

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

DANIELA BARBIERI

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições
de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

Maringá

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

DANIELA BARBIERI

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições
de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Valéria N. Domingos Cavalcanti

Maringá

2010

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

DANIELA BARBIERI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof^a. Dr^a. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientadora)

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP-SP

Aprovada em: 21 de outubro de 2010

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus; aos meus pais Nadir e Antenor e às minhas irmãs Patrícia e Aline pelo apoio em todos os momentos desta importante etapa em minha vida; ao meu noivo Emersom por compreender a minha ausência durante a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.

À professora Valéria N. D. Cavalcanti pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

Aos demais professores do mestrado, pelo empenho em nos proporcionar uma boa formação acadêmica; aos professores do curso de matemática da Fafipa-Pr pela motivação; e aos meus professores do Ensino Médio e Fundamental pela grande contribuição em minha formação.

Aos meus pais, irmãs e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao meu noivo Emersom Vidotti, pelo amor, carinho, abraço e conforto; pela paciência, compreensão e dedicação dados a mim que contribuíram para o meu sucesso.

Aos amigos e colegas do mestrado que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando, em especial à Tássia Hickmann pela amizade e carinho que partilhamos durante nosso caminhar.

Aos colegas de trabalho do Colégio Estadual Dr. José Gerardo Braga que me apoiaram nos momentos difíceis. Em especial à Fabiana Pagnan Figueira com quem dividi as angústias e alegrias do dia-a-dia.

À Capes pelo apoio financeiro, que veio no momento em que eu mais precisava.

Enfim, a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje. Muito obrigada!

“O fácil se faz logo, o difícil demora um pouco, o impossível entrega nas mãos de Deus, porque para Ele tudo é possível...”

RESUMO

Neste trabalho provamos a existência e unicidade de solução e fornecemos taxas de decaimento uniforme para a energia associada à equação da onda com condições de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel dada por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, tendo uma fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; sendo Γ_0, Γ_1 subconjuntos não-vazios, fechados e disjuntos de Γ . Denotamos por Δ_{Γ_1} o operador Laplace-Beltrame em Γ_1 e por ∂_ν a derivada normal, onde ν é a normal unitária exterior a Γ .

ABSTRACT

In this work we prove the existence and uniqueness of solution and we establish the uniform decay rates for the energy associated to the wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions given by

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{in } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

where Ω is a bounded domain of \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, having a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$, such that $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; with Γ_0, Γ_1 being nonempty, closed and disjoint. We denote by Δ_{Γ_1} the Laplace-Beltrame operator on Γ_1 and by ∂_ν the normal derivative, where ν represents the unit outward normal field to Γ .

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Distribuições e Espaços Funcionais	15
1.1.1 Noção de Derivada Fraca	15
1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$	17
1.1.3 Convolução e Regularização	22
1.1.4 Espaços de Sobolev	23
1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais	29
1.3 Teoria de Traço	34
1.3.1 Traço em $L^2(0, T; H^m(\Omega))$	37
1.3.2 Traço em $H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$	38
1.4 Teorema de Carathéodory	40
1.5 Topologia Fraca - $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraca \star - $\sigma(E', E)$	41
1.6 Teoria Espectral	43
1.7 Operadores Maximais Monótonos e Operadores Dissipativos	44

1.7.1	Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Banach	45
1.7.2	Subdiferencial de Funções Convexas	45
1.7.3	Operadores Dissipativos	47
1.7.4	Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert	47
1.8	O Teorema de Holmgren	49
1.9	O Gradiente Tangencial e o Operador Laplace-Beltrame	49
2	Existência e Unicidade de Solução	53
2.1	Introdução	53
2.2	Existência de Solução via Método de Faedo-Galerkin	55
2.2.1	Solução Regular	55
2.2.2	Solução Fraca	83
2.3	Existência e Unicidade de Solução via Teoria de Semigrupos	90
2.3.1	Existência e Unicidade de Solução Regular	90
2.3.2	Existência e Unicidade de Solução Fraca	100
2.4	Apêndice	102
2.4.1	O Espaço $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$	102
2.4.2	O Espaço $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$	105
2.4.3	Identidade de Energia	106
3	Estabilização	118
3.1	Introdução	118
3.2	Prova do Teorema 3.1	120

3.2.1	O Método dos Multiplicadores	121
3.2.2	Análise dos Termos de Fronteira	127
3.2.3	Conclusão do Teorema 3.1	157
	Bibliografia	163

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar de maneira didática e pormenorizada os resultados publicados em Cavalcanti et al. [9]. Neste trabalho os autores estudaram existência e unicidade de solução bem como obtiveram taxas de decaimento uniforme para a energia do sistema, quantificadas por soluções de uma certa equação diferencial ordinária não-linear que depende da dissipação; da seguinte equação da onda sujeita às condições de fronteira do tipo Cauchy Ventcel:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x); \quad x \in \Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, tal que Γ_i , $i = 0, 1$, são subconjuntos não-vazios, fechados e disjuntos de Γ . Denotaremos por ∇_T o gradiente tangencial em Γ , por Δ_Γ o operador Laplace-Beltrame em Γ e por ∂_ν a derivada normal, onde ν representa o campo de vetores normais unitários exteriores à Γ .

Existem inúmeros resultados relacionados à equação da onda sem o termo de fronteira $\Delta_{\Gamma_1} u$. A condição Cauchy-Ventcel sobre Γ_1 em (0.1) surge quando modelamos corpos vibrantes com fronteira de fina espessura porém com alta rigidez. Tal sistema foi investigado primeiramente por Lemrabet [27, 28] e depois por Lemrabet e Teniou [29]. Em [29] os autores provam a existência e resultados de regularidade para o caso quando a dissipação g é linear.

Bey et al. [2] e Hemmina [17, 18] estudaram a estabilização na fronteira para sistemas

elasto-dinâmicos lineares e isotrópicos e equações da onda com condições do tipo Ventcel. Em [17], Hemmina mostra que em condições de fronteira dinâmicas e em domínios “star-shaped”, o sistema de elasticidade com condições Ventcel é exponencialmente estável; [17] também fornece um contra-exemplo demonstrando que se $a \equiv 0$ em (0.1) então a energia deste sistema nunca decai exponencialmente, mesmo se a dissipação é aplicada em toda a fronteira.

As dinâmicas condições de fronteira Ventcel foram estudadas por Khemmoundj e Medjden [21]. Estes resultados foram recentemente estudados por Cavalcanti, Khemmoundj e Medjden [10] para operadores lineares \mathcal{A} e \mathcal{A}_T com coeficientes variáveis (no entanto ainda para domínios star-shaped) empregando as novas estimativas de energia combinadas com os métodos de geometria Riemanniana devido a Lasiecka, Triggiani e Yao [25, 26].

Outro trabalho recente de Kanoune e Mehidi [19] estabelece taxas de decaimento de soluções para uma equação da onda semi-linear com condição de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel, sem restrições geométricas, entretanto, com uma dissipação linear que é efetiva numa vizinhança de toda a fronteira. Além disso, gostaríamos de mencionar os trabalhos de Littman e Taylor [32], e Hansen e Zuazua [16] que estudam a estabilização na fronteira de uma equação da onda unidimensional.

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem didática do artigo dos autores Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, Fukuoka e Toundykov [9], cujos principais objetivos são: (i) provar que o efeito localizado do feedback dissipativo não-linear $a(x)g(u_t)$ é forte o suficiente para garantir a estabilidade exponencial do sistema; (ii) enfraquecer consideravelmente as hipóteses padrão no suporte da dissipação.

A maioria dos resultados nesta direção lidam com domínios “star-shaped” como na Figura 0.1. A fim de apresentar os resultados e métodos de forma mais clara possível, os autores restringem-se a este tipo de domínio. Porém, a técnica apresentada é válida para domínios mais gerais (ver Figura 0.2).

Seja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função regular. Definamos ω_1 como sendo uma vizinhança de Γ_1 contida em $\bar{\Omega}$ e subdividamos a fronteira Γ_0 em duas partes: $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$ e $\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*$. Agora, seja ω_0 uma vizinhança de $\bar{\Gamma}_0^*$ contida em $\bar{\Omega}$, tal que $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$. Provaremos

que se $a(x) \geq a_0 > 0$ no subconjunto aberto

$$\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$$

e se g é monótona crescente tal que $k|s| \leq |g(s)| \leq K|s|$ para $|s| \geq 1$, então a taxa de decaimento uniforme da energia é assegurada. Uma simples secção do domínio com a vizinhança $\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$ está representada na Figura 0.1.

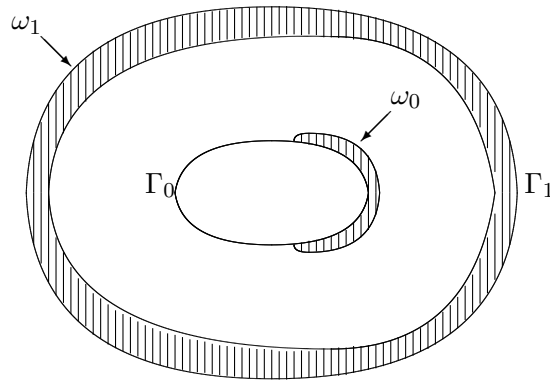


Figura 0.1: ω_1 is a neighbourhood of Γ_1 while ω_0 is a neighbourhood of $\overline{\Gamma_0^*}$, where $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$.

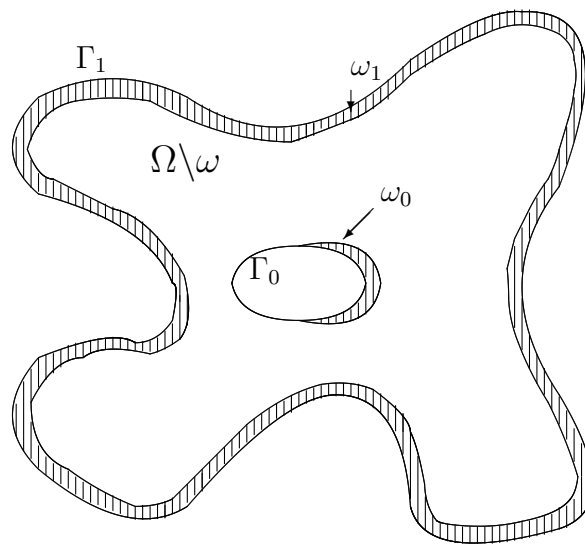


Figura 0.2: ω_1 is a neighbourhood of Γ_1 while ω_0 is a neighbourhood of $\overline{\Gamma_0^*}$, where $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$.

A estratégia utilizada para provar o resultado acima é fazer uso de multiplicadores apropriados de modo a obter a desigualdade de observabilidade, empregando, por exemplo, os métodos semelhantes aos utilizados em [7, 8] combinados com novos “ingredientes” técnicos. Os multiplicadores apropriados seriam, grosseiramente falando, dados por $\nabla f \cdot \nabla u$ onde $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função regular e estritamente convexa cuja construção será feita no capítulo 3.

A organização desta dissertação é a seguinte: no capítulo 1 apresentaremos algumas notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o trabalho; no capítulo 2 provaremos a existência e unicidade de solução para o problema dado utilizando dois métodos: o método de Faedo-Galerkin e a Teoria de Semigrupos; e no capítulo 3 estabeleceremos taxas de decaimento para a energia associada ao sistema.

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω , ou seja, $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \rightarrow 0$,

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω , tal que:

- i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu \in \mathbb{N}$;
- ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω , munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi \rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L_{loc}^1(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω .

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do \mathbb{R}^n , cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ , obtemos do lema de Gauss que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω , quando existe uma função

$v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T , no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em \mathbb{K} tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω .

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \quad \text{para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u . Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_{\Omega} u = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_\nu.$$

Demonstração: Ver [33].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u . Se $\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_\nu$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int_{\Omega} u \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_\nu.$$

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.1. *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.4. (Desigualdade de Hölder) - Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3].

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Segue como corolário da proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.1.4.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.1.5. (Desigualdade de Interpolação) - Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [34].

Proposição 1.1.6. (Desigualdade de Jensen) - Seja B um hipercubo do \mathbb{R}^n , então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos

$$F\left(\frac{1}{\text{med}(B)} \int_B g(x) dx\right) \geq \frac{1}{\text{med}(B)} \int_B F(g(x)) dx$$

Demonstração: Ver [38].

Além dos resultados acima, temos que:

- (i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;
- (ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;
- (iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;
- (iv) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω .

Teorema 1.3. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.7. *Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Lema 1.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω , onde T_u é a distribuição definida por $\langle T_u, \varphi \rangle =$*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [5].

Deste lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω .

Proposição 1.1.8. *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \rightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.2. (Lema de Gronwall) - *Sejam $z \in L^\infty(0, T)$ e $f \in L^1(0, T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.1.3. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) $u_\nu \rightarrow u$ quase sempre em Q ,

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [31].

Teorema 1.4. (Teorema da Média) - *Seja $f : (a, b) \rightarrow X$, onde X é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo $t \in [a, b]$ tem-se*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [15].

1.1.3 Convolução e Regularização

Em toda esta seção consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. A prova de todos os resultados desta seção podem ser encontrados em Brèzis [3].

Definição 1.1.1. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Teorema 1.5. *Nas condições da definição 1.1.1 temos*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Notação: Dada uma função f denotamos $\check{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 1.1.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^n} g(\check{f} * h).$$

Proposição 1.1.10. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp} f + \text{supp} g.$$

Proposição 1.1.11. *Sejam $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ (k natural). Então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula de derivação*

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

*Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, então $(f * g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.1.2. *Denominamos sucessão regularizante a toda sucessão $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções*

tais que

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x) dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.1.12. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Então $(\rho_n * f) \rightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto de \mathbb{R}^n .*

Proposição 1.1.13. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $(\rho_n * f) \rightarrow f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0, \text{ para todo polinômio } p \text{ de } n \text{ variáveis reais e } \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx.$$

Prova-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com o produto interno descrito acima é um espaço de Hilbert.

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n - 1$, Ω estando localmente do mesmo lado de Γ .

Seja Ω um aberto bem regular do \mathbb{R}^n , ou o semi-espaço \mathbb{R}_+^n . Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ u &\mapsto u|_\Omega \end{aligned}$$

que leva u na sua restrição a Ω . Então r_Ω é uma aplicação linear e contínua. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se,

$$D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$$

no sentido das distribuições. Decorre daí que para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{aligned} r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) &\rightarrow H^m(\Omega) \\ u &\mapsto u|_\Omega \end{aligned}$$

é contínua. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega; u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))' \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

A fim de definirmos uma topologia para $H^s(\Omega)$ consideremos o seguinte espaço de Banach

$$\frac{H^s(\mathbb{R}^n)}{\ker(r_\Omega)} = \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da seguinte norma

$$\|[v]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in v + \ker(r_\Omega)\}.$$

Por outro lado, para cada $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); \omega \in v + \ker(r_\Omega)\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Logo,

$$\|[v]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Diante disto, face a sobrejerividade de r_Ω , podemos definir

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|r_\Omega v\|_{H^s(\Omega)} = \|[v]\|_{H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)} = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\}.$$

Mudido desta norma, para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$, as normas

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \inf\{\|\omega\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\},$$

são equivalentes em $H^m(\Omega)$.

Proposição 1.1.14. *Para todo $s \geq 0$, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.15. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, onde \hookrightarrow designa a imersão contínua de um espaço no outro.*

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.6. (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n , então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \quad \text{se } m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.4. *Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n de classe C^∞ . Sejam s_1, s_2 e s_3 números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta) \|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [30].

Proposição 1.1.16. *Sejam Ω um conjunto aberto do \mathbb{R}^n , de classe C^m , com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

$$\text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty[,$$

$$\text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.7. (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n , Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\text{se } p < n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*], \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$\text{se } p = n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[,$$

$$\text{se } p = n \text{ então } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Ver [5].

Notação: \hookrightarrow indica imersão compacta.

Proposição 1.1.17. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Se $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n),$$

onde p^* vem dado por $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, existe uma constante $C = C(p, n)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.8. Quando $n > 2$ temos a inclusão $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ para todo ρ satisfazendo $2 \leq \rho \leq p$, onde p é dado por: $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Demonstração: Ver [12].

Teorema 1.9. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - Seja Ω um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n . Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Gamma} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior à Γ .

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.10. (Fórmula de Green generalizada) - Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, tem-se

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.18. (Regularidade dos problemas elípticos) - Seja Ω um aberto de

classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.19. *Seja $I =]a, b[$ limitado ou não. Sejam $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Então $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ e*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração: Ver [3].

1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , ou seja as funções $u : (a, b) \rightarrow X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , as funções $u : (a, b) \rightarrow X$ limitadas quase sempre em (a, b) . A norma neste

espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a,b]; X)$, $m = 0, 1, \dots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Seja $u \in L^1(a,b,X)$. Diremos que $v \in L^1(a,b,X)$ é a derivada fraca de u e escrevemos $u' = v$ desde que

$$\int_a^b \phi'(t)u(t)dt = - \int_a^b \phi(t)v(t)dt$$

para toda $\phi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C_0^\infty([a,b])$.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(a,b;X)$ consiste de todas as funções vetoriais $u \in L^p(a,b,X)$ tal que u' existe no sentido fraco e $u' \in L^p(a,b,X)$. Ademais,

$$\|u\|_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup \text{ess}_{a \leq t \leq b} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) \leq \infty & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Escrevemos $H^1(a,b;X) = W^{1,2}(a,b;X)$.

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [\[42\]](#)

Proposição 1.2.1. *Sejam $m = 0, 1, \dots$; $1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo \mathbb{K} , onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então:*

- (a) $C^m([a,b]; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} .
- (b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$, são espaços de Banach sobre \mathbb{K} .
- (c) $C([a,b]; X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C([a,b]; X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(d) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a, b; X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a, b; X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(f) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Proposição 1.2.2. *Seja $u \in W^{1,p}(a, b; X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então, $u \in C([a, b]; X)$.*

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U, \Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ .

O espaço das distribuições sobre (a, b) com imagem em X , será denotado por

$$\mathcal{D}'(a, b; X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a, b; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b); X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(a, b)$ em X . Noção de convergência em $\mathcal{D}'(a, b; X)$: seja $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ logo $S : \mathcal{D}(a, b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(a, b)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que $S_\nu \rightarrow S$ em $\mathcal{D}'(a, b; X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X , $\forall \theta \in \mathcal{D}(a, b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a, b) com valores no espaço de Banach X .

A derivada $\frac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$, é definida como um único elemento deste espaço que satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

A função $S \mapsto \frac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a, b; X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a, b; X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

A função de $L^2(a, b; X)$ em $\mathcal{D}'(a, b; X)$ que a cada f associa \tilde{f} , é linear e contínua, e ainda é injetora. Portanto, identificando \tilde{f} com f obtemos

$$L^2(a, b; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a, b; X)$$

O espaço $L^1_{loc}(a, b; X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a, b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a, b; X)$, onde χ_K denota a função característica de K .

Teorema 1.11. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) *A cada função $v \in L^q(a, b; X')$ corresponde um único funcional $\bar{v} \in Y'$, onde $Y' = L^p(a, b; X)$, dado por*

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \quad (1.1)$$

Reciprocamente, para cada $\bar{v} \in Y'$ corresponde exatamente uma única função $v \in L^q(a, b; X')$ dada por (1.1). Além disso

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a, b; X')}$$

(b) *O espaço de Banach $L^p(a, b; X)$ é reflexivo e separável.*

Demonstração: Ver [42].

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a, b; X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico entre os dois espaços. Onde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}; \quad \forall u \in Y; \quad \forall v \in Y'.$$

Sejam a e b dois números reais, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a, b) := \left\{ u \in L^2(a, b; X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y) \right\},$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a, b; X)$. O conjunto $W(a, b)$ munido da

norma

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|_{L^2(a,b;X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a, b; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais

$\varphi : (a, b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a, b) . Diremos que $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(a, b; X)$ se:

- i) $\exists K$ compacto de (a, b) tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , $\forall \nu$;
- ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \rightarrow \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a, b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a, b; X)$.

Denotaremos por $H_0^1(a, b; X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a, b; X) := \{v \in L^2(a, b; X), v' \in L^2(a, b; X), v(a) = v(b) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((w, v)) = \int_a^b (w(t), v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a, b; X)$ com o seu dual $[L^2(a, b; X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a, b; X) \hookrightarrow H_0^1(a, b; X) \hookrightarrow L^2(a, b; X) \hookrightarrow H^{-1}(a, b; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a, b; X),$$

onde $H^{-1}(a, b; X) = [H_0^1(a, b; X)]'$.

Proposição 1.2.3. *Seja $u \in L^2(a, b; X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a, b; X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a, b), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [35].

Da proposição anterior podemos identificar f com u' . De posse disso, diremos que se $u \in L^2(a, b; X)$ então $u' \in H^{-1}(a, b; X)$.

Corolário 1.2.3.1. *A aplicação*

$$u \in L^2(a, b; X) \mapsto u' \in H^{-1}(a, b; X);$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [35].

Teorema 1.12. (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [31].

Lema 1.2.1. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0, T; H)$ e $u' \in L^1(0, T; V)$ então $u \in C^0([0, T]; V)$.*

Demonstração: Ver [39].

1.3 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ou Ω um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n com fronteira Γ . Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ , possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$,

representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ , ou seja, $\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Inicialmente, vamos definir o espaço $H^s(\Gamma)$.

No caso $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, temos que $\Gamma = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, identificamos toda função u definida em Γ com a função $x' \rightarrow u(x', 0)$ do \mathbb{R}^{n-1} em \mathbb{R} . Com tal identificação temos que $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, neste caso simples, definimos $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Seja Ω um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n . Fixemos um sistema de cartas locais de Γ , isto é, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \dots, (U_N, \varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ no \mathbb{R}^n tais que

$$\text{supp}(\sigma_j) \subset U_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N \sigma_j(x) = 1, \quad x \in \Gamma.$$

Dada uma função w definida em Γ , para todo $j = 1, 2, \dots, N$ seja

$$w_j(y) = \begin{cases} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se } y' \in \Omega_0 =]0, 1[^{n-1}, \\ 0 & \text{se } y' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Sendo $\text{supp}(\gamma_0 \sigma_j) = \text{supp} \sigma_j \cap \Gamma \subset U_j \cap \Gamma$ e como φ_j aplica $U_j \cup \Gamma$ sobre $\Omega_0 \times \{0\}$, temos

$$\text{supp} w_j \subset \varphi_j(\text{supp} \sigma_j \cup \Gamma) \subset \Omega_0 \times \{0\}.$$

Decorre daí que se $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$, então w_j pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, \dots, N$.

Dado $s > 0$ consideremos $H^s(\Gamma)$ como sendo o espaço vetorial das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, \dots, N$, munido do seguinte produto escalar:

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^N (w_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})};$$

para todo $w, v \in H^s(\Gamma)$. Temos que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert com $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.3.1. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [34].

Considerando $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.3.1 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0 ,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

tal que

$$\gamma_0 u = u|_{\Gamma}; \quad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.13. *A função traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [34].

Consideremos, agora, Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira Γ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ . Para todo $j = 1, \dots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_{\Gamma}$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \dots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.14. *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita, linear e contínua.

Demonstração: Ver [34].

Considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos respectivos produtos internos

$$\begin{aligned} (u, v)_{\mathcal{H}^0} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^0(\Omega), \\ (u, v)_{\mathcal{H}^1} &= (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega), \end{aligned}$$

temos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.2. A aplicação linear $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.3.3. A aplicação linear $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [5].

1.3.1 Traço em $L^2(0, T; H^m(\Omega))$.

Conforme visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (1.2)$$

linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e que admite uma inversa à direita também linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : L^2(0, T; H^m(\Omega)) &\rightarrow L^2\left(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ u &\mapsto \gamma u, \end{aligned} \quad (1.3)$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$; onde $\gamma(u(t))$ é a aplicação γ dada em (1.2) aplicada em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.2) e (1.3) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.3) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita τ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0, T; H^m(\Omega)), ; \gamma(\tau(\eta)) = \eta. \quad (1.4)$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{aligned} \gamma : H_0^1(0, T; H^m(\Omega)) &\rightarrow H_0^1\left(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ u &\mapsto \gamma u, \end{aligned} \quad (1.5)$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$ e que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.3).

Proposição 1.3.4. *Seja $u \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$ então $\gamma u' = (\gamma u)'$.*

Demonstração: Ver [35].

1.3.2 Traço em $H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0, T; H^m(\Omega)) \times L^2(0, T; H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de \mathcal{K} constituído dos vetores $\{\alpha, \beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0, T; H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0, T; H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0, T; H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{aligned} H^{-1}(0, T; H^m(\Omega)) &\rightarrow M^\perp \\ f &\mapsto \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v \rangle; \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f'$. A aplicação definida em (1.6) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$ definimos $\tilde{\gamma}f$ na forma:

$$\langle \tilde{\gamma}f, w \rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt; \quad (1.7)$$

para todo $w \in H_0^1(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))$, que é linear e contínua.

Assim, temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : H^{-1}(0, T; H^m(\Omega)) &\rightarrow H^{-1}(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \\ f &\mapsto \tilde{\gamma}f; \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $\tilde{\gamma}f$ definido por (1.7), é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$. Assim, são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.5. *Se $u \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$ então*

$$\gamma u|_{H_0^1(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \tilde{\gamma}u.$$

Proposição 1.3.6. *Se $u \in L^2(0, T; H^m(\Omega))$ então*

$$\tilde{\gamma}u' = (\gamma u)'$$

Teorema 1.15. *A aplicação traço (1.8) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0, T; H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\tilde{\tau} : H^{-1}(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

Demonstração: Ver [35].

Observação 1.3.1. *Se nos resultados anteriormente vistos considerarmos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ ou $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, ao invés de $H^m(\Omega)$, em conjunto com as Proposições 1.3.2 e 1.3.3 obteremos a existência das aplicações lineares e contínuas*

$$\tilde{\gamma} : H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^0(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

e

$$\tilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

1.4 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t, x) , $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

Dizemos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

- (i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;
- (ii) $f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;
- (iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω . Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1.9) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

Corolário 1.16.1. *Sejam $\Omega = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω . Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.9) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I , onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

1.5 Topologia Fraca - $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraco \star - $\sigma(E', E)$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E' , obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em \mathbb{R} .

Definição 1.5.1. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f , $f \in E'$.*

Notação: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.5.1. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E , então:*

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ em E , então $x_n \rightharpoonup x$ em E .
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E , então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \rightarrow f$ em E' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [3].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \rightarrow E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.5.2. A topologia fraco \star , também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x .

Proposição 1.5.2. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E' , então:

(i) $f_n \star \rightharpoonup f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \rightarrow f$ em E' , então $f_n \star \rightharpoonup f$ em E' .

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E' , então $f_n \star \rightharpoonup f$ em E' .

(iv) Se $f_n \star \rightharpoonup f$ em E' , então $\|f_n\|_{E'}$ é limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.1. Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E , então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.2. Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E' , então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que

$$f_{n_k} \star \rightharpoonup f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.17. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F . Então, T é contínuo em E , munido da topologia fraca $\sigma(E, E')$, em F , munido da topologia fraca $\sigma(F, F')$. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [3].

1.6 Teoria Espectral

Consideremos W e H dois espaços de Hilbert tais que W é denso em H e $W \xrightarrow{c} H$, isto é, W está compactamente imerso em H . Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em $W \times W$, isto é,

$$\exists \alpha > 0 ; |a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_W^2 ; \forall v \in W.$$

Considere

$$D(A) = \{u \in W ; \text{ a forma antilinear } v \mapsto a(u, v) \text{ é contínua } \},$$

onde W está munido com a topologia induzida de H .

Pelo Teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$ tal que $a(u, v) = (Au, v)_H, \forall v \in W$. Notemos que desta forma definimos um operador A com domínio:

$$D(A) = \{u \in W ; \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H, \forall v \in W \text{ e } Au = f\}.$$

Temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset W \rightarrow H$ é um operador de H . O operador A acima é denominado o operador determinado pela terna $\{W, H, a(u, v)\}$ e denotamos por $A \leftrightarrow \{W, H, a(u, v)\}$.

Proposição 1.6.1. (Teorema Espectral)-*Nas condições acima, obtemos*

(i) A é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de H constituído de vetores próprios de A .

(ii) Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\nu \leq \dots, \quad e \lambda_\nu \longrightarrow \infty.$$

(iii) O domínio de A é dado por

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

(iv)

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu, \quad \forall u \in D(A).$$

Demonstração: Ver [36].

1.7 Operadores Maximais Monótonos e Operadores Dissipativos

Sejam V e W espaços de Banach reais, então $V \times W$ denotará o espaço produto cartesiano. Um elemento do espaço $V \times W$ será escrito na forma $[v, w]$ para $v \in V$ e $w \in W$. Um operador multivalor A de V em W será visto como um subconjunto de $V \times W$. Se $A \subset V \times W$, definimos

$$\begin{aligned} Av &= \{w \in W; [v, w] \in A\}; & D(A) &= \{v \in V; Av \neq \emptyset\}; \\ Im(A) &= \bigcup_{v \in D(A)} Av; & A^{-1} &= \{[w, v]; [v, w] \in A\}. \end{aligned}$$

Nesta seção V denotará um espaço de Banach real, V' o seu espaço dual. O valor de $v^* \in V'$ em $v \in V$ será denotado por $\langle v, v^* \rangle$ ou $\langle v^*, v \rangle$.

1.7.1 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Banach

Definição 1.7.1. Um conjunto $A \subset V \times V'$ é chamado de monótono se

$$\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0; \quad \forall [u_i, v_i] \in A, i = 1, 2.$$

Um subconjunto monótono de $V \times V'$ é chamado de maximal monótono se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono de $V \times V'$.

Se A é um operador de valor único de $V \times V'$, então a condição de monotonicidade torna-se

$$\langle u_1 - u_2, Au_1 - Au_2 \rangle \geq 0; \quad \forall u_1, u_2 \in D(A).$$

Definição 1.7.2. Seja A um operador de valor único definido de V em V' tal que $D(A) = V$. A é dito ser hemicontínuo em V se

$$w - \lim_{t \rightarrow 0} A(u + tv) = Au, \quad \forall u, v \in V;$$

onde "w - lim" denota que a convergência é fraca.

Proposição 1.7.1. Seja V um espaço de Banach reflexivo e B um operador monótono, hemicontínuo e limitado de V em V' . Seja A um operador maximal monótono de V em V' . Então, $A + B$ é maximal monótono.

Demonstração: Ver [1].

1.7.2 Subdiferencial de Funções Convexas

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu espaço dual topológico.

Definição 1.7.3. A G-diferencial de $\varphi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ em $u \in D(\varphi)$ é uma função $f \in V'$ tal que $f(v) = \varphi'(u, v)$, $\forall v \in V$. Esta função f é única, é denotada por $\varphi'(u)$ e dizemos que φ é G-diferenciável em u .

Observação: $\varphi'(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(u + tv) - \varphi(u))$ é a derivada direcional de u na direção de v .

Definição 1.7.4. *Uma função convexa e própria em V é uma função φ de V em $(-\infty, +\infty]$, tal que φ não é identicamente igual a $+\infty$ e*

$$\varphi((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v),$$

onde $u, v \in V$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definição 1.7.5. *Seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa e própria. A subdiferencial de φ em $u \in D(\varphi)$ é o conjunto de todos os funcionais $u^* \in V'$ tais que*

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad v \in V,$$

e é denotado por $\partial\varphi(u)$. Cada um desses $u^* \in \partial\varphi(u)$ é também chamado de subdiferencial de φ em u .

Proposição 1.7.2. (Kachurovskii) *Seja K convexo em V e seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ G -diferenciável em cada $u \in K$, $K = D(\varphi)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) φ é convexa,
- (ii) $\langle \varphi'(u), v - u \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad \forall u, v \in K,$
- (iii) $\langle \varphi'(u) - \varphi'(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in K.$

Demonstração: Ver [40].

Proposição 1.7.3. *Seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional convexo e próprio. Se φ é G -diferenciável em $u \in \text{int}(D(\varphi))$, então $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$. Se φ é contínua e $\partial\varphi(u)$ é único, então φ é G -diferenciável em u .*

Demonstração: Ver [40].

Definição 1.7.6. A função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é dita semicontínua inferiormente em V se

$$\liminf_{v \rightarrow u} \varphi(v) \geq \varphi(u), \quad \forall u \in V.$$

Teorema 1.18. Seja φ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em V . Então $\partial\varphi$ é um operador maximal monótono de V em V' .

Demonstração: Ver [1].

1.7.3 Operadores Dissipativos

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu dual. Denotaremos por $F : V \rightarrow V'$ a aplicação dualidade de V .

Definição 1.7.7. Um subconjunto A de $V \times V$ (equivalentemente um operador multivalor de V nele mesmo) é chamado de dissipativo se para quaisquer $[x_i, y_i] \in A$, $i = 1, 2$, existe $f \in F(x_1 - x_2)$ tal que

$$f(y_1 - y_2) \leq 0.$$

Um conjunto dissipativo A é dito ser maximal dissipativo se não está contido propriamente em qualquer subconjunto de $V \times V$.

Um conjunto dissipativo A é chamado de m-dissipativo se

$$Im(I - A) = V.$$

Em particular, se V é um espaço de Hilbert e A é m-dissipativo, então, A é um operador de valor único e $-A$ é maximal monótono.

1.7.4 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $((\cdot, \cdot))$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H e consideremos $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um

operador não limitado de H .

Definição 1.7.8. Dizemos que A é um operador monótono se para todo $v \in D(A)$ tivermos $((Av, v)) \geq 0$.

A é dito maximal monótono se, for monótono e, além disso, $Im(I + A) = H$, ou seja,

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Proposição 1.7.4. Seja A um operador maximal monótono sobre H , então temos:

(i) $\overline{D(A)} = H$.

(ii) A é fechado.

(iii) $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ é bijetor de $D(A)$ sobre H e $(I + \lambda A)^{-1}$ é limitado com $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.19. (Hille-Yosida) Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au = 0; & \forall t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Além disso, se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ e } \left| \frac{du(t)}{dt} \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0, \quad (1.11)$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico

$$\|u\|_{D(A)} = |u| + |Au|.$$

Demonstração: Ver [4].

1.8 O Teorema de Holmgren

Consideremos um plano $\pi \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de equação

$$\pi = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \sum_{i=1}^n a_i x_i + bt = c\}$$

onde $(a_i)_{i=1}^n, b$ e c são constantes arbitrárias. O polinômio característico $P(a_1, \dots, a_n, b)$ associado ao operador $P(D)$ é definido por

$$P(a_1, \dots, a_n, b) = b^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

e, portanto, π é característico de $P(D) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = b^2$.

Teorema 1.20. (Holmgren) *Sejam \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 dois abertos convexos do \mathbb{R}^k tais que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ e seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes, tal que todo plano π característico de $P(D)$ que verifica $\pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfaz também $\pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Então, qualquer solução $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em \mathcal{O}_1 , verifica $u = 0$ em \mathcal{O}_2 .*

Demonstração: Ver Lions [30].

1.9 O Gradiente Tangencial e o Operador Laplace-Beltrame

Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular, orientada, compacta e sem bordo. Seja ν o campo vetorial normal unitário exterior a \mathcal{M} . Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $x \cdot y$ o produto interno em \mathbb{R}^n .

O gradiente tangencial denotado por $\nabla_T f$ de uma função $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , definida em uma vizinhança V (aberta) de uma superfície \mathcal{M} é dado por:

$$\nabla_T f := \nabla_{\mathbb{R}^n} f - (\nabla_{\mathbb{R}^n} f \cdot \nu)\nu, \quad (1.12)$$

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função regular temos

$$\nabla f = \partial_\nu f \nu + \nabla_T f \quad \text{em } \mathcal{M}, \quad (1.13)$$

$$|\nabla f|^2 = (\partial_\nu f)^2 + |\nabla_T f|^2 \quad \text{em } \mathcal{M}, \quad (1.14)$$

onde ∂_ν representa a derivada normal exterior a \mathcal{M} e a identidade (1.13) provém do fato que $\nabla f = c_1 \nu + \nabla_T f$, logo

$$\underbrace{\nabla f \cdot \nu}_{\partial_\nu f} = c_1 \underbrace{\nu \cdot \nu}_{=1} + \underbrace{\nabla_T f \cdot \nu}_{=0}$$

e portanto, $c_1 = \partial_\nu f$.

O operador Laplace-Beltrami, denotado por $\Delta_{\mathcal{M}} f$ de uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 é definido por

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = \text{div}_T \nabla_T f, \quad (1.15)$$

onde $\text{div}_T \nabla_T f$ é o divergente do campo vetorial $\nabla_T f$.

Consideremos $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Definimos a projeção tangencial q_T sobre o plano tangente a \mathcal{M} no ponto $x \in \mathcal{M}$ por

$$q_T(x) = q(x) - (q(x) \cdot \nu(x))\nu(x).$$

Assumindo que $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^1 , temos

$$\int_{\mathcal{M}} q_T \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(q_T) f \, d\mathcal{M}. \quad (1.16)$$

Resulta de (1.16), em particular, para $q_T = \nabla_T g$ (g de classe C^2) que

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_T \nabla_T g \, f \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \nabla_T g \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M}, \quad (1.17)$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} g \, f \, d\mathcal{M} = - \int_{\mathcal{M}} \nabla_T g \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M}. \quad (1.18)$$

Definamos o operador linear $-\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} : H^1(\widetilde{\mathcal{M}}) \rightarrow H^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$, onde $\widetilde{\mathcal{M}}$ é um subconjunto aberto e não-vazio de \mathcal{M} (ou a superfície \mathcal{M} inteira) tal que

$$\langle -\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} f, g \rangle = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} \nabla_T f \cdot \nabla_T g \, d\mathcal{M}, \quad \forall f, g \in H^1(\widetilde{\mathcal{M}}) \quad (1.19)$$

e, em particular,

$$\langle -\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} f, f \rangle = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} |\nabla_T f|^2 \, d\mathcal{M}, \quad \forall f \in H^1(\widetilde{\mathcal{M}}). \quad (1.20)$$

Lema 1.9.1. *Para todo $r > 0$ suficientemente pequeno definamos*

$$\omega_r = \left(\bigcup_{x \in \Gamma} B_r(x) \right) \cap \Omega,$$

onde $B_r(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio r , com $x \in \Gamma = \partial\Omega$. Existem conjuntos abertos U_1, \dots, U_m e uma constante positiva r_0 que verifica as seguintes propriedades:

(i) $\forall r \in]0, r_0[$, $\bar{\omega}_r \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$, onde $\bar{\omega}_r$ denota o fecho de ω_r em \mathbb{R}^n .

(ii) $\forall x \in \omega_r \cap U_i$, existe um único par $(y, z) \in (\Gamma \cap U_i) \times]0, r[$, onde $x = y - z\nu(y)$; $i = 1, \dots, m$, e $\nu(y)$ é a normal unitária exterior à Γ em y .

Demonstração: Ver [13].

Para maiores informação sobre o assunto tratado nesta seção, sugerimos ao leitor as referências [8] e [14].

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ onde Γ_i , $i = 0, 1$, são não vazios, fechados e disjuntos. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x); \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Assumamos as seguintes hipóteses:

(H.1) A função não linear $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ é monótona crescente;
- (ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;
- (iii) Existem k e K constantes positivas tais que $ks \leq g(s) \leq Ks$, $|s| > 1$.

(H.2) $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa.

No que segue, definiremos os espaços que serão utilizados ao longo do trabalho.

Consideremos

$$\begin{aligned} H_{\Gamma_0}^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}, \end{aligned}$$

munidos das respectivas normas

$$\|v\|_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad \text{e} \quad \|v\|_{\mathcal{V}}^2 = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\gamma \right).$$

Com as normas acima definidas e observando que elas são provenientes dos produtos internos

$$(v, u)_{H_{\Gamma_0}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx \quad \text{e} \quad (v, u)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \cdot \nabla_T u \, d\gamma;$$

decorre que $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ e \mathcal{V} são espaços de Hilbert.

As seguintes notações serão utilizadas:

$$Q_T = \Omega \times]0, T[, \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \quad \Sigma_i = \Gamma_i \times]0, T[, \quad i = 0, 1.$$

$$\|v\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \|v\|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} |v|^2 d\Gamma.$$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \quad \text{e} \quad (u, v)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} u(x)v(x) \, dx.$$

O principal resultado deste capítulo vem enunciado no Teorema abaixo.

Teorema 2.1. *Suponha que as hipóteses (H.1) e (H.2) sejam verificadas.*

(i) *Se $\{u^0, u^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ e satisfazem a condição $\partial_\nu u^0 - \Delta_{\Gamma_1} u^0 = 0$ q.s. em Γ_1 , então existe uma única solução do problema (2.1) na classe*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

(ii) Se $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, então existe uma única solução do problema (2.1) na seguinte classe

$$u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

A solução obtida no item (i) é denominada solução forte ou solução regular de (2.1), enquanto que a solução obtida no item (ii) é denominada solução fraca de (2.1).

No que segue, usaremos u' para designar a derivada da função u em relação à variável temporal t , ou seja, $u' = \frac{du}{dt} = u_t$.

Este capítulo se dedica à existência e unicidade de soluções para o problema apresentado. Iniciaremos com o método de Faedo-Galerkin que, apesar de exigir mais regularidade das funções envolvidas, é um método didático e de fácil compreensão. Na sequência, utilizaremos a teoria de semigrupos que permite uma aplicação muito mais eficaz mas, no entanto, exige um conhecimento mais profundo da teoria utilizada.

2.2 Existência de Solução via Método de Faedo-Galerkin

Nesta seção, além das hipóteses (H.1) feitas sobre g , iremos considerar

(iv) $g \in C^1(\mathbb{R})$;

(v) Existe $M > 0$ verificando $|g'(s)| \leq M(1 + |s|^{p-1})$, $|s| > 1$, onde $1 < p \leq \frac{n}{n-4}$; se $n > 4$ e $p > 1$; se $n \leq 4$.

A escolha de p nas condições acima se justifica para garantirmos a imersão

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$\text{onde } q = \frac{2n}{n-4}.$$

2.2.1 Solução Regular

Nesta subseção provaremos a existência de solução regular para o problema (2.1).

Multiplicando a equação diferencial parcial $u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0$ por uma função admissível v , integrando o resultado em Ω e aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} u_{tt}(x, t)v(x, t) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x, t) \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t)v(x, t) \, d\Gamma + \int_{\Omega} a(x)g(u_t(x, t))v(x, t) \, dx = 0, \quad \forall t \in]0, \infty[.$$

Como $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$ e $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ temos

$$\int_{\Omega} u_{tt}(x, t)v(x, t) \, dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x, t) \, dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t)v(x, t) \, d\Gamma + \int_{\Omega} a(x)g(u_t(x, t))v(x, t) \, dx = 0, \quad \forall t \in]0, \infty[.$$

Consideremos $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base do espaço $W = \{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_{\nu} w = \Delta_{\Gamma_1} w \text{ em } \Gamma_1\}$, que é densa em $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ e em \mathcal{V} (ver apêndice).

Definamos

$$V_m = [w_1, \dots, w_m]$$

e consideremos em V_m o problema aproximado

$$(PA) \begin{cases} u_m(t) \in V_m \Leftrightarrow u_m(t) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i, \\ (u_m''(t), v) + (\nabla u_m(t), \nabla v) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(x, t)v(x, t)d\Gamma + \int_{\Omega} a(x)g(u_m'(x, t))v(x, t) \, dx = 0, \\ u_m(0) = u_m^0 \rightarrow u^0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}, \\ u_m'(0) = u_m^1 \rightarrow u^1 \text{ em } \mathcal{V}; \end{cases} \quad (2.2)$$

onde as sequências convergentes $\{u_m(0)\}$ e $\{u_m'(0)\}$ provêm do fato que a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é densa nos espaços $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ e \mathcal{V} .

De modo a resolvermos o problema aproximado (PA), obteremos um problema equivalente e utilizaremos o Teorema de Carathéodory (ver seção 1.4).

Consideremos no problema aproximado (PA) $v = w_j, j = 1, \dots, m$. Então,

$$(u_m''(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) - (\partial_\nu u_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (a(x)g(u_m'(t)), w_j) = 0; \quad j = 1, \dots, m.$$

Logo, o sistema de equações acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}''(t) \\ h_{2m}''(t) \\ \vdots \\ h_{mm}''(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_1 \, d\gamma \\ \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_2 \, d\gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_m \, d\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{\Omega} a(x)g(u_m'(t))w_1 \, dx \\ \int_{\Omega} a(x)g(u_m'(t))w_2 \, dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} a(x)g(u_m'(t))w_m \, dx \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Denotando

$$C = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \text{ e } z(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) - G(z(t)) + H(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 ; z'(0) = z^1, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde

$$H(z'(t)) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} a(x)g(Bz'(t))w_1 \, dx \\ \int_{\Omega} a(x)g(Bz'(t))w_2 \, dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} a(x)g(Bz'(t))w_m \, dx \end{bmatrix}, \quad G(z(t)) = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu}(Bz(t))w_1 \, d\gamma \\ \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu}(Bz(t))w_2 \, d\gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu}(Bz(t))w_m \, d\gamma \end{bmatrix},$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} h_{1m}(0) \\ h_{2m}(0) \\ \vdots \\ h_{mm}(0) \end{bmatrix} \text{ e } z^1 = \begin{bmatrix} h'_{1m}(0) \\ h'_{2m}(0) \\ \vdots \\ h'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que a matriz $C_{m \times m}$ é inversível.

Com efeito, sendo C uma matriz real e simétrica, então C é auto-adjunta e, portanto,

diagonalizável, isto é, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM$$

e D é uma matriz diagonal. Logo, para mostrar que C é inversível basta mostrar que D o é, ou equivalentemente, que zero não é autovalor de D .

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de D . Então, existe um vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

não nulo do \mathbb{R}^n tal que $Dv = 0$. Sendo M^{-1} uma matriz inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor CMv é igual a zero.

Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

temos

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j, w_1) \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \varphi_j(w_j, w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j, w_1) \\ (\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j, w_2) \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j, w_m) \end{pmatrix}.$$

Logo, $(\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j, w_i) = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$; donde resulta que $\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi_j w_j$ é ortogonal à todo vetor de V_m . Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, o que implica que $\alpha = 0$. Portanto, $\sum_{j=1}^m \varphi_j w_j = 0$.

Mas, sendo $\{w_j\}$ uma base, temos que $\varphi_j = 0 \ \forall j = 1, \dots, m$, ou seja, $0 = \varphi = Mv$. Como M é inversível e, portanto, a transformação linear definida por M é injetora, resulta que $v = 0$, o que contradiz o fato de v ser autovetor de D e concluímos então que a matriz C é inversível.

Assim, o sistema (2.3) pode ser escrito

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) - C^{-1}G(z(t)) + C^{-1}H(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 ; \ z'(0) = z^1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \ Y_2(t) = z'(t), \ Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \text{ e } Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) + C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Provaremos a seguir que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema 1.16 (Teorema de Carathéodory).

De fato, consideremos a seguinte aplicação:

$h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, definida por

$$h(t, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(y_1) - C^{-1}H(y_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} y$$

onde

$$y = (\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m}), y_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m) \text{ e } y_2 = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m}).$$

Verificaremos que a aplicação h está nas condições do Teorema de Carathéodory.

Com efeito,

- (i) Seja $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função h é mensurável como função de $t \in [0, T]$, uma vez que esta não depende de t .
- (ii) Para cada $t \in [0, T]$, h é contínua como função de y .

De fato, notemos primeiramente que a aplicação

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^{2m} &\rightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ y &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} y \end{aligned} \tag{2.6}$$

é linear e, conseqüentemente, contínua.

Por outro lado, seja $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma seqüência tal que

$$y_\nu \rightarrow y \text{ em } \mathbb{R}^{2m} \tag{2.7}$$

logo, se $y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu})$ e $y = (y_1, y_2)$ com $y_{1\nu}, y_{2\nu}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$y_{1\nu} \rightarrow y_1 \text{ em } \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad y_{2\nu} \rightarrow y_2 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Mostraremos que $C^{-1}H(y_{2\nu}) \rightarrow C^{-1}H(y_2)$ e que $C^{-1}G(y_{1\nu}) \rightarrow C^{-1}G(y_1)$.

Notemos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$B(x)y_{2\nu} \rightarrow B(x)y_2 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, como a função g é contínua, temos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$g(B(x)y_{2\nu}) \rightarrow g(B(x)y_2) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para q.t. $x \in \Omega$,

$$a(x)g(B(x)y_{2\nu})w_j(x) \rightarrow a(x)g(B(x)y_2)w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além do mais, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois é convergente. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|y_\nu\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M$$

então

$$\|y_{2\nu}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M.$$

Agora, se $x \in \Omega$ é tal que $|B(x)y_{2\nu}| \leq 1$, da continuidade de g temos

$$|g(B(x)y_{2\nu})| \leq C,$$

onde C é uma constante positiva. Se $x \in \Omega$ é tal que $|B(x)y_{2\nu}| > 1$, da hipótese (H.1) obtemos

$$|g(B(x)y_{2\nu})| \leq K|B(x)y_{2\nu}| = K \left| \sum_{i=1}^m w_i(x)y_{2\nu_i} \right| \leq K \sum_{i=1}^m |w_i(x)||y_{2\nu_i}| \leq MK \sum_{i=1}^m |w_i(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |a(x)g(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| &\leq |a(x)||g(B(x)y_{2\nu})||w_j(x)| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}(C + MK \sum_{i=1}^m |w_i(x)|)|w_j(x)|, \end{aligned}$$

q. s. em Ω , $\forall \nu \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \dots, m$. Como $\{w_j\} \in L^2(\Omega); \forall j = 1, \dots, m$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\Omega} a(x)g(B(x)y_{2\nu})w_j(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x)g(B(x)y_2)w_j(x) dx,$$

$\forall j = 1, \dots, m$, ou seja,

$$H(y_{2\nu}) \rightarrow H(y_2) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$C^{-1}H(y_{2\nu}) \rightarrow C^{-1}H(y_2) \text{ em } \mathbb{R}^m. \quad (2.8)$$

Por outro lado, como $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base de $W \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, decorre que

$$By_{1\nu} = \sum_{i=1}^m w_i y_{(1\nu)_i} \in H^2(\Omega) \text{ e } By_1 = \sum_{i=1}^m w_i y_{1_i} \in H^2(\Omega).$$

Portanto, de (2.7) segue que

$$By_{1\nu} \rightarrow By_1 \text{ em } H^2(\Omega).$$

Então, pela continuidade da aplicação traço de ordem 1, temos que

$$\gamma_1(By_{1\nu}) \rightarrow \gamma_1(By_1) \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

o que implica que

$$\gamma_1(By_{1\nu})\gamma_0 w_j \rightarrow \gamma_1(By_1)\gamma_0 w_j \text{ em } L^1(\Gamma); \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_1(By_{1\nu})\gamma_0 w_j d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_1} \gamma_1(By_1)\gamma_0 w_j d\Gamma \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

isto é,

$$G(y_{1\nu}) \rightarrow G(y_1) \text{ em } \mathbb{R}^m. \quad (2.9)$$

De (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) resulta que a aplicação h é contínua como função de y para $t \in [0, T]$.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto. Existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t) \quad \forall (t, y) \in K.$$

De fato, temos

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1}G(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}H(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|N(y)\|_{\mathbb{R}^{2m}}. \quad (2.10)$$

Do item (ii) temos que G e H são contínuas em \mathbb{R}^m e N é contínua em \mathbb{R}^{2m} . Portanto, são contínuas em qualquer compacto $K^* = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{2m}$ com $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^m$ e, então, $\exists M_K > 0$ tal que

$$\|C^{-1}G(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}H(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|N(y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K \quad (2.11)$$

para todo $(t, y) \in [0, T] \times K^*$, onde $y = (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2 = K^*$.

Tomando $m_K(t) = M_K$; $\forall t \in [0, T]$, segue de (2.10) e (2.11) que

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t); \quad \forall (t, y) \in K.$$

Assim, dos itens (i), (ii) e (iii) temos que as condições do Teorema de Carathéodory são satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $0 < t_m < T$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas em $[0, t_m)$ e $z''(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

Como os problemas (2.2) e (2.5) são equivalentes, existe uma solução $u_m(t) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i$ para o problema aproximado (2.2) para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo.

A primeira estimativa a priori nos permitirá estender a solução obtida à todo intervalo $[0, T]$.

2.2.1.1 Primeira Estimativa a Priori

O Teorema de Carathéodory nos fornece que $u_m(t)$ e $u'_m(t)$ são absolutamente contínuas e como consequência disto $u'_m(t)$ e $u''_m(t)$ existem no sentido de Dini.

Considerando no problema aproximada (PA) $v = w_j$, $j = 1, \dots, m$; multiplicando a segunda linha por $h'_{jm}(t)$, $t \in [0, t_m)$, e somando em j de 1 até m obtemos

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - (\partial_\nu u_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + (a(x)g(u'_m(t)), u'_m(t)) = 0. \quad (2.12)$$

Podemos, sem perda de generalidade, considerar a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ como sendo ortonormal em $L^2(\Omega)$. Deste fato e do problema aproximado, resulta que para $j = 1, \dots, m$,

$$h''_{jm}(t) = (u''_m(t), w_j) = -(\nabla u_m(t), \nabla w_j) + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(x, t) w_j \, d\gamma - \int_{\Omega} a(x)g(u'_m(x, t)) w_j \, dx. \quad (2.13)$$

Logo, $h''_{jm}(t) \in L^2(0, t_m)$ e então

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 dt &= \int_0^{t_m} \left\| \sum_{j=1}^m h''_{jm}(t) w_j \right\|_{\Omega}^2 dt \\ &\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m \|h''_{jm}(t) w_j\|_{\Omega}^2 dt \\ &= \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m |h''_{jm}(t)|^2 \|w_j\|_{\Omega}^2 dt \leq \sum_{j=1}^m \|w_j\|_{\Omega}^2 \int_0^{t_m} |h''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_m'' \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)). \quad (2.14)$$

Assim, como $u_m'(t)$ é absolutamente contínua em $(0, t_m)$, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} u_m''(t) u_m'(t) dx \in L^1(0, t_m). \quad (2.15)$$

Considere $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Então, de (2.15) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \langle (u_m''(t), u_m'(t)), \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0, t_m), \mathcal{D}(0, t_m)} &= \left\langle \int_{\Omega} u_m''(x, t) u_m'(x, t) dx, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0, t_m), \mathcal{D}(0, t_m)} \\ &= \int_0^{t_m} \int_{\Omega} u_m''(x, t) u_m'(x, t) \theta(t) dx dt \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{t_m} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_m'(x, t))^2 \theta(t) dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (u_m'(x, t))^2 \theta(t) \Big|_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} (u_m'(x, t))^2 \theta'(t) dt \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{t_m} \int_{\Omega} (u_m'(x, t))^2 \theta'(t) dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \langle \|u_m'(t)\|_{\Omega}^2, \theta' \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|_{\Omega}^2, \theta \right\rangle; \end{aligned}$$

ou seja,

$$(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m'(t)\|_{\Omega}^2. \quad (2.16)$$

Da mesma forma provamos que

$$(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{\Omega}^2. \quad (2.17)$$

Segue do fato que $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é base de W que $\partial_{\nu} w_j = \Delta_{\Gamma_1} w_j$ para todo j , o que implica que $\partial_{\nu} u_m = \Delta_{\Gamma_1} u_m = \text{div}_T \nabla_T u_m$.

Assim, utilizando argumentos análogos à obtenção de (2.17), decorre que

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(x, t) u'_m(x, t) \, d\Gamma &= -\int_{\Gamma_1} \operatorname{div} \nabla_T u_m(x, t) u'_m(x, t) \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_m(x, t) \nabla_T u'_m(x, t) \, d\Gamma \\
&= (\nabla_T u_m(t), \nabla_T u'_m(t))_{\Gamma_1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T u_m(t)\|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Substituindo (2.16), (2.17) e (2.18) em (2.12), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T u_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Omega} a(x) g(u'_m(x, t)) u'_m(x, t) \, dx = 0. \tag{2.19}$$

Mas $\int_{\Omega} a(x) g(u'_m(x, t)) u'_m(x, t) \, dx \geq 0$, pois, temos por hipótese que $g(s)s \geq 0$ e $a(x)$ é uma função não negativa. Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T u_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq 0. \tag{2.20}$$

Multiplicando por 2 e integrando em $[0, t], t \in (0, t_m)$, temos que

$$\|u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \|u'_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u_m(0)\|_{\Gamma_1}^2. \tag{2.21}$$

Como

$$u_m(0) \rightarrow u^0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \text{ e } u'_m(0) \rightarrow u^1 \text{ em } \mathcal{V},$$

existe uma constante $c > 0$ independente de t e de m tal que

$$\|u'_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u_m(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq c. \tag{2.22}$$

Logo,

$$\|u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq c; \quad \forall t \in [0, t_m], \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Usando o Corolário 1.16.1 podemos estender as soluções u_m , à todo intervalo $[0, T]$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, obtemos que a desigualdade (2.23) é válida para todo $t \in [0, T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$; além disso,

$$(u'_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (2.24)$$

$$(\nabla u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (2.25)$$

$$(\nabla_T u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)) \quad (2.26)$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; \mathcal{V}). \quad (2.27)$$

2.2.1.2 Segunda Estimativa a Priori

O nosso intuito nesta etapa é derivar o problema aproximado em relação a t . No que segue faremos alguns cálculos que serão necessários à obtenção da expressão desejada.

Sendo $\frac{d}{dt}$ a derivada no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} u_m, \theta \right\rangle &= - \int_0^T u_m(t) \theta'(t) dt = - \int_0^T \left(\sum_{j=1}^m h_{jm}(t) w_j \right) \theta'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^m \left(- \int_0^T h_{jm}(t) \theta'(t) dt \right) w_j = - \sum_{j=1}^m \left\{ h_{jm}(t) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T h'_{jm}(t) \theta(t) dt \right\} w_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^T h'_{jm}(t) \theta(t) dt \right\} w_j = \int_0^T u'_m(t) \theta(t) dt = \langle u'_m, \theta \rangle \end{aligned}$$

o que prova que a derivada distribucional de u_m e a derivada clássica coincidem. De maneira análoga e utilizando (2.14) prova-se que

$$\left\langle \frac{d}{dt} u'_m, \theta \right\rangle = \langle u''_m, \theta \rangle$$

ou seja, que as derivadas distribucionais e clássicas de 1ª e 2ª ordem coincidem, desde que elas existam.

Por outro lado, usando propriedades da integral de Bochner constatamos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_j), \theta \right\rangle &= \langle (\nabla u'_m(t), \nabla w_j), \theta \rangle \\ \left\langle \frac{d}{dt}(\partial_\nu u_m(t), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle &= \langle (\partial_\nu u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \rangle \\ \left\langle \frac{d}{dt}(a(x)g(u'_m(t)), w_j), \theta \right\rangle &= \langle (a(x)g'(u'_m(t))u''_m(t), w_j), \theta \rangle; \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre das hipóteses feitas sobre a função g e a derivação de uma composição dada pela Proposição 1.1.19.

Das relações acima e de (2.13) resulta que

$$\frac{d}{dt}(u''_m(t), w_j) = -(\nabla u'_m(t), \nabla w_j) + (\partial_\nu u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} - (a(x)g'(u'_m(t))u''_m(t), w_j) \quad (2.28)$$

em $L^2(0, T)$, ou seja,

$$h'''_{jm} \in L^2(0, T),$$

onde as três derivadas são no sentido distribucionais. Sendo assim,

$$\int_0^T \|u'''_m(t)\|_{\Omega}^2 dt = \int_0^T \left\| \sum_{j=1}^m h'''_{jm}(t) w_j \right\|_{\Omega}^2 dt < +\infty$$

isto é,

$$u'''_m \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, e, de (2.28) obtemos,

$$(u'''_m(t), w_j) + (\nabla u'_m(t), \nabla w_j) - (\partial_\nu u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (a(x)g'(u'_m(t))u''_m(t), w_j) = 0.$$

Multiplicando por h''_{jm} e somando em j temos

$$(u'''_m(t), u''_m(t)) + (\nabla u'_m(t), \nabla u''_m(t)) - (\partial_\nu u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + \int_{\Omega} a(x)g'(u'_m(x, t))|u''_m(x, t)|^2 dx = 0,$$

donde,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T u'_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Omega} a(x)g'(u'_m(x, t))|u''_m(x, t)|^2 dx = 0. \quad (2.29)$$

Sendo g monótona crescente então $g'(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, e, além do mais, a função $a(x)$ é não negativa, portanto, $a(x)g'(u'_m(x, t))|u''_m(x, t)|^2 \geq 0$. Além disso, para quase todo $t > 0$,

$$\int_{\Omega} a(x)g'(u'_m(x, t))|u''_m(x, t)|^2 dx < +\infty.$$

De fato,

$$\int_{\Omega} a(x)g'(u'_m(x, t))|u''_m(x, t)|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |g'(u'_m(x, t))||u''_m(x, t)|^2 dx.$$

Considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u'_m(x, t)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u'_m(x, t)| > 1\}$, usando as hipóteses feitas sobre a função g e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} & \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |g'(u'_m(x, t))||u''_m(x, t)|^2 dx \\ &= \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |g'(u'_m(x, t))||u''_m(x, t)|^2 dx + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |g'(u'_m(x, t))||u''_m(x, t)|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M_1 \int_{\Omega_0} |u''_m(x, t)|^2 dx + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} M(1 + |u'_m(x, t)|^{p-1})|u''_m(x, t)|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M_1 \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M \int_{\Omega_1} |u''_m(x, t)|^2 dx \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M \int_{\Omega_1} |u'_m(x, t)|^{p-1} |u''_m(x, t)|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 (M_1 + M) \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M \left[\int_{\Omega_1} |u'_m(x, t)|^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\Omega_1} |u''_m(x, t)|^{2p} dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 (M_1 + M) \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M \|u''_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u''_m(t)\|_{L^{2p}(\Omega)}^2 \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 (M_1 + M) \\ &\quad + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} M M_2 M_3 \|u''_m(t)\|_{H^2(\Omega)}^{p-1} \|u''_m(t)\|_{H^2(\Omega)}^2; \end{aligned}$$

onde M_1 provém da continuidade da função g , M_2 e M_3 são, respectivamente, as constantes provenientes das imersões

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$$

Logo, $\int_{\Omega} a(x)g'(u'_m(x,t))|u''_m(x,t)|^2 dx < +\infty$; provando o desejado.

De (2.29) podemos escrever

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T u'_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq 0,$$

multiplicando a desigualdade acima por 2 e integrando em $[0,t]$, obtemos

$$\|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u'_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \|u''_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u'_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u'_m(0)\|_{\Gamma_1}^2. \quad (2.30)$$

Vamos agora estimar a sequência $(u''_m(0))$. Considerando $t = 0$ e tomando $v = u''_m(0)$ no problema aproximado (PA), temos

$$\begin{aligned} (u''_m(0), u''_m(0)) + (\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) - \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u_m(x,0) u''_m(x,0) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} a(x)g(u'_m(x,0))u''_m(x,0) dx = 0. \end{aligned}$$

Pela Fórmula de Green

$$\|u''_m(0)\|_{\Omega}^2 - (\Delta u_m(0), u''_m(0)) + \int_{\Omega} a(x)g(u'_m(x,0))u''_m(x,0) dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_{\Omega}^2 &\leq \|\Delta u_m(0)\|_{\Omega} \|u''_m(0)\|_{\Omega} - \int_{\Omega} a(x)g(u'_m(x,0))u''_m(x,0) dx \\ &\leq \|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)} \|u''_m(0)\|_{\Omega} + \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |g(u'_m(x,0))| |u''_m(x,0)| dx \\ &\leq M_4 \|u''_m(0)\|_{\Omega} + \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |g(u'_m(x,0))| |u''_m(x,0)| dx, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde M_4 é a constante que limita $\{u_m(0)\}$ em $H^2(\Omega)$, posto que $u_m(0) \rightarrow u^0$ em $H^2(\Omega)$.

Considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,0)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,0)| > 1\}$, pela hipótese (H.1) temos que $g(u'_m(x,0)) \leq K u'_m(x,0)$, $\forall x \in \Omega_1$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |g(u'_m(x,0))| |u''_m(x,0)| \, dx &\leq K \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |u'_m(x,0)| |u''_m(x,0)| \, dx \\
&\leq K \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u'_m(0)\|_{\Omega_1} \|u''_m(0)\|_{\Omega_1} \\
&\leq KM_5 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(0)\|_{\Omega}, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

onde M_5 é constante positiva proveniente do fato que $u'_m(0) \rightarrow u^1$ em \mathcal{V} .

A continuidade da g implica que $|g(u'_m(x,0))| \leq M_6$, $\forall x \in \Omega_0$, por conseguinte

$$\begin{aligned}
\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |g(u'_m(x,0))| |u''_m(x,0)| \, dx &\leq M_6 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |u''_m(x,0)| \, dx \\
&= M_6 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(x,0)\|_{L^1(\Omega_0)} \\
&\leq M_6 M_7 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(0)\|_{\Omega}, \tag{2.33}
\end{aligned}$$

onde M_7 é a constante de imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.

De (2.31), (2.32) e (2.33) segue que

$$\|u''_m(0)\|_{\Omega}^2 \leq M_4 \|u''_m(0)\|_{\Omega} + KM_5 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(0)\|_{\Omega} + M_6 M_7 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u''_m(0)\|_{\Omega},$$

ou ainda,

$$\|u''_m(0)\|_{\Omega} \leq M_4 + M_5 K \|a\|_{L^\infty(\Omega)} + M_6 M_7 \|a\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Portanto, $(u''_m(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, de (2.2), $(\nabla u'_m(0))$ e $(\nabla_T u'_m(0))$ são seqüências limitadas em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente. Logo, existe $L > 0$ tal que

$$\|u''_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u'_m(0)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u'_m(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq L.$$

De (2.30) e da desigualdade acima resulta que

$$\|u''_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u'_m(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u'_m(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq L.$$

Ou seja,

$$(u_m'') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (2.34)$$

$$(\nabla u_m') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (2.35)$$

$$(\nabla_T u_m') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)) \quad (2.36)$$

$$(u_m') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, \infty; \mathcal{V}). \quad (2.37)$$

2.2.1.3 Passagem ao Limite

Inicialmente, observemos que pelo Teorema da Representação de Riez, identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual, temos que

$$\begin{aligned} L^\infty(0, T; \mathcal{V}) &\equiv [L^1(0, T; \mathcal{V}')]', \\ L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) &\equiv [L^1(0, T; L^2(\Omega))]'. \end{aligned}$$

Além disso, $L^1(0, T; \mathcal{V}')$ e $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ são separáveis. Pelo Lema 1.5.2 e das Estimativas a Priori, existe (u_μ) subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $T > 0$,

$$u_\mu \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \quad (2.38)$$

$$u_\mu' \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \quad (2.39)$$

$$u_\mu'' \xrightarrow{*} u'' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.40)$$

As convergências (2.39) e (2.40) decorrem da convergência (2.38), da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ e da cadeia de imersões

$$\mathcal{D}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv [L^2(0, T; L^2(\Omega))]'\hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Convém observar que como $\mathcal{V} \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$ de (2.39) e (2.40) e em virtude do Teorema 1.12 (Teorema de Aubin-Lions) podemos extrair uma subsequência de (u_μ') a qual ainda

denotaremos pela mesma notação, de modo que

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q_T),$$

e então,

$$u'_\mu \rightarrow u' \text{ q.s. em } Q_T.$$

Da continuidade da função g segue que

$$g(u'_\mu) \rightarrow g(u') \text{ q.s em } Q_T,$$

ou ainda,

$$a(x)g(u'_\mu) \rightarrow a(x)g(u') \text{ q.s em } Q_T. \quad (2.41)$$

Além disso, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, pondo $\Omega = \Omega_{\mu 1} \cup \Omega_{\mu 2}$, onde

$$\Omega_{\mu 1} = \{x \in \Omega; |u'_\mu(x, t)| > 1\} \text{ e } \Omega_{\mu 2} = \{x \in \Omega; |u'_\mu(x, t)| \leq 1\}, \quad (2.42)$$

temos

$$\begin{aligned} \|a(x)g(u'_\mu)\|_{L^2(Q_T)}^2 &= \int_0^T \int_\Omega |a(x)g(u'_\mu(x, t))|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \left[\int_{\Omega_{\mu 1}} |a(x)g(u'_\mu(x, t))|^2 dx + \int_{\Omega_{\mu 2}} |a(x)g(u'_\mu(x, t))|^2 dx \right] dt \\ &\leq \int_0^T \left[\|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega_{\mu 1}} |g(u'_\mu(x, t))|^2 dx + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega_{\mu 2}} |g(u'_\mu(x, t))|^2 dx \right] dt \\ &\leq \int_0^T \left[\|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 K^2 \int_{\Omega_{\mu 1}} |u'_\mu(x, t)|^2 dx + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_8^2 \text{med}(\Omega) \right] dt \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 K^2 \int_0^T \|u'_\mu(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_8^2 \text{med}(\Omega) T \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 K^2 M_9 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_8^2 \text{med}(\Omega) T, \end{aligned}$$

onde M_9 provém de (2.24). Portanto, existe uma constante $C = C(\|a\|_{L^\infty(\Omega)}, K, M_8, M_9, \text{med}(\Omega), T)$ tal que

$$\|a(x)g(u'_\mu)\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C; \quad \forall \mu \in \mathbb{N}. \quad (2.43)$$

De (2.41), (2.43) e do Lema 1.1.3 (Lema de Lions) segue que

$$a(x)g(u'_\mu) \rightharpoonup a(x)g(u') \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q_T).$$

Como $w_j \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T)$, segue que

$$\int_0^T (a(x)g(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt. \quad (2.44)$$

Por outro lado, visto que

$$u''_\mu \xrightarrow{*} u'' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

então,

$$\langle u''_\mu, \varphi \rangle \rightarrow \langle u'', \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega));$$

ou seja,

$$\int_0^T (u''_\mu(t), \varphi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), \varphi(t)) dt.$$

Como $w_j\theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, em particular,

$$\int_0^T (u''_\mu(t), w_j) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), w_j) \theta(t) dt \quad (2.45)$$

De (2.38) temos que

$$\nabla u_\mu \xrightarrow{*} \nabla u \text{ em } L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n),$$

então,

$$\langle \nabla u_\mu, \varphi \rangle \rightarrow \langle \nabla u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n).$$

Do fato que $\nabla w_j \theta \in L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$ decorre que

$$\int_0^T (\nabla u_\mu, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t) dt. \quad (2.46)$$

Por outro lado, como $\partial_\nu u_\mu(x, t) = \Delta_{\Gamma_1} u_\mu(x, t)$, segue que

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_\mu(x, t) w_j d\Gamma \theta(t) dt &= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u_\mu(x, t) w_j d\Gamma \theta(t) dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_\mu(x, t) \nabla_T w_j d\Gamma \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (2.47)$$

De (2.38) temos que

$$\nabla_T u_\mu \xrightarrow{*} \nabla_T u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Então, em particular

$$\int_0^T (\nabla_T u_\mu, \nabla_T w_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla_T u, \nabla_T w_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt; \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.48)$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu > j$. Multiplicando a equação do problema aproximado (2.2) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, tomando $v = w_j$ e integrando de 0 a T, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_\mu''(t), w_j) \theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j) \theta(t) dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_\mu(x, t) w_j \theta(t) d\Gamma dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u_\mu'(t)), w_j) \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pelas convergências dadas em (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48) podemos passar

o limite na equação (2.49), quando $\mu \rightarrow \infty$, obtendo

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pela totalidade dos w_j 's em $W = \{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} w \text{ em } \Gamma_1\}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t), v)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T v)_{\Gamma_1}\theta(t) dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), v)\theta(t) dt = 0; \end{aligned}$$

$\forall \theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\forall v \in W$. Em particular, para $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\langle u'', \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} + \langle -\Delta u, \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} + \langle a(x)g(u'), \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0,$$

ou seja,

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Como o espaço $\{\varphi\theta; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0, T)\}$ é tal que as combinações lineares finitas formam um conjunto denso em $\mathcal{D}(Q_T)$, então

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (2.51)$$

No entanto, como $u'', a(x)g(u') \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ temos que $\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, isto é, $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$, para q.t. $t \in]0, T[$. Consequentemente,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Além disso, para quase todo $t \in]0, T[$ temos que

$$\Delta u(t) = u''(t) + a(x)g(u'(t)) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Segue da regularidade dos problemas elípticos que para quase todo $t \geq 0$, $u(t) \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq M_{11}\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq M_{11}\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} &= M_{11}\|u''(t) + a(x)g(u'(t))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M_{11}\|u''(t)\|_{L^2(\Omega)} + M_{11}\|a(x)g(u'(t))\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

provando que $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$. Desta forma, para todo $T > 0$,

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{V}). \quad (2.52)$$

2.2.1.4 Condição de Fronteira

Da passagem ao limite temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e de (2.51),

$$u''(x, t) = \Delta u(x, t) - a(x)g(u'(x, t)), \quad \text{para q.t. } (x, t) \in \Omega \times]0, T[.$$

Substituindo u'' na equação acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\Delta u(t) - a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T (\Delta u(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) dt = 0.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(x, t) \gamma_0 w_j \theta(t) d\Gamma dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0,$$

donde

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(x, t) \gamma_0 w_j \theta(t) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u(x, t) \gamma_0 w_j \theta(t) d\Gamma dt = 0,$$

isto é,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} [(\partial_\nu u(x, t) - \Delta_{\Gamma_1} u(x, t)) \gamma_0 w_j] \theta(t) d\Gamma dt = 0; \quad \forall j, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (2.53)$$

Notemos que $\{\gamma_0 w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$.

De fato, a aplicação $\gamma_0 : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma); u|_{\Gamma_0} = 0\}$ é sobrejetiva, pois, se $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ então $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, pela sobrejetividade da aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 v = u$ q.s. em Γ . Como $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ então $u = 0$ q.s. em Γ_0 , ou seja, $\gamma_0 v = 0$ q.s. em Γ_0 , portanto $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

Do fato que a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é densa em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, pela sobrejetividade e continuidade da aplicação $\gamma_0 : H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ segue que $\{\gamma_0 w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é denso em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$, concluímos que $\{\gamma_0 w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$.

Cosequentemente, de (2.53) obtemos

$$\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Gamma_1))$$

e, portanto, da regularidade da função u

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (2.54)$$

2.2.1.5 Dados Iniciais

Do problema aproximado temos que

$$\begin{aligned} u_m(0) &\rightarrow u^0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \\ u'_m(0) &\rightarrow u^1 \text{ em } \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Nesta etapa, mostraremos que $u^0 = u(0)$ e $u^1 = u'(0)$.

Primeiramente, notemos que $u, u' \in L^1(0, T; \mathcal{V})$ e $u'' \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, então pelo Lema 1.2.1 temos que $u \in C^0([0, T]; \mathcal{V})$ e $u' \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido calcularmos $u(0), u(T), u'(0)$ e $u'(T)$.

Seja $\theta \in C^1([0, T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $u'_\mu \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, então,

$$\langle u'_\mu, \varphi \rangle \rightarrow \langle u', \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (u'_\mu(t), \varphi) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \varphi) dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $w_j \theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_0^T (u'_\mu(t), w_j) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w_j) \theta(t) dt.$$

Integrando por partes e da convergência $u_\mu \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; \mathcal{V})$, obtemos

$$\left[\theta(t)(u_\mu(t), w_j) \right]_0^T - \int_0^T (u_\mu(t), w_j) \theta'(t) dt \rightarrow \left[\theta(t)(u(t), w_j) \right]_0^T - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt,$$

ou ainda,

$$-(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u_\mu(t), w_j) \theta'(t) dt \rightarrow -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt,$$

o que implica que

$$(u_\mu(0), w_j) \rightarrow (u(0), w_j), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, da densidade de $\{w_j\}$ em $L^2(\Omega)$ segue que $u_\mu(0) \rightharpoonup u(0)$ em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, do problema aproximado, temos

$$u_\mu(0) \rightarrow u^0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap \mathcal{V},$$

o que implica que

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u^0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Da unicidade do limite fraco obtemos que $u(0) = u^0$.

De forma análoga mostramos que $u'(0) = u^1$.

2.2.1.6 Unicidade

Sejam u e v soluções regulares do problema (2.1). Considerando $w = u - v$ temos que w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + a(x)g(u') - a(x)g(v') = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu w - \Delta_{\Gamma_1} w = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ w = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ w(x, 0) = 0 = w'(x, 0) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.55)$$

Compondo a primeira linha de (2.55) com $w'(t)$, resulta que

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) + ((a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))), w'(t)) = 0.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$(w''(t), w'(t)) + (\nabla w(t), \nabla w'(t)) - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu w(x, t) w'(x, t) \, d\Gamma + ((a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))), w'(t)) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w'(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T w(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ & + \int_\Omega a(x)(g(u'(x, t)) - g(v'(x, t)))(u'(x, t) - v'(x, t)) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Como a função $a(x)$ é não negativa e g é monótona crescente, então

$$\int_\Omega a(x)(g(u'(x, t)) - g(v'(x, t)))(u'(x, t) - v'(x, t)) \, dx \geq 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_T w(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq 0.$$

Integrando de 0 a T , obtemos

$$\begin{aligned} \|w'(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla w(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T w(t)\|_{\Gamma_1}^2 & \leq \|w'(0)\|_\Omega^2 + \|\nabla w(0)\|_\Omega^2 \\ & + \|\nabla_T w(0)\|_{\Gamma_1}^2 = 0, \end{aligned}$$

Concluimos então que $w(t) = 0$ em \mathcal{V} , para quase todo $t \in [0, T]$ e portanto $u = v$, ou seja, a solução regular é única.

2.2.2 Solução Fraca

A seguir, provaremos a existência de solução fraca do problema (2.1) por aproximação de soluções regulares.

Seja $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$. Como $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ e \mathcal{V} são densos em \mathcal{V} e em $L^2(\Omega)$, respectivamente, existe $\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tal que

$$\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \rightarrow \{u^0, u^1\} \text{ em } \mathcal{V} \times L^2(\Omega). \quad (2.56)$$

Desta maneira, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ existe uma solução regular u_μ do problema

$$\begin{cases} u_\mu'' - \Delta u_\mu + a(x)g(u_\mu') = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u_\mu - \Delta_{\Gamma_1} u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u_\mu(x, 0) = u_\mu^0(x), \quad u_\mu'(x, 0) = u_\mu^1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.57)$$

Considere $z_{\mu l} = u_\mu - u_l$. Pelos mesmos argumentos utilizados na unicidade de solução regular obtemos

$$\begin{aligned} \|z_{\mu l}'(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla z_{\mu l}(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T z_{\mu l}(t)\|_{\Gamma_1}^2 &\leq \|z_{\mu l}'(0)\|_\Omega^2 + \|\nabla z_{\mu l}(0)\|_\Omega^2 \\ &\quad + \|\nabla_T z_{\mu l}(0)\|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

Como o membro da direita converge para zero, pois, $\{u_\mu^0\}$ converge em \mathcal{V} e $\{u_\mu^1\}$ converge em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{aligned} (u_\mu) &\text{ é sequência de Cauchy em } C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}); \\ (u_\mu') &\text{ é sequência de Cauchy em } C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Logo, existe $u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$ tal que

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{em } C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}); \quad (2.58)$$

$$u'_\mu \rightarrow u' \quad \text{em } C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \quad (2.59)$$

Notemos que considerando $\Omega = \Omega_{\mu_1} \cup \Omega_{\mu_2}$ como em (2.42), de (2.59) segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|a(x)g(u'_\mu(t))\|_\Omega^2 dt &= \int_0^T \int_{\Omega_{\mu_1}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_{\mu_2}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx dt \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 K^2 \int_0^T \int_\Omega |u'_\mu(x,t)|^2 dx dt + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_{10}^2 \text{med}(\Omega) T \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 K^2 M_{11} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 M_{10}^2 \text{med}(\Omega) T \\ &= M_{12}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\{a(x)g(u'_\mu)\} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.60)$$

Por outro lado, de (2.59) temos também

$$u'_\mu \rightarrow u' \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega));$$

donde,

$$u'_\mu \rightarrow u' \quad \text{q.s. em } \Omega \times [0, T].$$

Pela continuidade da g temos que

$$g(u'_\mu) \rightarrow g(u') \quad \text{q.s. em } \Omega \times [0, T],$$

ou ainda,

$$a(x)g(u'_\mu) \rightarrow a(x)g(u') \quad \text{q.s. em } \Omega \times [0, T]. \quad (2.61)$$

De (2.60), (2.61) e pelo Lema de Lions, existe uma subsequência de $\{a(x)g(u'_\mu)\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ que ainda denotaremos pela mesma notação tal que

$$a(x)g(u'_\mu) \rightharpoonup a(x)g(u') \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.62)$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Compondo a equação da primeira linha de (2.57) com $\theta\varphi$ obtemos

$$\langle u''_\mu - \Delta u_\mu + a(x)g(u'_\mu), \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.63)$$

Notemos que

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi \rangle = -\langle u'_\mu, \theta'\varphi \rangle$$

e de (2.59) segue que

$$-\langle u'_\mu, \theta'\varphi \rangle \rightarrow -\langle u', \theta'\varphi \rangle = \langle u'', \theta\varphi \rangle.$$

Concluimos

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \langle u'', \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.64)$$

Por outro lado,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)},$$

e por (2.58)

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = \langle -\Delta u, \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)},$$

ou seja,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \langle -\Delta u, \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.65)$$

Do exposto em (2.62), (2.64) e (2.65) obtemos de (2.63), após passagem ao limite,

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mas, pela totalidade do conjunto $R = \{\theta\varphi; \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$ vem que

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \psi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Então,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (2.66)$$

Temos que $u \in L^\infty(0, T; \mathcal{V})$ e então $-\Delta u \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}')$ e como $a(x)g(u') \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ segue que $u'' \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}')$. Assim,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}').$$

De (2.58) e (2.59) temos que $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{V})$ e $u' \in C^0(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$, isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)). \quad (2.67)$$

2.2.2.1 Condição de fronteira

Temos

$$\partial_\nu u_\mu - \Delta_{\Gamma_1} u_\mu = 0 \text{ q. s. em } \Gamma_1 \times]0, \infty[,$$

onde u_μ é solução regular do problema (2.57) e o operador $-\Delta_{\Gamma_1} : H^1(\Gamma_1) \rightarrow H^{-1}(\Gamma_1)$ é definido por

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1} \varphi, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T \varphi \cdot \nabla_T \psi \, d\Gamma; \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Gamma_1).$$

Então,

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1} u_\mu(t), \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_\mu(t) \cdot \nabla_T \psi \, d\gamma = (\nabla_T u_\mu(t), \nabla_T \psi)_{\Gamma_1}; \quad \forall t > 0. \quad (2.68)$$

Como

$$u_\mu \rightarrow u \text{ em } C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$$

segue que

$$\nabla_T u_\mu \rightarrow \nabla_T u \text{ em } C^0(\mathbb{R}_+; [L^2(\Gamma_1)]^n). \quad (2.69)$$

Assim, de (2.68) e (2.69) se $\psi \in L^1(0, T; H^1(\Gamma_1))$ temos que

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_\mu(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt \rightarrow \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt,$$

consequentemente,

$$\Delta_{\Gamma_1} u_\mu \xrightarrow{*} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (2.70)$$

Por outro lado, de (2.54) temos que

$$\partial_\nu u_\mu = \Delta_{\Gamma_1} u_\mu \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (2.71)$$

Sendo assim, de (2.70) e (2.71)

$$\langle \partial_\nu u_\mu, \varphi \rangle \rightarrow \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_\mu \xrightarrow{*} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (2.72)$$

Além disso, como

$$u'_\mu \rightarrow u' \quad \text{em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

pela Proposição 1.2.3 e Corolário 1.2.3.1 temos que

$$u''_\mu \rightarrow u'' \quad \text{em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.73)$$

Como u_μ satisfaz a equação

$$\Delta u_\mu = u''_\mu + a(x)g(u'_\mu) \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

de (2.62), (2.66) e (2.73) obtemos

$$\Delta u_\mu = u''_\mu + a(x)g(u'_\mu) \rightarrow u'' + a(x)g(u') = \Delta u \quad \text{em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\Delta u_\mu \rightarrow \Delta u \quad \text{em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$$

e, do fato que

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{em } C^0([0, T]; \mathcal{V}) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; H^1(\Omega)),$$

obtemos

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{em } H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega));$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Pela continuidade da aplicação traço $\tilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ [ver Observação 1.3.1] e Teorema 1.17 temos

$$\tilde{\gamma}_1(u_\mu) \rightarrow \tilde{\gamma}_1(u) \quad \text{em } H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_\mu \rightarrow \partial_\nu u \quad \text{em } H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (2.74)$$

Desta forma, de (2.72), (2.74) e, pela unicidade do limite fraco estrela, obtemos

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)).$$

Sendo $\Delta_{\Gamma_1} u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1))$ deduzimos que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (2.75)$$

2.2.2.2 Dados Iniciais

De (2.56) e (2.57) temos que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) &= u_\mu^0 \rightarrow u^0 \quad \text{em} \quad \mathcal{V}, \\ u'_\mu(0) &= u_\mu^1 \rightarrow u^1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega). \end{aligned}$$

De (2.58) e (2.59) segue que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) &\rightarrow u(0) \quad \text{em} \quad \mathcal{V}, \\ u'_\mu(0) &\rightarrow u'(0) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, $u(0) = u^0$ e $u'(0) = u^1$.

2.2.2.3 Unicidade

Sejam u e v duas soluções fracas do problema (2.1) e consideremos $w = u - v$. Então,

$$w \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$$

e satisfaz o problema

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + ag(u') - ag(v') = 0 & \text{em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}') \\ \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} w & \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)) \\ w = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[\\ w(0) = 0 = w'(0) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.76)$$

Como w satisfaz as hipóteses da identidade de energia, conforme Apêndice, temos que

$$\begin{aligned} \|w'(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla w(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T w(t)\|_{\Gamma_1}^2 &= -2 \int_0^t \int_\Omega a(x)[g(u'(t)) - g(v'(t))][u'(t) - v'(t)] dx dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Pois g é monótona crescente e a é limitada e não-negativa, e assim, o segundo lado da igualdade é menor que ou igual a zero. Portanto $w(t) = 0$ em \mathcal{V} para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e, conseqüentemente, $u(t) = v(t)$ em \mathcal{V} , $\forall t \geq 0$.

2.3 Existência e Unicidade de Solução via Teoria de Semigrupos

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de soluções regular e fraca para o problema dado usando a teoria de semigrupos.

2.3.1 Existência e Unicidade de Solução Regular

Definamos o operador linear

$$\begin{aligned} A: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}' \\ f &\longmapsto Af, \text{ dado por} \end{aligned}$$

$$\langle Af, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T f \cdot \nabla_T v \, d\gamma; \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.77)$$

Observemos que a aplicação acima está bem definida. Com efeito,

$$\begin{aligned} |\langle Af, v \rangle| &\leq \|\nabla f\|_{\Omega} \|\nabla v\|_{\Omega} + \|\nabla_T f\|_{\Gamma_1} \|\nabla_T v\|_{\Gamma_1} \\ &\leq \{ \|\nabla f\|_{\Omega} + \|\nabla_T f\|_{\Gamma_1} \} \|v\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \sqrt{2} \{ \|\nabla f\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T f\|_{\Gamma_1}^2 \}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathcal{V}} = \sqrt{2} \|f\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

o que prova que $Af \in \mathcal{V}'$. Notemos também que

$$\|Af\|_{\mathcal{V}'} = \sup_{v \in \mathcal{V}; \|v\| \leq 1} |\langle Af, v \rangle| \leq \sup_{v \in \mathcal{V}; \|v\| \leq 1} \{ \sqrt{2} \|f\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \} \leq \sqrt{2} \|f\|_{\mathcal{V}} \quad \forall f \in \mathcal{V}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Sendo A um operador linear e limitado temos que A é contínuo. Além disso, A é coercivo em \mathcal{V} , pois

$$\langle Av, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma = \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \geq 0; \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + Bu_t = 0 \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1, \end{cases} \quad (2.78)$$

onde o operador $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é definido por

$$\langle Bv, w \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))w(x) \, dx; \quad \forall v, w \in \mathcal{V}. \quad (2.79)$$

Notemos que o operador B está bem definido, pois, considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |v(x)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |v(x)| > 1\}$ segue das hipóteses (H.1)(i),(ii) e (H.2)

sobre as funções g e a , respectivamente, e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|\langle Bv, w \rangle| &\leq \int_{\Omega} |a(x)| |g(v(x))| |w(x)| \, dx \\
&\leq \int_{\Omega_0} |a(x)| K_1 |w(x)| \, dx + \int_{\Omega_1} |a(x)| K |v(x)| |w(x)| \, dx \\
&\leq K_1 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |w(x)| \, dx + K \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v(x)| |w(x)| \, dx \\
&\leq K_1 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} K_2 \|w\|_{\Omega} + K \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{\Omega} \|w\|_{\Omega} \\
&\leq \max\{K_1, K_2, K\} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \{\|w\|_{\Omega} + \|v\|_{\Omega} \|w\|_{\Omega}\} \\
&= K_3 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} (1 + \|v\|_{\Omega}) \|w\|_{\Omega},
\end{aligned} \tag{2.80}$$

onde K_1, K_2, K_3 e K são constantes positivas. Além disso, como $w \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
\|w\|_{\Omega} &\leq (\|w\|_{\Omega}^2 + \|\nabla w\|_{\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} = \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq K_4 \|\nabla w\|_{\Omega} \leq K_4 (\|\nabla w\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T w\|_{\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= K_4 \|w\|_{\mathcal{V}},
\end{aligned} \tag{2.81}$$

onde a constante positiva K_4 provém do fato que as normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla \cdot\|_{\Omega}$ são equivalentes em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. De (2.80) e (2.81) temos que existe $K_5 > 0$ tal que para todo $v, w \in \mathcal{V}$

$$|\langle Bv, w \rangle| \leq K_5 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} (1 + \|v\|_{\Omega}) \|w\|_{\mathcal{V}},$$

o que prova que $Bv \in \mathcal{V}'$.

Afirmamos que o operador $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é maximal monótono. Com efeito,

$$\langle Bv, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} a(x) g(v(x)) v(x) \, dx \geq 0,$$

pois, pela hipótese (H.1)(ii) temos que $g(s)s \geq 0$ e por (H.2) a é não-negativa. Logo, $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é monótono.

Para provar a maximalidade de B , definamos o funcional $J : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Jv = \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x) g(s) \, ds \, dx.$$

Afirmamos que B é a subdiferencial de J .

De fato, a derivada direcional de J em $v \in \mathcal{V}$ na direção de u é dada por

$$\begin{aligned}
J'(v, u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(v + \lambda u) - J(v)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} \int_0^{v(x) + \lambda u(x)} a(x)g(s) ds dx - \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x)g(s) ds dx}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} a(x) \left[\int_0^{v(x) + \lambda u(x)} g(s) ds - \int_0^{v(x)} g(s) ds \right] dx}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{\lambda} \int_{v(x)}^{v(x) + \lambda u(x)} g(s) ds \right] dx = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) dx, \quad (2.82)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade provém do Teorema 1.4 (Teorema da Média). Então, J é G-diferenciável em $v \in \mathcal{V}$ e de (2.79) e (2.82) obtemos

$$\langle J'v, u \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) dx = \langle Bv, u \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}; \quad \forall v, u \in \mathcal{V}.$$

Logo,

$$J'v = Bv; \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2.83)$$

No que segue, provaremos que J é convexo. De acordo com a Proposição 1.7.2 é suficiente provarmos que $\langle J'w - J'v, w - v \rangle \geq 0$. Como g é monótona crescente temos

$$\begin{aligned}
\langle J'w - J'v, w - v \rangle &= \langle Bw - Bv, w - v \rangle \\
&= \int_{\Omega} a(x)g(w(x))(w(x) - v(x))dx - \int_{\Omega} a(x)g(v(x))(w(x) - v(x))dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)[g(w(x)) - g(v(x))][w(x) - v(x)] dx \geq 0,
\end{aligned}$$

para todo $w, v \in \mathcal{V}$. Portanto, J é convexo.

Notemos que $J \neq \infty$, isto é, J é um funcional próprio. Então, usando a Proposição 1.7.3 e de (2.83) temos

$$\partial(Jv) = J'v = Bv, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

onde $\partial(Jv)$ é a subdiferencial de J em v . O que prova que B é a subdiferencial de J .

Afirmamos também que $J : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo.

Com efeito, seja $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ uma sequência tal que $v_n \rightarrow v$ em \mathcal{V} . Então

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &= \left| \int_{\Omega} a(x) \int_0^{v_n(x)} g(s) ds dx - \int_{\Omega} a(x) \int_0^{v(x)} g(s) ds dx \right| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{v_n(x), v(x)} |g(s)| ds dx, \end{aligned}$$

onde $\int_{v_n(x), v(x)}$ denota a integral com os extremos de integração na ordem crescente.

Como g é contínua temos que $|g(s)| \leq c$ se $|s| \leq 1$ e da hipótese (H.1)(iii) temos que $|g(s)| \leq K|s|$ se $|s| > 1$. Assim, $|g(s)| \leq c + K|s|$; $\forall s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} \int_{v_n(x), v(x)} (c + K|s|) ds dx \\ &\leq c \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \underbrace{\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| dx}_{I_1} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{K}{2} \underbrace{\int_{\Omega} \left| |v_n(x)|^2 - |v(x)|^2 \right| dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Afirmação (i): $I_1 = \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| dx \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

De fato, como $v_n \rightarrow v$ em $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, pois Ω é limitado, segue o desejado.

Afirmação (ii): $\int_{\Omega} \left| |v_n(x)|^2 - |v(x)|^2 \right| dx \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| |v_n(x)|^2 - |v(x)|^2 \right| dx &= \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| |v_n(x) + v(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v_n(x) + v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n(x) + v(x)|^2 dx &\leq 2 \left(\int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right) \\ &= 2(\|v_n\|_{\Omega}^2 + \|v\|_{\Omega}^2) \\ &\leq 2(\bar{c} + \|v\|_{\Omega}^2), \end{aligned}$$

onde a constante \bar{c} provém do fato que $\{v_n\}$ é convergente e, portanto, limitada em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_{\Omega} \left| |v_n(x)|^2 - |v(x)|^2 \right| dx \leq 2(\bar{c} + \|v\|_{\Omega}^2) \left(\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Donde, segue que J é contínuo.

Agora, sendo B a subdiferencial de J que é contínuo, convexo e próprio; de acordo com o Teorema 1.18 temos que $B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ é maximal monótono.

Por conseguinte, podemos reformular o problema (2.78) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{em} \quad \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{array} \quad (2.84)$$

Assim, temos um novo operador $\mathbb{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ definido por

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix}$$

$$\text{e } D(\mathbb{A}) = \{(v, h) \in \mathcal{H}; h \in \mathcal{V}, Av + Bh \in L^2(\Omega)\}.$$

Para provarmos que \mathbb{A} gera um semigrupo em $\mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, devemos mostrar que \mathbb{A} é maximal monótono em \mathcal{H} .

Com efeito, \mathbb{A} é monótono, pois

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{A} \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} -h \\ Av + Bh \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + (Av + Bh, h)_{L^2(\Omega)} \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + \langle Av, h \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + \langle Bh, h \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\
&= - \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_1} \nabla_T h \cdot \nabla_T v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla h \, dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \cdot \nabla_T h \, d\Gamma + \int_{\Omega} a(x)g(h(x))h(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} a(x)g(h(x))h(x) \, dx \geq 0; \quad \forall (v, h) \in D(\mathbb{A}),
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre das hipóteses (H.1)(ii) e (H.2).

Para provar a maximalidade do operador \mathbb{A} , ou seja, $Im(I + \mathbb{A}) = \mathcal{H}$, dado $(v_0, h_0) \in \mathcal{H}$ devemos mostrar que existe $(v, h) \in D(\mathbb{A})$ tal que

$$(I + \mathbb{A}) \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ h_0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h \\ Av + Bh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} v - h = v_0 \\ h + Av + Bh = h_0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Combinando as duas igualdades em (2.85), obtemos

$$h + Ah + Bh = h_0 - Av_0. \quad (2.86)$$

Notemos que o operador $h \mapsto h + Ah$ é contínuo e coercivo, pois A possui tais

propriedades. Além disso, como

$$\langle Ah, h \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T h|^2 d\gamma = \|h\|_{\mathcal{V}}^2 \geq 0,$$

então A é monótono e, conseqüentemente, $I + A$ também é. Portanto, segue da Proposição 1.7.1 que o operador $(I + A) + B$ é maximal monótono. Logo, a equação (2.86) possui solução $h \in \mathcal{V}$. Como, $v = v_0 + h$, e $Av + Bh = h_0 - h$, segue que $v \in \mathcal{V}$ e $Av + Bh \in L^2(\Omega)$.

Logo, o sistema (2.85) possui uma solução $(v, h) \in D(\mathbb{A})$ e portanto \mathbb{A} é maximal monótono em \mathcal{H} .

Nestas condições, pelo Teorema 1.19 (Hille Yosida), dado $U^0 \in D(\mathbb{A})$ existe uma única função

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathbb{A}))$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathbb{A}U = 0 & \text{em } [0, +\infty) \\ U(0) = U^0 \end{cases} \quad (2.87)$$

e além disso,

$$|U(t)|_{\mathcal{H}} \leq |U^0|_{\mathcal{H}} \text{ e } \left| \frac{dU}{dt} \right|_{\mathcal{H}} = |\mathbb{A}U(t)|_{\mathcal{H}} \leq |\mathbb{A}U^0|_{\mathcal{H}} \quad \forall t \geq 0.$$

Considerando que os problemas (2.78) e (2.84) são equivalentes, então, tomando $U^0 = (u^0, u^1) \in D(\mathbb{A})$ existe uma única função $U = (u, u_t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathbb{A}))$ que satisfaz o problema (2.78). Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} &= \left\| \begin{bmatrix} u_t(t) \\ u_{tt}(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \mathbb{A} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| \mathbb{A} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} = \left\| \begin{bmatrix} -u^1 \\ Au^0 + Bu^1 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{\Omega} \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u_t(t)\|_{\mathcal{V}} + \|u_{tt}(t)\|_{\Omega} \leq \|u^1\|_{\mathcal{V}} + \|Au^0 + Bu^1\|_{\Omega} \quad \forall t \geq 0.$$

Concluimos também que a solução forte possui as seguintes propriedades:

- Como $u_t \in \mathcal{V}$ então $u_t|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)$.
- Como $Au + Bu_t \in L^2(\Omega)$ e pela hipótese (H.1), $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$, então $Au \in L^2(\Omega)$ e consequentemente, $u \in H^2(\Omega)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a(x)g(u_t(x))|^2 dx &\leq \int_{\Omega} |a(x)|^2 |g(u_t(x))|^2 dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |g(u_t(x))|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Seja $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u_t(x)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u_t(x)| > 1\}$ segue da hipótese (H.1) itens (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u_t(x))|^2 dx &= \int_{\Omega_0} |g(u_t(x))|^2 dx + \int_{\Omega_1} |g(u_t(x))|^2 dx \\ &\leq Mmed(\Omega) + K \int_{\Omega} |u_t(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned} \quad (2.89)$$

De (2.88) e (2.89) temos

$$\int_{\Omega} |a(x)g(u_t(x))|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} (Mmed(\Omega) + K \int_{\Omega} |u_t(x)|^2 dx) < \infty. \quad (2.90)$$

Portanto, $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$.

Agora, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\langle Au, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Logo, $Au = -\Delta u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $Au \in L^2(\Omega)$ então $Au = -\Delta u$ em $L^2(\Omega)$ e assim $-\Delta u \in L^2(\Omega)$. Pela regularidade dos problemas elípticos obtemos que $u \in H^2(\Omega)$.

- $D(\mathbb{A}) = H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, consequentemente, $u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.

De fato, seja $(u, v) \in D(\mathbb{A})$, então, $(u, v) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, $v \in \mathcal{V}$ e como vimos $u \in H^2(\Omega)$, logo, $(u, v) \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, ou seja, $D(\mathbb{A}) \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Por outro lado, seja $(u, v) \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle Au, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Logo, $-\Delta u = Au$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mas, como $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, então, $-\Delta u = Au$ em $L^2(\Omega)$ e assim $Au \in L^2(\Omega)$. Além disso, de (2.90) temos que $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$, conseqüentemente, $Au + a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$. Portanto, $(u, v) \in D(\mathbb{A})$, ou seja, $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V} \subset D(\mathbb{A})$. No entanto, como vimos anteriormente $(u, u_t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathbb{A}))$, isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \quad \text{e} \quad u_t \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

Desta forma, $u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1, \infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.

- A solução regular satisfaz naturalmente a condição de fronteira.

Com efeito, dado $u \in \mathcal{V}$ tal que $Au = f \in L^2(\Omega)$ temos para $v \in \mathcal{V}$ que

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \cdot \nabla_T v \, d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u v \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned}$$

Sendo $-\Delta u = Au = f$ em $L^2(\Omega)$ então

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u) v \, d\Gamma \equiv 0.$$

Tendo em mente que a identidade acima ocorre para qualquer $v \in \mathcal{V}$ e, portanto,

$v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, podemos tomar $w = \gamma_0 v \in C^\infty(\Gamma_1)$ e assim,

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u - \Delta_T u) w \, d\Gamma = 0; \quad \forall w \in C^\infty(\Gamma_1),$$

isto é,

$$(\partial_\nu u - \Delta_T u, w)_{\Gamma_1} = 0; \quad \forall w \in C^\infty(\Gamma_1).$$

Como $C^\infty(\Gamma_1)$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$, segue que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em } L^2(\Gamma_1).$$

2.3.2 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + Bu & 0 < t < \infty \\ u(0) = u^0 \end{cases} \quad (2.91)$$

onde A é um operador m -dissipativo de X em X , B é contínuo e dissipativo de X nele mesmo e X é um espaço de Banach.

Para o problema (2.91) temos o seguinte resultado de existência.

Teorema 2.2. *Seja $A : X \longrightarrow X$ um operador m -dissipativo. Seja $B : X \longrightarrow X$ um operador contínuo, não-linear e dissipativo definido em todo X . Então, para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$ existe uma única função contínua $u : [0, \infty) \longrightarrow X$ tal que $u(0) = u_0$.*

Demonstração: Ver Barbu [1], Cap.III, Seção 3, Teo.3.1.

Consideremos o problema dado na forma (2.84) visto na seção 2.3.1, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \mathbb{A} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ em } \begin{matrix} \mathcal{V} \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix}$$

onde

$$\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{A} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix}$$

$$\text{e } D(\mathbb{A}) = \{(v, h) \in \mathcal{H}; h \in \mathcal{V}, Av + Bh \in L^2(\Omega)\}.$$

Já vimos que \mathbb{A} é um operador maximal monótono sobre \mathcal{H} , logo, $-\mathbb{A}$ é m-dissipativo.

Definindo

$$\mathbb{B} : \begin{matrix} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

isto é, \mathbb{B} é o operador nulo sobre \mathcal{H} , é claro que \mathbb{B} é contínuo e dissipativo. Assim, o problema (2.84) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\mathbb{A}U + \mathbb{B}U & 0 < t < \infty \\ U(0) = U^0 \end{cases} \quad (2.92)$$

e satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2. Então, para cada $U^0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$ existe uma única função contínua $U : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $U(0) = U^0$. Como $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é maximal monótono, segue da Proposição 1.7.4 que $\overline{D(\mathbb{A})} = \mathcal{H}$.

Interpretando o parágrafo anterior, concluímos que dados $U^0 = (u^0, u^1) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$

existe uma única solução fraca do problema dado na classe

$$U = (u, u_t) \in C^0([0, \infty), \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$$

isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

2.4 Apêndice

2.4.1 O Espaço $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$

O espaço $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$. De fato, seja $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ um sequência tal que

$$u_k \rightarrow u \text{ em } H^1(\Omega).$$

Pela continuidade da aplicação traço γ_0 , temos que

$$\gamma_0(u_k) \rightarrow \gamma_0(u) \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$

e assim,

$$\gamma_0(u_k) \rightarrow \gamma_0(u) \text{ q.s. em } \Gamma.$$

Como $\{u_k\} \subset H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ temos que $\gamma_0(u_k) = 0$ q.s. em Γ_0 , $\forall k \in \mathbb{N}$ e da convergência acima, concluímos que $\gamma_0(u) = 0$ q.s. em Γ_0 , o que prova que $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Logo, $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert temos o desejado.

Além do mais, em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ as normas

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \text{ e } [u] = \|\nabla u\|_{\Omega} \tag{2.93}$$

são equivalentes. Com efeito, notemos inicialmente que a aplicação

$$u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \longrightarrow [u] = \|\nabla u\|_{\Omega} \quad (2.94)$$

define uma seminorma em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$. Agora, se $[u] = 0$ isto é, $\|\nabla u\|_{\Omega} = 0$ então $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, logo, $u = C$, onde C é uma constante (notemos que Ω é conexo). Como $u|_{\Gamma_0} = 0$ resulta que $u = 0$ em Ω . Portanto, a aplicação acima é uma norma.

Como a desigualdade

$$\|\nabla u\|_{\Omega} \leq \|u\|_{\Omega} + \|\nabla u\|_{\Omega} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

é trivialmente verificada, para provarmos o desejado em (2.93) é suficiente garantirmos a existência de uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{\Omega} \leq c_1 [u]; \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (2.95)$$

Se $u = 0$, nada temos a provar. Suponhamos, então, que $u \neq 0$. De (2.95) temos que mostrar o desejado é equivalente a mostrar que existe $c_2 > 0$ tal que

$$c_2 \leq \left[\frac{u}{\|u\|_{\Omega}} \right]; \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega).$$

Ou ainda, basta provarmos que

$$\exists c > 0 \text{ tal que } [u] \geq c, \quad \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{\Omega} = 1.$$

Suponhamos o contrário, ou seja, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $u_n \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ com $\|u_n\|_{\Omega} = 1$ e, no entanto,

$$[u_n] < \frac{1}{n}. \quad (2.96)$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $n \rightarrow +\infty$ resulta que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = 0. \quad (2.97)$$

Agora, de (2.96) e do fato que $\|u_n\|_\Omega = 1; \forall n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_n\|_\Omega^2 + [u_n]^2 \leq 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2, \quad (2.98)$$

o que implica que $\{u_n\}$ é limitada no espaço topológico $(H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$. Sendo $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, existirá (u_ν) subsequência de (u_n) e $u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (2.99)$$

Sendo a aplicação $v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \mapsto [v]$ uma norma, ela é convexa e semicontínua inferiormente. Logo de (2.97) e (2.99) obtemos

$$[u] \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} [u_\nu] = 0.$$

Assim, $[u] = 0$ e portanto $u = 0$.

Por outro lado, em virtude da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser compacta, então de (2.98), após a extração de uma eventual subsequência obtemos

$$u_\nu \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega) \quad (2.100)$$

o que implica que

$$\|u_\nu\|_\Omega \rightarrow \|u\|_\Omega.$$

Como $\|u_\nu\|_\Omega = 1$ vem que $\|u\|_\Omega = 1$ o que é um absurdo, pois $u = 0$. Ficando provado a equivalência entre as normas.

2.4.2 O Espaço $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$

O espaço $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ é separável quando munido com a topologia

$$\|u\|_{H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}} = \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}}.$$

Com efeito, consideremos a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} T : H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)]^{n^2} \\ u &\mapsto (u, u, \nabla u, D^2 u) \end{aligned}$$

onde $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $i = 1, \dots, n$, e $D^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $i, j = 1, \dots, n$. Mostraremos que T é uma aplicação linear isométrica.

Seja $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, então

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}} &= \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{V}} \text{ e} \\ \|Tu\|_{\mathcal{V} \times [L^2(\Omega)]^{m^2}} &= \|u\|_{\mathcal{V}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^n} + \|D^2 u\|_{[L^2(\Omega)]^{m^2}} \\ &= \|u\|_{\mathcal{V}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

É claro que T é uma isometria.

Pondo-se $\mathcal{Z} = T(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$, resulta que \mathcal{Z} é um subespaço de um espaço separável e portanto, também é separável. Sendo T isometria vem que $T^{-1}(\mathcal{Z})$ possui um subconjunto enumerável e denso em $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, o que prova que este último é da mesma forma separável.

Sendo assim, o subespaço $\{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} \text{ em } \Gamma_1\}$ também é separável.

2.4.3 Identidade de Energia

Nosso intuito é provar a seguinte identidade de energia

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} a(x) g(u'(t)) u'(t) \, dx \, dt \\ = \frac{1}{2} \|u'(0)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(0)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T u(0)\|_{\Gamma_1}^2 \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq T$, onde u é uma solução fraca do problema 2.1.

Seja θ_0 a função característica do intervalo $[s, t]$, onde $0 < s < t < T$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno definamos

$$\theta_{\delta}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau \in [s + \delta, t - \delta] \\ 0 & \text{se } \tau \in \mathbb{R} \setminus]s, t[\\ \frac{1}{\delta} \tau - \frac{s}{\delta} & \text{se } \tau \in [s, s + \delta] \\ -\frac{1}{\delta} \tau + \frac{t}{\delta} & \text{se } \tau \in [t - \delta, t] \end{cases} \quad (2.101)$$

cujo gráfico é dado pela figura abaixo:

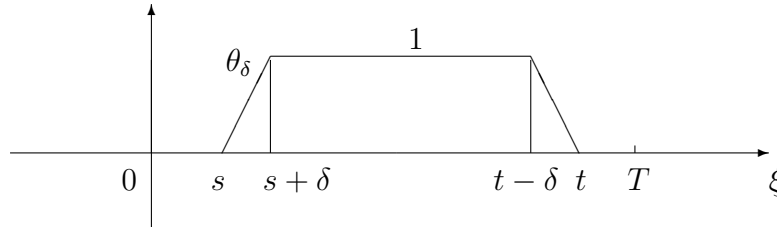


Figura 2.1: Função θ_{δ}

Consideremos η_{ϵ} uma sucessão regularizante par, isto é, $\eta_{\epsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\eta_{\epsilon}) \subset (-\epsilon, \epsilon)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\epsilon} = 1$, $\eta_{\epsilon} \geq 0$ e $\eta_{\epsilon}(\xi) = \eta_{\epsilon}(-\xi)$; $\forall \epsilon > 0$.

Para simplificarmos a notação denotaremos $\theta_{\delta} = \theta$ e $\eta_{\epsilon} = \eta$.

Denotaremos por $\tilde{\psi}$ a extensão de ψ como sendo zero fora do intervalo $[0, T]$.

Como $u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$, $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ temos que $\theta u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$

e $\theta u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ com

$$\begin{aligned} \text{supp}(\theta u) &\subset \text{supp}(\theta) \cap \text{supp}(u) \subset \text{supp}(\theta) = [S, t] \quad \text{e} \\ \text{supp}(\theta u_t) &\subset \text{supp}(\theta) \cap \text{supp}(u_t) \subset \text{supp}(\theta) = [S, t]. \end{aligned}$$

Assim, $v = \eta * (\theta \tilde{u}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V})$ e $\eta * (\theta \tilde{u}_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left[\|\eta * (\theta \tilde{u}_t)\|_\Omega^2 + \|\nabla v\|_\Omega^2 + \|\nabla_T v\|_{\Gamma_1}^2 \right] ds \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\eta * (\theta \tilde{u}_t), (\eta * (\theta \tilde{u}_t))_t)_\Omega + (\nabla v, \nabla v_t)_\Omega + (\nabla_T v, \nabla_T v_t)_{\Gamma_1} \right] ds \quad (2.102) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} v_t &= (\eta * (\theta \tilde{u}))_t = \eta * (\theta' \tilde{u}) + \eta * (\theta \tilde{u}_t) \quad \text{em } C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \\ \Rightarrow \eta * (\theta \tilde{u}_t) &= v_t - \eta * (\theta' \tilde{u}) \\ &= \eta' * (\theta \tilde{u}) - \eta * (\theta' \tilde{u}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\eta * (\theta \tilde{u}_t))_t &= \eta * (\theta' \tilde{u}_t) + \eta * (\theta \tilde{u}_{tt}) \quad \text{em } C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V}') \\ \Rightarrow \eta * (\theta \tilde{u}_{tt}) &= (\eta * (\theta \tilde{u}_t))_t - \eta * (\theta' \tilde{u}_t) \\ &= \eta' * (\theta \tilde{u}_t) - \eta * (\theta' \tilde{u}_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Portanto, $\eta * (\theta \tilde{u}_t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V})$ e $\eta * (\theta \tilde{u}_{tt}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Então, por (2.102) segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{\nabla} u), \eta * (\theta' \widetilde{\nabla} u))_{\Omega} ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{\nabla} u), \nabla(\eta * (\theta \widetilde{u}_t)))_{\Omega} ds}_{N_1} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{u}_t), \eta * (\theta' \widetilde{u}_t))_{\Omega} ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{u}_t), \eta * (\theta \widetilde{u}_{tt}))_{\Omega} ds}_{N_2} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{\nabla}_T u), \eta * (\theta' \widetilde{\nabla}_T u))_{\Gamma_1} ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta \widetilde{\nabla}_T u), \nabla_T(\eta * (\theta \widetilde{u}_t)))_{\Gamma_1} ds}_{N_3}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Definamos

$$\langle A\psi, w \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T \psi \cdot \nabla_T w d\Gamma; \quad \forall \psi, w \in \mathcal{V}. \tag{2.104}$$

Como u satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + ag(u_t) = 0 & \text{em } L^{\infty}(0, T; \mathcal{V}') \\ \partial_{\nu} u = \Delta_{\Gamma_1} u & \text{em } L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)) \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 & \text{em } \Omega; \end{cases}$$

resulta que

$$u_{tt} + Au + ag(u_t) = 0 \quad \text{em } L^{\infty}(0, T; \mathcal{V}'). \tag{2.105}$$

Assim, de (2.104) e (2.105) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= \langle -A\widetilde{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} - (ag(\widetilde{u}_t), \varphi)_{\Omega} \\
&= -(\widetilde{\nabla} u, \nabla \varphi)_{\Omega} - (\widetilde{\nabla}_T u, \nabla_T \varphi)_{\Gamma_1} - (ag(\widetilde{u}_t), \varphi)_{\Omega}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{V})$.

Pondo $\varphi = \eta * \eta * (\theta \widetilde{u}_t)$, observando que η é uma função par que depende unicamente

da variável temporal t , usando a Proposição 1.1.9 e a identidade (2.106), podemos calcular $N_1 + N_2 + N_3$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& N_1 + N_2 + N_3 = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \theta \widetilde{\nabla} u \nabla \underbrace{(\eta * \eta * (\theta \widetilde{u}_t))}_{\varphi} dx ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} \theta \widetilde{\nabla}_T u \nabla_T \varphi d\Gamma ds \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta (\widetilde{\nabla} u, \nabla \varphi)_{\Omega} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \langle \widetilde{u}_{tt}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta (\widetilde{\nabla}_T u, \nabla_T \varphi)_{\Gamma_1} ds \\
& = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta (ag(\widetilde{u}_t), \varphi)_{\Omega} ds \tag{2.107}
\end{aligned}$$

De (2.103), (2.107) e lembrando que $\theta = \theta_{\delta}$, obtemos a primeira identidade

$$\begin{aligned}
0 & = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_{\delta} \widetilde{\nabla} u), \eta * (\theta'_{\delta} \widetilde{\nabla} u))_{\Omega} ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_{\delta} \widetilde{u}_t), \eta * (\theta'_{\delta} \widetilde{u}_t))_{\Omega} ds}_{I_2} + \\
& + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_{\delta} \widetilde{\nabla}_T u), \eta * (\theta'_{\delta} \widetilde{\nabla}_T u))_{\Gamma_1} ds}_{I_3} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{\delta} (ag(\widetilde{u}_t), \varphi)_{\Omega} ds}_{I_4} \tag{2.108}
\end{aligned}$$

O nosso próximo passo é estimar cada termo de (2.108) separadamente quando $\delta \rightarrow 0$ e η permanece fixo.

$$\text{Estimativa de } I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * (\theta_{\delta} a(x) g(\widetilde{u}_t))) (\eta * (\theta_{\delta} \widetilde{u}_t)) dx ds.$$

Desde que $\theta_{\delta} \rightarrow \theta_0$ q.s. em \mathbb{R} e $|\theta_{\delta}(t)|^2 \leq \theta_0(t)$ então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que $\theta_{\delta} \rightarrow \theta_0$ em $L^2(\mathbb{R})$. Logo, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\|\eta * (\theta_{\delta} ag(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega} \rightarrow \|\eta * (\theta_0 ag(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega} \text{ para q.t. } t \in \mathbb{R}. \tag{2.109}$$

Com efeito, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo temos

$$\begin{aligned}
& (\|\eta * (\theta_{\delta} ag(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega} - \|\eta * (\theta_0 ag(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega})^2 \leq \|\eta * (\theta_{\delta} ag(\widetilde{u}_t)) - \eta * (\theta_0 ag(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega}^2 \\
& = \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(t - \xi) |a(x) g(\widetilde{u}_t(x, t))| |\theta_{\delta}(\xi) - \theta_0(\xi)| d\xi \right|^2 dx \\
& \leq C \int_{\Omega} \left[\left(\int_0^T |a(x) g(u_t(x, t))|^2 d\xi \right) \left(\int_0^T |\theta_{\delta}(\xi) - \theta_0(\xi)|^2 d\xi \right) \right] dx
\end{aligned}$$

e a última expressão acima converge para zero quando $\delta \rightarrow 0$, o que prova (2.109).

De maneira análoga segue que

$$\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t)\|_\Omega \rightarrow \|\eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t)\|_\Omega \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}. \quad (2.110)$$

Além disso, temos que

$$\|\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t))\|_\Omega^2 \leq N \quad \text{e} \quad \|\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t)\|_\Omega^2 \leq M \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}; \quad (2.111)$$

onde M e N são constantes positivas independentes de δ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t))\|_\Omega^2 &= \int_\Omega |\eta * (\theta_\delta a(x) g(\widetilde{u}_t))|^2 dx \\ &= \int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(t - \xi) \theta_\delta(\xi) a(x) g(\widetilde{u}_t(\xi)) d\xi \right|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\theta_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \left| \int_0^T a(x) g(u_t(\xi)) d\xi \right|^2 dx \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\theta_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \int_\Omega \left(\int_0^T d\xi \right) \left(\int_0^T |a(x) g(u_t(\xi))|^2 d\xi \right) dx \\ &= T \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\theta_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|a g(u_t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 < N. \end{aligned}$$

Analogamente provamos a segunda afirmação de (2.111).

Desta forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$\|\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t))\|_\Omega \rightarrow \|\eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u}_t))\|_\Omega \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (2.112)$$

$$\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t)\|_\Omega \rightarrow \|\eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t)\|_\Omega \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}). \quad (2.113)$$

Além do mais, temos que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t)) \rightarrow \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u}_t)) \quad \text{q.s em } \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.114)$$

De fato, seja $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, exceto num conjunto de medida nula,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \eta(t - \xi) [\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi)] a(x) g(\widetilde{u}_t(x, \xi)) \, d\xi \\ &= \int_0^T \eta(t - \xi) [\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi)] a(x) g(u_t(x, \xi)) \, d\xi \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\theta_\delta - \theta_0\|_{L^2(0, T)} \|a(x)g(u_t(x))\|_{L^2(0, T)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Também, por (2.112) temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \|\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t))\|_{\Omega}^2 dt \leq \overline{M}, \quad \forall \delta. \quad (2.115)$$

De (2.114), (2.115) e do Lema de Lions decorre que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t)) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u}_t)) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.116)$$

De modo análogo obtemos que

$$\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.117)$$

Combinando (2.112) com (2.116) e (2.113) com (2.117) segue que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u}_t)) \rightarrow \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u}_t)) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e} \quad (2.118)$$

$$\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t) \rightarrow \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t) \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.119)$$

Disso resulta que

$$I_4 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * (\theta_0 a(x) g(\widetilde{u}_t))) (\eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t)) \, dx \, ds \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0. \quad (2.120)$$

Estimativa de $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * (\theta_\delta \nabla u)) (\eta * (\theta'_\delta \nabla u)) \, dx \, ds.$

Podemos decompor I_1 da seguinte forma

$$I_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u})) (\eta * (\theta'_\delta \widetilde{\nabla u})) \, dx \, ds}_{I_5} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * [(\theta_\delta - \theta_0) \widetilde{\nabla u}]) (\eta * (\theta'_\delta \widetilde{\nabla u})) \, dx \, ds}_{I_6}.$$

Como $\theta_\delta \rightarrow \theta_0$ em $L^2(\mathbb{R})$ e como $u \in L^\infty(0, T; \mathcal{V})$ temos que

$$\eta * [(\theta_\delta - \theta_0) \widetilde{\nabla u}] \rightarrow 0 \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \int_0^T \eta(t - \xi) [\theta_\delta - \theta_0] \nabla u(\xi) \, d\xi \right|^2 dx &\leq K^2 \int_{\Omega} \left(\int_0^T |\theta_\delta - \theta_0| |\nabla u(\xi)| \, d\xi \right)^2 dx \\ &\leq K^2 \int_{\Omega} \left(\int_0^T dt \right) \left(\int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 |\nabla u(\xi)|^2 \, d\xi \right) dx \\ &= K^2 T \int_{\Omega} \int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 |\nabla u(\xi)|^2 \, d\xi \, dx \\ &\leq K^2 T \int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 d\xi \|\nabla u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $\delta \rightarrow 0$. Também

$$\begin{aligned} &\|\eta * (\theta'_\delta \widetilde{\nabla u})\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} |\eta * (\theta'_\delta \widetilde{\nabla u})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \int_0^T \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^T |\eta| |\theta'_\delta| |\nabla u| \, d\xi \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^T |\theta'_\delta|^{\frac{1}{2}} |\theta'_\delta|^{\frac{1}{2}} |\nabla u| \, d\xi \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[\left(\int_0^T |\theta'_\delta| \, d\xi \right) \int_{\Omega} \left(\int_0^T |\theta'_\delta| |\nabla u|^2 \, d\xi \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[\|\theta'_\delta\|_{L^1(0, T)} \|\nabla u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \int_0^T |\theta'_\delta| \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= T \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \underbrace{\|\theta'_\delta\|_{L^1(0, T)}}_{=2} \|\nabla u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_6 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Agora, pela definição de θ_δ e Proposição 1.1.9 temos

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} (\eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u)) (\eta * (\theta'_\delta \widetilde{\nabla} u)) \, dx \, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'_\delta (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u), \widetilde{\nabla} u)_{\Omega} \, ds \\ &= \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u), \widetilde{\nabla} u)_{\Omega} \, d\xi - \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u), \widetilde{\nabla} u)_{\Omega} \, ds. \end{aligned}$$

Como $u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$ então a função $s \mapsto (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u(s)), \widetilde{\nabla} u(s))_{\Omega}$ é contínua e portanto integrável. Logo, pelo Teorema da Média obtemos que

$$I_5 \rightarrow (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u(s)), \nabla u(s))_{\Omega} - (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u(t)), \nabla u(t))_{\Omega},$$

quando $\delta \rightarrow 0$. Portanto,

$$I_1 \rightarrow (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u(s)), \nabla u(s))_{\Omega} - (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u(t)), \nabla u(t))_{\Omega}, \quad (2.121)$$

quando $\delta \rightarrow 0$.

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito em I_1 concluímos que

$$I_2 \rightarrow (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t(s)), u_t(s))_{\Omega} - (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t(t)), u_t(t))_{\Omega} \quad \text{e} \quad (2.122)$$

$$I_3 \rightarrow (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u(s)), \nabla_T u(s))_{\Gamma_1} - (\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u(t)), \nabla_T u(t))_{\Gamma_1}, \quad (2.123)$$

quando $\delta \rightarrow 0$. Das convergências (2.120), (2.121), (2.122) e (2.123), lembrando que $\eta = \eta_\epsilon$ e tomando $\rho_\epsilon = \eta_\epsilon * \eta_\epsilon$ obtemos a segunda identidade:

$$\begin{aligned} & \left[(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u), \nabla u)_{\Omega} + (\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t), u_t)_{\Omega} + (\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u), \nabla_T u)_{\Gamma_1} \right]_S^t \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \theta_0 a(x) g(\widetilde{u}_t) (\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t)) \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Tomaremos $\epsilon \rightarrow 0$ na expressão anterior.

Observemos que

$$\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t) \rightarrow \theta_0 \widetilde{u}_t \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

e $\theta_0 a(x)g(u_t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \theta_0 a(x)g(\widetilde{u}_t) (\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t)) \, dx \, ds &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \theta_0 a(x)g(\widetilde{u}_t) \theta_0 \widetilde{u}_t \, dx \, ds \\ &= \int_s^t \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u_t \, dx \, d\xi, \end{aligned} \quad (2.125)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Agora, vamos mostrar que

$$\begin{aligned} &\left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u))(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} + \left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(t), u_t(t) \right)_{\Omega} + \left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u))(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \left(\|u_t(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right), \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

De fato, primeiramente notemos que $\text{supp}(\rho_\epsilon) \subset (-2\epsilon, 2\epsilon)$, $\rho_\epsilon \geq 0$ e

$$\int_0^{+\infty} \rho_\epsilon \, ds = \int_{-\infty}^0 \rho_\epsilon \, ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon \, ds = \frac{1}{2}. \quad (2.127)$$

Todavia, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de (2.127) e como θ_0 é a função característica do intervalo $[s, t]$, segue que $\theta_0(t - \tau) = 0$, para $t - s < \tau < 0$ e $\theta_0(t - \tau) = 1$, para $0 \leq \tau \leq t - s$. Assim, para $0 < \epsilon < \frac{t-s}{2}$,

$$\begin{aligned} &\left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u))(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} + \left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(t), u_t(t) \right)_{\Omega} + \left((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u))(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} \\ &- \frac{1}{2} \left(\|u_t(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla u(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau) \theta_0(t - \tau) \left(\widetilde{\nabla} u(t - \tau), \nabla u(t) \right)_{\Omega} \, d\tau + \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau) \theta_0(t - \tau) \left(\widetilde{u}_t(t - \tau), u_t(t) \right)_{\Omega} \, d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbb{R}} \rho_{\epsilon}(\tau) \theta_0(t - \tau) \left(\widetilde{\nabla_T u}(t - \tau), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} d\tau - \int_0^{+\infty} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(\nabla u(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} d\tau \\
& - \int_0^{+\infty} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(u_t(t), u_t(t) \right)_{\Omega} d\tau - \int_0^{+\infty} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(\nabla_T u(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} d\tau \\
& = \int_0^{t-s} \rho_{\epsilon}(\tau) \underbrace{\theta_0(t - \tau)}_{=1} \left(\nabla u(t - \tau), \nabla u(t) \right)_{\Omega} d\tau + \int_0^{t-s} \rho_{\epsilon}(\tau) \underbrace{\theta_0(t - \tau)}_{=1} \left(u_t(t - \tau), u_t(t) \right)_{\Omega} d\tau \\
& + \int_0^{t-s} \rho_{\epsilon}(\tau) \underbrace{\theta_0(t - \tau)}_{=1} \left(\nabla_T u(t - \tau), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} d\tau - \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(\nabla u(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} d\tau \\
& - \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(u_t(t), u_t(t) \right)_{\Omega} d\tau - \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left(\nabla_T u(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} d\tau \\
& = \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left[\left(\nabla u(t - \tau) - \nabla u(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} + \left(u_t(t - \tau) - u_t(t), u_t(t) \right)_{\Omega} \right. \\
& \left. + \left(\nabla_T u(t - \tau) - \nabla_T u(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.128}$$

Mostraremos que a última expressão da igualdade acima converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
I & = \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left[\left(\nabla u(t - \tau) - \nabla u(t), \nabla u(t) \right)_{\Omega} + \left(u_t(t - \tau) - u_t(t), u_t(t) \right)_{\Omega} \right. \\
& \quad \left. + \left(\nabla_T u(t - \tau) - \nabla_T u(t), \nabla_T u(t) \right)_{\Gamma_1} \right] d\tau \\
& \leq \int_0^{2\epsilon} \rho_{\epsilon}(\tau) \left[\|\nabla u(t - \tau) - \nabla u(t)\|_{\Omega} \|\nabla u(t)\|_{\Omega} + \|(u_t(t - \tau) - u_t(t))\|_{\Omega} \|u_t(t)\|_{\Omega} \right. \\
& \quad \left. + \|\nabla_T u(t - \tau) - \nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1} \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1} \right] d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\left\{ \|\nabla u\|_{C^0(\mathbb{R}_+; [L^2(\Omega)]^n)} + \|u_t\|_{C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))} + \|\nabla_T u\|_{C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_1))} \right\}}_{=M} \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau) \left[\|\nabla u(t - \tau) - \nabla u(t)\|_\Omega + \|(u_t(t - \tau) - u_t(t))\|_\Omega + \|\nabla_T u(t - \tau) - \nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1} \right] d\tau. \quad (2.129)$$

Observemos que, para $\epsilon < 1$,

$$\nabla u \in C^0([0, 2]; [L^2(\Omega)]^n).$$

Logo, $\|\nabla u(\cdot)\|_{[L^2(\Omega)]^n}$ é uniformemente contínua em $[0, 2]$. Assim, para $\xi > 0$ dado, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $t, \sigma \in [0, 2]$ e $|t - \sigma| < \delta_0$ então,

$$\|\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)\|_\Omega < \frac{\xi}{3M}$$

Tomando $\sigma = t - \tau$ temos que $|t - \sigma| < \delta_0$, pois, $|t - \sigma| = |t - t + \tau| = |\tau| < 2\epsilon$. Escolhendo $\epsilon < 1$ suficientemente pequeno tal que $2\epsilon < \delta_0$, vem que $|\tau| < \delta_0$ e, portanto,

$$\|\nabla u(t - \tau) - \nabla u(t)\|_\Omega < \frac{\xi}{3M}. \quad (2.130)$$

Nestas mesmas condições, considerando $\epsilon < 1$,

$$u_t \in C^0([0, 2]; L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \nabla_T u \in C^0([0, 2]; [L^2(\Omega)]^n).$$

Logo, $\|u_t(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla_T u(\cdot)\|_{[L^2(\Omega)]^n}$ são uniformemente contínuas em $[0, 2]$. Assim, para $\xi > 0$ dado, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $t, \sigma \in [0, 2]$ e $|t - \sigma| < \delta_1$ então,

$$\|u_t(t) - u_t(\sigma)\|_\Omega < \frac{\xi}{3M} \quad \text{e} \quad \|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(\sigma)\|_{\Gamma_1} < \frac{\xi}{3M},$$

e, portanto, para $\epsilon < 1$ suficientemente pequeno temos que

$$\|u_t(t - \tau) - u_t(t)\|_\Omega < \frac{\xi}{3M} \quad \text{e} \quad \|\nabla_T u(t - \tau) - \nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1} < \frac{\xi}{3M}. \quad (2.131)$$

Agora, para $\xi > 0$ dado seja $0 < h < \min\{1, \frac{\delta_0}{2}, \frac{\delta_1}{2}\}$. Então, por (2.129), (2.130) e (2.131) temos que

$$\begin{aligned} |I - 0| &< M \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau) \left[\frac{\xi}{3M} + \frac{\xi}{3M} + \frac{\xi}{3M} \right] d\tau \\ &< \xi \underbrace{\int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau) d\tau}_{=1}. \end{aligned}$$

Enfim, concluimos que para $\xi > 0$ dado, existe $h > 0$ tal que se $|\epsilon| < h$ então $|I - 0| < \xi$, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I = 0;$$

o que prova o desejado em (2.126).

Procedendo da mesma forma feita acima, com a modificação que a integral na expressão (2.128) será calculada no intervalo $(-\infty, 0]$, resulta

$$\begin{aligned} &((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla} u))(s), \nabla u(s))_\Omega + ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(s), u_t(s))_\Omega + ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla}_T u))(s), \nabla_T u(s))_{\Gamma_1} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (\|u_t(s)\|_\Omega^2 + \|\nabla u(s)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u(s)\|_{\Gamma_1}^2), \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Passando o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ em (2.124), de (2.125) - (2.132) resulta que

$$\left[\frac{1}{2} (\|u_t(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1}^2) \right]_s^t = - \int_s^t \int_\Omega a(x) g(u_t(\xi)) u_t(\xi) dx d\xi, \quad (2.133)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [\|u_t(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u(t)\|_{\Gamma_1}^2] + \int_s^t \int_\Omega a(x) g(u_t(\xi)) u_t(\xi) dx d\xi \\ &= \frac{1}{2} [\|u_t(s)\|_\Omega^2 + \|\nabla u(s)\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u(s)\|_{\Gamma_1}^2]. \end{aligned} \quad (2.134)$$

De (2.58) e (2.59) temos que $u \in C^0([0, T]; \mathcal{V})$ e $u' \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, para todo $T > 0$, portanto, tomando o limite quando $s \rightarrow 0$ na expressão acima obtemos a identidade desejada.

Estabilização

3.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma$, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e com ambos Γ_i , $i = 0, 1$, não vazios, fechados e disjuntos. Seja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função regular que será construída posteriormente. Definamos ω_1 como sendo uma vizinhança de Γ_1 contida em $\bar{\Omega}$ e subdividamos a fronteira Γ_0 em duas partes: $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$ e $\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*$. Agora, seja ω_0 uma vizinhança de $\bar{\Gamma}_0^*$ contida em $\bar{\Omega}$, tal que $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$ e ponhamos $\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x); \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Assumamos as seguintes hipóteses:

(H.1) A função não linear $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ é monótona crescente;
- (ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;
- (iii) Existem k e K constantes positivas tais que $ks \leq g(s) \leq Ks$, $|s| > 1$;

(H.2) $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa tal que

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{q.s. em } \omega^* = \omega_0 \cup \omega_1.$$

Se u é a única solução fraca global do problema (3.1), definimos a energia correspondente por

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [|u_t|^2 + |\nabla u|^2] dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \right\}. \quad (3.2)$$

Para cada solução de (3.1), a seguinte identidade é válida

$$E(t_2) - E(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x) g(u_t) u_t dx dt, \quad \forall t_2 > t_1 \geq 0. \quad (3.3)$$

De modo a introduzir o principal resultado deste capítulo, definiremos a seguir algumas funções auxiliares.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava estritamente crescente, com $h(0) = 0$, e tal que

$$h(g(s)s) \geq s^2 + g^2(s); \quad |s| \leq 1. \quad (3.4)$$

A função h pode ser construída posto que g é contínua e a condição (3.4) é “local” em s . Na sequência, definamos

$$r(s) = h \left(\frac{s}{\text{med}(Q_T)} \right); \quad (3.5)$$

para algum T que será determinado posteriormente. Como r é monótona crescente, $cI + r$ é invertível para todo $c \geq 0$. Seja L uma constante positiva e ponhamos

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(Ls). \quad (3.6)$$

Então, segue que p é positiva, contínua e estritamente crescente, com $p(0) = 0$. Finalmente, definamos

$$\rho(s) = s - (I + p)^{-1}(s). \quad (3.7)$$

Para maiores detalhes sobre as funções auxiliares definidas acima, sugerimos ao leitor a referência [22].

Enunciaremos no que segue o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Suponha que as hipóteses (H.1) e (H.2) sejam satisfeitas e que (3.4) se verifique. Seja u a solução fraca do problema (3.1). Então, existe um $T_0 > 0$, suficientemente grande, tal que para qualquer $T > T_0$, a energia $E(t)$ definida em (3.2) satisfaz*

$$E(t) \leq S \left(\frac{t}{T} - 1 \right), \quad \forall t > T; \quad (3.8)$$

onde $S(t)$ é solução da equação diferencial ordinária dada por

$$\frac{dS}{dt}(t) + \rho(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \quad (3.9)$$

com ρ definido em (3.7). Além disso, $S(t)$ decresce monotonicamente e $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$. As constantes L e c dadas em (3.6), dependerão, respectivamente, de $E(0)$, $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\text{med}(\Gamma)$, $\text{med}(\Omega)$, T , e de $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$, K , k , $\text{med}(Q_T)$.

3.2 Prova do Teorema 3.1

Ao longo de toda a prova, lidaremos com soluções regulares e, então, por densidade a estimativa (3.8) poderá ser estendida às soluções fracas.

Usaremos as seguintes identidades

$$\nabla u = \partial_\nu u \nu + \nabla_T u, \quad (3.10)$$

$$q \cdot \nabla u = \partial_\nu u (q \cdot \nu) + q \cdot \nabla_T u, \quad (3.11)$$

$$|\nabla u|^2 = (\partial_\nu u)^2 + |\nabla_T u|^2, \quad (3.12)$$

para maiores detalhes ver seção 1.9 das Preliminares.

3.2.1 O Método dos Multiplicadores

Iniciaremos com a seguinte identidade:

Lema 3.2.1. *Seja q um campo vetorial regular em Ω de classe $[C^1(\overline{\Omega})]^n$. Então, para cada solução regular u do problema (2.1) temos a identidade*

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (q \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (q \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (q \cdot \nu) [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] \, d\Gamma \, dt \\
 & = \left[\int_\Omega u_t q \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u \, dx \, dt \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} q) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Demonstração: Seja u uma solução regular do problema (3.1). Então, do capítulo 2 temos que

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Multiplicando a equação acima por $(q \cdot \nabla u) \in L^2(0, T; \Omega)$ e integrando em $]0, T[\times \Omega$, obtemos

$$\underbrace{\int_0^T \int_\Omega u_{tt} (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt}_{N_1} - \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \Delta u (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt}_{N_2} + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt = 0 \tag{3.14}$$

Integrando N_1 por partes no tempo, temos

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \int_0^T \int_\Omega u_{tt} (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
 &= \left[\int_\Omega u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T - \underbrace{\int_0^T \int_\Omega u_t (q \cdot \nabla u_t) \, dx \, dt}_{N_3}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pondo $q(x) = (q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$, $\nabla u_t = \left(\frac{\partial u_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_t}{\partial x_n} \right)$, aplicando a F3rmula de Gauss em N_3 , para $i = 1, \dots, n$, e como $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, segue que

$$\begin{aligned}
N_3 &= \int_0^T \int_{\Omega} u_t (q \cdot \nabla u_t) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} u_t \left(\sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial u_t}{\partial x_i} \right) dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_t)^2 q_i dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (u_t)^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} (u_t)^2 q_i \nu_i d\Gamma dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) (u_t)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

De (3.15) e (3.16) temos que

$$N_1 = \left[\int_{\Omega} u_t (q \cdot \nabla u) dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) (u_t)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt. \tag{3.17}$$

Por outro lado, aplicando a F3rmula de Green em N_2 , obtemos

$$\begin{aligned}
N_2 &= - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u (q \cdot \nabla u) dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (q \cdot \nabla u) dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} u (q \cdot \nabla u) d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Usando a identidade (3.11) e o fato que $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, segue que

$$N_2 = \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (q \cdot \nabla u) dx dt}_{N_4} - \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u (q \cdot \nabla_T u) d\Gamma dt. \tag{3.18}$$

Como $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, temos

$$\begin{aligned}
N_4 &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (q \cdot \nabla u) dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (q \cdot \nabla u) dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + q_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx dt + \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} q_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u dx dt + \underbrace{\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} q_j dx dt}_{N_5}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Pela Fórmula de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
N_5 &= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} q_j dx dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 q_j dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^2 q_j dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} |\nabla u|^2 q_j \nu_j d\Gamma dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |\nabla u|^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Usando a identidade (3.12) e o fato que $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, temos que

$$\begin{aligned}
N_5 &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu) d\Gamma dt. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

De (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21), como $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, resulta que

$$\begin{aligned}
N_2 = & \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u (q \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

De (3.14), (3.17) e (3.22) concluímos que

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) (u_t)^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} q) |\nabla u|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_{\nu} u)^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu) \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u (q \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt = 0,
\end{aligned}$$

o que prova o lema. □

Lema 3.2.2. *Seja u uma solução regular do problema (3.1) e $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\int_{\Omega} u_t \xi u \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} \xi [|\nabla u|^2 - u_t^2] \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} u (\nabla u \cdot \nabla \xi) \, dx \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u \xi u \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_t) \xi u \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Demonstração: Seja u uma solução regular do problema (3.1). Então, do capítulo 2 temos que

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Multiplicando a equação acima por $\xi(x)u(x, t) \in L^2(0, T; \Omega)$ e integrando em $]0, T[\times \Omega$,

obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_{tt} \xi u \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u \xi u \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) \xi u \, dx \, dt = 0.$$

Integrando por partes e aplicando a F3rmula de Green, decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_{\Omega} u_t \xi u \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} u_t \xi u_t \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\xi u) \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u \xi u \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) \xi u \, dx \, dt \\ &= \left[\int_{\Omega} u_t \xi u \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} \xi u_t^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla u|^2 \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} u (\nabla u \cdot \nabla \xi) \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u \xi u \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) \xi u \, dx \, dt, \end{aligned}$$

provando o desejado em (3.23). \square

Substituindo $q = \nabla f$ em (3.13), onde $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ 3 uma fun33o regular, e $\xi = \alpha > 0$, onde α 3 uma constante positiva, em (3.23) e somando os resultados obtidos, deduzimos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u (\nabla f \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\nabla f \cdot \nu) (\partial_{\nu} u)^2 \, d\Gamma \, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f \cdot \nu) [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_{\nu} u)^2] \, d\Gamma \, dt + \underbrace{\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u u \, d\Gamma \, dt}_{F_1} \\ &= \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \alpha \left[\int_{\Omega} u_t u \, dx \right]_0^T + \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\nabla f) \cdot \nabla u \, dx \, dt}_{F_2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla f) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt}_{F_3} + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 - u_t^2] \, dx \, dt \\ &+ \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} u (\nabla u \cdot \nabla \alpha) \, dx \, dt}_{=0} + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando a condição de fronteira, temos

$$F_1 = \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u \, d\Gamma \, dt = \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u u \, d\Gamma \, dt = -\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt. \quad (3.25)$$

Também,

$$\nabla(\nabla f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} = Hess(f).$$

Logo,

$$F_2 = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\nabla f) \cdot \nabla u \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u \, dx \, dt. \quad (3.26)$$

E, como

$$div(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \Delta f,$$

temos que

$$F_3 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} div(\nabla f) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt. \quad (3.27)$$

Além disso,

$$\nabla f \cdot \nu = \partial_\nu f \quad \text{e} \quad (3.28)$$

$$\nabla f \cdot \nabla_T u = (\partial_\nu f \nu + \nabla_T f) \cdot \nabla_T u = \nabla_T f \cdot \nabla_T u. \quad (3.29)$$

Substituindo (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) em (3.24), resulta que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] \, d\Gamma \, dt \\
& = \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\Delta f}{2} (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt \\
& \quad + \alpha \int_0^T \int_\Omega [|\nabla u|^2 - u_t^2] \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt \\
& \quad + \left[\int_\Omega u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \alpha \left[\int_\Omega u_t u \, dx \right]_0^T \\
& \quad + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) u \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.2 Análise dos Termos de Fronteira

Lembremos que $\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$ é uma vizinhança de $\Gamma_0^* \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$, ω_0 é vizinhança de $\overline{\Gamma_0^*}$, ω_1 é vizinhança de Γ_1 , ambas contida em $\overline{\Omega}$, de modo que $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$. Definamos

$$d = d(\Omega \setminus \omega^*; \Gamma_0^* \cup \Gamma_1) > 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{3\varepsilon}{2} < d$. Consideremos $\omega \subset \omega^*$ um “colar” tal que

$$d(\omega \cap \omega_0, \Gamma_0^*) < \frac{3\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(\omega \cap \omega_1, \Gamma_1) < \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Consideremos também um “sub-colar” ω_ε tal que $\omega_\varepsilon \subset \omega$ e ω_ε é uma vizinhança suave de $\Gamma_0^* \cup \Gamma_1$ contida em $\overline{\Omega}$ com a espessura maior que $\frac{\varepsilon}{2}$ mas menor que ε :

$$\frac{\varepsilon}{2} < d(\Omega \setminus \omega_\varepsilon; \Gamma_0^* \cup \Gamma_1) \quad \text{e} \quad \sup_{x \in \omega_\varepsilon} d(x, \Gamma_0^* \cup \Gamma_1) < \varepsilon.$$

Denotemos também,

$$V = \Omega \setminus \omega_\varepsilon.$$

Uma simples secção do domínio com as vizinhanças ω_ε e ω está representada na Figura 3.1.

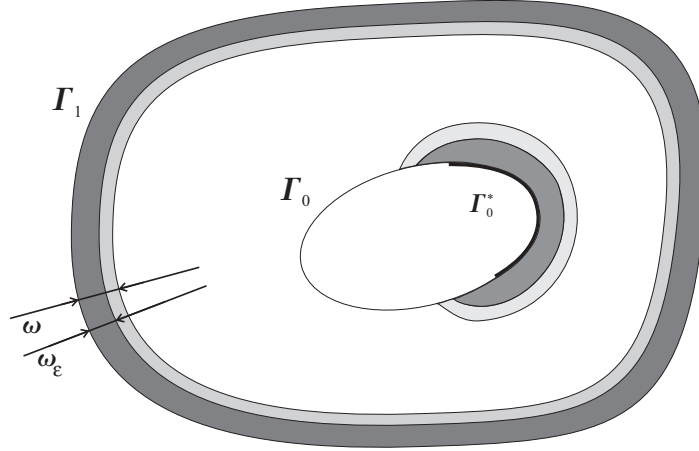


Figura 3.1: $\omega_\varepsilon \subset \omega$: colares contidos em $\bar{\Omega}$.

Definamos uma função auxiliar $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ de modo que

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{em } V, \\ \psi = 1 & \text{em } \Gamma_1 \text{ e } \psi = 1 \text{ em } \Gamma_0^*, \\ 0 \leq \psi \leq 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Substituindo $q = \psi \nabla f$ na identidade (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \psi (\nabla f \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \psi (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt}_{F_4} \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi (\nabla f \cdot \nu) [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] \, d\Gamma \, dt \\ & = \left[\int_\Omega u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (\psi \nabla f) \cdot \nabla u \, dx \, dt}_{F_5} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt}_{F_6} + \int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_t) \psi(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt. \quad (3.32)$$

Podemos escrever $\Gamma_0 = \Gamma_0^* \cup \{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*\}$ e então,

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \psi(\nabla f \cdot \nu)(\partial_{\nu} u)^2 d\Gamma dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0^*} \psi(\nabla f \cdot \nu)(\partial_{\nu} u)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*} \psi(\nabla f \cdot \nu)(\partial_{\nu} u)^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Também, lembrando que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u dx dt = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx,$$

temos que

$$\begin{aligned} F_5 &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\psi \nabla f) \cdot \nabla u dx dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\psi \partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^T \left[\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \right] dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \psi \nabla u \cdot \operatorname{Hess}(f) \cdot \nabla u dx dt. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Além disso, como

$$\operatorname{div}(\psi \nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\psi \partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \nabla \psi \cdot \nabla f + \psi \Delta f,$$

segue que

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \psi \cdot \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Da definição de ψ , de (3.32) - (3.35) resulta que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (\nabla f \cdot \nabla_T u) d\Gamma dt \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt}_{F_7} + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*} \psi (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f \cdot \nu) [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] d\Gamma dt \\
& = \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi) (\nabla f \cdot \nabla u) dx dt \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f) (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Como $\Gamma_0^* = \Gamma_0 \setminus \{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
F_7 & = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt \\
& = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Portanto, de (3.36), (3.37) e considerando (3.28) e (3.29), decorre que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] d\Gamma dt \\
& = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*} \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*} \psi \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi) (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt \quad (3.38) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Como

$$\partial_\nu f \leq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*,$$

e, sendo $0 \leq \psi \leq 1$, de (3.38) resulta que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \, d\Gamma \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \partial_\nu f (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f [u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2] \, d\Gamma \, dt \\
& \leq \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi) (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt \quad (3.39) \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f) (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Substituindo (3.39) em (3.30) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\Delta f}{2} (u_t^2 - |\nabla u|^2) \, dx \, dt \\
& + \alpha \int_0^T \int_\Omega [|\nabla u|^2 - u_t^2] \, dx \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \, dt \\
& \leq - \left[\int_\Omega u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T - \alpha \left[\int_\Omega u_t u \, dx \right]_0^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u dx dt \\
& + \left[\int_{\omega_{\varepsilon}} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt \\
& + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} \psi \nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} (\nabla \psi \cdot \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} a(x)g(u_t)\psi(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Lembrando que $V = \Omega \setminus \omega_{\varepsilon}$, provaremos que existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$, escolhidas adequadamente, de modo que para f satisfazendo algumas propriedades apropriadas decorre que

$$\begin{aligned}
C \left[\int_0^T \int_V (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx dt \right] & \leq \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_V \left[\nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] dx dt.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

De fato, consideremos a função $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x - x_0|^2 & \text{em } V, \\ f \text{ é regular} & \text{em } \bar{\Omega}, \\ \partial_{\nu} f > 0 & \text{em } \Gamma_0^*, \\ \partial_{\nu} f \leq 0 & \text{em } \Gamma_0 \setminus \Gamma_0^*, \end{cases} \tag{3.42}$$

onde $x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$ é um ponto fixo em \mathbb{R}^n . Então, se $x \in V$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (x_i - x_{0_i}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 1, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = n,$$

$$Hess(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Escolhendo $\alpha \in \left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\right)$, isto é,

$$1 - \frac{n}{2} + \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \frac{n}{2} - \alpha > 0,$$

decorre que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 dx dt + \int_0^T \int_V \left[\nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] dx dt \\ &= \left(\frac{n}{2} - \alpha \right) \int_0^T \int_V u_t^2 dx dt + \left(1 + \alpha - \frac{n}{2} \right) \int_0^T \int_V |\nabla u|^2 dx dt \\ &\geq C \left[\int_0^T \int_V (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx dt \right], \end{aligned}$$

onde $C = C(f)$, o que prova o desejado em (3.41).

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 dx dt + \int_0^T \int_V \left[\nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] dx dt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega \left[\nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u dx dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\Delta f}{2} (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\ &+ \alpha \int_0^T \int_\Omega [|\nabla u|^2 - u_t^2] dx dt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Portanto, de (3.40), (3.41) e (3.43), tomando $C_1 = \min\{C, \alpha\}$ segue que

$$\begin{aligned} & C_1 \left[\int_0^T \int_\Omega [|\nabla u|^2 + u_t^2] dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt \right] \\ &\leq C \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} [|\nabla u|^2 + u_t^2] dx dt - \left[\int_\Omega u_t \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T - \alpha \left[\int_\Omega u_t u dx \right]_0^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u dx dt \\
& + \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T + \underbrace{\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt}_{F_8} \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u dx dt}_{F_9} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt}_{F_{10}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt}_{F_{11}} + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x)g(u_t)\psi(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Além disso, definindo

$$M = \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \psi(x)| \quad \text{e} \quad R = \max_{x \in \bar{\Omega}} \{ |\nabla f(x)|, |\Delta f(x)|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|; i, j = 1, \dots, n \} \tag{3.45}$$

temos que

$$\begin{aligned}
& F_8 + F_9 + F_{10} + F_{11} = \\
& \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \underbrace{\psi}_{\leq 1} \nabla u \cdot \text{Hess}(f) \cdot \nabla u dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f)(u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \underbrace{\psi}_{\leq 1} \Delta f (u_t^2 - |\nabla u|^2) dx dt \\
& \leq MR \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt + \frac{R(n+1)}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt \\
& + \frac{MR}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt + \frac{R}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt \\
& \leq C_2 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx dt,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $C_2 = C_2\{M, R, n\}$.

Sendo $E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |u_t|^2] dx dt + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt \right\}$, substituindo (3.46) em (3.44), resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(t) dt &\leq C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} [|\nabla u|^2 + |u_t|^2] dx dt \\
&\quad - C_3 \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T - C_3 \left[\int_{\Omega} u_t u dx \right]_0^T \\
&\quad - C_3 \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt - C_3 \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u dx dt \\
&\quad + C_3 \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T + C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x)g(u_t)\psi(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde C_3 é uma constante positiva que depende de C, C_1 e C_2 .

Nosso próximo passo é estimar os termos do lado direito da desigualdade acima, em função do termo dissipativo $\int_0^T \int_{\Omega} a(x)(u_t^2 + g(u_t)^2) dx dt$.

- *Estimativa para $I_1 = \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx dt$.*

Da Desigualdade de Hölder, levando em conta (3.45) e considerando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{4\delta} + \delta b^2$, onde δ é um número positivo, obtemos

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |[a(x)]^{\frac{1}{2}}g(u_t) [a(x)]^{\frac{1}{2}}(\nabla f \cdot \nabla u)| dx dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\Omega} a(x)|g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} a(x)|\nabla f|^2|\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} R \int_0^T \left(\int_{\Omega} a(x)|g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|g(u_t)|^2 dx dt + \delta \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \\
&\quad + \delta \int_0^T \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u_t|^2) dx + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \right] dt \\
&= \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + 2\delta \int_0^T E(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

- *Estimativa para $I_2 = \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) u dx dt$.*

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_0^T \int_\Omega |[a(x)]^{\frac{1}{2}} g(u_t) [a(x)]^{\frac{1}{2}} u| dx dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega a(x) |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \lambda_1 \int_0^T \left(\int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^2}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + \delta \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \lambda_1^2}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + 2\delta \int_0^T E(t) dt,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

onde λ_1 é a constante positiva proveniente da equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

- *Estimativa para $I_3 = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) dx dt$.*

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |[a(x)]^{\frac{1}{2}} g(u_t) [a(x)]^{\frac{1}{2}} \underbrace{\psi}_{\leq 1} (\nabla f \cdot \nabla u)| dx dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x) |\nabla f|^2 |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} R \int_0^T \left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + \delta \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt \quad (3.50) \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + 2\delta \int_0^T E(t) dt.
\end{aligned}$$

Denotaremos

$$\chi = -C_3 \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T - C_3 \left[\int_{\Omega} u_t u dx \right]_0^T + C_3 \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u dx \right]_0^T. \quad (3.51)$$

Inserindo (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned}
(1 - 6\delta C_3) \int_0^T E(t) dt &\leq |\chi| + (2R^2 + \lambda_1^2) C_3 \frac{\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}{4\delta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \\
&\quad + C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} [|\nabla u|^2 + u_t^2] dx dt. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} u_t^2 dx dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) u_t^2 dx dt. \quad (3.53)$$

Assim, escolhendo δ suficientemente pequeno, isto é, de forma que $(1 - 6\delta C_3) > 0$, de (3.52) e (3.53) decorre que

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(t) dt &\leq C_4 |\chi| + C_4 \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \\
&\quad + C_4 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} [|\nabla u|^2 + a(x) u_t^2] dx dt, \quad (3.54)
\end{aligned}$$

onde $C_4 = C_4 \{C_3, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, \lambda_1, R, a_0^{-1}\}$.

Resta estimar a quantidade $\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt$ em função do termo dissipativo

$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) (u_t^2 + g(u_t)^2) dx dt$. Para isto, construiremos outra função auxiliar.

Primeiro, seja $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\eta}(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \leq 0, \\ (s-1)^2 & \text{se } s \in [1/2, 1], \\ 0 & \text{se } s > 1. \end{cases}$$

e está definida em $(0, 1/2)$ de tal forma que $\tilde{\eta}$ é uma função não-crescente de classe C^1 . Para $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{\eta}_{\varepsilon}(s) := \tilde{\eta}(\frac{s}{\varepsilon})$. Em seguida, definamos $\eta_{\varepsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \omega_{\varepsilon}, \\ \tilde{\eta}_{\varepsilon}(d(x, \overline{\omega_{\varepsilon}})) & \text{se } x \in \omega \setminus \omega_{\varepsilon}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, existe uma constante $\overline{M} > 0$ que não depende de ε tal que

$$\frac{|\nabla \eta_{\varepsilon}(x)|^2}{\eta_{\varepsilon}(x)} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \quad \forall x \in \omega. \quad (3.55)$$

De fato, se $x \in \omega_{\varepsilon}$ a desigualdade acima é trivial. Se $x \in \omega \setminus \omega_{\varepsilon}$, então, como $\overline{\omega_{\varepsilon}}$ é fechado, temos

$$d(x, \overline{\omega_{\varepsilon}}) = \inf \{ \|x - y\|; y \in \overline{\omega_{\varepsilon}} \} = \|x - y_0(x)\|, \quad \text{para algum } y_0(x) \in \overline{\omega_{\varepsilon}}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} d(x, \overline{\omega_{\varepsilon}}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \|x - y_0(x)\| = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_{0_i}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x))}{\|x - y_0(x)\|}.$$

Logo, para $x \in \omega \setminus \omega_{\varepsilon}$,

$$|\nabla \eta_{\varepsilon}(x)|^2 = |\nabla \tilde{\eta}_{\varepsilon}(d(x, \overline{\omega_{\varepsilon}}))|^2 = \frac{|\tilde{\eta}'_{\varepsilon}(d(x, \overline{\omega_{\varepsilon}}))|^2}{\|x - y_0(x)\|^2} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_{0_i}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x)) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{n-1} \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))|^2}{\|x - y_0(x)\|^2} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_{0_i}(x))^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x)) \right)^2 \right] \\
&\leq 2^{n-1} \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))|^2}{\|x - y_0(x)\|^2} \|x - y_0(x)\|^2 \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x)) \right)^2 \\
&= 2^{n-1} |\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))|^2 \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x)) \right)^2.
\end{aligned}$$

Como Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^n com fronteira Γ regular, ou seja, de classe C^∞ , temos que se $x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon$ então $y_0(x)$ é univocamente determinado por

$$y_0(x) = x + z\nu(y_0(x)),$$

onde $\nu(y_0(x))$ é a normal à $\partial\omega_\varepsilon$ em $y_0(x)$, $z \in]\varepsilon, \frac{3\varepsilon}{2}[$ e $y_0(x)$ é de classe C^∞ e, portanto, a quantidade $\sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (x_i - y_{0_i}(x)) \right)^2$ é limitada em $\overline{\Omega}$. Para maiores detalhes ver Lema 1.9.1 das Preliminares.

De modo a garantirmos que tal limitação independa de $\varepsilon > 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 1$. Então concluímos que para $x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon$, $\exists M^* > 0$ tal que

$$|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2 \leq M^* |\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))|^2;$$

ou ainda,

$$\frac{|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} \leq M^* \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega}_\varepsilon))}; \quad \forall x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon. \quad (3.56)$$

Agora, como $\tilde{\eta} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\tilde{\eta} \neq 0$ para $s < 1$, segue que

$$s \longmapsto \frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(x)} \quad (3.57)$$

é contínua em $(-\infty, 1)$.

Sendo $\tilde{\eta}(s) = 1$ em $(-\infty, 0)$, então $\tilde{\eta}'(s) = 0$ em $(-\infty, 0)$, portanto

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} = \frac{0}{1} = 0 \text{ em } (-\infty, 0). \quad (3.58)$$

No intervalo compacto $[0, 1/2]$ existe $M_1 > 0$ tal que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} \leq M_1; \quad \forall s \in [0, 1/2]. \quad (3.59)$$

No intervalo $]1/2, 1[$ temos que $\tilde{\eta}(s) = (s - 1)^2$, logo

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} = \frac{4(s - 1)^2}{(s - 1)^2} = 4; \quad \forall s \in (1/2, 1). \quad (3.60)$$

Pondo $\overline{M} = \max\{M_1, 4\}$ resulta de (3.58), (3.59) e (3.60), que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} \leq \overline{M}; \quad \forall s \in (-\infty, 1). \quad (3.61)$$

Da definição de $\tilde{\eta}_\varepsilon$ notemos que

$$\frac{[\tilde{\eta}'_\varepsilon(s)]^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(s)} = \frac{\left\{ \left[\tilde{\eta} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \right]' \right\}^2}{\tilde{\eta} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)} = \frac{[\tilde{\eta}' \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon}]^2}{\tilde{\eta} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{[\tilde{\eta}' \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)]^2}{\tilde{\eta} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)}, \quad (3.62)$$

e de (3.61) resulta que se $s < \varepsilon$ então $\frac{s}{\varepsilon} < 1$ e, portanto,

$$\frac{[\tilde{\eta}' \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)]^2}{\tilde{\eta} \left(\frac{s}{\varepsilon} \right)} \leq \overline{M}; \quad \forall s < \varepsilon. \quad (3.63)$$

De (3.62) e (3.63) vem então que

$$\frac{[\tilde{\eta}'_\varepsilon(s)]^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(s)} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \quad \forall s < \varepsilon. \quad (3.64)$$

Da definição de ω_ε e de ω , observemos que se $x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon$, então $d(x, \overline{\omega_\varepsilon}) < \varepsilon$. Logo, de (3.64) temos

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \quad \forall x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon. \quad (3.65)$$

De (3.56) e (3.65) pondo $M = M^* \overline{M}$, segue que

$$\frac{|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} \leq M^* \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}, \quad \forall x \in \omega \setminus \omega_\varepsilon, \quad (3.66)$$

o que prova o desejado em (3.55).

Como η_ε é igual a 1 em ω_ε e tem suporte em ω , tomando $\xi = \eta_\varepsilon$ na identidade (3.23), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |\nabla u|^2 &= - \left[\int_\omega u_t \eta_\varepsilon u \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \, dx \, dt - \int_0^T \int_\omega u (\nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon) \, dx \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \underbrace{\eta_\varepsilon}_{=1} u \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) \eta_\varepsilon u \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Vamos estimar os termos do lado direito de (3.67).

- *Estimativa para $P_1 = \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \, dx \, dt$.*

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ q. s. em ω e $\eta_\varepsilon \leq 1$, temos

$$P_1 = \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \, dx \, dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\omega a(x) u_t^2 \, dx \, dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\Omega a(x) u_t^2 \, dx \, dt. \quad (3.68)$$

- *Estimativa para $P_2 = \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u \eta_\varepsilon \, dx \, dt$.*

Da Desigualdade de Hölder e considerando a estimativa $ab \leq \frac{a^2}{4\beta} + \beta b^2$, onde β é um

número positivo, obtemos

$$\begin{aligned}
|P_2| &\leq \int_0^T \int_{\omega} |[a(x)]^{\frac{1}{2}} g(u_t) [a(x)]^{\frac{1}{2}} u| \underbrace{|\eta_{\varepsilon}|}_{\leq 1} dx dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega} a(x) |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \lambda_1 \int_0^T \left(\int_{\omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.69) \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \lambda_1^2}{4\beta} \int_0^T \int_{\omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + \beta \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt \\
&\leq \frac{\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \lambda_1^2}{4\beta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + 2\beta \int_0^T E(t) dt,
\end{aligned}$$

- *Estimativa para $P_3 = \int_0^T \int_{\omega} u(\nabla u \cdot \nabla \eta_{\varepsilon}) dx dt$.*

Considerando (3.55) e a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
|P_3| &\leq \int_0^T \int_{\omega} \sqrt{\eta_{\varepsilon}} |\nabla u| \frac{|\nabla \eta_{\varepsilon}|}{\sqrt{\eta_{\varepsilon}}} |u| dx dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\omega} \frac{1}{2} \left[\eta_{\varepsilon} |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla \eta_{\varepsilon}|^2}{\eta_{\varepsilon}} |u|^2 \right] dx dt \quad (3.70) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_{\omega} \eta_{\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \frac{M}{\varepsilon^2} \int_{\omega} |u|^2 dx \right] dt
\end{aligned}$$

- *Estimativa para $P_4 = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u u d\Gamma dt$.*

Da condição de fronteira do problema (3.1), isto é, $\partial_{\nu} u = \Delta_{\Gamma_1} u$ em Γ_1 , temos

$$P_4 = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u u d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u u d\Gamma dt = - \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\Gamma dt \leq 0. \quad (3.71)$$

Combinando (3.67) - (3.71) chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} \eta_{\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt &\leq |\mathcal{Y}| + \frac{\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \lambda_1^2}{4\beta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt + 2\beta \int_0^T E(t) dt \\ &+ \frac{M}{2\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega} |u|^2 dx dt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |u_t|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde

$$\mathcal{Y} = - \left[\int_{\omega} u_t \eta_{\varepsilon} u dx \right]_0^T. \quad (3.73)$$

Substituindo (3.72) em (3.54) e considerando que

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon}} \underbrace{\eta_{\varepsilon}}_{=1} |\nabla u|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} \eta_{\varepsilon} |\nabla u|^2 dx dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (1 - 4C_4\beta) \int_0^T E(t) dt &\leq C_4|\chi| + 2C_4|\mathcal{Y}| + \left(1 + 2\frac{\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)} \lambda_1^2}{4\beta}\right) C_4 \int_0^T \int_{\omega} a(x) |g(u_t)|^2 dx dt \\ &+ \frac{C_4 M}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega} |u|^2 dx dt + (2a_0^{-1} + 1) C_4 \int_0^T \int_{\omega} a(x) u_t^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Escolhendo β suficientemente pequeno, de modo que $(1 - 4C_4\beta) > 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq C_5|\chi| + C_5|\mathcal{Y}| + C_5 \int_0^T \int_{\omega} [a(x) |g(u_t)|^2 + a(x) u_t^2] dx dt \\ &+ \frac{C_5 M}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega} |u|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde C_5 é uma constante positiva que depende de C_4 , $\|a\|_{L^{\infty}(\Omega)}$, λ_1 e de a_0^{-1} .

Por outro lado, de (3.51) e (3.73), temos

$$\begin{aligned} C_5|\mathcal{X}| + C_5|\mathcal{Y}| &= C_5 \left| C_3 \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T + C_3 \left[\int_{\Omega} u_t u \, dx \right]_0^T \right. \\ &\quad \left. + C_3 \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T \right| + C_5 \left| - \left[\int_{\omega} u_t \eta_\varepsilon u \, dx \right]_0^T \right|. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Estimaremos cada termo do lado direito da igualdade (3.76) em função de $E(t)$.

- *Estimativa para $L_1 = \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T$.*

Usando (3.45) e as desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, decorre que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |u_t| |\nabla f| |\nabla u| \, dx \\ &\leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) \, dx + \frac{R}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \\ &= R E(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$L_1 = \left[\int_{\Omega} u_t \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T \leq R (E(0) + E(T)). \quad (3.77)$$

Analogamente, provamos que

$$L_2 = \left[\int_{\Omega} u_t u \, dx \right]_0^T \leq \lambda_1^2 (E(0) + E(T)), \quad (3.78)$$

$$L_3 = \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \psi \nabla f \cdot \nabla u \, dx \right]_0^T \leq R (E(0) + E(T)), \quad (3.79)$$

$$L_4 = - \left[\int_{\omega} u_t \eta_\varepsilon u \, dx \right]_0^T \leq \lambda_1^2 (E(0) + E(T)), \quad (3.80)$$

onde λ_1 é a constante positiva proveniente da equivalência das normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ em $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$.

De (3.76) - (3.80), deduzimos que

$$\begin{aligned} C_5|\chi| + C_5|\mathcal{Y}| &\leq C_5(2RC_3 + \lambda_1^2 C_3 + \lambda_1^2)(E(0) + E(T)) \\ &= C_6(E(0) + E(T)), \end{aligned}$$

onde $C_6 = C_6\{C_3, C_5, R, \lambda_1\}$.

Por outro lado, de (3.3) temos que

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u_t \, dx \, dt,$$

e então

$$\begin{aligned} C_5|\chi| + C_5|\mathcal{Y}| &\leq C_6 \left[2E(T) + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t) u_t \, dx \, dt \right] \\ &\leq C_6 \left[2E(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) \, dx \, dt \right]. \end{aligned} \quad (3.81)$$

De (3.75), (3.81) e do fato que a energia é não-crescente em relação à variável temporal resulta que

$$\begin{aligned} TE(T) &\leq \int_0^T E(t) dt \\ &\leq C_6 \left[2E(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2) \, dx \, dt \right] \\ &\quad + C_5 \int_0^T \int_{\omega} (a(x)|g(u_t)|^2 + a(x)u_t^2) \, dx \, dt + \frac{C_5 M}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\omega} |u|^2 \, dx \, dt \quad (3.82) \\ &\leq C_* E(T) + C_* \left[\int_0^T \int_{\Omega} a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) \, dx \, dt \right] \\ &\quad + C_* \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \, dt, \end{aligned}$$

onde C_* é uma constante positiva que depende de C_4, C_5, C_6 e de $\frac{M}{\varepsilon^2}$.

Nosso intuito agora, é estimar o último termo do lado direito da desigualdade (3.82).

Lema 3.2.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1 e para todo $T > T_0$, com T_0 suficientemente grande, existe uma constante positiva $C(T_0, E(0))$ tal que, se (u, u_t) é uma solução fraca do problema (3.1), temos*

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt \leq C(T_0, E(0)) \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2) dx dt \right]. \quad (3.83)$$

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Para simplificarmos denotaremos $u' := u_t$. Seja T_0 uma constante suficientemente grande fixa. Suponha que (3.83) não seja verificado e seja $\{u_k(0), u'_k(0)\}$ uma sequência de dados iniciais onde as soluções correspondentes $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ do problema (3.1), com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k , verifiquem

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \|u_k(t)\|_{\Omega}^2 dt}{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u'_k) + a(x)u_k'^2) dx dt} = +\infty, \quad (3.84)$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u'_k) + a(x)u_k'^2) dx dt}{\int_0^T \|u_k(t)\|_{\Omega}^2 dt} = 0. \quad (3.85)$$

Como $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, onde L é uma constante positiva, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{u_k\}$, que verifica as seguintes convergências

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.86)$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \quad (3.87)$$

$$u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.88)$$

Além disso, como $\mathcal{V} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, de (3.87), (3.88) e em virtude do Teorema de Aubin - Lions podemos extrair uma subsequência de $\{u_k\}$, a qual ainda denotaremos pela mesma

notação, de modo que

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.89)$$

Neste ponto dividiremos a prova em dois casos, a saber: quando $u \neq 0$ e $u = 0$.

Caso (I): $u \neq 0$.

Observe que de (3.85) e (3.89), temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u'_k) + a(x)u_k'^2) dx dt = 0. \quad (3.90)$$

Em particular,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g^2(u'_k) dx dt = 0,$$

ou seja,

$$a^{\frac{1}{2}}g(u'_k) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.91)$$

Como u_k é solução do problema (3.1), temos

$$\begin{cases} u_k'' - \Delta u_k + a(x)g(u'_k) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_{\nu} u_k - \Delta_{\Gamma_1} u_k = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u_k = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[. \end{cases} \quad (3.92)$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Composto a equação acima com $\theta\varphi$, obtemos

$$\langle u_k'' - \Delta u_k + a(x)g(u'_k), \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.93)$$

Notemos que

$$\langle u_k'', \theta\varphi \rangle = -\langle u'_k, \theta'\varphi \rangle,$$

e de (3.88) segue que

$$-\langle u'_k, \theta' \varphi \rangle \rightarrow -\langle u', \theta' \varphi \rangle = \langle u'', \theta \varphi \rangle.$$

Assim, concluímos que

$$\langle u''_k, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \langle u'', \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.94)$$

Por outro lado, para cada $t \in]0, T[$ fixado, a seguinte igualdade é verificada

$$\langle -\Delta u_k, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = -\langle \nabla u_k, \theta \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)},$$

e, por (3.87), segue que

$$\langle \nabla u_k, \theta \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \langle \nabla u, \theta \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = \langle -\Delta u, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)},$$

isto é,

$$\langle -\Delta u_k, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} \rightarrow \langle -\Delta u, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.95)$$

Do exposto em (3.91), (3.94) e (3.95) obtemos de (3.93) após passagem ao limite que

$$\langle u'' - \Delta u, \theta \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mas, pela totalidade do espaço $R = \{\theta \varphi; \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$ vem que

$$\langle u'' - \Delta u, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T), \mathcal{D}(Q_T)} = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Logo,

$$u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (3.96)$$

Analisemos as condições de fronteira. Primeiramente, da convergência (3.87) deduzimos que

$$u(t) \in \mathcal{V} \hookrightarrow H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \quad \forall t \in [0, T].$$

Logo, $\gamma_0 u(t) = 0$ em Γ_0 , $\forall t \in [0, T]$ e, então,

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\gamma_0 u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = 0$$

e, portanto,

$$u = 0 \text{ em } L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \quad (3.97)$$

Por outro lado, o operador $-\Delta_{\Gamma_1} : H^1(\Gamma_1) \rightarrow H^{-1}(\Gamma_1)$ é definido por

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1} \varphi, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T \varphi \nabla_T \psi \, d\Gamma; \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Gamma_1).$$

Seja $\psi \in L^1(0, T; H^1(\Gamma_1))$, então

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_k, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_k \nabla_T \psi \, d\Gamma \, dt = \int_0^T (\nabla_T u_k, \nabla_T \psi)_{\Gamma_1} dt.$$

Mas, de (3.87) decorre que

$$\nabla_T u_k \xrightarrow{*} \nabla_T u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)).$$

Logo,

$$\int_0^T (\nabla_T u_k, \nabla_T \psi)_{\Gamma_1} dt \rightarrow \int_0^T (\nabla_T u, \nabla_T \psi)_{\Gamma_1} dt = \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt$$

e, portanto,

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_k, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt \rightarrow \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u, \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} dt.$$

Consequentemente,

$$\Delta_{\Gamma_1} u_k \xrightarrow{*} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (3.98)$$

Como

$$\partial_\nu u_k = \Delta_{\Gamma_1} u_k \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)),$$

então, de (3.98) decorre que

$$\langle \partial_\nu u_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Gamma_1)).$$

Portanto,

$$\partial_\nu u_k \xrightarrow{*} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (3.99)$$

No entanto, de (3.88) temos

$$u'_k \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

e, pela Proposição 1.2.3 e Corolário 1.2.3.1 das Preliminares, obtemos que

$$u''_k \rightharpoonup u'' \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.100)$$

Assim, de (3.91), (3.92), (3.96) e (3.100) resulta que

$$\Delta u_k = u''_k + a(x)g(u'_k) \rightharpoonup u'' = \Delta u \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\Delta u_k \rightharpoonup \Delta u \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.101)$$

e, de (3.86) observamos que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.102)$$

Logo, de (3.101) e (3.102) segue que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)),$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Pela continuidade da aplicação traço $\tilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ temos, pela Observação 1.3.1 e pelo Teorema 1.17, que

$$\tilde{\gamma}_1(u_k) \rightharpoonup \tilde{\gamma}_1(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_k \rightharpoonup \partial_\nu u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)). \quad (3.103)$$

Desta forma, de (3.99), (3.103) e pela unicidade do limite fraco estrela, obtemos

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0, T; H^{-1}(\Gamma_1))$$

e, sendo $\Delta_{\Gamma_1} u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1))$ e $\partial_\nu u \in H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ deduzimos que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma_1)) \cap H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \quad (3.104)$$

Agora, mostraremos que

$$u' = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times (0, T). \quad (3.105)$$

Com efeito, de (3.90) temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) u_k'^2 dx dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \quad (3.106)$$

e, de (3.88)

$$u_k' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$a^{\frac{1}{2}} u_k' \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}} u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Então, pela Proposição 1.5.1, obtemos

$$\|a^{\frac{1}{2}} u'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \liminf \|a^{\frac{1}{2}} u_k'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))},$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx dt \leq \liminf \int_0^T \int_{\Omega} a(x) u_k'^2 dx dt. \quad (3.107)$$

Assim, do exposto em (3.106) e (3.107), obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx dt = 0.$$

Contudo, notemos que

$$0 \leq \int_0^T \int_{\omega} a(x) u'^2 dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} a(x) u'^2 dx dt = 0. \quad (3.108)$$

De (3.108) e da hipótese (H.2) resulta que

$$0 = \int_0^T \int_{\omega} a(x)u^2 dx dt \geq a_0 \int_0^T \int_{\omega} u^2 dx dt \geq 0,$$

e, portanto,

$$\int_0^T \int_{\omega} u^2 dx dt = 0,$$

o que prova (3.105).

Resumindo, as relações (3.96), (3.97), (3.104) e (3.105) nos fornecem que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \partial_{\nu} u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u_t = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{array} \right. \quad (3.109)$$

Derivando a primeira equação de (3.109) no sentido das distribuições obtemos

$$u_{ttt} - \Delta u_t = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T),$$

e, considerando $u_t = v$ segue que

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

Então, pelo Teorema 1.20 (Teorema de Holmgren), para $T \geq T_0$ suficientemente grande, deduzimos que $v = u_t = 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Assim, u é constante em relação a variável temporal, logo $u_{tt} = 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Retornando a (3.109), obtemos o seguinte problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0, \\ \partial_{\nu} u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

e sendo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, pela F3rmula de Green segue que

$$\begin{aligned}
0 = - \int_{\Omega} \Delta u u \, dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \gamma_0 u \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \\
&= \|u\|_{\mathcal{V}}^2.
\end{aligned}$$

Logo, $u \equiv 0$, o que 3 uma contradi33o.

Caso (II): $u = 0$.

Definamos

$$c_k := \left[\int_0^T \int_{\Omega} |u_k|^2 \, dx \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \bar{u}_k := \frac{1}{c_k} u_k.$$

Observemos que $c_k \neq 0$ pois, inicialmente, supomos que a sequ3ncia $\{u_k\}$ satisfaz

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_k|^2 \, dx \, dt > k(T_0, E_k(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2) \, dx \, dt \right\} \geq 0.$$

Sendo assim, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\bar{u}_k|^2 \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|u_k|^2}{c_k^2} \, dx \, dt = \frac{1}{c_k^2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_k|^2 \, dx \, dt = 1 \quad (3.110)$$

Como $\bar{E}_k(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{u}_k'|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_k|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \bar{u}_k|^2 \, d\Gamma$, ent3o

$$\bar{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2}. \quad (3.111)$$

Relembrando (3.82), para T suficientemente grande, temos

$$E(T) \leq \hat{C} \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \, dt \right].$$

Empregando a identidade

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t \, dx \, dt,$$

como a energia é não-crescente, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(t) \leq E(0) &= E(T) + \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t \, dx \, dt \\ &\leq \tilde{C} \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \, dt \right], \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$, com T suficientemente grande.

Da última desigualdade e de (3.111), obtemos

$$\bar{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \left[\frac{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u'_k) + a(x)u_k'^2) \, dx \, dt}{\int_0^T \int_{\Omega} |u_k|^2 \, dx \, dt} + 1 \right]. \quad (3.112)$$

De (3.85) e (3.112), concluimos que existe uma constante positiva \tilde{M} tal que

$$\bar{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \tilde{M}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{u}'_k|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_k|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \bar{u}_k|^2 \, d\Gamma \leq \tilde{M}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, existe uma subsequência de $\{\bar{u}_k\}$, que ainda denotaremos da mesma forma, tal que

$$\bar{u}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \quad (3.113)$$

$$\bar{u}'_k \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.114)$$

$$\bar{u}_k \rightarrow \bar{u} \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.115)$$

Também, de (3.85) e (3.89) deduzimos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(x)g^2(u'_k)}{c_k^2} dx dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)\bar{u}'_k{}^2 dx dt = 0.$$

Além disso, \bar{u}_k satisfaz a equação

$$\begin{cases} \bar{u}_k'' - \Delta \bar{u}_k + a(x) \frac{g(u'_k)}{c_k} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \bar{u}_k = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \partial_{\nu} \bar{u}_k - \Delta_{\Gamma_1} \bar{u}_k = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0, T). \end{cases}$$

Passando o limite quando $k \rightarrow +\infty$, de forma análoga ao que foi feito no caso (I), e considerando as convergências acima, obtemos

$$\begin{cases} \bar{u}'' - \Delta \bar{u} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \partial_{\nu} \bar{u} - \Delta_{\Gamma_1} \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \bar{u}' = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.116)$$

Então, $v = \bar{u}_t$ verifica, no sentido distribucional, o seguinte problema:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{em } \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Aplicando novamente o Teorema de Holmgren, resulta que $v = \bar{u}_t \equiv 0$. Retornando à (3.116), temos, para quase todo $t \in (0, T)$, o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_0, \\ \partial_{\nu} \bar{u} - \Delta_{\Gamma_1} \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde concluímos que $\|\bar{u}\|_{\mathcal{V}} = 0$, isto é, $\bar{u} = 0$. Mas, isto é uma contradição, pois, de (3.115)

temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\bar{u}_k|^2 dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} |\bar{u}|^2 dx dt = 0,$$

e, em (3.110) vimos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\bar{u}_k|^2 dx dt = 1.$$

Isto conclui a prova do Lema. □

As desigualdades (3.82) e (3.83) nos fornecem o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Para $T > 0$ suficientemente grande, a solução u do problema (3.1) satisfaz*

$$E(T) \leq C \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2) dx dt \right], \quad (3.117)$$

onde C é uma constante positiva que depende de $T_0, E(0), f, \lambda_1, R, n, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{M}{\varepsilon^2}$.

3.2.3 Conclusão do Teorema 3.1

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1, faremos uso do resultado devido a Lasiecka e Tataru [22].

Lema 3.2.4. *Seja p uma função crescente, positiva, tal que $p(0) = 0$. Como p é crescente podemos definir uma função crescente $\rho(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere uma sequência $\{s_m\}$ de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m. \quad (3.118)$$

Então, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + \rho(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0. \quad (3.119)$$

Além disso, $S(t)$ é monótona não-crescente com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre m .

De fato, para $m = 0$, segue de (3.118) que

$$(I + p)(s_1) \leq s_0. \quad (3.120)$$

Como $(I + p)^{-1}$ é crescente temos que

$$\begin{aligned} s_1 \leq (I + p)^{-1}(s_0) &= s_0 - s_0 + (I + p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - \rho(s_0). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Por outro lado, como ρ é uma função positiva, a solução $S(t)$ de (3.119) é monótona não-crescente, ou seja,

$$S(t) \leq S(\tau), \quad \forall t \geq \tau \geq 0. \quad (3.122)$$

Integrando (3.119) de 0 a 1 obtemos

$$S(1) - S(0) + \int_0^1 \rho(S(\tau))d\tau = 0,$$

e, como ρ é crescente, de (3.122) e da hipótese $S(0) = s_0$, resulta que

$$\begin{aligned} S(1) &= S(0) - \int_0^1 \rho(S(\tau))d\tau \\ &\geq S(0) - \int_0^1 \rho(S(0))d\tau \\ &= S(0) - \rho(S(0)) \\ &= (I - \rho)(S(0)) \\ &= (I + p)^{-1}(S(0)) = (I + p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - \rho(s_0) \geq s_1, \end{aligned}$$

portanto $S(1) \geq s_1$.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para m , ou seja, $S(m) \geq s_m$. Portanto,

para $m + 1$ de (3.118), temos

$$(I + p)s_{m+1} \leq s_m. \quad (3.123)$$

Como $(I + p)^{-1}$ é crescente, resulta que

$$s_{m+1} \leq s_m - q(s_m). \quad (3.124)$$

Agora, integrando (3.119) de m à $m + 1$, obtemos

$$S(m + 1) - S(m) + \int_m^{m+1} \rho(S(\tau))d\tau = 0.$$

Do fato que ρ é crescente, de (3.122) e da hipótese indutiva, obtemos

$$\begin{aligned} S(m + 1) &\geq S(m) - \int_m^{m+1} \rho(S(\tau))d\tau \\ &= S(m) - \rho(S(m)) = (I - \rho)S(m) \\ &= (I + p)^{-1}S(m) \geq (I + p)^{-1}s_m \\ &= s_m - \rho(s_m). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Das relações (3.124) e (3.125) resulta que

$$S(m + 1) \geq s_{m+1},$$

o que prova o desejado.

Para finalizarmos a prova do lema, resta-nos provar que se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0.$$

De fato, por (3.119), para cada $\bar{T} > 0$, temos

$$S(\bar{T}) - S(0) + \int_0^{\bar{T}} \rho(S(\bar{T}))d\tau = 0$$

e por (3.122) resulta

$$S(\bar{T}) \leq S(0) - \int_0^{\bar{T}} \rho(S(\bar{T})) d\tau,$$

ou seja,

$$S(\bar{T}) \leq S(0) - \bar{T}\rho(S(\bar{T})) \quad (3.126)$$

Por (3.122) temos que $S(t)$ é uma função monótona não crescente e limitada inferiormente pelo 0, pois $S(m) \geq s_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e s_m são números positivos. Seja $C = \inf \{S(t); t \geq 0\}$. Observe que $C = \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)$. Mostraremos que $C = 0$.

De fato, suponhamos por absurdo que $C > 0$. Logo de (3.126), obtemos que

$$S(\bar{T}) \leq S(0) - \bar{T}\rho(C), \quad \forall \bar{T} > 0 \quad (3.127)$$

como $p(x) > 0$ para $x > 0$ obtemos que $\rho(C) > 0$, pois caso contrário, se $\exists x_0 > 0$ tal que $\rho(x_0) \leq 0$, segue que

$$x_0 - (I + p)^{-1}(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq (I + p)^{-1}(x_0) \Leftrightarrow (I + p)(x_0) \leq x_0$$

ou ainda, se e somente se $p(x_0) \leq 0$, o que é uma absurdo.

Portanto, tomando $\bar{T} \in \mathbb{N}$ tal que $S(0) < \bar{T}\rho(C)$ resulta de (3.127) que $S(\bar{T}) < 0$ o que é um absurdo. Então concluímos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$. \square

Definamos

$$Q_T^0 = \{(t, x) \in Q_T; |u_t| \leq 1 \text{ q.s. em } \Omega\}, \quad Q_T^1 = Q_T \setminus Q_T^0.$$

Então, usando o item (iii) da hipótese (H.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^1} a(x) \left(([g(u_t)]^2 + (u_t)^2) \right) dQ &\leq \int_{Q_T^1} a(x) \left(k^{-1} g(u_t) u_t + K g(u_t) u_t \right) dQ \\ &= (k^{-1} + K) \int_{Q_T^1} a(x) g(u_t) u_t dQ. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Por outro lado, de (3.4) e do fato que h é côncava e estritamente crescente, com $h(0) = 0$, e observando que

$$h\left(\frac{a(x)}{1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right) \leq h(a(x)g(u_t)u_t),$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^0} a(x)\left([g(u_t)]^2 + (u_t)^2\right)dQ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{Q_T^0} \frac{a(x)}{(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)})} h(g(u_t)u_t) dQ \\ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{Q_T^0} h\left(\frac{a(x)}{1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right) dQ \\ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{Q_T^0} h(a(x)g(u_t)u_t) dQ. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen segue que

$$\begin{aligned} &(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_{Q_T^0} h(a(x)g(u_t)u_t) dQ \\ &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \operatorname{med}(Q_T) h\left(\frac{1}{\operatorname{med}(Q_T)} \int_{Q_T} h(a(x)g(u_t)u_t) dQ\right) \\ &= (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \operatorname{med}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ\right), \end{aligned} \quad (3.130)$$

onde $r(s) = h\left(\frac{s}{\operatorname{med}(Q_T)}\right)$ foi definida em (3.5).

Logo, de (3.128), (3.129) e (3.130), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} a(x)\left([g(u_t)]^2 + (u_t)^2\right)dQ &\leq (k^{-1} + K) \int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ \\ &\quad + (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \operatorname{med}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ\right). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Combinando (3.131) e a proposição 3.2.1 decorre que

$$\begin{aligned} E(T) &\leq (1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) C \left[\frac{k^{-1} + K}{(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)})} \int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{med}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Sejam

$$L = \left(C(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \operatorname{med}(Q_T) \right)^{-1}, \quad c = \frac{k^{-1} + K}{(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) \operatorname{med}(Q_T)}.$$

Então, aplicando p em ambos os lados de (3.132) resulta que

$$\begin{aligned} p(E(T)) &\leq p\left(\frac{1}{L}(cI + r) \left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ\right)\right) \\ &= (cI + r)^{-1} \left(L \left(\frac{1}{L}(cI + r)\right) \left(\int_{Q_T} a(x)g(u_t)u_t dQ\right)\right) \\ &= \int_{Q_T} a(x)g(u_t) u_t dQ \\ &= E(0) - E(T) \end{aligned} \tag{3.133}$$

onde a função p foi definida em (3.6).

Agora, em (3.133) substituindo o intervalo de integração $]0, T[$ pelo intervalo $]mT, m(T + 1)[$ obtemos

$$E(m(T + 1)) + p(E(m(T + 1))) \leq E(mT), \text{ para } m = 0, 1, \dots$$

Aplicando o Lema 3.2.4, com $s_m = E(mT)$, obtemos

$$E(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Finalmente, usando a dissipação de $E(t)$, dada pela relação (3.3) e usando o fato que $S(t)$ é monótona não-crescente; pondo $t = mT + \tau$, $0 \leq \tau \leq T$, resulta que

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t - \tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \text{ para } t > T.$$

Com isto, a prova do Teorema 3.1 está completa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARBU, V. **Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces**. România, Bucuresti: Noordhoff International Publishing, 1976.
- [2] BEY, R.; HEMINNA, A.; LOHÉAC, J.P. **Boundary stabilization of the linear elastodynamic system by a Lyspunov-type method**. Revista Matemática Complutense v. 16 (2), p. 417-441, 2003.
- [3] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1984.
- [4] BRÉZIS, H.: **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.
- [5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.
- [6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: DMA/UEM, 2007.
- [7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. **Well-posedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**. Journal of Differential Equations, v. 236, p. 407-459, 2007.
- [8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. **Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping**. Transactions of AMS, 2008, (to appear).

-
- [9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; TOUNDYKOV, D. **Stabilization of the damped wave equation Cauchy-Ventcel boundary condition**. Journal of Differential Equations, v. 9, p. 143-169, 2009.
- [10] CAVALCANTI, M. M.; KHEMMOUDJ A.; MEDJDEN, M. **Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition**. J. Math. Anal. Appl., v. 328, Issue 2, p. 900-930, 2007.
- [11] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Mac Graw-Hill, 1955.
- [12] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. V. 2, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [13] DO CARMO, M. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. New Jersey: Prentice Hall, 1976.
- [14] FERREIRA, A L. **Estabilização uniforme da equação da onda sobre uma superfície compacta com dissipação localmente distribuída**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.
- [15] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.
- [16] HANSEN, S.; ZUAZUA E. **Controllability and stabilization of strings with point masses**. SIAM J. Control and Optim., v. 33 (5), p. 1357- 1391, 1995.
- [17] HEMMINA, A. **Stabilization frontière de problèmes de Ventcel**. ESAIM, Control Optim. Calc. Var., v. 5, p. 591-622, 2000.
- [18] HEMMINA, A. **Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions**. Port. Math., v. 58(3), p. 271-315, 2001.

- [19] KANOUNE, A.; MEHIDI, N. **Stabilization and control of subcritical semilinear wave equation in bounded domain with Cauchy-Ventcel boundary conditions.** Appl. Math. Mech. -Engl. 29, p. 787-800, 2008.
- [20] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications.** New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.
- [21] KHEMMOUDJ, A.; MEDJDEN M. **Exponential decay for the semilinear damped Cauchy-Ventcel problem** Bol. Soc. Paran. Mat., v. 22(2), p. 97-116, 2004.
- [22] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping.** Differential and Integral Equations, v.6, p. 507-533, 1993.
- [23] LASIECKA I.; TOUNDYKOV, D. **Energia decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms.** Nonlinear Analysis, v. 64, p. 1757-1797, 2006.
- [24] LASIECKA I.; TRIGGIANI R. **Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions.** Appl. Math. Optim.,v. 25, 189-224, 1992.
- [25] LASIECKA I.; TRIGGIANI R.; YAO, P. F. **Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term.** Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application, v. 30(1), p. 111-122, Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis, 1997.
- [26] LASIECKA I.; TRIGGIANI R.; YAO, P. F. **Inverse/Observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients.** J. Math. Anal. Appl., v. 235, n. 1, p. 13-57, 1999.
- [27] LEMRABET, K. **Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier.** CRAS Paris, t. 300, Série I, n. 15, p. 531-534, 1985.

- [28] LEMRABET, K. **Estude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mène canique dans des domaines non réguliers**. Thèse, USTHB, Alger, 1987.
- [29] LEMRABET, K.; TENIOU, D. E. **Un problème d'évolution de type Ventcel**. Rev. Maghrèb. Math., v. 1(1), p. 15-29, 1992.
- [30] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**. Tome 1, Masson, 1988.
- [31] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [32] LITTMAN, W.; TAYLOR, S. W. **Boundary feedback stabilization of a vibrating string with an interior point mass**. Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I, p. 271-287, Int. Math. Ser. (N.Y.), 1, Kluwer/Plenum, New York, 2002.
- [33] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A. **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.
- [34] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.
- [35] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.
- [36] MILLA MIRANDA, M. **Análise espectral em espaços de Hilbert**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1990.
- [37] MONTEIRO, E. **Existência e comportamento assintótico das soluções de uma equação da onda com dissipação não linear na fronteira e termo de fonte**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2006.

-
- [38] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avançados, Petrópolis - RJ: LNCC, 1999.
- [39] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivés Partielles.** Masson, Paris, 1983.
- [40] SHOWALTER, R.: **Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations.** AMS, Providence, 1997.
- [41] YAO, P. F. **On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients.** SIAM J. Contro. Optim., v. 37, p. 1568-1599, 1999.
- [42] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications.** V. 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)