

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

APLICAÇÃO DE *WAVELETS* NO MÉTODO DOS MOMENTOS

LARIANA LUY PEIXOTO

BLUMENAU

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LARIANA LUY PEIXOTO

APLICAÇÃO DE *WAVELETS* NO MÉTODO DOS MOMENTOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Regional de Blumenau, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. Dr. Orlando José Tobias – Orientador
Prof. Dr. Marcelo Grafulha Vanti – Co-orientador

BLUMENAU

2010

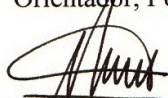
APLICAÇÃO DE WAVELETS NO MÉTODO DOS MOMENTOS

LARIANA LUY PEIXOTO

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Energia, Linha de Pesquisa em Eletromagnetismo Aplicado, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Regional de Blumenau.

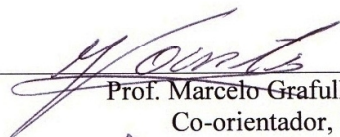
In memoriam

Prof. Orlando José Tobias, Dr.
Orientador, FURB

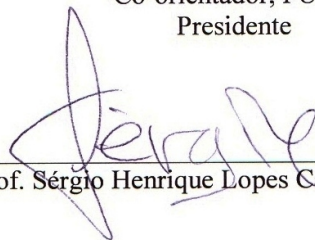


Prof. Adriano Péres, Dr., FURB
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



Prof. Marcelo Grafulha Vanti, Dr.
Co-orientador, FURB
Presidente



Prof. Sérgio Henrique Lopes Cabral, Dr., FURB



Prof. Elen Macedo Lobato Merlin, Dra., IFSC

Blumenau, Agosto de 2010

*À memória do mestre e grande amigo Prof. Dr.
Orlando José Tobias.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao amigo e orientador, Dr. Orlando José Tobias (*in memoriam*) pelos conselhos que foram dados durante toda a graduação e mestrado, e por não medir esforços para incentivar e acompanhar as pesquisas geradas pelo GEATel. Sua falta será irreparável para todos nós que estivemos juntos dele e que levaremos seus conselhos para nossas vidas.

Agradeço ao professor Dr. Marcelo Grafulha Vanti, por não negar em nenhum momento auxílio no trabalho quando precisei. Fez o grande papel de orientador quando foi necessário, e tornou o término deste trabalho possível. Aos professores Dr. Adriano Péres e Dr. Sérgio Vidal Garcia Oliveira por acompanhar e incentivar a produção deste trabalho. À Universidade Regional de Blumenau e ao Departamento de Engenharia Elétrica e de Telecomunicações, por tornar a realização deste curso possível.

Agradeço à minha mãe, Gilce Luy Peixoto, pela dedicação incondicional e por mostrar que eu seria realmente capaz de atingir mais este objetivo em minha vida. Aos meus irmãos, sobrinha, tios, primas e principalmente, à minha avó, Nair da Silva Luy, pelo orgulho que demonstram por acompanhar mais esta etapa.

Ao meu amor, Felipe Beutling pelo incentivo, amor, carinho e por não permitir que eu desistisse em momento algum. Por me acompanhar nos momentos mais difíceis e fazer parte da minha vida a cada instante. A toda a família Beutling pelo apoio e estadia durante todo o curso.

Agradeço aos meus amigos que de alguma forma fizeram parte deste projeto, em especial minha amiga Phâmella Reinert Tamanini, por todas as vezes que trabalhou sozinha para que eu pudesse cumprir meus compromissos com a Universidade e aos amigos de laboratório Ciro André Pitz, Bruno Wisintainer e Fabrício DuPont.

Ao amigo Miguel Filippi pelo apoio, esforço e clareza para auxiliar-me em momentos que tive dúvidas na produção deste trabalho, e por nunca se negar a me ajudar quando precisei.

Agradeço também, aos senhores Daniel Busnardo e Dilnei Timm Klasen por entender a importância deste projeto para a minha formação e permitir que o andamento do meu trabalho conciliasse com minha jornada profissional.

RESUMO

Este trabalho demonstra a aplicação das funções *wavelet* para resolução de problemas eletrostáticos, através do método dos momentos. As funções *wavelets* serão utilizadas para reduzir a complexidade computacional na resolução de sistemas de equações lineares. Para que essa redução seja possível, foi realizada a descrição do método de Galerkin, utilizando funções *wavelets* como função de expansão e função de teste, tornando as matrizes do problema esparsas. Através das ferramentas de simulações corretas, a esparsidade da matriz é utilizada adequadamente, tornando os resultados esperados possíveis. Serão desenvolvidas três aplicações para a demonstração do método, utilizando funções *wavelets* unidimensionais e bidimensionais, que serão descritas no trabalho. Como resultado, serão apresentadas as diferenças entre o tempo de resolução da equação linear e entre as saídas do problema, com a utilização do método dos momentos tradicional e o método utilizando as funções *wavelet*, destacando a vantagem da utilização do método proposto.

PALAVRAS-CHAVE: matriz esparsa, método dos momentos, *wavelets*.

ABSTRACT

This work presents the application of wavelet functions in the simulation of electromagnetic phenomena through the method of moments. These functions are used aiming the reduction of computational complexity in the solution of linear equation systems. To make this possible, the Galerkin procedure was applied using wavelets as expansion and weighting functions, converting the matrices of the problem, which were originally full, into sparse matrices. Through the correct simulation tools the matrix sparsity is properly handled, making the expected results possible. Three applications of the proposed method are developed, using one-dimensional and two-dimensional procedures which are described in the work. The results section shows the differences between the processing time in the solution of linear equations using the traditional method of moments and wavelet-like method, highlighting the advantages of it.

KEYWORDS: method of moments, sparse matrices, wavelets

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Parâmetro de escala da transformada contínua de <i>Wavelet</i> .
b	Parâmetro de translação da transformada contínua de <i>Wavelet</i> .
j	Parâmetro de escala da transformada discreta de <i>Wavelet</i> .
k	Parâmetro de translação da transformada discreta de <i>Wavelet</i> .
ψ	Função <i>Wavelet</i> .
ϕ	Função escala ou <i>scalet</i> .
S_j	Subespaço formado por <i>scalets</i> .
W_j	Subespaço formado por <i>wavelets</i> .
d_n^m	Coefficientes gerados pela projeção de uma função sobre o subespaço W_j .
c_n^m	Coefficientes gerados pela projeção de uma função sobre o subespaço S_j .
Ψ	Matriz <i>Wavelet</i> .
L	Operador.
f_n	Função de expansão.
w_m	Função de teste.
Γ_L	Densidade linear de carga.
Δ	Comprimento de um segmento.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – <i>Wavelet</i> -mãe de Haar	17
Figura 2 – <i>Wavelet</i> -pai de Haar.....	18
Figura 3 – <i>Wavelet</i> Chapéu Mexicano	19
Figura 4 – <i>Wavelet</i> de Morlet.....	19
Figura 5 – Amplitude e período da <i>wavelet</i> dependente de j	20
Figura 6 - <i>Wavelet</i> Haar $\psi_{1,1}$	21
Figura 7 – <i>Wavelets</i> de Haar escalonadas e transladadas.	22
Figura 8 – Subespaços S_j	23
Figura 9 – Função escala composto por componentes de S_{j+1}	24
Figura 10 - <i>Wavelet</i> -mãe composta por membros do subespaço S_1	24
Figura 11 – Subespaços S_j e seus complementos W_j	25
Figura 12 – Contribuição das <i>wavelets</i> e <i>scalet</i> sobre um fio.....	32
Figura 13 – Contribuição das <i>wavelets</i> em um problema de placa plana.....	36
Figura 14 – Distribuição das seções da matriz esparsa.	37
Figura 15 – Fio reto finito onde será determinada a densidade de carga	40
Figura 16 – Capacitor de placas paralelas.	41
Figura 17 – Dois segmentos de fio.....	44
Figura 18 – Número de elementos não nulos da matriz $[Z_{mn}]$ tradicional.	46
Figura 19 – Número de elementos não nulos da matriz $[Z_{mn}]$ com aplicação de <i>wavelets</i> no método de Galerkin.	47
Figura 20 – Densidade linear de carga sobre o fio reto, encontrada pelo método tradicional..	48
Figura 21 – Densidade linear de carga sobre o fio reto, encontrada com a utilização de <i>wavelets</i> no pré-processamento da matriz.	48
Figura 22 – Matriz $[Z_{mn}]$ com a utilização de <i>wavelets</i> com limiar de 0,01%.....	50
Figura 23 - Matriz $[Z_{mn}]$ com a utilização de <i>wavelets</i> com limiar de 0,1%.....	50
Figura 24 – (a) Densidade superficial de carga sobre a placa superior utilizando método dos momentos tradicional, (b) Densidade superficial de carga sobre a placa superior utilizando <i>wavelets</i>	51
Figura 25 – Distribuição de corrente em uma antena dipolo de meia onda.	52

Figura 26 – Corrente sobre a antena com 1024 subdivisões para (a) método dos momentos tradicional e (b) utilizando pré-processamento.....	54
Figura 27 – Matriz $[Z_{mn}]$ pré-processada para 1024 elementos.	54
Figura 28 - Matriz $[Z_{mn}]$ pré-processada para 2048 elementos.	55
Figura 29 - Corrente sobre a antena com 2048 subdivisões para (a) método dos momentos tradicional e (b) utilizando pré-processamento.....	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Período e localização da <i>wavelet</i> dependente de j e k	21
Tabela 2 - Amplitude da <i>wavelet</i> dependente de j	21
Tabela 3 - Número de elementos não nulos em cada linha de Ψ	33
Tabela 4 - Número de elementos não nulos da matriz Ψ comparado ao número de linhas....	33
Tabela 5 - Comparativo entre número total de elementos e número de elementos não nulos dependente do número de linhas da matriz Ψ	34
Tabela 6 - Comparativo do valor de carga e tempo de resolução da equação linear para cada caso.	45
Tabela 7 - Comparativo do vetor de densidade de carga.....	46
Tabela 8 - Resultado encontrado para análise de 2048 pontos, quanto ao valor da carga total e tempo de resolução da equação linear.	49
Tabela 9 - Resultado encontrado para análise de 1024 pontos, quanto ao valor da carga total, capacitância e tempo de solução da equação linear, para placas paralelas.....	49
Tabela 10 - Densidade de carga em uma placa plana com 16 subdivisões.	51
Tabela 11 - Resultado encontrado para análise de 1024 e 2048 pontos, quanto ao valor da impedância de entrada e tempo de resolução da equação linear.....	53
Tabela 12 - Corrente sobre uma antena com 16 subdivisões.....	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	WAVELETS.....	16
2.1	INTRODUÇÃO	16
2.2	CONCEITOS BÁSICOS	16
2.2.1	<i>Wavelet</i> de Haar	17
2.2.2	<i>Wavelet</i> Chapéu Mexicano	18
2.2.3	<i>Wavelet</i> de Morlet	19
2.3	DISCRETIZAÇÃO	19
2.4	ANÁLISE DE MULTIRESOLUÇÃO	22
2.5	TRANSFORMADA DE <i>WAVELET</i>	25
2.6	CONCLUSÃO	26
3	WAVELETS, FUNÇÕES DE BASE E O MÉTODO DOS MOMENTOS.....	27
3.1	MÉTODO DOS MOMENTOS.....	27
3.2	PRÉ-PROCESSAMENTO	28
3.3	MATRIZ <i>WAVELET</i>	31
3.3.1	<i>Wavelets</i> unidimensionais.....	34
3.3.2	<i>Wavelets</i> bidimensionais	35
3.4	CONCLUSÃO	38
4	APLICAÇÕES E RESULTADOS	39
4.1	INTRODUÇÃO	39
4.2	DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS SIMULADOS PELO MÉTODO DOS MOMENTOS E MÉTODO DE GALERKIN	39
4.2.1	Cálculo da densidade linear de carga em um fio reto finito	39
4.2.2	Cálculo de capacitância entre placas paralelas	40
4.2.3	Cálculo de corrente em antenas dipolo.....	42
4.3	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS	45
4.3.1	Cálculo da densidade linear de carga em um fio reto finito	45
4.3.2	Cálculo de capacitância entre placas paralelas	49
4.3.3	Cálculo de corrente em antenas dipolo.....	51
5	CONCLUSÃO.....	56
6	REFERÊNCIAS.....	57

1 INTRODUÇÃO

A aplicação de métodos numéricos à solução de problemas físicos tem progredido consideravelmente nas últimas décadas devido à evolução dos métodos de matemática aplicada e dos sistemas informáticos de processamento. No caso específico do eletromagnetismo computacional em baixa e alta frequência, técnicas como o método das diferenças finitas [1], método dos momentos [2] e método dos elementos finitos [3] são amplamente utilizados. Os dois últimos métodos pertencem à categoria dos métodos variacionais e uma das características fundamentais comum a ambos é a utilização de funções de base e funções de peso, ou de teste, que devem ser selecionadas cuidadosamente para obter soluções computacionais confiáveis e de forma eficiente [4][5][6]. Além disso, os métodos variacionais levam à formação de sistemas matriciais cuja dimensão depende da extensão do problema físico simulado. A resolução destes sistemas constitui uma fase delicada no cálculo da solução desejada, pois dependendo das características da matriz resultante, como grau de preenchimento, dimensão e número de condição, o processo de inversão pode vir a ser grande consumidor de recursos computacionais, memória e processamento, e a solução pode conter erros acima dos valores aceitáveis.

Do ponto de vista da modelagem computacional, o método dos momentos é particularmente adequado para a simulação de problemas baseados em equações integro-diferenciais em domínio aberto [7], sendo largamente utilizado para obtenção da distribuição de correntes em antenas do tipo dipolo[8][9]. Entretanto, as matrizes de impedância construídas com este método são cheias em oposição ao método dos elementos finitos que leva a formação de matrizes de rigidez esparsas e predominantemente diagonais. A resolução de sistemas baseados em matrizes cheias por métodos diretos exige complexidade computacional da ordem de N^6 , sendo N o número de elementos da matriz em uma dimensão [9], enquanto que para resolução dos sistemas matriciais gerados pelo método dos elementos finitos o tempo de solução depende de $3N^3 \ln(N)$ [10].

Assim, torna-se essencial o estudo de técnicas que permitam que estas matrizes sejam transformadas em matrizes esparsas, sem que isto leve a uma diminuição da precisão do resultado final. Uma das técnicas que tem sido desenvolvida nos últimos anos propõe a utilização de funções *wavelets* como funções de base ou de teste, ou

ambas, tendo por resultado a formação de matrizes de impedância esparsas e fortemente diagonais [11], [12], [13], [14], [15].

As funções *wavelets* ortogonais vêm sendo aplicadas com grande sucesso em diversas áreas da engenharia, tais como, processamento de sinais, visão computacional. GALVÃO et al. [16] discutem as relações entre a Transformada de Fourier e a Transformada de *Wavelet* para filtragem de sinais instrumentais. O estudo elucida as limitações da Transformada de Fourier, como, por exemplo, a incapacidade de realizar uma análise diferenciada em diferentes trechos do sinal. Os autores também apresentam as vantagens da utilização da Transformada de *Wavelet* neste tipo de aplicação.

Em 1930 foi realizado um estudo do movimento Browniano no qual foi possibilitado pela aplicação da Transformada de *Wavelet* [17]. Após a década de 60 vários pesquisadores desenvolveram seus trabalhos nesta área, como Grossman e Morlet que definiram as *wavelets* no contexto da física quântica, e Ingrid Daubechies [18], que construiu uma série de funções base ortonormais de *wavelet*. Nesta referência encontram-se os conceitos de função base e funções base de escala variável [17]. Em [19] as *wavelets* são aplicadas na redução de ruídos em sinais, compressão e detecção de borda de imagens.

BERNAL et al. [20] utilizam a Transformada de *Wavelet* no algoritmo LMS aplicado à série de Volterra, ao trabalhar com filtros adaptativos. Este estudo tem como objetivo aumentar a velocidade de convergência do algoritmo através da capacidade de concentração de energia das *wavelets*.

Entre as propriedades atraentes da Transformada de *wavelet*, estão a análise de multiresolução (AMR), a ortogonalidade e a capacidade de localização simultaneamente no domínio do tempo e da frequência [21].

A análise de multiresolução é discutida em AKANSU e HADDAD [22], onde os autores ilustram a utilização de algumas famílias de *wavelet* como função de base, tais como as *wavelets* de Shannon, Coiflet e Daubechies. O suporte natural para AMR e suas propriedades de localização nos domínio espectral e temporal, além de possuírem momento zero [10], fazem com que a utilização de *wavelets* proporcione a formação de sistemas esparsos de equações lineares algébricas [23].

Entre as famílias de *wavelets* conhecidas a *wavelet* de Haar é a mais simples e pode ser estudada sem maiores pré-requisitos matemáticos [19]. A aplicação das *wavelets* de Haar ao pré condicionamento de matrizes de impedância no método dos momentos é discutida em [11] e [12], onde as *wavelets* são utilizadas conjuntamente

com o método *point-matching* na resolução de problemas eletrostáticos. Pode ser mostrado que a utilização de *wavelets* de Haar como funções de teste e funções de base no método de Galerkin conduz a um sistema linear no qual uma matriz de impedância Z é pré multiplicada por uma matriz de coeficientes de *wavelets* de Haar e pós multiplicada pela transposta da mesma matriz [24]. A matriz de impedância resultante é análoga àquela que é obtida com o uso da função generalizada delta de Dirac, como função de teste, em um método conhecido como *point-matching* [25]. Este fato pode ser explorado de forma que o método dos momentos seja implementado utilizando a técnica de *point-matching*, com simplicidade consideravelmente maior com o uso do método de Galerkin, e a realização de um pré processamento com a matriz de coeficientes de Haar [24], [11], [12]. O número de termos não nulos da matriz de *wavelets* é proporcional a $N \cdot \log(N)$ e a matriz pré processada será evidentemente esparsa com número de elementos não nulos da mesma ordem que a matriz de *wavelets* [26].

Neste trabalho são utilizados os conceitos da teoria de *wavelets* na formação de matrizes esparsas para a aplicação do método dos momentos na solução de problemas eletrostáticos e de antenas. Algumas propriedades importantes do uso do método de Galerkin com *wavelets* de Haar serão cuidadosamente discutidas, assim como os efeitos da esparsidade do sistema linear resultante. Assim, pode-se citar como objetivos específicos:

- Estudos das propriedades fundamentais das funções *wavelet*.
- Estudar as consequências da utilização de funções *wavelet* de Haar como função de base e de teste no método dos momentos. Demonstrar que neste caso o método de Galerkin é análogo ao pré processamento da matriz de impedâncias do método de *point-matching*.
- Analisar a esparsidade da matriz de coeficientes de *wavelet* de Haar e seu impacto no custo computacional na solução do sistema linear algébrico.
- Resolver problemas de irradiação de antenas com o programa implementado com o método dos momentos utilizando *wavelets* de Haar.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 serão apresentadas as propriedades das *wavelets* e suas transformadas. O capítulo 3 é apresentado o método de Galerkin e sua utilização no método dos momentos. No capítulo 4 são apresentados os problemas os quais são resolvidos com o método dos momentos proposto neste trabalho e os resultados obtidos são discutidos.

2 WAVELETS

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as propriedades básicas das funções *wavelet*, de maneira a fundamentar a sua aplicação na solução de problemas matriciais como será mostrado nos capítulos subsequentes. A formação da matriz *wavelet* de Haar é descrita juntamente com a análise da esparsidade desta matriz, a qual permite a transformação de um sistema algébrico cheio em um sistema esparso.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS

O termo *wavelet* deriva do francês, *Ondelette*, que significa pequena onda [27]. Como o próprio nome evidencia, *wavelets* são pequenas ondas que concentram energia em uma pequena região. Além disso, para que uma função possa ser classificada como *wavelet* ela deve ser quadraticamente integrável, ou seja, possuir energia finita de forma que a função possa ser usada para analisar e depois reconstruir um sinal sem perda de informação. Em outras palavras, a transformada de Fourier da função *wavelet* $\Psi(w)$ deve satisfazer a seguinte condição de admissibilidade [28]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty \quad (2.1)$$

A condição de admissibilidade implica que a função $\Psi(w)$ se anule na frequência zero, ou seja, não possua nível d.c. [29].

$$|\Psi(w)|_{w=0}^2 = 0 \quad (2.2)$$

Isto também significa que o valor médio da função *wavelet* do domínio do tempo é nulo, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 0, \quad (2.3)$$

e a função *wavelet* é portanto, realmente uma onda.

As *wavelets* são compostas por três tipos de funções: a *wavelet*-mãe, a *wavelet*-pai (*scalet*) e as *wavelet*-filhas. A *wavelet*-mãe e as *wavelet*-filhas são relacionadas pela seguinte equação:

$$y_{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} y\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.4)$$

onde y é a *wavelet*-mãe escolhida para a aplicação desejada, a é o fator de escala e b é o fator de translação. As versões transladadas pelo parâmetro b e com mudança de escala definem as *wavelet*-filhas. O parâmetro de escala tem como objetivo a representação de um sinal, ou parte dele, em resoluções diferentes e a escala é inversamente proporcional à frequência de determinado sinal, ou seja, quanto maior a escala, menor será a frequência representada. O parâmetro de translação desloca as *wavelets* em cada escala, sobre o sinal a ser analisado. A *wavelet*-pai, ou *scalet*, possui formulação similar à equação (2.4), considerando a função utilizada diferente daquela utilizada para *wavelet*-mãe e *wavelets*-filhas. A *scalet* apresenta o nível d.c. do sinal a ser analisado.

Entre as diversas famílias de *wavelets* conhecidas, podem-se citar *Wavelet* de Haar, *Wavelet* Chapéu Mexicano e *Wavelet* de Morlet, que serão brevemente descritas abaixo.

2.2.1 *Wavelet* de Haar

A *wavelet* de Haar é conhecida como a mais simples das *wavelets*, pois utiliza como função base para a *wavelet*-mãe e *wavelet*-pai, a função degrau e o pulso respectivamente. Esta *wavelet* é descrita como segue e pode ser vista na figura 1:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (2.5)$$

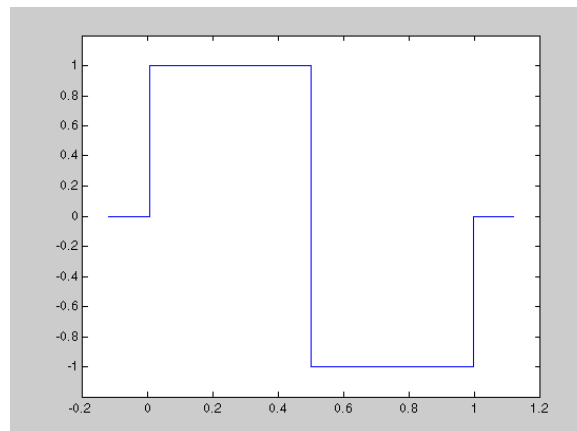


Figura 1 – *Wavelet*-mãe de Haar

Já a função *scalet* (figura 2) de Haar pode ser descrita como:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \quad (2.6)$$

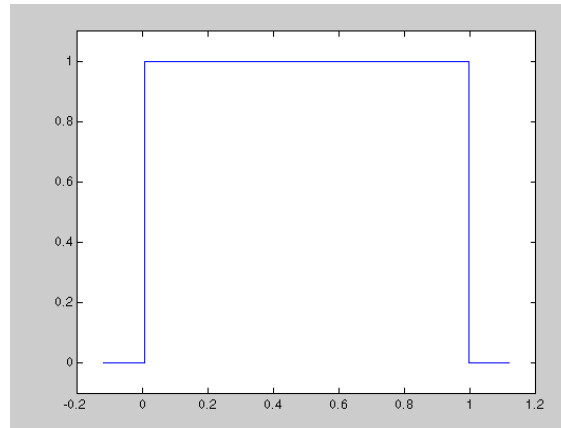


Figura 2 – Wavelet-pai de Haar

A *wavelet* de Haar é utilizada como função de base e função de teste no método dos momentos neste trabalho.

2.2.2 Wavelet Chapéu Mexicano

A *Wavelet* “Chapéu Mexicano” tem este nome devido a forma da função que ela descreve, conforme mostrado na Fig. 3. Esta família é composta apenas pela *wavelet*-mãe e suas derivadas, não existindo então uma função *scalet* (ou *wavelet*-pai). Sua *wavelet*-mãe pode ser escrita como:

$$y_{MH}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2.7)$$

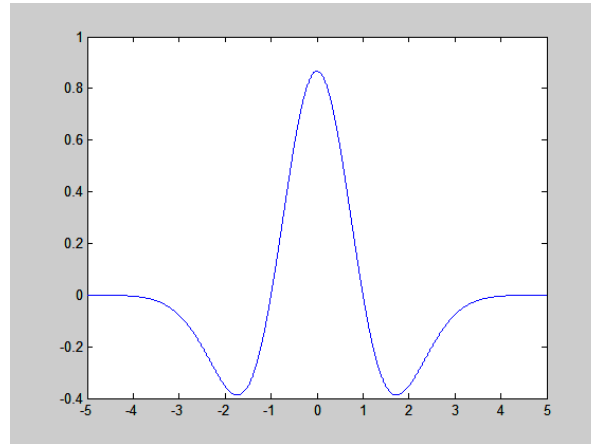


Figura 3 – Wavelet Chapéu Mexicano

2.2.3 Wavelet de Morlet

A *wavelet* Morlet (figura 4), a qual foi uma das primeiras *wavelets* exploradas para o propósito de processamento de sinais, é composta por valores complexos, e descrita como [28]:

$$y_M(t) = \rho^{-\frac{1}{4}} \left(e^{-jat} - e^{-\frac{a^2}{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \left(a = \rho \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} \right) \quad (2.8)$$

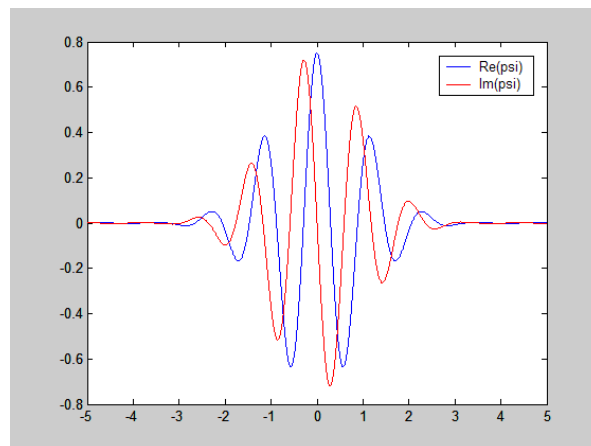


Figura 4 – Wavelet de Morlet

2.3 DISCRETIZAÇÃO

Na sequência deste trabalho serão analisadas da *wavelet* de Haar e sua aplicação como função de base no método dos momentos. As funções *wavelet*-mãe, *scalet* e *wavelet*-filhas são dadas, respectivamente, pelas equações (2.4), (2.5) e (2.6). Para a

discretização em alta resolução, o parâmetro de escala é definido como $a = 2^{-j}$ e o parâmetro de translação é igual a $b = k 2^{-j}$, os quais substituídos na equação (2.4) conduzem à

$$y_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} y(2^j t - k), \quad (2.9)$$

onde j e k são inteiros, j denota o nível (ou escala) e k o deslocamento (ou translação).

Analogamente, a *wavelet*-pai pode ser escrita, para um determinado nível j e deslocamento k , como:

$$f_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j t - k) \quad (2.10)$$

Na figura 5 é ilustrada a *wavelet*-filha com amplitude $2^{\frac{j}{2}}$ e transladada por $t = \frac{1+2k}{2^{j+1}}$ e período 2^{-j} .

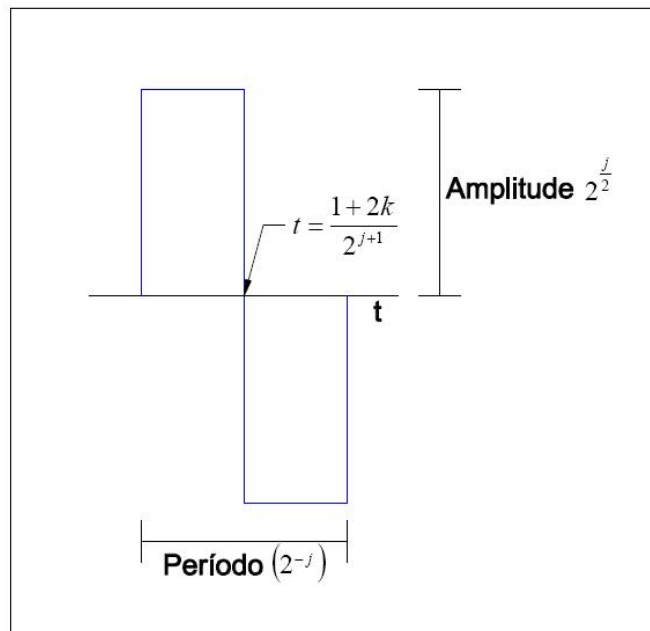


Figura 5 – Amplitude e período da *wavelet* dependente de j .

Na tabela 1 o período de cada *wavelet* para cada escala j , e o ponto central de uma *wavelet*-filha são calculados para alguns valores de j e k . A tabela 2 contém as amplitudes escalonadas para diversos valores de j .

Tabela 1 - Período e localização da *wavelet* dependente de j e k .

		k								
		0	1	2	3	4	5	6	7	
j	0	1	0,5							
	1	0,5	0,25	0,75						
	2	0,25	0,125	0,375	0,625	0,875				
	3	0,125	0,0625	0,1875	0,3125	0,4375	0,5625	0,6875	0,8125	0,9375

Tabela 2 - Amplitude da *wavelet* dependente de j .

		Amplitude	
j	0	0	1
	1	1,4142136	
	2	2	
	3	2,8284271	

Na figura 6 observa-se a *wavelet*-filha onde $j = 1$ e $k = 1$, a qual é descrita por:

$$y_{1,1}(t) = \sqrt{2}y(2t - 1) \quad (2.11)$$

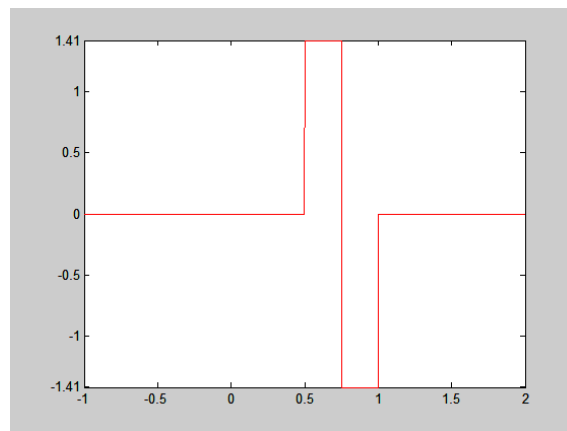


Figura 6 - Wavelet Haar $y_{1,1}$

Pode ser observado que neste caso o centro da *wavelet* é $t = 0,75$ e seu período é $T = 0,5$, como dado na tabela 1.

As diversas *wavelets* para os valores de j e k das tabelas 1 e 2, são ilustradas na figura 7.

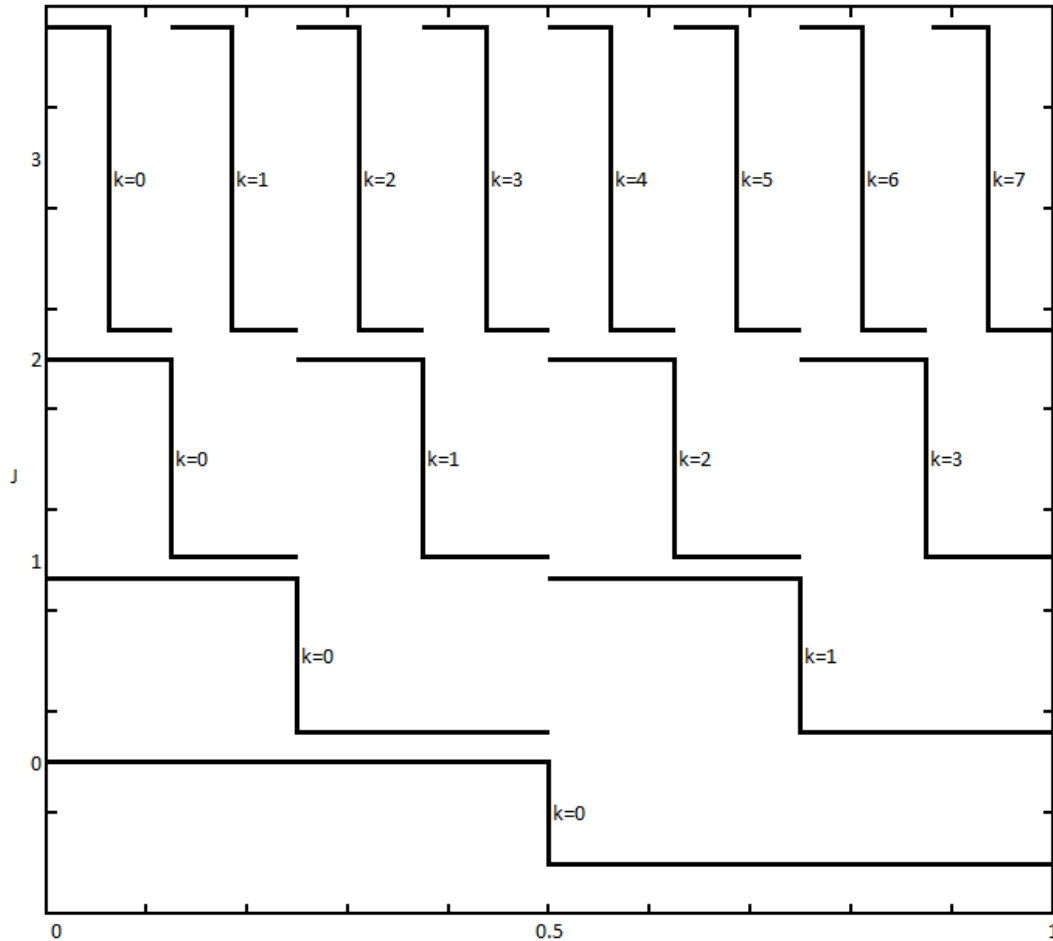


Figura 7 – Wavelets de Haar escalonadas e transladadas.

Com base nas equações (2.9) e (2.10) e na figura 7 pode ser facilmente verificado que [27]:

1. as *scalets* e as *wavelets* são ortogonais;
2. as *scalets* de mesmo nível formam um sistema ortonormal;
3. as *wavelets* em um mesmo nível formam um sistema ortonormal;
4. as *scalets* são ortogonais a todas as *wavelets* de nível igual ou mais alto;
5. *wavelets* em níveis diferentes são sempre ortogonais.

2.4 ANÁLISE DE MULTIRESOLUÇÃO

A análise de multiresolução é baseada na decomposição de um sinal em subfunções projetadas em subespaços, gerando aproximações sucessivas deste determinado sinal. Obtém-se assim, uma sequência de subespaços fechados S_j de L^2 , onde L^2 define o espaço das funções quadraticamente integráveis, tal que,

$$\dots S_{-1} \subset S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{j+1} \subset \dots, \quad (2.12)$$

As *scalets* de determinado nível j são definidas no subespaço S_j , os quais contem quaisquer translações de cada função de mesmo nível. Assim, de acordo com a definição (2.10) para as funções *wavelets*, alguns subespaços S_j podem ser descritos como conjuntos de funções, (2.13-16) e mostrado na figura 8,

$$S_0 = \{f(t)\} \quad (2.13)$$

$$S_1 = \{\sqrt{2}f(2t) \quad \sqrt{2}f(2t-1)\} \quad (2.14)$$

$$S_2 = \{2f(4t) \quad 2f(4t-1) \quad 2f(4t-2) \quad 2f(4t-3)\} \quad (2.15)$$

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{cccccc} \sqrt{8}f(8t) & \sqrt{8}f(8t-1) & \sqrt{8}f(8t-2) & \sqrt{8}f(8t-3) & \sqrt{8}f(8t-4) & \\ \sqrt{8}f(8t-5) & \sqrt{8}f(8t-6) & \sqrt{8}f(8t-7) & & & \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

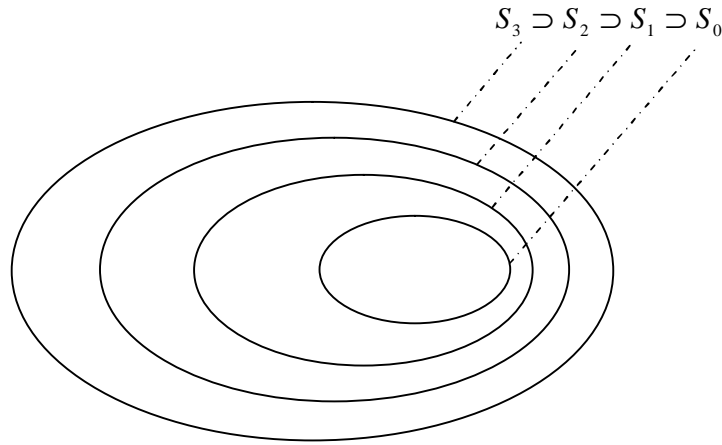


Figura 8 – Subespaços S_j .

Além da propriedade (2.12) a AMR também satisfaz:

$$f(t) \in S_j \leftrightarrow f(2t) \in S_{j+1}$$

$$f(t) \in S_j \leftrightarrow f(t+n) \in S_j$$

Assim, para uma função *scalet*, pode-se escrever (ver figura 9):

$$f(t) = f(2t) + f(2t-1) \quad (2.17)$$

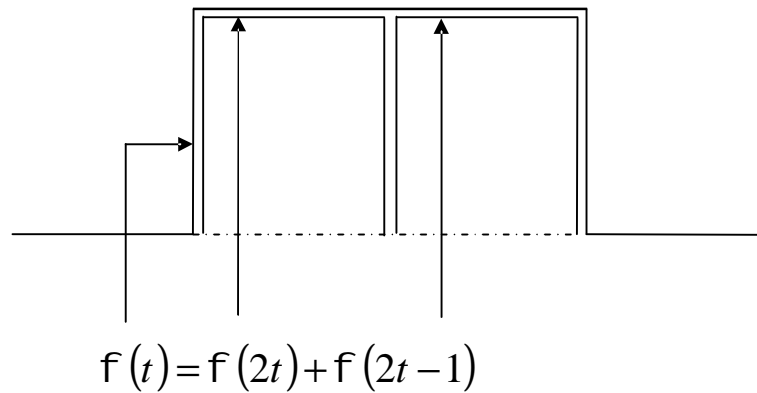


Figura 9 – Função escala composto por componentes de S_{j+1} .

A função *scalet* pode, portanto, ser definida de forma geral como:

$$f(t) = \sum h(n) \sqrt{2} f(2t - n). \quad (2.18)$$

Para este caso, $h(0) = h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por outro lado a *wavelet*-mãe $y(t) \in W_0$ é definida como a diferença de *scalets* pertencentes ao subespaço S_1 , como pode ser visto na figura 10.

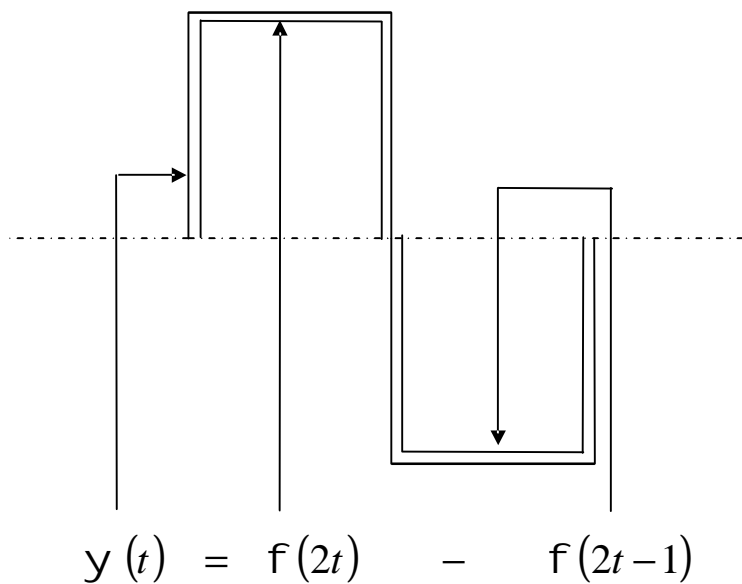


Figura 10 - Wavelet-mãe composta por membros do subespaço S_1 .

Segue-se então que a *wavelet* $y(t)$ é uma combinação de *scalets* de Haar deslocadas e escalonadas, logo, tem-se que:

$$y(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} f(2t - n) \quad (2.19)$$

onde os coeficientes $h_1(n)$ são determinados pela equação abaixo:

$$h_1(n) = (-1)^n h(1 - n) \quad (2.20)$$

Como dito no item anterior 2.3 as funções *wavelets* e *scalets* são ortogonais, ou seja, os membros de S_j são ortogonais aos membros de W_j , e portanto pode ser escrito que:

$$S_{j+1} = S_j \oplus W_j \quad (2.21)$$

Logo, substituindo $S_j = S_{j-1} + W_{j-1}$ repetidamente o espaço L^2 pode ser decomposto como mostrado abaixo. (Ver figura 11)

$$L^2 = S_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus K \quad (2.22)$$

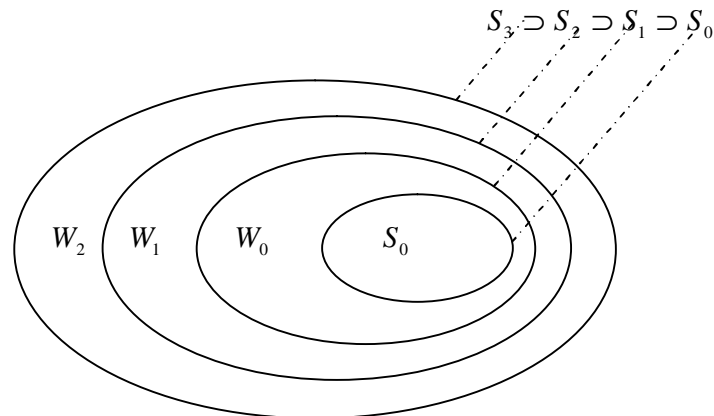


Figura 11 – Subespaços S_j e seus complementos W_j .

2.5 TRANSFORMADA DE WAVELET

A transformada de *wavelet* é determinada pela projeção de um sinal $f(t)$ sobre os subespaços descritos na seção anterior. A projeção de $f(t)$ sobre o subespaço W_0 é descrita pela equação (2.23), onde serão determinados os coeficientes da projeção.

$$B_j f(t) = \sum_{j,k} d_k^j y_{j,k}(t) \quad (2.23)$$

onde d_n^m são os coeficientes determinados pelo produto interno entre a função $f(t)$ e a *wavelet* em um determinado nível de resolução, ou seja,

$$d_k^j = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (2.24)$$

O mesmo ocorre com a função projetada sobre os subespaços S_j , onde a função $f(t)$ é descrita através de uma série de funções *scalet* e seus coeficientes.

$$A_j f(t) = \sum_{j,k} s_k^j \tilde{f}_{j,k}(t) \quad (2.25)$$

onde

$$s_k^j = \langle f(t), \tilde{j}_{j,k}(t) \rangle \quad (2.26)$$

Assim, de acordo com (2.21), tem-se que

$$A_{j+1} f(t) = A_j f(t) + B_j f(t) \quad (2.27)$$

De forma que, por (2.22) $f(t)$ pode ser escrita como:

$$f(t) = A_{j_1} f(t) + \sum_{j=j_1}^j B_j f(t) \quad (2.28)$$

sendo j_1 o menor nível de resolução possível. Neste trabalho os coeficientes de projeção serão obtidos através do método dos momentos.

2.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos da teoria de *wavelets* do ponto de vista da representação de uma função f em termos de sua projeção em subespaços W_j de *wavelets* e S_j de *scalets*. Estes conceitos serão aplicados no capítulo seguinte, onde as funções de base e de teste do método dos momentos serão escritas como combinações de uma função *scalet* no subespaço S_0 e uma série de funções *wavelets* nos subespaços W_j onde $j \geq 0$.

3 WAVELETS, FUNÇÕES DE BASE E O MÉTODO DOS MOMENTOS

3.1 MÉTODO DOS MOMENTOS

O método dos momentos é uma técnica muito utilizada na solução de problemas baseados em equações integro-diferenciais em domínio aberto. Neste método o problema na sua forma clássica tem suas condições de diferenciabilidade enfraquecidas, obtendo-se um sistema linear algébrico, o qual pode ser facilmente calculado. Considera-se o problema abaixo:

$$L(f) = g, \quad (3.1)$$

onde L é um operador que pode representar uma integração ou diferenciação, g é a excitação ou fonte (função conhecida) e f é a função a ser determinada. Se a solução para (3.1) é única, então a função f pode ser determinada a partir da inversão do operador L , ou seja,

$$f = L^{-1}(g), \quad (3.2)$$

O objetivo neste método é resolver (3.2) numericamente, para isso a função f é expandida como uma combinação de funções de base f_n de forma que,

$$f = \sum_n c_n f_n, \quad (3.3)$$

onde c_n são constantes de projeção desconhecidas. Substituindo (3.3) em (3.1), tem-se

$$\sum_n c_n L(f_n) = g \quad (3.4)$$

Para a solução exata $Lf - g = 0$ em todo espaço. Na solução aproximada pelo método de Galerkin, $Lf - g$ é nulo apenas em média. Para isso, define-se uma família de funções de teste w_m , onde $m = 1, 2, 3, \dots$, com a qual pode ser definido o seguinte produto interno

$$\sum_n c_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle. \quad (3.5)$$

Reescrevendo (3.5) na forma matricial obtém-se

$$[l_{mn}][c_n] = [g_m] \quad (3.6)$$

onde

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle \langle w_1, Lf_2 \rangle \text{L} \langle w_1, Lf_n \rangle \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle \langle w_2, Lf_2 \rangle \text{L} \langle w_2, Lf_n \rangle \\ \text{M} \quad \text{M} \quad \text{L} \quad \text{M} \\ \langle w_m, Lf_1 \rangle \langle w_m, Lf_2 \rangle \text{L} \langle w_m, Lf_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[c_n] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \text{M} \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \text{M} \\ \langle w_m, g \rangle \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Finalmente, a $[l]$ é invertida e os coeficientes de projeção c_n são dados por

$$[c_n] = [l_{mn}^{-1}] [g_m]. \quad (3.10)$$

No método de Galerkin as funções de expansão f_n e as funções de teste w_m pertencem ao mesmo espaço, de forma que as equações (3.7) e (3.9) possam ser reescritas como

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle f_1, Lf_1 \rangle \langle f_1, Lf_2 \rangle \text{L} \langle f_1, Lf_n \rangle \\ \langle f_2, Lf_1 \rangle \langle f_2, Lf_2 \rangle \text{L} \langle f_2, Lf_n \rangle \\ \text{M} \quad \text{M} \quad \text{L} \quad \text{M} \\ \langle f_m, Lf_1 \rangle \langle f_m, Lf_2 \rangle \text{L} \langle f_m, Lf_n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$[g_m] = \begin{bmatrix} \langle f_1, g \rangle \\ \langle f_2, g \rangle \\ \text{M} \\ \langle f_m, g \rangle \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2 PRÉ-PROCESSAMENTO

A matriz (3.11) é densamente preenchida de forma que o sistema algébrico necessita de grande esforço computacional para sua resolução. Para que o sistema seja resolvido mais eficientemente a matriz (3.11) pode ser transformada em uma matriz

esparsa através de técnicas adequadas. Neste trabalho funções *wavelets* são utilizadas na formulação em método de Galerkin, como descrito a seguir.

Seja a equação integral dada por

$$g(x) = \int f G(x, x') dx' \quad (3.13)$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green para o problema.

Lembrando que no método de Galerkin utiliza-se a mesma função para expansão e teste, tem-se que

$$f = c_0 f(x') + \sum_i \sum_k c_i^k y_i^k(x) \quad (3.14)$$

Desta forma, o lado esquerdo de (3.5) pode ser reescrito como

$$\int_L f(x) \int_L G(x, x') c_0 f(x') dx dx' + \int_L f(x) \sum_i \sum_k \int_L G(x, x') c_i^k y_i^k(x') dx dx' \quad (3.15)$$

onde as integrais internas correspondem ao operador integral que define o problema e as integrais externas definem o produto interno com a função de teste.

Na apresentação que segue, são utilizadas as funções *scalet* e *wavelet* para o nível $j = 0$, e o problema é dividido em dois segmentos, de forma que as funções são avaliadas no centro de cada um. Esta simplificação não implicará em perda de generalidade.

Desta forma, expandindo-se as integrais internas de (3.15), obtém-se,

$$\int_L f(x) c_0 \{G(x, x'_1) f(x'_1) + G(x, x'_2) f(x'_2)\} \Delta dx + \int_L f(x) c_{00} \{G(x, x'_1) y_{00}(x'_1) + G(x, x'_2) y_{00}(x'_2)\} \Delta dx \quad (3.16)$$

onde c_{00} é o coeficiente da *wavelet* para $j = 0$ e $k = 0$ e y_{00} é a *wavelet* correspondente. Em (3.13) as integrais são avaliadas em cada segmento i , de forma que

$$\int G(x, x') f(x') = G(x, x'_i) f(x'_i) \Delta \quad (3.17)$$

Desenvolvendo-se cada integral em (3.16) separadamente, pode-se escrever que

$$I_1 = \{f(x_1) c_0 G(x_1, x'_1) f(x'_1) + f(x_2) c_0 G(x_2, x'_1) f(x'_1) + f(x_1) c_0 G(x_1, x'_2) f(x'_2) + f(x_2) c_0 G(x_2, x'_2) f(x'_2)\} \Delta^2 \quad (3.18)$$

ou,

$$I_1 = [f(x_1) \{G(x_1, x'_1) f(x'_1) + G(x_1, x'_2) f(x'_2)\} + f(x_2) \{G(x_2, x'_1) f(x'_1) + G(x_2, x'_2) f(x'_2)\}] c_0 \Delta^2 \quad (3.19)$$

E

$$I_2 = \{f(x_1)c_{00}G(x_1, x'_1)y_{00}(x'_1) + f(x_2)c_{00}G(x_2, x'_1)y_{00}(x'_1) + f(x_1)c_{00}G(x_1, x'_2)y_{00}(x'_2) + f(x_2)c_{00}G(x_2, x'_2)y_{00}(x'_2)\}\Delta^2 \quad (3.20)$$

ou,

$$I_2 = [f(x_1)\{G(x_1, x'_1)y_{00}(x'_1) + G(x_1, x'_2)y_{00}(x'_2)\} + f(x_2)\{G(x_2, x'_1)y_{00}(x'_1) + G(x_2, x'_2)y_{00}(x'_2)\}]c_{00}\Delta^2 \quad (3.21)$$

Agora (3.19) e (3.21) podem ser escritas na forma de produto vetor por matriz, ou seja

$$I_1 = [f(x_1) \quad f(x_2)] \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x'_1) \\ f(x'_2) \end{bmatrix} [c_0\Delta^2] \quad (3.22)$$

e

$$I_2 = [f(x_1) \quad f(x_2)] \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{00}(x'_1) \\ y_{00}(x'_2) \end{bmatrix} [c_{00}\Delta^2] \quad (3.23)$$

Somando-se as integrais parciais I_1 e I_2 , tem-se que

$$I_1 + I_2 = [f(x_1) \quad f(x_2)] \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0f(x'_1) + c_{00}y_{00}(x'_1) \\ c_0f(x'_2) + c_{00}y_{00}(x'_2) \end{bmatrix} [\Delta^2] \quad (3.24)$$

e finalmente (3.25)

$$I_1 + I_2 = [f(x_1) \quad f(x_2)] \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x'_1) & y_{00}(x'_1) \\ f(x'_2) & y_{00}(x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_{00} \end{bmatrix} [\Delta^2] \quad (3.25)$$

Este sistema corresponde à forma matricial da equação (3.16). Para que os dois coeficientes sejam obtidos torna-se necessário uma nova equação, onde a função $y_{00}(x)$ é utilizada como função de teste, e assim obtem-se para as integrais parciais I_1 e I_2 ,

$$I_1 = \int_L y_{00}(x)c_0 \{G(x, x'_1)f(x'_1) + G(x, x'_2)f(x'_2)\} \Delta dx \quad (3.26)$$

$$I_2 = \int_L y_{00}(x)c_{00} \{G(x, x'_1)y_{00}(x'_1) + G(x, x'_2)y_{00}(x'_2)\} \Delta dx, \quad (3.27)$$

cuja soma é escrita na forma matricial como:

$$I_1 + I_2 = [y_{00}(x_1) \quad y_{00}(x_2)] \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x'_1) & y_{00}(x'_1) \\ f(x'_2) & y_{00}(x'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_{00} \end{bmatrix} [\Delta^2] \quad (3.28)$$

As equações (3.25) e (3.28) podem ser arranjadas em uma expressão matricial na qual a matriz de funções de Green é pré multiplicada pela matriz de *wavelets* e pós multiplicada pela transposta desta mesma matriz. Generalizando para um número N de níveis.

$$\begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & K & f(x_N) \\ y_{00}(x_1) & y_{00}(x_2) & K & y_{00}(x_N) \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \mathbb{M} \\ y_{NN}(x_1) & y_{NN}(x_2) & K & y_{NN}(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(x_1, x'_1) & G(x_1, x'_2) & L & G(x_1, x'_N) \\ G(x_2, x'_1) & G(x_2, x'_2) & L & G(x_2, x'_N) \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \mathbb{M} \\ G(x_N, x'_1) & G(x_N, x'_2) & L & G(x_N, x'_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x'_1) & y_{00}(x'_1) & L & y_{NN}(x'_1) \\ f(x'_2) & y_{00}(x'_2) & L & y_{NN}(x'_2) \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \mathbb{M} \\ f(x'_N) & y_{00}(x'_N) & L & y_{NN}(x'_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_{00} \\ \mathbb{M} \\ c_{NN} \end{bmatrix} [\Delta^2] \quad (3.29)$$

Fazendo o mesmo para o lado direito, tem-se

$$\begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & K & f(x_N) \\ y_{00}(x_1) & y_{00}(x_2) & K & y_{00}(x_N) \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \mathbb{M} \\ y_{NN}(x_1) & y_{NN}(x_2) & K & y_{NN}(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_{00} \\ \mathbb{M} \\ g_{NN} \end{bmatrix} [\Delta^2] \quad (3.30)$$

Em (3.29) a matriz das funções de Green é exatamente a matriz de impedâncias a qual é obtido no método dos momentos utilizando point-matching ao invés do método da interpolação da Galerkin, portanto a resolução do problema consiste na construção da matriz de impedâncias pelo método de point-matching e na sua pré e pós multiplicação pela matriz de *wavelet*. As propriedades da matriz resultante dependem das propriedades da matriz *wavelet*, como será discutido na próxima seção.

3.3 MATRIZ WAVELET

Considera-se um segmento subdividido em 8 segmentos, figura 12, e a matriz de *wavelets* correspondente é dada pela equação (3.31).

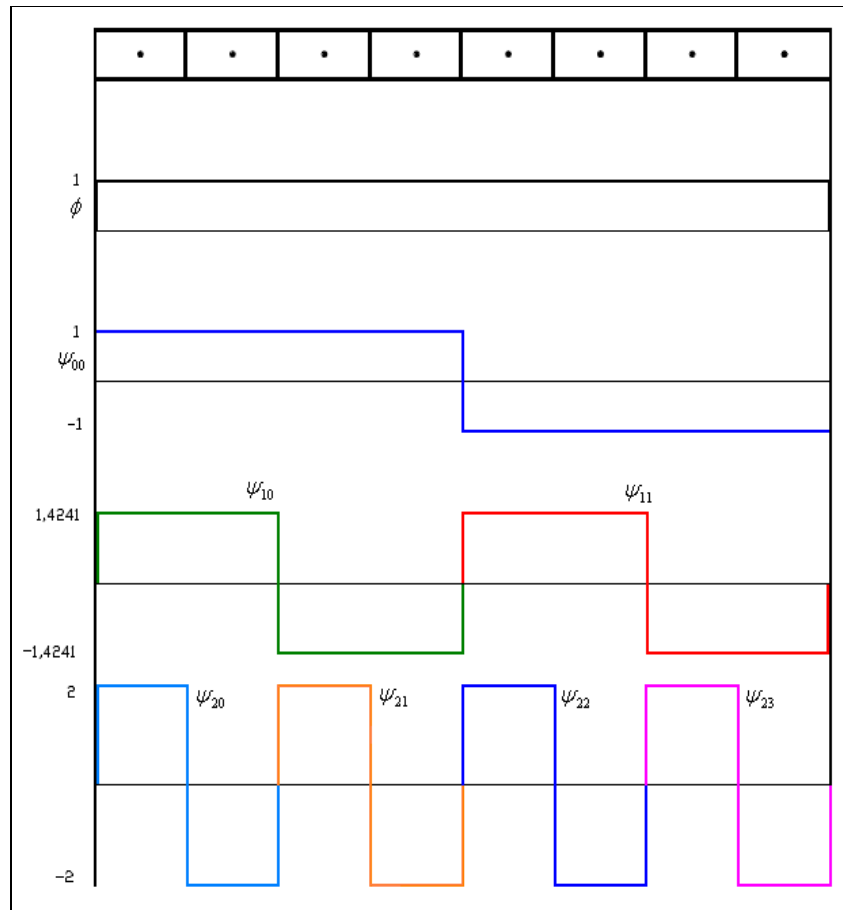


Figura 12 – Contribuição das *wavelets* e *scalet* sobre um fio.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pode ser facilmente observado na equação (3.31), que a matriz de *wavelets* de Haar é esparsa, com muitos elementos nulos, sendo N o número de linhas da matriz ou o número de elementos em cada linha. Pode ser verificado que a primeira linha, correspondendo a *scalet*, possui N elementos não nulos da mesma forma que a segunda linha correspondente a *wavelet* y_{00} . Na terceira linha encontram-se $\frac{N}{2}$ elementos não

nulo, correspondente a y_{10} . O mesmo número de elementos não nulos é encontrado na quarta linha correspondente a y_{11} , e assim por diante. Na tabela 3 são mostradas as quantidades de elementos não nulos para as 8 linhas da matriz de *wavelets*.

Tabela 3 - Número de elementos não nulos em cada linha de Ψ .

Linha	Não nulos
1	N
2	N
3	$N/2$
4	$N/2$
5	$N/4$
6	$N/4$
7	$N/4$
8	$N/4$

Na tabela 4 é descrita uma correspondência entre o número de linhas da matriz e o número de termos não nulos.

Tabela 4 - Número de elementos não nulos da matriz Ψ comparado ao número de linhas.

Nº de linhas	Não nulos
1	N
2	$2N$
4	$3N$
8	$4N$
16	$5N$
32	$6N$
64	$7N$
128	$8N$

De forma geral, os dados da tabela 4 podem ser descritos pela seguinte relação de correspondência:

$$2^n \rightarrow (n+1)N$$

onde 2^n é o número de linhas e $(n+1)N$ é o número de termos não nulos. Como $n = \log_2(N)$, então o número de elementos não nulos na matriz pode ser calculado como

$$ENN = (\log_2(N) + 1)N$$

Na tabela 5 é mostrada a comparação entre a quantidade de elementos de uma matriz e os elementos não nulos.

Tabela 5 - Comparativo entre número total de elementos e número de elementos não nulos dependente do número de linhas da matriz Ψ .

Nº de linhas	Elementos	
	Total	Não nulos
128	16384	1024
256	65536	2304
512	262144	5120
1024	1048576	11264
2048	4194304	24576
4096	16777216	53248
8192	67108864	114688

A esparsidade da matriz de *wavelets* é utilizada neste trabalho no pré-processamento da matriz global de impedâncias no método dos momentos. A complexidade computacional da solução de um sistema linear é proporcional ao número de elementos não nulos da matriz. Por outro lado, a complexidade depende também do número de linhas e do número de colunas da matriz, mas não depende do produto entre eles, ou seja, não depende do número total de elementos. O MATLAB®, para matrizes esparsas, armazena apenas os elementos não nulos da matriz e seus índices, diferentemente das matrizes cheias, que requerem armazenamento de todos os elementos, inclusive nulos. Desta forma a quantidade de memória necessária para o armazenamento da matriz esparsa é reduzida.

No processo de armazenamento de matrizes esparsas no MATLAB® são utilizados três vetores. O primeiro deles armazena todos os elementos não nulos da matriz e sua dimensão é igual ao número de elementos não nulos. Já o segundo vetor é formado pelos índices destes elementos, ou seja, o índice correspondente da linha onde se encontra o elemento, sendo que, este vetor também tem dimensão igual ao número de elementos não nulos. No terceiro vetor são armazenados os índices do início de cada coluna dos demais vetores, e um ponteiro adicional que marca o seu fim. Um quarto vetor é utilizado quando os elementos da matriz são complexos, e é responsável pelo armazenamento dos termos imaginários dos elementos não nulos.

3.3.1 *Wavelets* unidimensionais

As *wavelets* unidimensionais foram estudadas no capítulo 2. Nesta seção $f(x)$ será descrita como uma expansão em funções *wavelets* unidimensionais. Desta maneira, conforme equações (2.9) e (2.10), $f(x)$ pode ser expandida como:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{0,k} \bar{f}(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \mathcal{Y}_{j,k}(x) \quad (3.32)$$

onde $s_{0,k}$ e $d_{j,k}$ foram definidas em (2.24) e (2.26).

Utilizando as *wavelets* de Haar na equação (3.32), esta por ser reescrita na forma matricial como [12]:

$$f(x) = s_0 \bar{f}(x) + d_{00} \mathcal{Y}_{00}(x) + [d_{10} \ d_{11}] \begin{bmatrix} \sqrt{2} \mathcal{Y}_{10}(2x) \\ \sqrt{2} \mathcal{Y}_{11}(2x-1) \end{bmatrix} + [d_{20} \ d_{21} \ d_{22} \ d_{23}] \begin{bmatrix} 2\mathcal{Y}_{20}(4x) \\ 2\mathcal{Y}_{21}(4x-1) \\ 2\mathcal{Y}_{22}(4x-2) \\ 2\mathcal{Y}_{23}(4x-3) \end{bmatrix} + [d_{30} \ d_{31} \ d_{32} \ d_{33} \ d_{34} \ d_{35} \ d_{36} \ d_{37}] \begin{bmatrix} \sqrt{8} \mathcal{Y}_{30}(8x) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{31}(8x-1) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{32}(8x-2) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{33}(8x-3) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{34}(8x-4) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{35}(8x-5) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{36}(8x-6) \\ \sqrt{8} \mathcal{Y}_{37}(8x-7) \end{bmatrix} + L \quad (3.33)$$

3.3.2 *Wavelets* bidimensionais

As *wavelets* bidimensionais são formadas pelo produto entre *wavelets* e *scalets* nos dois eixos analisados. Desta maneira, a *scalet* e as *wavelets* bidimensionais podem ser encontradas como:

$$\bar{f}(x, y) = \bar{f}(x) \bar{f}(y) \quad (3.34)$$

$$\mathcal{Y}_1(x, y) = \bar{f}(x) \mathcal{Y}(y) \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Y}_2(x, y) = \mathcal{Y}(x) \bar{f}(y) \quad (3.36)$$

$$\mathcal{Y}_3(x, y) = \mathcal{Y}(x) \mathcal{Y}(y) \quad (3.37)$$

Os elementos da matriz *wavelet* bidimensional são formados pelo produto de cada *wavelet* (ou *scalet*) por todas as *wavelets* e *scalet* que vão contribuir para a solução do problema, como comentado anteriormente. A figura 13 mostra o caso de aplicação da *wavelet* bidimensional sobre uma placa plana, onde os elementos encontrados na matriz terão como referência cada ponto relacionado na placa [12].

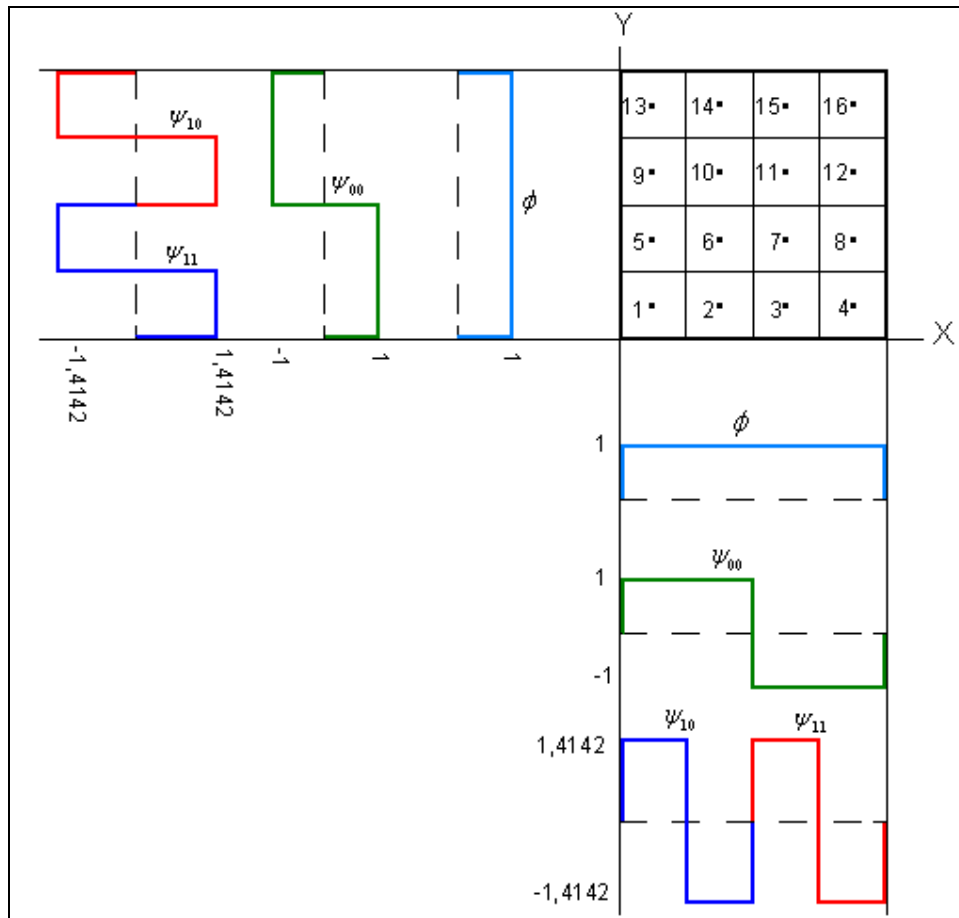


Figura 13 – Contribuição das *wavelets* em um problema de placa plana.

A contribuição de cada *wavelet* para a expansão da função no ponto 1 é dada por:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} f_{00}(x)f_{00}(y), f_{00}(x)y_{00}(y), f_{00}(x)y_{10}(y), f_{00}(x)y_{11}(y), \\ y_{00}(x)f_{00}(y), y_{00}(x)y_{00}(y), y_{00}(x)y_{10}(y), y_{00}(x)y_{11}(y), \\ y_{10}(x)f_{00}(y), y_{10}(x)y_{00}(y), y_{10}(x)y_{10}(y), y_{10}(x)y_{11}(y), \\ y_{11}(x)f_{00}(y), y_{11}(x)y_{00}(y), y_{11}(x)y_{10}(y), y_{11}(x)y_{11}(y) \end{Bmatrix} \quad (3.38),$$

Onde C_1 é a primeira coluna da matriz de *wavelets* bidimensional. Neste caso, substituindo os valores, a coluna C_1 se torna em:

$$C_1 = \{1, 1, \sqrt{2}, 0, 1, 1, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 0, 0, 0, 0, 0\} \quad (3.39).$$

Da mesma forma, as outras colunas podem ser determinadas a partir de cada ponto da placa, formando a matriz Ψ .

A matriz Ψ será utilizada nas equações (3.29) e (3.30) para o pré-processamento da matriz de impedâncias para resolução de problemas com menor esforço computacional. Desta forma é definida a matriz $[l_{mn}^j]$ por

$$[l_{mn}^j] = [\Psi][l_{mn}][\Psi]^T \quad [11][12] \quad (3.40)$$

A estrutura da matriz $[l_{mn}^j]$, considerando apenas os elementos não nulos, é ilustrada na figura 14, onde cada bloco representa um dos produtos entre *scalets* e *wavelets*. As áreas são determinadas pelas equações (3.41) a (3.44) e representam as projeções de $f(x)$ e $y(x)$, sendo j o maior nível de resolução.

D^1	C^1	...	C^j
B^1	$A^{1,1}$...	$A^{j-1,j}$
\vdots	\vdots	\ddots	
B^j	$A^{j,j-1}$		$A^{j,j}$

Figura 14 – Distribuição das seções da matriz esparsa.

$$D = \langle f(x), Lf(x) \rangle \quad (3.41)$$

$$A = \langle y(x), Ly(x) \rangle \quad (3.42)$$

$$B = \langle y(x), Lf(x) \rangle \quad (3.43)$$

$$C = \langle f(x), Ly(x) \rangle \quad (3.44)$$

O formato da matriz será mostrado posteriormente, onde as matrizes de impedância de todos os problemas são ilustradas na apresentação dos resultados.

3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados os conceitos do método dos momentos juntamente com o método de Galerkin para o pré-processamento das matrizes de impedâncias. Foi apresentada também a determinação das matrizes *wavelet* unidimensional e bidimensional, que serão aplicadas ao método de Galerkin, para determinação de matrizes esparsas, com o objetivo de diminuir o esforço computacional para solução de sistema linear.

4 APLICAÇÕES E RESULTADOS

4.1 INTRODUÇÃO

Muitas são as aplicações do método dos momentos e algumas delas serão demonstradas neste trabalho, e são elas:

1. Cálculo de densidade linear de carga em um fio reto finito;
2. Cálculo de capacitância entre placas paralelas;
3. Cálculo de corrente em antenas.

4.2 DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS SIMULADOS PELO MÉTODO DOS MOMENTOS E MÉTODO DE GALERKIN

Como já discutido na seção 3.2 o pré-processamento realizada o produto da matriz de *wavelets* pela matriz de impedâncias e a transposta da matriz de *wavelets*. A matriz de impedâncias para o problema determinado é obtido utilizando-se funções pulso como funções de base e o delta de Dirac como função de teste. Entretanto o resultado final é equivalente a utilização do método de Galerkin no qual as funções *wavelets* são utilizadas como funções de base e de teste. Portanto, nas subseções abaixo, os problemas analisados são apresentados resumidamente, assim como seus modelos pelo método dos momentos usando point matching.

4.2.1 Cálculo da densidade linear de carga em um fio reto finito

Considera-se o fio da figura 15, de comprimento L e raio a , o qual é mantido a um potencial V_0 dado. No método dos momentos o fio é dividido em N segmentos iguais de comprimento Δ , onde

$$\Delta = \frac{L}{N} \quad (4.1).$$

A densidade de carga é obtida através de [30].

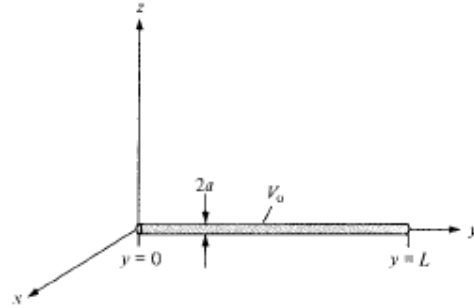


Figura 15 – Fio reto finito onde será determinada a densidade de carga.

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{r_L(y)dy}{|y_k - y|} \quad (4.2)$$

onde r_L é a densidade de carga sobre o fio e y_k é o ponto onde o potencial é conhecido e a integração é feita sobre y .

Utilizando-se a função delta de Dirac como função de base na formulação variacional do problema, (4.2) pode ser expandida como

$$4\pi\epsilon_0 V_0 = \frac{r_1\Delta}{|y_k - y_1|} + \frac{r_2\Delta}{|y_k - y_2|} + \dots + \frac{r_N\Delta}{|y_k - y_N|} \quad (4.3)$$

Assim determina-se a matriz de impedâncias deste problema dependente de cada segmento do fio. A matriz $[Z_{mn}]$ será composta de elementos A_{mn} , que são determinados por

$$A_{mn} = \frac{\Delta}{|y_m - y_n|}, \quad (4.4)$$

para $m \neq n$ e [30]

$$A_{mn} = 2\ln\left(\frac{\Delta}{a}\right) \quad (4.5)$$

para $m = n$.

4.2.2 Cálculo de capacitância entre placas paralelas

A figura 16 mostra um capacitor, no qual as placas são mantidas a um potencial V , separadas por uma distância igual a d .

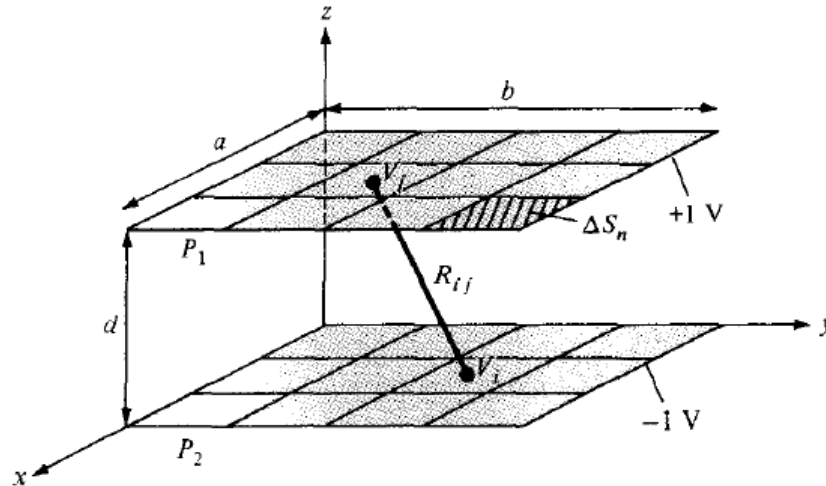


Figura 16 – Capacitor de placas paralelas.

Para a determinação da capacitância entre as placas, é necessário determinar a densidade superficial de carga ρ_s sobre cada placa a partir da equação (4.6),

$$Q = \int \rho_s dS \quad (4.6)$$

Desta forma, a capacitância é determinada por

$$C = \frac{Q}{V_0}, \quad (4.7)$$

sendo V_0 a diferença de potencial entre as placas.

Considerando cada uma das placas divididas em N subseções ΔS_n , determina-se o potencial no centro de cada subdivisão através da equação (4.8), descrita abaixo:

$$V_i = \int \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 R} \cong \sum_{j=1}^{2N} \rho_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS}{R_{ij}} \quad (4.8)$$

A equação (4.8) pode ser escrita também, como

$$V_i = \sum_{j=1}^{2N} \rho_j A_{ij} \quad (4.9)$$

sendo

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS}{R_{ij}} \quad (4.10)$$

Na forma matricial, a equação (4.9) pode ser reescrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,2N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,2N} \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\ A_{2N,1} & A_{2N,2} & \dots & A_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \mathbb{M} \\ r_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbb{M} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[A][r] = [B] \quad (4.12)$$

Finalmente, determina-se r_j por:

$$[r] = [A]^{-1}[B] \quad (4.13)$$

Em (4.12) os termos A_{ij} podem ser obtidos como [30]

$$A_{ij} = \frac{\Delta l^2}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}, \quad i \neq j \quad (4.14)$$

onde

$$\Delta l = x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \quad (4.15)$$

$$R_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (4.16)$$

Para os elementos onde $i = j$, tem-se que

$$A_{ij} = \frac{\Delta l}{\pi\epsilon_0} (0.8814) \quad (4.17)$$

4.2.3 Cálculo de corrente em antenas dipolo

Neste trabalho utiliza-se a formulação descrita em [13], onde a corrente em uma antena do tipo dipolo é determinada pela expressão (4.18).

$$[V] = [Z][I] \quad (4.18)$$

onde $[V]$ é um vetor de tensões, $[I]$ é um vetor de correntes e $[Z]$ é a matriz de impedâncias obtida pelo método dos momentos com *point matching*. O vetor $[V]$ pode ser escrito em função dos campos elétricos nos segmentos Δl_N , como

$$[V] = \begin{bmatrix} E^i(1)\Delta l_1 \\ E^i(2)\Delta l_2 \\ \mathbb{M} \\ E^i(N)\Delta l_N \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde

$$-E_l^i = -j\omega A_l - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \quad (4.20)$$

Como a antena é dividida em segmentos iguais, onde \bar{n} e \bar{m} são os pontos iniciais do segmento, n e m são os pontos medianos e, ^+n e ^+m são os pontos finais do segmento. Desta forma, pode-se aproximar a equação (4.20) por

$$-E_l^i(m) \approx -j\omega A_l - \frac{\Phi\left(\bar{m}\right) - \Phi\left(^+m\right)}{\Delta l_m} \quad (4.21)$$

onde E_l^i é o campo incidente no segmento l , A_l é o potencial vetor no mesmo segmento e Φ é o potencial escalar definido nas extremidades do segmento. O potencial vetor pode ser encontrado por

$$A = m \int I(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (4.22)$$

ou

$$A = mI(n)\Delta l_n g(n, m) \quad (4.23)$$

onde para $m = n$

$$g(n, m) \approx \frac{1}{2\pi\Delta l_n} \log\left(\frac{\Delta l_n}{a}\right) - \frac{j\beta}{4\pi} \quad (4.24)$$

e para $m \neq n$

$$g(n, m) \approx \frac{e^{-j\beta R_{mn}}}{4\pi R_{mn}} \quad (4.25)$$

e $I(n)$ é dado por

$$[I] = \begin{bmatrix} I(1) \\ I(2) \\ \vdots \\ I(N) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Na figura 17 são mostrados dois segmentos Δl_n e Δl_m , onde as cargas em Δl_n são dadas por (4.27) e (4.28):

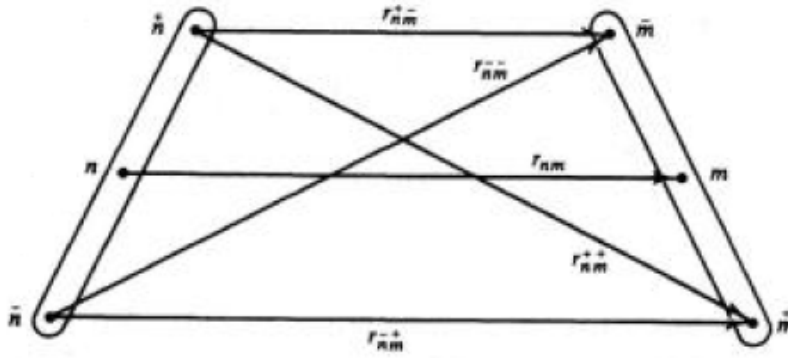


Figura 17 – Dois segmentos de fio.

onde

$$q\left(\overset{+}{n}\right) = \frac{1}{j\omega} I(n) \quad (4.27)$$

$$q\left(\overset{-}{n}\right) = \frac{-1}{j\omega} I(n) \quad (4.28)$$

Os valores de $\Phi\left(\overset{+}{m}\right)$ e $\Phi\left(\overset{-}{m}\right)$ podem ser obtidos a partir de:

$$\Phi\left(\overset{+}{m}\right) = \frac{1}{j\omega e} \left[I(n)g\left(\overset{+}{n}, \overset{+}{m}\right) - I(n)g\left(\overset{-}{n}, \overset{+}{m}\right) \right] \quad (4.29)$$

$$\Phi\left(\overset{-}{m}\right) = \frac{1}{j\omega e} \left[I(n)g\left(\overset{+}{n}, \overset{-}{m}\right) - I(n)g\left(\overset{-}{n}, \overset{-}{m}\right) \right]$$

Para encontrar Z_{mn} que gerará a matriz $[Z]$, tem-se a expressão $Z_{mn} = \frac{E^i \Delta l_m}{I(n)}$,

encontrando-se então

$$Z_{mn} = j\omega m \Delta l_n \Delta l_m g(n, m) + \frac{1}{j\omega e} \left[g\left(\overset{+}{n}, \overset{+}{m}\right) - g\left(\overset{-}{n}, \overset{+}{m}\right) - g\left(\overset{+}{n}, \overset{-}{m}\right) - g\left(\overset{-}{n}, \overset{-}{m}\right) \right], \quad (4.30)$$

A expressão (4.30) será determinada a partir de (4.31), onde

$$R_{mn} = \begin{cases} \sqrt{r_m + (z - z_m)^2} & m \neq n \\ \sqrt{a^2 + z^2} & m = n \end{cases} \quad (4.31)$$

Assim, I é determinada por

$$[I] = [Z^{-1}][V] \quad (4.32)$$

4.3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Três exemplos são simulados de forma a validar os resultados obtidos. Nestes exemplos o método dos momentos é utilizado com as funções *wavelets* na formação do sistema matricial e este é resolvido por meio de decomposições LU e Cholesky. Para a inversão da matriz é utilizada a inversão direta do MATLAB executada por meio do comando backslash (\).

O computador utilizado apresenta a seguinte configuração:

- Processador: INTEL®CORE™2 QUAD
- CPU Q6600@2,4GHz
- Memória RAM: 4GB
- Sistema Operacional: Windows Vista Business 2007 SP2 64bits

4.3.1 Cálculo da densidade linear de carga em um fio reto finito

Considerando um fio de comprimento L igual a $1m$, raio a igual a $0,0001m$ e submetido a uma tensão constante de $1V$, determina-se então, através do método dos momentos programado no ambiente MATLAB®, a solução do problema. Após aplicação do método de Galerkin, para o pré-processamento, foi utilizado um limiar que elimina os elementos da matriz de impedância que não interferem na resolução do problema. Neste caso, os limiares utilizados foram de $0,01\%$ e $0,1\%$ da diferença entre o maior e o menor valor encontrado na matriz.

O resultado encontrado para este caso pode ser na tabela 6, onde são utilizados 1024 pontos de discretização e um limiar de $0,01\%$. A tabela mostra o valor da carga encontrada no fio e o tempo de resolução do sistema de equações lineares para cada caso.

Tabela 6 - Comparativo do valor de carga e tempo de resolução da equação linear para cada caso.

	Inversão Direta	Inversão Direta c/ Wavelet	LU c/ wavelet	Cholesky c/ wavelet
Q (C)	6,2693E-12	6,2693E-12	6,2693E-12	6,2693E-12
Tempo (s)	0,2652	0,0156	0,0156	0,1248

Utilizando-se apenas 8 pontos de discretização, pode-se facilmente comparar as densidades lineares de carga obtidas pelo método tradicional e com *wavelets*, usando-se um limiar de $0,01\%$, conforme tabela 7. Pode se visto que a diferença nos valores obtidos ocorre apenas na terceira casa décima, ou seja, um erro de $0,008\%$. Por outro

lado com 1024 pontos a utilização de *wavelets* pode levar a uma solução até 17 vezes mais rápida, dependendo da decomposição utilizada.

Tabela 7 - Comparativo do vetor de densidade de carga.

Densidade de carga	
S/ <i>wavelet</i>	C/ <i>wavelet</i>
6,6350E-12	6,6350E-12
6,1945E-12	6,1940E-12
6,0626E-12	6,0630E-12
6,0127E-12	6,0130E-12
6,0127E-12	6,0130E-12
6,0626E-12	6,0630E-12
6,1945E-12	6,1940E-12
6,6350E-12	6,6350E-12

Pode-se também, comparar a estrutura das matrizes para os dois métodos analisando 32 pontos. No método tradicional, a matriz de impedância $[Z_{mn}]$, é uma matriz cheia como mostrado na figura 18, através da função *spy* do MATLAB®.

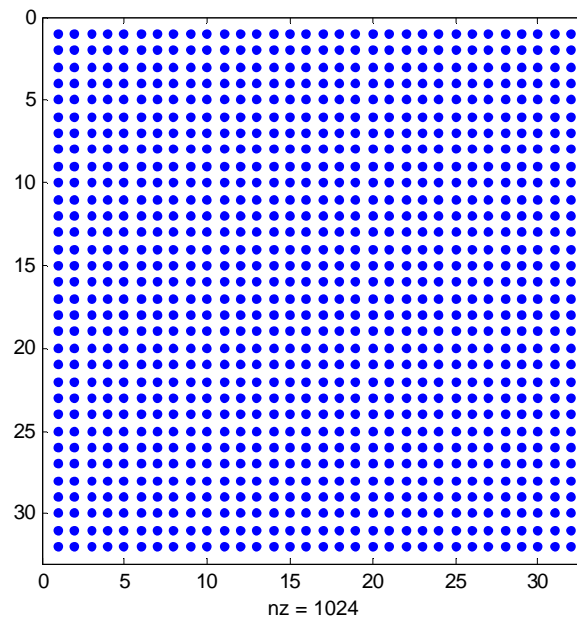


Figura 18 – Número de elementos não nulos da matriz $[Z_{mn}]$ tradicional.

Já para o caso onde as *wavelets* são utilizadas, o número de elementos não nulos da matriz $[Z_{mn}]$ é mostrado na figura 19. Nota-se que houve 27,93% de redução do número de elementos da matriz para o limiar especificado.

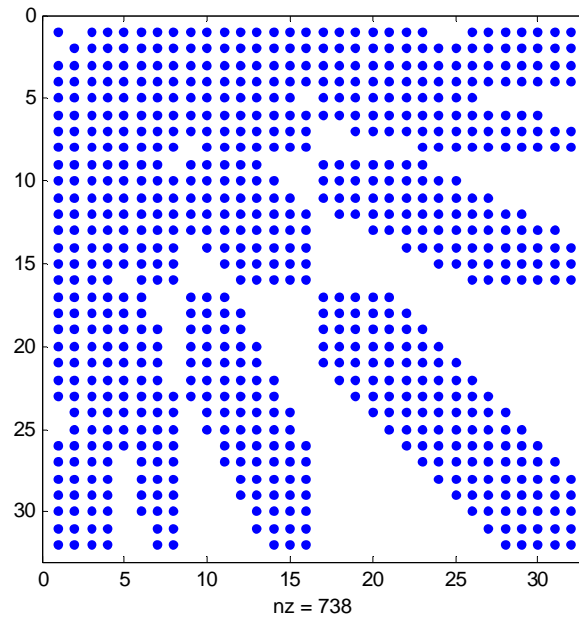


Figura 19 – Número de elementos não nulos da matriz $[Z_{mn}]$ com aplicação de *wavelets* no método de Galerkin.

Ao realizar a mesma análise para 1024 pontos, encontra-se uma matriz cheia com 1.048.576 elementos não nulos. Após a aplicação do método de Galerkin, encontra-se uma matriz com 45.330 elementos não nulos na matriz, ou seja, 95,68% de redução da matriz.

Da mesma forma, as figuras 20 e 21 mostram a distribuição da densidade de carga sobre o fio, obtida com os dois métodos. Na figura 21 uma pequena perturbação, que pode ser atribuída à escolha do limiar, pode ser vista na distribuição de carga.

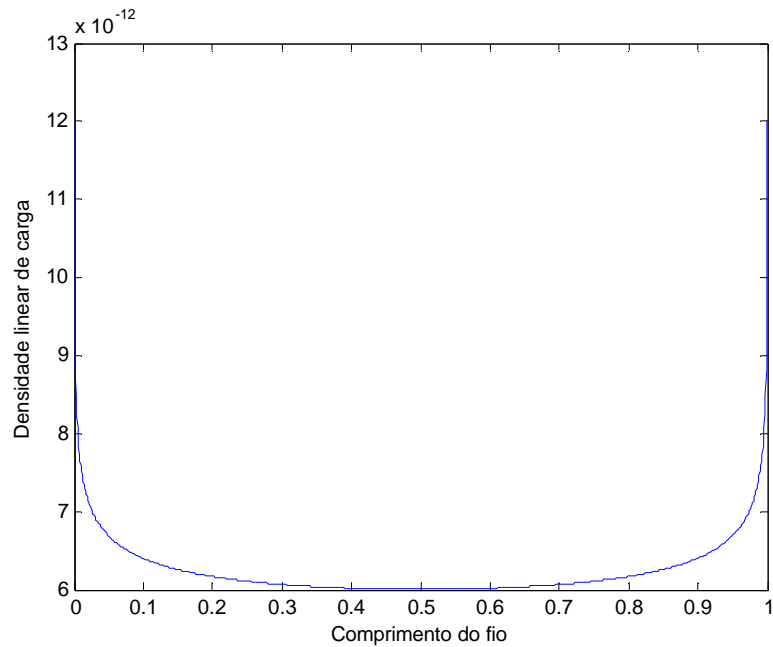


Figura 20 – Densidade linear de carga sobre o fio reto, encontrada pelo método tradicional

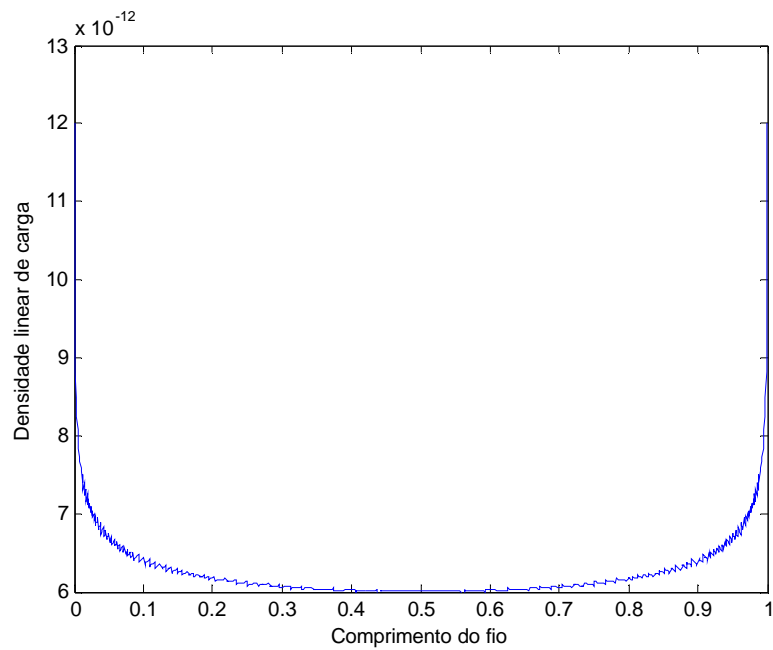


Figura 21 – Densidade linear de carga sobre o fio reto, encontrada com a utilização de wavelets no pré-processamento da matriz.

Para uma discretização de 2048 pontos, têm-se os resultados apresentados na tabela 8. As estruturas das matrizes são semelhantes às vistas nas figuras 20 e 21.

Tabela 8 - Resultado encontrado para análise de 2048 pontos, quanto ao valor da carga total e tempo de resolução da equação linear.

	Limiar (%)	Inversão		Cholesky c/	
		Direta	Inversão Direta c/ Wavelet	LU c/ wavelet	wavelet
Q (C)	0,01	6,2699E-12	6,2699E-12	6,2699E-12	6,2699E-12
	0,1	6,2699E-12	6,2698E-12	6,2698E-12	6,2698E-12
Tempo (s)	0,01	1,2948	0,0468	0,0312	0,1092
	0,1	1,2948	0,0312	0,0312	0,0936

Pode ser visto que para a matriz de maiores dimensões os benefícios obtidos com o uso de *wavelets* também são muito maiores.

4.3.2 Cálculo de capacitância entre placas paralelas

Para o cálculo da densidade superficial de carga em um capacitor de placas paralelas, consideram-se as placas com dimensões 1m x 1m unidades cada, e separadas também por 1m. A placa superior está mantida a um potencial de 1V e a placa inferior está mantida a um potencial de -1V.

Assim, para as placas divididas em 1024 pontos cada uma, encontram-se os resultados apresentados na tabela 9, considerando os limiares de 0,1% e 0,01%.

Tabela 9 - Resultado encontrado para análise de 1024 pontos, quanto ao valor da carga total, capacitância e tempo de solução da equação linear, para placas paralelas.

	Limiar (%)	Inversão		Cholesky c/	
		Direta	Inversão Direta c/ Wavelet	LU c/ wavelet	wavelet
Q (C)	0,01	5,87E-11	5,8692E-11	5,8692E-11	5,8692E-11
	0,1	5,87E-11	5,9022E-11	5,9022E-11	5,9022E-11
C (F)	0,01	2,935E-11	2,9346E-11	2,9346E-11	2,9346E-11
	0,1	2,935E-11	2,9511E-11	2,9511E-11	2,9511E-11
Tempo (s)	0,01	0,8892	0,4992	0,0156	0,156
	0,1	0,8892	0,2028	0,0156	0,1872

Para este caso, tem-se a matriz de impedâncias cheia possui 1.048.576 elementos não nulos.

Quando as funções *wavelets* são aplicadas através do método de Galerkin, com limiar de 0,01% encontra-se uma matriz esparsa com apenas 118.824 elementos não nulos, representando 88.67% de redução de elementos da matriz $[Z_{mn}]$, com erro de 0,0013% no resultado entre o método tradicional e o método de Galerkin. A matriz final pode ser mostrada na figura 22.

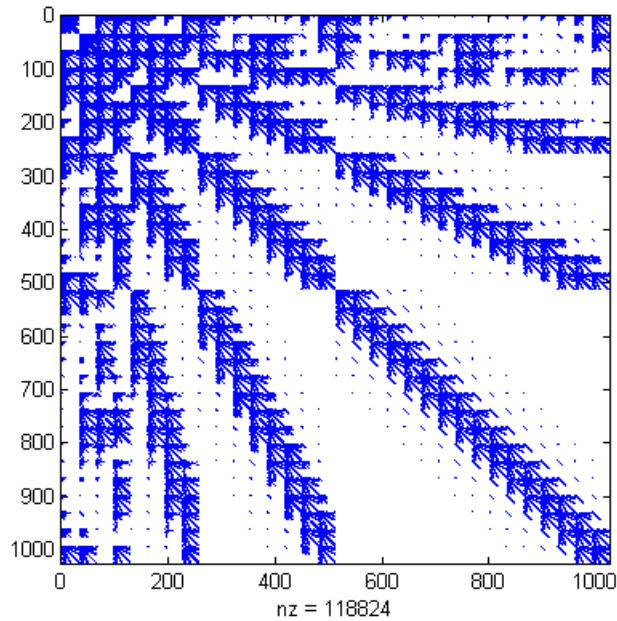


Figura 22 – Matriz $[Z_{mn}]$ com a utilização de *wavelets* com limiar de 0,01%.

Utilizando-se um limiar de 0,1%, encontra-se uma matriz $[Z_{mn}]$ com apenas 19.820 elementos não nulos, representando 98,11% de redução da matriz como mostrado na figura 23 e 0,5% de erro no resultado.

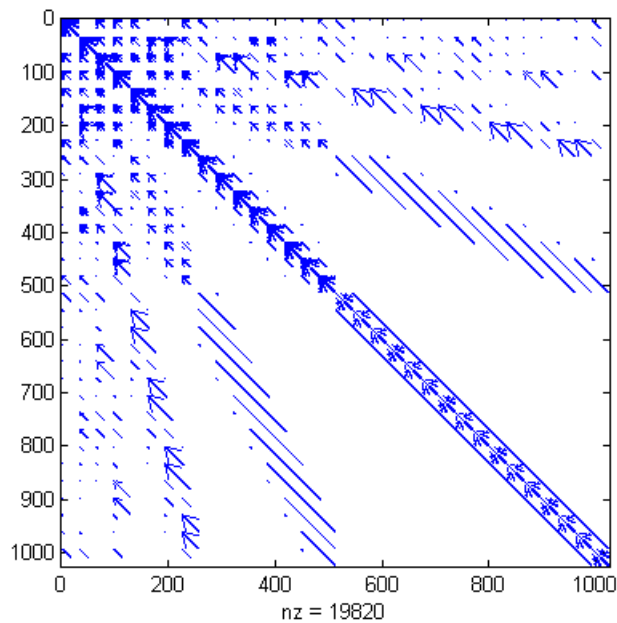


Figura 23 - Matriz $[Z_{mn}]$ com a utilização de *wavelets* com limiar de 0,1%.

As distribuições de densidade de carga obtida pelo o método tradicional e com funções *wavelets* são mostradas na figura 24.

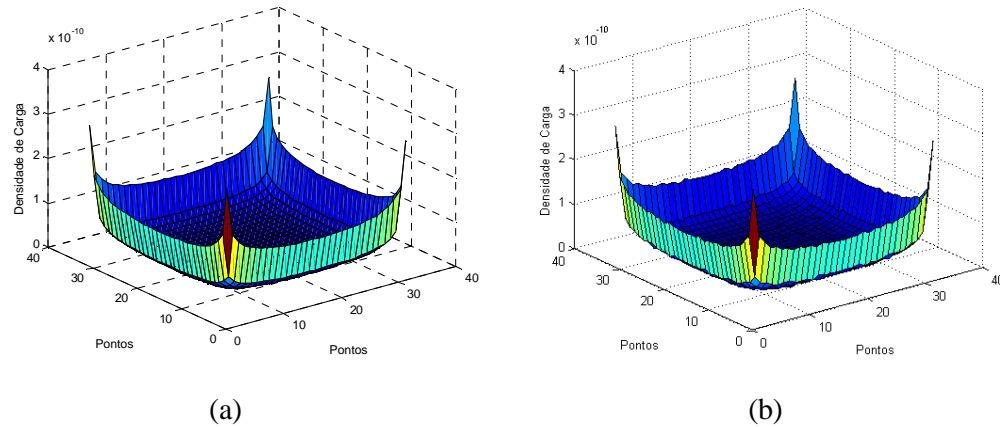


Figura 24 – (a) Densidade superficial de carga sobre a placa superior utilizando método dos momentos tradicional, (b) Densidade superficial de carga sobre a placa superior utilizando *wavelets*.

Finalmente, os resultados para uma discretização de 16 pontos é mostrada na tabela 10, onde pode ser visto que a diferença a densidade em cada ponto da placa é menor que $0,9332E-13$.

Tabela 10 - Densidade de carga em uma placa plana com 16 subdivisões.

<i>S/ wavelet</i>	<i>C/ wavelet</i>
7,5751E-11	7,5710E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
7,5751E-11	7,5710E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
3,2993E-11	3,2900E-11
3,2993E-11	3,2900E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
3,2993E-11	3,2900E-11
3,2993E-11	3,2900E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
7,5751E-11	7,5710E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
5,4699E-11	5,4770E-11
7,5751E-11	7,5710E-11

4.3.3 Cálculo de corrente em antenas dipolo

Para esta aplicação é utilizada uma antena dipolo de meio comprimento de onda, que consiste em um fio fino excitado em seu centro por uma linha de transmissão, por

uma fonte senoidal. A distribuição de corrente em uma antena dipolo de meia onda é ilustrada na figura 25.

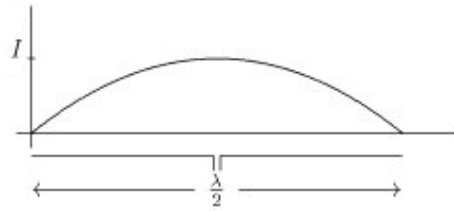


Figura 25 – Distribuição de corrente em uma antena dipolo de meia onda.

Neste caso o limiar para cancelamento dos termos da matriz é 0,01%. Para este exemplo foi utilizada apenas a decomposição LU juntamente com a inversão direta de matrizes. Na tabela 11 podem ser vistos os tempos de processamento com 1024 e 2048 e a tabela 12 são apresentadas as distribuições de corrente para as matrizes cheia e esparsa respectivamente, obtidas com 16 pontos. A diferença máxima entre os resultados é na ordem de 0,244%.

Tabela 11 - Resultado encontrado para análise de 1024 e 2048 pontos, quanto ao valor da impedância de entrada e tempo de resolução da equação linear.

	Pontos	Inversão		LU c/ wavelet
		Direta	Direta c/ Wavelet	
Re(Z _{in}) (Ω)	1024	81,0506	78,7587	78,7587
	2048	81,0855	78,4506	78,4506
Tempo (s)	1024	0,7644	0,0312	0,0624
	2048	4,4928	0,078	0,234

Tabela 12 - Corrente sobre uma antena com 16 subdivisões.

<i>Re(I) (A)</i>	
S/wavelet	C/wavelet
0,000747984	0,000749819
0,001426947	0,001430057
0,002047862	0,00205227
0,002597556	0,002602969
0,003060213	0,003066644
0,003421239	0,003428256
0,003668792	0,003676226
0,003794589	0,003801464
0,003794391	0,003801266
0,003668216	0,003675651
0,003420341	0,003427358
0,00305908	0,003065512
0,00259631	0,002601723
0,002046648	0,002051057
0,001425934	0,001429044
0,000747361	0,000749196

As distribuições de corrente sobre a antena são mostradas na figura 26 para 1024 pontos. Já na figura 27, encontra-se uma matriz esparsa com 97,47% de redução em número de elementos não nulos. Nota-se que conforme a figura 25, a distribuição de corrente sobre a antena, é nula em suas extremidades e máxima em seu centro, onde é aplicada a excitação.

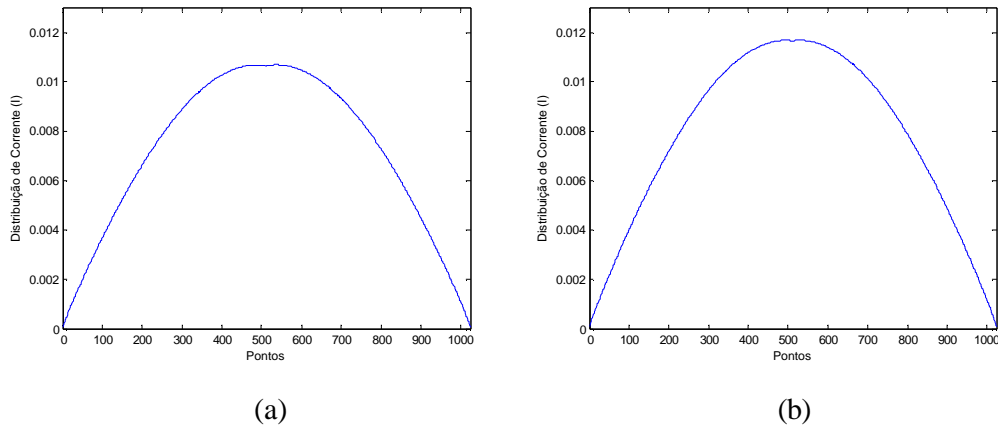


Figura 26 – Corrente sobre a antena com 1024 subdivisões para (a) método dos momentos tradicional e (b) utilizando pré-processamento.

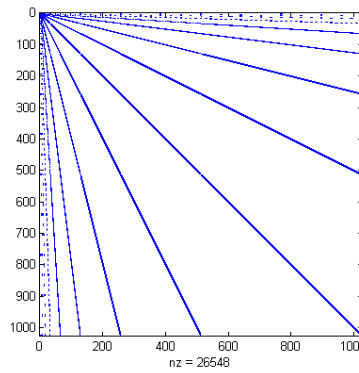


Figura 27 – Matriz $[Z_{mn}]$ pré-processada para 1024 elementos.

Para a análise de 2048 pontos, encontra-se uma matriz com 98,46% de redução de elementos, gerando uma matriz extremamente esparsa, conforme figura 28. As distribuições de corrente na antena para o método tradicional e o método de Galerkin são ilustradas na figura 29.

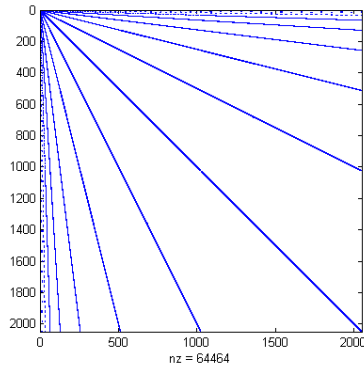


Figura 28 - Matriz $[Z_{mn}]$ pré-processada para 2048 elementos.

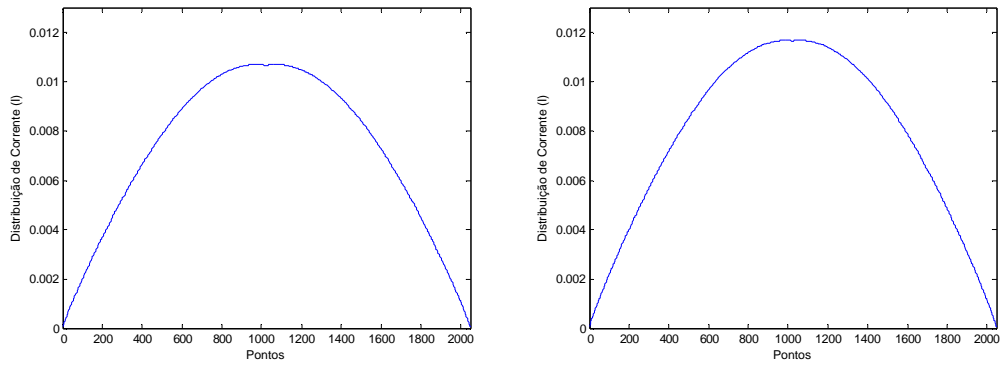


Figura 29 - Corrente sobre a antena com 2048 subdivisões para (a) método dos momentos tradicional e (b) utilizando pré-processamento.

5 CONCLUSÃO

As soluções de problemas físicos através de métodos numéricos agregam grande valor em estudos relacionados ao eletromagnetismo, mas demandam grande esforço computacional para resolução dos problemas, pois geram matrizes grandes e cheias. Neste contexto, as *wavelets* foram estudadas e utilizadas neste trabalho com o objetivo de tornar as matrizes dos problemas mais esparsas, diminuindo consideravelmente o esforço computacional e o tempo de solução do problema.

As funções *wavelets* aplicadas ao método de Galerkin, realizando o pré-processamento de matrizes de impedância geradas pelo método dos momentos, trouxeram uma diminuição maior que 99% no número de elementos da matriz de impedâncias, dependendo do limiar e da discretização utilizada no problema. Foram destacadas, nas três aplicações, vantagens na utilização do método, principalmente no tempo de resolução do sistema, apresentando erros entre 0,0013% e 2%, dependendo da aplicação analisada.

Outras pesquisas podem ser realizadas na área de eletrostática, com a utilização de *wavelets*. O mesmo método pode ser aplicado utilizando outras funções *wavelets* além da *wavelet* de Haar, como Chapéu Mexicano e Daubechies. Além disso, pode-se avaliar a utilização da nova geração de transformada de *wavelet* (*lifting scheme*) para utilização no método de Galerkin e estudo da aplicação das funções *wavelets* no método dos elementos finitos.

6 REFERÊNCIAS

- [1] TAFLOVE, A., HAGNESS, S. C. *Computational Eletrodynamics: The finite-difference Time-domain method*. Norwood: Artech House Inc., 2005.
- [2] HARRINGTON, R. F. *Field Computation by Moment Methods*. United States of America: IEEE Press, 1993.
- [3] SADIKU, M. N. O. *Numerical Techniques in Eletromagnetics*. Estados Unidos da América: CRC Press, 2000.
- [4] ODEN, J. T., REDDY, J. N. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. Estados Unidos da América: John Wiley&Sons, 1976.
- [5] PEDROZA, J. S., FIGUEROA, V. B., BONILLA, J. L. Pocklington equation and the method of moments. **Proc. Pakistan Acad. Sci**, vol.42, n.4, p.243-247, nov 2005.
- [6] JONES, D. S. A Critique of the Variational Method in Scattering Problems. **Electromagnetic Wave Theory Symposium**, Nova Iorque, p.297-301.
- [7] NEY, M. M. Method of Moments as applied to Electromagnetic Problems. **IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques**, vol.33, n.10, p.972-980, out 1985.
- [8] MEI, K. K. *On the integral equations of thin wire antennas*. **IEEE Transaction on Antennas and propagation**, vol.13, n.3, p.374-378.
- [9] PING, R. W. P. *The linear Antenna – Eighty years of progress*. **Proceedings of the IEEE**, vol.55, n.1, p.2-16, jan 1967.
- [10] PAN, G., TOUPIKOV, M. V., GILBERT, B. K. *On the Use of Coifman Intervallic Wavelets in the Method of Moments for Fast Construction of Wavelet Sparsified Matrices*. **IEEE Transaction on Antennas and Propagation**, vol.47, n.7, p.1189-1200, jul 1999.
- [11] BELARDI, A. A., CARDOSO, J. R., SARTORI, C. A. F. Contribuição à aplicação das *Wavelets* na eletrostática. **Controle & Automação**, São Paulo, vol.16, n.1, p.34-43, mar 2005.
- [12] BELARDI, A. A. **Contribuição à aplicação das *Wavelets* na eletrostática**. São Paulo, 2003. Tese (Doutor em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [13] STEINBER, B. Z., LEVIATAN, Y. *On the Use of Wavelet Expansions in the Method of Moments*. **IEEE Transaction on Antennas and Propagation**, vol.41, n.5, p.610-619, mai 1993.

- [14] WAGNER, R. L., CHEW, W. C. *A Study of wavelets for the solution of Electromagnetic Integral Equations*. **IEEE Transaction on Antennas and propagation**, vol.43, n.8, p.802-810, aug 1995.
- [15] HO, S. L., WONG, H. C. *Weak Formulation of finite element method using wavelet basis functions*. **IEEE Transaction on Magnetics**, vol.37, n.5, p.3203-3207, set 2001.
- [16] GALVÃO, R. K. H., et al. Estudo comparativo sobre filtragem de sinais instrumentais usando transformadas de Fourier e *Wavelet*. **Química Nova**, São Paulo, vol.24, n.6, p.874-884, 2001.
- [17] GRAPS, A. An introduction to *Wavelets*. **IEEE Computational Science & Engineering**, USA, vol.2, n.2, p.50-61, summer 1995.
- [18] DAUBECHIES, I, *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia:SIAM,1992.
- [19] GARGOUR, C., et al. *A short introduction to Wavelets and their applications*. **IEEE Circuits and Systems Magazine**, Notre Dame, vol.9, n.2, p.57-68, ago 2009.
- [20] BERNAL, C. P., GALDINO, J. F., APOLINÁRIO JR, J. A. O algoritmo LMS no domínio da Transformada *Wavelet* aplicado a filtros Volterra. **XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT’05**, Campinas, p.771-776, set 2005.
- [21] PAN, G. *Orthogonal Wavelets with Applications in Electromagnetics*, **IEEE Transaction on Magnetics**, Arizona, vol.32, n.3, p.975-983, mai 1996.
- [22] AKANSU, A. N., HADDAD, R. A.. **Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands and Wavelets**. 2 ed. New Jersey:Academic Press, 2001.
- [23] BEYLKIN, G., COIFMAN, R, ROKLIN, V. *Fast wavelet transforms and numerical algorithm*. **Comm. Pure Appl. Math.**, vol.44, p.141-183, 1991.
- [24] SADIKU, M. N. O., AKUJUOBI, C. M., GARCIA, R. C. An Introduction to *Wavelets* in Electromagnetics. **IEEE Microwave Magazine**, USA, vol.6, p. 63-72, jun 2005.
- [25] BALLANIS, C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. USA:John Wiley and Sons, 1989.
- [26] DENG, H., LING, H. *Wavelet-based preconditioner for three-dimensional electromagnetic integral equations*. **Electronics Letters**, vol.36, n.25, p.2063-2065, jul 2000.
- [27] PAN, G. W. **Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling**. United States of America: Wiley-Interscience, 2002.
- [28] STARK, H. -G. **Wavelets and Signal Processing: An application – Based introduction**. Aschaffenburg: Springer, 2005.

[29] VALENS, C. (2004). *A Really Friendly Guide to Wavelets*. [Online]. Disponível:
<http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/elems/wavelets/wavelets.html>

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)