

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Adriano Cavalcante Bezerra

**SUPERFÍCIES DE BIANCHI COM ÂNGULO DE
CHEBYSHEV CONSTANTE**

Goiânia
2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ADRIANO CAVALCANTE BEZERRA

**SUPERFÍCIES DE BIANCHI COM ÂNGULO DE
CHEBYSHEV CONSTANTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Armando Mauro Vasquez Corro.

Goiânia

2010

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

B574s Bezerra, Adriano Cavalcante.
Superfícies de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante
[manuscrito] / Adriano Cavalcante Bezerra. - 2010.
69 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística, 2010.
Bibliografia.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Superfície de Bianchi 3. Ângulo
de Chebyshev constante I. Título

CDU:517.987.5

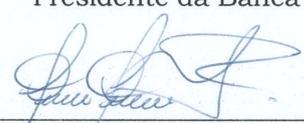
ADRIANO CAVALCANTE BEZERRA

**SUPERFÍCIES DE BIANCHI COM ÂNGULO
DE CHEBYSHEV CONSTANTE**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 01 de outubro de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Carlos Maber Carrión Riveros
Departamento de Matemática - UnB



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem a autorização da universidade, do orientador e do autor(a).

Adriano Cavalcante Bezerra

Graduou-se em matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante o Mestrado, também pela UFG, estudou problemas de classificação de superfícies. Atualmente é professor substituto do IME - Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

*Aos
meus pais,
Manoel e Diva.
Ao meu irmão Aldane,
de quem eu sinto saudades.
À minha querida esposa Nádyá.
Aos meus filhos, Yasmim e Raul.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade de estudar matemática. Agradeço ao meu pai, Manoel Bezerra, que sempre tentou me dar todas as condições necessárias para que eu conseguisse estudar. Agradeço a minha mãe, Maria Diva, que sempre me incentivou e deu apoio em minhas decisões. Agradeço a minha querida esposa, Nádyá Pedrosa Bezerra, pela compreensão nos momentos de dificuldades que às vezes os estudos nos impõe. Agradeço a toda minha família pela compreensão e apoio necessários na minha jornada.

Agradeço muito ao professor Armando Corro, pela honra de ser seu orientando. Por acreditar na minha capacidade. Por dividir o seu precioso tempo comigo em algumas tardes de orientação. Por ser mais do que um orientador. Por ser um amigo.

Ao professor Marcelo Almeida, que sempre me auxiliou e sempre se demonstrou uma pessoa maravilhosa com todos os seus alunos.

Ao meu primeiro orientador, dos tempos de iniciação científica, que me apresentou o fantástico mundo da geometria, professor Romildo Pina, pela amizade, compreensão e companheirismo.

Aos professores Fábio Vitoriano e Alacyr, pela disposição em me ajudar nos momentos necessários.

Ao professor e amigo Max Leandro, por me ajudar na correção e formatação da dissertação.

Aos professores que me deram a honra de comporem a banca examinadora, Armando Mauro Vasquez Corro, Carlos Maber Carrion Riveros (Universidade de Brasília), Romildo da Silva Pina e Rosângela Maria da Silva.

A todos os professores e funcionários do IME que contribuíram para minha formação.

Em especial ao Professor Ronaldo Alves Garcia, pela grande ajuda nos cálculos e por fazer dos momentos de dificuldades, simples oportunidades para uma reflexão.

Este trabalho tem como referência Bianchi Surfaces with constant Chebyshev angle.

Atsushi Fujioka,

Bianchi Surfaces with constant Chebyshev angle.

Resumo

Bezerra, Adriano Cavalcante. **Superfícies de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante**. Goiânia, 2010. 69p. Dissertação de Mestrado. IME-Instituto de Matemática e Estatística. UFG - Universidade Federal de Goiás.

As superfícies de Bianchi pertencem a uma classe de superfícies com curvatura Gaussiana negativa, descobertas pela generalização da transformação de Backlund para superfícies com curvatura Gaussiana negativa constante [3]. Hoje em dia estas superfícies são estudadas do ponto de vista da teoria dos sistemas integráveis.

Neste trabalho estudaremos superfícies de Bianchi parametrizadas pela Malha de Chebyshev Generalizada e mostraremos que tal superfície com ângulo de Chebyshev constante é um pedaço de helicóide, ver [1].

Palavras-Chave

Superfícies de Bianchi, ângulo de Chebyshev.

Abstract

Bezerra, Adriano Cavalcante. **Bianchi Surfaces with constant Chebyshev angle**. Goiânia, 2010. 69p. MSc Dissertation. IME - Institute of Mathematics and Statistics. UFG - Federal University of Goiás.

The Bianchi surfaces belong to a class of surfaces with negative Gaussian curvature, discovered by generalization of Backlund transformation for surfaces with constant negative Gaussian curvature [3]. Today these areas are studied from the viewpoint of the theory of integrable systems.

In this paper we study Bianchi surfaces parameterized by a Generalized Chebyshev net and show that such a surfaces with Chebyshev constant angle is a piece of a right helicoid, see [1].

Keywords

Bianchi Surfaces, Chebyshev angle.

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	14
1.1 Resultados básicos de Geometria	14
1.2 Campos de Vetores	32
1.3 Símbolos de Christoffel e as Equações de Compatibilidade	35
2 Superfícies de Bianchi	43
2.1 Equações de Compatibilidade para superfícies parametrizadas por linhas assintóticas	43
2.2 Superfícies de Bianchi	56
2.3 Superfícies de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante	68
Conclusão	71
Referências Bibliográficas	72

Introdução

Bianchi foi um geômetra italiano que na segunda metade do século *XIX* deu início à teoria das transformações que levam superfícies de um certo tipo em superfícies do mesmo tipo. Estas superfícies estão associadas à soluções de certas edp's não lineares de segunda ordem cuja importância se deve ao fato de estarem intimamente relacionadas a diversos fenômenos físicos.

Nestas notas iniciaremos com um apanhado geral da teoria de Superfícies, que em particular são também Variedades Riemannianas. Trabalharemos com superfícies parametrizadas por linhas assintóticas e com curvatura Gaussiana negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho = \rho(x, y)$ é uma função positiva. Diremos que uma superfície é de Bianchi se $\rho = f(x) + g(y)$. Diremos também que a superfície está parametrizada pela Malha de Chebyshev Generalizada se $|X_x| = |X_y|$, onde $X = X(x, y)$ é a parametrização da superfície. Neste trabalho estudaremos superfícies de Bianchi parametrizadas pela Malha de Chebyshev Generalizada e mostraremos que tal superfície com ângulo de Chebyshev constante é um pedaço de helicóide.

No capítulo 1 introduziremos alguns conceitos sobre a Geometria das superfícies. Definiremos as primeira e segunda formas fundamentais. Explicitaremos os símbolos de Christoffel e concluiremos com o clássico Teorema Fundamental das Superfícies.

No capítulo 2 encontraremos as expressões para as equações de compatibilidade de uma superfície cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas. Provaremos que o ângulo de Chebyshev para uma Superfície de Bianchi parametrizada pela Malha de Chebyshev Generalizada é constante igual a $\frac{\pi}{2}$ e que ρ é uma função de uma só variável. Concluiremos com um teorema de classificação, exibindo uma superfície com curvatura Gaussiana negativa não constante.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve abordagem dos resultados básicos sobre a geometria das superfícies. Obteremos as equações de compatibilidade e explicitaremos as expressões dos símbolos de Christoffel. Concluiremos com o clássico teorema fundamental da teoria das superfícies.

1.1 Resultados básicos de Geometria

Para expormos alguns dos resultados básicos, iniciaremos com algumas definições.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

- i) $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.*
- ii) Para todo par α, β , com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ são diferenciáveis.*
- iii) A família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições i) e ii).*

A aplicação X_α é chamada uma parametrização de M em $p \in X_\alpha(U_\alpha)$.

Definição 1.2 *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n , respectivamente. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, φ é um homeomorfismo sobre*

$\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , dizemos que φ é um **mergulho**.

O próprio \mathbb{R}^3 é uma variedade de dimensão 3.

É de fácil verificação que uma superfície regular é uma subvariedade de dimensão 2 do \mathbb{R}^3 , isto é, mergulhada em \mathbb{R}^3 . Trabalharemos apenas com superfícies S mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Daremos então uma definição de superfície regular, equivalente à definição de uma variedade diferenciável de dimensão 2.

Definição 1.3 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

- i) X é diferenciável.
- ii) X é um homeomorfismo.
- iii) Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação $X(x, y) = (x(x, y), y(x, y), z(x, y))$ é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em uma vizinhança de $X(q) = p$. A vizinhança $V \cap S$ de p é chamada uma vizinhança coordenada.

Analisemos a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 com coordenadas (x, y) e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ e $f_3 = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) .

Seja $q = (x_0, y_0)$. O vetor e_1 é tangente à curva $x \rightarrow (x, y_0)$ cuja imagem por X é a curva

$$x \rightarrow (x(x, y_0), y(x, y_0), z(x, y_0)).$$

Esta curva é chamada curva coordenada $v = v_0$ e está contida em S , tendo em $X(q)$ o vetor tangente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial X}{\partial x},$$

onde as derivadas são calculadas em (x_0, y_0) e um vetor é indicado pelas suas componentes na base $\{f_1, f_2, f_3\}$. Pela definição de diferencial,

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Analogamente, usando a curva coordenada $x = x_0$ (imagem por X da curva $y \rightarrow (x_0, y)$), obtemos

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Portanto, a matriz da aplicação linear dX_q nas bases consideradas é,

$$d\mathbf{X}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

A condição *iii*) da definição 1.3 pode ser expressa equivalentemente da seguinte forma: os dois vetores coluna da matriz de dX_q são linearmente independentes, o que significa que o produto vetorial $\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y}$ é não nulo.

Um vetor w tangente à superfície S , $w \in T_p S$, é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(x(t), y(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(x_0, y_0)$ em um ponto $X(q) = p \in S$. Assim, w é expresso como $w = \alpha'(0) = X_x dx + X_y dy$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ é uma aplicação diferenciável que descreve uma curva em S , com $\alpha(0) = p$.

Denotaremos por $T_p S$ o plano tangente à superfície S em p , que pela condição *iii*) da definição de superfície regular é exatamente o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , passando por p .

Definição 1.4 Uma **forma bilinear e simétrica** é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é linear em w e v .

Definição 1.5 Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(w) = \langle w, w \rangle$, para todo $w \in \mathbb{R}^n$. Esta função de uma variável é denominada **forma quadrática sobre \mathbb{R}^n** associada à forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se $w, v \in$

$T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w, v \rangle_p$ é igual ao produto interno de w e v como vetores em \mathbb{R}^3 . A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

Definição 1.6 A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$, é chamada a **primeira forma fundamental** da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

A primeira forma fundamental é antes de tudo uma forma de dizer que a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 .

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_x, X_y\}$ associada a uma parametrização $X(x, y)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(x(t), y(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(x_0, y_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_x dx + X_y dy, X_x dx + X_y dy \rangle_p \\ &= \langle X_x, X_x \rangle_p (dx)^2 + 2 \langle X_x, X_y \rangle_p dx dy + \langle X_y, X_y \rangle_p (dy)^2 \\ &= E(dx)^2 + 2F dx dy + G(dy)^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0) &= \langle X_x, X_x \rangle_p, \\ F(x_0, y_0) &= \langle X_x, X_y \rangle_p, \\ G(x_0, y_0) &= \langle X_y, X_y \rangle_p \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_x, X_y\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\{X_x, X_y\}$, obtemos funções $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, omitiremos o índice p na indicação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p , quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S em um ponto, podemos escolher, para cada ponto de $X(U)$, um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|}(q), \quad q \in X(U).$$

Temos então uma aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

Se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q , dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em V .

Nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos sobre toda a superfície. Mas quando tal fato se verificar diremos que a superfície regular é orientável. A escolha do campo N é chamada uma orientação de S . É claro que toda superfície é localmente orientável. E a orientação é uma propriedade global (das superfícies que são orientáveis).

Daqui pra frente vamos nos referir a uma superfície S como sendo uma superfície regular orientável e orientada.

Definição 1.7 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

*Logo, $N : S \rightarrow S^2$. Esta aplicação é conhecida como **aplicação normal de Gauss de S** .*

A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em T_pS^2 . Como os espaços T_pS e T_pS^2 são isomorfos, podemos olhar a dN_p como uma aplicação linear em T_pS , ou seja, $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$.

Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N \circ \alpha(t) = N(t)$ na esfera S^2 ; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\alpha(t)$ em $t = 0$. Assim, a dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . Esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Proposição 1.1 *A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto adjunta.*

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS . Seja $X(x, y)$ uma parametrização de S em p e $\{X_x, X_y\}$ a base associada de T_pS . Se $\alpha(t) = X(x(t), y(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_x x' + X_y y') \\ &= \frac{d}{dt} N(x(t), y(t)) \text{ em } t = 0 \\ &= N_x x'(0) + N_y y'(0); \end{aligned}$$

como $dN_p(X_x) = N_x$ e $dN_p(X_y) = N_y$, basta mostrar que

$$\langle N_x, X_y \rangle = \langle X_x, N_y \rangle.$$

Derivando $\langle N, X_x \rangle = 0$ e $\langle N, X_y \rangle = 0$, em relação a x e y , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_y, X_x \rangle + \langle N, X_{xy} \rangle &= 0, \\ \langle N_x, X_y \rangle + \langle N, X_{yx} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Logo, igualando as duas equações acima temos

$$\langle N_y, X_x \rangle + \langle N, X_{xy} \rangle = \langle N_x, X_y \rangle + \langle N, X_{yx} \rangle,$$

ou seja, como $\langle N, X_{xy} \rangle = \langle N, X_{yx} \rangle$ temos que

$$\langle N_x, X_y \rangle = \langle N_y, X_x \rangle.$$

□

Sendo $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ uma aplicação linear auto-adjunta podemos associar a dN_p uma forma quadrática Q em $T_p(S)$, dada por $Q(v) = \langle dN_p v, v \rangle$. Para darmos uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisamos de algumas definições.

Definição 1.8 A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p v, v \rangle$ é chamada a **segunda forma fundamental** de S em p .

Definição 1.9 Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos\theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos\theta$ é chamado a **curvatura normal** de $C \subset S$ em p .

k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação N de S em p .

Observação 1.1 *A curvatura normal de C não depende da orientação de C , mas inverte o sinal com uma mudança de orientação da superfície.*

Considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Portanto, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v . Assim, segue-se o resultado abaixo.

Proposição 1.2 (*Meusnier*) *Todas as curvas de uma superfície S que têm, em um ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

A proposição acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em p . Dado um vetor unitário $v \in T_pS$, a interseção de S com o plano contendo v e $N(p)$ é chamada a seção normal de S em p segundo v . Em uma vizinhança de p , uma seção normal de S em p é uma curva regular plana em S , cujo vetor normal n em p é $\pm N(p)$ ou zero; a sua curvatura é, portanto, igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo v em p . Assim, a proposição acima afirma que o valor absoluto da curvatura normal em p de uma curva $\alpha(s)$ é igual à curvatura da seção normal de S em p , segundo $\alpha'(0)$.

O teorema abaixo nos diz que para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que $dN_p(e_1) = -k_1e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2e_2$. Além disso, k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pS , ou seja, são os valores extremos da curvatura normal em p .

Teorema 1.1 *Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^n tais que $A(e_1) = \lambda_1 e_1$, $A(e_2) = \lambda_2 e_2$, (isto é, e_1 e e_2 são auto-vetores, e λ_1, λ_2 são auto-valores de A). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de A é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(w) = \langle Aw, w \rangle$ sobre o círculo unitário de \mathbb{R}^n .*

Definição 1.10 *O máximo da curvatura normal, k_1 , e o mínimo da curvatura normal, k_2 , são chamados **curvaturas principais** em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas **direções principais** em p .*

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular a curvatura normal segundo uma direção dada de $T_p S$. De fato, se $v \in T_p S$ e $|v| = 1$, como e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de $T_p S$, temos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de $T_p S$. A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} k_n = II_p(v) &= -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= -\langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

A expressão $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$ é conhecida como fórmula de Euler. Ela é a expressão da segunda forma fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Dada uma aplicação linear $A : V \rightarrow V$ em um espaço vetorial de dimensão 2 e dada uma base $\{v_1, v_2\}$ de V , lembramos que determinante de A e traço de A é dado por

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \text{Tr } A &= a_{11} + a_{22}, \end{aligned}$$

onde (a_{ij}) é a matriz de A na base $\{v_1, v_2\}$. Esses números não dependem da base escolhida, sendo, portanto, associados à aplicação linear A .

No nosso caso, o determinante de dN é o produto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$, e o traço de dN é $-(k_1 + k_2)$. Se mudamos a orientação da superfície, o determinante não muda (aqui é fundamental o fato da dimensão ser par); o traço, porém, muda de sinal.

Definição 1.11 *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a **Curvatura Gaussiana** K de S em p . O negativo da metade do traço de dN é chamado a **Curvatura Média** de S em p .*

Logo temos as seguintes expressões para a curvatura Gaussiana K e para a curvatura média H

$$K = k_1k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Definição 1.12 *Um ponto p de uma superfície S é dito um ponto:*

- i) **Elíptico** se $\det(dN_p)$ for positivo.*
- ii) **Hiperbólico** se $\det(dN_p)$ for negativo.*
- iii) **Parabólico** se $\det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$.*
- iv) **Planar** se $dN_p = 0$.*

A classificação acima não depende da orientação escolhida para S .

Cada ponto tem, conforme sua natureza, suas particularidades em relação às curvaturas principais. Por exemplo em um ponto hiperbólico, a curvatura Gaussiana é negativa. Logo, as curvaturas principais têm sinais contrários e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos vetores normais em p apontam para lados diferentes do plano tangente à superfície S em p .

Definição 1.13 *Seja p um ponto em S . Uma **direção assintótica** de S em p é uma direção de T_pS para a qual a curvatura normal é nula. Uma **curva assintótica** de S é uma curva conexa e regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.*

Logo, pela definição temos que em um ponto elíptico não existem direções assintóticas.

Uma interpretação geométrica para as direções assintóticas é dada pela indicatriz de Dupin. Vejamos.

Definição 1.14 *Seja p um ponto de S . A **indicatriz de Dupin** em p é o conjunto de vetores de T_pS tais que $II_p(w) = \pm 1$.*

Para escrever as equações da indicatriz de Dupin de uma maneira conveniente, sejam (ϵ, η) as coordenadas cartesianas de T_pS na base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, onde e_1 e e_2 são autovetores de dN_p . Dado $w \in T_pS$, considere γ e θ como se fosse coordenadas polares definidas por $w = \gamma v$, com $|v| = 1$ e $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, se $\gamma \neq 0$. Pela fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 = II_p(w) &= \gamma^2 II_p(v) \\ &= k_1 \gamma^2 \cos^2 \theta + k_2 \gamma^2 \sin^2 \theta \\ &= k_1 \epsilon^2 + k_2 \eta^2, \end{aligned}$$

onde $w = \epsilon e_1 + \eta e_2$. Assim, as coordenadas (ϵ, η) de um ponto da indicatriz de Dupin satisfazem a equação

$$k_1 \epsilon^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1;$$

logo, a indicatriz de Dupin é a união de cônicas em T_pS . Notamos que a curvatura normal ao longo da direção determinada por w é

$$k_n(v) = II_p(v) = \pm \frac{1}{\gamma^2}.$$

Para um ponto hiperbólico, k_1 e k_2 têm sinais opostos. A indicatriz de Dupin é então formada por duas hipérbolas com um par comum de linhas assintóticas. Ao longo das direções assintóticas, a curvatura normal é nula; elas são, portanto, direções assintóticas. Isso justifica a terminologia e mostra que um ponto hiperbólico tem exatamente duas direções assintóticas.

Para um ponto parabólico, uma das curvaturas principais é nula, e a indicatriz de Dupin degenera em um par de retas paralelas. A direção comum dessas retas é a única direção assintótica no ponto em questão.

Definiremos a seguir um conceito relacionado com o de direção assintótica.

Definição 1.15 *Seja p um ponto de uma superfície S . Dois vetores não nulos $w_1, w_2 \in T_pS$ são conjugados se $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle = 0$. Duas direções r_1, r_2*

em p são conjugadas se um par de vetores não nulos w_1, w_2 , paralelos, respectivamente, a r_1 e r_2 , são conjugados.

As direções conjugadas não depende da escolha dos vetores w_1 e w_2 em r_1 e r_2 .

Segue-se da definição que as direções principais são conjugadas e que uma direção assintótica é conjugada de si mesma.

Obteremos agora as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais.

Todas as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ consideradas nesta seção são compatíveis com a orientação N de S ; ou seja, em $X(U)$, temos que $N = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|}$.

Seja $X(x, y)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S , e seja $\alpha(t) = X(x(t), y(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Por conveniência e simplificação da notação, todas as funções que aparecerem serão tomadas no ponto p .

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_x x' + X_y y'$ e

$$dN(\alpha') = N'(x(t), y(t)) = N_x x' + N_y y'$$

Como N_x e N_y pertencem a $T_p S$, temos

$$N_x = a_{11} X_x + a_{21} X_y,$$

$$N_y = a_{12} X_x + a_{22} X_y,$$

e portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11} x' + a_{21} y') X_x + (a_{12} x' + a_{22} y') X_y;$$

ou seja,

$$dN \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{X_x, X_y\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$. Esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que $\{X_x, X_y\}$ seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_x, X_y\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_x dx + N_y dy, X_x dx + X_y dy \rangle \\ &= e(dx)^2 + 2fdxdy + g(dy)^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_x, X_x \rangle = \langle N, X_{xx} \rangle, \\ f &= -\langle N_y, X_x \rangle = \langle N, X_{xy} \rangle = \langle N, X_{yx} \rangle = -\langle N_x, X_y \rangle, \\ g &= -\langle N_y, X_y \rangle = \langle N, X_{yy} \rangle. \end{aligned}$$

Os coeficientes e , f e g são chamados coeficientes da segunda forma fundamental. Obteremos agora os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e , f , g . De

$$\begin{aligned} N_x &= a_{11}X_x + a_{21}X_y, \\ N_y &= a_{12}X_x + a_{22}X_y, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_x, X_x \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_x, X_y \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_y, X_x \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= \langle N_y, X_y \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_x, X_y\}$. As relações acima para os coeficientes e , f e g podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

Com um simples cálculo pode-se mostrar que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

e portanto temos as seguintes expressões para os coeficientes a_{ij} da matriz de dN na base $\{X_x, X_y\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

As expressões para N_x e N_y com os valores dos a_{ij} 's obtidos acima são conhecidas como equações de Weingarten. Vejamos então como ficam as expressões das equações de Weingarten.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} X_x + \frac{eF - fE}{EG - F^2} X_y \\ N_y &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} X_x + \frac{fF - gE}{EG - F^2} X_y. \end{aligned}$$

A partir da equação matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

obtemos a seguinte expressão para a curvatura Gaussiana

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Para uma expressão da curvatura média em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, lembremos que $-k_1$ e $-k_2$ são os autovalores de dN . Logo k_1 e k_2 , satisfazem à equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v), \quad \text{para algum } v \in T_p S, v \neq 0,$$

onde I é a aplicação indentidade. Decorre que a aplicação linear $dN + kI$ não é invertível e, portanto, tem determinante nulo. Assim,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

ou

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação quadrática acima, temos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2};$$

o que implica

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

A partir da relação acima, segue-se que, escolhendo $k_2(q) \leq k_1(q)$, $q \in S$, as funções k_1 e k_2 são contínuas em S . Além disso, k_1 e k_2 são diferenciáveis em S , com uma possível exceção dos pontos de S onde $k_1 = k_2$, ou seja, $H^2 = K$. Tais pontos são conhecidos como **pontos umbílicos**.

Observemos agora um fato local geral para superfícies. Dada a natureza de alguns pontos, podemos observar a posição de uma superfície S em relação ao plano tangente T_pS . Ilustremos este fato na seguinte proposição.

Proposição 1.3 *Seja $p \in S$ um ponto elíptico de uma superfície S . Então existe uma vizinhança V de p em S tal que todos os pontos de V estão do mesmo lado do plano tangente T_pS . Seja p um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança V de p existem pontos de ambos os lados de T_pS .*

Demonstração. Seja $X(x, y)$ uma parametrização em p , com $X(0, 0) = p$. A distância d , de um ponto $q = X(x, y)$ ao plano tangente T_pS é dada por

$$d = \langle X(x, y) - X(0, 0), N(p) \rangle.$$

Como $X(x, y)$ é diferenciável, temos a fórmula de Taylor:

$$X(x, y) = X(0, 0) + X_x x' + X_y y' + \frac{1}{2} (X_{xx} x^2 + 2X_{xy} xy + X_{yy} y^2) + \bar{R},$$

onde as derivadas são calculadas em $(0, 0)$ e o resto \bar{R} satisfaz a condição

$$\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow 0} \frac{\bar{R}}{x^2 + y^2} = 0 \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} d &= \langle X(x, y) - X(0, 0), N(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle X_{xx}, N(p) \rangle x^2 + 2 \langle X_{xy}, N(p) \rangle xy + \langle X_{yy}, N(p) \rangle y^2 \} + R \\ &= \frac{1}{2} (ex^2 + 2fxy + gy^2) + R = \frac{1}{2} II_p(w) + R, \end{aligned}$$

onde $w = X_x x + X_y y$, $R = \langle \bar{R}, N(p) \rangle$, $\lim_{|w| \rightarrow 0} \left(\frac{R}{|w|^2} \right) = 0$ com $w \rightarrow 0$.

Em um ponto elíptico p , $II_p(w)$ tem sinal fixo. Portanto, para todo (x, y) suficiente próximo a p , d tem o mesmo sinal que $II_p(w)$; isto é, todos os pontos (x, y) estão do mesmo lado de $T_p S$.

Para um ponto hiperbólico p , em cada vizinhança de p existem pontos (x, y) e (\bar{x}, \bar{y}) tais que $II_p\left(\frac{w}{|w|}\right)$ e $II_p\left(\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}\right)$ têm sinais opostos; tais pontos pertencem, portanto, a lados distintos de $T_p S$. Observe que $\bar{w} = X_x \bar{x} + X_y \bar{y}$.

□

A expressão da segunda forma fundamental em coordenadas locais é particularmente útil para estudar as direções assintóticas.

Seja $X(x, y)$ uma parametrização de $p \in S$, com $X(0, 0) = p$, e sejam $e(x, y) = e$, $f(x, y) = f$, e $g(x, y) = g$ os coeficientes da segunda forma fundamental nesta parametrização.

Lembramos da definição 1.13 que uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada X é uma assintótica se e somente se, para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = X(x(t), y(t))$, $t \in I$, de C temos $II_p(\alpha'(t)) = 0$, para todo $t \in I$; isto é, se e somente se

$$e(x')^2 + 2fx'y' + g(y')^2 = 0, \quad t \in I.$$

A equação acima é conhecida como equação diferencial das linhas assintóticas.

Uma condição necessária e suficiente para uma parametrização em uma vizinhança de um ponto hiperbólico ($eg - f^2 < 0$) ser tal que as curvas coordenadas da parametrização sejam linhas assintóticas é que $e = g = 0$.

De fato, se ambas as curvas $u = \text{constante}$, $v = v(t)$ e $u = u(t)$, $v = \text{constante}$ satisfazem a equação das linhas assintóticas, temos que $e = g = 0$. Reciprocamente, se vale esta última condição e $f \neq 0$, a equação das linhas assintóticas se reduz a $fx'y' = 0$, que é evidentemente satisfeita pelas curvas coordenadas.

Uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana em termos da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$ é a que segue.

Sejam S e \bar{S} duas superfícies regulares orientadas. Seja $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ uma aplicação diferenciável e suponha que para algum $p \in S$, $d\varphi_p$ seja não singular. Dizemos que φ preserva orientação em p se dada uma base positiva $\{w_1, w_2\}$ em T_pS , então $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ é uma base positiva em $T_p\bar{S}$. Se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ não é uma base positiva, dizemos que φ reverte orientação em p .

Observamos agora que tanto S como a esfera unitária são mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Logo, uma orientação N em S induz uma orientação N em S^2 . Seja $p \in S$ tal que dN_p é não-singular. Como, para uma base $\{w_1, w_2\}$ em T_pS ,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = Kw_1 \wedge w_2,$$

a aplicação de Gauss N preserva a orientação em $p \in S$ se $K(p) < 0$. Intuitivamente, isso significa o seguinte: uma orientação de T_pS induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em S , em torno de p ; a imagem por N dessas curvas terá orientação igual ou oposta às primeiras curvas, conforme o ponto seja elíptico ou hiperbólico, respectivamente.

Convencionaremos que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa V , onde $K \neq 0$, e a área da sua imagem por N têm o mesmo sinal se $K > 0$ em V , e sinais opostos se $K < 0$ em V . Como V é conexo, K não muda de sinal em V . Supondo $K \neq 0$, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.4 *Seja p um ponto de uma superfície S tal que a curvatura Gaussiana $K_p \neq 0$, e seja V uma vizinhança conexa de p onde K não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

onde A é a área de uma região $B \subset V$ contendo p A' é a área da imagem de B pela aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$, e o limite é tomado através de uma sequência de regiões B_n que convergem para p , no sentido em que toda esfera centrada em p contém todos B_n , para n suficientemente grande.

Demonstração. A área A de B é dada por

$$A = \int \int_R |X_x \wedge X_y| dx dy,$$

onde $X(x, y)$ é uma parametrização em p , cuja vizinhança coordenada contém V e R é a região do plano xy correspondente a B . Podemos supor a vizinhança V suficientemente pequena. A área A' de $N(B)$ é

$$A' = \int \int_R |N_x \wedge N_y| dx dy,$$

Utilizando a equação acima, a definição de K , e as equações abaixo

$$N_x = a_{11}X_x + a_{21}X_y,$$

$$N_y = a_{12}X_x + a_{22}X_y,$$

obtemos

$$A = \int \int_R K |X_x \wedge X_y| dx dy,$$

Passando ao limite, e indicando por R a área da região R , obtemos

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}, \quad A \rightarrow 0, = \lim_{\frac{A'}{R}} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}}, \quad A \rightarrow 0, = \frac{\lim_{\frac{1}{R}} \int \int_R K |X_x \wedge X_y| dx dy}{\lim_{\frac{1}{R}} \int \int_R |X_x \wedge X_y| dx dy}, \quad R \rightarrow 0.$$

Observe que utilizamos o teorema do valor médio para integrais duplas.

□

Daremos um exemplo para ilustrar as primeira e segunda formas fundamentais.

Exemplo 1.1 Se $(f(x), g(x))$ é uma parametrização de uma curva regular plana C , onde $f(x) > 0$, então $X : U \rightarrow S$, onde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b, 0 < y < 2\pi\}$ e $X(x, y) = (f(x)\text{sen}y, f(x)\text{cos}y, g(x) + cy)$, onde c é uma constante, é uma parametrização generalizada de um helicóide. Considere a seguinte parametrização

$$X(x, y) = \frac{1}{(c_1)^2} (\sinh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), \sinh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), c_1y).$$

Temos que esta é uma parametrização generalizada de um helicóide. Seus vetores coordenados e suas derivadas são dados por

$$\begin{aligned} X_x(x, y) &= \frac{1}{c_1} (\cosh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), \cosh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), 0) \\ X_{xx}(x, y) &= (\sinh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), \sinh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), 0) \\ X_y(x, y) &= \frac{1}{c_1} (\sinh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), -\sinh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), 1) \\ X_{yy}(x, y) &= (-\sinh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), -\sinh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), 0) \\ X_{xy}(x, y) = X_{yx}(x, y) &= (\cosh(c_1x + c_2)\cos(c_1y), -\cosh(c_1x + c_2)\sin(c_1y), 0) \end{aligned}$$

Portanto, temos que os coeficientes E , F e G da primeira forma fundamental da parametrização acima são dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle X_x, X_x \rangle = \frac{1}{(c_1)^2} \cosh^2(c_1x + c_2) \\ G &= \langle X_y, X_y \rangle = \frac{1}{(c_1)^2} \cosh^2(c_1x + c_2) \\ F &= \langle X_x, X_y \rangle = 0 \end{aligned}$$

O vetor $N = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|}$ normal ao helicóide da parametrização X é igual a

$$N = \left(\frac{\cos(c_1y)}{\cosh(c_1x + c_2)}, -\frac{\sin(c_1y)}{\cosh(c_1x + c_2)}, -\frac{\sinh(c_1x + c_2)}{\cosh(c_1x + c_2)} \right).$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por $e = \langle N, X_{xx} \rangle = 0$, $f = \langle N, X_{xy} \rangle = \langle N, X_{yx} \rangle = 1$, $g = \langle N, X_{yy} \rangle = 0$

Observação 1.2 Usamos o seguinte fato: da definição de cosseno hiperbólico e seno hiperbólico ,

$$\cosh(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right),$$

podemos observar que

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \sinh(x) \quad \text{e} \quad (\sinh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \cosh(x).$$

Também usamos a identidade $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Um fato interessante em geometria que convém ser mencionado é a existência de certos sistemas de coordenadas em superfícies. Vejamos algumas definições e resultados das equações diferenciais ordinárias.

1.2 Campos de Vetores

Nesta seção daremos algumas definições sobre campos de vetores. Comentaremos a existência de certas parametrizações especiais em vizinhanças de certos pontos de uma superfície, dependendo da natureza desses pontos.

Definição 1.16 *Um **campo de vetores** em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que associa a cada ponto $q \in U$ um vetor $w(q) \in \mathbb{R}^2$. O campo de vetores w é **diferenciável** se, escrevendo $q = (x, y)$ e $w(q) = (a(x, y), b(x, y))$, as funções a e b são diferenciáveis em U .*

Lema 1.1 *Sejam w um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in U$ tais que $w(p) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $W \subset U$ de p e uma função diferenciável $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é constante ao longo de cada trajetória de w e $df_p \neq 0$ para todo $q \in W$.*

A função f do lema acima é chamada uma integral primeira (local) de w em uma vizinhança de p .

Um conceito relacionado ao campo de vetores é o conceito de campo de direções.

Definição 1.17 *Um **campo de direções** r em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ uma reta $r(p)$ em \mathbb{R}^2 passando por p . Diz-se que r é **diferenciável** em $p \in U$ se existe um campo de vetores diferenciável w , que não se anula, definido em uma vizinhança $V \subset U$ de p , tal que para cada $q \in V$, $w(q) \neq 0$ é uma base de $r(q)$; r é diferenciável em U se é diferenciável para todo $p \in U$.*

As idéias introduzidas acima podem ser transportadas naturalmente para uma superfície regular, da seguinte maneira.

Definição 1.18 *Um **campo de vetores** w em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma **superfície regular** S é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo de vetores w é **diferenciável** em $p \in U$ se, para alguma parametrização $X(x, y)$ em p , as funções $a(x, y)$ e $b(x, y)$ dadas por*

$$w(p) = a(x, y)X_x + b(x, y)X_y$$

são funções diferenciáveis em p ; essa definição não depende da escolha da parametrização X .

De maneira análoga pode-se definir trajetórias, campos de direções e curvas integrais para superfícies.

Teorema 1.2 *Sejam w_1 e w_2 dois campos de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$, que são linearmente independentes em algum ponto $p \in U$. Então é possível parametrizar uma vizinhança $V \subset U$ de p de tal maneira que para cada $q \in V$ as curvas coordenadas dessa parametrização passando por q são tangentes às curvas integrais determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$.*

Demonstração. Seja W uma vizinhança de p onde as integrais primeiras f_1 e f_2 de w_1 e w_2 , respectivamente, estejam definidas. Defina a aplicação $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\varphi(q) = \langle f_1(q), f_2(q) \rangle, \quad q \in W.$$

Como f_1 é constante ao longo das trajetórias de w_1 e $(df_1) \neq 0$, temos em p

$$d\varphi_p(w_1) = ((df_1)_p(w_1), (df_2)_p(w_1)) = (0, a)$$

onde $a = (df_2)_p(w_1) \neq 0$, pois são linearmente independentes. Analogamente,

$$d\varphi_p(w_2) = ((df_1)_p(w_2), (df_2)_p(w_2)) = (b, 0),$$

onde $b = (df_1)_p(w_2) \neq 0$.

Segue-se que $d\varphi_p$ é não-singular, e portanto que φ é um difeomorfismo local. Logo, existe uma vizinhança $\bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $\varphi(p)$ que é levada difeomorficamente por $X = \varphi^{-1}$ em uma vizinhança $V = X(\bar{U})$ de p ; isto é, X é uma parametrização de S em p , cujas curvas coordenadas

$$f_1(q) = \text{constante} \quad \text{e} \quad f_2(q) = \text{constante},$$

são tangentes em q às curvas determinadas por $w_1(q)$ e $w_2(q)$, respectivamente. □

Deve-se observar que o teorema não implica que as curvas coordenadas podem ser parametrizadas de modo que os respectivos vetores velocidade sejam $w_1(q)$ e $w_2(q)$

Corolário 1.1 *Dados dois campos de direções r e r' em um conjunto aberto $U \subset S$ tais que em $p \in U$, $r(p) \neq r'(p)$, existe uma parametrização X em vizinhança de p tal que as curvas coordenadas de X são as curvas integrais de r e r' .*

Uma primeira aplicação do teorema acima é a prova da existência de uma parametrização ortogonal em qualquer ponto de uma superfície regular.

Corolário 1.2 *Para todo $p \in S$ existe uma parametrização $X(x, y)$ em uma vizinhança de V de p tal que as curvas coordenadas $x = \text{constante}$, $v = \text{constante}$ intersectam-se ortogonalmente para cada $q \in V$. X é chamada de **parametrização ortogonal**.*

Demonstração. Considere uma parametrização arbitrária $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ em p , e defina dois campos vetoriais $w_1 = \bar{X}_{\bar{x}}$, $w_2 = -\left(\frac{\bar{F}}{\bar{E}}\right)\bar{X}_{\bar{x}} + \bar{X}_{\bar{y}}$ em $\bar{X}(\bar{U})$, onde \bar{E} , \bar{F} , \bar{G} são os coeficientes da primeira forma fundamental em \bar{X} . Como $w_1(q)$, $w_2(q)$ são vetores ortogonais, para todo $q \in \bar{X}(\bar{U})$, uma aplicação do Teorema 1.2 nos fornece a parametrização desejada.

□

O Teorema 1.2 nos auxilia também a mostrar a existência de coordenadas dadas pelas direções assintóticas.

Corolário 1.3 *Seja $p \in S$ um ponto hiperbólico de S . Então é possível parametrizar uma vizinhança de p de tal modo que as curvas coordenadas desta parametrização sejam as curvas assintóticas de S .*

Demonstração. Já vimos que as curvas assintóticas são soluções da equação

$$e(x')^2 + 2fx'y' + g(y')^2 = 0.$$

Em uma vizinhança de um ponto hiperbólico p , temos $eg - f^2 < 0$. Considere uma rotação do plano xy , de maneira que $e(p) > 0$. Podemos então decompor o lado esquerdo da equação acima em dois fatores lineares distintos, o que nos dá

$$(Ax' + By')(Ax' + Dy') = 0$$

onde os coeficientes são determinados por

$$A^2 = e, \quad A(B + D) = 2f, \quad BD = g.$$

O sistema de equações acima tem soluções reais pois $eg - f^2 < 0$. Assim, a equação $(Ax' + By')(Ax' + Dy') = 0$ dá origem a duas equações:

$$\begin{cases} Ax' + By' = 0 \\ Ax' + Dy' = 0 \end{cases}$$

Cada uma destas equações determina um campo diferenciável de direções, e em cada ponto da vizinhança considerada as direções dadas pelas equações acima são distintas. Pelo corolário 1.1 vemos que é possível parametrizar uma vizinhança de p de modo que as curvas coordenadas sejam curvas integrais das equações acima.

□

Em geometria diferencial temos alguns exemplos de superfícies que são bastante interessantes pela sua simples representação e pela conexão com a teoria das equações diferenciais. É o caso das superfícies mínimas, cuja importância se deu devido à algumas questões não triviais ainda não terem sido esclarecidas, o que chamou a atenção. A teoria das superfícies mínimas está intimamente relacionada com a teoria das funções analíticas de variáveis complexas e equações diferenciais parciais.

Definição 1.19 *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é **mínima** se a sua Curvatura Média é identicamente nula para cada uma de suas parametrizações.*

Na próxima seção encontraremos as expressões dos símbolos de Christoffel, que serão necessários no capítulo 2. Deduziremos as equações de compatibilidade da teoria de superfícies e concluiremos com o clássico teorema fundamental da teoria de superfícies.

1.3 Símbolos de Christoffel e as Equações de Compatibilidade

Nesta seção encontraremos as expressões para as derivadas do triedro X_x, X_y e N na base $\{X_x, X_y, N\}$, a fim de deduzirmos os símbolos de Christoffel e as equações de compatibilidade. Iniciaremos com o conceito de isometria.

Definição 1.20 Uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é chamada uma **isometria** se φ é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ e todos os pares $w_1, w_2 \in T_p S$, temos

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Dizemos então que as superfícies S e \bar{S} são **isométricas**.

Um difeomorfismo φ é uma isometria se a diferencial $d\varphi$ preserva o produto interno. Se φ é uma isometria, temos que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

para todo $w \in T_p S$. Reciprocamente, se um difeomorfismo φ preserva a primeira forma fundamental, ou seja,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \text{ para todo } w \in T_p S.$$

então

$$\begin{aligned} 2 \langle w_1, w_2 \rangle_p &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= 2 \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

e φ é, portanto, uma isometria.

Definição 1.21 Uma aplicação $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ é uma **isometria local** em p se existe uma vizinhança \bar{V} de $\varphi(p) \in \bar{S}$ tal que $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ é uma isometria. Se existir uma isometria local em \bar{S} para todo ponto $p \in S$, diz-se que a superfície S é localmente isométrica a \bar{S} . S e \bar{S} são localmente isométricas se S é localmente isométrica a \bar{S} e \bar{S} é **localmente isométrica** a S .

Se $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$ é um difeomorfismo e uma isometria local para todo $p \in S$, então φ é uma isometria (globalmente). No entanto, nem todo par de superfícies S e \bar{S} que são localmente isométricas são (globalmente) isométricas.

Proposição 1.5 Suponha a existência de parametrizações $X : U \rightarrow S$ e $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ tais que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ em U . Então a aplicação $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$ é uma isometria local.

A noção de isometria é o conceito natural de equivalência para propriedades métricas das superfícies regulares. Da mesma maneira que superfícies difeomorfas são equivalentes do ponto de vista da diferenciabilidade, as superfícies isométricas são equivalentes sob o ponto de vista métrico.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização na orientação de S . É possível associar a cada ponto de $X(U)$ um triedro natural dado pelos vetores X_x , X_y e N .

Expressando as derivadas dos vetores X_x , X_y e N na base $\{X_x, X_y, N\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 X_{xx} &= \Gamma_{11}^1 X_x + \Gamma_{11}^2 X_y + L_1 N, \\
 X_{xy} &= \Gamma_{12}^1 X_x + \Gamma_{12}^2 X_y + L_2 N, \\
 X_{yx} &= \Gamma_{21}^1 X_x + \Gamma_{21}^2 X_y + \bar{L}_2 N, \\
 X_{yy} &= \Gamma_{22}^1 X_x + \Gamma_{22}^2 X_y + L_3 N, \\
 N_x &= a_{11} X_x + a_{21} X_y, \\
 N_y &= a_{12} X_x + a_{22} X_y
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde os a_{ij} , $i, j = 1, 2$ já foram obtidos. Recordemos:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\
 a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
 \end{aligned}$$

Os outros coeficientes devem ser determinados. Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados **símbolos de Christoffel** de S na parametrização X . Como $X_{xy} = X_{yx}$, concluímos que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$, e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, ou seja, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores.

Tomando o produto interno das quatro primeiras expressões, que são as expressões de X_{xx} , X_{xy} , X_{yx} , X_{yy} , com a expressão de N , obtemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{xx}, X_x \rangle = \frac{1}{2} E_x \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{xx}, X_y \rangle = F_x - \frac{1}{2} E_y \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle X_{xy}, X_x \rangle = \frac{1}{2} E_y \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle X_{xy}, X_y \rangle = \frac{1}{2} G_x \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle X_{yy}, X_x \rangle = F_y - \frac{1}{2} G_x \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle X_{yy}, X_y \rangle = \frac{1}{2} G_y
\end{aligned}$$

Como para cada par de equações o determinante igual a $EG - F^2 \neq 0$, podemos resolver o sistema acima e calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes E, F, G da primeira forma fundamental e de suas derivadas. É o que iremos fazer agora. Um detalhe importante que deve ser observado da importância de podermos resolver os sistemas acima para podermos determinar os Γ_{ij}^k é que os conceitos geométricos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.

Recordemos que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

Logo, do primeiro par de equações temos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_x \\ F_x - \frac{1}{2} E_y \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_x \\ F_x - \frac{1}{2} E_y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Do segundo par de equações temos

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_y \\ \frac{1}{2} G_x \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_y \\ \frac{1}{2}G_x \end{pmatrix}$$

Finalmente, do terceiro par de equações temos

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y - \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}G_y \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_y - \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}G_y \end{pmatrix}$$

Temos então as seguintes para os expressões para os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-FE_x + 2EF_x - EE_y}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{21}^2 &= \frac{-FE_y + EG_x}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_y - GG_x - FG_y}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{-2FF_y + FG_x + EG_y}{2(EG - F^2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como acabamos de ver, as expressões das derivadas de X_x , X_y e N na base X_x, X_y, N dependem apenas do conhecimento dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais de S . Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as expressões

$$\begin{aligned} (X_{xx})_y - (X_{xy})_x &= 0, \\ (X_{yy})_x - (X_{yx})_y &= 0, \\ N_{xy} - N_{yx} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Introduzindo os valores de (1.1), podemos escrever as relações acima na forma

$$\begin{aligned} A_1 X_x + B_1 X_y + C_1 N &= 0, \\ A_2 X_x + B_2 X_y + C_2 N &= 0 \\ A_3 X_x + B_3 X_y + C_3 N &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

onde $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$, são funções de E, F, G, e, f, g e de suas derivadas. Como os vetores X_x, X_y e N são linearmente independentes, as equações acima nos diz que temos 9 relações: $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, i = 1, 2, 3$.

Olhemos o primeiro caso, $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, $C_1 = 0$. Utilizando os valores de (1.1), a primeira das três relações de (1.3) pode ser escrita

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 X_{xy} + \Gamma_{11}^2 X_{yy} + eN_y + (\Gamma_{11}^1)_y X_x + (\Gamma_{11}^2)_y X_y + e_y N \\ = & \Gamma_{12}^1 X_{xx} + \Gamma_{12}^2 X_{yx} + fN_x + (\Gamma_{12}^1)_x X_x + (\Gamma_{12}^2)_x X_y + f_x N. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Utilizando (1.1) novamente e igualando os coeficientes de X_y obtemos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_y = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_x.$$

Introduzindo os valores de a_{ij} já calculados anteriormente segue-se que

$$(\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

ou seja

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \quad (1.5)$$

A equação (1.5) acima é conhecida como **Equação de Gauss**, e prova o seguinte teorema.

Teorema 1.3 (*Teorema Egregium de Gauss*) *A curvatura gaussiana K de uma superfície S é invariante por isometrias locais.*

De fato, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização de S em p e se $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$, onde $V \subset X(U)$ é uma vizinhança de p , é uma isometria local em p , então $Y = \varphi \circ X$ é uma parametrização de \bar{S} em $\varphi(p)$. Como φ é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações X e Y coincidem em pontos correspondentes q e $\varphi(q)$, $q \in V$; assim, os respectivos símbolos de Christoffel também coincidem. Pela equação (1.5), K pode ser calculada em um ponto como função dos símbolos de Christoffel em uma parametrização dada no ponto. Logo $K(q) = K(\varphi(q))$ para todo ponto $q \in V$.

□

Igualando os coeficientes de X_x , vemos que a relação $A_1 = 0$ pode ser escrita na forma

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_x - (\Gamma_{11}^1)_y + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \quad (1.5.1)$$

Igualando também na equação (1.4) os coeficientes de N , obtemos $C_1 = 0$ na forma

$$e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (1.6)$$

A equação (1.5.1) é uma outra forma de escrever a equação de Gauss, quando $F \neq 0$.

Aplicando o mesmo processo à segunda expressão de (1.3), obtemos que ambas as equações $A_2 = 0$ e $B_2 = 0$ nos dão novamente a equação de Gauss. Além disto, $C_2 = 0$ é dada por

$$f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (1.6.1)$$

Finalmente, o mesmo processo pode ser aplicado à última expressão de (1.3), resultando que $C_3 = 0$ é uma identidade e que $A_3 = 0$ e $B_3 = 0$ são novamente as equações (1.6) e (1.6.1). As equações (1.6) e (1.6.1) são chamadas **equações de Codazzi-Mainardi**

A equação de Gauss juntamente com as equações de Codazzi-Mainardi são bastante conhecidas e são chamadas as equações de compatibilidade da teoria das superfícies.

Destaquemos as equações de compatibilidade

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

O teorema abaixo nos diz que não existem outras relações de compatibilidade entre a primeira e a segunda formas fundamentais além das já obtidas. Em outras palavras, por derivações sucessivas ou qualquer outro processo não se obtém novas relações entre os coeficientes E, F, G, e, f, g e suas derivadas. O teorema é mais explícito e afirma que o conhecimento da primeira e segunda formas fundamentais determina a superfície localmente.

Teorema 1.4 (*Fundamental das Superfícies*) *Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0, G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfaçam formalmente as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $X : U \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $X(U) \subset \mathbb{R}^3$*

tem E, F, G, e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disto, se U é conexo e se

$$\tilde{X} : U \rightarrow \tilde{X}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal própria P em \mathbb{R}^3 tal que $\tilde{X} = T \circ P \circ X$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [8]. No próximo capítulo trataremos das Superfícies de Bianchi, que generalizam as superfícies com curvatura Gaussiana negativa constante.

Capítulo 2

Superfícies de Bianchi

Neste capítulo definiremos uma superfície de Bianchi e a parametrização do tipo Malha de Chebyshev Generalizada. Explicitaremos as expressões da primeira e segunda formas fundamentais e as equações de compatibilidade para uma superfície parametrizada por linhas assintóticas e com curvatura Gaussiana negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho = \rho(x, y)$ é uma função positiva. Concluiremos com um teorema de classificação que lista quais são as Superfícies de Bianchi parametrizadas pela Malha de Chebyshev Generalizada e com Ângulo de Chebyshev constante.

2.1 Equações de Compatibilidade para superfícies parametrizadas por linhas assintóticas

A seguir consideraremos apenas superfícies com curvatura gaussiana negativa no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Desde que uma tal superfície possui duas direções denominadas direções assintóticas, onde a curvatura normal se anula, podemos parametrizar a superfície localmente por coordenadas assintóticas (x, y) , utilizando a parametrização $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Em todo capítulo 2 consideraremos superfícies parametrizadas por linhas assintóticas.

Proposição 2.1 *Seja S uma superfície com curvatura Gaussiana negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$, onde ρ é uma função positiva. Então existe um sistema de coordenadas $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas e a primeira e segunda formas*

quadráticas são dadas por:

$$I = A^2 dx^2 + 2AB \cos \phi dx dy + B^2 dy^2,$$

$$II = \frac{2AB \sin \phi dx dy}{\rho},$$

onde $A = |X_x|$, $B = |X_y|$ e ϕ é o ângulo entre X_x e X_y , chamado **ângulo de Chebyshev**.

Demonstração. Demonstraremos a proposição para as expressões da primeira e segunda formas fundamentais. Fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que $0 < \phi < \pi$. Na seção 1.1 vimos que a expressão da primeira forma fundamental é dada por

$$I = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2.$$

Fazendo $E = |X_x|^2 = A^2$, $F = \langle X_x, X_y \rangle = AB \cos \phi$ e $G = |X_y|^2 = B^2$, temos que a proposição está demonstrada para a expressão da primeira forma fundamental.

Para demonstrar a expressão da segunda forma, vimos também na seção 1.1 que a expressão da segunda forma fundamental é dada por

$$II = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2.$$

Como os pontos de S são pontos hiperbólicos, usando o corolário (1.3) temos a existência de uma parametrização tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas e que $e = g = 0$. Assim para a segunda forma fundamental ficamos com a expressão

$$II = 2f dx dy.$$

A expressão para a curvatura Gaussiana também se simplifica, tornando-se

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2}.$$

Assim, para f temos a seguinte expressão

$$f^2 = -K(EG - F^2).$$

Substituindo os coeficientes da primeira forma fundamental e o valor de K , obtemos

$$f = \sqrt{-K(EG - F^2)} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2}(A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \phi)} = \pm \frac{AB \sin \phi}{\rho}.$$

Portanto temos a seguinte expressão para a segunda forma fundamental

$$II = \frac{2AB\text{sen}\phi dx dy}{\rho}.$$

□

Observação 2.1 *Sejam $a = \frac{A}{\rho}$ e $b = \frac{B}{\rho}$. Da definição dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, temos $E(x, y) = \langle X_x, X_x \rangle$, e como $A = |X_x|$, temos que $E = A^2 = a^2\rho^2$. Analogamente, $G(x, y) = \langle X_y, X_y \rangle$. Como $B = |X_y|$, temos $G = B^2 = b^2\rho^2$. De $F(x, y) = \langle X_x, X_y \rangle$ e $\langle X_x, X_y \rangle = |X_x||X_y|\cos\phi$ temos $F = AB\cos\phi = ab\rho^2\cos\phi$. Assim os coeficientes da primeira forma fundamental ficam com a seguinte expressão*

$$E = a^2\rho^2, \quad G = b^2\rho^2, \quad F = ab\rho^2\cos\phi.$$

Como $A = a\rho$ e $B = b\rho$, obtemos $f = ab\text{psen}\phi$. Destaquemos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, que serão utilizados no lema a seguir.

$$E = a^2\rho^2, \quad G = b^2\rho^2, \quad F = ab\rho^2\cos\phi, \quad e = g = 0, \quad f = ab\text{psen}\phi. \quad (2.1)$$

Lema 2.1 *Com as expressões dos coeficientes da primeira forma fundamental (2.1), temos as seguintes expressões para os símbolos de Christoffel.*

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{b\rho(a\rho)_x - \cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_x + a\rho\cos\phi(a\rho)_y}{ab\rho^2\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.1)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{(ab\rho^2\cos\phi)_x - a\rho(a\rho)_y - b\rho\cos\phi(a\rho)_x}{b^2\rho^2\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.2)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{(a\rho)_y - \cos\phi(b\rho)_x}{a\rho\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.3)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{(b\rho)_x - \cos\phi(a\rho)_y}{b\rho\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.4)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{(ab\rho^2\cos\phi)_y - b\rho(b\rho)_x - a\rho\cos\phi(b\rho)_y}{a^2\rho^2\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.5)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{a\rho(b\rho)_y - \cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_y + b\rho\cos\phi(b\rho)_x}{ab\rho^2\text{sen}^2\phi} \quad (2.2.6)$$

Demonstração. O lema acima é de fácil demonstração, bastando simplesmente substituir os coeficientes da primeira forma fundamental de (2.1) nas expressões dos símbolos de Christoffel. Demonstraremos estas fórmulas para alguns dos Γ_{ij}^k . Na seção 1.3 explicitamos as expressões para os símbolos de Christoffel, a fim de podermos utilizá-los

quando trabalhássemos com as equações de compatibilidade. Usando (1.2) e (2.1) o símbolo de Christoffel Γ_{11}^1 é dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{b^2\rho^2[(a\rho)^2]_x - 2ab\rho^2\cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_x + ab\rho^2\cos\phi[(a\rho)^2]_y}{2(a^2b^2\rho^4 - a^2b^2\rho^4\cos^2\phi)} \\ &= \frac{b\rho(a\rho)_x - \cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_x + a\rho\cos\phi(a\rho)_y}{ab\rho^2\sin^2\phi}.\end{aligned}$$

Analogamente de (1.2) e (2.1), temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{b^2\rho^2[(a\rho)^2]_y - ab\rho^2\cos\phi[(b\rho)^2]_x}{2(a^2b^2\rho^4 - a^2b^2\rho^4\cos^2\phi)} \\ &= \frac{(a\rho)_y - \cos\phi(b\rho)_x}{a\rho\sin^2\phi}.\end{aligned}$$

Ainda, de (1.2) e (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_x - FE_y}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{a^2\rho^2[(b\rho)^2]_x - ab\rho^2\cos\phi[(a\rho)^2]_y}{2(a^2b^2\rho^4 - a^2b^2\rho^4\cos^2\phi)} \\ &= \frac{(b\rho)_x - \cos\phi(a\rho)_y}{b\rho\sin^2\phi}.\end{aligned}$$

Analogamente, usando (1.2) e (2.1) coseguimos

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^2 &= \frac{-2FF_y + FG_x + EG_y}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{-2ab\rho^2\cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_y + ab\rho^2\cos\phi[(b\rho)^2]_x + a^2\rho^2[(b\rho)^2]_y}{2(a^2b^2\rho^4 - a^2b^2\rho^4\cos^2\phi)} \\ &= \frac{a\rho(b\rho)_y - \cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_y + b\rho\cos\phi(b\rho)_x}{ab\rho^2\sin^2\phi}.\end{aligned}$$

De maneira análoga se demonstra o lema para os demais símbolos de Christoffel. □

O teorema abaixo nos dá as equações de compatibilidade para uma superfície parametrizada por linhas assintóticas e com curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$.

Teorema 2.1 *Seja S uma superfície parametrizada por linhas assintóticas e com Curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$ e considere $a = \frac{A}{\rho}$ e $b = \frac{B}{\rho}$, onde $A = |X_x|$ e $B = |X_y|$. Então as equações de compatibilidade são dadas por*

$$\phi_{xy} + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho a} \text{sen}\phi \right)_x + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho b} \text{sen}\phi \right)_y - ab \text{sen}\phi = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} a_y + \frac{\rho_y a}{2\rho} - \frac{\rho_x b}{2\rho} \text{cos}\phi = 0 \\ b_x + \frac{\rho_x b}{2\rho} - \frac{\rho_y a}{2\rho} \text{cos}\phi = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos o teorema para as equações de Codazzi-Mainardi. Das equações de Codazzi-Mainardi (1.7) e lembrando que as curvas coordenadas da parametrização são linhas assintóticas, isto é $e = g = 0$, temos

$$-f_x = f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \quad (2.5)$$

$$f_y = f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) \quad (2.6)$$

Usando (2.1), (2.2.1) e (2.2.4) em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} -(ab \text{sen}\phi)_x &= \frac{ab \text{sen}\phi}{ab\rho^2 \text{sen}^2\phi} \{a\rho[(b\rho)_x - \text{cos}\phi(a\rho)_y] - b\rho(a\rho)_x\} \\ &\quad + \frac{ab \text{sen}\phi}{ab\rho^2 \text{sen}^2\phi} \{ \text{cos}\phi(ab\rho^2 \text{cos}\phi)_x - a\rho(a\rho_y) \text{cos}\phi \}. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} -[(ab \text{sen}\phi)^2]_x &= 2ab \{a\rho[(b\rho)_x - 2\text{cos}\phi(a\rho)_y] - b\rho(a\rho)_x\} \\ &\quad + 2ab \{ \text{cos}\phi [\rho_x ab \rho \text{cos}\phi + \rho (ab \rho \text{cos}\phi)_x] \}. \end{aligned}$$

Simplificando obtemos

$$\begin{aligned} -[(ab \text{sen}\phi)^2 + (ab \rho \text{cos}\phi)^2]_x &= 2ab \{a\rho [(b\rho)_x - 2\text{cos}\phi(a\rho)_y] - b\rho(a\rho)_x\} \\ &\quad + \rho_x ab \rho \text{cos}^2\phi \}. \end{aligned}$$

Novamente podemos utilizar propriedades de derivadas e simplificar, conseguindo

$$\begin{aligned} -[(ab\rho)^2]_x &= 2ab \{a\rho [b_x \rho + b\rho_x] - 2a\rho \text{cos}\phi(a\rho)_y - b\rho [a_x \rho + a\rho_x] \\ &\quad + \rho_x ab \rho \text{cos}^2\phi \}. \end{aligned}$$

Expandindo a derivada em relação à x e simplificando as expressões temos

$$-2(ab\rho)(ab\rho)_x = 2ab \{ab_x \rho^2 - 2a\rho \text{cos}\phi(a\rho)_y - ba_x \rho^2 + \rho_x ab \rho \text{cos}^2\phi \}.$$

Esta equação é equivalente à

$$-\rho(a_x b\rho + ab_x\rho + ab\rho_x) = \{ab_x\rho^2 - 2a\rho\cos\phi(a\rho)_y - ba_x\rho^2 + \rho_x ab\rho\cos^2\phi\}.$$

Podemos ainda simplificar a equação acima e obter a seguinte equação equivalente à primeira equação de Codazzi-Mainardi (2.5)

$$2b_x\rho + b\rho_x - 2a_y\rho\cos\phi - 2a\rho_y\cos\phi + b\rho_x\cos^2\phi = 0. \quad (2.5.1)$$

Analogamente, encontraremos uma equação equivalente à segunda equação de Codazzi-Mainardi (2.6). Usando (2.1), (2.2.3) e (2.2.6) em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} (ab\rho\sin\phi)_y &= \frac{ab\rho\sin\phi}{ab\rho^2\sin^2\phi} \{-\cos\phi(ab\rho^2\cos\phi)_y + b\rho(b\rho)_x\cos\phi + a\rho(b\rho)_y\} \\ &\quad - \frac{ab\rho\sin\phi}{ab\rho^2\sin^2\phi} \{b\rho[(a\rho)_y + \cos\phi(b\rho)_x]\}. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} [(ab\rho\sin\phi)^2]_y &= 2ab \left\{ -\cos\phi \left[\rho_y ab\rho\cos\phi + \rho(ab\rho\cos\phi)_y \right] + 2b\rho(b\rho)_x\cos\phi + a\rho(b\rho)_y \right\} \\ &\quad - 2ab \{b\rho(a\rho)_y\}. \end{aligned}$$

Simplificando obtemos

$$[(ab\rho\sin\phi)^2 + (ab\rho\cos\phi)^2]_y = 2ab \{-\rho_y ab\rho\cos^2\phi + 2b\rho(b\rho)_x\cos\phi + a\rho(b\rho)_y - b\rho(a\rho)_y\}.$$

Novamente, podemos usar propriedades de derivadas na expressão acima, obtendo

$$[(ab\rho)^2]_y = 2ab \{-\rho_y ab\rho\cos^2\phi + 2b\rho(b\rho)_x\cos\phi + a\rho(b_y\rho + b\rho_y) - b\rho(a_y\rho + a\rho_y)\}.$$

Expandindo a derivada em relação à y e simplificando alguns termos temos

$$2ab\rho(ab\rho)_y = 2ab \{-\rho_y ab\rho\cos^2\phi + 2b\rho(b\rho)_x\cos\phi + ab_y\rho^2 - a_y b\rho^2\}.$$

Esta equação é equivalente à

$$\rho(a_y b\rho + ab_y\rho + ab\rho_y) = -\rho_y ab\rho\cos^2\phi + 2b\rho(b\rho)_x\cos\phi + ab_y\rho^2 - a_y b\rho^2.$$

Assim podemos também simplificar a equação acima e obter a seguinte equação equivalente à segunda equação de Codazzi-Mainardi (2.6)

$$2\rho a_y + \rho_y a - 2\rho_x b\cos\phi + a\rho_y\cos^2\phi - 2\cos\phi b_x\rho = 0. \quad (2.6.1)$$

Portanto, juntando (2.5.1) com (2.6.1) temos o seguinte par de expressões para equações de Codazzi-Mainardi:

$$\begin{cases} 2\rho a_y + a\rho_y - 2b\rho_x \cos\phi + a\rho_y \cos^2\phi - 2b_x \rho \cos\phi = 0 \\ 2\rho b_x + b\rho_x - 2a\rho_y \cos\phi + b\rho_x \cos^2\phi - 2a_y \rho \cos\phi = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.7) por $\cos\phi$ e somando com a segunda equação temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\rho a_y \cos\phi + a\rho_y \cos\phi - 2b\rho_x \cos^2\phi + a\rho_y \cos^3\phi - 2b_x \rho \cos^2\phi \\ &\quad + 2\rho b_x + b\rho_x - 2a\rho_y \cos\phi + b\rho_x \cos^2\phi - 2a_y \rho \cos\phi \\ &= -b\rho_x \cos^2\phi + a\rho_y \cos^3\phi - 2b_x \rho \cos^2\phi + 2\rho b_x + b\rho_x - a\rho_y \cos\phi \\ &= -a\rho_y \cos\phi(1 - \cos^2\phi) + b\rho_x(1 - \cos^2\phi) + 2b_x \rho(1 - \cos^2\phi) \\ &= \operatorname{sen}^2\phi[-a\rho_y \cos\phi + b\rho_x + 2b_x \rho]. \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação da seguinte forma

$$2b_x \rho + b\rho_x - a\rho_y \cos\phi = 0.$$

Esta equação é equivalente à segunda equação Codazzi-Mainardi (2.4). Analogamente, multiplicando a segunda equação de (2.7) por $\cos\phi$ e somando com a primeira equação temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\rho b_x \cos\phi + b\rho_x \cos\phi - 2a\rho_y \cos^2\phi + b\rho_x \cos^3\phi - 2a_y \rho \cos^2\phi \\ &\quad + 2\rho a_y + a\rho_y - 2b\rho_x \cos\phi + a\rho_y \cos^2\phi - 2b_x \rho \cos\phi \\ &= -a\rho_y \cos^2\phi + b\rho_x \cos^3\phi - 2a_y \rho \cos^2\phi + 2\rho a_y + a\rho_y - b\rho_x \cos\phi \\ &= -\rho_x b \cos\phi(1 - \cos^2\phi) + a\rho_y(1 - \cos^2\phi) + 2\rho a_y(1 - \cos^2\phi) \\ &= \operatorname{sen}^2\phi[-\rho_x b \cos\phi + a\rho_y + 2\rho a_y]. \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação da seguinte forma

$$2\rho a_y + a\rho_y - \rho_x b \cos\phi = 0.$$

Esta equação é equivalente à primeira equação de Codazzi-Mainardi (2.4) e, portanto, as equações de Codazzi-Mainardi dadas por (2.4) são satisfeitas. Demonstraremos

agora que a equação de Gauss (2.3) é satisfeita. Das equações de Codazzi-Mainardi (2.5) e (2.6) para uma superfície parametrizada por linhas assintóticas, temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 &= -\frac{f_x}{f}, \\ \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 &= -\frac{f_y}{f}.\end{aligned}$$

Utilizando as duas equações acima, (2.1) e $K = -\frac{1}{\rho^2}$ podemos reescrever a equação de Gauss (1.6), obtendo

$$a^2 = (\Gamma_{12}^2)_x - (\Gamma_{11}^2)_y - \Gamma_{12}^2 \frac{f_x}{f} - \Gamma_{11}^2 \frac{f_y}{f}. \quad (2.8)$$

Calcularemos cada parcela da equação (2.8) separadamente. Temos então a seguinte relação de parcelas da equação (2.8)

$$(\Gamma_{12}^2)_x \quad (2.8.1)$$

$$(\Gamma_{11}^2)_y \quad (2.8.2)$$

$$\Gamma_{12}^2 \frac{f_x}{f} \quad (2.8.3)$$

$$\Gamma_{11}^2 \frac{f_y}{f} \quad (2.8.4)$$

Da primeira equação de (2.4) temos que

$$2\rho a_y = b\rho_x \cos\phi - \rho_y a.$$

Usando esta equação podemos reescrever (2.2.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^2 &= \frac{a[b_x \rho \cos\phi + \rho a_y]}{b^2 \rho \sin^2\phi} - \frac{a\phi_x}{b \sin\phi} \\ &= \frac{ab_x \cos\phi}{b^2 \sin^2\phi} + \frac{aa_y}{b^2 \sin^2\phi} - \frac{a\phi_x}{b \sin\phi}.\end{aligned}$$

Assim, para (2.8.2) temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}(\Gamma_{11}^2)_y &= \left(\frac{ab_x \cos\phi}{b^2 \sin^2\phi} \right)_y + \left(\frac{aa_y}{b^2 \sin^2\phi} \right)_y - \left(\frac{a\phi_x}{b \sin\phi} \right)_y \\ &= \frac{(ab_x)_y \cos\phi - ab_x \sin\phi \phi_y}{b^2 \sin^2\phi} - \frac{ab_x \cos\phi (b^2 \sin^2\phi)_y}{b^4 \sin^4\phi} + \frac{(aa_y)_y}{b^2 \sin^2\phi} \\ &\quad - \frac{aa_y (b^2 \sin^2\phi)_y}{b^4 \sin^4\phi} - \left(\frac{a}{b} \right)_y \frac{\phi_x}{\sin\phi} - \frac{a}{b} \left(\frac{\phi_x}{\sin\phi} \right)_y \\ &= \frac{a_y b_x \cos\phi}{b^2 \sin^2\phi} + \frac{ab_{xy} \cos\phi}{b^2 \sin^2\phi} - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \sin\phi} - \frac{ab_x \cos\phi (b^2 \sin^2\phi)_y}{b^4 \sin^4\phi} + \frac{(a_y)^2}{b^2 \sin^2\phi} \\ &\quad + \frac{aa_{yy}}{b^2 \sin^2\phi} - \frac{aa_y (b^2 \sin^2\phi)_y}{b^4 \sin^4\phi} - \left(\frac{a}{b} \right)_y \frac{\phi_x}{\sin\phi} - \frac{a}{b} \left(\frac{\phi_x}{\sin\phi} \right)_y.\end{aligned}$$

Usaremos algumas equivalências das equações de Codazzi-Mainardi (2.4) para podermos simplificar a equação (2.8). Da primeira equação de (2.4) temos

$$a_y = -\frac{\rho_y a}{2\rho} + \frac{\rho_x b}{2\rho} \cos\phi \quad (2.4.1)$$

$$a_{yy} = -\left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y \cos\phi - \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_y \quad (2.4.2)$$

$$a_{yx} = -\left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x \cos\phi - \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_x \quad (2.4.3)$$

Da segunda equação de (2.4) temos

$$b_x = -\frac{\rho_x b}{2\rho} + \frac{\rho_y a}{2\rho} \cos\phi \quad (2.4.4)$$

$$b_{xx} = -\left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x \cos\phi - \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_x \quad (2.4.5)$$

$$b_{xy} = -\left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y \cos\phi - \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_y \quad (2.4.6)$$

Substituindo em (2.8.2) as derivadas segundas b_{xy} e a_{yy} e simplificando alguns termos, ficamos com a seguinte expressão para $(\Gamma_{11}^2)_y$

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2)_y &= \frac{a_y b_x \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} + \frac{a \left(-\left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y \cos\phi - \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_y \right) \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} \\ &\quad - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}\phi} - \frac{ab_x \cos\phi (b^2 \text{sen}^2\phi)_y}{b^4 \text{sen}^4\phi} + \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2\phi} \\ &\quad + \frac{a \left(-\left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y \cos\phi - \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_y \right)}{b^2 \text{sen}^2\phi} \\ &\quad - \frac{aa_y (b^2 \text{sen}^2\phi)_y}{b^4 \text{sen}^4\phi} - \left(\frac{a}{b}\right)_y \frac{\phi_x}{\text{sen}\phi} - \frac{a}{b} \left(\frac{\phi_x}{\text{sen}\phi}\right)_y \\ &= \frac{a_y b_x \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} - \frac{a \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y + \frac{a(1 - \text{sen}^2\phi)}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y \\ &\quad - \frac{a \cos\phi \text{sen}\phi\phi_y}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}\phi} - \frac{ab_x \cos\phi (b^2 \text{sen}^2\phi)_y}{b^4 \text{sen}^4\phi} \\ &\quad - \frac{a}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_y + \frac{a \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_y - \frac{a \text{sen}\phi\phi_y}{b^2 \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \\ &\quad - \frac{aa_y (b^2 \text{sen}^2\phi)_y}{b^4 \text{sen}^4\phi} - \left(\frac{a}{b}\right)_y \frac{\phi_x}{\text{sen}\phi} - \frac{a}{b} \left(\frac{\phi_x}{\text{sen}\phi}\right)_y + \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2\phi}. \end{aligned}$$

Novamente, usando propriedades de derivadas e simplificando alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{11}^2)_y &= \frac{a_y b_x \cos \phi}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right)_y - \frac{a \cos \phi \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right) - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \\
 &\quad - \frac{2b_y a a_y}{b^3 \text{sen}^2 \phi} - \frac{2 \cos \phi \phi_y a a_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} - \frac{2b_y ab_x \cos \phi}{b^3 \text{sen}^2 \phi} - \frac{2ab_x \cos^2 \phi \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} \\
 &\quad + \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a \rho_x \phi_y}{2b \rho \text{sen} \phi} - \left(\frac{a}{b} \right)_y \frac{\phi_x}{\text{sen} \phi} - \frac{a}{b} \left(\frac{\phi_x}{\text{sen} \phi} \right)_y \\
 &= \frac{a_y b_x \cos \phi}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right)_y - \frac{a \cos \phi \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right) - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} - \frac{2b_y a a_y}{b^3 \text{sen}^2 \phi} \\
 &\quad - \frac{2 \cos \phi \phi_y a a_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} - \frac{2b_y ab_x \cos \phi}{b^3 \text{sen}^2 \phi} - \frac{2ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} + \frac{2ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} + \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2 \phi} \\
 &\quad - \frac{a \rho_x \phi_y}{2b \rho \text{sen} \phi} - \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen} \phi} + \frac{ab_y \phi_x}{b^2 \text{sen} \phi} - \frac{a \phi_{xy}}{b \text{sen} \phi} + \frac{a \phi_x \cos \phi \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi}
 \end{aligned}$$

Da segunda equação de (2.4) temos $b_x = -\frac{\rho_x b}{2\rho} + \frac{\rho_y a}{2\rho} \cos \phi$. Substituindo b_x na sétima parcela $-\frac{2b_y ab_x \cos \phi}{b^3 \text{sen}^2 \phi}$ da expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{11}^2)_y &= \frac{a_y b_x \cos \phi}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a}{b^2} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right)_y - \frac{a \cos \phi \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right) - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} - \frac{2b_y a a_y}{b^3 \text{sen}^2 \phi} \\
 &\quad - \frac{2 \cos \phi \phi_y a a_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} + \frac{\rho_x b_y a \cos \phi}{\rho b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{\rho_y b_y a^2}{\rho b^3 \text{sen}^2 \phi} + \frac{\rho_y b_y a^2}{\rho b^3} - \frac{2ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} + \frac{2ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \\
 &\quad + \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a \rho_x \phi_y}{2b \rho \text{sen} \phi} - \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen} \phi} + \frac{ab_y \phi_x}{b^2 \text{sen} \phi} - \frac{a \phi_{xy}}{b \text{sen} \phi} + \frac{a \phi_x \cos \phi \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi}.
 \end{aligned}$$

Da segunda equação de (2.2) temos

$$-a \rho_y \cos \phi + \rho_x b = -2\rho b_x.$$

Logo podemos reescrever (2.2.4) da seguinte forma

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{-a_y \cos \phi - b_x}{b \text{sen}^2 \phi}.$$

Obtemos então a seguinte expressão para (2.8.1)

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{12}^2)_x &= - \left(\frac{a_y \cos \phi}{b \text{sen}^2 \phi} \right)_x - \left(\frac{b_x}{b \text{sen}^2 \phi} \right)_x \\
 &= - \frac{(a_y \cos \phi)_x b \text{sen}^2 \phi}{b^2 \text{sen}^4 \phi} + \frac{a_y \cos \phi (b \text{sen}^2 \phi)_x}{b^2 \text{sen}^4 \phi} - \frac{b_{xx} b \text{sen}^2 \phi}{b^2 \text{sen}^4 \phi} + \frac{b_x (b \text{sen}^2 \phi)_x}{b^2 \text{sen}^4 \phi} \\
 &= - \frac{a_{yx} \cos \phi}{b \text{sen}^2 \phi} + \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen} \phi} + \frac{a_y \cos^2 \phi \phi_x}{b \text{sen}^3 \phi} + \frac{a_y \cos \phi (b \text{sen} \phi)_x}{b^2 \text{sen}^3 \phi} \\
 &\quad - \frac{b_{xx}}{b \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \cos \phi \phi_x}{b \text{sen}^3 \phi} + \frac{b_x (b \text{sen} \phi)_x}{b^2 \text{sen}^3 \phi}.
 \end{aligned}$$

Novamente, usando as equivalências das equações de Codazzi-Mainardi (2.4.5) e (2.4.6) para substituímos alguns termos de derivadas segundas, como a_{yx} e b_{xx} , temos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{12}^2)_x &= -\frac{\left(-\left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x \cos\phi - \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_x\right) \cos\phi}{b \text{sen}^2\phi} + \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}\phi} + \frac{a_y \cos^2\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} \\
 &+ \frac{a_y \cos\phi (b \text{sen}\phi)_x}{b^2 \text{sen}^3\phi} - \frac{\left(-\left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x \cos\phi - \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) \text{sen}\phi\phi_x\right)}{b \text{sen}^2\phi} \\
 &+ \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{b_x (b \text{sen}\phi)_x}{b^2 \text{sen}^3\phi} \\
 &= \frac{\cos\phi}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x - \frac{\cos^2\phi}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x + \frac{\text{sen}\phi\phi_x \cos\phi}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) \\
 &+ \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}\phi} + \frac{a_y \cos^2\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{a_y \cos\phi (b \text{sen}\phi)_x}{b^2 \text{sen}^3\phi} + \frac{1}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x \\
 &- \frac{\cos\phi}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right)_x + \frac{\text{sen}\phi\phi_x}{b \text{sen}^2\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right) + \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{b_x (b \text{sen}\phi)_x}{b^2 \text{sen}^3\phi}.
 \end{aligned}$$

Assim, ficamos com a seguinte expressão para (2.8.1)

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{12}^2)_x &= \frac{1}{b} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right)_x + \frac{\cos\phi\phi_x}{b \text{sen}\phi} \left(\frac{\rho_x b}{2\rho}\right) + \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3} + \frac{a_y \cos\phi b_x}{b^2 \text{sen}^2\phi} \\
 &+ \frac{a_y \cos^2\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{(b_x)^2}{b^2 \text{sen}^2\phi} + \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{\phi_x}{b \text{sen}\phi} \left(\frac{\rho_y a}{2\rho}\right).
 \end{aligned}$$

Encontraremos agora as expressões para (2.8.3) e (2.8.4). De (2.1) temos

$$\frac{f_x}{f} = \frac{(ab\rho \text{sen}\phi)_x}{ab\rho \text{sen}\phi} = \frac{(ab\rho)_x}{ab\rho} + \frac{\cos\phi\phi_x}{\text{sen}\phi}.$$

Logo, para (2.8.3) temos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 \frac{f_x}{f} &= \left(\frac{-a_y \cos\phi - b_x}{b \text{sen}^2\phi}\right) \left(\frac{(ab\rho)_x}{ab\rho} + \frac{\cos\phi\phi_x}{\text{sen}\phi}\right) \\
 &= -\frac{a_y (ab\rho)_x \cos\phi}{ab^2 \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y \phi_x (1 - \text{sen}^2\phi)}{b \text{sen}^3\phi} - \frac{b_x (ab\rho)_x}{ab^2 \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi} \\
 &= -\frac{a_y a_x \cos\phi}{ab \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y b_x \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y \rho_x \cos\phi}{b \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}^3\phi} + \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}\phi} \\
 &- \frac{a_x b_x}{ab \text{sen}^2\phi} - \frac{(b_x)^2}{b^2 \text{sen}^2\phi} - \frac{b_x \rho_x}{b \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi}.
 \end{aligned}$$

Usando (2.4.1) para substituímos a_y na expressão de (2.8.3), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 \frac{f_x}{f} &= -\frac{\left(-\frac{\rho_y a}{2\rho} + \frac{\rho_x b}{2\rho} \cos\phi\right) a_x \cos\phi}{ab \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y b_x \cos\phi}{b^2 \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y \rho_x \cos\phi}{b \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}^3\phi} \\
 &+ \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}\phi} + \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}\phi} - \frac{a_x b_x}{ab \text{sen}^2\phi} - \frac{(b_x)^2}{b^2 \text{sen}^2\phi} - \frac{b_x \rho_x}{b \rho \text{sen}^2\phi} - \frac{b_x \cos\phi\phi_x}{b \text{sen}^3\phi}.
 \end{aligned}$$

Assim conseguimos a seguinte expressão para (2.8.3)

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 \frac{f_x}{f} &= \frac{\rho_y a_x \cos \phi}{2b\rho \text{sen}^2 \phi} - \frac{\rho_x a_x}{2a\rho \text{sen}^2 \phi} + \frac{\rho_x a_x}{2a\rho} - \frac{a_y b_x \cos \phi}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a_y \rho_x \cos \phi}{b\rho \text{sen}^2 \phi} - \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen}^3 \phi} \\ &+ \frac{a_y \phi_x}{b \text{sen} \phi} - \frac{a_x b_x}{ab \text{sen}^2 \phi} - \frac{(b_x)^2}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{b_x \rho_x}{b\rho \text{sen}^2 \phi} - \frac{b_x \cos \phi \phi_x}{b \text{sen}^3 \phi}. \end{aligned}$$

Finalmente para (2.8.4) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 \frac{f_y}{f} &= \left(\frac{ab_x \cos \phi}{b^2 \text{sen}^2 \phi} + \frac{aa_y}{b^2 \text{sen}^2 \phi} - \frac{a\phi_x}{b \text{sen} \phi} \right) \left(\frac{(ab\rho)_y}{ab\rho} + \frac{\cos \phi \phi_y}{\text{sen} \phi} \right) \\ &= \frac{ab_x \cos \phi (ab\rho)_y}{ab^3 \rho \text{sen}^2 \phi} + \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} + \frac{aa_y (ab\rho)_y}{ab^3 \rho \text{sen}^2 \phi} \\ &+ \frac{aa_y \cos \phi \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} - \frac{a (ab\rho)_y \phi_x}{ab^2 \rho \text{sen} \phi} - \frac{a \cos \phi \phi_x \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi}. \end{aligned}$$

Resolvendo algumas derivadas obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 \frac{f_y}{f} &= \frac{b_x \cos \phi a_y}{b^2 \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \cos \phi b_y a}{b^3 \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \cos \phi \rho_y a}{b^2 \rho \text{sen}^2 \phi} + \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} - \frac{ab_x \phi_y}{b^2 \text{sen} \phi} \\ &+ \frac{(a_y)^2}{b^2 \text{sen}^2 \phi} + \frac{aa_y b_y}{b^3 \text{sen}^2 \phi} + \frac{aa_y \rho_y}{b^2 \rho \text{sen}^2 \phi} + \frac{aa_y \cos \phi \phi_y}{b^2 \text{sen}^3 \phi} \\ &- \frac{a_y b \rho \phi_x}{b^2 \rho \text{sen} \phi} - \frac{ab_y \phi_x}{b^2 \text{sen} \phi} - \frac{a \rho_y \phi_x}{b \rho \text{sen} \phi} - \frac{a \cos \phi \phi_x \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi}. \end{aligned}$$

Substituindo (2.8.1), (2.8.2), (2.8.3) e (2.8.4) em (2.8) e multiplicando a equação obtida por $\frac{b \text{sen} \phi}{a}$, obtemos a seguinte expressão para a equação de Gauss

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\rho_x b}{2\rho} \right)_x \frac{\text{sen} \phi}{a} + \left(\frac{\rho_x b}{2a\rho} \right) \cos \phi \phi_x - \frac{\rho_x a_x b \text{sen} \phi}{2\rho a^2} + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho} \right)_y \frac{\text{sen} \phi}{b} + \left(\frac{\rho_y a}{2b\rho} \right) \cos \phi \phi_y \\ &- \frac{\rho_y b_y a \text{sen} \phi}{2b^2 \rho} + \phi_{xy} - ab \text{sen} \phi + R(x, y), \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

onde $R(x, y)$ é dado por

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \frac{3a_y \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{3b_x \cos \phi \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{2(b_x)^2}{ab \text{sen} \phi} + \frac{3\rho_y \phi_x}{2\rho} + \frac{2\rho b_y a_y}{2\rho b^2 \text{sen} \phi} - \frac{\rho_x b b_y \cos \phi}{2b^2 \rho \text{sen} \phi} \\ &+ \frac{\rho_y b_y a}{2b^2 \rho \text{sen} \phi} + \frac{a_y \cos \phi \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi} - \frac{2(a_y)^2}{ab \text{sen} \phi} + \frac{\rho_x \phi_y}{2\rho} - \frac{\rho_y a a_x \cos \phi}{2a^2 \rho \text{sen} \phi} \\ &+ \frac{\rho_x a_x b}{2a^2 \rho \text{sen} \phi} + \frac{2\rho a_x b_x}{2\rho a^2 \text{sen} \phi} + \frac{a_y \rho_x \cos \phi}{a \rho \text{sen} \phi} + \frac{b_x \rho_x}{a \rho \text{sen} \phi} - \frac{b_x \cos \phi \rho_y}{b \rho \text{sen} \phi} - \frac{a_y \rho_y}{b \rho \text{sen} \phi}. \end{aligned}$$

Podemos colocar a expressão da equação de Gauss (2.8.5) em uma forma mais simples utilizando propriedades de derivadas. Assim obtemos a seguinte equação

$$\phi_{xy} + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho a} \text{sen}\phi \right)_x + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho b} \text{sen}\phi \right)_y - a b \text{sen}\phi + R(x, y) = 0. \quad (2.8.6)$$

Afirmamos que $R(x, y) = 0$. Inicialmente podemos fazer uma reordenação das parcelas de $R(x, y)$ e colocar alguns termos em evidência, obtendo

$$\begin{aligned} R(x, y) = & \frac{3a_y \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{3b_x \cos \phi \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x}{ab \rho \text{sen} \phi} (2b_x \rho + \rho_x b - \cos \phi a \rho_y) + \frac{3\rho_y \phi_x}{2\rho} \\ & + \frac{\rho_x \phi_y}{2\rho} + \frac{b_y}{2\rho b^2 \text{sen} \phi} (2\rho a_y - \rho_x b \cos \phi + \rho_y a) + \frac{a_y \cos \phi \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi} \\ & + \frac{a_x}{2a^2 \rho \text{sen} \phi} (-\rho_y a \cos \phi + \rho_x b + 2\rho b_x) - \frac{a_y}{ab \rho \text{sen} \phi} (2a_y \rho + \rho_y a - \cos \phi b \rho_x). \end{aligned}$$

Pelas equações de Codazzi-Mainardi (2.4), temos que as parcelas que estão entre parênteses são nulas, ou seja,

$$R(x, y) = \frac{3a_y \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{3b_x \cos \phi \phi_x}{a \text{sen}^2 \phi} + \frac{3\rho_y \phi_x}{2\rho} + \frac{\rho_x \phi_y}{2\rho} + \frac{a_y \cos \phi \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi} + \frac{b_x \phi_y}{b \text{sen}^2 \phi}.$$

Novamente, podemos colocar alguns termos em evidência, obtendo

$$\begin{aligned} R(x, y) = & \frac{3\phi_x}{2\rho a \text{sen}^2 \phi} (2\rho a_y + 2\rho b_x \cos \phi + \rho_y a \text{sen}^2 \phi) \\ & + \frac{\phi_y}{2\rho b \text{sen}^2 \phi} (2\rho b_x + 2\rho a_y \cos \phi + \rho_x b \text{sen}^2 \phi). \end{aligned}$$

Substituindo $\text{sen}^2 \phi$ por $(1 - \cos^2 \phi)$ temos

$$\begin{aligned} R(x, y) = & \frac{3\phi_x}{2\rho a \text{sen}^2 \phi} (2\rho a_y + 2\rho b_x \cos \phi + \rho_y a - \rho_y a \cos^2 \phi) \\ & + \frac{\phi_y}{2\rho b \text{sen}^2 \phi} (2\rho b_x + 2\rho a_y \cos \phi + \rho_x b - \rho_x b \cos^2 \phi). \end{aligned}$$

Das equações de Codazzi-Mainardi (2.4), temos

$$2\rho a_y + \rho_y a = \rho_x b \cos \phi \quad \text{e} \quad 2\rho b_x + \rho_x b = \rho_y a \cos \phi.$$

Portanto ficamos com a seguinte expressão para $R(x, y)$

$$\begin{aligned} R(x, y) = & \frac{3\phi_x}{2\rho a \text{sen}^2 \phi} (\rho_x b \cos \phi + 2\rho b_x \cos \phi - \rho_y a \cos^2 \phi) \\ & + \frac{\phi_y}{2\rho b \text{sen}^2 \phi} (\rho_y a \cos \phi + 2\rho a_y \cos \phi - \rho_x b \cos^2 \phi). \end{aligned}$$

Finalmente, colocando $\cos \phi$ em evidência obtemos

$$R(x, y) = \frac{3\phi_x \cos\phi}{2\rho a \operatorname{sen}^2\phi} (\rho_x b + 2\rho b_x - \rho_y a \cos\phi) + \frac{\phi_y \cos\phi}{2\rho b \operatorname{sen}^2\phi} (\rho_y a + 2\rho a_y - \rho_x b \cos\phi)$$

Ora, pela equações Codazzi-Mainardi (2.4),

$$\rho_x b + 2\rho b_x - \rho_y a \cos\phi = 0 \quad \text{e} \quad \rho_y a + 2\rho a_y - \rho_x b \cos\phi = 0.$$

o que nos mostra que $R(x, y) = 0$. Assim a expressão para a equação de Gauss (2.8.6) se reduz, tornando-se

$$\phi_{xy} + \left(\frac{\rho_x b}{2\rho a} \operatorname{sen}\phi \right)_x + \left(\frac{\rho_y a}{2\rho b} \operatorname{sen}\phi \right)_y - a b \operatorname{sen}\phi = 0,$$

provando assim o teorema. □

Na próxima seção daremos a definição de Superfícies de Bianchi e definiremos também a malha de Chebyshev generalizada.

2.2 Superfícies de Bianchi

Além de nossas superfícies estarem parametrizadas por linhas assintóticas e possuírem curvatura Gaussiana negativa, acrescentaremos mais uma condição para que uma superfície seja de Bianchi, que será dada na definição a seguir.

Definição 2.1 *Uma superfície com curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$ é dita de **Bianchi** se $\rho_{xy} = 0$, ou seja, $\rho = h(x) + r(y)$ onde h é uma função apenas de x , e r é uma função apenas de y .*

Definição 2.2 *Uma parametrização de uma superfície é dita **malha de Chebyshev generalizada** se $A = |X_x| = |X_y| = B$, ou seja, $a = b$, onde $a = \frac{A}{\rho}$ e $b = \frac{B}{\rho}$.*

Exemplo 2.1 Para uma superfície com Curvatura Gaussiana constante negativa, (2.4) implica que a e b são funções de x e de y apenas, respectivamente.

De fato, das equações de Coddazzi-Mainardi (2.4) temos que

$$\begin{aligned} a_y + \frac{\rho_y a}{2\rho} - \frac{\rho_x b}{2\rho} \cos\phi = 0 &\Rightarrow a_y = 0 \Rightarrow a = h(x). \\ b_x + \frac{\rho_x b}{2\rho} - \frac{\rho_y a}{2\rho} \cos\phi = 0 &\Rightarrow b_x = 0 \Rightarrow b = r(y). \end{aligned}$$

Mudando as coordenadas conforme necessário, podemos assumir que $a = b = c$ para uma constante positiva c .

Exemplo 2.2 Uma superfície com curvatura Gaussiana negativa é mínima se, e somente se, $\phi = \frac{\pi}{2}$, já que a curvatura média é dada por $H = -\frac{1}{\rho} \cotg\phi$. De fato,

$$H = \frac{eG - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)} = \frac{-fF}{(EG - F^2)} \Rightarrow H = \frac{\frac{-AB\text{sen}\phi}{\rho} AB\cos\phi}{A^2B^2 - A^2B^2(\cos\phi)^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\cos\phi}{\text{sen}\phi}$$

Supondo S ser mínima temos $\cotg\phi = 0$, ou seja, $\cos\phi = 0$. Daí $\phi = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, supondo $\phi = \frac{\pi}{2}$, temos $H = -\frac{1}{\rho} \cotg\phi = 0$. Logo S é mínima. Neste caso, das equações (2.4) de Codazzi-Mainardi temos:

- i) $2\rho a_y + \rho_y a = 0$,
- ii) $2\rho b_x + \rho_x b = 0$.

De i), temos que

$$2\frac{a_y}{a} = -\frac{\rho_y}{\rho}$$

Usando propriedades de derivadas de logaritmos obtemos

$$(\ln a^2)_y = (\ln \rho^{-1})_y.$$

Integrando a equação acima temos

$$\ln(a^2) = \ln(\rho^{-1}) + f(x),$$

Assim fazendo $f(x) = \ln[h_1(x)]$ obtemos a seguinte expressão

$$\ln(a^2) = \ln[\rho^{-1}] + \ln[h_1(x)] \Rightarrow \ln(a^2) = \ln[\rho^{-1}h_1(x)].$$

Podemos então isolar a e assim obter

$$a^2 = \rho^{-1}h_1(x) \Rightarrow a = \rho^{-\frac{1}{2}}[h_1(x)]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \rho^{-\frac{1}{2}}\alpha(x).$$

Analogamente, de ii) temos

$$2\frac{b_x}{b} = -\frac{\rho_x}{\rho}$$

Novamente, usando propriedades de derivadas de logaritmos temos

$$(\ln b^2)_x = (\ln \rho^{-1})_x.$$

Da mesma forma, integrando a equação acima conseguimos

$$\ln(b^2) = \ln(\rho^{-1}) + g(y).$$

Fazendo $g(y) = \ln[h_2(y)]$, obtemos a seguinte expressão

$$\ln(b^2) = \ln(\rho^{-1}) + \ln[h_2(y)] \Rightarrow \ln(b^2) = \ln[\rho^{-1}h_2(y)].$$

Podemos isolar b e obter

$$b^2 = \rho^{-1}h_2(y) \Rightarrow b = \rho^{-\frac{1}{2}}[h_2(y)]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = \rho^{-\frac{1}{2}}\beta(y).$$

Logo, pela definição (2.2), a superfície está parametrizada pela Malha de Chebyshev Generalizada, basta tomar $\alpha(x) = \beta(y) = c$.

Proposição 2.2 *Para uma Superfície de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante e parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada as equações de compatibilidade (2.3) e (2.4) tornam-se*

$$\left(\frac{\rho_x}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y}{2\rho}\right)_y - a^2 = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{a_y}{a} + \frac{\rho_y}{2\rho} - \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi = 0 \\ \frac{a_x}{a} + \frac{\rho_x}{2\rho} - \frac{\rho_y}{2\rho} \cos\phi = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Demonstração. Para a equação de Gauss (2.3) basta observarmos que $\phi_{xy} = 0$ e fazermos $\sin\phi = c$, onde c é uma constante. Como $a = b$ a equação (2.3) torna-se

$$c \left[\left(\frac{\rho_x}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y}{2\rho}\right)_y - a^2 \right] = 0,$$

que é equivalente à equação (2.9). Para as equações de Codazzi-Mainardi (2.4), basta dividir as equações por a e usar o fato que $a = b$.

□

Mais adiante proveremos que o ângulo de Chebyshev é igual a $\frac{\pi}{2}$. Mas antes precisaremos de alguns resultados.

Proposição 2.3 *Integrando as equações em (2.10), as quais são equivalentes às equações de Codazzi-Mainardi (2.4), temos que*

$$a = \alpha(x)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} = \beta(y)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_y}{\rho}dx}. \quad (2.11)$$

Demonstração. De fato, da primeira equação temos que

$$\begin{aligned} (\ln a)_y + (\ln \rho^{\frac{1}{2}})_y &= \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi, \\ \Rightarrow [\ln(a\rho^{\frac{1}{2}})]_y &= \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi, \end{aligned}$$

onde usamos propriedades de derivadas. Integrando em relação à y obtemos

$$s(x) + \ln(a\rho^{\frac{1}{2}}) = \int \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi dy$$

Elevando à exponencial e aplicando propriedades de logaritmos temos

$$e^{s(x)+\ln(a\rho^{\frac{1}{2}})} = e^{\int\frac{\rho_x}{2\rho}\cos\phi dy},$$

ou seja,

$$e^{s(x)}(a\rho^{\frac{1}{2}}) = e^{\int\frac{\rho_x}{2\rho}\cos\phi dy}.$$

Esta equação é equivalente à

$$a = \alpha(x)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy},$$

onde α é uma função apenas de x . Analogamente, para a segunda equação em (2.10) obtemos que

$$a = \beta(y)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_y}{\rho}dx},$$

onde β é uma função apenas de y . Deste modo,

$$a = \alpha(x)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} = \beta(y)\rho^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_y}{\rho}dx}.$$

Para verificarmos que as expressões obtidas acima são solução das equações em (2.10), vamos calcular primeiramente a_y e substituir na primeira equação (2.10).

$$\begin{aligned} a_y &= \alpha(x) \left[-\frac{\rho_y}{2\rho^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} + \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} \left(\frac{\cos\phi}{2} \frac{\rho_x}{\rho} \right) \right] \\ &= \alpha(x) e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} \left(-\frac{\rho_y}{2\rho^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}} \frac{\cos\phi}{2} \rho_x \right) \\ &= \alpha(x) \frac{1}{2\rho^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\cos\phi}{2}\int\frac{\rho_x}{\rho}dy} (\rho_x \cos\phi - \rho_y). \end{aligned}$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} \frac{a_y}{a} + \frac{\rho_y}{2\rho} - \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi &= \frac{\alpha(x) \frac{1}{2\rho^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\cos\phi}{2} \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} (\rho_x \cos\phi - \rho_y)}{\alpha(x) \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\cos\phi}{2} \int \frac{\rho_x}{\rho} dy}} + \frac{\rho_y}{2\rho} - \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi \\ &= \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi - \frac{\rho_y}{2\rho} + \frac{\rho_y}{2\rho} - \frac{\rho_x}{2\rho} \cos\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão $a = \alpha(x) \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\cos\phi}{2} \int \frac{\rho_x}{\rho} dy}$ satisfaz a primeira equação em (2.10). De forma análoga pode-se verificar que a segunda expressão $a = \beta(y) \rho^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\cos\phi}{2} \int \frac{\rho_y}{\rho} dx}$ satisfaz a segunda equação em (2.10). □

Proposição 2.4 *Para uma superfície de Bianchi com curvatura Gaussiana $K = -\frac{1}{\rho^2}$, com ângulo de Chebyshev ϕ constante e parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada, temos*

$$[(\rho_x^2) - (\rho_y^2)] \cos\phi = 0. \quad (2.12)$$

Demonstração. Derivando a primeira equação de (2.10) com respeito a x e subtraindo da derivada da segunda equação de (2.10) com respeito a y , temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{yx}a - a_y a_x}{a^2} + \frac{\rho_{yx}2\rho - \rho_y 2\rho_x}{(2\rho)^2} - \left[\left(\frac{\rho_{xx}2\rho - \rho_x 2\rho_x}{(2\rho)^2} \right) \cos\phi + \frac{\rho_x}{2\rho} (\cos\phi)_x \right] \\ - \frac{a_{xy}a - a_x a_y}{a^2} - \frac{\rho_{xy}2\rho - \rho_x 2\rho_y}{(2\rho)^2} + \left[\left(\frac{\rho_{yy}2\rho - \rho_y 2\rho_y}{(2\rho)^2} \right) \cos\phi + \frac{\rho_y}{2\rho} (\cos\phi)_y \right] = 0. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\left[\left(\frac{\rho_{xx}2\rho - \rho_x 2\rho_x}{(2\rho)^2} \right) \cos\phi + \frac{\rho_x}{2\rho} (\cos\phi)_x \right] + \left[\left(\frac{\rho_{yy}2\rho - \rho_y 2\rho_y}{(2\rho)^2} \right) \cos\phi + \frac{\rho_y}{2\rho} (\cos\phi)_y \right] = 0.$$

Usando propriedades de derivadas e o fato de ϕ ser constante, podemos colocar a expressão acima em uma forma mais simples,

$$\left(\frac{\rho_x}{\rho} \right)_x \cos\phi = \left(\frac{\rho_y}{\rho} \right)_y \cos\phi. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é equivalente a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2}{\rho^2} \right) \cos\phi - \left(\frac{\rho_{yy}\rho - (\rho_y)^2}{\rho^2} \right) \cos\phi &= 0 \\ \Rightarrow \{(\rho_{xx} - \rho_{yy})\rho - [(\rho_x)^2 - (\rho_y)^2]\} \cos\phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Usaremos as equações (2.9), (2.11), e (2.13). Da equação (2.9), temos que

$$\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y = 2a^2.$$

Isolando $\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x$, temos

$$\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x = 2a^2 - \left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y.$$

Da mesma forma temos

$$\left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y = 2a^2 - \left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x.$$

Elevando as expressões de a em (2.11) ao quadrado, obtemos

$$a^2 = \frac{(\alpha(x))^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} = \frac{(\beta(y))^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_y}{\rho} dx}.$$

Substituindo $\left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y$ em (2.13) conseguimos a seguinte equação

$$\left[\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x - \left(2a^2 - \left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x\right)\right] \cos\phi = 0.$$

Substituindo a primeira expressão de $a(x, y)$ de (2.11) na equação acima obtemos

$$2 \left[\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x - \frac{(\alpha(x))^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \right] \cos\phi = 0.$$

Analogamente com $\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x$ e a segunda expressão de $a(x, y)$ de (2.11) obtemos

$$2 \left[\left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y - \frac{(\beta(y))^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_y}{\rho} dx} \right] \cos\phi = 0.$$

Temos então as seguintes equações

$$\left[\left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)_x - \frac{\alpha^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \right] \cos\phi = 0, \quad (2.15)$$

$$\left[\left(\frac{\rho_y}{\rho}\right)_y - \frac{\beta^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_y}{\rho} dx} \right] \cos\phi = 0 \quad (2.16)$$

Por outro lado, de (2.15) temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2}{\rho^2} - \frac{\alpha^2\rho}{\rho^2} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \right] \cos\phi = 0 \\ \Rightarrow & \left[\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2 - \alpha^2\rho e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \right] \cos\phi = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Analogamente, de (2.16) temos:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho_{yy}\rho - (\rho_y)^2}{\rho^2} - \frac{\beta^2\rho}{\rho^2} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_y}{\rho} dx} \right] \cos\phi = 0 \\ \Rightarrow & \left[\rho_{yy}\rho - (\rho_y)^2 - \beta^2\rho e^{\cos\phi \int \frac{\rho_y}{\rho} dx} \right] \cos\phi = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como $\rho_{xy} = 0$, derivando (2.17) duas vezes em relação a y , temos

$$\left[\rho_y\rho_{xx} + \rho\rho_{xxy} - 2\rho_x\rho_{xy} - \alpha^2 \left(\rho_y e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} + \rho e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \left(\cos\phi \frac{\rho_x}{\rho} \right) \right) \right] \cos\phi = 0.$$

Simplificando a expressão acima ficamos com a seguinte equação

$$\left[\rho_y\rho_{xx} - \alpha^2 e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} (\cos\phi\rho_x + \rho_y) \right] \cos\phi = 0.$$

Derivando a expressão obtida acima novamente em relação a y , temos

$$\begin{aligned} & \left[\rho_{yy}\rho_{xx} + \rho_y\rho_{xxy} - \alpha^2 e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \left(\cos\phi \frac{\rho_x}{\rho} \right) (\cos\phi\rho_x + \rho_y) \right] \cos\phi \\ & - \left[\alpha^2 e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} (\cos\phi\rho_{xy} + \rho_{yy}) \right] \cos\phi = 0. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\Rightarrow \left[\rho_{yy}\rho_{xx} - \alpha^2 e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy} \left((\cos\phi)^2 \frac{(\rho_x)^2}{\rho} + \cos\phi \frac{\rho_y\rho_x}{\rho} + \rho_{yy} \right) \right] \cos\phi = 0.$$

Como da primeira expressão em (2.11) temos que $a^2 = \frac{\alpha^2}{\rho} e^{\cos\phi \int \frac{\rho_x}{\rho} dy}$, podemos então reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\left[\rho_{yy}\rho_{xx} - (\rho\rho_{yy} + (\cos\phi)^2 (\rho_x)^2 + \cos\phi\rho_x\rho_y) a^2 \right] \cos\phi = 0. \quad (2.19)$$

Similarmente, para (2.18), derivando duas vezes em relação à x , e procedendo de maneira análoga à equação (2.17), conseguimos a seguinte equação

$$\left[\rho_{yy}\rho_{xx} - (\rho\rho_{xx} + (\cos\phi)^2 (\rho_y)^2 + \cos\phi\rho_x\rho_y) a^2 \right] \cos\phi = 0. \quad (2.20)$$

Usaremos agora (2.14), (2.19) e (2.20). Multiplicando (2.20) por (-1) e somando com (2.19) temos

$$\left[(\rho_{xx} - \rho_{yy})\rho - ((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2) \cos^2\phi \right] a^2 \cos\phi = 0.$$

Usando a identidade $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, a equação acima torna-se

$$[(\rho_{xx} - \rho_{yy})\rho - ((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2) + ((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2)\text{sen}^2\phi]a^2\cos\phi = 0.$$

Novamente, usando $\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, obtemos

$$\{[(\rho_{xx} - \rho_{yy})\rho - ((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2)]\cos\phi + [((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2)(1 - \cos^2\phi)]\cos\phi\}a^2 = 0.$$

De (2.14), temos que a primeira parcela da equação acima é nula. Assim temos

$$[((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2)\cos\phi]a^2\text{sen}^2\phi = 0.$$

Mas esta equação é equivalente à

$$((\rho_x)^2 - (\rho_y)^2)\cos\phi = 0.$$

□

Lema 2.2 *Para uma superfície de Bianchi com ângulo de chebyshev constante e parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada, temos que o ângulo de Chebyshev é igual a $\frac{\pi}{2}$.*

Demonstração. Supondo que $\phi \neq \frac{\pi}{2}$, de (2.12) temos que

$$(\rho_x)^2 = (\rho_y)^2 \Rightarrow \rho_x = \pm\rho_y.$$

Integrando ρ , obtemos $\rho = c(x \pm y)$, onde c é uma constante não nula. Da equação (2.9), temos:

$$a^2 = \left(\frac{\rho_x}{2\rho}\right)_x + \left(\frac{\rho_y}{2\rho}\right)_y = \frac{2(\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2)}{(2\rho)^2} + \frac{2(\rho_{yy}\rho - (\rho_y)^2)}{(2\rho)^2}.$$

Como $\rho = c(x \pm y)$, temos que $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$ e portanto

$$a^2 = \frac{-2(\rho_x)^2 - 2(\rho_y)^2}{(2\rho)^2}.$$

Substituindo as expressões de ρ e suas derivadas $\rho_x = c = \pm\rho_y$ na expressão acima temos

$$a^2 = \frac{-2(c^2 + c^2)}{4c^2(x \pm y)^2}.$$

Simplificando, ficamos com a seguinte expressão

$$a^2 = -\frac{1}{(x \pm y)^2},$$

que é uma contradição, e nos leva a ver que $\phi = \frac{\pi}{2}$.

□

Observação 2.2 Pelo Exemplo 2.2, uma superfície com curvatura Gaussiana negativa é mínima se, e somente se, $\phi = \frac{\pi}{2}$. No Lema 2.2 mostramos que uma superfície de Bianchi, parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada e com ângulo de Chebyshev constante, possui ângulo de Chebyshev igual a $\frac{\pi}{2}$. Provamos então o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Se uma superfície de Bianchi S está parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada, e possui ângulo de Chebyshev constante, então S é uma superfície mínima.*

Observação 2.3 Como o ângulo de Chebyshev é igual a $\frac{\pi}{2}$, das equações em (2.10) temos que

$$\frac{a_y}{a} + \frac{\rho_y}{2\rho} = 0 \quad e \quad \frac{a_x}{a} + \frac{\rho_x}{2\rho} = 0.$$

Aplicando propriedades de derivadas de logaritmos nas equações acima, obtemos

$$[\ln(a)]_y = [\ln(\rho^{-\frac{1}{2}})]_y \quad e \quad [\ln(a)]_x = [\ln(\rho^{-\frac{1}{2}})]_x,$$

Integrando as equações acima e novamente aplicando propriedades de logaritmos obtemos as expressões

$$a = \alpha(x) \rho^{-\frac{1}{2}} \quad e \quad a = \beta(y) \rho^{-\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$(\alpha(x) - \beta(y)) \rho^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \alpha(x) = \beta(y),$$

ou seja, $\alpha(x) = \beta(y) = \text{constante}$. Podemos então assumir que $\alpha = \beta = 1$, e daí,

$$a = b = \rho^{-\frac{1}{2}}.$$

Mostraremos ρ que é uma função de uma só variável.

Lema 2.3 *ρ é uma função apenas de x ou apenas de y .*

Demonstração. De fato, como $a = \rho^{-\frac{1}{2}}$, usando (2.9) temos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{xx}2\rho - 2(\rho_x)^2}{(2\rho)^2} + \frac{\rho_{yy}2\rho - 2(\rho_y)^2}{(2\rho)^2} - \frac{1}{\rho} &= 0 \\ \Rightarrow (\rho_{xx} + \rho_{yy})\rho - [(\rho_x)^2 + (\rho_y)^2] - 2\rho &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Derivando (2.21) em relação a x temos

$$(\rho_{xxx} + \rho_{yyx})\rho + (\rho_{xx} + \rho_{yy})\rho_x - 2(\rho_x\rho_{xx} + \rho_y\rho_{yx}) - 2\rho_x = 0.$$

Como as derivadas mistas de ρ são nulas, temos

$$\begin{aligned} \rho_{xxx}\rho - \rho_x\rho_{xx} + \rho_{yy}\rho_x - 2\rho_x &= 0 \\ \Rightarrow \rho_{xxx}\rho - \rho_x(\rho_{xx} - \rho_{yy} + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Derivando esta última equação em relação a y , temos

$$\rho_{xxx}\rho_y + \rho_x\rho_{yyy} = 0 \quad (2.22)$$

Suponha agora que $\rho = h(x) + r(y)$, onde h e r são funções de x e y apenas, respectivamente, tal que $h' \neq 0$ e $r' \neq 0$. Por (2.22) temos que

$$h'''(x)r'(y) + h'(x)r'''(y) = 0.$$

Logo temos

$$\frac{h'''(x)}{h'(x)} = -\frac{r'''(y)}{r'(y)} = \bar{c},$$

onde \bar{c} é uma constante, pois isso só é possível neste caso, já que (2.22) vale para todo x, y pertencente ao domínio D . Multiplicando ambos os lados de $h'''(x) - h'(x)\bar{c} = 0$ por $h''(x)$, temos que

$$h''(x)h'''(x) - \bar{c}h'(x)h''(x) = 0.$$

Podemos observar ainda que

$$[(h'')^2]' = 2h''h''' \text{ e } [(h')^2]' = 2h'h'' \Rightarrow h''h''' - \bar{c}h'h'' = \frac{[(h'')^2]' - \bar{c}[(h')^2]'}{2},$$

ou seja

$$[(h'')^2]' - \bar{c}[(h')^2]' = 0 \Rightarrow (h'')^2 - \bar{c}(h')^2 = \bar{c}_2 \Rightarrow (h')^2 = \frac{[(h'')^2 - \bar{c}_2]}{\bar{c}}.$$

Novamente, temos que

$$h'''(x) - h'(x)\bar{c} = 0 \Rightarrow h''(x) - h(x)\bar{c} = \bar{c}_3 \Rightarrow h''(x) = \bar{c}_3 + h(x)\bar{c}.$$

Dessa forma,

$$(h')^2 = \frac{(\bar{c}_3 + h(x)\bar{c})^2 - \bar{c}_2}{\bar{c}} = \frac{\bar{c}_3^2 + 2\bar{c}_3\bar{c}h(x) + \bar{c}^2(h(x))^2 - \bar{c}_2}{\bar{c}},$$

ou seja,

$$(h')^2 = \frac{\bar{c}^2}{\bar{c}}h(x)^2 + 2\bar{c}_3h(x) - \frac{\bar{c}_3^2 - \bar{c}_2}{\bar{c}}.$$

Fazendo uma reordenação das constantes temos que

$$(h')^2 = c_1h^2 + c_2h + c_3, \text{ onde } \bar{c} = c_1, 2\bar{c}_3 = c_2 \text{ e } \frac{(\bar{c}_3^2 - \bar{c}_2)}{\bar{c}} = c_3.$$

Analogamente,

$$-\frac{r'''}{r'} = \bar{c} \Rightarrow r''' + \bar{c}r' = 0.$$

Ainda,

$$[(r'')^2]' = 2r''r''' \text{ e } [(r')^2]' = 2r'r''.$$

Multiplicando a equação acima por r' temos:

$$r''r''' + \bar{c}r'r'' = 0 \Rightarrow [(r'')^2]' + \bar{c}[(r')^2]' = 0.$$

Integrando a equação acima obtemos

$$(r'')^2 + \bar{c}(r')^2 = \bar{k}_2 \Rightarrow (r')^2 = \frac{1}{\bar{c}} [\bar{k}_2 - (r'')^2].$$

Observe que

$$r''' + \bar{c}r' = 0 \Rightarrow r'' + \bar{c}r = \bar{k} \Rightarrow r'' = \bar{k} - \bar{c}r.$$

Mas então

$$(r')^2 = \frac{1}{\bar{c}} [\bar{k}_2 - (r'')^2] \Rightarrow (r')^2 = \frac{1}{\bar{c}} [\bar{k}_2 - (\bar{k} - \bar{c}r)^2].$$

Desenvolvendo o quadrado acima e simplificando a expressão temos que

$$(r')^2 = \frac{1}{\bar{c}} [\bar{k}_2 - \bar{k}^2 + 2\bar{k}\bar{c}r - \bar{c}^2r^2] \Rightarrow (r')^2 = -\bar{c}r^2 + 2\bar{k}r + \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}^2}{\bar{c}}.$$

Novamente, fazendo uma reordenação das constantes temos

$$(r')^2 = -c_1 r^2 + c_4 r + c_5, \text{ onde } \bar{c} = c_1, 2\bar{k} = c_4 \text{ e } \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}^2}{\bar{c}} = \bar{c}_5.$$

Portanto temos as seguintes expressões para as derivadas de h e r

$$\begin{cases} (h')^2 = c_1 h^2 + c_2 h + c_3 \\ (r')^2 = -c_1 r^2 + c_4 r + c_5 \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$. Agora como

$$\begin{aligned} h'' = \bar{c}_3 + \bar{c}h &\Rightarrow h'' = \frac{c_2}{2} + c_1 h, \text{ pois } \bar{c}_3 = \frac{c_2}{2}, \\ r'' = \bar{k} - \bar{c}r &\Rightarrow r'' = \frac{c_4}{2} - c_1 r, \text{ pois } \bar{k} = \frac{\bar{c}_4}{2}. \end{aligned}$$

De (2.21) temos

$$(h')^2 + (r')^2 = (h'' + r'')(h + r) - 2(h + r) = \left(\frac{c_2}{2} + c_1 h + \frac{c_4}{2} - c_1 r - 2\right)(h + r)$$

E de (2.23) temos:

$$(h')^2 + (r')^2 = c_1 h^2 + c_2 h + c_3 - c_1 r + c_4 r + c_5.$$

Portanto temos então a seguinte igualdade

$$\left(\frac{c_2}{2} + c_1 h + \frac{c_4}{2} - c_1 r - 2\right)(h + r) = c_1 h^2 + c_2 h + c_3 - c_1 r + c_4 r + c_5.$$

Efetuada a multiplicação do lado esquerdo obtemos

$$\frac{c_2}{2}h + c_1 h^2 + \frac{c_4}{2}h - c_1 r h - 2h + \frac{c_2}{2}r + c_1 r h + \frac{c_4}{2}r - c_1^2 r - 2r = c_1 h^2 + c_2 h + c_3 - c_1 r + c_4 r + c_5.$$

Simplificando a equação acima ficamos com a seguinte expressão

$$\frac{c_2}{2}h + \frac{c_4}{2}h - 2h - c_2 h + \frac{c_2}{2}r + \frac{c_4}{2}r - 2r - c_4 r - (c_3 + c_5) = 0.$$

Podemos colocar alguns termos em evidência e obter

$$\left(-\frac{c_2}{2} + \frac{c_4}{2} - 2\right)h + \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_4}{2} - 2\right)r - (c_3 + c_5) = 0.$$

Mas então temos que

$$\left(-\frac{c_2}{2} + \frac{c_4}{2} - 2\right) = 0, \left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_4}{2} - 2\right) = 0, (c_3 + c_5) = 0,$$

e assim obtemos uma contradição.

□

Na seção a seguir demonstraremos o principal resultado deste trabalho.

2.3 Superfícies de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante

Na seção anterior definimos o ângulo de Chebyshev para uma parametrização. Concluiremos este capítulo com o principal teorema.

Teorema 2.2 *Uma superfície de Bianchi com ângulo de Chebyshev constante e parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada é um pedaço de helicóide.*

Demonstração. Sem perda de generalidades, consideraremos $\rho = \rho(x)$. Da equação (2.21) e usando $a = \rho^{-\frac{1}{2}}$ temos

$$\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2 - 2\rho = 0$$

Colocando ρ em evidência obtemos então a seguinte edp

$$(\rho_{xx} - 2)\rho - (\rho_x)^2 = 0. \quad (2.24)$$

Afirmamos que $\rho = \frac{1}{(c_1^2)} \cos^2 h(c_1 x + c_2)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes não nulas, satisfaz (2.24). De fato, para a primeira derivada de ρ temos a seguinte expressão

$$\rho_x = \frac{1}{(c_1^2)} 2 \cosh(c_1 x + c_2) \sinh(c_1 x + c_2) c_1 = \frac{2}{c_1} \sinh(c_1 x + c_2) \cosh(c_1 x + c_2).$$

Analogamente para a segunda derivada temos

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{1}{c_1} 2 \left[(\sen^2 h(c_1 x + c_2) c_1 + \cos^2 h(c_1 x + c_2) c_1) \right] \\ &= 2 \left[(\sen^2 h(c_1 x + c_2) + \cos^2 h(c_1 x + c_2)) \right]. \end{aligned}$$

Logo ρ tem que satisfazer

$$(\rho_{xx} - 2)\rho - (\rho_x)^2 = 0.$$

Substituindo as expressões de ρ e suas derivadas na equação acima temos

$$\begin{aligned}
& [2(\operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) + \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2)) - 2] \frac{1}{(c_1^2)} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \\
& - \left[\frac{2}{c_1} \operatorname{sen} h(c_1 x + c_2) \operatorname{cosh}(c_1 x + c_2) \right]^2 \\
= & \frac{2}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) + \frac{2}{c_1^2} \operatorname{cos}^4 h(c_1 x + c_2) - \frac{2}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \\
& - \frac{4}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) \\
= & -2 \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) - 2 \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) (-\operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) + 1) \\
= & -2 \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) - 2 \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) (-\operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2)) \\
= & -2 \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) + 2 \operatorname{sen}^2 h(c_1 x + c_2) \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Podemos agora obter as formas fundamentais concretamente. Da proposição (2.1), temos

$$I = A^2 dx^2 + 2AB \cos \phi dx dy + B^2 dy^2,$$

$$II = \frac{2AB \operatorname{sen} \phi dx dy}{\rho}.$$

Mas

$$A = a\rho = \rho^{-\frac{1}{2}} \rho = \frac{\rho}{\rho^{\frac{1}{2}}} = \rho^{\frac{1}{2}}.$$

Como $a = b$ e $B = b\rho \Rightarrow B = \rho^{-\frac{1}{2}}$. Logo

$$I = (\rho^{\frac{1}{2}})^2 dx^2 + (\rho^{\frac{1}{2}})^2 dy^2 = \rho(dx^2 + dy^2)$$

Substituindo a expressão de ρ temos

$$I = \frac{1}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) (dx^2 + dy^2).$$

o que mostra que os coeficientes E e G da primeira e segunda formas fundamentais são dados por

$$E = \frac{1}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2) \quad \text{e} \quad G = \frac{1}{c_1^2} \operatorname{cos}^2 h(c_1 x + c_2).$$

Ainda,

$$II = \frac{2AB\text{sen}\phi}{\rho} dx dy = \frac{2\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\rho} dx dy \Rightarrow II = 2dx dy.$$

Como $f = \frac{ab\text{sen}\phi}{\rho} = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\rho} = 1$, temos determinados então os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais, sendo eles

$$E = \frac{1}{c_1^2} \cos^2 h(c_1 x + c_2), \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{c_2^2} \cos^2 h(c_1 x + c_2),$$

$$e = 0, \quad f = 1, \quad g = 0.$$

Pelo Teorema (1.4), Teorema Fundamental das Superfícies, como as funções encontradas acima são diferenciáveis e $E > 0$, $G > 0$, existe uma superfície S que possui E , F , G , e , f , g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Ora, pelo exemplo (1.1) os coeficientes acima são os coeficientes da primeira e segunda formas do helicóide. O teorema nos diz ainda que, se houver outra superfície \bar{S} que possui os mesmos coeficientes acima como coeficientes da primeira e segunda formas, então S e \bar{S} são a mesma superfície, a menos de uma translação T e uma transformação ortogonal própria P . O teorema está demonstrado.

□

Usando o exemplo 2.2 temos o seguinte corolário

Corolário 2.2 *Uma superfície de Bianchi mínima é um pedaço de helicóide.*

Conclusão

Existe uma certa familiaridade entre soluções de certas edp's não lineares de segunda ordem e algumas superfícies. A medida que vamos impondo condições sobre as parametrizações das superfícies, e conseqüentemente sobre as edp's associadas a essas superfícies, vamos restringindo essa classe de superfícies e preservando algumas características em comum.

O Teorema 2.1 nos dá explicitamente as equações de compatibilidade para uma superfície parametrizada por linhas assintóticas e com curvatura Gaussiana negativa $K = -\frac{1}{\rho^2}$. Neste trabalho, uma de nossas contribuições, além de fazermos um estudo sobre as relações entre as superfícies mínimas e algumas superfícies de Bianchi, foi dar uma demonstração para o Teorema 2.1 diferente da demonstração encontrada em [3]. Em [3] é feita uma ponte com a álgebra dos quatérnios e são usados alguns conceitos novos. Aqui usamos apenas as expressões dos símbolos de Christoffel dadas pela proposição 2.1. O Teorema 2.1 foi essencial para mostrar que existe uma única superfície S de Bianchi parametrizada pela malha de Chebyshev generalizada e com ângulo de Chebyshev constante, à saber, S é um pedaço de helicóide.

Uma observação interessante seria: se retirarmos a hipótese do ângulo de Chebyshev ser constante, quais seriam as Superfícies de Bianchi parametrizadas pela malha de Chebyshev generalizada? E se a função ρ não for de variáveis separáveis, que superfícies podemos obter? Ou ainda, que características comuns possuem todas as Superfícies de Bianchi?

Existem outras perguntas interessantes que podemos fazer sobre as Superfícies de Bianchi, bastando apenas acrescentar ou retirar alguma hipótese.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Fujioka, *Bianchi Surfaces with Constant Chebyshev Angle*, Tokyo J. Math vol. 27, no. 1, 2004.
- [2] A. Fujioka, *Surfaces with harmonic inverse mean curvature in space forms*, Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 3021-3025.
- [3] A. I. Bobenko, *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases.*, *Harmonic maps and integrable systems*, Aspects Math., E23, Vieweg (1994), 83-127.
- [4] A. Fujioka and J. Inoguchi, *Bonnet surfaces with constant curvature*. Results Math., 33 (1998), 288-293.
- [5] K. Tenenblat, *Transformações de Superfícies e Aplicações*, 13º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas-MG. (1981).
- [6] K. Tenenblat, *Introdução à Geometria Diferencial*, Brasília: Editora Universidade de Brasília (1990).
- [7] M. p. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Impa (1979), 4a Edição (2008).
- [8] M. p. Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática (1979). 2a Edição, (2006).
- [9] V. Iório, *EDP: Um curso de Graduação*, Rio de Janeiro, Impa: ISBN 2a Edição (2001).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)