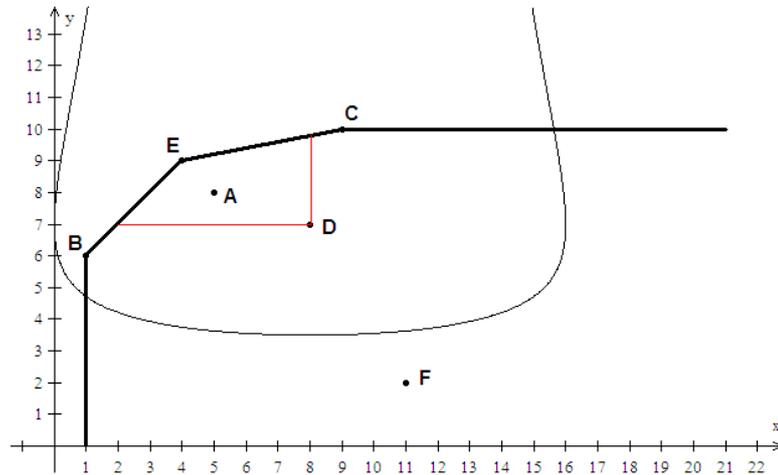


Figura 6.6 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU D.

Para a DMU F, no entanto, nota-se que existem pontos de projeção dominada para esta DMU na fronteira de eficiência cujo índice de eficiência IV é negativo. No entanto, a DMU F possui uma prática gerencial muito ruim, utilizando 11 unidades de *input* para produção de apenas 2 unidades do *output* (tabela 6.1).

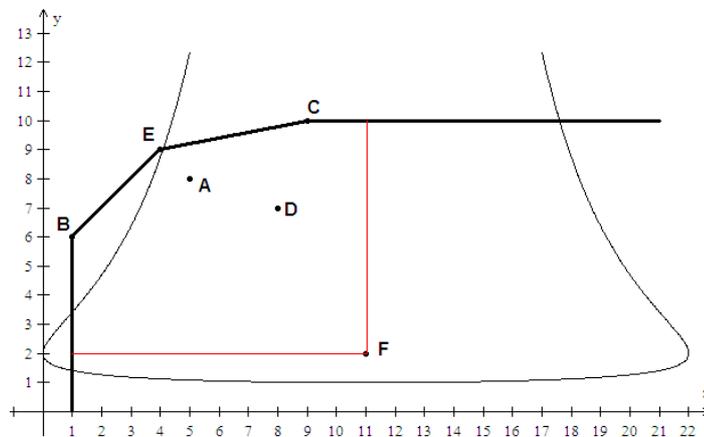


Figura 6.7 – Fronteira DEA-BCC e curva limite para projeção da DMU F

Após estes estudos e utilizando apenas as DMUs eficientes como possíveis alvos para as demais DMUs, tem-se que, para projeções dominadas, que a DMU E é o único alvo possível para as DMUs A e D e, para a DMU F, os alvos são as DMUs B, C e E. A tabela 6.2 apresenta o valor do índice de eficiência IV para as DMUs A, D e F quando estas são projetadas nos alvos especificados.

Tabela 6.2 – Eficiências das DMUs do exemplo numérico

ALVO DMU	DMU B	DMU E	DMU C
A		0,7712	
D		0,4528	
F	-0,1273	-0,0049	0,1796

Nota-se, como apresentado pelas figuras 6.2, 6.3 e 6.7, que a eficiência IV da DMU F é negativa quando é projetada nas DMUs B e E. Estes valores de eficiência IV negativa deve-se ao fato da DMU F possuir uma prática de produção muito ruim. Como pode ser visto na tabela 6.1, esta DMU utiliza 11 unidades de *inputs* para produção de apenas 2 unidades de *outputs* enquanto que, por exemplo, a DMU B utiliza uma única unidade de *input* para produção de 6 unidades de *outputs*.

Desta forma, entende-se que, mesmo não sendo estipulado o limite inferior igual a zero para o índice de eficiência IV, esta propriedade proposta por Cooper e Pastor (1995) será atendida na maioria dos casos, ficando restrito a DMUs com práticas gerenciais muito ruins.

*PROPRIEDADE II: A eficiência da DMU na fronteira de eficiência deve ser igual a 1.*

Seja  $r$  uma reta que passa pelos pontos  $A(x, y)$  e  $P(x_E, y_E)$  da figura 6.8.

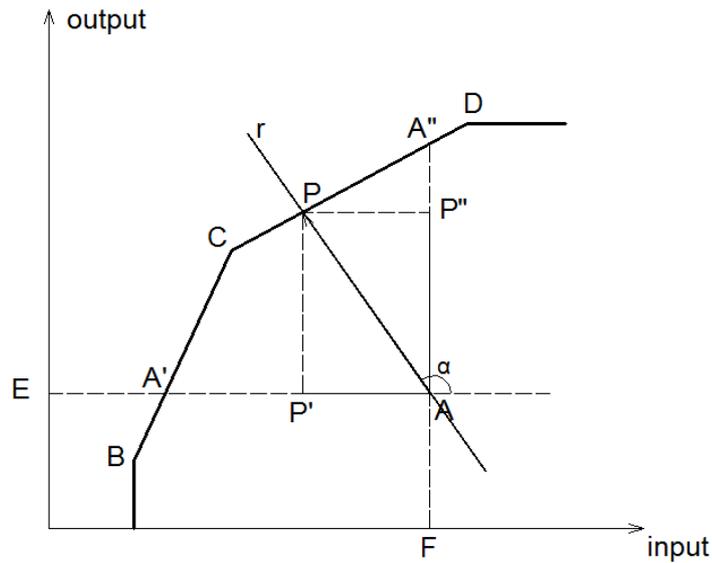


Figura 6.8 – Representação bidimensional da fronteira DEA-BCC

Deseja-se fazer com que o ponto  $(x, y)$  caminhe em direção ao ponto  $P(x_E, y_E)$  sobre a reta  $r$ . Desta forma, quando a distância entre estes pontos for infinitesimal, o valor da eficiência IV deve se aproximar de 1 pois o ponto  $(x, y)$  estará a uma distância infinitesimal da fronteira de eficiência. Assim, para o cálculo do valor da eficiência IV utiliza-se o limite da equação (6.28):

$$e_f = h = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_E, y_E)} 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.28)$$

Os caminhos pelos quais o ponto  $(x, y)$  se aproxima do ponto  $P(x_E, y_E)$  são definidos por retas. Assim, o conjunto de todas as retas que passam pelo ponto  $A(x, y)$  e  $P(x_E, y_E)$ , ou seja, o caminho por onde esta aproximação pode ocorrer, é definido pela equação (6.29).

$$y - y_E = m(x - x_E) \Rightarrow y = m(x - x_E) + y_E \quad (6.29)$$

Aplicando a equação (6.29) sobre a expressão do limite definida em (6.28), este limite se transforma na equação (6.30):

$$h = \lim_{x \rightarrow x_E} 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - m(x - x_E) - y_E}{y_E}\right)^2} \quad (6.30)$$

No limite quando  $x \rightarrow x_E$  o valor da expressão é igual a 1, o que garante a validação desta propriedade do índice de eficiência IV para o caso bidimensional.

*PROPRIEDADE III: Projeções radiais a input ou a output devem ser casos particulares da projeção não-radial.*

- Projeção radial com orientação a input

Neste caso o valor do *output* se mantém constante, ou seja,  $\phi = 1$  ( $y = y_E$ ) e somente o valor do *input* varia, temos a expressão (6.31):

$$h = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2} = 1 - 1 + \phi = \phi \quad (6.31)$$

Assim, a eficiência IV da DMU é a própria eficiência orientada a *input* dada pelos modelos DEA clássicos.

- Projeção radial com orientação a output

Neste caso o valor do *input* se mantém constante, ou seja,  $\phi = 1$  ( $x = x_E$ ), alterando apenas o valor do *output*, temos a expressão (6.32):

$$h = 1 - \sqrt{(1 - \phi)^2 + \left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\phi}\right)^2} = 1 - 1 + \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi} \quad (6.32)$$

Ou seja, a eficiência IV da DMU é a própria eficiência orientada a *output* dos modelos DEA clássicos.

Assim, o índice de eficiência IV proposto satisfaz os casos de projeção radial com orientação a *input* e com orientação a *output*.

É uma propriedade importante e, por isso, será feita uma verificação em relação aos demais índices descritos na seção 5, pois nem todos os índices desenvolvidos anteriormente satisfazem esta propriedade.

- Medida de Russell Não Orientada

Seja o caso bidimensional da medida de Russell Não-Orientada, expresso pela equação (6.33):

$$\text{Min } \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{1}{\phi} \right) \quad (6.33)$$

Seja, por exemplo, o caso de projeção radial com orientação a *input*, então, o valor do *output* se mantém constante e, assim,  $\phi = 1$ . Então, o valor da eficiência é dado por  $\frac{\theta+1}{2}$  que não equivale ao valor da eficiência radial orientada a *input* que deve ser igual a  $\theta$ . Assim, este índice não satisfaz à propriedade III.

- Medida De Russell Não Orientada Melhorada

Pastor et al. (1999) e Tone (2001) consideram as coordenadas de uma DMU dada pelas equações (6.34) e (6.35), onde  $s^-$  e  $s^+$  representam as folgas dos conjuntos de *inputs* e *outputs*, respectivamente:

$$x_0 = X\lambda + s^- \quad (6.34)$$

$$y_0 = Y\lambda + s^+ \quad (6.35)$$

Desta forma, a metodologia proposta por Pastor et al. (1999) e Tone (2001) projeta a DMU, inicialmente, de forma radial e, posteriormente, através da minimização das folgas dada pela equação (6.36), caminha com a DMU para o ponto Pareto eficiente mais próximo.

$$\text{Min } \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{r0}}} \quad (6.36)$$

A equação (6.37) representa o mesmo índice onde, ao invés de se trabalhar com as coordenadas da DMU, considera os índices de redução de *inputs* e aumento de *outputs*, respectivamente.

$$\text{Min} \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \quad (6.37)$$

Verifica-se, como era de se esperar, que este índice atende aos casos particulares de projeções radiais, uma vez que seu desenvolvimento parte desta projeção para, posteriormente, realizar projeções não-radiais. No entanto, apesar deste índice atender à propriedade III, sua concepção possui conceitos distintos do índice proposto neste trabalho.

#### - Medida de Escala Ajustada

Como na medida de Russell Não Orientada Melhorada proposta por Pastor et al. (1999) e Tone (2001), a medida de Escala Ajustada proposta por Cooper e Pastor (1995) considera a minimização das folgas da DMU, dada pela equação (6.38). Esta medida também realiza, de início, uma projeção radial, caminhando posteriormente para o ponto de fronteira Pareto eficiente mais próximo.

$$h = 1 - \frac{1}{m + s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \quad (6.38)$$

É, como no caso anterior, uma metodologia diferente da utilizada neste trabalho.

*PROPRIEDADE IV: Unidades invariantes: a medida deve ser invariante em relação às unidades em quais os inputs e outputs são medidos.*

Seja um conjunto de DMUs  $\Omega = (X, Y)$  composto por  $n$  DMUs. Sejam  $A, B \in \Omega$ , onde  $A(x_E, y_E)$  é uma DMU eficiente e  $B(x, y)$  é uma DMU ineficiente. O índice de eficiência IV da DMU B quando esta é projetada na DMU A é dado pela equação (6.39).

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.39)$$

Seja agora um conjunto DMUs  $\rho = (R, S)$ , composto pelas mesmas DMUs do conjunto  $\Omega = (X, Y)$ , onde  $R = \Gamma X$  e  $S = \Gamma Y$ , em que  $\Gamma$  é um parâmetro de escala. Assim,  $\rho = (\Gamma X, \Gamma Y)$  e as coordenadas das DMUs A e B passam a ser, respectivamente,  $(\Gamma x_E, \Gamma y_E)$  e  $(\Gamma x, \Gamma y)$ . Projetando novamente a DMU B de forma não-radial sobre a DMU A, tem-se o seu índice de eficiência IV dado pelas equações (6.40 – 6.42):

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{\Gamma x - \Gamma x_E}{\Gamma x}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma y_E - \Gamma y}{\Gamma y_E}\right)^2} \quad (6.40)$$

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{\Gamma(x - x_E)}{\Gamma x}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma(y_E - y)}{\Gamma y_E}\right)^2} \quad (6.41)$$

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.42)$$

Assim, o índice de eficiência IV não apresenta variação quando as unidades de medida dos *inputs* e *outputs* sofrem variações de escala.

*PROPRIEDADE V: Decrescente em relação à fronteira: a medida deve ser monotonicamente decrescente à medida que a DMU se afasta da fronteira.*

Seja um afastamento da DMU em relação ao ponto A(x, y) para o ponto G, sofrendo uma alteração de  $\varepsilon$  unidades no valor de *input* e  $\delta$  unidades no valor do *output*, conforme figura 6.9.

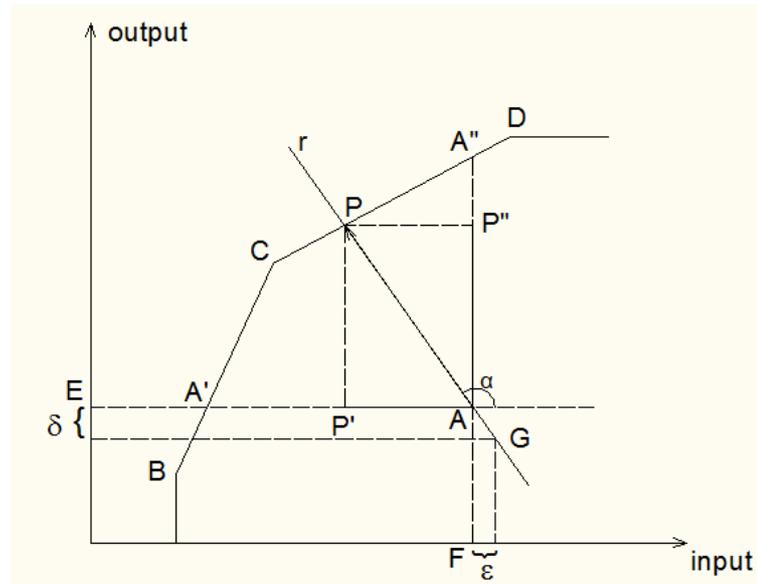


Figura 6.9 – Deslocamento da DMU A

Como considera-se apenas projeções dominadas, o deslocamento da DMU A se dá sobre a reta  $r$  que é decrescente. Assim, as novas coordenadas da DMU são  $(x + \varepsilon, y - \delta)$  e o valor da eficiência IV passa a ser definido pela equação (6.43).

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x + \varepsilon - x_E}{x + \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{y_E - (y - \delta)}{y_E}\right)^2} \quad (6.43)$$

A equação da reta  $r$  é dada pela equação (6.44):

$$y = m(x - x_E) + y_E \quad (6.44)$$

No ponto  $(x + \varepsilon, y - \delta)$ , tem-se a expressão (6.45):

$$y - \delta = m(x + \varepsilon - x_E) + y_E \quad (6.45)$$

Assim, substituindo o valor de  $(y - \delta)$  da expressão (6.45) no valor da eficiência IV da DMU A dada pela expressão (6.43), define-se a expressão (6.46) para o valor da eficiência IV no ponto G:

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x + \varepsilon - x_E}{x + \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{-m(x + \varepsilon - x_E)}{y_E}\right)^2} \quad (6.46)$$

No termo  $\left(\frac{x + \varepsilon - x_E}{x + \varepsilon}\right)$  da equação (6.46), o aumento de  $\varepsilon$  unidades no valor do numerador é proporcionalmente maior que o aumento no valor do denominador desta expressão, o que ocasiona um aumento no valor desta expressão.

Da mesma forma, o termo  $\left(\frac{-m(x + \varepsilon - x_E)}{y_E}\right)$ , também da equação (6.46), há um aumento de  $\varepsilon$  unidades no valor do numerador enquanto que o denominador permanece constante, o que também gera um aumento no valor desta expressão.

Assim, como o valor do termo  $\sqrt{\left(\frac{x + \varepsilon - x_E}{x + \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{-m(x + \varepsilon - x_E)}{y_E}\right)^2}$ , que representa a ineficiência da DMU A, aumenta à medida que a DMU se afasta da fronteira (dado pelo deslocamento  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ ), o valor da eficiência  $h$  que representa o índice de eficiência IV desta DMU diminui.

Da mesma forma, o inverso pode ser provado movendo-se a DMU em direção à fronteira. Neste caso, o valor da eficiência IV da DMU aumenta.

*PROPRIEDADE VI: Dependente do ponto de referência: a medida deve ser determinada somente consultando o ponto de referência da DMU, ou seja, uma vez determinado o alvo da DMU, sua eficiência depende apenas das coordenadas deste alvo.*

Esta propriedade pode ser deduzida a partir da equação (6.47), utilizada para a determinação da eficiência IV da DMU quando esta é projetada em um ponto determinado da fronteira de eficiência, a qual é definida apenas utilizando as coordenadas da DMU analisa e as coordenadas do alvo desta DMU.

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2} \quad (6.47)$$

Vale ressaltar que o índice de eficiência IV não possui a propriedade de translação invariante proposta por Tone (2001) por ser uma propriedade bastante restritiva.

A translação invariante dos eixos coordenados está relacionada com as coordenadas da DMU em análise e o seu alvo, o que altera o valor da eficiência IV para as demais DMUs do conjunto de dados como apresentado a seguir.

A eficiência IV de uma DMU é dada pela expressão (6.47). Seja uma translação dos eixos coordenados de  $r$  unidades no eixo  $x$  e  $s$  unidades no eixo  $y$ . Com esta translação, a eficiência IV da DMU passa a ser expressa pela equação (6.48).

$$h = 1 - \sqrt{\left(\frac{x - x_E}{x - r}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E - s}\right)^2} \quad (6.48)$$

Como se deseja translação invariante, a equação (6.49) deve ser atendida.

$$\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 - \left(\frac{x - x_E}{x - r}\right)^2 = \left(\frac{y_E - y}{y_E - s}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2 \quad (6.49)$$

Trabalhando os termos da equação (6.49), tem-se a equação (6.50):

$$\left[\frac{r \cdot (2x - r)}{(x - r)^2}\right] \left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2 + \left[\frac{s \cdot (2y_E - s)}{(y_E - s)^2}\right] \left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2 = 0 \quad (6.50)$$

Os termos  $\left(\frac{x - x_E}{x}\right)^2$  e  $\left(\frac{y_E - y}{y_E}\right)^2$  da equação (6.50) não são nulos. Assim, para satisfazer esta equação, algumas situações podem ocorrer. Entre estas situações, tem-se  $r = 2x$  e  $s = 2y_E$ .

Estas condições demonstram que o índice de eficiência IV não é invariante em relação à translação pois as variações  $r$  e  $s$  dependem das coordenadas da DMU em análise e das coordenadas do alvo, respectivamente. Assim, a translação não é invariante em relação ao conjunto de todas as DMUs.

#### 6.4 EFICIÊNCIA VETORIAL NÃO-RADIAL PARA O CASO N-DIMENSIONAL

A formulação bidimensional do problema determina a direção de projeção da DMU na fronteira de eficiência através de um único ângulo  $\alpha$ , definindo assim as coordenadas do alvo da DMU na fronteira.

Para dimensões superiores, isto não ocorre e o ponto de projeção da DMU da fronteira é definido por mais de duas coordenadas. Assim, esta DMU terá mais de duas ineficiências radiais parciais, sendo seu número definido pelo número de variáveis do problema.

Seja o caso multidimensional composto de  $m$  *inputs* e  $s$  *outputs*, onde  $n = m + s$  e representa o número total de variáveis do problema. Desta forma, o índice de eficiência IV n-dimensional é definido pela equação (6.51).

$$h = 1 - \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{x_i - x_{E_i}}{x_i} \right)^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left( \frac{y_{E_i} - y_i}{y_{E_i}} \right)^2} \quad (6.51)$$

A equação (6.51) também pode ser expressa pelos índices de redução de cada *input* ou aumento de cada *output*, definido pela expressão (6.52):

$$h = 1 - \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - \phi_i)^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left( 1 - \frac{1}{\phi_i} \right)^2} \quad (6.52)$$

A divisão dos termos pelos números de *inputs* e *outputs*,  $m$  e  $s$ , respectivamente, justifica-se para que o índice de eficiência IV n-dimensional atenda à propriedade 3, que determina que as projeções radiais a *input* ou a *output* devem ser casos particulares da projeção não-radial.

Os índices de variação de *inputs* e *outputs* podem ser determinados pelo modelo multidimensional MORO-D-R (4.41 – 4.45), apresentado na seção 4.4, que permite variações independentes de cada um destes índices, considerando a dominância na projeção da DMU, conforme premissa do índice de eficiência IV.

O índice de eficiência IV não-radial n-dimensional atende às propriedades definidas na seção 6.3 para o caso bi-dimensional. As demonstrações destas propriedades são semelhantes às demonstrações realizadas para o caso bi-dimensional.

## **7 ESTUDO DE CASO: ANÁLISE DE EFICIÊNCIA DOS POLOS DO CEDERJ**

### **7.1 INTRODUÇÃO**

O CEDERJ (Centro de Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro) é um consórcio criado em 1999 e formado pelas 06 (seis) universidades públicas sediadas no Estado do Rio de Janeiro – UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro), UFF (Universidade Federal Fluminense), UFRRJ (Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro), UERJ (Universidade Estadual do Rio de Janeiro), UNIRIO (Universidade do Rio de Janeiro) e UENF (Universidade Estadual do Norte Fluminense) – em parceria com o Governo Estadual e associado a prefeituras municipais, com a finalidade de democratizar o acesso ao ensino superior, através do oferecimento de cursos de graduação públicos, gratuitos e de qualidade a todas as regiões do Estado, revolucionando assim o conceito de Educação à Distância no Brasil. Assim, o consórcio pretende contribuir para a interiorização do ensino superior público no Estado, bem como facilitar o acesso a cursos superiores de pessoas com indisponibilidade de estudar em horários normais.

A Fundação CECIERJ (Fundação Centro de Ciências e Educação Superior à Distância do Estado do Rio de Janeiro) é responsável por toda infra-estrutura logística dos cursos do Consórcio CEDERJ. Com base nos dados fornecidos por esta Fundação, em julho de 2010, o Consórcio oferece os cursos de Licenciatura em Matemática, Ciências Biológicas, História, Pedagogia, Química, Turismo e Física, além de Tecnologia em Sistemas de Computação e Administração, todos na modalidade semi-presenciais e possui 34 (trinta e quatro) pólos regionais distribuídos por todo o Estado – Angra dos Reis, Barra do Piraí, Belford Roxo, Bom Jesus do Itabapoana, Campo Grande (Rio de Janeiro), Cantagalo, Duque de Caxias, Itaguaí, Itaocara, Itaperuna, Macaé, Magé, Miguel Pereira, Maracanã (Rio de Janeiro), Natividade, Niterói, Nova Friburgo, Nova Iguaçu, Paracambi, Petrópolis, Piraí, Quatis,

Resende (FAT/UERJ), Resende (centro), Rio Bonito, Rio das Flores, Santa Maria Madalena, São Fidélis, São Francisco do Itabapoana, São Gonçalo, São Pedro d'Aldeia, Saquarema, Três Rios e Volta Redonda.

Apesar de todas as dificuldades enfrentadas na implementação de uma ação inovadora no setor público, o Consórcio CEDERJ vem servindo de modelo em todo o Brasil, inclusive inspirando ações do MEC no fomento ao Ensino Superior à Distância brasileiro.

O ensino superior à distância é alvo de várias discussões por parte de profissionais da área de educação, porém baseadas em análises qualitativas. Andrade et al. (2009) utilizam dados quantitativos para realizar a análise de ensino superior a distância, através da utilização de DEA, buscando avaliar os pólos do CEDERJ quanto à sua eficiência. Outros trabalhos que utilizam DEA para análise educacional podem ser vistos em Abbott e Doucouliagos (2003), Soares de Mello et al. (2006), Abramo et al. (2008) e Angulo Meza et al. (2011).

Em sua análise, Andrade et al. (2009) realizam uma avaliação dos pólos do CEDERJ que formaram alunos no curso de Licenciatura em Matemática no primeiro semestre de 2009. Realizam ainda um estudo de seleção de variáveis para determinar as melhores variáveis do modelo DEA proposto.

A seleção de variáveis utilizada por Andrade et al. (2009), adaptada do trabalho de Senra et al. (2007) foi importante justamente na escolha da variável que define o período de ingressos dos alunos em relação ao período que estes se formam, dada a dificuldade de estimar com precisão o semestre principal de entrada dos alunos que formaram no primeiro semestre de 2009.

Desta forma, o modelo utilizado por Andrade et al. (2009) possui 13 DMUs, que foram os pólos do CEDERJ que formaram alunos no curso de Licenciatura em Matemática no primeiro semestre de 2009, com 2 *inputs*, que são número de alunos ingressantes por pólo no segundo semestre de 2005 (AI-2/2005) e número de tutores por pólo no primeiro semestre de 2009 (NT) e 1 *output* que é o número de alunos formados por cada pólo no primeiro semestre de 2009 (AF), cujos valores são apresentados na tabela 7.1.

O modelo utilizado para o cálculo das eficiências foi o modelo DEA-BCC (VRS) com orientação a *output*. A escolha do modelo DEA-BCC se justifica por se desejar retornos variáveis de escala, uma vez que os pólos possuem tamanhos diferentes com diferentes quantidades de alunos e tutores. A orientação do modelo a *output* ocorre por se desejar uma maximização do número de alunos formados em cada pólo e não em diminuição do número de vagas oferecidas em cada pólo nem a diminuição do número de tutores.

Tabela 7.1 – Pólos CEDERJ e dados do modelo

Sigla	Pólo	Alunos ingressantes 2/2005 (AI-2/2005)	Número de Tutores (NT)	Alunos formados (AI)
ARE	Angra dos Reis	60	6	8
PAR	Paracambi	72	7	9
PIR	Pirai	23	6	6
SFR	São Francisco do Itabapoana	20	5	1
VRE	Volta Redonda	99	10	10
ITA	Itaperuna	36	7	4
SPE	São Pedro da Aldeia	62	6	4
MAC	Macaé	29	6	3
TRI	Três Rios	60	8	3
CAN	Cantagalo	40	7	2
SAQ	Saquarema	61	6	2
CGR	Campo Grande	62	6	1
PET	Petrópolis	79	8	1
<b>Total geral</b>		<b>703</b>	<b>88</b>	<b>54</b>

A tabela 7.2 apresenta a eficiência DEA-BCC orientada a *output* para os pólos do CEDERJ, calculada com o *software* SIAD (Sistema Integrado de Apoio a Decisão) (ANGULO MEZA et al., 2005).

Tabela 7.2 – Eficiência DEA-BCC dos pólos CEDERJ

Sigla	Pólo	Eficiência BCC Output
ARE	Angra dos Reis	1,0000
PAR	Paracambi	1,0000
PIR	Pirai	1,0000
SFR	São Francisco do Itabapoana	1,0000
VRE	Volta Redonda	1,0000
ITA	Itaperuna	0,5886
SPE	São Pedro da Aldeia	0,5000
MAC	Macaé	0,4744
TRI	Três Rios	0,3630
CAN	Cantagalo	0,2841
SAQ	Saquarema	0,2500
CGR	Campo Grande	0,1250
PET	Petrópolis	0,1080
<b>Total geral</b>		

A tabela 7.3 descreve os pesos atribuídos por DEA às variáveis do modelo.

Tabela 7.3 – Pesos das variáveis do modelo DEA-BCC para os pólos CEDERJ

Sigla	Pólo	Alunos ingressantes 2/2005 (AI-2/2005)	Número de Tutores (NT)	Alunos formados (AI)
ARE	Angra dos Reis	0,006757	0,099099	0,125000
PAR	Paracambi	0,006006	0,039039	0,111111
PIR	Pirai	0,043478	0,000000	0,166667
SFR	São Francisco do Itabapoana	0,054054	4,837838	1,000000
VRE	Volta Redonda	0,003704	0,000000	0,100000
ITA	Itaperuna	0,015306	0,000000	0,250000
SPE	São Pedro da Aldeia	0,000000	1,750000	0,250000
MAC	Macaé	0,018018	1,612613	0,333333
TRI	Três Rios	0,020408	0,000000	0,333333
CAN	Cantagalo	0,030612	0,000000	0,500000
SAQ	Saquarema	0,000000	0,500000	0,500000
CGR	Campo Grande	0,000000	7,000000	1,000000
PET	Petrópolis	0,037037	0,000000	1,000000

Os modelos DEA clássicos fornecem um único alvo para cada DMU como apresentado na tabela 7.4, que descreve os alvos para os pólos ineficientes dados pelo modelo DEA com projeção radial. Além disso, estes alvos fornecidos pelos modelos DEA clássicos podem não ter significado gerencial. Como exemplo, pode ser visto na tabela 7.4 que o pólo de Itaperuna possui um alvo formado por 27% do pólo de Paracambi e 73% do pólo de Pirai. Alvos compostos desta forma representam alvos virtuais, já que a DMU em análise, no caso o pólo de Itaperuna, deve se espelhar em um ponto da fronteira que não representa um pólo real. Este fato pode ser uma limitação à atividade gerencial. É importante contar com um conjunto de alvos a partir do qual os gestores possam escolher o seu alvo preferido.

Tabela 7.4 – Alvos radiais do modelo DEA-BCC para os pólos CEDERJ

ALVO PÓLO	ARE	PAR	PIR	SFR	VRE
ITA		27%	73%		
SPE	100%				
MAC	16%		84%		
TRI		76%	24%		
CAN		35%	65%		
SAQ	100%				
CGR	100%				
PET		74%			26%

## 7.2 DETERMINAÇÃO DE ALVOS ALTERNATIVOS

Uma alternativa para determinação de alvos alternativos aos alvos fornecidos pelos modelos DEA clássicos é a determinação de alvos não radiais através de modelos multiobjetivos descritos no capítulo 4.

Para a determinação de alvos alternativos, considerou-se o mesmo conjunto de DMUs utilizado por Andrade et al. (2009) e descrito na tabela 7.1, mantendo-se assim a mesma fronteira de eficiência definida por DEA. Em seguida, utiliza-se o modelo MORO-D-R (4.41 – 4.45) considerando retornos variáveis de escala (VRS) (seção 4.4) ao grupo de pólos ineficientes para determinar um conjunto de alvos possíveis não radiais para cada um destes pólos.

Como já mencionado, a consideração de uma fronteira VRS permite-se lidar com eficiências de escala. Esta característica permite que pólos de tamanhos diferentes, como por exemplo, Volta Redonda e São Francisco do Itabapoana, de dimensões tão diferentes, sejam analisados utilizando o mesmo modelo (ANGULO MEZA, 2002). A utilização do modelo MORO-D-R se justifica pois, como demonstrado na seção 4.4, este modelo considera dominância assim como considerado na formulação do índice de eficiência IV e é computacionalmente melhor que o modelo MORO-D.

Foram então formulados os modelos MORO-D-R, versão VRS, para todos os pólos ineficientes. A formulação do modelo para o pólo de Itaperuna, por exemplo, está apresentado no modelo (7.1).

$$\begin{aligned}
 & \min \varphi_1 \\
 & \min \varphi_2 \\
 & \max \phi_1 \qquad \qquad \qquad (7.1) \\
 & \text{Sujeito a:} \\
 & 36.\varphi_1 \geq 60.\lambda_1 + 72.\lambda_2 + 23\lambda_3 + 20\lambda_4 + 99\lambda_5 \\
 & 7.\varphi_2 \geq 6.\lambda_1 + 7.\lambda_2 + 6\lambda_3 + 5\lambda_4 + 10\lambda_5 \\
 & 4.\phi_1 \leq 8.\lambda_1 + 9.\lambda_2 + 6\lambda_3 + 1\lambda_4 + 10\lambda_5 \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\
 & \varphi_1 \leq 1 \\
 & \varphi_2 \leq 1 \\
 & \phi_1 \geq 1
 \end{aligned}$$

Uma vez formulados os modelos MORO-D-R, utilizou-se o software TRIMAP para encontrar as soluções destes modelos. O TRIMAP (CLÍMACO; ANTUNES, 1987, 1989) é um ambiente interativo orientado a problemas tri-objetivo que combina a redução da região admissível com a redução do espaço dos pesos, assim, possui vantagens em sua utilização neste caso, pois, os modelos a serem implementados possuem exatamente três objetivos. Apesar de possuir uma filosofia subjacente quanto à sua utilização, o TRIMAP será usado neste trabalho apenas como gerador de soluções para os modelos. Outras aplicações da aplicação do TRIMAP em DEA podem ser vistas em Clímaco et al. (2008, 2010); Silveira et al. (2008) e Soares de Mello et al. (2009).

Os valores numéricos destas soluções encontram-se nas tabelas 7.5 a 7.12.

Nestas tabelas (7.5 a 7.12), os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  representam as reduções dos *inputs* (AI-2/2005) e (NT), respectivamente. O valor de  $\phi_1$  representa o aumento que deve sofrer o *output* (AF) da DMU em análise. Os valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  e  $\lambda_5$  representam, respectivamente, as contribuições das DMUs (pólos) Angra dos Reis, Paracambi, Piraí, São Francisco do Itabapoana e Volta Redonda na formação do alvo da DMU em análise. As colunas “Projeção da DMU” apresentam as coordenadas que a DMU em análise deve alcançar na fronteira de eficiência segundo cada uma das soluções descritas pelo TRIMAP, calculadas pela multiplicação dos índices  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_1$  pelas respectivas coordenadas da DMU. Os alvos de cada DMU ineficiente em cada solução é apresentado nas colunas “Alvos” e são calculados pelo somatório da multiplicação da contribuição de cada *benchmark* por sua respectiva coordenada. As folgas em cada solução são calculadas pela diferença entre a coordenada de projeção da DMU e seu alvo. Verifica-se que em todas as soluções, as folgas são nulas, pois, como apresentado na seção 4.4.2, o modelo MORO-D-R calcula soluções na região Pareto eficiente da fronteira, que possui apenas folgas nulas.

Pode-se verificar nas tabelas 7.5 a 7.12 que o TRIMAP apresenta soluções com valores repetidos. Isto acontece porque, para a resolução dos modelos de programação multiobjetivo, são criadas variáveis artificiais que não aparecem na solução final. Desta forma, soluções que apresentam os mesmos resultados possuem, implicitamente, variáveis artificiais com valores diferentes que não interferem no escopo deste trabalho.

Tabela 7.5 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Itaperuna

Solução	Soluções Trimap - PÓLO ITAPERUNA									Eficiência IV	Observação (Alvo)
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$			
1	0,606	0,800	1,000			60%	40%			0,6873	
2	1,000	0,777	1,000	40%				56%		0,8426	
3	1,000	0,895	1,699		27%	73%				0,5819	
4	1,000	0,857	1,676	35%		65%				0,5843	
5	1,000	0,857	1,676	35%		65%				0,5843	
6	0,639	0,857	1,500			100%				0,5681	Pólo PIR
7	0,639	0,857	1,500			100%				0,5681	Pólo PIR

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	21,80	5,60	4,00	21,80	5,60	4,00	0,00	0,00	0,00	0,6873	
2	36,00	5,44	4,00	36,00	5,44	4,00	0,00	0,00	0,00	0,8426	
3	36,00	6,27	6,80	36,00	6,27	6,80	0,00	0,00	0,00	0,5819	
4	36,00	6,00	6,70	36,00	6,00	6,70	0,00	0,00	0,00	0,5843	
5	36,00	6,00	6,70	36,00	6,00	6,70	0,00	0,00	0,00	0,5843	
6	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,5681	Pólo PIR
7	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,5681	Pólo PIR

Tabela 7.6 – Soluções do TRIMAP para o pólo de São Pedro da Aldeia

Solução	Soluções Trimap - PÓLO SÃO PEDRO DA ALDEIA									Eficiência IV	Observação (Alvo)
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$			
1	0,352	0,933	1,000			60%	40%			0,5391	
2	0,599	0,905	1,000	43%				57%		0,7086	
3	0,968	1,000	2,000	100%						0,4995	Pólo ARE
4	0,968	1,000	2,000	100%						0,4995	Pólo ARE
5	0,371	1,000	1,500			100%				0,4442	Pólo PIR

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	21,80	5,60	4,00	21,80	5,60	4,00	0,00	0,00	0,00	0,5391	
2	37,14	5,43	4,00	37,14	5,43	4,00	0,00	0,00	0,00	0,7086	
3	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,4995	Pólo ARE
4	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,4995	Pólo ARE
5	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,4442	Pólo PIR

Tabela 7.7 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Macaé

Solução	Soluções Trimap - PÓLO MACAÉ									Eficiência IV	Observação (Alvo)
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$			
1	0,731	0,900	1,000			40%	60%			0,7971	
2	1,000	0,885	1,000	22%		9%	69%			0,9190	
3	1,000	1,000	2,108	16%		84%				0,4744	
4	0,793	1,000	2,000			100%				0,4790	Pólo PIR
5	1,000	1,000	2,108	16%		84%				0,4744	
6	0,793	1,000	2,000			100%				0,4790	Pólo PIR

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	21,20	5,40	3,00	21,20	5,40	3,00	0,00	0,00	0,00	0,7971	
2	29,00	5,31	3,00	29,00	5,31	3,00	0,00	0,00	0,00	0,9190	
3	29,00	6,00	6,32	29,00	6,00	6,32	0,00	0,00	0,00	0,4744	
4	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,4790	Pólo PIR
5	29,00	6,00	6,32	29,00	6,00	6,32	0,00	0,00	0,00	0,4744	
6	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,4790	Pólo PIR

Tabela 7.8 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Três Rios

Solução	Soluções Trimap - PÓLO TRÊS RIOS							
	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1	0,353	0,675	1,000			40%	60%	
2	0,524	0,661	1,000	29%			71%	
3	1,000	0,844	2,755		76%	24%		
4	1,000	0,750	2,667	100%				
5	0,383	0,750	2,000			100%		
6	1,000	0,750	2,667	100%				
7	1,000	0,750	2,667	100%				
8	0,383	0,750	2,000			100%		

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	21,20	5,40	3,00	21,20	5,40	3,00	0,00	0,00	0,00	0,4882	
2	31,43	5,29	3,00	31,43	5,29	3,00	0,00	0,00	0,00	0,5866	
3	60,00	6,76	8,27	60,00	6,76	8,27	0,00	0,00	0,00	0,3535	
4	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,3505	Pólo ARE
5	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,3134	Pólo PIR
6	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,3505	Pólo ARE
7	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,3505	Pólo ARE
8	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,3134	Pólo PIR

Tabela 7.9 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Cantagalo

Solução	Soluções Trimap - PÓLO CANTAGALO							
	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1	0,515	0,743	1,000			20%	80%	
2	0,643	0,735	1,000	14%			86%	
3	1,000	0,907	3,520		35%	65%		
4	1,000	0,857	3,459	46%		54%		
5	0,575	0,857	3,000			100%		
6	0,575	0,857	3,000			100%		
7	1,000	0,857	3,459	46%		54%		

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	20,60	5,20	2,00	20,60	5,20	2,00	0,00	0,00	0,00	0,6118	
2	25,71	5,14	2,00	25,71	5,14	2,00	0,00	0,00	0,00	0,6854	
3	40,00	6,35	7,04	40,00	6,35	7,04	0,00	0,00	0,00	0,2810	
4	40,00	6,00	6,92	40,00	6,00	6,92	0,00	0,00	0,00	0,2819	
5	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,2618	Pólo PIR
6	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,2618	Pólo PIR
7	40,00	6,00	6,92	40,00	6,00	6,92	0,00	0,00	0,00	0,2819	

Tabela 7.10 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Saguarema

Solução	Soluções Trimap - PÓLO SAQUAREMA							
	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
1	0,338	0,867	1,000			20%	80%	
2	0,422	0,857	1,000	14%			86%	
3	0,984	1,000	4,000	100%				
4	0,984	1,000	4,000	100%				
5	0,377	1,000	3,000			100%		

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	20,60	5,20	2,00	20,60	5,20	2,00	0,00	0,00	0,00	0,5223	
2	25,71	5,14	2,00	25,71	5,14	2,00	0,00	0,00	0,00	0,5787	
3	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,2499	Pólo ARE
4	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,2499	Pólo ARE
5	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,2010	Pólo PIR

Tabela 7.11 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Campo Grande

Solução	Soluções Trimap - PÓLO CAMPO GRANDE									Eficiência IV	Observação (Alvo)
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$			
1	0,323	0,833	1,000						100%		Pólo SFR
2	0,323	0,833	1,000						100%		Pólo SFR
3	0,968	1,000	8,000	100%							Pólo ARE
4	0,371	1,000	6,000					100%			Pólo PIR
5	0,968	1,000	8,000	100%							Pólo ARE
6	0,371	1,000	6,000					100%			Pólo PIR

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	20,00	5,00	1,00	20,00	5,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,5067	Pólo SFR
2	20,00	5,00	1,00	20,00	5,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,5067	Pólo SFR
3	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,1247	Pólo ARE
4	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,0554	Pólo PIR
5	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,1247	Pólo ARE
6	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,0554	Pólo PIR

Tabela 7.12 – Soluções do TRIMAP para o pólo de Petrópolis

Solução	Soluções Trimap - PÓLO PETRÓPOLIS									Eficiência IV	Observação (Alvo)
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\phi_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$			
1	0,253	0,625	1,000						100%		Pólo SFR
2	0,253	0,625	1,000						100%		Pólo SFR
3	1,000	0,972	9,259			74%				26%	Pólo PIR
4	0,291	0,750	6,000					100%			Pólo PAR
5	0,911	0,875	9,000			100%					Pólo ARE
6	0,759	0,750	8,000	100%							Pólo ARE
7	0,759	0,750	8,000	100%							Pólo ARE
8	0,291	0,750	6,000					100%			Pólo PIR

Solução	Projeção da DMU			Alvos			Folga			Eficiência IV	Observação (Alvo)
	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1	Input 1	Input 2	Output 1		
1	20,00	5,00	1,00	20,00	5,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,4091	Pólo SFR
2	20,00	5,00	1,00	20,00	5,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,4091	Pólo SFR
3	79,00	7,78	9,26	79,00	7,78	9,26	0,00	0,00	0,00	0,1078	Pólo PIR
4	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,0116	Pólo PIR
5	72,00	7,00	9,00	72,00	7,00	9,00	0,00	0,00	0,00	0,1045	Pólo PAR
6	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,0913	Pólo ARE
7	60,00	6,00	8,00	60,00	6,00	8,00	0,00	0,00	0,00	0,0913	Pólo ARE
8	23,00	6,00	6,00	23,00	6,00	6,00	0,00	0,00	0,00	0,0116	Pólo PIR

A eficiência IV de cada uma das DMUs analisadas segundo cada ponto de projeção é apresentada na coluna “Eficiência IV”. Entretanto, os alvos apresentados pelo TRIMAP, assim como outros métodos para identificação de alvos alternativos em DEA, nem sempre permitem uma interpretação gerencial por dois motivos distintos:

- 1º) dizer que o alvo é formado por x % de uma DMU e y % de outra pode, em muitos casos, não fornecer um entendimento da solução e, assim, impedir sua implementação. Como exemplo, a solução 1 do pólo de Itaperuna apresenta um alvo formado por 60 % do pólo de Piraí e 40% do pólo de São Francisco do Itabapoana;

2º) os valores não inteiros das variáveis apresentados produzem soluções inviáveis de serem implementadas (LOZANO; VILLA, 2006; KAZEMI MATIN; KUOSMANEN, 2009; WU et al., 2010). Por exemplo, a solução 1 para o pólo de Itaperuna apresenta um número de alunos ingressantes no 2º semestre de 2005 igual 21,8 alunos e 5,60 tutores para que se atinja o número de 4 alunos formandos no 2º semestre de 2009.

Estas situações ocorrem para as soluções apresentadas em todos os pólos. Deve-se considerar, então, as soluções que apresentam o alvo formado por apenas uma DMU eficiente, ou seja, o alvo é formado por 100% da DMU eficiente. Por exemplo, nas soluções 6 e 7 para o pólo de Itaperuna (tabela 7.5), seu *benchmark* único é o pólo de Pirai. Estas soluções possuem valores inteiros das variáveis pois os *benchmarks* são pólos reais. Verificando estas soluções das tabelas 7.5 a 7.12, constrói-se a tabela 7.13. Esta tabela apresenta a eficiência IV das soluções em que os pólos eficientes são *benchmarks* únicos para pólos ineficientes.

Na tabela 7.13, as linhas representam os pólos ineficientes e as colunas representam os seus *benchmarks*, ou seja, os pólos eficientes. O valor da eficiência calculada pelo índice IV de cada um dos pólos ineficientes é representado então em relação ao seu respectivo *benchmark*. É importante destacar que estão relacionadas apenas as soluções dominadas do conjunto de dados, premissa para o cálculo de eficiência do índice IV.

Tabela 7.13 – Eficiências para as soluções dominadas do modelo MORO-D-R com *benchmark* único

Polo \ Alvo	ARE	PAR	PIR	SFR	VRE
ITA			0,5681		
SPE	0,4995		0,4442		
MAC			0,4790		
TRI	0,3505		0,3134		
CAN			0,2618		
SAQ	0,2499		0,2010		
CGR	0,1247		0,0554	0,5067	
PET	0,0913	0,1045	0,0116	0,4091	

Com os resultados da tabela 7.13, o gestor pode decidir o melhor *benchmark* para o pólo em análise verificando o valor da sua eficiência em relação a este *benchmark*. Como exemplo, o pólo de Petrópolis, que possui quatro *benchmaks* diferentes, pode decidir por adotar os valores de suas variáveis semelhantes às do pólo de São Francisco do Itabapoana, pois apresenta a maior eficiência do conjunto de soluções. O gestor possui ainda outras opções de escolha pois pode optar por um alvo com realidade mais próxima à sua, mesmo não sendo o alvo que produza a maior eficiência. No caso do CEDERJ, pode ser escolhido como alvo um pólo com dimensões parecidas com as do pólo em análise. Por exemplo, ainda em relação ao pólo de Petrópolis, uma outra escolha poderia ser o pólo de Paracambi que, apesar de apresentar a segunda maior eficiência, é um pólo com dimensões muito parecidas com as dimensões do pólo de Petrópolis, pois é mais apropriado aumentar o número de formandos.

É importante destacar que este método permite mais liberdade de escolha aos decisores na busca do alvo para a DMU.

É importante ressaltar ainda que a maior eficiência IV nem sempre ocorre quando uma DMU é projetada na DMU eficiente mais próxima, ou seja, na DMU extremo eficiente que possui a menor distância euclidiana para a DMU em análise. Para demonstrar este fato, a tabela 7.14 apresenta as distâncias euclidianas entre as coordenadas dos pólos ineficientes aos pólos eficientes que são seus respectivos *benchmarks*.

Tabela 7.14 – Distância euclidianas entre as coordenadas pólos ineficientes e eficientes

Polo	Alvo	ARE	PAR	PIR	SFR	VRE
ITA				0,0429		
SPE	0,0741			0,0667		
MAC				0,0562		
TRI	0,0953			0,0798		
CAN				0,0787		
SAQ	0,1111			0,0917		
CGR	0,1297			0,1079	0,0608	
PET	0,1344	0,1489		0,1242	0,0906	

Verifica-se, no caso do pólo de Petrópolis, que a maior eficiência IV ocorre quando este se projeta no pólo de coordenadas mais próximas, que é o pólo de São Francisco do Itabapoana. Entretanto, no caso do pólo de Saquarema, o pólo de coordenadas mais próximas

é o pólo de Pirai enquanto que a maior eficiência IV ocorre quando a projeção se dá no pólo de Angra dos Reis. Fato semelhante ocorre com o pólo de Três Rios.

O conhecimento do valor da eficiência IV permite a criação de *rankings* alternativos aos fornecidos pelos modelos DEA clássicos. Como exemplo, a tabela 7.5 apresenta a comparação entre o *ranking* do modelo DEA-BCC e o *ranking* formado pela melhor projeção, ou seja, a projeção da DMU no alvo que fornece a maior eficiência IV dentre os possíveis alvos não radiais.

Tabela 7.15 – *Rankings*

Sigla	Pólo	Eficiência BCC Output	Ordenação DEA BCC	Eficiência Vetorial	Ordenação índice vetorial
ARE	Angra dos Reis	1,0000	1	1,0000	1
PAR	Paracambi	1,0000	1	1,0000	1
PIR	Pirai	1,0000	1	1,0000	1
SFR	São Francisco do Itabapoana	1,0000	1	1,0000	1
VRE	Volta Redonda	1,0000	1	1,0000	1
ITA	Itaperuna	0,5886	6	0,5681	6
CGR	Campo Grande	0,1250	12	0,5067	7
SPE	São Pedro da Aldeia	0,5000	7	0,4995	8
MAC	Macaé	0,4744	8	0,4790	9
PET	Petrópolis	0,1080	13	0,4091	10
TRI	Três Rios	0,3630	9	0,3505	11
CAN	Cantagalo	0,2841	10	0,2618	12
SAQ	Saquarema	0,2500	11	0,2499	13

Analisando os dados da tabela 7.15, verifica-se que os pólos de Campo Grande e Petrópolis são os pólos que tiveram maior modificação do valor de sua eficiência a partir do momento que puderam alterar seu ponto de projeção na fronteira de eficiência. Este fato ocorre porque, com a utilização de alvos alternativos não radiais e o cálculo de sua eficiência com o índice IV, os pólos possuem diferentes opções para sua projeção. Assim, um pólo pode optar por se projetar em um alvo formado por um pólo eficiente com características mais parecidas às suas.

## 8 CONCLUSÕES

Os modelos DEA clássicos trabalham com projeções radiais das DMUs na fronteira de eficiência que consideram reduções equiporcionais dos *inputs* ou aumentos equiporcionais dos *outputs*. No entanto, em vários problemas é necessário que *inputs* (*outputs*) variem de valores de forma independente. Em DEA, este tipo de projeção é denominado não radial.

Para considerar estas variações não radiais, modelos de programação linear multiobjetivo vêm sendo desenvolvidos ao longo dos anos. Assim, apresentou-se uma revisão dos modelos multiobjetivos para determinação de alvos não radiais existentes e, ainda, o desenvolvimento do modelo multiobjetivo para determinação de alvos alternativos em DEA denominado MORO-D-R, que é uma variação do modelo MORO-D. A vantagem do modelo MORO-D-R, como apresentado, é diminuir o trabalho computacional, evitar inviabilidade do modelo e possui uma região viável maior que o modelo anterior. Além disso, os alvos são encontrados sem a necessidade de se estabelecer preferências do decisor como nos demais modelos apresentados.

Apesar disso, os modelos multiobjetivos não calculam o índice de eficiência da DMU analisada, o que impede um ranqueamento destas DMUs.

Desde que Farrell (1957) implementou a primeira medida de eficiência técnica, várias pesquisas desenvolveram novas medidas ou aprimoraram as medidas já existentes.

Vários são os índices desenvolvidos que buscam não só classificar as DMUs segundo a eficiência de Pareto-Koopmans, mas também aplicá-los a casos mais diversos. Entretanto, os modelos para o cálculo de eficiência não radial apresentados neste trabalho apresentam deficiências em suas utilizações, seja pela forma como foram desenvolvidos, utilizando médias aritméticas ou ponderadas, seja por restrições em sua utilização.

Buscando sanar estas deficiências, apresentou-se neste trabalho o desenvolvimento de um índice de eficiência que utiliza os conceitos de eficiência vetorial em sua formulação e calcular a eficiência de uma DMU quando se conhece o ponto de projeção, denominado índice IV.

Foram ainda definidas as propriedades que o índice IV deve satisfazer. Todas as propriedades do índice foram então demonstradas, validando a sua formulação.

Assim, uma integração do modelo multiobjetivo MORO-D-R para a determinação de alvos não radiais, alternativos aos alvos radiais fornecidos pelos modelos DEA clássicos com a formulação do índice IV permite calcular a eficiência de uma DMU segundo diversos alvos sobre a fronteira de eficiência.

Desta forma, é possível aos gestores, conhecer a eficiência de uma DMU em relação as DMUs Pareto-eficientes e determinar qual o melhor alvo para a DMU.

Este novo índice, integrado com o modelo multiobjetivo MORO-D-R proporciona, então, mais opções para determinação de alvos para as unidades produtivas ineficientes e o cálculo da eficiência em relação a estes alvos, permitindo um melhor entendimento das alternativas de solução por parte dos gestores, uma vez que se pode projetar as DMUs em alvos reais, ao invés de alvos virtuais fornecidos por outros modelos.

Um estudo de caso sobre a eficiência dos pólos do CEDERJ que formaram alunos no segundo semestre de 2009 foi apresentado, discutindo a vantagem e desvantagem da utilização do modelo DEA clássico e a integração do modelo MORO-D-R com o índice IV, que permitiu mais opções de *benchmarks* para as DMUs ineficientes e o estabelecimento de um *ranking* destas DMUs segundo a projeção no alvo que fornece a maior eficiência.

Como continuação deste trabalho, propõe-se:

- Incluir restrições ao modelo MORO-D-R que impeçam a determinação de alvos para uma DMU que forneça eficiência negativa;
- Analisar seu comportamento em modelos DEA-CCR.

## 9 BIBLIOGRAFIA

ABBOTT, M.; DOUCOULIAGOS, C. The efficiency of australian universities: A data envelopment analysis. *Economics of Education Review*, v. 22, n. 1, p. 89-97, 2003.

ABRAMO, G.; D'ANGELO, C. A.; PUGINI, F. The measurement of italian universities' research productivity by a non parametric-bibliometric methodology. *Scientometrics*. v. 76, n. 2, p. 225-244, 2008.

ANDRADE, F. V. S.; BRANDÃO, L. C.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B. Avaliação de um curso de matemática à distância com modelos DEA e seleção de variáveis. *Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção da UFF*, v. 9, p. 10, 2009.

ANGULO MEZA, L. *Um Enfoque Multiobjetivo para a Determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA)*. 2002. Tese (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

ANGULO MEZA, L. et al. *Modelling with self-organising maps and data envelopment analysis: A case study in educational evaluation*. Self Organizing Maps, New Achievements. 2011.

ANGULO MEZA, L. et al. *ISYDS – Integrated System for Decision Support (SIAD – Sistema Integrado de Apoio a Decisão): a software package for data envelopment analysis model*. *Pesquisa Operacional*, v. 25, n. 3, p. 493-503, 2005.

ANGULO MEZA, L.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; CLÍMACO, J. C. N. Estudos Conjuntos de Análise Envoltória de Dados (DEA) e Programação Linear Multiobjetivo (PLMO): Uma Revisão Bibliográfica. *Relatório de Pesquisa em Engenharia de Produção*, v.6, n.5, 2006.

ÁVILA, S. L. et al. Otimização - Conceitos Básicos, Ferramentas e Aplicações. *Revista de Automação e Tecnologia da Informação*. Florianópolis - Santa Catarina, v.2, n.1, p.70 - 75, 2003.

BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, v. 30, n. 9, pp. 1078-1092, 1984.

BREGALDA, P. A. O.; BORNSTEIN, C. *Introdução a Programação Linear*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1981.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Preface to Topics in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, v. 2, pp. 59-94, 1985.

\_\_\_\_\_. Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, v. 9, pp.181-186, 1962.

CHARNES, A. et al. Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. *Journal of Econometrics*, v. 30, pp. 91-107, 1985.

CHARNES, A. et al. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Application*. Kluwer Academic Publishers, 2. ed., Boston, 1994.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, pp. 429-444, 1978.

\_\_\_\_\_. Short Communication: Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, v. 3, p. 339, 1979.

CLÍMACO, J.; ANTUNES, C. H. TRIMAP - an interactive tricriteria linear programming package. *Foundations of Control Engineering*, vol. 12, pp. 101-119. 1987.

CLÍMACO, J.; ANTUNES, J. "Implementation of an user friendly software package – aguided tour of TRIMAP", *Mathematical and Computer Modelling*, v. 12, pp. 1299-1309, 1989.

CLÍMACO, J. C. N.; SOARES DE MELLO, J. C. C. B.; ANGULO MEZA, L. A study of highways performance with a MOLP-DEA model and an interactive tri-criteria linear programming package (TRIMAP). *Brazilian Journal of Operations and Production Management*, v. 7, n. 1, pp. 163-179, 2010.

\_\_\_\_\_. Performance measurement: From DEA to MOLP. In: ADAM, Frederic; HUMPHREYS, Patrick. (Org.). *Encyclopedia of decision making and decision support technologies*. Hershey: Information Science Reference, v. 2, p. 709-715, 2008.

COELLI, T. J. Recent Development in Frontier Modelling and Efficiency Measurement. *Australian Journal Agricultural Economics*, 39 (39), pp. 219-245, 1995.

COELLI, T.; PRASADA RAO, D. S.; BATTESE, G. E. *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998.

COOPER, W. W.; PASTOR, J. T. *Global Efficiency Measurement in DEA*. Working Paper, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante, Alicante, Espanha, 1995.

COOPER, W. W.; PARK, K. S.; PASTOR, J. T. RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *The Journal of Productivity Analysis*, v. 11, n. 1, pp. 5-42, 1999.

DEBREU, G. The Coefficient of Resource Utilization. *Econometrica*, v. 19, n. 3, pp. 273-292, 1951.

DULÁ, J. H. Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, p. 165-182, 2002.

FÄRE, R. Efficiency and the Production Function. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, v. 35, pp. 317-324, 1975.

FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C. A. K. *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston, Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.

FÄRE, R.; LOVELL, C. A. K. Measuring the Technical Efficiency of Production. *Journal of Economic Theory*, v. 19, n. 1, pp. 150-162, 1978.

FÄRE, R.; LOVELL, C. A. K.; ZIESCHANG, K. Measuring the Technical Efficiency of Multiple Output Production Technologies. In: EICHHORN, W.; HENN, R.; NEUMANN, K.; SHEPHARD, R. W. (eds), *Quantitative Studies on Production and Prices*, Würzburg and Vienna, Physica-Verlag, 1983.

FARRELL, M. J. The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of Royal Statistical Society Series A*, v.120, n. 3, pp. 253-281, 1957.

GOMES JÚNIOR et al. Equivalências em modelos MOLP-DEA que fornecem bechmarks para unidades ineficientes – o modelo MORO-D-R. *Revista Ingepro*, v. 2, n. 3, pp. 14-24, 2010.

GONZALEZ-ARAYA, M. C. *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. Tese (Doutorado). Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

KAZEMI MATIN, R. A.; KUOSMANEN, T. B. *Theory of integer-valued data envelopment analysis under alternative returns to scale axioms*. *Omega*, v. 37, n. 5, pp. 988-995, 2009.

KOOPMANS, T. C. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. In: KOOPMANS, T. C. (ed), *Activity Analysis of Production and Allocation*. chapter 3, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc, 1951.

KORHONEN, P.; WALLENIIUS, J. "A Pareto Race", *Naval Research Logistics*, v. 35, pp. 615-623, 1988.

KORNBLUTH, J. S. H. Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in MOLP. *Operational Research Quarterly*, v. 25, n. 4, pp. 599-614, 1974.

LINS, M. P. E.; ANGULO MEZA, L. *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, 2000.

LINS, M. P. E.; ANGULO MEZA, L.; MOREIRA DA SILVA, A. C. A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 55, pp. 1090–1101, 2004.

LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. *Programação Linear com aplicações em Teoria dos Jogos e Avaliação de Desempenho*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

LOBIANCO, A. T. M.; ANGULO MEZA, L. Uma Proposta para Determinação de Rankings no Ensino Superior Utilizando a Análise Envoltória de Dados. *XL SBPO-Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, João Pessoa, 2008.

LOVELL, C. A. K. Production Frontier and Productive Efficiency. In: FRIED, H. O.; LOVELL, C. A. K.; SCHMIDT, S. S. *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. Oxford University Press, New York, Cap. 1, pp. 3-67, 1993.

LOZANO, S. A. B.; VILLA, G. A. Data envelopment analysis of integer-valued inputs and outputs. *Computers and Operations Research*, v. 33, n. 10, pp. 3004-3014, 2006.

METEV, B.; GUEORGUIEVA, D. A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems. *European Journal of Operational Research*, vol. 126, n. 2, pp. 386-390, 2000.

MUKHERJEE, J. *Productivity and Measurement Issues: An Application to Brazilian Agriculture*. Tese (Doctor Philosophy), Rice University, Houston, April, 1997.

NIJKAMPB, P.; SUZUKIA, S. A generalized goals-achievement model in data envelopment analysis: An application to efficiency improvement in local government finance in Japan. *Spatial Economic Analysis, Taylor and Francis Journals*, v. 4, n. 3, pp. 249-274, 2009.

PASTOR, J. T.; RUIZ, J. L.; SIRVENT, I. An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure. *European Journal of Operational Research*, v. 115, pp. 596-607, 1999.

PEREIRA, M. F. *Mensuramento de Eficiência Multidimensional utilizando Análise de Envolvimento de Dados: Revisão da Teoria e Aplicações*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 1995.

QUARIGUASI FROTA NETO, J.; ANGULO MEZA, L. Alternative targets for data envelopment analysis through multi-objective linear programming: Rio de Janeiro Odontological Public Health System Case Study. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 58, n. 7, pp. 865–873, 2007.

ROMERO, C. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Editorial S.A., Madrid, Espanha, 1993.

RUGGIERO, J. Measuring technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, v. 121, pp. 138-150, 2000.

RUGGIERO, J.; BRETSCHEIDER, S. The Mighthed Russell Measure of Technical Efficiency. *European Journal of Operational Research*, v. 108, pp. 438-451, 1998.

RUSSELL, R. R. Measures of Technical Efficiency. *Journal of Economic Theory*, v. 35, pp. 109-126, 1985.

SEIFORD, L. M.; THRALL, R. M. Recent Developments in DEA: The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v. 46, n. (1/2), pp. 7-38, October/November, 1990.

SENRA, L. F. A. D. C. et al. Estudo sobre métodos de seleção de variáveis em DEA. *Pesquisa Operacional*, v. 27, n. 2, p. 191-207, 2007.

SEXTON, T. R. Measuring Efficiency: An assessment of Data Envelopment Analysis. *New Directions For Program Evaluation*. San Francisco: Jossey-Bass, vol. 1986, n. 32, pp. 73-105, 2004.

SILVEIRA, J. Q. et al. Avaliação da eficiência das companhias aéreas brasileiras com uma variação do modelo de Li e Reeves. *Engevista*, v. 10, n. 2, pp. 145-155, 2008.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B. et al. Alguns paradoxos em modelos DEA-BCC: eficiências negativas e inexistência de retornos de escala. *Anais do XXVIII ENEGEP - Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Rio de Janeiro, 2008.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B. et al. Limites para eficiências não radiais em DEA: uma abordagem vectorial. *Investigação Operacional*, Lisboa, v. 25 n.2, pp. 243-252, 2005.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B. et al. Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, vol. 23, n. 2, pp. 325-345, 2003.

SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; CLÍMACO, J.C.N.; ANGULO MEZA, L. Efficiency evaluation of a small number of DMUs: an approach based on Li and Reeves s model. *Pesquisa Operacional*, v. 29, n. 1, pp. 97-110, 2009.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B., ESTELLITA LINS, M. P., GOMES, E. G. Construction of a smoothed DEA frontier. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, pp. 183-201, 2002.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B. et al. Engineering post-graduate programmes: a quality and productivity analysis. *Studies in Educational Evaluation*, v.32, n.2, pp. 136-152, 2006.

SOUZA, P. O.; ANGULO MEZA, L. Uma Pesquisa sobre Índices Não Radiais na Análise Envoltória de Dados. *IX SPOLM-Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha*, pp. 27-41, Rio de Janeiro, 2006.

STEUER, R. E. *Operating Manual for the ADBASE Multiple Objective Linear Programming Package*. Terry College of Business, University of Georgia, Athens, Georgia, 1983.

SUEYOSHI, T.; SEKITANI, K. Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach. *European Journal of Operational Research*, 2006.

TAKAHASHI, R. H. C. *Otimização Escalar e Vetorial, Volume 3: Otimização Vetorial*. Notas de aula. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

THANASSOULIS, E.; DYSON, R. G. Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 56, pp. 80-97, 1992.

THANASSOULIS, E. *Introduction to the Theory and Applications in Data Envelopment Analysis: A Foundation Text with integrated Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 2001.

TONE, K. A Slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 130, pp. 498-509, 2001.

WU, J.; LIANG, L.; CHEN, Y. *DEA game cross-efficiency approach to Olympic rankings*. *Omega*, v. 37, 4, pp. 909-918, 2009.

WU, J.; ZHOU, Z.; LIANG, L. Measuring the Performance of Nations at Beijing Summer Olympics Using Integer-Valued DEA Model. *Journal of Sports Economics*, v. 11, n. 5, pp. 549-566, 2010.

ZELENY, M. Compromise Programming. In: COCHRANE, J. L.; ZELENY, M. (eds). *Multiple Criteria Decision Making*. University of South Carolina Press. Columbia, pp. 262-301, 1973.

ZHU, J. Data Envelopment Analysis with Preference Structure. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, pp. 136-150, 1996.

ZIESCHANG, K. An Extended Farrell Efficiency Measure. *Journal of Economic Theory*, v. 33, n. 2, pp. 387-396, 1984.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)