



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO
TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

Programa de Mestrado em Modelagem
Matemática e Computacional

Estabilização de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno Discretos no Tempo com Atraso Variante nos Estados: uma Abordagem Convexa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Aluno: Dimitri Campos Viana

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite

Belo Horizonte, 02 de Maio de 2010.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

- Aos meus pais, Denise e João, pela grande quantidade e variados tipos de esforços que, dentre outras coisas, permitiram que eu concluísse esse trabalho.
- Ao Valter, pelos exemplos de comportamento científico e conhecimentos que me passou de forma objetiva, e pela serenidade de convivência que rapidamente se transformou em amizade.
- À Alessandra, pelo companheirismo em todos os momentos, amenizando os difíceis e tornando especiais os demais. E à “grande” família que trouxe consigo, por me alegrar constantemente.
- A Deus, pelas inúmeras intervenções que, com certeza, se fizeram necessárias para que eu chegasse a esse momento.
- Aos amigos, com ou sem parentesco, pelo prazer da convivência, cuja retomada é um estímulo para a conclusão desse trabalho.
- Aos professores, colegas e demais participantes do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional do CEFET-MG, pelo crescimento que me proporcionaram.
- À Simatec, pelo apoio, flexibilidade e oportunidades, inclusive a de fazer amigos.
- Aos parceiros de trabalho, Márcio e Eugênio, pelo sincero prazer que tenho em ver meu nome em tão boa companhia.
- Aos desenvolvedores dos softwares Yalmip e SeDuMi, pelo trabalho bem feito, que permite que muitas pessoas cheguem em casa mais cedo.

Ao meu avô Edward, que me ensinou a pescar peixe grande com linha fina, e à memória de minha avó Emília, que sempre me recebeu com brilho nos olhos.

Resumo

Neste trabalho, propõe-se a utilização de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), em conjunto com ferramentas de otimização convexa, empregadas no contexto de controle robusto de sistemas lineares variantes no tempo, para o tratamento de problemas que envolvem a estabilização de sistemas não-lineares discretos no tempo, sujeitos a atraso variante nos estados. Isso é possível porque sistemas não-lineares, representados por modelos fuzzy T-S, podem ser interpretados como sistemas lineares politópicos variantes no tempo. Para essa classe de sistemas, são obtidas condições convexas, dependentes do intervalo de variação do atraso, para a análise de estabilidade e para a síntese de controladores por realimentação de estados ou de saída. O uso de técnicas de controle robusto possibilita expressar as condições propostas como desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*). Dessa forma, através de testes de factibilidade de um conjunto de LMIs, os problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores podem ser resolvidos eficientemente, em tempo polinomial, com ajuda de *softwares* especializados. Uma nova técnica para obtenção de condições convexas destinadas ao projeto de controladores por realimentação de estados é apresentada nesta dissertação. A principal diferença em relação às abordagens convencionais é a consideração de uma equação adicional, que relaciona os estados do sistema a uma variável instrumental. Mostra-se que, em relação à formulações correspondentes, as condições propostas podem levar a resultados menos conservadores, obtidos com menor custo computacional. Condições convexas para a síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída também são apresentadas. Tais condições permitem que esses controladores sejam implementados por meio da técnica conhecida como compensação paralela distribuída (PDC, do inglês *parallel-distributed compensation*), comumente utilizada na realimentação de estados de sistemas fuzzy T-S. Baseados nos estados ou nas saídas do sistema, os controladores propostos diferenciam-se por possibilitarem a realimentação de sinais atuais e em atraso. Porém, caso os valores do atraso estejam indisponíveis, é possível simplificar as leis de controle consideradas, recuperando os métodos de realimentação tradicionalmente encontrados na literatura. Os resultados obtidos são analisados por meio de simulações computacionais realizadas a partir de modelos fuzzy T-S que descrevem sistemas recentemente investigados na literatura e, sempre que possível, comparados com resultados correlatos. Demonstra-se que as condições propostas nesta dissertação podem ser menos conservadoras do que outras formulações recentemente publicadas.

Abstract

In this work it is proposed the use of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models conjointly with convex optimization tools employed on the context of robust control of linear time-varying systems, for dealing with stabilization problems of nonlinear discrete time systems subject to time-varying delay in the states. This is possible because nonlinear systems, represented by T-S fuzzy models, can be seen as polytopic time-varying linear systems. For this class of systems, convex conditions, dependent on the variation range of the delay, are obtained for stability analysis and synthesis of state or output feedback controllers. The use of robust control techniques allows to express the proposed conditions as linear matrix inequalities (LMIs). In this way, by testing the feasibility of a set of LMIs, the problems of stability analysis and controller design can be efficiently solved, in polynomial time, with aid of specialized softwares. A new technique for obtaining convex conditions for state feedback controller design is presented in this text. The main difference with respect to conventional approaches is the introduction of an extra equation, which relates the system states to an instrumental variable. It is shown that, with respect to corresponding formulations, the proposed conditions can lead to less conservative results, obtained with less computational burden. Convex conditions for designing a dynamic output feedback controller are also presented. Such conditions allow these controllers to be implemented using the so-called parallel distributed compensation (PDC) technique, commonly used in the state feedback of T-S fuzzy systems. Based on the states or on the outputs of the system, the proposed controllers are differentiated because they allow to feedback current and delayed signals. However, if the delay values are unavailable, it is possible to simplify the considered control laws, recovering the feedback methods traditionally found in the literature. The obtained results are analyzed by means of computational simulations carried with T-S fuzzy models that describe systems recently investigated in the literature and, whenever possible, compared with related results. It is shown that the proposed conditions can be less conservative than others recently published.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	x
Notação	xi
Acrônimos	xii
1 Introdução	1
1.1 Problema Estudado	1
1.2 Proposta de Trabalho	4
1.2.1 Objetivos	4
1.2.2 Metodologia Adotada	5
1.3 Estrutura da Dissertação	5
1.4 Comentários Gerais	6
2 Fundamentos	7
2.1 Conceitos Gerais	7
2.1.1 Sistemas de Controle	7
2.1.2 Sistemas Discretos no Tempo	7
2.1.3 Estabilidade	8
2.1.4 Sistemas Fuzzy	10
2.2 Sistemas Não-Lineares com Atraso no Tempo	11
2.2.1 Sistemas Não-Lineares	11
2.2.2 Sistemas com Atraso no Tempo	11
2.3 Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)	14
2.3.1 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)	14
2.3.2 Compensação Paralela Distribuída	16
2.4 Controle Robusto	18
2.4.1 Sistemas Lineares Incertos	18
2.4.2 Principais Ferramentas Matemáticas	20

2.4.3	Estabilidade de Sistemas Contínuos no Tempo	23
2.4.4	Estabilidade de Sistemas Discretos no Tempo	25
2.4.5	Estabilidade via Lema de Finsler	26
3	Manipulações Algébricas para Sistemas Variantes no Tempo	29
3.1	Sistemas com Incertezas Variantes no Tempo	30
3.1.1	Análise em Malha Aberta	31
3.1.2	Análise em Malha Fechada	32
3.1.3	Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados	32
3.2	Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)	33
3.2.1	Análise em Malha Aberta	35
3.2.2	Análise em Malha Fechada	35
3.2.3	Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados	40
3.3	Conclusões	45
4	Sistemas com Atraso Constante no Tempo	47
4.1	Introdução	47
4.2	Formulação do Problema	49
4.3	Resultados Principais	51
4.3.1	Análise de Estabilidade Assintótica	51
4.3.2	Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados	54
4.3.3	Complexidade Numérica	55
4.4	Exemplos	56
4.5	Conclusões	59
5	Sistemas com Atraso Variante no Tempo	60
5.1	Introdução	60
5.2	Formulação do Problema	62
5.3	Resultados Principais	63
5.3.1	Análise de Estabilidade Assintótica	64
5.3.2	Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados	68
5.3.3	Complexidade Numérica	71
5.4	Exemplos	71
5.5	Conclusões	75
6	Realimentação Dinâmica de Saída	76
6.1	Introdução	76
6.2	Formulação do Problema	78
6.3	Resultados Principais	80
6.3.1	Síntese do Compensador Dinâmico de Saída	80
6.3.2	Complexidade Numérica	88
6.4	Exemplo Numérico	89
6.5	Conclusões	91
7	Considerações Finais	93
7.1	Principais Contribuições	94
7.2	Perspectivas	95

A Provas Matemáticas	98
A.1 Complemento de Schur	98
A.2 Lema de Finsler	99
Referências Bibliográficas	99

Lista de Figuras

1.1	Artigos em que a teoria de Lyapunov é utilizada para tratar sistemas fuzzy com atraso no tempo.	3
2.1	Ilustração, através de analogia mecânica, de diferentes tipos de equilíbrio.	9
2.2	Ilustração dos conceitos de estabilidade no plano de estados.	10
2.3	Simulação dos estados do sistema em malha aberta: x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada).	17
2.4	Simulação dos estados do sistema em malha fechada: x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada).	18
3.1	Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com as Proposições 3.3 (linha em traço-ponto), 3.7 (linha pontilhada), 3.8 (linha tracejada) e 3.9 (linha sólida).	45
4.1	Regiões de estabilidade detectadas pelo Teorema 4.1 (linha sólida), Corolário 4.1 (linha pontilhada), Teorema 6 de [CF00] (linha tracejada) e Teorema 1 de [LL08] (linha em traço-ponto).	57
4.2	Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com o Teorema 4.2 (linha sólida), Corolário 4.2 (linha pontilhada) e Teorema 2 de [LL08] (linha tracejada).	58
4.3	Planos de fase para duas condições iniciais: $x_0 = [1.5 \ 1.5]^T$ e $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$, cada uma utilizada nas simulações para $d = 2$ (linha tracejada) e $d = 20$ (linha sólida).	59
5.1	Regiões de estabilidade detectadas pelos Teoremas 5.1 (linha sólida) e 5.2 (linha pontilhada).	72
5.2	Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com os Teoremas 5.3 (linha sólida) e 5.4 (linha pontilhada).	73
5.3	Simulação dos estados do sistema em malha fechada: x_1 (acima) e x_2 (abaixo).	74
5.4	Simulação do sinal de controle e do atraso variante no tempo: u_t (acima) e d_t (abaixo).	74
6.1	Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com o Teorema 6.1 (linha sólida) e com o Corolário 6.1 (linha pontilhada).	90
6.2	Simulação da saída do sistema em malha fechada.	91
6.3	Simulação do sinal de controle e do atraso variante no tempo: u_t (acima) e d_t (abaixo).	92

Lista de Tabelas

3.1	Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas . .	44
4.1	Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs utilizadas . .	56
5.1	Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas . .	71
6.1	Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas . .	88

Notação

\otimes	Produto de Kronecker
\equiv	Equivalência
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{N}^*	Conjunto dos números naturais não-nulos
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço dos vetores com n entradas reais
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espaço das matrizes reais com dimensões $m \times n$
\mathbf{I}	Matriz identidade de dimensões adequadas
$\mathbf{0}$	Matriz nula de dimensões adequadas
M^T	Transposto de M
M^{-1}	Inversa de M
$\det M$	Determinante de M
$M > \mathbf{0}$ ($M < \mathbf{0}$)	Significa que M é simétrica e definida positiva (negativa)
$M \geq \mathbf{0}$ ($M \leq \mathbf{0}$)	Significa que M é simétrica e semidefinida positiva (negativa)
\star	Denota os elementos ou blocos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
ω_t	Denota $\omega(t)$
$\omega_i(t)$	Denota a i -ésima entrada de $\omega(t)$
α_t	Denota $\alpha(t)$
$\alpha_i(t)$	Denota a i -ésima entrada de $\alpha(t)$
x_t	Denota $x(t)$
u_t	Denota $u(t)$
y_t	Denota $y(t)$
d_t	Denota $d(t)$
$\sigma[\cdot]$	Denota a derivada em relação ao tempo para os sistemas contínuos no tempo e o operador avanço para os sistemas discretos no tempo.

Acrônimos

EQ Estabilidade Quadrática

L-K Lyapunov-Krasovskii

LMI Desigualdade Matricial Linear (do inglês *Linear Matrix Inequality*)

PDC Compensação Paralela Distribuída (do inglês *Parallel Distributed Compensation*)

T-S Takagi-Sugeno

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problema Estudado

A estabilização de sistemas não-lineares pode ser realizada por meio da obtenção de modelos lineares desses sistemas. Nesse sentido, algumas abordagens consistem na linearização, em torno de um ponto de funcionamento, do modelo que representa o sistema que se deseja controlar e, posteriormente, na aplicação de técnicas destinadas a sistemas lineares, como, por exemplo, as de controle robusto. A principal desvantagem dessa técnica é que nem sempre a linearização do sistema não-linear em torno de um único ponto é capaz de descrever corretamente seu comportamento ao longo de toda sua faixa de operação.

Uma das alternativas para se resolver esse inconveniente é descrever os sistemas não-lineares a serem controlados através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)¹. Os modelos obtidos com essa abordagem baseiam-se na utilização de um conjunto de regras fuzzy para descrever um sistema não-linear em termos de submodelos localmente lineares, conectados por funções de pertinência. Isto é, por meio da combinação difusa de submodelos lineares é possível descrever o comportamento de um sistema não-linear [TW01]. A grande vantagem dessa abordagem vem da linearidade dos submodelos, isso permite que o modelo global possa ser interpretado como um sistema linear precisamente conhecido com parâmetros variantes no tempo. Sendo assim, existe a possibilidade de que a análise de estabilidade e a síntese de controladores para esse sistema sejam realizadas com o auxílio de algumas das ferramentas desenvolvidas para controle robusto de sistemas lineares. Em resumo, os modelos fuzzy T-S, utilizados dessa maneira, permitem que a estabilização de sistemas não-lineares seja tratada com o uso de técnicas desenvolvidas para o controle robusto de sistemas lineares variantes no tempo.

Além disso, a abordagem através de modelos fuzzy T-S também permite que os sistemas não-lineares a serem controlados contenham atraso, inclusive variante no tempo. Similarmente ao procedimento descrito no parágrafo anterior, esses sistemas também podem ser representados por um conjunto de submodelos lineares conectados por funções de pertinência. Porém, devido à presença de atraso nos estados dos sistemas não-lineares considerados, deve-se construir o modelo fuzzy T-S utilizando submodelos lineares que

¹ Algumas vezes, o modelo genérico proposto por Takagi-Sugeno é referido na literatura como modelo Takagi-Sugeno-Kang (T-S-K). Porém, de acordo com [TW01, pág. 8], é mais apropriado se referir aos modelos fuzzy investigados neste trabalho como modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S).

também contenham atraso nos estados. Por exemplo, para os sistemas discretos no tempo com atraso variante nos estados estudados neste trabalho, a i -ésima regra de um modelo fuzzy T-S assume o seguinte formato:

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} x_{t+1} = A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t, & t = 0, 1, \dots \\ y_t = C_i x_t \end{cases}$$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t = x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t = u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $y_t = y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $d_t = d(t) \in \mathbb{N}^*$ é a variável escalar que representa o atraso variante no tempo, limitado por $0 < \underline{d} \leq d_t \leq \bar{d} < \infty$, com $\delta \in \mathbb{N} : \delta = \bar{d} - \underline{d}$ representando o intervalo de possível variação do atraso, d_t . Cada par de equações lineares, representado por $A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t$ e $y_t = C_i x_t$, que compõe a consequência de uma regra fuzzy, é chamado de “subsistema”. Sendo assim, o comportamento do sistema global pode ser descrito por

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(\omega_t) x_t + A_d(\omega_t) x_{t-d_t} + B(\omega_t) u_t, \\ y_t &= C(\omega_t) x(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

em que $\omega_t = \omega(t) \in \mathbb{N}^N$ é o vetor composto pelos elementos $\omega_i(t)$, dados por

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}$$

com $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ representando o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Portanto, $\omega_i(t) \in [0, 1] \forall i$ e o vetor ω_t satisfaz

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1,$$

permitindo que se defina

$$\begin{bmatrix} A(\omega_t) & A_d(\omega_t) & B(\omega_t) \\ C(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \\ C_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Observação 1.1. A abordagem proposta por Takagi-Sugeno também permite que sistemas sujeitos a atrasos múltiplos sejam representados. Por exemplo, caso o atraso na ação de controle fosse incluído nos sistemas estudados, em termos de modelagem, bastaria considerar subsistemas compostos por $x_{t+1} = A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t + B_i u_{t-d_t}$. Porém, problemas envolvendo sistemas com atrasos múltiplos não serão tratados neste trabalho.

Observação 1.2. Note também que o comportamento de um sistema descrito com essa abordagem é regido por equações matematicamente muito semelhantes às utilizadas para representar sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo. Com o objetivo de aproveitar ferramentas já disponíveis para o controle robusto desses sistemas, tal semelhança é investigada de forma aprofundada no Capítulo 3 desta dissertação.

Ao se representar um sistema não-linear com atraso variante nos estados por um modelo fuzzy T-S, é possível obter, através das técnicas de controle robusto para sistemas lineares variantes no tempo, condições convexas para análise de estabilidade e síntese de controladores destinadas a esse sistema. Tais condições, expressas sob a forma de desigualdades matriciais lineares (ou LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequality*), podem ser dependentes ou não do atraso inerente ao sistema. Neste trabalho utiliza-se uma técnica baseada na Teoria de Lyapunov, conhecida na literatura como abordagem Lyapunov-Krasovskii (veja, por exemplo, [Nic01] e [Kra63]). Uma das principais características dessa técnica é que, como a dinâmica dos sistemas em estudo possui dependência linear de estados atrasados, não se utiliza uma função de Lyapunov, mas um *funcional*. Nesse caso, o funcional depende de estados do sistema no instante t e nos instantes passados. Um exemplo:

$$V(x_t) = x_t^T P x_t + \sum_{i=t-d_t}^{t-1} x_i^T Q x_i$$

em que ambas as matrizes P e Q são definidas positivas. Por estarem baseadas em funcionais dependentes do atraso, as condições obtidas neste trabalho têm características bem mais elaboradas do que se fossem baseadas em funções de Lyapunov clássicas.

Nota-se na literatura uma quantidade razoável de trabalhos que utilizam modelos fuzzy T-S para representar, com o objetivo de análise ou de controle, sistemas não-lineares com atraso no tempo. Uma pesquisa por artigos que contivessem as palavras “Fuzzy”, “Delay” e “Lyapunov” em seus títulos, resumos ou como palavras-chave, realizada no portal *Science Direct* (www.sciencedirect.com) em Janeiro de 2010, resultou em *setenta e duas* publicações distintas. Os trabalhos encontrados foram classificados por data de publicação, conforme mostrado na Figura 1.1.

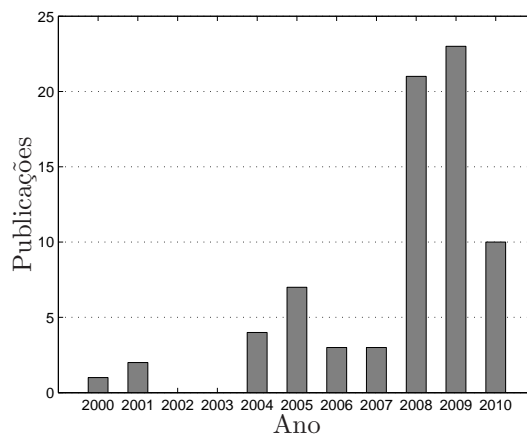


Figura 1.1: Artigos em que a teoria de Lyapunov é utilizada para tratar sistemas fuzzy com atraso no tempo.

Como pode ser observado, problemas similares ao proposto como foco deste trabalho têm recebido considerável atenção da comunidade científica. Acredita-se que esse fato seja um indicador da atualidade do problema proposto, sobretudo ao se verificar o crescimento da quantidade de trabalhos publicados a partir de 2008. É importante ressaltar que, em 2010, apenas o mês de janeiro foi considerado. Ou seja, o crescimento apresentado nos últimos anos tende a ocorrer novamente.

1.2 Proposta de Trabalho

1.2.1 Objetivos

Objetivo Geral

Neste trabalho pretende-se investigar a classe dos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno discretos no tempo com atraso variante nos estados. O principal objetivo é propor condições convexas para análise de estabilidade e síntese de controladores estabilizantes, incluindo termos que sejam dependentes do atraso.

Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos serão considerados:

- Desenvolver condições convexas para análise de estabilidade, apropriadas à classe dos sistemas estudados;
- Desenvolver condições convexas para síntese de controladores fuzzy que utilizem como sinal de controle u_t a realimentação de estados do tipo $u_t = K(\omega_t)x_t + K_d(\omega_t)x_{t-d_t}$;
- Desenvolver condições convexas para síntese de controladores fuzzy que permitam produzir sinais de controle u_t a partir da realimentação dinâmica do(s) sinal(is) de saída do sistema, ou seja, permitam utilizar leis de controle dadas por

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= A_c(\omega_t)\hat{x}_t + A_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + B_c(\omega_t)y_t + B_{cd}(\omega_t)y_{t-d_t} \\ u_t &= C_c(\omega_t)\hat{x}_t + C_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + D_c y_t + D_{cd} y_{t-d_t} ,\end{aligned}$$

em que $y(t)$ é a saída do sistema dada por (1.1);

- Implementar computacionalmente as condições desenvolvidas;
- Aplicar as implementações a modelos de sistemas que pertençam à classe estudada;
- Analisar e discutir os resultados obtidos, sempre que possível comparando-os com outros similares encontrados na literatura.

1.2.2 Metodologia Adotada

Para o estudo da estabilidade de sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados, elaboram-se condições de análise baseadas em funcionais de Lyapunov-Krasovskii [NG04] e formuladas em termos de LMIs, portanto, numericamente tratáveis. A partir desse primeiro tipo de condição, derivam-se condições para síntese de controladores. Essas últimas, também formuladas em termos de LMIs, são utilizadas para obtenção de ganhos destinados a estabilizar os sistemas estudados. A aplicação desses ganhos ocorre por meio de um controlador fuzzy, que os utilizam para realimentação de estados. Uma abordagem semelhante é adotada para investigar condições convexas de síntese para a realimentação dinâmica de saída.

Tais considerações baseiam-se em uma revisão da literatura, previamente realizada, a respeito dos conceitos fundamentais da teoria de controle e das ferramentas matemáticas necessárias para estudar o problema de estabilização de sistemas não-lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. Sendo, basicamente, os primeiros: sistemas lineares e não-lineares, representação de sistemas em espaço de estados, estabilidade, realimentação de sinais, e sistemas com atraso no tempo. E, basicamente, as últimas: ferramentas para representação de sistemas não-lineares através de modelos fuzzy T-S e técnicas de controle robusto para sistemas lineares variantes no tempo.

Conforme percebido na etapa de revisão da literatura, observa-se que o primeiro passo para a elaboração das referidas condições é a construção de Funcionais de Lyapunov-Krasovskii candidatos a satisfazer as condições de estabilidade propostas no Segundo Método de Lyapunov [NG04]. Em seguida, os coeficientes das equações diferenciais que regem os sistemas estudados devem ser incorporados às especificações de estabilidade de tais funcionais. Isso pode ser realizado, dentre outras maneiras, através de substituições de variáveis, soma de equações nulas (por exemplo, $x_{t+1} - Ax_t - A_dx_{t-d_t} - Bu_t = 0$) ou com auxílio de ferramentas da álgebra linear, como o Complemento de Schur e o Lema de Finsler. Neste trabalho, utiliza-se principalmente o Lema de Finsler, visto que as demais técnicas levam a condições convexas que podem ser obtidas como casos particulares das condições elaboradas com o auxílio desse lema.

As condições convexas para análise de estabilidade e síntese de controladores são implementadas computacionalmente, permitindo a avaliação e o projeto de ganhos estabilizantes para os sistemas pertencentes à classe estudada. A avaliação e a discussão dos resultados encontrados baseiam-se principalmente em simulações computacionais, realizadas a partir de modelos fuzzy T-S que descrevem sistemas recentemente estudados na literatura e com auxílio de *software* especializado (MATLAB®). Sempre que possível, os resultados obtidos são comparados com resultados correspondentes apresentados por outros autores. Em alguns casos comparações não são possíveis, devido ao desconhecimento, por parte deste autor, de resultados semelhantes. Isso acontece, por exemplo, com o projeto de compensadores dinâmicos de saída para a classe dos sistemas estudados.

1.3 Estrutura da Dissertação

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, são apresentados conceitos fundamentais e ferramentas matemáticas relacionadas às principais classes que envolvem os sistemas estudados, dentre elas: sistemas discretos no tempo, sistemas

fuzzy, sistemas não-lineares, sistemas com atraso no tempo e sistemas variantes no tempo. Um estudo comparativo de métodos para estabilização de sistemas variantes no tempo é apresentado no Capítulo 3. Os Capítulos 4, 5 e 6 são baseados em trabalhos elaborados com participação deste autor, no escopo desta dissertação. Respectivamente, seus temas são: controle fuzzy de sistemas discretos no tempo com atraso *constante* nos estados, utilizando condições convexas que reduzem o conservadorismo de resultados recentes de outros autores; análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas fuzzy discretos no tempo com atraso *variante* nos estados; projeto de compensadores dinâmicos de saída para a mesma classe de sistemas do trabalho anterior. No Capítulo 7, são apresentados alguns comentários sobre os estudos desenvolvidos, além de alguns temas selecionados para trabalhos futuros. O Apêndice A contém as provas do complemento de Schur e do Lema de Finsler, ferramentas algébricas frequentemente utilizadas no desenvolvimento de condições convexas para a estabilização de sistemas com incertezas descritas por politopos.

1.4 Comentários Gerais

Supõe-se que todos os sistemas fuzzy investigados neste trabalho descrevam sistemas não-lineares através da combinação difusa de um número finito e conhecido de subsistemas lineares.

Os resultados dos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foram obtidos utilizando-se o *software* MATLAB[®] e os *toolboxes* desenvolvidos por terceiros para o mesmo, SeDuMi [Stu99] e Yalmip [Löf08]. Ao buscar soluções para os problemas propostos, o número de operações com ponto flutuante realizadas pelo SeDuMi é da ordem de $\mathcal{K}^2 \mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2}$, em que \mathcal{K} é o número de variáveis escalares e \mathcal{L} é o número de linhas nas LMIs. Outros algoritmos de otimização podem apresentar complexidades diferentes. Por exemplo, caso o LMI *Control Toolbox* [GNLC95] fosse utilizado, o número de operações com ponto flutuante seria da ordem de $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Conceitos Gerais

2.1.1 Sistemas de Controle

O controle automático tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia e da ciência. Além da importância em sistemas que compõem equipamentos militares e civis, como mísseis e automóveis, o controle automático tem se tornado de grande importância e parte integrante dos modernos processos industriais e de produção [Oga03]. Por exemplo, no âmbito industrial, em operações como o controle de pressão, de temperatura, de nível e de vazão, dentre diversas outras grandezas. Os avanços do controle automático, na teoria e na prática, vêm produzindo meios para otimizar o desempenho de sistemas, melhorar a produtividade, diminuir a necessidade de trabalhos manuais perigosos ou repetitivos, dentre outros benefícios.

Na área de controle de processos, um grande número de técnicas para análise de estabilidade de sistemas e para síntese de controladores têm sido desenvolvido. Em geral, para a análise de estabilidade de um sistema real, a primeira etapa é a sua representação matemática. Os modelos matemáticos mais adequados buscam reproduzir, de forma aproximada, o comportamento dos sistemas reais, representando suas principais características, sempre com o compromisso entre precisão e simplicidade. Havendo a intenção de controle, a realimentação de sinais é uma ferramenta poderosa para se tratar sistemas dinâmicos, reduzindo a sensibilidade dos mesmos às possíveis incertezas presentes no processo e modificando seu comportamento de forma a melhorar sua rejeição a perturbações.

No que concerne a área computacional, durante as últimas décadas, a medida em que se tornaram mais baratos e compactos, os processadores digitais passaram a ser utilizados como parte integrante dos sistemas de controle.

2.1.2 Sistemas Discretos no Tempo

Os sistemas de controle, assim como outras aplicações que envolvem processamento de sinais, podem ser implementados de duas maneiras fundamentalmente distintas: *i*) abordagem analógica ou de tempo contínuo e *ii*) abordagem digital ou de tempo discreto.

No último século, a abordagem analógica do controle de processos, assim como em outras áreas, foi predominante durante muitos anos, permanecendo, ainda hoje, como

uma opção viável para muitas aplicações [HV01]. Conforme o nome indica, essa abordagem recorre ao uso de componentes eletrônicos analógicos como, por exemplo, resistores, capacitores, amplificadores e diodos. Em geral, controlador contínuo no tempo é capaz de gerar sinais de controle em *tempo real*, evitando problemas tais como os associados ao atraso e ao falseamento da informação. Por sua vez, os controladores digitais recorrem a computações numéricas para suas operações. O tempo necessário para executar essas operações determina se esse tipo de dispositivo é capaz de atualizar os sinais de controle em intervalos adequados à dinâmica do processo controlado.

Porém, o controle discreto no tempo tem uma vantagem importante sobre o controle analógico [HV01]: *flexibilidade*, pela qual o mesmo *hardware* pode ser usado para implementar diferentes tipos de controle, inclusive simultaneamente, simplesmente fazendo-se modificações de *software*. Em contrapartida, um controlador contínuo no tempo geralmente é dedicado a um determinado processo. Nesse caso, é mais difícil reprojeter o controlador, caso as especificações de controle ou as condições de operação sejam modificadas.

Além disso, a sempre crescente disponibilidade de processamento digital, encontrado, por exemplo, em computadores pessoais e controladores lógicos programáveis, tornou o controle digital financeiramente mais atrativo. Sendo assim, a abordagem digital tem sido mais amplamente utilizada em aplicações práticas do que a abordagem analógica. Esse é o principal motivo que direciona o presente trabalho para o tratamento de sistemas discretos no tempo. Note que uma maneira (indireta) de se obter um controlador discreto no tempo é realizar toda a síntese do controlador em tempo contínuo e, depois, discretizar o controlador determinado.

Em relação à modelagem, pode-se dizer que a maioria dos modelos contínuos são descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo. Em contraste, modelos discretos no tempo representam a dinâmica do sistema em instantes discretos e são descritos por equações a diferenças [Agu07]. No tocante à elaboração de modelos, sabe-se que a maioria dos métodos determinísticos de identificação fornece modelos contínuos no tempo, ainda que os dados sejam amostrados. Por outro lado, a grande maioria dos métodos estocásticos de identificação resulta em modelos discretos no tempo, ainda que praticamente todos os sistemas reais sejam contínuos no tempo [Agu07].

2.1.3 Estabilidade

Estabilidade¹ é um dos temas mais antigos nas ciências básicas e aplicadas. Muitos matemáticos e físicos do século 18 estudaram a questão da estabilidade de um sistema dinâmico, e Routh, Maxwell, Lyapunov, Hurwitz e Schur são alguns nomes frequentemente associados a esse tema [Bha07]. Em 1868, Maxwell publicou seu trabalho sobre a estabilidade do sistema de controle de velocidade, chamado *governador*, da máquina a vapor de James Watt. Utilizando uma equação diferencial para modelar o sistema físico e explicando as instabilidades observadas em termos matemáticos, esse trabalho pode ser considerado a origem da teoria matemática de sistemas de controle.

¹Os conceitos e considerações sobre estabilidade apresentados aqui foram extraídos de [Bha07]. Ou seja, a presente subseção está fundamentada nesta referência.

Os tipos de estabilidade podem ser ilustrados ao se imaginar o comportamento de uma esfera colocada em superfícies de diferentes formatos. Na Figura 2.1A, assumindo a presença de atrito, uma perturbação em torno do ponto de equilíbrio causará oscilações decrescentes em torno do mesmo, cessando com a esfera na posição mostrada na figura. Como esse resultado não depende do tamanho da perturbação inicial, o equilíbrio é dito globalmente assintoticamente estável [Bha07]. Na Figura 2.1B, uma perturbação causará deslocamento da esfera no sentido da força aplicada e o atrito provocará sua parada em um novo ponto de equilíbrio. Esse tipo de estabilidade é denominada neutra. Na Figura 2.1C, sob qualquer perturbação, a esfera se afastará do ponto de equilíbrio original e não mais retornará. Tal tipo de equilíbrio é chamado instável. Finalmente, na Figura 2.1D, uma perturbação relativamente pequena e o atrito com a superfície farão com que a esfera oscile em torno do ponto 1 e posteriormente retorne ao mesmo. Porém, se a perturbação for suficiente, a esfera poderá ultrapassar o ponto 3 e cessar seus movimentos oscilando de forma decrescente em torno do ponto 2. Observe que a mesma descrição é válida ao se trocar “1” e “2” nas frases anteriores. Sendo assim, esses pontos de equilíbrio são denominados localmente estáveis.

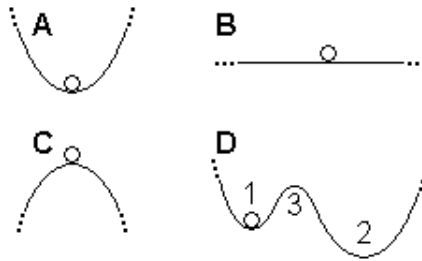


Figura 2.1: Ilustração, através de analogia mecânica, de diferentes tipos de equilíbrio.

Pode-se sempre considerar, sem perda de generalidade, que o ponto de equilíbrio de um sistema ocorre na origem de seu espaço de estados. Isso pois, é sempre possível fazer a mudança de variáveis

$$\bar{x}_t = x_t - x_{eq}$$

em que x_t é o vetor de estados do sistema e x_{eq} é o vetor constante que descreve seu ponto de equilíbrio original. Sendo assim, pode-se definir formalmente os seguintes conceitos:

Definição 1. Um sistema é denominado estável se, para qualquer t_0 , existam $0 < \theta < \epsilon$ tal que, se $\|\bar{x}_0\| < \theta$, então $\|\bar{x}_t\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 2. Um sistema é denominado convergente (ou atrativo) se, para qualquer t_0 , exista $\theta > 0$ tal que, se $\|\bar{x}_0\| < \theta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_t = 0$.

Definição 3. Um sistema é denominado assintoticamente estável se o mesmo for estável e convergente.

Se θ , nas definições apresentadas, pode ser escolhido independente do tempo inicial t_0 , acrescenta-se o advérbio “uniformemente” ao tipo de estabilidade correspondente. Finalmente, um sistema que não seja estável é denominado instável [Bha07]. A Figura 2.2 ilustra geometricamente as definições de, sistema estável (A), sistema assintoticamente estável (B) e sistema instável (C).

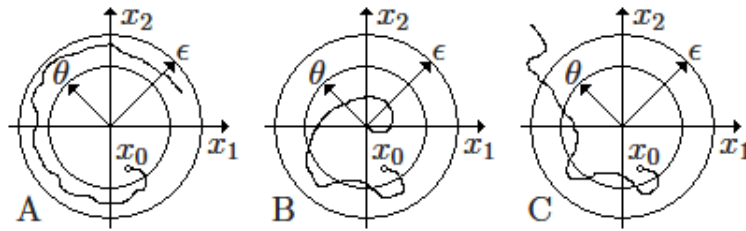


Figura 2.2: Ilustração dos conceitos de estabilidade no plano de estados.

Frequentemente, neste trabalho, o conceito de estabilidade assintótica é referido de forma simplificada como “estabilidade”. Assim, quando é indicado que um sistema é estável, deve-se entender que seu vetor de estados converge assintoticamente para a origem do espaço de estados, para toda condição inicial diferente de zero, quando o tempo tende a infinito. Na Seção 2.4, são apresentadas algumas técnicas para análise de estabilidade de sistemas incertos, tanto para o caso contínuo como para o caso discreto no tempo.

2.1.4 Sistemas Fuzzy

Diferentemente das técnicas tradicionais, o controle fuzzy foi inicialmente utilizado como um método baseado na representação, através de regras do tipo “SE - ENTÃO”, do conhecimento pessoal de um ou mais operadores a respeito de um determinado processo [Zad73], [MA75] e [Rez03]. Dessa forma, como a ação de controle pode ser projetada diretamente através das regras que descrevem o comportamento da planta, essa técnica é conhecida como controle fuzzy livre de modelo matemático ou controle fuzzy convencional. Uma das principais características desse método é a facilidade de captura e implementação da natureza contínua do processo de decisão humana. Por essa razão, não é de se estranhar que as aplicações práticas desse tipo de controle começaram a aparecer muito rapidamente após a publicação dos primeiros resultados sobre esse assunto.

Uma desvantagem do controle fuzzy livre de modelo matemático é que sua utilização não permite que a estabilidade do sistema seja adequadamente analisada. As possibilidades de analisar a estabilidade e de garantir a robustez e o desempenho do sistema a ser controlado estimularam o recente interesse em se projetar controladores fuzzy *baseados em modelo matemático* e se obter modelos fuzzy a partir de dados de processo, através de técnicas de identificação [SGB05].

Desde o trabalho pioneiro de Takagi e Sugeno [TS85], o controle fuzzy baseado em modelo matemático (ou modelo fuzzy T-S, em referência aos autores citados) tem sido intensamente investigado. Nesse caso, combina-se a flexibilidade da teoria fuzzy e a já consolidada teoria de sistemas lineares, agrupando-as para descrever, analisar e controlar sistemas não-lineares. Tal combinação torna-se uma ferramenta poderosa para lidar com modelagem e controle de sistemas complexos, incluindo sistemas com atraso no tempo. Assim, o potencial do controle fuzzy baseado em modelo matemático é notável, já que não-linearidades e atrasos muitas vezes aparecem em diversos tipos de sistema e são frequentemente fontes de deterioração de desempenho ou mesmo de instabilidade [KM99]. Ao longo das últimas duas décadas, muitas questões relacionadas com a análise de estabilidade e síntese de controladores de sistemas fuzzy T-S foram publicadas. Veja, por exemplo, [TS92], [CRF96], [CF00], [TAA03], [LZ03], [LWL04], [SGB05] e [Fen06].

A situação atual no contexto dos sistemas de controle fuzzy é caracterizada por um certo desencontro entre simplicidade (uso apenas de regras compreensíveis para se descrever o comportamento e controlar um determinado sistema) e o uso de técnicas envolvendo equações diferenciais que podem garantir a estabilidade robusta mesmo para sistemas não-lineares. Do ponto de vista de pesquisa, a abordagem convencional parece ter sido, em grande parte, substituída pela baseada em modelo matemático, quando se trata de aplicações voltadas para controle de um ou mais sinais de saída de um sistema. Porém, a abordagem convencional continua a ser uma opção, principalmente nos níveis mais elevados de controle, como nos casos de supervisão e diagnóstico [SGB05].

2.2 Sistemas Não-Lineares com Atraso no Tempo

2.2.1 Sistemas Não-Lineares

Um sistema é não-linear se o princípio da superposição não se aplica a ele [Oga03, pág. 92]. Assim, para um sistema não-linear, em geral, não se pode obter a resposta à soma de dois sinais de entrada distintos somando os resultados obtidos com a consideração individual de tais sinais [Che99]. Na prática, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos e outros envolvem relações não-lineares das variáveis. Por exemplo, um refrigerador para o qual considera-se como entrada a potência elétrica entregue ao mesmo e como saída sua temperatura interna. Tal sistema tem dois comportamentos distintos, uma vez que seu resfriamento é forçado e o aquecimento se dá por troca natural de calor com o meio ambiente. Conseqüentemente, a constante de tempo dominante no aquecimento será maior do que a predominante no resfriamento. Em geral, um único modelo linear não conseguiria representar satisfatoriamente esse tipo de dinâmica [Agu07].

Embora muitas relações de grandezas físicas sejam representadas por equações lineares, na maioria dos casos a relação entre elas não é efetivamente linear. De fato, um estudo cuidadoso revela que os sistemas físicos, mesmo os chamados “sistemas lineares”, são realmente lineares somente em determinados intervalos de operação. É bem verdade que, em alguns casos, aproximações lineares são suficientes para aplicações práticas, mas infelizmente essa abordagem não é adequada para uma grande quantidade de situações. Veja, por exemplo, a operação de colunas de separação de gás na indústria petrolífera [Cav08]. Para casos equivalentes, a Seção 2.3 deste trabalho apresenta possibilidades recentes de modelagem e controle através de uma abordagem com modelos fuzzy T-S.

2.2.2 Sistemas com Atraso no Tempo

Em outra direção de pesquisa, sistemas com atraso no tempo têm sido objeto de estudo por quase meio século [HL93], [Nic01]. Pode-se dizer que a presença de atraso em sistemas reais é uma característica frequente. Exemplos práticos podem ser encontrados em sistemas de comunicação, eletrônicos, químicos, biológicos, dentre outros [KM99], [Nic01], [GKC03], [Mac89]. A presença de atraso nesses sistemas pode causar a degradação de seus desempenhos ou mesmo levá-los à instabilidade, justificando, assim, o interesse de vários autores nesse assunto. Registra-se, então, uma quantidade considerável de atenção aos problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas com

atraso no tempo, porém, em maioria, para sistemas contínuos e lineares [Nic01], [FS02], [WHSLO4], [Par06], [LWLH07].

Sabe-se que o projeto de controladores para sistemas físicos frequentemente se depara com alterações de comportamento causadas por atrasos nos estados, nas entradas ou nas saídas desses sistemas. No entanto, este trabalho limita-se ao tratamento de sistemas cujo atraso ocorra nos estados. Os atrasos também podem ser considerados como concentrados ou distribuídos. Para um sistema apresentando apenas atrasos concentrados, a exemplo dos que são foco deste trabalho, diz-se que o mesmo apresenta “atraso simples” caso seus estados atuais dependam de apenas um determinado instante anterior e “múltiplos atrasos” caso contrário. Atrasos múltiplos são ditos comensurados se os instantes anteriores de que dependem os estados atuais do sistema são múltiplos inteiros de um fator comum. Caso contrário, os atrasos são denominados incomensurados [GL07].

Outra forma de classificação dos atrasos é com relação à origem dos mesmos. Em geral, três tipos fundamentais de ocorrência podem ser identificados. No primeiro deles, o atraso pode advir de uma característica intrínseca do sistema, ou seja, o atraso aparece explicitamente nas equações que descrevem o comportamento do sistema. Em muitos outros sistemas, os atrasos aparecem ainda na aplicação dos sinais de controle ou na medição das variáveis controladas. A fonte desses atrasos está relacionada à utilização da técnica de realimentação digital de sinais, devido ao uso de medidores e atuadores que atualmente podem enviar e receber informações dos controladores através de redes digitais [GL07]. Uma conclusão comum entre vários autores é que, na maioria dos casos, os atrasos têm um efeito desestabilizante ou provocam perda de desempenho nos sistemas de controle. Porém, como última, mas não menos importante origem, existem situações em que os atrasos são *intencionalmente* introduzidos na ação de controle dos sistemas. Esse é um caso comum, por exemplo, na estabilização (ou rejeição) de vibrações em estruturas mecânicas [GKC03].

Em muitos sistemas, os atrasos são, ou podem ser considerados, invariantes no tempo. Esses atrasos podem ser conhecidos ou incertos, isto é, os atrasos incertos assumem um valor fixo, porém desconhecido, dentro de um certo intervalo. Por outro lado, em uma grande quantidade de casos práticos, os atrasos podem variar ao longo do tempo, sendo esse um dos principais motivos que direcionam o presente trabalho ao estudo de sistemas com essa característica. Para fins de análise de estabilidade, considera-se também que a variação do atraso dá-se dentro de um certo intervalo. Por exemplo, considerando que o atraso variante seja descrito pela variável d_t , tem-se $d_t \in [\underline{d}, \bar{d}]$, com $0 < \underline{d}$ e $\bar{d} < \infty$ [GL07].

Vale mencionar que os atrasos afetam tanto os sistemas contínuos como os discretos no tempo e, como apresentado, estão presentes em diversos tipos de sistemas reais. Considerando-se que a maioria dos sistemas físicos são contínuos no tempo, pode parecer natural que as teorias para análise de estabilidade e síntese de controladores sejam em sua maioria voltadas para esse tipo de sistema. No entanto, é razoável que a abordagem discreta seja utilizada para o propósito de controle, visto que a maioria dos controladores atuais é implementada de forma digital [SDM07]. Apesar disso, no âmbito de sistemas com atraso, os sistemas contínuos no tempo receberam muito mais atenção do que os discretos. A principal razão para isso vem do fato de que, em alguns casos, a estabilidade dos sistemas discretos no tempo pode ser investigada utilizando-se um sistema aumentado livre de atraso, como referenciado em [KH98]. Por exemplo, se a dinâmica de um sistema

depende do último instante de amostragem, tem-se

$$x_{t+1} = Ax_t + A_d x_{t-1}$$

em que t corresponde ao instante de amostragem. Sendo assim, pode-se fazer

$$\tilde{x}_{t+1} = \tilde{A}\tilde{x}_t \tag{2.1}$$

em que

$$\tilde{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & A_d \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Similarmente, se a constante de atraso é igual a dois, tem-se

$$x_{t+1} = Ax_t + A_d x_{t-2},$$

que pode ser reescrito como em (2.1) com

$$\tilde{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ x_{t-2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & A_d \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e assim sucessivamente. Como visto, quanto maior for o atraso, maior será a dimensão do sistema aumentado obtido com o uso dessa técnica. Além disso, a mesma não é indicada ao estudo da estabilidade de sistemas incertos, sistemas com atraso variante no tempo e sistemas originalmente de grandes dimensões [KH98], [FS03] e [ML08]. Sobretudo, a mesma não é aplicável à síntese de controladores robustos e obtenção de critérios de estabilidade independentes do atraso [LM08a].

Os resultados existentes para estabilização de sistemas, contínuos ou discretos no tempo, com atraso nos estados podem ser classificados em dependentes ou independentes do atraso. As condições independentes do atraso fornecem um controlador capaz de estabilizar um sistema seja qual for o tamanho de seu atraso. Por outro lado, ao considerar o valor do atraso, as chamadas “condições dependentes do atraso” fornecem um limite máximo para o mesmo, garantindo que o sistema em malha fechada seja estável desde que o atraso esteja dentro desse limite [Ric03]. Observa-se que a utilização de condições independentes do atraso para análise de sistemas com atrasos limitados pode levar a resultados muito conservadores. Sabe-se também que, em geral, condições dependentes do atraso levam a resultados conservadores se aplicadas em sistemas cuja estabilidade independe do valor do atraso [ML08]. Outro ponto importante é que as condições independentes do atraso não podem ser obtidas simplesmente tomando-se o limite das condições dependentes quando esse tende a infinito [Nic01, pág. 146].

Recentemente, problemas relacionados a sistemas incertos e com atraso no tempo atraíram o interesse de muitos pesquisadores e um grande esforço tem sido dedicado ao desenvolvimento de métodos e procedimentos para a síntese de controladores destinados à estabilização de tais sistemas. Isso fez com que muito mais atenção fosse destinada às técnicas dependentes do atraso, pois, ao se considerar essa característica, pode-se diminuir o conservadorismo de resultados em várias situações [Ric03]. A presença de incerteza nos parâmetros do sistema torna a tarefa de assegurar sua estabilidade mais complexa. Sem dúvida, uma das principais abordagens utilizadas para a análise de estabilidade desse tipo

de sistema é a utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii, como referenciado em [XL08]. Essa abordagem vem sendo muito utilizada na obtenção de condições convexas que permitem a análise de estabilidade robusta por meio de desigualdades matriciais lineares, descritas na Seção 2.4 deste trabalho.

2.3 Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)

Nas últimas décadas registrou-se um crescimento rápido da popularidade dos sistemas de controle fuzzy nas aplicações de engenharia. As numerosas e bem sucedidas aplicações motivaram um fluxo intenso de atividades de análise e projeto de sistemas de controle fuzzy [TW01].

Foi reconhecido que os sistemas fuzzy são aproximadores universais de funções e, conseqüentemente, podem ser usados para modelagem de uma vasta classe de processos [TW01]. Enfatiza-se que muitos sistemas reais, por exemplo, mecânicos e químicos, têm sido representados por modelos fuzzy T-S [FK01], [BMVSSO04], [CC05] e [CL05]. A utilização desse tipo de modelo pode mostrar-se adequada ao tratamento de sistemas que possuam não-linearidades acentuadas e ao projeto de controladores destinados a processos cujas faixas de operação são muito largas, como em processos petroquímicos, colunas de destilação etc.

2.3.1 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)

O modelo fuzzy proposto por Takagi e Sugeno [TS85] utiliza regras do tipo “SE - ENTÃO” para representar, através de regiões de operação que possam ser consideradas lineares, um sistema não-linear. A principal característica desse modelo é associar submodelos lineares, que expressam as dinâmicas dessas regiões, a cada uma de suas regras. Ou seja, esse modelo baseia-se na utilização de um conjunto de regras fuzzy para descrever um sistema não-linear em termos de subsistemas localmente lineares, conectados por funções de pertinência [Fen06]. O modelo global, que descreve o sistema não-linear, é obtido pela combinação difusa desses subsistemas.

Como visto, esse tipo de modelagem oferece uma abordagem alternativa para descrever o comportamento de sistemas não-lineares, inclusive os considerados complexos. Além disso, e tão importante quanto, os modelos fuzzy T-S fornecem uma base para o desenvolvimento de condições para análise de estabilidade e síntese de controladores por meio de várias das já consolidadas teorias e técnicas de controle disponíveis para sistemas lineares variantes no tempo. Desenvolvidos durante a última década, um grande número de resultados teóricos comprovam a viabilidade de tais possibilidades. Para detalhes veja [Fen06] e referências internas. Tanto sistemas contínuos quanto discretos no tempo podem ser descritos por modelos fuzzy T-S, porém, neste trabalho, enfoca-se essa última categoria.

Para sistemas discretos no tempo, a i -ésima regra de um modelo fuzzy T-S tem o seguinte formato:

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

$$\text{SE } z_1(t) \text{ é } M_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_{ip} ,$$

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t, & t = 0, 1, \dots \\ y_t = C_i x_t \end{cases} \quad (2.2)$$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $y_t \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Cada equação linear, representada por $A_i x_t + B_i u_t$, que compõe a consequência de uma regra fuzzy, é chamada de “subsistema”. O comportamento do sistema global é descrito por

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) (A_i x_t + B_i u_t), \quad (2.3)$$

$$y_t = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) C_i x_t \quad (2.4)$$

em que

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))} \quad (2.5)$$

sendo $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Em geral, as funções de pertinência relacionam os subsistemas com os valores dos estados, em cada instante de amostragem, contribuindo para a descrição do ponto de operação do sistema. Assim, para simular a evolução dos estados de um determinado sistema, dadas as funções de pertinência e uma condição inicial, basta calcular iterativamente o estado seguinte utilizando (2.3)-(2.5). Observe também que

$$\omega_i(t) \in [0 \ 1] \ \forall i, \quad \sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1. \quad (2.6)$$

Para o projeto de um controlador fuzzy, primeiramente é preciso o desenvolvimento de um modelo fuzzy T-S do sistema a ser controlado. Em geral, existem duas abordagens para a obtenção de modelos fuzzy [TW01]:

1. Identificação, utilizando uma base de dados composta por uma grande quantidade de amostragens dos sinais de entrada e saída do sistema;
2. Utilização das informações contidas nas equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema.

O próprio Sugeno, juntamente com outros pesquisadores, foi pioneiro na obtenção de modelos através do primeiro método [SK86] e [Sug98]. O procedimento consiste basicamente de duas etapas: identificação da estrutura e identificação paramétrica. A modelagem através de identificação é adequada a plantas cuja representação por modelos

analíticos e/ou físicos é muito difícil ou impossível. Por outro lado, modelos dinâmicos não-lineares para sistemas mecânicos podem ser obtidos, por exemplo, através dos métodos de Lagrange ou de Newton-Euler [TW01]. Nesses casos, a segunda técnica de modelagem pode ser mais apropriada.

Para exemplificar os conceitos apresentados, supõem-se que as características de um sistema, originalmente estudado por Tanaka e Wang [TW01, pág. 27] e apresentado a seguir, tenham sido obtidas através de um processo de identificação. Considera-se aqui uma planta discreta no tempo representada por um modelo fuzzy que incorpora duas regras.

Regra i ($i = 1, 2$):

SE $x_2(t)$ é M_{i1} ,

$$\text{ENTÃO } x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e as funções de pertinência são

$$\mu_{M_{11}}(x_2(t)) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_2(t) \leq -1, \\ -\frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}, & \text{se } -1 < x_2(t) < 1, \\ 0, & \text{se } x_2(t) \geq 1; \end{cases}$$

$$\mu_{M_{21}}(x_2(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_2(t) \leq -1, \\ \frac{1}{2}x_2(t) + \frac{1}{2}, & \text{se } -1 < x_2(t) < 1, \\ 1, & \text{se } x_2(t) \geq 1. \end{cases}$$

A Figura 2.3 mostra o comportamento instável dos estados deste sistema, x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada), para simulações realizadas com $u_t = 0$ e condição inicial $x = [0.9 \ -0.7]^T$. É interessante notar que a instabilidade ocorre apesar dos autovalores de A_1 e A_2 , respectivamente, $0.5(1 \pm i)$ e $-0.5(1 \pm i)$, estarem localizados dentro do círculo unitário centrado na origem do plano complexo \mathcal{Z} . Portanto, esse exemplo ilustra também que a estabilidade de cada subsistema *não é suficiente* para assegurar a estabilidade global do modelo fuzzy T-S.

2.3.2 Compensação Paralela Distribuída

Uma vez disponível, um modelo fuzzy pode ser utilizado de duas maneiras para se projetar controladores. Na primeira, através da aplicação de qualquer técnica de projeto baseada em modelo não-linear. Na outra, o controlador pode ser um sistema fuzzy independente, com a estrutura projetada a partir do modelo fuzzy T-S que descreve a planta [SGB05]. Compensação paralela distribuída (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensation*) é o termo usualmente empregado à possibilidade de se projetar um controlador dessa maneira [TW01].

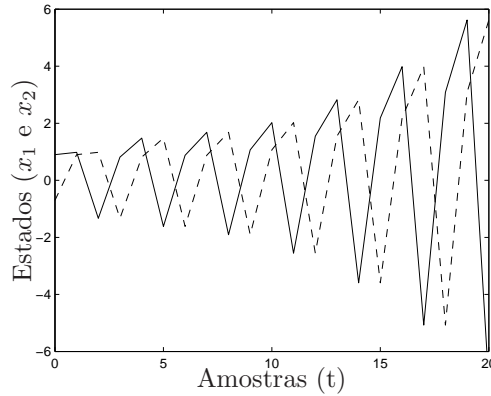


Figura 2.3: Simulação dos estados do sistema em malha aberta: x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada).

Em um projeto que utiliza PDC, cada regra de controle é projetada de forma correspondente a uma regra do modelo fuzzy T-S. O controlador projetado compartilha os mesmos conjuntos difusos utilizados nas premissas das regras do modelo [TW01]. Para o modelo fuzzy T-S apresentado em (2.2), pode-se construir o seguinte controlador fuzzy via PDC:

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{ENTÃO } u_t = K_i x_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

em que $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o vetor que contém os ganhos de realimentação da regra i . Nesse caso, os termos consequentes das regras de controle utilizam a realimentação de estados para compor o sinal de entrada do sistema. Porém, outras formas de controle podem ser utilizadas, por exemplo, realimentação estática ou dinâmica da saída [TW01]. A saída do controlador fuzzy é inferida por

$$u_t = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) K_i x_t$$

com $\omega_i(t)$ satisfazendo (2.5) e (2.6).

Apesar do controlador fuzzy ser construído a partir da estrutura local utilizada no modelo, os ganhos de realimentação K_i devem ser determinados com o uso de condições globais de projeto. Tais condições são necessárias para garantir a estabilidade global e o desempenho de controle do sistema. Utilizando-se PDC, tem-se um procedimento simples e natural para aplicação dos ganhos obtidos a partir de condições de síntese globais. O desenvolvimento de tais condições será abordado, inicialmente, na Seção 2.4 deste trabalho.

Como exemplo, aplica-se à planta descrita em (2.7) a condição global de síntese apresentada por Tanaka e Wang em [TW01, pág. 31]. Os ganhos encontrados são $K_1 = [-0.65 \ 0.5]$ e $K_2 = [-0.87 \ 0.11]$. Utilizando a compensação paralela distribuída (2.8) em (2.7), o controlador fuzzy pode ser então projetado como mostrado a seguir. Os

efeitos de sua utilização são ilustrados na Figura 2.4, na qual pode-se notar a estabilização dos estados do sistema original, x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada), para a mesma condição inicial utilizada na simulação anterior.

Regra i ($i = 1, 2$):

SE $x_2(t)$ é M_{i1} ,

ENTÃO $u_t = K_i x_t$, $t = 0, 1, \dots$

em que

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.65 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.87 & 0.11 \end{bmatrix}$$

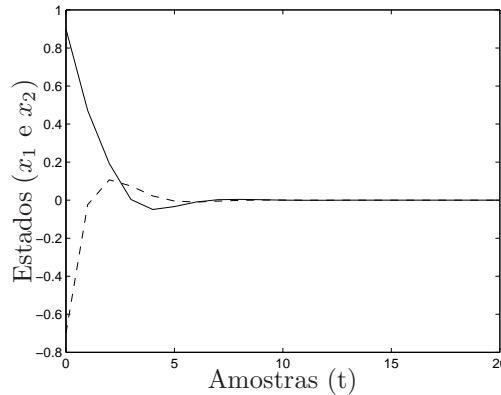


Figura 2.4: Simulação dos estados do sistema em malha fechada: x_1 (linha sólida) e x_2 (linha tracejada).

2.4 Controle Robusto

2.4.1 Sistemas Lineares Incertos

Um controlador é dito robusto se ele assegura ao sistema em malha fechada estabilidade e, eventualmente, alguma especificação de desempenho, mesmo na presença de um conjunto de incertezas. Tais incertezas podem estar relacionadas à desconformidades entre o modelo e a planta ou, simplesmente, a imprecisões previstas no modelo [SP05]. Dessa forma, um dos grandes desafios na síntese de controladores é garantir a estabilidade e o desempenho dos sistemas a serem controlados frente às situações nas quais torna-se necessário ou conveniente a utilização de modelos com parâmetros incertos. Por exemplo, pode ser necessário descrever um sistema cujos parâmetros não são precisamente conhecidos ou estejam sujeitos a variações no tempo. Por outro lado, pode-se também negligenciar propositalmente algumas dinâmicas e não-linearidades de um sistema, representando-o através de um modelo mais simples, porém com parâmetros incertos [Gon06].

Além de variantes ou invariantes no tempo, as incertezas podem ser classificadas em função do tipo de descrição do conjunto que as contém. As incertezas podem ser descritas matematicamente de várias maneiras, merecendo destaque as formulações: politópicas,

limitadas em norma e intervalares. Além de auxiliar no tratamento de incertezas, tais formulações podem ser utilizadas para estabelecer o domínio de variação de parâmetros conhecidos de um sistema. Nesse sentido, o presente trabalho adota a formulação politópica. Por exemplo, considere o sistema:

$$\sigma[x_t] = A(\alpha_t)x_t + Bu_t$$

em que $\sigma[\cdot]$ representa o operador “derivada temporal” no caso da variável t ser contínua no tempo ou o operador “avanço” no caso da variável t ser discreta no tempo, e

$$A(\alpha_t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 + \alpha_t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \alpha_t \leq 4.$$

Os menores politopos \mathcal{P}_A e \mathcal{P}_B que descrevem as matrizes $A(\alpha_t)$ e B , respectivamente, são:

$$\mathcal{P}_A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{P}_B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ao se generalizar o conceito de sistemas lineares com incertezas variantes no tempo, chega-se à classe formada pelos sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo. Essa classe abrange todos os sistemas lineares nos quais as matrizes do modelo em espaço de estados são funções de um vetor de parâmetros variantes no tempo α_t [AGB95]. A princípio, a maioria dos sistemas pertencentes a essa classe podem ser tratados através das técnicas de controle robusto para sistemas lineares *variantes no tempo*, encontradas amplamente na literatura. Isso inclui os sistemas não-lineares descritos através de modelos fuzzy T-S.

O controle robusto de sistemas lineares pode ser implementado, dentre outras maneiras, através da realimentação estática de estados ou realimentação dinâmica de saída. A realimentação estática de estados ocorre através da utilização de um determinado ganho para cada sinal de estado. Por outro lado, o emprego de compensadores dinâmicos em sistemas reais pode ser mais favorável, pois utiliza a(s) saída(s) do sistema, em geral disponível(is), e não os estados, nem sempre medidos. A princípio, para ambos os métodos, a obtenção desses ganhos é um problema de difícil tratamento. Isto porque é necessário garantir a estabilidade de infinitos sistemas pertencentes ao domínio de incertezas. A Teoria de Lyapunov tem sido intensamente empregada no tratamento desse tipo de problema, uma vez que essa teoria pode ser explorada para obtenção de formulações numericamente tratáveis [BEFB94], [Bar94].

Inicialmente, utilizava-se a Teoria de Lyapunov apenas para obtenção de ganhos a serem utilizados na realimentação estática de estados. A análise de estabilidade e a síntese de controladores baseavam-se exclusivamente em critérios que utilizam candidatas a função de Lyapunov quadráticas nos estados e invariantes para todos os valores de incertezas associados ao sistema em estudo [Bar94]. Embora a estabilidade quadrática seja especialmente adequada à análise de sistemas incertos com parâmetros variantes no tempo, os resultados obtidos podem ser bastante conservadores em muitas situações. Ou

seja, a obtenção de um único vetor de ganhos que estabilize todas as variações possíveis do sistema incerto pode não ser viável.

Em seguida, desenvolveram-se abordagens alternativas nas quais as faixas de variação dos parâmetros incertos foram consideradas, permitindo-se a hipótese de que as matrizes que descrevem o sistema no espaço de estados dependam de forma afim desses parâmetros [GAC96], [BEFB94]. Nesse caso, a análise de estabilidade e a síntese de controladores são realizadas com base em critérios que utilizam candidatas à função de Lyapunov, quadráticas nos estados e dependentes de parâmetros. Obtém-se assim um conjunto de ganhos para realimentação de estados que são escalonados automaticamente. Tais controladores geralmente dependem do mesmo parâmetro que influencia o comportamento da planta, necessitando que medições desse parâmetro estejam disponíveis em tempo real.

Em relação à realimentação de saída, três abordagens principais podem ser consideradas. A primeira baseia-se na utilização de um observador de estados, tornando-se interessante quando não se tem medições disponíveis de todos esses últimos, veja [WHU99] para sistemas discretos no tempo e [WHU01] para sistemas contínuos no tempo. A segunda abordagem, chamada de “realimentação estática de saída”, favorece implementações práticas de controladores em tempo real, pois utiliza uma quantidade reduzida de operações matriciais para compor o sinal de controle, veja [GPTZ03] e [DY08] para detalhes. Finalmente, a utilização de um “compensador dinâmico de saída” é a terceira maneira de se abordar a realimentação de saída de um sistema. Ao custo de um maior número de operações matriciais, realizadas para compor o sinal de controle a cada instante, o comportamento dinâmico desse tipo de controlador favorece sua aplicação em diversas situações. Veja, por exemplo, [SGC97], [KSVS04] e [QFY08]. No Capítulo 6, utiliza-se essa última abordagem para o controle de sistemas fuzzy T-S. Ressalta-se que a síntese de um compensador dinâmico de saída pode ser vista como o caso da realimentação estática de saída para um sistema aumentado. Para detalhes a esse respeito, veja [SADG97].

2.4.2 Principais Ferramentas Matemáticas

Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Do ponto de vista de otimização, uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma restrição convexa. De forma genérica, uma LMI pode ser representada por

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^r x_i F_i > 0 \quad (2.9)$$

em que $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, r$ são matrizes simétricas conhecidas e $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$ são variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazerem a desigualdade. Ou seja, $F(x)$ é uma função afim do vetor $x = [x_1, \dots, x_r]^T$. Diz-se que uma LMI é factível se existe uma solução x tal que $F(x)$ seja uma matriz definida positiva, isto é,

$$v^T F(x) v > 0, \quad \forall v \neq 0, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

A equação (2.9) é uma LMI estrita. A exigência de que $F(x)$ seja apenas semidefinida positiva (≥ 0) tornaria esta LMI não estrita. Em ambos os casos, as formulações são

equivalentes a conjuntos de n desigualdades polinomiais e, caso desejado, assim podem ser reescritas. Como exemplo, para $n = 2$, considere uma desigualdade sob a forma genérica (2.9) sendo

$$F(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \star & a_{22} \end{bmatrix}}_{F_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \star & b_{22} \end{bmatrix}}_{F_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \star & c_{22} \end{bmatrix}}_{F_2} x_2 > 0 ,$$

em que o símbolo \star é utilizado para indicar os blocos simétricos em relação à diagonal principal. Operando algebricamente tem-se

$$F(x) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}x_1 + c_{11}x_2 & a_{12} + b_{12}x_1 + c_{12}x_2 \\ \star & a_{22} + b_{22}x_1 + c_{22}x_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Da teoria de matrizes, [WB95, pág. 951], tem-se que uma matriz simétrica $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é definida positiva se e somente se o determinante de F e um de seus menores principais forem positivos. Assim, a LMI exemplificada é factível caso as duas desigualdades polinomiais a seguir sejam satisfeitas:

$$\det F(x) > 0 \quad \text{e} \quad a_{11} + b_{11}x_1 + c_{11}x_2 > 0 .$$

Ao se dizer que uma LMI define uma restrição convexa, indica-se outra propriedade importante: o conjunto de soluções x que atende à restrição é convexo. Um conjunto \mathcal{C} é convexo se o segmento de reta entre quaisquer dois pontos do conjunto estiver completamente contido no conjunto, por exemplo, para $x_1 \in \mathbb{R}^n$ e $x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$x(\lambda) \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \mathcal{C} \quad \text{para} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Uma LMI pode ser representada de várias formas e raramente aparece num problema na forma apresentada em (2.9). No entanto, toda LMI pode ser reescrita nessa forma genérica, possibilitando que os algoritmos de resolução sejam desenvolvidos para essa representação. Assim, uma das vantagens imediatas de se formular um problema em termos de LMIs é a disponibilidade de *softwares*, comerciais ou gratuitos, capazes de solucionar numericamente tais desigualdades de forma eficiente, em tempo polinomial [BEFB94]. Por exemplo, o LMI *Control Toolbox* [GNLC95] e o SeDuMi [Stu99], ambos para uso com o MATLAB[®].

Vários problemas de restrição convexa podem ser escritos como LMI. Em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de norma de matrizes e restrições que aparecem na teoria de controle, como na teoria de Lyapunov, podem ser reescritas na forma de LMIs [BEFB94] e [VB00]. Cabe salientar que caracterizar um problema de controle na forma de um problema baseado em LMIs significa, na prática, a sua solução [BEFB94]².

²Maiores detalhes a respeito de desigualdades matriciais lineares e suas aplicações na teoria de controle podem ser encontrados nessa referência.

Complemento de Schur

O complemento de Schur possibilita a conversão de uma classe de desigualdades convexas não-lineares, que aparece frequentemente em problemas de controle, em LMIs [VB00]. A referida classe é composta pelas desigualdades

$$R(x) > 0 \quad \text{e} \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad (2.10)$$

em que $R(x) = R(x)^T$, $Q(x) = Q(x)^T$ e $S(x)$ dependem de forma afim do parâmetro x . O complemento de Schur converte, de forma equivalente, esse conjunto de desigualdades não-lineares em uma LMI. Assim, (2.10) é verificada se e somente se

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.11)$$

A prova do complemento de Schur pode ser encontrada no Apêndice A deste trabalho.

Lema de Finsler

Atualmente, essa ferramenta da álgebra linear tem sido utilizada na teoria de controle principalmente para se fazer a incorporação das equações diferenciais que regem o comportamento dos sistemas a serem controlados às funções de Lyapunov, usadas para verificar a estabilidade dos mesmos (veja a Subseção 2.4.5 adiante). Tal abordagem permite que isso seja feito por meio de multiplicadores escalares ou matriciais. Dessa forma, novas condições para estudo de estabilidade e síntese de controladores podem ser formuladas, reduzindo, em geral, o conservadorismo das condições obtidas sem o auxílio dessa ferramenta.

A abordagem através do Lema de Finsler permite uma nova leitura dos resultados clássicos, provendo também uma base comum e consistente para interpretação de muitos resultados em análise de estabilidade e em síntese de controladores obtidos na última década. Por exemplo, [GdOH98], [dOBG99], [dOGH99], [PABB00] e [LP03] para análise de estabilidade e [dOGB02] e [GdOB02] para síntese de controladores. Todos esses trabalhos podem ser vistos como aplicações particulares do seguinte lema, atribuído a Finsler (1937).

Lema 1 (Lema de Finsler). *Sejam $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha_t) = \mathcal{Q}(\alpha_t)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B}(\alpha_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que $\text{posto}(\mathcal{B}(\alpha_t)) < n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $\varphi^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \varphi < \mathbf{0}$, $\forall \varphi : \mathcal{B}(\alpha_t) \varphi = \mathbf{0}$, $\varphi \neq \mathbf{0}$
- ii) $\mathcal{B}(\alpha_t)^{\perp T} \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^{\perp} < \mathbf{0}$
- iii) $\exists \mu(\alpha_t) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha_t) - \mu(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^T \mathcal{B}(\alpha_t) < \mathbf{0}$
- iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha_t) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha_t) + \mathcal{X}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t) + \mathcal{B}(\alpha_t)^T \mathcal{X}(\alpha_t)^T < \mathbf{0}$

A prova do Lema de Finsler pode ser encontrada no Apêndice A desta dissertação.

2.4.3 Estabilidade de Sistemas Contínuos no Tempo

A história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos começou há mais de cem anos, em 1890, quando Lyapunov publicou o trabalho introduzindo o que é conhecido atualmente como Segundo Método de Lyapunov [Lya92]. Na sequência, são apresentados alguns resultados para análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas contínuos no tempo. Como exemplo, considere o sistema linear sujeito a incertezas variantes no tempo descrito por

$$\sigma[x_t] = A(\alpha_t)x_t \quad (2.12)$$

em que $\sigma[\cdot]$ é o operador derivada e t representa o tempo contínuo até segunda especificação. Em particular, suponha que esse sistema possua a seguinte descrição politópica:

$$A(\alpha_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)A_i, \quad \alpha_i(t) \in [0, 1] \forall i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \quad (2.13)$$

em que os vértices A_i são conhecidos. De acordo com a teoria de Lyapunov, esse sistema é globalmente assintoticamente estável em torno da origem (ponto de equilíbrio do sistema) se existir uma função (chamada de “função de Lyapunov”) a valores reais $V(x_t, \alpha_t)$ tal que:

1. $V(0, \alpha_t) = 0$ para todo $t \geq 0$;
2. $V(x_t, \alpha_t) \rightarrow \infty$ quando $\|x_t\| \rightarrow \infty$;
3. $V(x_t, \alpha_t) > 0$ para todo $x_t \neq 0$ para todo $t \geq 0$;
4. $\dot{V}(x_t, \alpha_t) < 0$ para todo $x_t \neq 0$ para todo $t \geq 0$.

Uma condição *suficiente* para que a candidata a função de Lyapunov

$$V(x_t) = x_t^T P x_t \quad (2.14)$$

garanta a estabilidade do sistema descrito por (2.12) e (2.13) é a factibilidade das seguintes LMIs:

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.15)$$

Isso pois, a função candidata considerada atende diretamente aos dois primeiros itens das condições de Lyapunov. O terceiro item é atendido impondo-se a primeira desigualdade apresentada em (2.15). As demais desigualdades em (2.15) têm o objetivo de atender ao quarto item das condições de Lyapunov. Para verificar essa última afirmação, calcula-se a derivada temporal de (2.14) ao longo das trajetórias de (2.12), podendo-se obter:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}_t^T P x_t + x_t^T P \dot{x}_t \\ &= (x_t^T A(\alpha_t)^T) P x_t + x_t^T P (A(\alpha_t)x_t) \\ &= x_t^T [A(\alpha_t)^T P + P A(\alpha_t)] x_t. \end{aligned}$$

Portanto, deve-se verificar

$$A(\alpha_t)^T P + P A(\alpha_t) < 0.$$

Essa condição pode ser recuperada de (2.15) por meio dos seguintes passos: *i*) em (2.15) multiplique as desigualdades indexadas em *i* por $\alpha_i(t)$ conforme definido em (2.13) e *ii*) some para $i = 1, \dots, N$.

Como se vê, essas LMIs fornecem um caminho relativamente simples para se analisar a estabilidade de sistemas sujeitos a incertezas variantes no tempo. É interessante notar que apenas a verificação dos vértices é suficiente para garantir a estabilidade de todos os sistemas pertencentes ao politopo, desde que a *mesma* matriz P seja usada em todos os vértices.

No período entre 1990 e 2000, pode-se verificar que a grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura utilizam (2.14) como candidata à função de Lyapunov para (2.12). Essa abordagem ficou conhecida como “Estabilidade Quadrática” [Bar83]. Assim, (2.15), que é uma condição apenas suficiente para a estabilidade *global e assintótica* do sistema contínuo no tempo descrito por (2.12) e (2.13), torna-se necessária e suficiente para a *estabilidade quadrática* desse sistema.

Como não existem restrições em $\dot{\alpha}_t$, a formulação (2.15) trata sistemas que possuem taxas temporais de variação paramétrica arbitrariamente elevadas. Por outro lado, (2.15) pode ser usada mesmo quando o sistema é incerto e invariante no tempo, isto é, $\alpha_t = \alpha$, $\forall t$. Naturalmente, nesse último caso, a condição proposta em (2.15) poderá apresentar um grande conservadorismo, ou seja, pode não existir uma matriz $P > 0$ que satisfaça as demais desigualdades mesmo que o sistema seja estável.

Além disso, a partir de (2.15), pode-se derivar, facilmente, uma condição de síntese. Isso pode ser feito de duas maneiras: usando uma transformação de congruência ou observando que, se o sistema $\dot{x}_t = A(\alpha_t)^T x_t$ é estável, então o sistema $\dot{x}_t = A(\alpha_t)x_t$ também o é. Essa última maneira é utilizada iniciando-se pela consideração do seguinte sistema:

$$\sigma[x_t] = A(\alpha_t)x_t + B(\alpha_t)u_t \quad (2.16)$$

em que $B(\alpha_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B(\alpha_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)B_i$ e u_t é o sinal de controle dado por

$$u_t = Kx_t, \quad (2.17)$$

sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ um vetor de ganhos estáticos a ser projetado para estabilizar (2.16). Levando (2.17) em (2.16) obtém-se

$$\dot{x}_t = A_{cl}(\alpha_t)x_t \quad (2.18)$$

com $A_{cl}(\alpha_t) = A(\alpha_t) + B(\alpha_t)K$. Portanto, se $\dot{x}_t = A_{cl}(\alpha_t)^T x_t$ é estável, também é estável o sistema (2.18). Note ainda que, $A_{cl}(\alpha_t)$ pode ser escrito como $A_{cl}(\alpha_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)(A_i + B_iK)$. Assim, em (2.15), substitui-se A_i por $(A_i + B_iK)^T$, obtendo-se

$$A_iP + B_iKP + PK^T B_i^T + PA_i^T < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Fazendo-se uma mudança de variável para linearização das desigualdades obtidas (conforme exemplos em [BPG89], [GPB91] e [GPS93]), $KP = Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, chega-se à condição para síntese de controladores

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ A_iP + B_iZ + Z^T B_i^T + PA_i^T < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

A factibilidade dessas LMIs garante a estabilização do sistema (2.16) por meio da lei de controle (2.17). Nesse caso, para a realimentação de estados, utiliza-se o ganho $K = ZP^{-1}$.

2.4.4 Estabilidade de Sistemas Discretos no Tempo

As condições de Lyapunov também podem ser aplicadas para sistemas discretos no tempo. Para tal, a partir desse ponto, considere $\sigma[\cdot]$ como o operador avanço e t como instantes de amostragem. Como exemplo, em comparação ao caso contínuo no tempo, escolhe-se o mesmo sistema linear sujeito a incertezas variantes no tempo descrito por (2.12) e (2.13) e a mesma função candidata quadrática (2.14).

Similarmente ao caso anterior, os dois primeiros itens das condições de Lyapunov são prontamente atendidos pela função candidata e a positividade dessa, requerida no terceiro item, assegurada por $P > 0$. Para atender ao quarto item das condições de Lyapunov que, nesse caso, corresponde a

$$\Delta V(x_t, \alpha_t) \equiv V(x_{t+1}, \alpha_{t+1}) - V(x_t, \alpha_t) < 0 ,$$

obtem-se

$$x_{t+1}^T P x_{t+1} - x_t^T P x_t < 0. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.12) em (2.19), pode-se resumir a análise de estabilidade do sistema descrito por (2.12) e (2.13) através das seguintes LMIs:

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ A(\alpha_t)^T P A(\alpha_t) - P < 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Mostra-se posteriormente que uma condição suficiente para (2.20) é dada por:

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ A_i^T P A_i - P < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.21)$$

Da mesma forma que para o caso contínuo no tempo, a estabilidade de todos os sistemas pertencentes ao politopo pode ser garantida apenas com a verificação de seus vértices com a mesma matriz P . A condição (2.21) é necessária e suficiente para a estabilidade *quadrática* do sistema discreto no tempo descrito por (2.12) e (2.13), porém apenas suficiente para a estabilidade *global e assintótica* desse.

A verificação de (2.21) a partir de (2.20), assim como a obtenção da condição de síntese correspondente, podem ser facilmente realizadas com a utilização do Complemento de Schur. Para atingir tais objetivos, inicialmente reescreve-se a condição (2.20) utilizando-se a propriedade $PP^{-1} = \mathbf{I}$ da seguinte forma

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ P - A(\alpha_t)^T (PP^{-1}) P A(\alpha_t) > 0. \end{cases}$$

Então, utilizando-se $R(x) = P$, $Q(x) = P$ e $S(x) = A(\alpha_t)^T P$, (2.10) e (2.11), pode-se obter uma condição de estabilidade equivalente a (2.20) com o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} P & A(\alpha_t)^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.22)$$

Nesse ponto, é possível perceber que essa última condição pode ser testada, de forma equivalente, somente para os vértices do politopo que define $A(\alpha_t)$:

$$\begin{bmatrix} P & A_i^T P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

Isso pois, (2.22) pode ser recuperada de (2.23) ao se multiplicar essa por $\alpha_i(t)$ conforme definido em (2.13) e somar o resultado para $i = 1, \dots, N$. Finalmente, aplicando o complemento de Schur em (2.23), pode-se obter (2.21). Ou seja, pode-se concluir que (2.20) e (2.21) são equivalentes.

Além disso, conforme feito para o caso contínuo no tempo, substituindo A_i por $(A_i + B_i K)^T$ em (2.23), pode-se reescrever essa última condição como

$$\begin{bmatrix} P & A_i P + B_i K P \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Considerando $KP = Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz livre, a factibilidade das LMIs

$$\begin{bmatrix} P & A_i P + B_i Z \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (2.24)$$

garante a estabilização de (2.16) por meio do ganho estático de realimentação de estados $K = ZP^{-1}$.

2.4.5 Estabilidade via Lema de Finsler

Atualmente, visando obter novas condições para análise de estabilidade e síntese de controladores, o Lema de Finsler é geralmente utilizado como se segue. Nesta dissertação, apenas o caso discreto no tempo é discutido. Com o objetivo de se identificar, no domínio do problema de estabilização do sistema em estudo, relações equivalentes às descritas no item **i)** do Lema 1, reescreve-se (2.12) como

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = 0$$

e (2.19) como

$$\begin{bmatrix} x_t^T & x_{t+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix} < 0.$$

Feito isto, as seguintes equivalências com o Lema 1 podem ser facilmente percebidas

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(\alpha_t) &= \begin{bmatrix} A(\alpha_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q}(\alpha_t) &= \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, utilizando o item **iv)** do Lema de Finsler, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} + \mathcal{X}(\alpha_t) \begin{bmatrix} A(\alpha_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha_t)^T \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathcal{X}(\alpha_t)^T < 0.$$

Considerando, para este caso, $\mathcal{X}(\alpha_t) = \mathcal{X} = [X_1^T \ X_2^T]^T$, X_1 e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, após poucas operações algébricas, tem-se

$$\begin{bmatrix} -P + X_1 A(\alpha_t) + A(\alpha_t)^T X_1^T & -X_1 + A(\alpha_t)^T X_2^T \\ \star & P - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (2.25)$$

Note que a escolha de variáveis de folga invariantes no tempo é conservadora³. Por outro lado, evita-se que ocorram produtos de matrizes variantes no tempo em (2.25), permitindo que essa desigualdade seja garantida apenas pela condição formulada a seguir:

O sistema descrito por (2.12) e (2.13) é globalmente assintoticamente estável em torno da origem caso as seguintes LMIs sejam satisfeitas

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -P + X_1 A_i + A_i^T X_1^T & -X_1 + A_i^T X_2^T \\ \star & P - X_2 - X_2^T \end{array} \right] < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.26)$$

A verificação de (2.25) a partir de (2.26) é realizada por meio de um recurso já apresentado em situações similares: multiplicam-se as desigualdades indexadas a i de (2.26) por $\alpha_i(t)$ conforme definido em (2.13) e soma-se o resultado para $i = 1, \dots, N$. Assim, a desigualdade original pode ser recuperada dessas últimas. Também, similarmente a casos anteriores, (2.26) é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade *quadrática* do sistema descrito por (2.12) e (2.13), porém apenas suficiente para a estabilidade *global e assintótica* do mesmo.

Além disso, pode-se derivar uma condição de síntese a partir de (2.26). Substituindo-se A_i por $(A_i + B_i K)^T$ em (2.26), considerando-se $K X_2^T = Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz livre e $X_1 = \mathbf{0}$, após algumas operações algébricas, tem-se

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \\ \left[\begin{array}{cc} -P & A_i X_2^T + B_i Z \\ \star & P - X_2 - X_2^T \end{array} \right] < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.27)$$

Nesse caso, para a realimentação de estados, utiliza-se o ganho $K = Z(X_2^T)^{-1}$.

É interessante notar que, durante o desenvolvimento para a obtenção de (2.26), fez-se necessária a introdução das variáveis adicionais X_1 e X_2 , tornando o problema numericamente mais complexo. Essa aparente desvantagem se reverte, no entanto, na obtenção de condições menos conservadoras, especialmente no caso de sistemas invariantes no tempo. Nesse caso, pode-se substituir P por P_i em (2.26), resultando em uma candidata à função de Lyapunov dada por

$$V(x_t, \alpha) = x_t^T P(\alpha) x_t; \quad (2.28)$$

em que

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \in [0 \ 1] \forall i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1.$$

Observe que, nesse caso, o parâmetro α é invariante no tempo. Caso a condição resultante seja factível, mostra-se que (2.28) é uma função de Lyapunov que assegura a estabilidade, nesse caso dita *robusta*, do sistema $\sigma[x_t] = A(\alpha)x_t$. Essa redução de conservadorismo permite que alguns problemas originalmente sem solução via (2.23) possam ser resolvidos em espaços aumentados e utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetro. Porém, deve-se ressaltar que, por aplicar-se exclusivamente a sistemas invariantes no tempo, essa técnica não pode ser utilizada diretamente em problemas de estabilização,

³No Lema 1, escolhendo-se $\mathcal{X}(\alpha_t) = \mathcal{X}$, $\mathbf{iv}) \Rightarrow \mathbf{i})$, mas não o contrário.

por exemplo, de sistemas fuzzy T-S. No Capítulo 3 desta dissertação, e em [DB01], são apresentadas técnicas que permitem a utilização de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros variantes no tempo. Isso possibilita a obtenção de condições adequadas ao tratamento de sistemas variantes no tempo e que tendem a ser menos conservadoras do que as apresentadas neste capítulo. Nessa referência, o conceito de estabilidade poliquadrática é introduzido.

A respeito da condição de síntese (2.27), vale mencionar que uma vantagem importante em relação à (2.24) está no fato de que ganhos descentralizados – isto é, com K bloco-diagonal – podem ser obtidos sem a imposição de qualquer restrição adicional à matriz P . Por outro lado, utilizando (2.24), P deverá possuir uma estrutura bloco-diagonal semelhante a do ganho K , restringindo significativamente as soluções possíveis. Novamente, funções de Lyapunov dependentes de parâmetro podem ser empregadas substituindo-se P por P_i em (2.27). Resultados semelhantes podem ser obtidos para o caso contínuo no tempo, entretanto os resultados de síntese são mais limitados do que os obtidos para o caso discreto no tempo [PABB00] e [dOS01].

Capítulo 3

Manipulações Algébricas para Sistemas Variantes no Tempo

Sistemas lineares com incertezas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S pertencem à classe dos sistemas variantes no tempo. Sendo assim, algumas semelhanças podem ser identificadas entre esses dois tipos de sistema, principalmente quando as incertezas do primeiro são descritas por meio de politopos. Dessa forma, em ambos os casos, os sistemas podem ser representados pela combinação convexa de seus vértices.

Assim, um dos objetivos deste capítulo é comparar algumas abordagens utilizadas para o tratamento de problemas que envolvem a estabilidade de sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S, considerando ambos discretos no tempo. Para evidenciar as diferenças e semelhanças entre as manipulações algébricas associadas às características de cada tipo de sistema, escolhe-se fazer esse estudo comparativo desprezando-se a presença de atrasos e utilizando-se uma candidata à função de Lyapunov bastante simples. Porém, deve-se ressaltar que, a partir do uso dos chamados funcionais de Lyapunov-Krasovskii, as abordagens em questão podem ser estendidas para o tratamento de sistemas com atraso no tempo, conforme mostrado nos próximos capítulos.

Conforme mostrado nas próximas seções, as descrições, em *malha aberta*, dos sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo e dos sistemas fuzzy T-S são bastante similares. A diferença está apenas no parâmetro que rege a variação dos sistemas, justamente por ser incerto no primeiro caso e, de acordo com as formulações apresentadas na Seção 2.3, conhecido no segundo. Contudo, uma vez que a estabilidade deve ser garantida para qualquer combinação convexa dos vértices desses sistemas, independentemente da possibilidade de se determiná-la a cada instante, mostra-se que desenvolvimentos isolados levam a condições para análise de estabilidade que satisfazem aos dois tipos de sistema.

No entanto, a possibilidade de se calcular o parâmetro que determina o ponto de operação do sistema permite que leis de controle mais elaboradas sejam consideradas para a estabilização dos sistemas fuzzy T-S. O referido parâmetro é utilizado para ponderar ganhos de realimentação, previamente projetados para cada vértice do sistema. Essa técnica, introduzida na Seção 2.3, é conhecida como PDC. Já para o caso dos sistemas com incertezas variantes no tempo, restringe-se a realimentação de estados a um único ganho estabilizante, visto que o ponto de operação do sistema não pode ser determinado a cada instante. Veja [LM08b] para detalhes. Essa diferença entre as leis de controle

é a principal razão para que as condições dedicadas à análise de estabilidade em *malha fechada* e à síntese de controladores sejam desenvolvidas especificamente para os dois tipos de sistema em questão. Ou seja, apesar da possibilidade de se investigar a estabilidade em malha aberta de sistemas lineares com incertezas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S por meio de uma mesma condição, geralmente, o mesmo não acontece para a estabilidade em malha fechada e para a síntese de controladores.

Outro objetivo deste capítulo é propor novas abordagens para o tratamento de problemas que envolvem a análise de estabilidade e a estabilização de sistemas fuzzy T-S discretos no tempo. A técnica para formulação de condições que possibilitam a análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S em malha fechada proposta em [LL08] é aprimorada com o uso do Lema de Finsler, ao invés da soma de equações nulas, originalmente utilizada. Além disso, uma nova técnica para elaboração de condições convexas destinadas à síntese de controladores fuzzy também é apresentada. Conforme levantamento bibliográfico, parece que essas abordagens, estendidas no Capítulo 4, para sistemas com atraso constante nos estados, e no Capítulo 5, para o caso em que o atraso é variante no tempo, ainda não foram utilizadas por outros autores. Mostra-se que as mesmas podem levar a condições mais eficientes do que as obtidas por métodos convencionais, reduzindo tanto o conservadorismo dos resultados como o custo computacional para obtê-los.

3.1 Sistemas com Incertezas Variantes no Tempo

Considere o sistema discreto no tempo sujeito a incertezas variantes no tempo, dado por:

$$x_{t+1} = A(\alpha_t)x_t + B(\alpha_t)u_t \quad (3.1)$$

em que $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_t \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, $A(\alpha_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha_t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Em particular, suponha que esse sistema possua a seguinte descrição politópica:

$$[A|B](\alpha_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)[A|B]_i, \quad \alpha_i(t) \in [0 \ 1] \forall i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \quad (3.2)$$

em que os vértices $[A|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, são precisamente conhecidos e $\alpha_i(t)$ são os elementos incertos que compõem o vetor de parâmetros $\alpha_t \in \mathbb{R}^N$.

Considere também a lei de controle

$$u_t = Kx_t \quad (3.3)$$

em que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é o ganho de realimentação que assegura a estabilidade robusta do sistema (3.1)-(3.2) para todo α_t . Portanto, o sistema com incertezas variantes no tempo em malha fechada, formado por (3.1)-(3.2) e (3.3), pode ser definido como

$$x_{t+1} = \hat{A}(\alpha_t)x_t \quad (3.4)$$

com

$$\hat{A}(\alpha_t) \equiv A(\alpha_t) + B(\alpha_t)K. \quad (3.5)$$

Várias candidatas à função de Lyapunov, disponíveis na literatura, podem ser utilizadas como base para o desenvolvimento das abordagens apresentadas neste capítulo. Além disso, utilizando-se os chamados funcionais de Lyapunov-Krasovskii, as abordagens em questão podem ser estendidas para o tratamento de sistemas com atraso no tempo, por exemplo, conforme mostrado nos Capítulos 4 e 5 deste trabalho. Porém, para evidenciar as diferenças e semelhanças entre as manipulações algébricas associadas aos sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo e aos sistemas fuzzy T-S, escolhe-se fazer esse estudo comparativo desprezando-se a presença de atrasos e utilizando-se uma candidata à função de Lyapunov bastante simples, dada por

$$V(t) = x_t^T P(\alpha_t) x_t, \quad \text{com } P(\alpha_t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) P_i \quad (3.6)$$

Sendo assim, o objetivo específico desta seção é apresentar condições convexas para solucionar os seguintes problemas:

Problema 3.1 (Análise de estabilidade em malha aberta). *Dadas as matrizes A_i , $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (3.1)-(3.2), com $B(\alpha_t) = \mathbf{0}$, é assintoticamente estável.*

Problema 3.2 (Análise de estabilidade em malha fechada). *Dadas as matrizes K , $[A|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (3.4)-(3.5) é assintoticamente estável.*

Problema 3.3 (Projeto do controlador). *Dadas as matrizes $[A|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, determinar, se possível, o ganho K , de forma que o sistema (3.4)-(3.5) seja assintoticamente estável.*

3.1.1 Análise em Malha Aberta

A seguir, propõe-se uma condição convexa para análise de estabilidade assintótica de sistemas com incertezas variantes no tempo em malha aberta. A partir da candidata à função de Lyapunov (3.6), da equação que rege o comportamento do sistema e de um bloco apropriado de variáveis de folga, utiliza-se o Lema de Finsler para a formulação do conjunto de LMIs apresentado.

Proposição 3.1. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\mathcal{F}(i, j) = \begin{bmatrix} -P_i + X_1 A_i + A_i^T X_1^T & -X_1 + A_i^T X_2^T \\ \star & P_j - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

então o sistema discreto no tempo sujeito a incertezas variantes no tempo, dado por (3.1)-(3.2), com $B(\alpha_t) = \mathbf{0}$, é assintoticamente estável.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$ assegura a positividade da candidata à função de Lyapunov (3.6). Como visto no Capítulo 2, para ser considerada uma função de Lyapunov e assim assegurar a estabilidade assintótica do sistema considerado, ainda é necessário que

$$\Delta V(\alpha_t, t) = x_{t+1}^T P(\alpha_{t+1}) x_{t+1} - x_t^T P(\alpha_t) x_t < \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi = [x_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (3.8) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} -P(\alpha_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (3.9)$$

e (3.1), com $B(\alpha_t) = \mathbf{0}$, como

$$[A(\alpha_t) \quad -\mathbf{I}] \varphi = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (3.9), (3.10) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, composto por $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\mathcal{F}(\alpha_t) = \begin{bmatrix} -P(\alpha_t) + X_1 A(\alpha_t) + A(\alpha_t)^T X_1^T & -X_1 + A(\alpha_t)^T X_2^T \\ \star & P(\alpha_{t+1}) - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Completando a prova, note que (3.11) pode ser recuperada de (3.7), bastando fazer

$$\mathcal{F}(\alpha_t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=i}^N \alpha_j(t+1) \alpha_i(t) \mathcal{F}(i, j) \quad \square$$

3.1.2 Análise em Malha Fechada

A seguir, mostra-se que, após pequenas modificações, a condição convexa apresentada na Proposição 3.1 pode ser utilizada para análise de estabilidade de sistemas com incertezas variantes no tempo em malha fechada.

Proposição 3.2. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que, substituindo-se A_i por $\hat{A}_i = (A_i + B_i K)$ em (3.7), as LMIs obtidas sejam verificadas, então o sistema discreto no tempo sujeito a incertezas variantes no tempo, dado por (3.4)-(3.5), é assintoticamente estável.*

Demonstração. Note que, respectivamente, o sistema em malha aberta, dado por (3.1)-(3.2), com $B(\alpha_t) = \mathbf{0}$, e o sistema em malha fechada, dado por (3.4)-(3.5), podem ser reescritos como

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_i x_t \quad \text{e} \quad x_{t+1} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \hat{A}_i x_t, \quad (3.12)$$

com $\hat{A}_i = (A_i + B_i K)$. Sendo assim, por analogia, fica claro que as LMIs em (3.7) podem ser utilizadas conforme proposto. \square

3.1.3 Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados

A partir da Proposição 3.1, além da possibilidade de se analisar a estabilidade de sistemas em malha fechada, pode-se derivar facilmente uma condição de síntese. Para tal, seguem-se passos relativamente convencionais, usados para obtenção de formulações convexas destinadas ao projeto de ganhos para realimentação de estados. Veja [LM08b], para o caso de sistemas com atraso variante nos estados.

Proposição 3.3. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, e matrizes $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i X_2^T + B_i W \\ \star & P_j - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

então o sistema discreto no tempo sujeito a incertezas variantes no tempo, dado por (3.1)-(3.2), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (3.3) com

$$K = W(X_2^T)^{-1}.$$

Demonstração. Observe que, se o sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \hat{A}(\alpha_t)^T x_t \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) (A_i + B_i K)^T x_t \end{aligned}$$

é estável, então o sistema (3.4)-(3.5) também o é. Sendo assim, a partir de uma analogia similar à realizada com os sistemas em (3.12), pode-se obter a prova dessa proposição por meio das seguintes manipulações em (3.7):

- substitui-se A_i por $(A_i + B_i K)^T$;
- impõe-se $X_1 = \mathbf{0}$;
- faz-se a substituição de variável $W = K X_2^T$,

resultando em (3.13). □

3.2 Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S)

Para fins de comparação, considere agora o sistema fuzzy T-S discreto no tempo, em que a i -ésima regra é dada por (veja a Seção 2.3 para detalhes):

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

ENTÃO $x_{t+1} = A_i x_t + B_i u_t$, $t = 0, 1, \dots$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Cada equação linear, representada por $A_i x_t + B_i u_t$, que compõe a consequência de uma regra fuzzy, é chamada de “subsistema”.

Sendo assim, para um dado estado x_t , pode-se inferir a dinâmica do sistema como:

$$x_{t+1} = A(\omega_t) x_t + B(\omega_t) u_t \quad (3.14)$$

em que ω_t é o vetor composto pelos elementos

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))} \quad (3.15)$$

com $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ representando o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Portanto, $\omega_i(t) \in [0 \ 1] \ \forall i$ e o vetor ω_t satisfaz

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1 ,$$

permitindo que se defina

$$[A|B](\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) [A|B]_i . \quad (3.16)$$

Considere também a lei de controle

$$u_t = K(\omega_t)x_t = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) K_i x_t \quad (3.17)$$

em que $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são os ganhos de realimentação que asseguram a estabilidade assintótica do sistema (3.14)-(3.16) para todo ω_t . Portanto, o sistema fuzzy T-S em malha fechada, formado por (3.14)-(3.16) e (3.17), pode ser definido como

$$x_{t+1} = \hat{A}(\omega_t)x_t \quad (3.18)$$

com

$$\hat{A}(\omega_t) \equiv A(\omega_t) + B(\omega_t)K(\omega_t) \quad (3.19)$$

Para facilitar a comparação com as abordagens apresentadas na seção anterior, despreza-se a presença de atraso nos sistemas considerados e utiliza-se a mesma candidata à função de Lyapunov, evidenciando as diferenças e semelhanças entre as manipulações algébricas associadas aos sistemas fuzzy T-S e aos sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo. Para tal, basta substituir $P(\alpha_t)$ por $P(\omega_t)$ em (3.6), obtendo-se

$$V(t) = x_t^T P(\omega_t)x_t , \quad \text{com } P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad (3.20)$$

Note que, do ponto de vista matemático, essa equação é a mesma que (3.6), pois o vetor ω_t possui as mesmas características que o vetor α_t , ou seja, todos seus elementos pertencem ao intervalo $[0 \ 1]$ e a soma dos mesmos é igual a 1. Entretanto, ω_t é precisamente conhecido e α_t , incerto. Sendo assim, o objetivo específico dessa seção é apresentar condições convexas para solucionar os seguintes problemas:

Problema 3.4 (Análise de estabilidade em malha aberta). *Dadas as matrizes A_i , $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (3.14)-(3.16), com $B(\omega_t) = \mathbf{0}$, é assintoticamente estável.*

Problema 3.5 (Análise de estabilidade em malha fechada). *Dadas as matrizes K_i , $[A|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (3.18)-(3.19) é assintoticamente estável.*

Problema 3.6 (Projeto do controlador). *Dadas as matrizes $[A|B]_i$, determinar, se possível, os ganhos K_i , $i = 1, \dots, N$, de forma que o sistema (3.18)-(3.19) seja assintoticamente estável.*

3.2.1 Análise em Malha Aberta

A seguir, propõe-se uma condição convexa para análise de estabilidade assintótica de sistemas fuzzy T-S em malha aberta. Mostra-se que o mesmo conjunto de LMIs utilizado na Proposição 3.1, para análise de estabilidade de sistemas com incertezas variantes no tempo em malha aberta, aplica-se a esse caso.

Proposição 3.4. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as LMIs em (3.7) sejam verificadas, então o sistema fuzzy T-S discreto no tempo, dado por (3.14)-(3.16), com $B(\omega_t) = \mathbf{0}$, é assintoticamente estável.*

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$ assegura a positividade da candidata à função de Lyapunov (3.20). Conforme mencionado anteriormente, para ser considerada uma função de Lyapunov e assim assegurar a estabilidade assintótica do sistema em malha aberta, ainda é necessário que

$$\Delta V(\omega_t, t) = x_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) x_{t+1} - x_t^T P(\omega_t) x_t < \mathbf{0} . \quad (3.21)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi = [x_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (3.21) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} -P(\omega_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (3.22)$$

e (3.14), com $B(\omega_t) = \mathbf{0}$, como

$$[A(\omega_t) \quad -\mathbf{I}] \varphi = \mathbf{0} . \quad (3.23)$$

A partir desse ponto, seguindo-se os mesmos passos usados na prova da Proposição 3.1, porém considerando (3.22)-(3.23) ao invés de (3.9)-(3.10), pode-se facilmente completar essa prova. \square

3.2.2 Análise em Malha Fechada

A seguir, duas abordagens para a análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S em malha fechada são apresentadas. Diferentemente do que foi apresentado na seção anterior, para sistemas com incertezas variantes no tempo, a estabilidade dos sistema fuzzy T-S em malha fechada não pode ser analisada utilizando-se formulações com a mesma

quantidade de LMIs empregadas na análise de estabilidade de sistemas em malha aberta. Isso pois, a disponibilidade do parâmetro ω_t permite que leis de controle mais elaboradas, implementadas de acordo com a técnica conhecida como PDC, sejam consideradas para a estabilização dos sistemas fuzzy T-S. Por exemplo, considere (3.17), em que o referido parâmetro é utilizado para ponderar os ganhos de realimentação K_i , previamente projetados para cada subsistema. Sendo assim, a matriz $K(\omega_t)$ é recalculada a cada instante de amostragem, e o produto de matrizes variantes no tempo, $B(\omega_t)K(\omega_t)$, que aparece na descrição do sistema em malha fechada, deve ser adequadamente tratado, por exemplo, conforme apresentado na Proposição 3.5, a seguir. Outra opção, mostrada na Proposição 3.6, é evitar esse produto. Para tal, ao invés do sistema (3.18)-(3.19), obtido ao se levar (3.17) em (3.14), o desenvolvimento dessa proposição considera essas últimas equações individualmente.

Abordagem Convencional

A partir da candidata à função de Lyapunov (3.20), do sistema em malha fechada, descrito em (3.18)-(3.19), e de um bloco de variáveis de folga, utiliza-se o Lema de Finsler para formular o conjunto de LMIs apresentado na proposição a seguir. O produto de matrizes variantes no tempo, que aparece em (3.19), é tratado conforme indicado em [TW01, Cap. 2].

Proposição 3.5. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\hat{\mathcal{F}}(i, j, \ell) = \begin{bmatrix} -0.5(P_i + P_j) + X_1 \hat{A}_{ij} + \hat{A}_{ij}^T X_1^T & -X_1 + \hat{A}_{ij}^T X_2^T \\ \star & P_\ell - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{cases} i, \ell = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N \end{cases} \quad (3.24)$$

com $\hat{A}_{ij} = 0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i)$, então o sistema fuzzy T-S discreto no tempo, dado por (3.18)-(3.19), é assintoticamente estável.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$ assegura a positividade da candidata à função de Lyapunov (3.20). Para ser considerada uma função de Lyapunov e assim assegurar a estabilidade assintótica do sistema considerado, ainda é necessário verificar (3.21). Para tal, considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi = [x_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (3.21) como (3.22) e (3.18) como

$$[\hat{A}(\omega_t) \quad -\mathbf{I}] \varphi = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (3.22), (3.25) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, composto por $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega_t) = \begin{bmatrix} -P(\omega_t) + X_1 \hat{A}(\omega_t) + \hat{A}(\omega_t)^T X_1^T & -X_1 + \hat{A}(\omega_t)^T X_2^T \\ \star & P(\omega_{t+1}) - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

Para completar a prova, note que $\hat{A}(\omega_t)$ pode ser escrita como¹

$$\begin{aligned}\hat{A}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) A_i + \sum_{i=1}^N \omega_i(t) B_i \sum_{i=1}^N \omega_i(t) K_i \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2(t) (A_i + B_i K_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \omega_i(t) \omega_j(t) 0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_i(t) \omega_j(t) 0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) .\end{aligned}$$

Além disso, por conveniência, pode-se reescrever $P(\omega_t)$ como

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_i(t) \omega_j(t) 0.5(P_i + P_j) . \quad (3.27)$$

Sendo assim, (3.26) pode ser recuperada de (3.24), bastando fazer

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_\ell(t+1) \omega_i(t) \omega_j(t) \hat{\mathcal{F}}(i, j, \ell) . \quad \square$$

Observação 3.1. Note que, também é matematicamente correto analisar a estabilidade de um sistema fuzzy T-S em malha fechada aplicando-se condições desenvolvidas para análise de sistemas em malha aberta aos $N(N+1)/2$ vértices dados por

$$A_\ell = 0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) \quad \begin{cases} i = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N . \end{cases} \quad (3.28)$$

Isso porque esse politopo é capaz de limitar todas as combinações convexas que podem advir de sistemas descritos por (3.18)-(3.19). Isto é, o produto de matrizes variantes no tempo, que aparece em (3.19), pode ser tratado previamente à utilização de uma condição para análise de sistemas em malha aberta, ou implicitamente, por uma condição dedicada à análise de sistemas em malha fechada, por exemplo, conforme mostrado nessa última proposição. No caso particular em que essas condições sejam obtidas a partir de uma candidata à função de Lyapunov invariante no tempo, ou seja, com matrizes de Lyapunov fixas, pode-se mostrar facilmente que essas duas formas de se analisar a estabilidade de um sistema fuzzy T-S em malha fechada são equivalentes.

No entanto, é importante ressaltar que, caso se esteja trabalhando com condições para análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S obtidas a partir de uma candidata à função de Lyapunov dependente de parâmetros, como se faz nesta seção, as opções para análise de estabilidade de sistemas em malha fechada mencionadas no parágrafo anterior *não* são equivalentes. Por exemplo, a possibilidade de se escrever $P(\omega_t)$ conforme (3.27) permite que a mesma seja considerada na Proposição 3.5 apenas por meio das matrizes $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$. Caso a Proposição 3.4 fosse aplicada ao politopo (3.28), a quantidade de matrizes $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, utilizadas para a consideração de $P(\omega_t)$, acompanharia o número de

¹Defina $0^0 = 1$ e $0^r = 0$, $r \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$ assegura a positividade da candidata à função de Lyapunov (3.20). Para ser considerada uma função de Lyapunov e assim assegurar a estabilidade assintótica do sistema considerado, ainda é necessário verificar (3.21). Para tal, considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{2n+m} : \varphi = [x_t^T \ u_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (3.21) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} -P(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (3.30)$$

e agrupar (3.14) e (3.17) em

$$\begin{bmatrix} K(\omega_t) & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t) & B(\omega_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0} . \quad (3.31)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (3.30), (3.31) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2n+m \times n+m}$, composto por $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $X_{32} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega_t) = \begin{bmatrix} -P(\omega_t) + X_{11}K(\omega_t) + X_{12}A(\omega_t) + K(\omega_t)^T X_{11}^T + A(\omega_t)^T X_{12}^T \\ \star \\ \star \\ -X_{11} + X_{12}B(\omega_t) + K(\omega_t)^T X_{21}^T + A(\omega_t)^T X_{22}^T \\ -X_{21} + X_{22}B(\omega_t) - X_{21}^T + B(\omega_t)^T X_{22}^T \\ \star \\ -X_{12} + K(\omega_t)^T X_{31}^T + A(\omega_t)^T X_{32}^T \\ -X_{22} - X_{31}^T + B(\omega_t)^T X_{32}^T \\ P(\omega_{t+1}) - X_{32} - X_{32}^T \end{bmatrix} < \mathbf{0} . \quad (3.32)$$

Completando a prova, note que (3.32) pode ser recuperada de (3.29), bastando fazer

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega_t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \omega_j(t+1) \omega_i(t) \tilde{\mathcal{F}}(i, j) \quad \square$$

Observação 3.2. Note que, apesar de ser uma opção mais restrita, também é matematicamente possível assegurar a estabilidade de um sistema fuzzy T-S por meio da lei de controle (3.3), que utiliza um único ganho K . Nesse caso, não há diferenças algébricas entre os sistemas fuzzy T-S e os sistemas lineares com incertezas politópicas variantes no tempo, e quaisquer formulações desenvolvidas para esses últimos, por exemplo, as da Seção 3.1, passam a ser aplicáveis aos primeiros.

Complexidade Numérica

Conforme apresentado na Seção 1.4, as complexidades numéricas das condições apresentadas neste capítulo podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas nas LMIs, \mathcal{L} , envolvidas nos problemas de otimização que as mesmas representam. Em sequência, apresentam-se os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} associados aos testes

de factibilidade formulados nas Proposições 3.5 e 3.6. Além disso, esses valores também são investigados para o caso em que a Proposição 3.4 é utilizada conforme indicado na Observação 3.1. Ou seja, para o caso em que uma condição desenvolvida para análise de sistemas em malha aberta é aplicada ao politopo que limita as possíveis variações de um sistema em malha fechada, descrito por (3.28).

Nesse último caso, dentre as situações consideradas, pode-se identificar a complexidade computacional mais elevada, com $\mathcal{K}_{3.4} = 0.25(n^2 + n)N^2 + 0.25(n^2 + n)N + 2n^2$ e $\mathcal{L}_{3.4} = 0.5nN^4 + nN^3 + nN^2 + 0.5nN$. Em relação às condições dedicadas à análise de sistemas em malha fechada, é possível observar que a condição apresentada na Proposição 3.5 utiliza uma menor quantidade de variáveis escalares do que a condição formulada na Proposição 3.6, ao passo que a segunda possui uma menor quantidade de linhas em suas LMIs do que a primeira. Pois $\mathcal{K}_{3.5} = 0.5(n^2 + n)N + 2n^2$ e $\mathcal{K}_{3.6} = 0.5(n^2 + n)N + 2n^2 + m^2 + 3nm$, e as quantidades de linhas nas LMIs são dadas por $\mathcal{L}_{3.5} = nN^3 + nN^2 + nN$ e $\mathcal{L}_{3.6} = (2n + m)N^2 + nN$.

Note que, dentre as formas de se analisar a estabilidade de sistemas fuzzy T-S em malha fechada apresentadas nesta seção, em que todas as condições baseiam-se na candidata à função de Lyapunov dependente de parâmetros (3.20), a utilização da condição formulada na Proposição 3.4, conforme indicado na Observação 3.1, resultará sempre em um custo computacional mais elevado. Visto que $\mathcal{K}_{3.4} > \mathcal{K}_{3.6} > \mathcal{K}_{3.5}$ e $\mathcal{L}_{3.4} > \mathcal{L}_{3.5} > \mathcal{L}_{3.6}$. Já em relação às condições dedicadas à análise de sistemas em malha fechada, formuladas nas Proposições 3.5 e 3.6, ao se utilizar o SeDuMi, pode-se afirmar que a primeira tem um maior custo computacional para qualquer sistema com $N > 4$ e $n \geq m$.

3.2.3 Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados

A seguir são apresentadas três abordagens para síntese de controladores baseados em PDC. Pode-se dizer que, assim como para a análise de estabilidade, as condições desenvolvidas baseiam-se na mesma candidata à função de Lyapunov, no caso, (3.20). O desenvolvimento da primeira condição segue passos relativamente convencionais, usados para obtenção de formulações convexas destinadas ao projeto de ganhos para realimentação de estados. A segunda condição é obtida de forma bastante direta, a partir da condição para análise de estabilidade em malha fechada formulada na Proposição 3.6. Porém, mostra-se, por meio de um exemplo numérico, que essa última pode levar a resultados muito conservadores em relação às outras abordagens. Motivada pela investigação que indica os inconvenientes que possivelmente explicam esse fato, a terceira abordagem é desenvolvida. O exemplo mencionado mostra também que essa última pode levar a resultados menos conservadores em relação aos obtidos com a aplicação das demais. Até o momento, essa técnica parece nunca ter sido utilizada por outros autores.

Abordagem Convencional

A partir da condição para análise de estabilidade em malha fechada formulada na Proposição 3.5, apresenta-se a seguir uma condição convexa para síntese de ganhos para realimentação de estados, a serem utilizados por controladores baseados na técnica conhecida como PDC.

Proposição 3.7. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} -0.5(P_i + P_j) & 0.5((A_i + A_j)X_2^T + B_iW_j + B_jW_i) \\ \star & P_\ell - X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{cases} i, \ell = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N \end{cases} \quad (3.33)$$

então o sistema fuzzy T-S discreto no tempo, dado por (3.14)-(3.16), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (3.17) com

$$K_i = W_i(X_2^T)^{-1} .$$

Demonstração. Observe que, se o sistema (3.18) é estável com

$$\hat{A}(\omega_t)^T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_i(t) \omega_j(t) 0.5(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i)^T ,$$

então esse mesmo sistema é estável com (3.19). Sendo assim, (3.33) pode ser obtida por meio das seguintes manipulações em (3.24):

- substitui-se \hat{A}_{ij} por $0.5(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i)^T$;
- impõe-se $X_1 = \mathbf{0}$;
- faz-se a substituição de variável $W_i = K_iX_2^T$ □

Abordagem Alternativa

Uma nova condição convexa para síntese de controladores é apresentada na próxima proposição. O conjunto de LMIs apresentado é obtido de forma bastante elementar, a partir das condições formuladas na Proposição 3.6, por meio de manipulações bastante usuais.

Proposição 3.8. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} -P_i + X_{12}A_i + A_i^T X_{12}^T & X_{12}B_i + W_i^T + A_i^T X_{22}^T & -X_{12} + A_i^T X_{32}^T \\ \star & -X_{21} + X_{22}B_i - X_{21}^T + B_i^T X_{22}^T & -X_{22} + B_i^T X_{32}^T \\ \star & \star & P_j - X_{32} - X_{32}^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.34)$$

então o sistema fuzzy T-S discreto no tempo, dado por (3.14)-(3.16), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (3.17) com

$$K_i = X_{21}^{-1}W_i .$$

Demonstração. Conforme mencionado, a proposição em questão pode ser derivada, de forma bastante direta, a partir da condição para análise de estabilidade de sistemas em malha fechada apresentada na Proposição 3.6. Para tal, note que (3.34) pode ser obtida apenas impondo-se $X_{11} = X_{31} = \mathbf{0}$ e utilizando-se a substituição de variável $W_i = X_{21}K_i$ em (3.29). □

Observação 3.3. Apesar de ser facilmente obtida a partir da Proposição 3.6, a condição para síntese de controladores formulada na Proposição 3.8 parece não ter um valor prático, levando, em todos os testes realizados, a resultados bastante conservadores. A razão disso pode estar nos inconvenientes indicados a seguir. Note que, em (3.29), os produtos que envolvem as variáveis K_i são $X_{11}K_i$, $K_i^T X_{11}^T$, $K_i^T X_{21}^T$, e $K_i^T X_{31}^T$. Porém, para a obtenção de uma condição convexa de síntese, deve-se, obrigatoriamente, impor $X_{11} = X_{31} = \mathbf{0}$. Visto que essas últimas são matrizes de dimensões $n \times m$ e, dessa forma, não permitem que os ganhos K_i sejam obtidos posteriormente a linearizações do tipo $W_i = X_{11}K_i$ ou $W_i = X_{31}K_i$, pois não podem ser invertidas. Nesse caso, resta apenas a opção de se linearizar a condição de síntese utilizando-se a substituição de variáveis $W_i = X_{21}K_i$. Além disso, note que $X_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Como, na grande maioria dos casos, $m < n$, esse fato parece restringir bastante a possibilidade de solução das LMIs em (3.34), sendo uma das possíveis causas do conservadorismo observado. Situações semelhantes acontecem ao se utilizar esse método a partir de condições para análise em malha fechada baseadas em candidatas a função de Lyapunov mais elaboradas. Nesses casos, a substituição de variáveis pode não estar restrita a uma única possibilidade, mas as variáveis K_i sempre estarão envolvidas em produtos com variáveis de dimensões $m \times m$.

Essas afirmações podem ser verificadas no Exemplo 3.1, para o conjunto de sistemas considerado. Além disso, é possível observar que, em [LL08], uma condição de síntese poderia ser obtida utilizando-se a técnica em questão, a partir da condição para análise de estabilidade em malha fechada apresentada no referido trabalho. Ao invés disso, os autores optam por utilizar técnicas muito mais elaboradas para esse fim, o que reforça a argumentação aqui realizada.

Abordagem Proposta

Com a motivação de evitar os inconvenientes apontados na Observação 3.3, a condição formulada a seguir é obtida de forma diferente em relação ao que usualmente se encontra na literatura. Além da substituição de $\hat{A}(\omega_t)$ por $\hat{A}(\omega_t)^T$ em (3.18), baseada no fato de que se a segunda matriz compõe um sistema estável, o mesmo acontece com a primeira, uma equação adicional é considerada, relacionando os estados do sistema a uma variável instrumental. Sendo assim, em relação ao uso da Proposição 3.7, essa nova condição pode levar à detecção de diferentes conjuntos de sistemas estabilizáveis. Outras diferenças são a significativa redução do número LMIs e a maior quantidade de variáveis de folga.

Proposição 3.9. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} -P_i + X_{11}B_i^T + B_iX_{11}^T & -X_{11} + B_iX_{21}^T & B_iX_{31}^T + A_iX_{32}^T \\ \star & -X_{21} - X_{21}^T & -X_{31}^T + W_i \\ \star & \star & P_j - X_{32} - X_{32}^T \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$i, j = 1, \dots, N \quad (3.35)$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo, dado por (3.14)-(3.16), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (3.17) com

$$K_i = W_i(X_{32}^T)^{-1}.$$

Demonstração. Note que, se o sistema

$$x_{t+1} = (A(\omega_t) + K(\omega_t)B(\omega_t))^T x_t \quad (3.36)$$

é assintoticamente estável, então o sistema (3.18)-(3.19) também o é. Sendo assim, utiliza-se a variável instrumental $\nu_t = B(\omega_t)^T x_t$ para reescrever (3.36) como

$$x_{t+1} = A(\omega_t)^T x_t + K(\omega_t)^T \nu_t. \quad (3.37)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{2n+m} : \varphi = [x_t^T \ \nu_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (3.21) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} -P(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0}$$

e agrupar a equação que descreve o sinal instrumental e (3.37) em

$$\begin{bmatrix} B(\omega_t)^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t)^T & K(\omega_t)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0}.$$

A partir desse ponto, seguindo-se passos similares aos da prova da Proposição 3.6, considerando $X_{12} = \mathbf{0}$, $X_{22} = \mathbf{0}$ no mesmo bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2n+m \times n+m}$, originalmente formado por $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $X_{32} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e fazendo-se a mudança de variável $W_i = K_i X_{32}^T$, pode-se obter (3.35). \square

Observação 3.4. É possível verificar neste último desenvolvimento que, ao se utilizar a abordagem proposta, os produtos que envolvem as variáveis K_i e variáveis de folga *inversíveis* são $X_{12}K_i^T$ e $K_i X_{32}^T$. Ou seja, em relação ao desenvolvimento da Proposição 3.8, comentado na Observação 3.3, existem agora mais opções para se obter uma condição de síntese, inclusive com a possibilidade de se fazer linearizações do tipo $X_{12} = \eta X_{32}$, com $0 \leq \eta \leq 1$ (no caso da Proposição 3.9, escolheu-se $\eta = 0$). Além disso, note que X_{12} e X_{32} pertencem ao espaço $\mathbb{R}^{n \times n}$, eliminando o inconveniente apontado na Observação 3.3, que relaciona o conservadorismo da condição formulada na Proposição 3.8 às dimensões reduzidas da variável de folga utilizada em sua linearização. Esse mesmo inconveniente parece ter sido semelhantemente evitado em [LL08], porém, por meio de uma abordagem matematicamente mais complexa do que a proposta na presente seção.

Complexidade Numérica

Conforme mencionado anteriormente, as complexidades numéricas das condições apresentadas neste capítulo podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas nas LMIs, \mathcal{L} , envolvidas nos problemas de otimização que as mesmas representam. Os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} associados aos testes de factibilidade propostos nessa subseção são mostrados na Tabela 3.1.

Note que, as condições formuladas nas Proposições 3.8 e 3.9 apresentam uma complexidade computacional muito semelhante, existindo apenas uma pequena diferença na quantidade de variáveis escalares utilizadas. Sendo assim, e por se mostrar mais importante, conforme exposto na Observação 3.3, apenas a Proposição 3.9 será comparada com a Proposição 3.7. Dessa forma, ao se utilizar o SeDuMi, pode-se afirmar que a condição formulada na primeira tem um menor custo computacional para qualquer sistema com $N > 3$ e $n \geq m$.

Tabela 3.1: Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas

Proposição	\mathcal{K}	\mathcal{L}
3.7	$0.5(n^2+2nm+n)N+n^2$	nN^3+nN^2+nN
3.8	$0.5(n^2+2nm+n)N+2n^2+m^2+nm$	$(2n+m)N^2+nN$
3.9	$0.5(n^2+2nm+n)N+n^2+m^2+2nm$	$(2n+m)N^2+nN$

Exemplo

No exemplo a seguir, as condições de síntese formuladas nas Proposições 3.7, 3.8 e 3.9 são utilizadas para procurar regiões em que sistemas dados por (3.14)-(3.16) possam ser estabilizados por meio da lei de controle (3.17). Além disso, sabendo-se que também é matematicamente possível assegurar a estabilidade desses sistemas por meio da lei de controle (3.3), que utiliza um único ganho K , a condição de síntese formulada na Proposição 3.3, para sistemas com incertezas variantes no tempo, também é avaliada. Este exemplo foi executado utilizando-se um processador AMD Phenom[®] 9500 Quad-Core, 2.21 GHz com 4 Gb de memória RAM e o *toolbox* SeDuMi, desenvolvido para MATLAB[®].

Exemplo 3.1 (Projeto de Ganhos para Realimentação de Estados). Neste exemplo, as condições para síntese de controladores propostas neste capítulo são comparadas entre si. Para formação do conjunto de sistemas a ser avaliado, considere o sistema fuzzy T-S discreto no tempo dado por (3.14)-(3.16), com $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$ e as possíveis variações de seus subsistemas, dados por

$$\begin{aligned}
 [A|B]_1 &= \rho \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.51 & -0.1 & 1 \end{array} \right] \\
 [A|B]_2 &= \rho \left[\begin{array}{cc|c} 0.1 & 0.25 & 1 \\ 0.15 & -0.5 & -0.5 \end{array} \right] \\
 [A|B]_3 &= \rho \left[\begin{array}{cc|c} 1.2 & 0.75 & b \\ 0.25 & -0.8 & 0.5 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

O objetivo é determinar regiões, no plano $b \times \rho$, em que é possível projetar ganhos para estabilização dos sistemas considerados. A Figura 3.1 mostra, abaixo de cada curva, as regiões obtidas com a utilização das condições formuladas nas Proposições 3.3 (linha em traço-ponto), 3.7 (linha pontilhada), 3.8 (linha tracejada) e 3.9 (linha sólida).

Como pode ser observado na Figura 3.1, a aplicação da Proposição 3.8 claramente apresenta um resultado bastante inferior aos obtidos pelas demais abordagens, detectando uma região de sistemas estabilizáveis muito reduzida em relação às outras condições. A Observação 3.3, apresentada anteriormente, indica um dos possíveis motivos para esse resultado.

Além disso, no caso em que se considera que a estabilização dos sistemas seja realizada por meio da lei de controle (3.3), que utiliza um único ganho K , sempre projetado, nesse exemplo, com a aplicação da Proposição 3.3, os resultados encontrados são mais conservadores do que os obtidos com as condições formuladas nas Proposições 3.7 e 3.9. Isso justifica o uso mais elaborado da lei de controle (3.17), que pode ser implementada de acordo com a técnica conhecida como PDC, em que o parâmetro ω_t é utilizado para

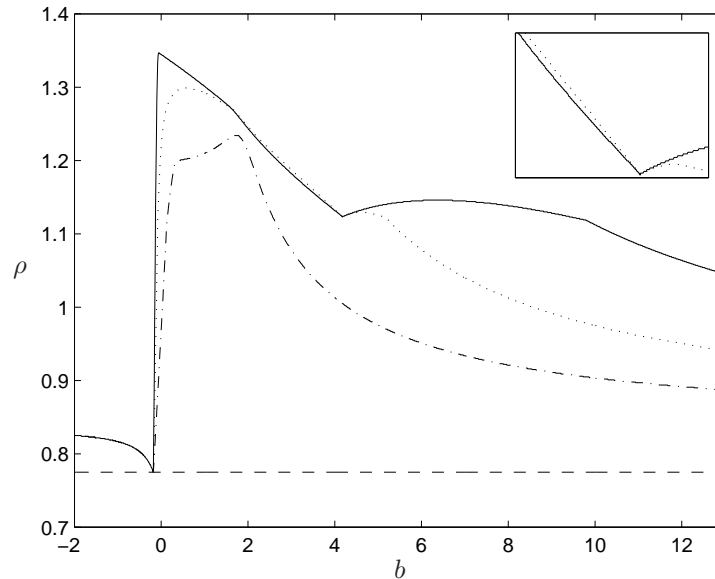


Figura 3.1: Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com as Proposições 3.3 (linha em traço-ponto), 3.7 (linha pontilhada), 3.8 (linha tracejada) e 3.9 (linha sólida).

ponderar os N ganhos de realimentação, projetados, por exemplo, com o uso das últimas proposições mencionadas.

Ainda observando a Figura 3.1, pode-se notar que as condições apresentadas nas Proposições 3.7 e 3.9 não são equivalentes. Apesar de levemente complementares, as áreas de factibilidade determinadas por essas condições são 8.28 e 9.21, respectivamente, para o espaço limitado por $-2 \leq b \leq 13$ e $\rho \geq 0.5$. Logo, a região identificada com a Proposição 3.9 é aproximadamente 11.3% maior do que a região detectada com a Proposição 3.7. Além disso, com auxílio da Tabela 3.1, pode-se observar que o problema de factibilidade formulado na Proposição 3.9 é 50.63% numericamente menos complexo em relação ao formulado na Proposição 3.7.

3.3 Conclusões

Algumas abordagens utilizadas para o tratamento de problemas que envolvem a estabilidade de sistemas com incertezas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S foram comparadas nesse capítulo. A investigação realizada baseou-se principalmente no Lema de Finsler e em uma candidata à função de Lyapunov bastante simples, porém dependente de parâmetro, procurando evidenciar, sem perda de generalidade, as diferenças e semelhanças entre as manipulações algébricas associadas às características dos tipos de sistema estudados.

Como semelhança entre os sistemas com incertezas variantes no tempo e os sistemas fuzzy T-S, foi mostrado que, quando considerados em malha aberta, desenvolvimentos isolados levam a condições para análise de estabilidade que satisfazem aos dois tipos de sistema. Por outro lado, apesar da possibilidade de se investigar a estabilidade em *malha*

aberta desses dois tipos de sistema por meio de uma mesma condição, geralmente, o mesmo não acontece para o estudo da estabilidade em malha fechada e para a síntese de controladores. Sendo assim, nos próximos capítulos deste trabalho, além da síntese de controladores, apenas a estabilidade em malha fechada dos sistemas fuzzy T-S será considerada, caso contrário, recai-se em problemas de controle robusto, correndo-se o risco de que resultados já disponíveis na literatura sejam reinvestigados.

Foi observado que é matematicamente correto analisar a estabilidade de um sistema fuzzy T-S em malha fechada aplicando-se condições desenvolvidas para análise de sistemas em malha aberta a um politopo capaz de limitar todas as combinações convexas do sistema em malha fechada. Porém, estudando-se a complexidade numérica desse método, verificou-se que sua aplicação pode não ser interessante quando se utiliza condições obtidas a partir de candidatas à função de Lyapunov dependentes de parâmetros. Por outro lado, se a função de Lyapunov for considerada constante, condições baseadas na abordagem conhecida como “estabilidade quadrática” podem ser recuperadas como casos especiais de todas as proposições apresentadas. Nesse caso, conforme indicado na Observação 3.1, não haveriam inconvenientes em se analisar a estabilidade de sistemas fuzzy T-S em malha fechada utilizando-se o referido método.

Com ajuda do exemplo numérico apresentado, uma vez que não há impedimentos matemáticos para tal, o caso em que se considera a estabilização de sistemas fuzzy por meio da lei de controle tradicionalmente utilizada no contexto de sistemas com incertezas variantes no tempo, que emprega um único ganho K , também foi estudado. Os resultados encontrados foram mais conservadores do que os obtidos com o uso mais elaborado da lei de controle implementada de acordo com a técnica conhecida como PDC, justificando sua utilização nos demais capítulos deste trabalho.

Além dos estudos mencionados, uma nova técnica para elaboração de condições convexas destinadas à síntese de controladores fuzzy foi apresentada. Mostrou-se, por meio de um exemplo numérico e com análises de complexidade, que a mesma pode levar a condições mais eficientes do que as obtidas por métodos convencionais, reduzindo tanto o conservadorismo dos resultados como o custo computacional para obtê-los. Já para a análise de estabilidade de sistema fuzzy T-S, foi mostrado que a combinação do Lema de Finsler com técnica para consideração de sistemas em malha fechada, proposta em [LL08], também pode levar à obtenção de condições convexas inéditas na literatura², por meio de um desenvolvimento matemático menos complexo do que o proposto nesta última referência.

É importante ressaltar que várias das candidatas à função de Lyapunov disponíveis na literatura podem ser utilizadas como base para estender as abordagens apresentadas nesse capítulo. Além disso, utilizando-se os chamados funcionais de Lyapunov-Krasovskii, as abordagens apresentadas podem ser ampliadas para o tratamento de sistemas com atraso no tempo, conforme mostrado nos próximos capítulos.

²De acordo com a revisão bibliográfica realizada para o presente trabalho.

Capítulo 4

Sistemas com Atraso Constante no Tempo

Neste capítulo, algumas condições convexas, propostas originalmente no Capítulo 3, são estendidas para permitir a análise de estabilidade e a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso constante nos estados. Tais condições são obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros, matrizes de folga e, no caso da condição de síntese, uma variável instrumental. Em todos os casos, as condições são formuladas como testes de factibilidade de um conjunto de LMIs, que podem ser resolvidos eficientemente, em tempo polinomial, por *softwares* especializados. Mostra-se que as condições propostas englobam formulações baseadas na abordagem conhecida como “estabilidade quadrática”. Além disso, para a análise de estabilidade, demonstra-se que uma condição publicada recentemente pode ser recuperada como caso particular das formulações apresentadas neste capítulo. Já para o caso da síntese de controladores, mostra-se com um exemplo numérico que as condições propostas podem levar a resultados menos conservadores, porém complementares em relação aos apresentados na publicação mencionada anteriormente. Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a eficiência das condições propostas, ilustrando as referidas comparações. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [VLM10a].

4.1 Introdução

A partir de 1990, várias abordagens de controle fuzzy foram propostas, estando aquelas baseadas em modelos Takagi-Sugeno (T-S) dentre as mais relevantes e úteis, principalmente pela facilidade advinda da representação de sistemas não-lineares pela ponderação de N sistemas lineares [TW01]. Como visto na Seção 2.3, essa é uma grande vantagem dos modelos fuzzy T-S.

Recentemente, os modelos fuzzy T-S têm sido utilizados para representar sistemas não-lineares com atraso nos estados. Nesse caso, é possível verificar que a maioria da literatura está dedicada a sistemas fuzzy contínuos no tempo. Apesar disso, a importância dos modelos (fuzzy) discretos no tempo é inquestionável, uma vez que esses estão diretamente relacionados à implementação de controladores digitais. Por exemplo, veja [LL07], em que

um controlador fuzzy é projetado a partir de dados amostrados. Além da relação direta com o controle digital, o domínio de tempo discreto é mais apropriado para lidar com sistemas com atraso nos estados do que o domínio de tempo contínuo. Visto que, no primeiro caso, apenas um número finito de estados em atraso precisa ser armazenado, enquanto no último, conjecturas mais elaboradas precisam ser utilizadas, caso contrário a quantidade de dados a ser armazenada seria infinita.

Diferentes abordagens têm sido empregadas para lidar com sistemas fuzzy com atraso nos estados. Duas delas são a que utiliza funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) e a que utiliza funcionais de Lyapunov-Razumikhin. Pela quantidade de trabalhos na literatura, a primeira parece ser mais utilizada. Provavelmente, a razão para isso está no fato de que várias condições convexas podem ser desenvolvidas empregando-se técnicas de controle robusto já consolidadas para análise de estabilidade, estabilização e especificações de desempenho para sistemas lineares variantes no tempo, como a garantia do esforço de controle por meio da norma \mathcal{H}_∞ . Essas condições são, em geral, classificadas como dependentes ou independentes do atraso. No primeiro caso, nenhuma informação a respeito do atraso é considerada; já no segundo, os sistemas são analisados ou projetados de acordo com essa característica.

A maioria dos resultados baseados na abordagem que utiliza funcionais L-K são obtidos a partir de funcionais com matrizes constantes e independentes de parâmetros. Como exemplo, considere [LL07], em que o sistema é contínuo no tempo e o controlador é digital, [TYZ09] e [LL09], para sistemas contínuos no tempo com incertezas limitadas por norma. Em [Wu08] e [ZLL07], o controle baseado em observadores e o projeto de filtros são considerados para sistemas fuzzy discretos no tempo sujeitos a atrasos múltiplos e constantes. Erros de modelagem também são abordados nessa última referência, além do projeto de um filtro \mathcal{H}_∞ a partir de um funcional L-K em que uma das matrizes é constante e a outra depende do parâmetro que rege o comportamento do sistema. Um funcional L-K difuso é introduzido em [Wu06], para sistemas fuzzy discretos no tempo com atraso constante nos estados, implicando na necessidade de se buscar por um parâmetro ϵ para que os problemas de factibilidade apresentados sejam resolvidos.

Recentemente, uma investigação sobre a estabilidade e o projeto de ganhos para realimentação de estados foi proposta em [LL08], para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso constante nos estados. Um funcional L-K com matrizes constantes é utilizado em conjunto com uma formulação convexa, permitindo que matrizes de folga sejam incluídas nas condições apresentadas. Para a síntese dos ganhos de realimentação, a abordagem proposta em [LL08] emprega uma técnica de manipulação algébrica similar à utilizada em [DB01], para sistemas livres de atraso.

A principal contribuição deste capítulo é a extensão das principais abordagens convexas para análise de estabilidade e síntese de controladores propostas no Capítulo 3, permitindo que sistemas fuzzy T-S com atraso nos estados sejam considerados. Primeiramente, os resultados publicados em [LL08], obtidos com a análise de estabilidade de sistemas desse tipo, são melhorados por meio das formulações desenvolvidas. Conforme demonstrado matematicamente e por um exemplo numérico, as condições apresentadas aqui podem reduzir significativamente o conservadorismo da abordagem proposta nesta referência. Em relação ao projeto de ganhos para realimentação de estados, a utilização de uma variável instrumental, conforme proposto no capítulo anterior, permite a formulação de condições que levam a resultados complementares aos encontrados em [LL08]. Por

meio de um exemplo numérico, ilustra-se que, embora complementares, as regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com as condições propostas aqui podem ser maiores do que as regiões detectadas com a condição de síntese elaborada em [LL08]. Além disso, os desenvolvimentos relativamente simples das condições apresentadas neste capítulo podem ser vistos como mais uma vantagem das mesmas. Basicamente, a partir de um candidato a funcional L-K dependente de parâmetros, de equações que descrevem o comportamento dos sistemas e de um bloco apropriado de variáveis de folga, utiliza-se o Lema de Finsler para a formulação dos conjuntos de LMIs apresentados.

Formulações baseadas na abordagem conhecida como “estabilidade quadrática” (em que as matrizes do funcional L-K são constantes) podem ser recuperadas como caso particular das condições propostas aqui. Nesse caso, o mesmo funcional L-K utilizado em [LL08] passa a ser considerado e as complexidades numéricas das condições comparadas passam a ser muito semelhantes, destacando apenas as vantagens das manipulações algébricas estendidas a partir da Seção 3.2 desta dissertação. Vale dizer que, mesmo no caso em que as matrizes são consideradas variantes no tempo, o funcional L-K utilizado é mais simples do que outros encontrados recentemente na literatura. No entanto, esses funcionais mais elaborados podem ser utilizados para estender novamente as abordagens propostas aqui, por exemplo, conforme mostrado no Capítulo 5 deste trabalho. As complexidades numéricas associadas aos problemas de factibilidade propostos e referenciados, bem como algumas conclusões baseadas nos resultados dos exemplos mencionados, também são apresentadas no presente capítulo.

4.2 Formulação do Problema

Considere um sistema fuzzy discreto no tempo com estados atrasados, modelado com a abordagem Takagi-Sugeno (T-S), em que a i -ésima regra é dada por (veja a Seção 2.3 para detalhes):

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{ENTÃO } x_{t+1} = A_i x_t + A_{di} x_{t-d} + B_i u_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$; d é a constante escalar que representa o atraso no tempo. Cada equação linear, representada por $A_i x_t + A_{di} x_{t-d} + B_i u_t$, que compõe a consequência de uma regra fuzzy, é chamada de “subsistema”.

Sendo assim, para um dado estado x_t , pode-se inferir a dinâmica do sistema como:

$$x_{t+1} = A(\omega_t) x_t + A_d(\omega_t) x_{t-d} + B(\omega_t) u_t \quad (4.2)$$

em que ω_t é o vetor composto pelos elementos

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))} \quad (4.3)$$

com $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ representando o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Portanto, $\omega_i(t) \in [0, 1] \forall i$ e o vetor ω_t satisfaz

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1,$$

permitindo que se defina

$$[A|A_d|B](\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) [A|A_d|B]_i. \quad (4.4)$$

Neste capítulo, considera-se a seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} u_t &= K(\omega_t)x_t \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) K_i x_t \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são os ganhos de realimentação que asseguram a estabilidade assintótica do sistema (4.2)-(4.4) para todo ω_t . Portanto, o sistema fuzzy T-S em malha fechada, formado por (4.2)-(4.4) e (4.5), pode ser definido como

$$x_{t+1} = \hat{A}(\omega_t)x_t + \hat{A}_d(\omega_t)x_{t-d} \quad (4.6)$$

com

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\omega_t) &\equiv A(\omega_t) + B(\omega_t)K(\omega_t) \\ \hat{A}_d(\omega_t) &\equiv A_d(\omega_t) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Dessa forma, o principal objetivo deste capítulo é apresentar condições convexas para solucionar os seguintes problemas:

Problema 4.1 (Análise de estabilidade em malha fechada). *Dadas as matrizes K_i , $[A|A_d|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (4.6)-(4.7) é assintoticamente estável.*

No caso em que não se conhece as matrizes que constituem o controlador, um dos objetivos fundamentais da teoria de controle é a determinação das mesmas, de forma a se obter um sistema estável em malha fechada. Esse problema é formulado a seguir.

Problema 4.2 (Projeto do controlador). *Dadas as matrizes $[A|A_d|B]_i$, determinar, se possível, os ganhos K_i , $i = 1, \dots, N$, de forma que o sistema (4.6)-(4.7) seja assintoticamente estável.*

O seguinte candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii é considerado neste capítulo

$$V(t) = V_1(\omega_t, t) + V_2(\omega_t, t) \quad (4.8)$$

com

$$V_1(\omega_t, t) = x_t^T P(\omega_t) x_t, \quad (4.9)$$

$$V_2(\omega_t, t) = \sum_{i=1}^d x_{t-i}^T S(\omega_{t-i}) x_{t-i} \quad (4.10)$$

Este candidato a funcional L-K foi escolhido para que as condições propostas aqui possam ser comparadas com as condições apresentadas em [LL08], onde um funcional similar foi considerado. A diferença entre (4.8)-(4.10) e o funcional utilizado em [LL08] é que, nessa referência, as matrizes $P(\omega_t)$ e $S(\omega_t)$ são consideradas constantes e independentes do parâmetro ω_t , ou seja, $P(\omega_t) = P = P^T$ e $S(\omega_t) = S = S^T$. Neste capítulo, uma versão dependente de parâmetro é considerada com

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad (4.11)$$

$$S(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) S_i, \quad (4.12)$$

podendo reduzir o conservadorismo da abordagem apresentada em [LL08].

4.3 Resultados Principais

Esta seção contém os principais resultados deste capítulo para ambos os casos, análise de estabilidade e síntese de ganhos para realimentação de estados, apresentando soluções, dessa forma, para os Problemas 4.1 e 4.2.

4.3.1 Análise de Estabilidade Assintótica

Teorema 4.1. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\mathcal{M}(i, j, \ell) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} & \mathcal{M}_{13} & K_i^T X_{41}^T + A_i^T X_{42}^T - X_{12} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} & A_{di}^T X_{42}^T - X_{22} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33} & -X_{41}^T + B_i^T X_{42}^T - X_{32} \\ \star & \star & \star & P_j - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i, j, \ell = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

em que

$$\mathcal{M}_{11} = S_i - P_i + K_i^T X_{11}^T + A_i^T X_{12}^T + X_{11} K_i + X_{12} A_i$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{12} &= K_i^T X_{21}^T + A_i^T X_{22}^T + X_{12} A_{di} \\
\mathcal{M}_{13} &= K_i^T X_{31}^T + A_i^T X_{32}^T - X_{11} + X_{12} B_i \\
\mathcal{M}_{22} &= -S_\ell + A_{di}^T X_{22}^T + X_{22} A_{di} \\
\mathcal{M}_{23} &= A_{di}^T X_{32}^T - X_{21} + X_{22} B_i \\
\mathcal{M}_{33} &= -X_{31}^T + B_i^T X_{32}^T - X_{31} + X_{32} B_i
\end{aligned}$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com estados atrasados, dado por (4.6)-(4.7), é assintoticamente estável.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$, $S_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, assegura a positividade do funcional (4.8), formado por (4.9)-(4.12). Como visto no Capítulo 2, para ser considerado um funcional de Lyapunov-Krasovskii e assim assegurar a estabilidade assintótica de (4.6), ainda é necessário que

$$\Delta V(\omega_t, t) < \mathbf{0} . \quad (4.14)$$

Para o cálculo de (4.14), considere

$$\Delta V_1(\omega_t, t) = x_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) x_{t+1} - x_t^T P(\omega_t) x_t \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
\Delta V_2(\omega_t, t) &= \sum_{i=1}^d x_{t+1-i}^T S(\omega_{t+1-i}) x_{t+1-i} - \sum_{i=1}^d x_{t-i}^T S(\omega_{t-i}) x_{t-i} \\
&= \sum_{j=0}^{d-1} x_{t-j}^T S(\omega_{t-j}) x_{t-j} - \sum_{i=1}^d x_{t-i}^T S(\omega_{t-i}) x_{t-i} \\
&= x_t^T S(\omega_t) x_t + \sum_{j=1}^{d-1} x_{t-j}^T S(\omega_{t-j}) x_{t-j} \\
&\quad - \left(x_{t-d}^T S(\omega_{t-d}) x_{t-d} + \sum_{i=1}^{d-1} x_{t-i}^T S(\omega_{t-i}) x_{t-i} \right) \\
&= x_t^T S(\omega_t) x_t - x_{t-d}^T S(\omega_{t-d}) x_{t-d} . \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Assim, considerando (4.15) e (4.16), pode-se obter

$$\Delta V(\omega_t, t) = x_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) x_{t+1} + x_t^T [S(\omega_t) - P(\omega_t)] x_t - x_{t-d}^T S(\omega_{t-d}) x_{t-d} < 0 \quad (4.17)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{3n+m}$: $\varphi = [x_t^T \quad x_{t-d}^T \quad u_t^T \quad x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (4.17) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} S(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -S(\omega_{t-d}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (4.18)$$

e agrupar (4.2) e (4.5) em

$$\begin{bmatrix} K(\omega_t) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t) & A_d(\omega_t) & B(\omega_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0} . \quad (4.19)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (4.18), (4.19) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{3n+m \times n+m}$, composto por $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\mathcal{M}(\omega_t) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11}(\omega_t) & \mathcal{M}_{12}(\omega_t) & \mathcal{M}_{13}(\omega_t) & K(\omega_t)^T X_{41}^T + A(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{12} \\ \star & \mathcal{M}_{22}(\omega_t) & \mathcal{M}_{23}(\omega_t) & A_d(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{22} \\ \star & \star & \mathcal{M}_{33}(\omega_t) & -X_{41}^T + B(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{32} \\ \star & \star & \star & P(\omega_{t+1}) - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11}(\omega_t) &= S(\omega_t) - P(\omega_t) + K(\omega_t)^T X_{11}^T + A(\omega_t)^T X_{12}^T + X_{11}K(\omega_t) + X_{12}A(\omega_t) \\ \mathcal{M}_{12}(\omega_t) &= K(\omega_t)^T X_{21}^T + A(\omega_t)^T X_{22}^T + X_{12}A_d(\omega_t) \\ \mathcal{M}_{13}(\omega_t) &= K(\omega_t)^T X_{31}^T + A(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{11} + X_{12}B(\omega_t) \\ \mathcal{M}_{22}(\omega_t) &= -S(\omega_{t-d}) + A_d(\omega_t)^T X_{22}^T + X_{22}A_d(\omega_t) \\ \mathcal{M}_{23}(\omega_t) &= A_d(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{21} + X_{22}B(\omega_t) \\ \mathcal{M}_{33}(\omega_t) &= -X_{31}^T + B(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{31} + X_{32}B(\omega_t). \end{aligned}$$

Completando a prova, note que (4.20) pode ser recuperada de (4.13), bastando fazer

$$\mathcal{M}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \omega_\ell(t-d) \omega_j(t+1) \omega_i(t) \mathcal{M}(i, j, \ell). \quad \square$$

Considerando que as matrizes do funcional (4.8)-(4.12) sejam independentes de ω_t , a abordagem conhecida como “estabilidade quadrática”, frequentemente utilizada para tratar sistemas livres de atraso, pode ser recuperada como caso particular do Teorema 4.1, levando ao corolário apresentado a seguir.

Corolário 4.1. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\tilde{\mathcal{M}}(i) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_{11} & \tilde{\mathcal{M}}_{12} & \tilde{\mathcal{M}}_{13} & K_i^T X_{41}^T + A_i^T X_{42}^T - X_{12} \\ \star & \tilde{\mathcal{M}}_{22} & \tilde{\mathcal{M}}_{23} & A_{di}^T X_{42}^T - X_{22} \\ \star & \star & \tilde{\mathcal{M}}_{33} & -X_{41}^T + B_i^T X_{42}^T - X_{32} \\ \star & \star & \star & P - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.21)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{11} &= S - P + K_i^T X_{11}^T + A_i^T X_{12}^T + X_{11}K_i + X_{12}A_i \\ \tilde{\mathcal{M}}_{12} &= K_i^T X_{21}^T + A_i^T X_{22}^T + X_{12}A_{di} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{13} &= K_i^T X_{31}^T + A_i^T X_{32}^T - X_{11} + X_{12}B_i \\ \tilde{\mathcal{M}}_{22} &= -S + A_{di}^T X_{22}^T + X_{22}A_{di} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{23} &= A_{di}^T X_{32}^T - X_{21} + X_{22}B_i \\ \tilde{\mathcal{M}}_{33} &= -X_{31}^T + B_i^T X_{32}^T - X_{31} + X_{32}B_i \end{aligned}$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com estados atrasados, dado por (4.6)-(4.7), é assintoticamente estável.

Demonstração. Note que, $\hat{\mathcal{M}}(i) < \mathbf{0}$ é uma condição suficiente para $\mathcal{M}(i, j, \ell) < \mathbf{0}$, pois se existirem $P > \mathbf{0}$ e $S > \mathbf{0}$ tais que (4.21) seja verificada, então é sempre possível verificar (4.13) com $P_i = P$, $S_i = S$, $i = 1, \dots, N$. Consequentemente, (4.21) também é suficiente para (4.13). \square

A condição formulada no Corolário 4.1 é computacionalmente menos complexa que a condição apresentada no Teorema 4.1, ao custo de ser, em geral, mais conservadora.

Observação 4.1. Vale mencionar que as condições formuladas no Teorema 4.1 e no Corolário 4.1 levam a análises de estabilidade menos conservadoras do que as realizadas com a condição em [LL08], conforme ilustrado na Subseção 4.4. Note que, a condição apresentada no Corolário 4.1 pode ser simplificada de forma que o Teorema 1 de [LL08] seja obtido. Para tal, basta impor $X_{41} = \mathbf{0}$ e escolher $X_{11} = P_4^T$, $X_{21} = P_5^T$, $X_{31} = P_6^T$, $X_{12} = P_7^T$, $X_{22} = P_8^T$, $X_{32} = P_9^T$ e $X_{42} = P_{10}^T$ em (4.21).

4.3.2 Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados

Teorema 4.2. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} S_i - P_i + B_i X_{11}^T + X_{11} B_i^T & B_i X_{21}^T & B_i X_{31}^T - X_{11} & B_i X_{41}^T + A_i X_{42}^T \\ \star & -S_\ell & -X_{21} & A_{di} X_{42}^T \\ \star & \star & -X_{31}^T - X_{31} & -X_{41}^T + W_i \\ \star & \star & \star & P_j - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$i, j, \ell = 1, \dots, N$ (4.22)

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com estados atrasados, dado por (4.2)-(4.4), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (4.5) com

$$K_i = W_i (X_{42}^T)^{-1}. \quad (4.23)$$

Demonstração. Note que, se o sistema (4.6) é assintoticamente estável com $\hat{A}(\omega_t)^T$ e $\hat{A}_d(\omega_t)^T$, então o sistema original, com (4.7), também o é. Nesse caso, pode-se reconsiderar (4.6) como

$$x_{t+1} = (A(\omega_t)^T + K(\omega_t)^T B(\omega_t)^T) x_t + A_d(\omega_t)^T x_{t-d}. \quad (4.24)$$

Então, utiliza-se a variável instrumental $\nu_t = B(\omega_t)^T x_t$ para reescrever (4.24) como

$$x_{t+1} = A(\omega_t)^T x_t + K(\omega_t)^T \nu_t + A_d(\omega_t)^T x_{t-d}. \quad (4.25)$$

Considerando um espaço aumentado dado por

$$\varphi = [x_t^T \quad x_{t-d}^T \quad \nu_t^T \quad x_{t+1}^T]^T \in \mathbb{R}^{3n+m},$$

pode-se reescrever (4.17) como (4.18) e agrupar as equações $\nu_t = B(\omega_t)^T x_t$ e (4.25) em

$$\begin{bmatrix} B(\omega_t)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t)^T & A_d(\omega_t)^T & K(\omega_t)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0}.$$

A partir desse ponto, seguindo-se passos similares aos da prova do Teorema 4.1, considerando $X_{12} = X_{22} = X_{32} = \mathbf{0}$ em um bloco de variáveis de folga formado por X_{ij} , $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 2$, de dimensões adequadas, e fazendo-se a mudança de variável $W_i = K_i X_{42}^T$, pode-se obter (4.22). \square

Similarmente à análise de estabilidade, o Teorema 4.2 também pode ser simplificado, permitindo que uma condição de síntese baseada na abordagem quadrática seja recuperada como caso particular de sua formulação. Ou seja, o corolário apresentado a seguir pode ser obtido apenas pela imposição de $P_i = P$, $S_i = S$, $i = 1, \dots, N$ no Teorema 4.2. Nesse caso, reduz-se o número de LMIs a serem verificadas, uma vez que as matrizes P e S do candidato a funcional L-K são sempre as mesmas em relação aos instantes $t - d$, t e $t + 1$.

Corolário 4.2. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\left[\begin{array}{cccc} S - P + B_i X_{11}^T + X_{11} B_i^T & B_i X_{21}^T & B_i X_{31}^T - X_{11} & B_i X_{41}^T + A_i X_{42}^T \\ \star & -S & -X_{21} & A_{di} X_{42}^T \\ \star & \star & -X_{31}^T - X_{31} & -X_{41}^T + W_i \\ \star & \star & \star & P - X_{42}^T - X_{42} \end{array} \right] < \mathbf{0},$$

$i = 1, \dots, N$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com estados atrasados, dado por (4.2)-(4.4), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (4.5) com (4.23).

Observação 4.2. Note que as condições propostas no Teorema 4.2 e no Corolário 4.2 são obtidas de forma diferente em relação ao que usualmente se encontra na literatura. Por exemplo, em [LL08, Teorema 2], a manipulação algébrica é similar à apresentada em [DB01], para sistemas livres de atraso. Aqui, uma variável instrumental é utilizada para representar o sinal $B(\omega_t)^T x_t$, além da usual substituição de $\hat{A}(\omega_t)$ e $\hat{A}_d(\omega_t)$ por $\hat{A}(\omega_t)^T$ e $\hat{A}_d(\omega_t)^T$ em (4.6). Veja a Subseção 3.2.3 para detalhes de desenvolvimento dessa técnica. Conforme exemplo ilustrativo, apresentado na Seção 4.4, fica claro que as condições de síntese propostas neste capítulo são complementares em relação à formulação referenciada.

4.3.3 Complexidade Numérica

As complexidades numéricas das condições apresentadas nesta seção podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas nas LMIs, \mathcal{L} , envolvidas nos problemas de otimização que as mesmas representam. Por exemplo, utilizando-se o *toolbox* SeDuMi, o número de operações com ponto flutuante para solucionar esses problemas é da ordem de $\mathcal{K}^2 \mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2}$, veja [Stu99]. Os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} associados aos testes de factibilidade propostos neste capítulo são mostrados na Tabela 4.1.

A partir desses valores, é possível notar que as complexidades numéricas das condições propostas em [LL08] são quase iguais às das condições formuladas nos corolários deste capítulo, tanto para a análise de estabilidade quanto para a síntese de controladores. Note que, em cada caso, o número de linhas nas LMIs é o mesmo, ocorrendo apenas

Tabela 4.1: Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs utilizadas

Condição	\mathcal{K}	\mathcal{L}
Teorema 4.1	$(n^2+n)N+3n^2+m^2+4nm$	$(3n+m)N^3+2nN$
Corolário 4.1	$4n^2+m^2+4nm+n$	$(3n+m)N+2n$
Teorema 1 de [LL08]	$4n^2+m^2+3nm+n$	$(3n+m)N+2n$
Teorema 6 de [CF00]	$n(n+1)$	$nN^2 + nN + 2n$
Teorema 4.2	$(n^2+nm+n)N+n^2+m^2+3nm$	$(3n+m)N^3+2nN$
Corolário 4.2	$nmN+2n^2+m^2+3nm+n$	$(3n+m)N+2n$
Teorema 2 de [LL08]	$nmN+5n^2+m^2+3nm+n$	$(3n+m)N+2n$

uma pequena diferença na quantidade de variáveis escalares. Por outro lado, os Teoremas 4.1 e 4.2 apresentam condições numericamente mais complexas em relação às formuladas em seus respectivos corolários, porém podem levar a resultados menos conservadores, conforme mostrado na próxima seção.

4.4 Exemplos

Dois exemplos são dados nesta seção. No primeiro, a estabilidade assintótica de um sistema fuzzy T-S é investigada dentro de um espaço de parâmetros $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Mostra-se que as condições apresentadas neste capítulo podem ser menos conservadoras do que outras encontradas na literatura, com complexidades numéricas semelhantes. O Exemplo 4.2 ilustra o problema de estabilização por meio da lei de controle (4.5). Mostra-se que as regiões de estabilização encontradas com as formulações propostas no Teorema 4.2 e no Corolário 4.2 são complementares em relação às regiões identificadas com o Teorema 2 de [LL08]. Todos os exemplos foram executados utilizando-se um processador AMD Phenom[®] 9500 Quad-Core, 2.21 GHz com 4 Gb de memória RAM e o *toolbox* SeDuMi, desenvolvido para MATLAB[®].

Exemplo 4.1 (Análise de Estabilidade Assintótica). Neste exemplo, as condições para análise de estabilidade assintótica propostas neste capítulo são comparadas com duas outras encontradas na literatura: Teorema 6 de [CF00] e Teorema 1 de [LL08]. Para tal, considere o sistema fuzzy T-S discreto no tempo com estados atrasados dado por (4.1)-(4.4), com $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$, $p = 1$, e subsistemas descritos pelas matrizes $[A|A_d|B]_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 [A|A_d|B]_1 &= \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.51 & -0.1 & -0.25 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 [A|A_d|B]_2 &= \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1 & 0.25 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0.15 & -0.5 & 0.15 & 0 & -0.5 \end{array} \right] \\
 [A|A_d|B]_3 &= \left[\begin{array}{cc|cc|c} a & 0.75 & 0.19 & 0 & b \\ 0.25 & -0.8 & 0.06 & 0 & 0.5 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esse sistema foi investigado em [LL08] para intervalos $0 \leq a \leq 1.6$ e $0 \leq b \leq 1.8$ em que o suposto controlador fuzzy é dado por (4.5), com os ganhos K_i calculados de forma

que os autovalores de $A_i + B_i K_i$, $i = 1, 2, 3$, sejam todos alocados em -0.5 . Ou seja, para cada par (a, b) , um novo conjunto de ganhos K_i , $i = 1, 2, 3$, é calculado usando-se a fórmula de Ackerman para que todos os polos sejam alocados em -0.5 , veja [Che99] para detalhes.

Aqui, o objetivo é detectar regiões de estabilidade em um espaço de parâmetros $a \times b$ mais amplo, limitado por $-0.5 \leq a \leq 5.0$ e $-0.5 \leq b \leq 3.5$. A Figura 4.1 mostra as bordas das regiões estáveis identificadas pelas condições propostas no Teorema 4.1 (linha sólida), Corolário 4.1 (linha pontilhada), Teorema 6 de [CF00] (linha tracejada) e Teorema 1 de [LL08] (linha em traço-ponto).

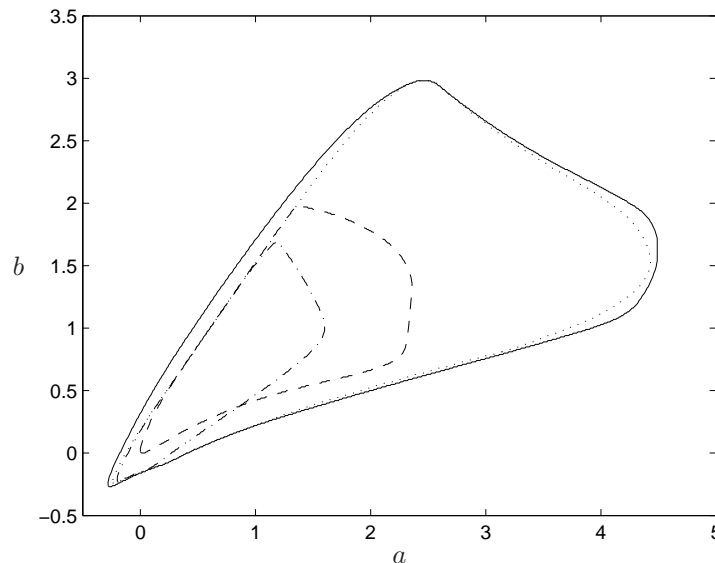


Figura 4.1: Regiões de estabilidade detectadas pelo Teorema 4.1 (linha sólida), Corolário 4.1 (linha pontilhada), Teorema 6 de [CF00] (linha tracejada) e Teorema 1 de [LL08] (linha em traço-ponto).

Como pode ser observado na Figura 4.1, as condições para análise de estabilidade propostas aqui são menos conservadoras do que as condições encontradas na literatura. Vale mencionar que, mesmo apresentando um conservadorismo reduzido, o Corolário 4.1 possui uma complexidade numérica muito semelhante à do Teorema 1 de [LL08]. Também pode-se observar que as regiões identificadas com o Teorema 6 de [CF00] e com o Teorema 1 de [LL08] são complementares entre si. Conforme mostrado na seção anterior, esse último teorema pode ser recuperado como caso particular do Corolário 4.1, que por sua vez pode ser obtido com a simplificação do Teorema 4.1. Tal fato se reflete nos resultados deste exemplo, visto que a região encontrada com o Teorema 1 de [LL08] está contida na região identificada com o Corolário 4.1, que por sua vez é englobada pela região detectada com Teorema 4.1. Nesse caso, fica claro que a utilização de funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetros pode levar a resultados menos conservadores.

Exemplo 4.2 (Projeto de Ganhos para Realimentação de Estados). Neste exemplo, as condições de síntese propostas no Teorema 4.2, no Corolário 4.2 e no Teorema 2 de [LL08] são utilizadas para procurar regiões em que sistemas dados por (4.2)-(4.4) possam ser

estabilizados por meio da lei de controle (4.5). Para formação do conjunto de sistemas a ser avaliado, considere as possíveis variações de subsistemas compostos por $[A|A_d|B]_i$, $i = 1, 2$:

$$[A|A_d|B]_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1188 & 0.2853 & 0.2826 & 0.4275 & 0 \\ 0.3393 & 0.0819 & 0.7902 & 0.5022 & 0.9 \end{array} \right]$$

$$[A|A_d|B]_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a & 0.2466 & 0.1521 & 0.3267 & b \\ 0.0270 & 0.6048 & 0.7983 & 0.3879 & 1.8 \end{array} \right].$$

As funções de pertinência que compõem as premissas das regras desses sistemas são dadas por

$$\mu_{M_{11}}(x_1(t)) = e^{-(x_1(t)+5)^2/8}$$

$$\mu_{M_{21}}(x_1(t)) = e^{-x_1(t)^2/4.5}.$$

O objetivo é determinar regiões, no plano $a \times b$, em que é possível projetar ganhos para estabilização dos sistemas considerados. A Figura 4.2 mostra as bordas das regiões obtidas com a utilização das condições propostas no Teorema 4.2 (linha sólida), no Corolário 4.2 (linha pontilhada) e no Teorema 2 de [LL08] (linha tracejada).

Note que as condições de síntese comparadas não são equivalentes, uma vez que diferentes regiões de estabilização do espaço de parâmetros $a \times b$ são detectadas. Apesar de complementares, as áreas de factibilidade determinadas com a aplicação do Teorema 4.2, do Corolário 4.2 e do Teorema 2 de [LL08] são 1.1651, 1.1598 e 0.8792, respectivamente. Logo, as regiões identificadas com o Teorema 4.2 e com o Corolário 4.2 são aproximadamente 32.52% e 31.92% maiores do que a região detectada com o Teorema 2 de [LL08].

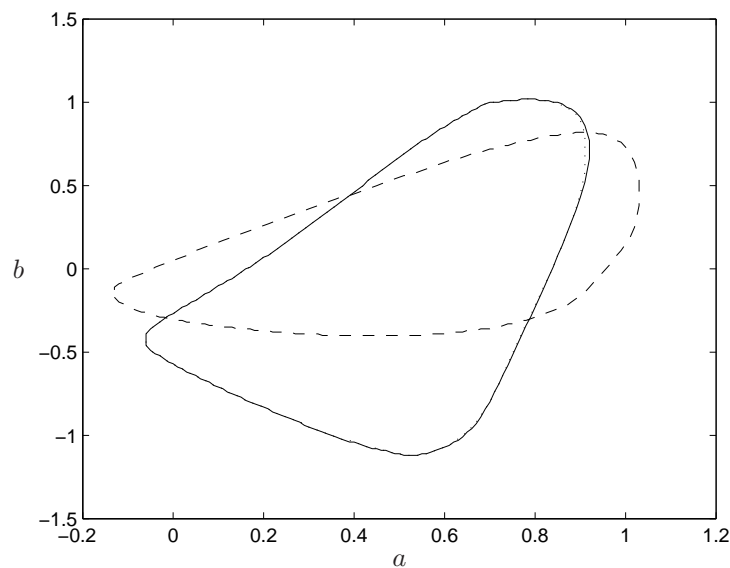


Figura 4.2: Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com o Teorema 4.2 (linha sólida), Corolário 4.2 (linha pontilhada) e Teorema 2 de [LL08] (linha tracejada).

Com $a = b = 0.9$, a estabilização do sistema é factível apenas por meio do Teorema 4.2. Nesse caso, a partir dos ganhos obtidos com esse teorema, algumas simulações temporais foram realizadas para o sistema em malha fechada. O controlador é dado por (4.5) com

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.5052 & -0.4467 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0.3535 & -0.2907 \end{bmatrix} .$$

A Figura 4.3 apresenta os planos de fase das simulações realizadas. As condições iniciais utilizadas, $x_0 = [1.5 \ 1.5]^T$ e $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$ são marcadas com o símbolo \times . Duas simulações foram implementadas para cada condição inicial, uma com $d = 2$ (linha tracejada) e outra com $d = 20$ (linha sólida). Independentemente da condição inicial, pode-se observar que o aumento no valor do atraso implica em mais oscilações do sistema em malha fechada.

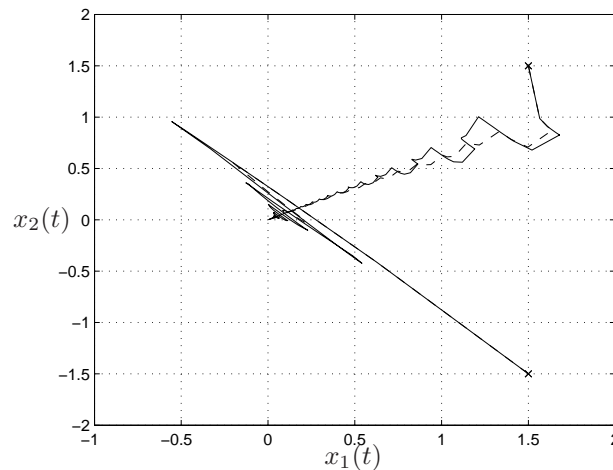


Figura 4.3: Planos de fase para duas condições iniciais: $x_0 = [1.5 \ 1.5]^T$ e $x_0 = [1.5 \ -1.5]^T$, cada uma utilizada nas simulações para $d = 2$ (linha tracejada) e $d = 20$ (linha sólida).

4.5 Conclusões

Nesse capítulo, resultados encontrados recentemente na literatura para análise de estabilidade e síntese de ganhos para realimentação de estados de sistema fuzzy T-S com estados em atraso foram melhorados. As condições apresentadas aqui, estendidas a partir de algumas abordagens propostas no Capítulo 3, foram obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros, matrizes de folga e, no caso da condição de síntese, uma variável instrumental. Sendo assim, tais condições englobam formulações baseadas na abordagem quadrática assim como, para a análise de estabilidade, a condição publicada [LL08], conforme demonstrado analiticamente. Já para o caso da síntese de controladores, as condições propostas podem levar a resultados complementares em relação aos encontrados com a formulação proposta nesta mesma referência. Porém, como mostrado por um dos exemplos numéricos, esses resultados podem ser menos conservadores e obtidos com custo computacional muito semelhante, ilustrando a eficiência das condições propostas. No próximo capítulo, as manipulações algébricas utilizadas aqui são novamente estendidas. Por meio de um candidato a funcional L-K mais elaborado, são obtidas formulações que permitem que o atraso seja variante no tempo.

Capítulo 5

Sistemas com Atraso Variante no Tempo

Condições convexas para análise de estabilidade e síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados são propostas neste capítulo. As condições dependem do intervalo de variação do atraso e são obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetros. A técnica apresentada na Subseção 2.4.5 é utilizada para expressar essas condições sob forma de conjuntos de LMIs, permitindo também a inclusão de variáveis de folga que tendem a reduzir o conservadorismo das mesmas. Dessa forma, por meio de testes de factibilidade de um respectivo conjunto de LMIs, os problemas de análise de estabilidade e os de síntese de controladores podem ser resolvidos eficientemente, em tempo polinomial, com ajuda de *softwares* especializados. Em alguns casos, utilizam-se também as técnicas apresentadas nas Subseções 3.2.2 e 3.2.3. Para um conjunto de sistemas, mostra-se que essas abordagens levam à formulações computacionalmente menos complexas em relação às obtidas de forma convencional. Exemplos numéricos são apresentados para comparação e demonstração de eficiência das condições propostas. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser parcialmente encontrados em [VLM10b].

5.1 Introdução

Como visto na Seção 2.3, uma grande vantagem dos modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) está no fato de que os mesmos permitem a representação de sistemas não-lineares por meio de uma combinação convexa de sistemas lineares, chamados subsistemas. A partir de 1990, várias abordagens de controle fuzzy foram propostas, estando aquelas baseadas em modelos T-S dentre as mais relevantes e úteis, justamente pela facilidade advinda da representação de sistemas não-lineares pela ponderação de N sistemas lineares [TW01]. Além disso, existem questões relacionadas a sistemas fuzzy T-S sujeitos a atraso no tempo que permanecem em aberto, especialmente quando se trata do desenvolvimento de condições para análise de estabilidade e síntese de controladores. Veja [Fen06] e referências internas. Esforços para se reduzir o conservadorismo e a complexidade numérica dessas condições vêm sendo realizados em diversas direções de pesquisa, incluindo o uso de múltiplas funções de Lyapunov [MPA09].

Sabe-se que atrasos no tempo podem implicar na degradação de desempenho ou mesmo na instabilidade de alguns sistemas de controle. Conforme mencionado na Seção 2.2, dentre as principais causas de atrasos no tempo estão as implementações de controle digital e as características intrínsecas do próprio sistema. Existem também situações em que os atrasos são *intencionalmente* introduzidos na ação de controle, facilitando a obtenção de estabilidade em malha fechada [GKC03, pág. 3], como no caso em que se deve estabilizar (ou rejeitar) vibrações em estruturas mecânicas [DZ08].

Neste capítulo, utiliza-se a técnica de realimentação de estados para estabilização de sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados. A lei de controle investigada utiliza os estados em atraso para aumentar sua flexibilidade, permitindo a estabilização de uma maior quantidade de sistemas. Esse tipo de realimentação adequa-se muito bem a sistemas discretos no tempo, uma vez que apenas um número finito de estados em atraso precisa ser armazenado. Por outro lado, não se pode aplicar esse recurso a sistemas contínuos no tempo sem o uso de conjecturas mais elaboradas. Vale destacar que, caso os valores do atraso não estejam disponíveis, é possível simplificar a lei de controle proposta, utilizando-se apenas a realimentação dos estados atuais.

Os problemas de análise de estabilidade e estabilização, por meio de condições convexas, de sistema fuzzy T-S discretos no tempo sujeitos a atraso variante no tempo permanecem em aberto, mesmo sendo relevantes e frequentemente relacionados à aplicações atuais. De forma alternativa ao que se encontra em grande parte da literatura, as condições propostas neste capítulo são obtidas a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii (L-K) dependente de parâmetro. Condições baseadas em um funcional constante e independente de parâmetros foram apresentadas em [LL07], em que o sistema é contínuo no tempo e o controlador fuzzy é digital. Para sistemas fuzzy T-S contínuos no tempo descritos por subsistemas com incertezas limitadas em norma, considere [TYZ09] e [LL09]. Em [Wu08] e [ZLL07], a partir da abordagem quadrática, investiga-se o controle baseado em observadores e o projeto de filtros para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo sujeitos a múltiplos atrasos constantes. Um funcional de Lyapunov-Krasovskii difuso é apresentado em [Wu06] para o tratamento de sistemas fuzzy discretos no tempo com atraso constante nos estados. Em todos esses trabalhos, formulações convexas permitem resumir os problemas mencionados em testes de factibilidade de um respectivo grupo de LMIs, permitindo que tais problemas sejam resolvidos eficientemente, por meio de *softwares* especializados [Stu99].

Quatro condições convexas para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados são apresentadas: duas para análise de estabilidade assintótica e duas para o projeto de controladores baseados em PDC. Todas elas dependem do intervalo de variação do atraso. Vale ressaltar que a inovação das proposições não está no funcional L-K utilizado, mas na manipulação algébrica baseada nas técnicas apresentadas no Capítulo 3, principalmente na Seção 3.2. Verifica-se que as condições obtidas com essa abordagem podem ser mais eficientes em relação às condições convencionais, apresentando resultados menos conservadores e um menor custo computacional. Em todos os casos, utiliza-se o Lema de Finsler para expressar as condições propostas sob a forma de conjuntos de LMIs. Além disso, condições quadráticas (em que as matrizes do funcional L-K são constantes) podem ser recuperadas como casos particulares das condições propostas. No presente capítulo, apresentam-se também: as complexidades numéricas associadas aos problemas de factibilidade propostos; alguns exemplos numéricos, nos quais as duas condições de

análise e as duas condições de síntese são comparadas entre si; e algumas conclusões, baseadas nos resultados desses exemplos.

5.2 Formulação do Problema

Considere um sistema fuzzy discreto no tempo com atraso variante nos estados, modelado com a abordagem Takagi-Sugeno (T-S), em que a i -ésima regra é dada por (veja a Seção 2.3 para detalhes):

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{ENTÃO } x_{t+1} = A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$; d_t é a variável escalar que representa o atraso variante no tempo, limitado por

$$0 < \underline{d} \leq d_t \leq \bar{d} < \infty, \quad (5.2)$$

com $\delta \in \mathbb{N} : \delta = \bar{d} - \underline{d}$ representando o intervalo de possível variação do atraso, d_t . Cada equação linear, representada por $A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t$, que compõe a consequência de uma regra fuzzy, é chamada de “subsistema”.

Sendo assim, para um dado estado x_t , pode-se inferir a dinâmica do sistema como:

$$x_{t+1} = A(\omega_t) x_t + A_d(\omega_t) x_{t-d_t} + B(\omega_t) u_t \quad (5.3)$$

em que ω_t é o vetor composto pelos elementos

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))} \quad (5.4)$$

com $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ representando o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Portanto, $\omega_i(t) \in [0, 1] \forall i$ e o vetor ω_t satisfaz

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1,$$

permitindo que se defina

$$[A|A_d|B](\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) [A|A_d|B]_i. \quad (5.5)$$

Neste capítulo, considera-se a seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} u_t &= K(\omega_t)x_t + K_d(\omega_t)x_{t-d_t} \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t)K_i x_t + \sum_{i=1}^N \omega_i(t)K_{di} x_{t-d_t} \end{aligned} \quad (5.6)$$

em que $[K|K_d]_i \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ contém os ganhos de realimentação que asseguram a estabilidade assintótica do sistema (5.3)-(5.5) para todo ω_t . Portanto, o sistema fuzzy T-S em malha fechada, formado por (5.3)-(5.5) e (5.6), pode ser definido como

$$x_{t+1} = \hat{A}(\omega_t)x_t + \hat{A}_d(\omega_t)x_{t-d_t} \quad (5.7)$$

com

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\omega_t) &\equiv A(\omega_t) + B(\omega_t)K(\omega_t) \\ \hat{A}_d(\omega_t) &\equiv A_d(\omega_t) + B(\omega_t)K_d(\omega_t) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Vale mencionar que, caso os valores do atraso d_t não estejam disponíveis, basta fazer $K_d(\omega_t) = \mathbf{0}$ em (5.6), recuperando uma lei de controle mais simples, frequentemente considerada em sistemas controlados por realimentação de estados: $u_t = K(\omega_t)x_t$. Por outro lado, se d_t estiver disponível, então a possibilidade de se utilizar $K(\omega_t)$ e $K_d(\omega_t)$ pode melhorar o desempenho do sistema em malha fechada. Isso é viável para sistemas nos quais o atraso possa ser mensurado ou estimado, como em [SSJ04].

Dessa forma, o principal objetivo deste capítulo é apresentar condições convexas para solucionar os seguintes problemas:

Problema 5.1 (Análise de estabilidade em malha fechada). *Dados $\delta = \bar{d} - \underline{d}$, conforme definido em (5.2), e as matrizes $[K|K_d]_i$, $[A|A_d|B]_i$, $i = 1, \dots, N$, determinar se o sistema (5.7)-(5.8) é assintoticamente estável.*

No caso em que não se conhece as matrizes que constituem o controlador, um dos objetivos fundamentais da teoria de controle é a determinação das mesmas, de forma a se obter um sistema estável em malha fechada. Esse problema é formulado a seguir.

Problema 5.2 (Projeto do controlador). *Dados $\delta = \bar{d} - \underline{d}$, conforme definido em (5.2), e as matrizes $[A|A_d|B]_i$, determinar, se possível, os ganhos $[K|K_d]_i$, $i = 1, \dots, N$, de forma que o sistema (5.7)-(5.8) seja assintoticamente estável.*

5.3 Resultados Principais

O desenvolvimento das condições convexas apresentadas nesta seção, duas para análise de estabilidade e duas para síntese de controladores, baseia-se no seguinte candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t) = \sum_{v=1}^3 V_v(\omega_t, t) \quad (5.9)$$

com

$$V_1(\omega_t, t) = x_t^T P(\omega_t)x_t, \quad (5.10)$$

$$V_2(\omega_t, t) = \sum_{j=t-d_t}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j, \quad (5.11)$$

$$V_3(\omega_t, t) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j, \quad (5.12)$$

em que as matrizes $P(\omega_t)$ e $Q(\omega_t)$ podem assumir valores diferentes a cada instante t e são definidas como

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad (5.13)$$

$$Q(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Q_i. \quad (5.14)$$

5.3.1 Análise de Estabilidade Assintótica

A seguir, duas condições convexas para análise de estabilidade assintótica são apresentadas. Ambas utilizam o Lema de Finsler para a formulação dos respectivos conjuntos de LMIs, sempre a partir do funcional L-K (5.9)-(5.14), de equações que regem o comportamento do sistema e de um bloco apropriado de variáveis de folga. A diferença na obtenção dessas duas condições para análise de estabilidade está principalmente nas equações consideradas. Enquanto apenas (5.7) é utilizada no desenvolvimento da primeira condição, no desenvolvimento da segunda considera-se (5.3) e (5.6), conforme em [LL08]. Adequando-se a cada caso, as dimensões dos blocos de variáveis de folga também são diferentes. As referidas condições são respectivamente formalizadas nos Teoremas 5.1 e 5.2. Um exemplo comparativo pode ser encontrado na Seção 5.4.

Teorema 5.1. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\mathcal{M}(i, j, \ell, m) = \begin{bmatrix} P_\ell + X_1^T + X_1 & \mathcal{M}_{12} & X_3^T - X_1 \hat{A}_{dij} \\ \star & \mathcal{M}_{22} & -(\hat{A}_{ij}^T X_3^T + X_2 \hat{A}_{dij}) \\ \star & \star & -(Q_m + \hat{A}_{dij}^T X_3^T + X_3 \hat{A}_{dij}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{cases} i, \ell, m = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N \end{cases} \quad (5.15)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12} &= X_2^T - X_1 \hat{A}_{ij} \\ \mathcal{M}_{22} &= 0.5((\delta + 1)(Q_i + Q_j) - (P_i + P_j)) - \hat{A}_{ij}^T X_2^T - X_2 \hat{A}_{ij} \\ \hat{A}_{ij} &= 0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) \\ \hat{A}_{dij} &= 0.5(A_{di} + B_i K_{dj} + A_{dj} + B_j K_{di}), \end{aligned}$$

então o sistema fuzzy T-S discreto no tempo com atraso variante nos estados, dado por (5.7)-(5.8), é assintoticamente estável.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$, $Q_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, assegura a positividade do funcional (5.9), formado por (5.10)-(5.14). Como visto no Capítulo 2, para ser considerado um funcional de Lyapunov-Krasovskii e assim assegurar a estabilidade assintótica de (5.7), ainda é necessário que

$$\Delta V(\omega_t, t) < \mathbf{0} . \quad (5.16)$$

Para o cálculo de (5.16), considere

$$\Delta V_1(\omega_t, t) = x_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) x_{t+1} - x_t^T P(\omega_t) x_t \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2(\omega_t, t) &= \sum_{j=t+1-d_{t+1}}^t x_j^T Q(\omega_j) x_j - \sum_{j=t-d_t}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \\ &= x_t^T Q(\omega_t) x_t + \sum_{j=t+1-d_{t+1}}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \\ &\quad - \left(x_{t-d_t}^T Q(\omega_{t-d_t}) x_{t-d_t} + \sum_{j=t+1-d_t}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3(\omega_t, t) &= \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \left(\sum_{j=t+\ell}^t x_j^T Q(\omega_j) x_j - \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \right) \\ &= \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \left(x_t^T Q(\omega_t) x_t + \sum_{j=t+\ell}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j - \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \right) \\ &= (\bar{d} - \underline{d}) x_t^T Q(\omega_t) x_t + \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \left(\sum_{j=t+\ell}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j - \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \right) \\ &= \delta x_t^T Q(\omega_t) x_t - \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} x_{t+\ell-1}^T Q(\omega_{t+\ell-1}) x_{t+\ell-1} \\ &= \delta x_t^T Q(\omega_t) x_t - \sum_{j=t+1-\bar{d}}^{t-\underline{d}} x_j^T Q(\omega_j) x_j . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Observe que o segundo termo de (5.18) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \sum_{j=t+1-d_{t+1}}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j &= \sum_{j=t+1-\underline{d}}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j + \sum_{j=t+1-d_{t+1}}^{t-\underline{d}} x_j^T Q(\omega_j) x_j \\ &\leq \sum_{j=t+1-d_t}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j + \sum_{j=t+1-\bar{d}}^{t-\underline{d}} x_j^T Q(\omega_j) x_j . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando (5.20) em (5.18), tem-se

$$\Delta V_2(\omega_t, t) \leq x_t^T Q(\omega_t) x_t - x_{t-d_t}^T Q(\omega_{t-d_t}) x_{t-d_t} + \sum_{j=t+1-\bar{d}}^{t-\underline{d}} x_j^T Q(\omega_j) x_j . \quad (5.21)$$

Assim, considerando-se (5.17), (5.19) e (5.21), a seguinte limitação para o valor máximo de (5.16) pode ser obtida

$$\begin{aligned} \Delta V(\omega_t, t) \leq & x_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) x_{t+1} \\ & + x_t^T [(\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t)] x_t \\ & - x_{t-d_t}^T Q(\omega_{t-d_t}) x_{t-d_t} < 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{3n} : \varphi = [x_{t+1}^T \ x_t^T \ x_{t-d_t}^T]^T$, pode-se reescrever (5.22) e (5.7), respectivamente, como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} P(\omega_{t+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -Q(\omega_{t-d_t}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (5.23)$$

$$[\mathbf{I} \ -\hat{A}(\omega_t) \ -\hat{A}_d(\omega_t)] \varphi = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (5.23), (5.24) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{3n \times n}$, composto por $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\omega_t) = & \begin{bmatrix} P(\omega_{t+1}) + X_1^T + X_1 \\ \star \\ \star \\ \\ X_2^T - X_1 \hat{A}(\omega_t) \\ (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) - \hat{A}(\omega_t)^T X_2^T - X_2 \hat{A}(\omega_t) \\ \star \\ \\ X_3^T - X_1 \hat{A}_d(\omega_t) \\ -(\hat{A}(\omega_t)^T X_3^T + X_2 \hat{A}_d(\omega_t)) \\ -(Q(\omega_{t-d_t}) + \hat{A}_d(\omega_t)^T X_3^T + X_3 \hat{A}_d(\omega_t)) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Completando a prova, note que (5.25) pode ser recuperada de (5.15), bastando fazer¹

$$\mathcal{M}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_\ell(t+1) \omega_m(t-d_t) \omega_i(t) \omega_j(t) \mathcal{M}(i, j, \ell, m). \quad \square$$

Uma nova condição convexa para análise de estabilidade assintótica é apresentada no teorema formulado a seguir. Apesar de basear-se no mesmo candidato a funcional L-K considerado no desenvolvimento anterior, essa nova condição pode levar à detecção de diferentes conjuntos de sistemas estáveis. Isso pode ocorrer pois, similarmente ao que foi apresentado na Subseção 3.2.2, o desenvolvimento desse teorema considera o sistema em malha fechada utilizando, individualmente, (5.3) e (5.6), ao invés de (5.7). Outras diferenças em relação ao Teorema 5.1 são a significativa redução do número de LMIs e a maior quantidade de variáveis de folga.

¹Defina $0^0 = 1$ e $0^r = 0$, $r \in \mathbb{N}^*$. Veja a Subseção 3.2.2 para detalhes.

Teorema 5.2. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\hat{\mathcal{M}}(i, j, \ell) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{M}}_{11} & \hat{\mathcal{M}}_{12} & \hat{\mathcal{M}}_{13} & K_i^T X_{41}^T + A_i^T X_{42}^T - X_{12} \\ \star & \hat{\mathcal{M}}_{22} & \hat{\mathcal{M}}_{23} & K_{di}^T X_{41}^T + A_{di}^T X_{42}^T - X_{22} \\ \star & \star & \hat{\mathcal{M}}_{33} & -X_{41}^T + B_i^T X_{42}^T - X_{32} \\ \star & \star & \star & P_j - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$i, j, \ell = 1, \dots, N$ (5.26)

em que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}_{11} &= (\delta + 1)Q_i - P_i + K_i^T X_{11}^T + A_i^T X_{12}^T + X_{11}K_i + X_{12}A_i \\ \hat{\mathcal{M}}_{12} &= K_i^T X_{21}^T + A_i^T X_{22}^T + X_{11}K_{di} + X_{12}A_{di} \\ \hat{\mathcal{M}}_{13} &= K_i^T X_{31}^T + A_i^T X_{32}^T - X_{11} + X_{12}B_i \\ \hat{\mathcal{M}}_{22} &= -Q_\ell + K_{di}^T X_{21}^T + A_{di}^T X_{22}^T + X_{21}K_{di} + X_{22}A_{di} \\ \hat{\mathcal{M}}_{23} &= K_{di}^T X_{31}^T + A_{di}^T X_{32}^T - X_{21} + X_{22}B_i \\ \hat{\mathcal{M}}_{33} &= -X_{31}^T + B_i^T X_{32}^T - X_{31} + X_{32}B_i \end{aligned}$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com atraso variante nos estados, dado por (5.7)-(5.8), é assintoticamente estável.

Demonstração. Claramente, o requisito $P_i > \mathbf{0}$, $Q_i > \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$, assegura a positividade do funcional (5.9), formado por (5.10)-(5.14). Para ser considerado um funcional de Lyapunov-Krasovskii e assim assegurar a estabilidade assintótica de (5.7), ainda é necessário verificar (5.22). Para tal, considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{3n+m}$: $\varphi = [x_t^T \ x_{t-d}^T \ u_t^T \ x_{t+1}^T]^T$, pode-se reescrever (5.22) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -Q(\omega_{t-d}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (5.27)$$

e agrupar (5.3) e (5.6) em

$$\begin{bmatrix} K(\omega_t) & K_d(\omega_t) & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t) & A_d(\omega_t) & B(\omega_t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0}. \quad (5.28)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (5.27), (5.28) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{3n+m \times n+m}$, composto por $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é possível obter

$$\hat{\mathcal{M}}(\omega_t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{M}}_{11}(\omega_t) & \hat{\mathcal{M}}_{12}(\omega_t) & \hat{\mathcal{M}}_{13}(\omega_t) & K(\omega_t)^T X_{41}^T + A(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{12} \\ \star & \hat{\mathcal{M}}_{22}(\omega_t) & \hat{\mathcal{M}}_{23}(\omega_t) & K_d(\omega_t)^T X_{41}^T + A_d(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{22} \\ \star & \star & \hat{\mathcal{M}}_{33}(\omega_t) & -X_{41}^T + B(\omega_t)^T X_{42}^T - X_{32} \\ \star & \star & \star & P(\omega_{t+1}) - X_{42}^T - X_{42} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.29)$$

em que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{M}}_{11}(\omega_t) &= (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) + K(\omega_t)^T X_{11}^T + A(\omega_t)^T X_{12}^T + X_{11}K(\omega_t) + X_{12}A(\omega_t) \\
\hat{\mathcal{M}}_{12}(\omega_t) &= K(\omega_t)^T X_{21}^T + A(\omega_t)^T X_{22}^T + X_{11}K_d(\omega_t) + X_{12}A_d(\omega_t) \\
\hat{\mathcal{M}}_{13}(\omega_t) &= K(\omega_t)^T X_{31}^T + A(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{11} + X_{12}B(\omega_t) \\
\hat{\mathcal{M}}_{22}(\omega_t) &= -Q(\omega_{t-d_t}) + K_d(\omega_t)^T X_{21}^T + A_d(\omega_t)^T X_{22}^T + X_{21}K_d(\omega_t) + X_{22}A_d(\omega_t) \\
\hat{\mathcal{M}}_{23}(\omega_t) &= K_d(\omega_t)^T X_{31}^T + A_d(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{21} + X_{22}B(\omega_t) \\
\hat{\mathcal{M}}_{33}(\omega_t) &= -X_{31}^T + B(\omega_t)^T X_{32}^T - X_{31} + X_{32}B(\omega_t) .
\end{aligned}$$

Completando a prova, note que (5.29) pode ser recuperada de (5.26), bastando fazer

$$\hat{\mathcal{M}}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \omega_\ell(t-d_t) \omega_j(t+1) \omega_i(t) \hat{\mathcal{M}}(i, j, \ell) . \quad \square$$

Observação 5.1. Os Teoremas 5.1 e 5.2 não são equivalentes. Baseando na realização de alguns testes, pode-se dizer que o Teorema 5.2 tende a identificar conjuntos de sistemas estáveis mais amplos do que aos obtidos com a aplicação do Teorema 5.1. Porém, em alguns casos, tais conjuntos são complementares (veja o Exemplo 5.1 na Seção 5.4).

5.3.2 Síntese de Ganhos para Realimentação de Estados

A seguir são apresentadas duas condições convexas para síntese de controladores baseados em PDC. Pode-se dizer que, assim como para a análise de estabilidade, as condições em questão baseiam-se no mesmo funcional L-K, no caso, (5.9)-(5.14). O desenvolvimento da primeira condição segue passos relativamente convencionais, usados para obtenção de formulações convexas destinadas ao projeto de ganhos para realimentação de estados. Veja [LM08b], para o caso de sistemas com incertezas variantes no tempo. A segunda condição é desenvolvida com o auxílio de uma variável instrumental. Essa técnica é fundamentalmente a mesma apresentada na Subseção 3.2.3, geralmente levando a resultados menos conservadores em relação aos obtidos com o uso da abordagem convencional. As referidas condições são respectivamente formalizadas nos Teoremas 5.3 e 5.4. Na Seção 5.4, pode-se encontrar um exemplo comparativo.

Teorema 5.3. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $W_{di} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 1, \dots, N$, e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\tilde{\mathcal{M}}(i, j, \ell, m) = \begin{bmatrix} P_\ell + X_1^T + X_1 & \tilde{\mathcal{M}}_{12} & \tilde{\mathcal{M}}_{13} \\ \star & \tilde{\mathcal{M}}_{22} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q_m \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{cases} i, \ell, m = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N \end{cases} \quad (5.30)$$

em que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}}_{12} &= -0.5(X_1(A_i^T + A_j^T) + W_j B_i^T + W_i B_j^T) \\
\tilde{\mathcal{M}}_{13} &= -0.5(X_1(A_{di}^T + A_{dj}^T) + W_{dj} B_i^T + W_{di} B_j^T)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{22} = 0.5((\delta + 1)(Q_i + Q_j) - (P_i + P_j))$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com atraso variante nos estados, dado por (5.3)-(5.5), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (5.6) com

$$K_i = W_i^T(X_1^T)^{-1} \quad \text{e} \quad K_{di} = W_{di}^T(X_1^T)^{-1}.$$

Demonstração. Note que, se o sistema (5.7) é assintoticamente estável com $\hat{A}(\omega_t)^T$ e $\hat{A}_d(\omega_t)^T$, então o sistema original, com (5.8), também o é. Sendo assim, a prova desse teorema pode ser obtida por meio das seguintes manipulações em (5.15):

- substitui-se \hat{A}_{ij} por $0.5(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i)^T$;
- substitui-se \hat{A}_{dij} por $0.5(A_{di} + B_i K_{dj} + A_{dj} + B_j K_{di})^T$;
- impõe-se $X_2 = X_3 = \mathbf{0}$;
- fazem-se as substituições de variáveis $W_i = X_1 K_i^T$ e $W_{di} = X_1 K_{di}^T$,

resultando em (5.30). □

Uma nova condição convexa para projeto de controladores é apresentada no teorema a seguir. A principal diferença em relação ao desenvolvimento anterior é a consideração de uma nova equação, que relaciona os estados do sistema a uma variável instrumental, conforme introduzido na Seção 3.2. Por isso, essa nova condição pode levar à detecção de diferentes conjuntos de sistemas estabilizáveis. Outras diferenças em relação ao Teorema 5.3 são a significativa redução do número de LMIs e a maior quantidade de variáveis de folga.

Teorema 5.4. *Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{51} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{52} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{53} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\bar{\mathcal{M}}(i, j, \ell) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{M}}_{11} & \bar{\mathcal{M}}_{12} & B_i X_{32}^T - X_{12} & B_i X_{42}^T - X_{11} & B_i X_{52}^T + A_i X_{53}^T \\ \star & \bar{\mathcal{M}}_{22} & B_i X_{31}^T - X_{22} & B_i X_{41}^T - X_{21} & B_i X_{51}^T + A_{di} X_{53}^T \\ \star & \star & -X_{32}^T - X_{32} & -X_{42}^T - X_{31} & -X_{52}^T + W_i \\ \star & \star & \star & -X_{41}^T - X_{41} & -X_{51}^T + W_{di} \\ \star & \star & \star & \star & P_j - X_{53}^T - X_{53} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$i, j, \ell = 1, \dots, N \quad (5.31)$$

em que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_{11} &= (\delta + 1)Q_i - P_i + B_i X_{12}^T + X_{12} B_i^T \\ \bar{\mathcal{M}}_{12} &= B_i X_{22}^T + X_{11} B_i^T \\ \bar{\mathcal{M}}_{22} &= -Q_\ell + B_i X_{21}^T + X_{21} B_i^T \end{aligned}$$

então o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com atraso variante nos estados, dado por (5.3)-(5.5), é assintoticamente estável quando sujeito à lei de controle (5.6) com

$$K_i = W_i(X_{53}^T)^{-1} \quad \text{e} \quad K_{di} = W_{di}(X_{53}^T)^{-1}.$$

Demonstração. Note que, se o sistema (5.7) é assintoticamente estável com $\hat{A}(\omega_t)^T$ e $\hat{A}_d(\omega_t)^T$, então o sistema original, com (5.8), também o é. Nesse caso, pode-se reconsiderar (5.7) como

$$x_{t+1} = (A(\omega_t)^T + K(\omega_t)^T B(\omega_t)^T)x_t + (A_d(\omega_t)^T + K_d(\omega_t)^T B(\omega_t)^T)x_{t-d_t}. \quad (5.32)$$

Então, utiliza-se a variável instrumental $\nu_t = B(\omega_t)^T x_t$ para reescrever (5.32) como

$$x_{t+1} = A(\omega_t)^T x_t + K(\omega_t)^T \nu_t + A_d(\omega_t)^T x_{t-d_t} + K_d(\omega_t)^T \nu_{t-d_t}. \quad (5.33)$$

Considerando um espaço aumentado dado por

$$\varphi = [x_t^T \quad x_{t-d_t}^T \quad \nu_t^T \quad \nu_{t-d_t}^T \quad x_{t+1}^T]^T \in \mathbb{R}^{3n+2m}, \quad (5.34)$$

pode-se reescrever (5.22) como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -Q(\omega_{t-d_t}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\omega_{t+1}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0}$$

e agrupar as equações que descrevem os sinais instrumentais e (5.33) em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B(\omega_t)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ B(\omega_t)^T & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A(\omega_t)^T & A_d(\omega_t)^T & K(\omega_t)^T & K_d(\omega_t)^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \varphi = \mathbf{0}.$$

A partir desse ponto, seguindo-se passos similares aos da prova do Teorema 5.2, considerando $X_{13} = X_{23} = X_{33} = X_{43} = \mathbf{0}$ em um bloco de variáveis de folga formado por X_{ij} , $i = 1, \dots, 5$, $j = 1, \dots, 3$, de dimensões adequadas, e fazendo-se as mudanças de variáveis $W_i = K_i X_{53}^T$ e $W_{di} = K_{di} X_{53}^T$, pode-se obter (5.31). \square

Observação 5.2. Note que a condição proposta no Teorema 5.4 é obtida de forma diferente em relação ao que usualmente se encontra na literatura. Além da respectiva substituição de $\hat{A}(\omega_t)$ e $\hat{A}_d(\omega_t)$ por $\hat{A}(\omega_t)^T$ e $\hat{A}_d(\omega_t)^T$ em (5.7), baseada no fato de que se o segundo par compõe um sistema estável, o mesmo acontece com o primeiro, utiliza-se uma variável instrumental para representar os sinais $B(\omega_t)^T x_t$ e $B(\omega_t)^T x_{t-d_t}$. Essa técnica, publicada em [VLM10a], para sistemas com atrasos constantes no tempo, parece nunca ter sido utilizada por outros autores, até o momento. Veja a Subseção 3.2.3 para detalhes de desenvolvimento da mesma.

Observação 5.3. Note que, nos casos em que não se conhece o valor do atraso, ou seja, quando x_{t-d_t} não está disponível para realimentação, as condições propostas nos Teoremas 5.3 e 5.4 podem ser usadas com $W_{di} = 0$, $i = 1, \dots, N$. Também é importante mencionar que, nesse caso, apesar de não haver impedimentos para aplicação do Teorema 5.4, tal situação seria melhor aproveitada se uma nova condição, computacionalmente menos complexa, fosse desenvolvida a partir do espaço aumentado $\varphi \in \mathbb{R}^{3n+m}$: $\varphi = [x_t^T \quad x_{t-d_t}^T \quad \nu_t^T \quad x_{t+1}^T]^T$, ao invés de (5.34). Isso pode melhorar os resultados obtidos pela abordagem proposta no Teorema 5.4, nos casos em que o atraso d_t está indisponível.

Vale mencionar que todos os teoremas apresentados nesse capítulo suportam o caso em que o atraso dos sistemas pode ser considerado constante no tempo, ou seja, $\delta = 0$. Além disso, caso se considere que as matrizes do funcional L-K (5.9)-(5.12) independem de ω_t , a abordagem chamada “estabilidade quadrática”, frequentemente utilizada para investigação de sistemas fuzzy sem atrasos no tempo, pode ser recuperada de (5.15), (5.26), (5.30), e (5.31). Nesses casos particulares, as condições são numericamente menos complexas do que as apresentadas aqui, mas ao custo de serem, em geral, mais conservadoras.

5.3.3 Complexidade Numérica

As complexidades numéricas das condições apresentadas aqui podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas nas LMIs, \mathcal{L} , envolvidas nos problemas de otimização que as mesmas representam. Por exemplo, utilizando-se o *toolbox* SeDuMi, o número de operações com ponto flutuante para solucionar esses problemas é da ordem de $\mathcal{K}^2\mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2}$, veja [Stu99]. Os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} associados aos testes de factibilidade propostos nesse capítulo são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas

Teorema	\mathcal{K}	\mathcal{L}
1	$(n^2+n)N+3n^2$	$1.5nN^4+1.5nN^3+2nN$
2	$(n^2+n)N+3n^2+m^2+4nm$	$(3n+m)N^3+2nN$
3	$(n^2+2nm+n)N+n^2$	$1.5nN^4+1.5nN^3+2nN$
4	$(n^2+2mn+n)N+n^2+4m^2+6nm$	$(3n+2m)N^3+2nN$

Note que, ao se utilizar o SeDuMi, a condição para análise de estabilidade proposta no Teorema 5.1 tem um custo computacional maior do que a condição apresentada no Teorema 5.2, para qualquer sistema com $N > 3$ e $n \geq m$. Já em relação às condições para síntese de controladores, propostas nos Teoremas 5.3 e 5.4, pode-se afirmar que a primeira tem um maior custo computacional para qualquer sistema com $N > 4$ e $n \geq m$.

5.4 Exemplos

Dois exemplos são dados nesta seção. O Exemplo 5.1 investiga a estabilidade assintótica de um sistema fuzzy T-S dentro de um espaço de parâmetros $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Mostra-se que a região de estabilidade detectada pela condição proposta no Teorema 5.2 é maior, porém complementar, em relação à região detectada com a aplicação do Teorema 5.1. No segundo exemplo, ilustra-se o problema de estabilização por meio da lei de controle (5.6). Todos os exemplos foram executados utilizando-se um processador AMD Phenom[®] 9500 Quad-Core, 2.21 GHz com 4 Gb de memória RAM e o *toolbox* SeDuMi, desenvolvido para MATLAB[®].

Exemplo 5.1 (Análise de Estabilidade Assintótica). Neste exemplo, as condições para análise de estabilidade assintótica propostas neste capítulo são comparadas entre si. Para tal, considere o sistema fuzzy T-S discreto no tempo com atraso variante nos estados dado

por (5.1)-(5.5), com $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$, $p = 1$, e subsistemas descritos pelas matrizes $\mathcal{V}_i = [A|A_d|B]_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{V}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} c & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.51 & -0.1 & -0.25 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5.35)$$

$$\mathcal{V}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1 & 0.25 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0.15 & -0.5 & 0.15 & 0 & -0.5 \end{array} \right] \quad (5.36)$$

$$\mathcal{V}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a & 0.75 & 0.19 & 0 & b \\ 0.25 & -0.8 & 0.06 & 0 & 0.5 \end{array} \right]. \quad (5.37)$$

Esse sistema foi investigado em [LL08] para atrasos constantes no tempo, $c = 0.1$ e intervalos $0 \leq a \leq 1.6$ e $0 \leq b \leq 1.8$ em que o suposto controlador fuzzy é dado por (5.6), com $K_{di} = \mathbf{0}$ e os ganhos K_i calculados de forma que os autovalores de $A_i + B_i K_i$, $i = 1, 2, 3$, sejam todos alocados em -0.5 . Ou seja, para cada par (a, b) , um novo conjunto de ganhos K_i , $i = 1, 2, 3$, é calculado usando-se a fórmula de Ackerman para alocar todos os polos em -0.5 , veja [Che99] para detalhes.

Aqui, o objetivo é detectar regiões de estabilidade em um espaço de parâmetros $a \times b$ mais amplo, limitado por $0.0 \leq a \leq 4.0$ e $0.0 \leq b \leq 2.5$, de forma que o referido sistema seja assintoticamente estável mesmo estando sujeito a um atraso variante no tempo com $\delta = 1$. A Figura 5.1 mostra as bordas das regiões estáveis identificadas pelas condições propostas no Teorema 5.1 (linha sólida) e Teorema 5.2 (linha pontilhada).

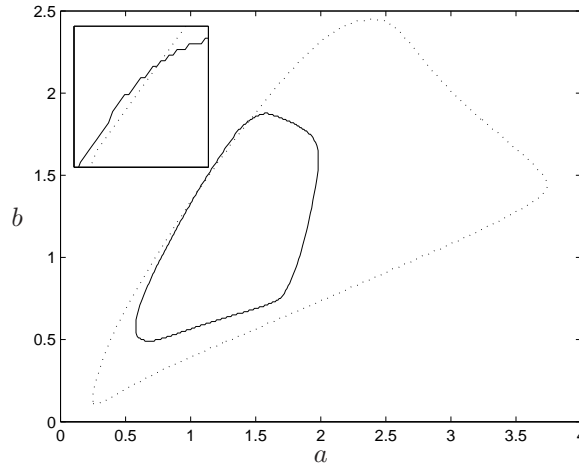


Figura 5.1: Regiões de estabilidade detectadas pelos Teoremas 5.1 (linha sólida) e 5.2 (linha pontilhada).

Como pode ser observado na Figura 5.1, as condições para análise de estabilidade comparadas não são equivalentes, uma vez que podem detectar estabilidade em diferentes regiões do espaço de parâmetros $a \times b$. Apesar de levemente complementares, as áreas de factibilidade determinadas pela aplicação dos Teoremas 5.1 e 5.2 são 1.14 e 3.54, respectivamente. Logo, a região identificada com o Teorema 5.2 é aproximadamente 210% maior do que a região detectada com o Teorema 5.1. Além disso, com auxílio da Tabela 5.1, pode-se observar que o problema de factibilidade proposto no Teorema 5.2 é 61.44% numericamente menos complexo em relação ao proposto no Teorema 5.1, se usado o SeDuMi.

Exemplo 5.2 (Projeto de Ganhos para Realimentação de Estados). Neste exemplo, as condições de síntese propostas nos Teoremas 5.3 e 5.4 são utilizadas para procurar regiões em que sistemas dados por (5.3)-(5.5) possam ser estabilizados por meio da lei de controle (5.6). Para formação do conjunto de sistemas a ser avaliado, considere as possíveis variações de subsistemas compostos por $\rho \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, com (5.35)-(5.37) em que $a = 1.2$, $b = 1.6$ e $c = 1$. As funções de pertinência que compõem as premissas das regras desses sistemas são dadas por

$$\begin{aligned}\mu_{M_{11}}(x_1(t)) &= e^{-(x_1(t)+5)^2/8} \\ \mu_{M_{21}}(x_1(t)) &= e^{-x_1(t)^2/4.5} \\ \mu_{M_{31}}(x_1(t)) &= e^{-(x_1(t)-5)^2/8}.\end{aligned}$$

O objetivo é determinar regiões, no plano $\delta \times \rho$, em que é possível projetar ganhos para estabilização dos sistemas considerados. Conforme definido na Seção 5.2, δ representa o intervalo de possível variação do atraso ao qual os estados dos sistemas estão sujeitos. A Figura 5.2 mostra, abaixo de cada curva, as regiões obtidas com a utilização das condições propostas no Teorema 5.3 (linha sólida) e no Teorema 5.4 (linha pontilhada). Em ambos os casos, as condições foram usadas duas vezes, considerando que os valores do atraso d_t estão disponíveis (marcas com círculos) e considerando que não estão (marcas com quadrados). Ou seja, nesse último caso, as condições (5.30) e (5.31) foram utilizadas impondo-se $W_{di} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Conseqüentemente, os ganhos para realimentação de estados em atraso, K_{di} , não foram projetados.

Note que, no caso em que se considera os valores do atraso d_t sempre disponíveis, a aplicação do Teorema 5.4 claramente melhora o resultado obtido pela abordagem proposta no Teorema 5.3, detectando uma região mais ampla de possibilidades de estabilização. Por outro lado, considerando que apenas o intervalo variação do atraso é conhecido, o Teorema 5.3 mostrou-se mais eficaz do que o Teorema 5.4, detectando um conjunto maior de sistemas estabilizáveis. A Observação 5.3, apresentada na seção anterior, aplica-se nesse último caso, sendo um dos possíveis motivos para esse resultado.

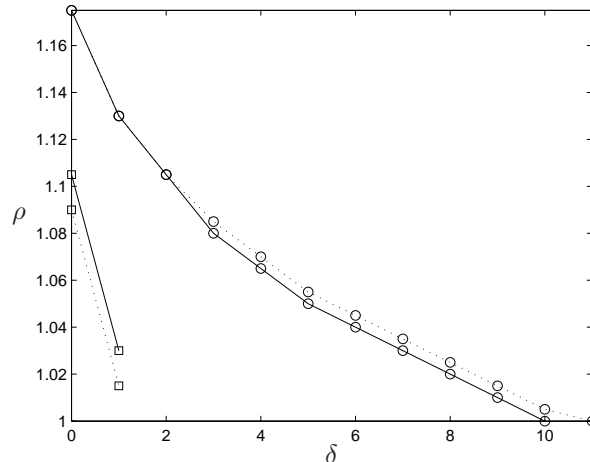


Figura 5.2: Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com os Teoremas 5.3 (linha sólida) e 5.4 (linha pontilhada).

Com $\delta = 11$ e $\rho = 1$, a estabilização do sistema é factível apenas por meio do Teorema 5.4. Nesse caso, a partir dos ganhos obtidos com esse teorema, algumas simulações temporais foram realizadas para o sistema em malha fechada. O controlador é dado por (5.6) com

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -2.0771 & -0.8002 \end{bmatrix} & K_{d1} &= \begin{bmatrix} -0.0759 & -0.0141 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -0.4160 & -0.2041 \end{bmatrix} & K_{d2} &= \begin{bmatrix} -0.2776 & -0.0021 \end{bmatrix} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -0.6532 & -0.2549 \end{bmatrix} & K_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.1291 & -0.0030 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam as simulações realizadas com $\underline{d} = 1$, $\bar{d} = 12$ e condições iniciais $x(t) = [2.0 \ -1.5]^T$, $t = -12, \dots, 0$. A Figura 5.3 mostra o comportamento dos estados do sistema em malha fechada. O sinal de controle é apresentado na parte superior da Figura 5.4 e, logo abaixo, os valores de atraso, gerados aleatoriamente dentro do intervalo considerado. Demonstra-se, dessa forma, que a abordagem proposta no Teorema 5.4 pode levar a resultados menos conservadores, nesse caso, sendo também 30.7% numericamente menos complexa do que a condição proposta no Teorema 5.3.

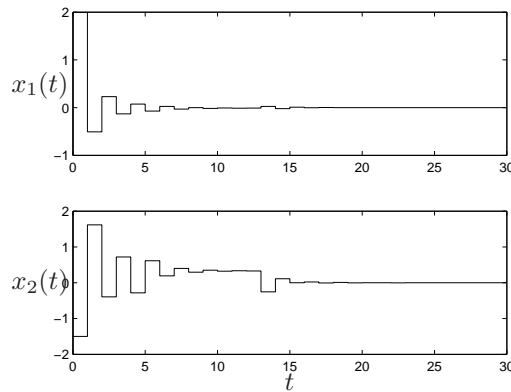


Figura 5.3: Simulação dos estados do sistema em malha fechada: x_1 (acima) e x_2 (abaixo).

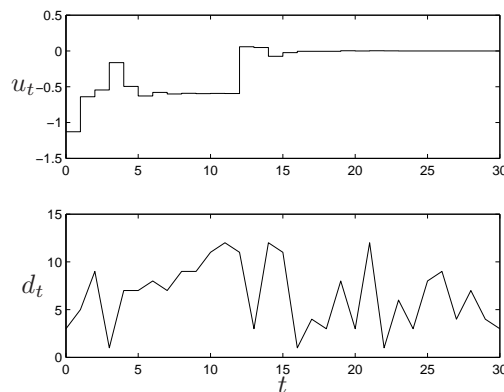


Figura 5.4: Simulação do sinal de controle e do atraso variante no tempo: u_t (acima) e d_t (abaixo).

5.5 Conclusões

Quatro condições convexas, duas para análise de estabilidade e duas para síntese de controladores, foram apresentadas nesse capítulo. Todas adequadas a sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados e dependentes do intervalo de variação desse atraso. Além disso, o Lema 1, apresentado na Seção 2.4, e um mesmo funcional de Lyapunov-Krasovskii, dependente de parâmetros, foram utilizados no desenvolvimento de todas as condições.

A diferença entre as condições para análise de estabilidade origina-se na forma de se considerar o comportamento do sistema em malha fechada. Enquanto a primeira abordagem considera apenas uma equação, capaz de descrever esse comportamento; a segunda considera as equações que determinam, separadamente, o comportamento do sistema em malha aberta e o sinal de controle. Mostra-se que essas duas abordagens não são equivalentes, podendo gerar até mesmo resultados complementares. Porém, a segunda abordagem tende a ser mais eficaz, levando a resultados menos conservadores a partir de um menor custo computacional. Deve-se destacar que as duas abordagens já foram utilizadas previamente em outros trabalhos, mas aparentemente nunca em conjunto com o funcional L-K considerado, permitindo o tratamento de sistemas com atraso variante no tempo.

No caso das condições para síntese de controladores, as abordagens também são distintas. Conforme referenciado anteriormente nesse capítulo, o desenvolvimento da primeira condição segue passos relativamente convencionais, usados para obtenção de formulações convexas destinadas ao projeto de ganhos para realimentação de estados. A segunda condição é obtida com o auxílio de uma variável instrumental. Essa técnica parece nunca ter sido utilizada por outros autores, até o momento. Seu desenvolvimento é apresentado na Seção 3.2 desse trabalho. Mostra-se que a mesma, em relação à abordagem convencional, pode levar a resultados menos conservadores, obtidos com menor custo computacional.

Exemplos numéricos foram apresentados para comparar e ilustrar a eficiência das condições propostas. Espera-se que as abordagens apresentadas aqui possam ser utilizadas com funcionais L-K mais elaborados e, também, estendidas para permitir a consideração de especificações de desempenho ou garantir o esforço de controle, por exemplo, por meio da norma \mathcal{H}_∞ .

Capítulo 6

Realimentação Dinâmica de Saída

Neste capítulo, condições convexas para a síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída são desenvolvidas para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados. Tais condições são dependentes do intervalo de variação de atraso e permitem que esses controladores sejam implementados de forma similar aos que utilizam a técnica conhecida como compensação paralela distribuída (PDC, do inglês *parallel-distributed compensation*), comumente aplicada na realimentação de estados de sistemas fuzzy T-S. Semelhantemente às proposições anteriores, as condições apresentadas aqui são formuladas como testes de factibilidade de um conjunto de LMIs, que podem ser resolvidos eficientemente, em tempo polinomial, por *softwares* especializados. O mesmo candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii empregado no Capítulo 5 é utilizado, porém a formulação do problema é substancialmente outra. Novamente o uso do Lema de Finsler permite que variáveis de folga sejam introduzidas nas condições propostas, reduzindo o conservadorismo da abordagem em questão. Diferentemente de outras abordagens encontradas na literatura, o valor em atraso do sinal de saída também pode ser realimentado. Porém, caso não esteja disponível, é possível simplificar a lei de controle considerada, conforme ilustrado em um exemplo numérico. Além disso, considera-se que todas as matrizes utilizadas na descrição do sistema possam ser variantes no tempo, permitindo-se uma grande liberdade de modelagem. Os resultados desse capítulo baseiam-se em [VLMC10] e em seu caso particular, apresentado em [LCMV10], em que nem todas as matrizes do sistema podem ser variantes no tempo.

6.1 Introdução

Sistemas com atraso nos estados vêm sendo intensamente estudados nas últimas duas décadas [Nic01], [GKC03], [Ric03], [XL08]. Nos últimos anos, os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) vêm sendo utilizados para o tratamento de sistemas não-lineares sujeitos a esse tipo de atraso. Uma grande vantagem dos modelos fuzzy T-S está no fato de que os mesmos permitem a representação de sistemas não-lineares por meio de uma combinação convexa de sistemas lineares, chamados subsistemas, suavemente ponderados por funções de pertinência, conforme mostrado em [TW01]. Dessa forma, os modelos fuzzy T-S fornecem uma base para o desenvolvimento de condições para análise de estabilidade e síntese de controladores por meio de várias das já consolidadas teorias e técnicas de controle disponíveis para sistemas lineares variantes no tempo, representando uma das

mais relevantes e úteis abordagens de controle fuzzy [Fen06].

Pela quantidade de trabalhos na literatura, a abordagem por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) parece ser mais utilizada para a formulação de condições que permitam a análise de estabilidade e a estabilização de sistemas com atraso nos estados, veja [Nic01] e [GKC03]. Provavelmente, a razão para isso está no fato de que várias condições convexas podem ser desenvolvidas empregando-se técnicas de controle robusto já consolidadas para análise de estabilidade, estabilização e especificações de desempenho para sistemas lineares variantes no tempo, como a garantia do esforço de controle por meio da norma \mathcal{H}_∞ . Além disso, essa abordagem possibilita que tais condições sejam formuladas como problemas de otimização convexa, que podem ser resolvidos por *softwares* especializados, em tempo polinomial, veja [GNLC95] e [Stu99]. As condições desenvolvidas dessa forma são, em geral, classificadas como dependentes ou independentes do atraso. No primeiro caso, nenhuma informação a respeito do atraso é considerada, já no segundo, os sistemas são analisados ou projetados de acordo com essa característica.

Apesar da grande quantidade de trabalhos a respeito de sistemas fuzzy T-S publicados na última década, a maioria dos desenvolvimentos está vinculada a funcionais L-K independentes de parâmetros e com matrizes constantes, que geralmente levam a condições conservadoras. Atualmente, funcionais dependentes de parâmetros vêm sendo explorados para a obtenção de condições menos conservadoras, como em [Fen04], [ZFLX05], [RW06] e [MPA09]. No entanto, assim como nos trabalhos acima, muitos outros assumem, para fins de controle, que todos os estados do sistema estejam disponíveis, o que nem sempre é verdade em muitas aplicações práticas. Nesse caso, o controle por realimentação de saída é uma alternativa muito importante.

Três abordagens relacionadas ao controle por realimentação de saída se destacam na literatura. A primeira baseia-se na utilização de um observador de estados, tornando-se interessante quando medições de todos esses não estejam disponíveis, veja por exemplo [TIW98], [YNKI00] e [MMHZ07], onde funções de Lyapunov constantes e independentes de parâmetros são utilizadas para a estabilização de sistemas fuzzy T-S. A segunda abordagem, chamada de “realimentação estática de saída”, favorece implementações práticas de controladores em tempo real, pois utiliza uma quantidade reduzida de operações matriciais para compor o sinal de controle. Resultados atuais a respeito dessa abordagem podem ser encontrados em [HN07] e [DY09b] para sistemas fuzzy T-S livres de atraso. Na primeira referência, condições de síntese para sistemas contínuos no tempo são formuladas em termos de desigualdades matriciais *bilineares*, enquanto na segunda, o esforço de controle por meio da norma \mathcal{H}_∞ é utilizado como critério de desempenho para sistemas discretos no tempo. Finalmente, a utilização de um “compensador dinâmico de saída” é a terceira maneira de se abordar a realimentação de saída de um sistema. No contexto de sistemas fuzzy T-S, veja [GBM09] para o caso contínuo no tempo, e [DY09a] para sistemas discretos no tempo. Devido ao seu comportamento dinâmico, esse tipo de controlador tende a apresentar um bom desempenho em diversas situações práticas. No entanto, de acordo com a revisão bibliográfica realizada para o presente trabalho, a realimentação dinâmica de saída parece nunca ter sido aplicada a sistemas fuzzy T-S com atraso variante nos estados.

A principal contribuição deste capítulo é a apresentação de condições convexas que permitem a síntese de compensadores dinâmicos de saída para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados. Tais condições são dependentes do intervalo

de variação de atraso e possibilitam que o controlador proposto seja implementado de forma similar aos que utilizam a técnica conhecida como PDC, comumente aplicada na realimentação de estados de sistemas fuzzy T-S, além de permitirem que este realimente tanto as saídas atuais do sistema como seus valores em atraso. Essa última característica pode ser considerada um diferencial da abordagem apresentada a seguir, visto que não está disponível, por exemplo, em nenhum dos trabalhos referenciados nesta seção. A formulação principal baseia-se no mesmo candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii dependente de parâmetro utilizado no Capítulo 5. Vale dizer que a estrutura desse funcional L-K não é inovadora, sendo, de fato, mais simples do que outras encontradas na literatura, como em [HWLS08] e [ML08]. No entanto, as ideias apresentadas aqui podem ser estendidas por meio desses candidatos a funcional L-K mais elaborados.

Dois casos particulares da formulação principal também são apresentados. No primeiro, as matrizes do candidato a funcional L-K são consideradas constantes, permitindo que uma condição de síntese baseada na abordagem quadrática seja recuperada. Nesse caso, a condição obtida é numericamente menos complexa do que a original, mas ao custo de ser, em geral, mais conservadora. No segundo, considera-se que o sistema possa ser modelado de forma mais simples, exigindo-se que a matriz que relaciona os estados à saída do sistema seja invariante no tempo. Essa situação é interessante, pois caso o sistema possa ser modelado dessa maneira, o controlador precisará de menos operações aritméticas para gerar o sinal de controle. Em seguida, as complexidades computacionais associadas aos problemas de factibilidade propostos e um exemplo numérico são apresentados, bem como algumas conclusões baseadas nos resultados obtidos.

6.2 Formulação do Problema

Considere um sistema fuzzy discreto no tempo com atraso variante nos estados, modelado com a abordagem Takagi-Sugeno (T-S), em que a i -ésima regra assume o seguinte formato:

Regra i ($i = 1, \dots, N$):

SE $z_1(t)$ é M_{i1} e \dots e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{ENTÃO} \begin{cases} x_{t+1} = A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t, & t = 0, 1, \dots \\ y_t = C_i x_t \end{cases} \quad (6.1)$$

em que $z_j(t)$ é a j -ésima variável da premissa, a qual supõe-se ser dependente apenas dos estados, de distúrbios e/ou do tempo; M_{ij} é o conjunto fuzzy; p é o número de variáveis da premissa e N é o número de regras do modelo; $x_t = x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $u_t = u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas; $y_t = y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saídas; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$; d_t é a variável escalar que representa o atraso variante no tempo, limitado por

$$0 < \underline{d} \leq d_t \leq \bar{d} < \infty, \quad (6.2)$$

com $\delta \in \mathbb{N} : \delta = \bar{d} - \underline{d}$ representando o intervalo de possível variação do atraso, d_t . Cada par de equações lineares, representado por $A_i x_t + A_{di} x_{t-d_t} + B_i u_t$ e $y_t = C_i x_t$, que compõem a consequência de uma regra fuzzy, é chamado de “subsistema”.

Sendo assim, o comportamento do sistema global pode ser descrito por

$$x_{t+1} = A(\omega_t)x_t + A_d(\omega_t)x_{t-d_t} + B(\omega_t)u_t, \quad (6.3)$$

$$y_t = C(\omega_t)x(t) \quad (6.4)$$

em que ω_t é o vetor composto pelos elementos

$$\omega_i(t) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^p \mu_{M_{ij}}(z_j(t))} \quad (6.5)$$

com $\mu_{M_{ij}}(z_j(t))$ representando o grau de pertinência da variável $z_j(t)$ em relação ao conjunto fuzzy M_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Portanto, $\omega_i(t) \in [0 \ 1] \ \forall i$ e o vetor ω_t satisfaz

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(t) = 1,$$

permitindo que se defina

$$\begin{bmatrix} A(\omega_t) & A_d(\omega_t) & B(\omega_t) \\ C(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \\ C_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Neste capítulo, considera-se que a lei de controle u_t seja fornecida por um compensador dinâmico de saída dado por

$$\hat{x}_{t+1} = A_c(\omega_t)\hat{x}_t + A_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + B_c(\omega_t)y_t + B_{cd}(\omega_t)y_{t-d_t} \quad (6.7)$$

$$u_t = C_c(\omega_t)\hat{x}_t + C_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + D_c y_t + D_{cd} y_{t-d_t} \quad (6.8)$$

em que $A_c(\omega_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{cd}(\omega_t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_c(\omega_t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $B_{cd}(\omega_t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_c(\omega_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C_{cd}(\omega_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são matrizes variantes no tempo. As demais matrizes do controlador que assegura a estabilidade assintótica do sistema (6.3)-(6.4) são as matrizes constantes $D_c \in \mathbb{R}^{m \times q}$ e $D_{cd} \in \mathbb{R}^{m \times q}$. Portanto, considerando um espaço aumentado dado por $\zeta_t = [x_t^T \ \hat{x}_t^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, o sistema fuzzy em malha fechada, formado por (6.3)-(6.4) e (6.7)-(6.8), pode ser definido como

$$\zeta_{t+1} = \mathcal{A}(\omega_t)\zeta_t + \mathcal{A}_d(\omega_t)\zeta_{t-d_t} \quad (6.9)$$

com $\mathcal{A}(\omega_t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathcal{A}_d(\omega_t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ dados por

$$\mathcal{A}(\omega_t) = \begin{bmatrix} A(\omega_t) + B(\omega_t)D_c C(\omega_t) & B(\omega_t)C_c(\omega_t) \\ B_c(\omega_t)C(\omega_t) & A_c(\omega_t) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\mathcal{A}_d(\omega_t) = \begin{bmatrix} A_d(\omega_t) + B(\omega_t)D_{cd} C(\omega_t) & B(\omega_t)C_{cd}(\omega_t) \\ B_{cd}(\omega_t)C(\omega_t) & A_{cd}(\omega_t) \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Vale mencionar que, caso os valores do atraso d_t não estejam disponíveis, a abordagem apresentada neste capítulo continua válida, com $A_{cd} = \mathbf{0}$, $B_{cd} = \mathbf{0}$, $C_{cd} = \mathbf{0}$ e $D_{cd} = \mathbf{0}$

em (6.7)-(6.8). Por outro lado, se d_t estiver disponível em cada instante de amostragem, é possível implementar o compensador dinâmico conforme descrito anteriormente, com a expectativa de que seu grau de liberdade melhore o desempenho do sistema em malha fechada. Isso é viável para sistemas nos quais o atraso possa ser mensurado ou estimado, como em [SSJ04].

Dessa forma, o principal objetivo deste capítulo é apresentar condições convexas para solucionar o seguinte problema:

Problema 6.1 (Projeto do compensador). *Dados $\delta = \bar{d} - \underline{d}$, conforme definido em (6.2), e as matrizes $[A|A_d|B]_i$ e C_i , determinar, se possível, as matrizes $[A_c|A_{cd}|B_c|B_{cd}]_i$ e $[C_c|C_{cd}|D_c|D_{cd}]_i$, $i = 1, \dots, N$, de forma que o sistema (6.9)-(6.11) seja assintoticamente estável.*

Neste capítulo, apenas o projeto do controlador por realimentação dinâmica de saída é considerado. Os resultados, no entanto, podem ser estendidos para outros casos, inclusive com a garantia de esforço de controle por meio da norma \mathcal{H}_∞ .

6.3 Resultados Principais

O seguinte candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii é considerado neste capítulo

$$V(t) = \sum_{v=1}^3 V_v(\omega_t, t) \quad (6.12)$$

com

$$V_1(\omega_t, t) = \zeta_t^T P(\omega_t) \zeta_t, \quad (6.13)$$

$$V_2(\omega_t, t) = \sum_{j=t-d_t}^{t-1} \zeta_j^T Q(\omega_j) \zeta_j, \quad (6.14)$$

$$V_3(\omega_t, t) = \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} \zeta_j^T Q(\omega_j) \zeta_j, \quad (6.15)$$

em que as matrizes $P(\omega_t)$ e $Q(\omega_t)$ podem assumir valores diferentes a cada instante t e são definidas como

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad (6.16)$$

$$Q(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Q_i. \quad (6.17)$$

6.3.1 Síntese do Compensador Dinâmico de Saída

A seguir, a principal condição convexa proposta nesta seção é formalizada no Teorema 6.1. Em seguida, casos particulares dessa formulação são apresentados nos Corolários 6.1 e 6.2. Um exemplo comparativo pode ser encontrado na Seção 6.4.

Teorema 6.1. *Se existirem matrizes $Y, X, T, \bar{P}_{12,i}, \bar{Q}_{12,i}, \hat{A}_{c,ij}, \hat{A}_{cd,ij}$, matrizes simétricas e definidas positivas $\bar{P}_{11,i}, \bar{P}_{22,i}, \bar{Q}_{11,i}, \bar{Q}_{22,i}$, pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\hat{B}_{c,i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\hat{B}_{cd,i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\hat{C}_{c,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{C}_{cd,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, N$, $j = i, \dots, N$, matrizes $\hat{D}_c \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $\hat{D}_{cd} \in \mathbb{R}^{m \times q}$, e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tal que (6.24) seja verificada, então o compensador dinâmico de saída (6.7)-(6.8) com matrizes dadas por*

$$\left. \begin{aligned} D_c &= \hat{D}_c \\ C_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) (\hat{C}_{c,i} - D_c C_i X) Z^{-1} \\ B_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) (V^T)^{-1} (\hat{B}_{c,i} - Y^T B_i D_c) \\ A_c(\omega_t) &= (V^T)^{-1} \Gamma(\omega_t) Z^{-1} \\ \Gamma(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_i(t) \omega_j(t) \hat{A}_{c,ij} - Y^T (A(\omega_t) + B(\omega_t) D_c C(\omega_t)) X \\ &\quad - V^T B_c(\omega_t) C(\omega_t) X - Y^T B(\omega_t) C_c(\omega_t) Z \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{cd} &= \hat{D}_{cd} \\ C_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) (\hat{C}_{cd,i} - D_{cd} C_i X) Z^{-1} \\ B_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) (V^T)^{-1} (\hat{B}_{cd,i} - Y^T B_i D_{cd}) \\ A_{cd}(\omega_t) &= (V^T)^{-1} \Gamma_d(\omega_t) Z^{-1} \\ \Gamma_d(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_i(t) \omega_j(t) \hat{A}_{cd,ij} - Y^T (A_d(\omega_t) + B(\omega_t) D_{cd} C(\omega_t)) X \\ &\quad - V^T B_{cd}(\omega_t) C(\omega_t) X - Y^T B(\omega_t) C_{cd}(\omega_t) Z \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

e matrizes V, Z e L satisfazendo

$$LV = \mathbf{I} - XY \quad (6.20)$$

$$V^T Z = T - Y^T X \quad (6.21)$$

estabiliza assintoticamente o sistema fuzzy T-S discreto no tempo com atraso variante nos estados (6.3)-(6.4). Além disso, (6.12)-(6.17) é um funcional L-K que assegura a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (6.9) com

$$P_i = \Phi^T \begin{bmatrix} \bar{P}_{11,i} & \bar{P}_{12,i} \\ \bar{P}_{12,i}^T & \bar{P}_{22,i} \end{bmatrix} \Phi, \quad Q_i = \Phi^T \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11,i} & \bar{Q}_{12,i} \\ \bar{Q}_{12,i}^T & \bar{Q}_{22,i} \end{bmatrix} \Phi, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.22)$$

em que

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -XZ^{-1} \\ \mathbf{0} & Z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

$$\mathcal{M}(i, j, \ell, m) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11,\ell} + Y + Y^T & \bar{P}_{12,\ell} + \mathbf{I} + T \\ \star & \bar{P}_{22,\ell} + X^T + X \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ -0.5(Y^T(A_i + A_j) + \hat{B}_{c,i}C_j + \hat{B}_{c,j}C_i) & -\hat{A}_{c,ij} \\ -0.5(A_i + A_j + B_i\hat{D}_cC_j + B_j\hat{D}_cC_i) & -0.5((A_i + A_j)X + B_i\hat{C}_{c,j} + B_j\hat{C}_{c,i}) \\ 0.5((\delta + 1)(\bar{Q}_{11,i} + \bar{Q}_{11,j}) - (\bar{P}_{11,i} + \bar{P}_{11,j})) & 0.5((\delta + 1)(\bar{Q}_{12,i} + \bar{Q}_{12,j}) - (\bar{P}_{12,i} + \bar{P}_{12,j})) \\ \star & 0.5((\delta + 1)(\bar{Q}_{22,i} + \bar{Q}_{22,j}) - (\bar{P}_{22,i} + \bar{P}_{22,j})) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ -0.5(Y^T(A_{di} + A_{dj}) + \hat{B}_{cd,i}C_j + \hat{B}_{cd,j}C_i) & -\hat{A}_{cd,ij} \\ -0.5(A_{di} + A_{dj} + B_i\hat{D}_{cd}C_j + B_j\hat{D}_{cd}C_i) & -0.5((A_{di} + A_{dj})X + B_i\hat{C}_{cd,j} + B_j\hat{C}_{cd,i}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{Q}_{11,m} & -\bar{Q}_{12,m} \\ \star & -\bar{Q}_{22,m} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} i, \ell, m = 1, \dots, N \\ j = i, \dots, N \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Demonstração. A prova é inspirada no trabalho desenvolvido em [SGC97] e baseia-se no candidato a funcional L-K apresentado no início desta seção e também já utilizado no Capítulo 5. O requisito $\bar{P}_{11,i} > 0$, $\bar{P}_{22,i} > 0$, $\bar{Q}_{11,i} > 0$, $\bar{Q}_{22,i} > 0$, $i = 1, \dots, N$, assegura a positividade (6.15)-(6.17), uma vez que P_i e Q_i podem ser definidos conforme em (6.22). Para ser considerado um funcional de Lyapunov-Krasovskii e assim assegurar a estabilidade assintótica de (6.9), ainda é necessário que

$$\Delta V(\omega_t, t) < \mathbf{0} . \quad (6.25)$$

Assim, calculando (6.25) como na Seção 5.3, a seguinte limitação para o valor máximo de (6.25) pode ser obtida

$$\begin{aligned} \Delta V(\omega_t, t) \leq & \zeta_{t+1}^T P(\omega_{t+1}) \zeta_{t+1} \\ & + \zeta_t^T [(\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t)] \zeta_t \\ & - \zeta_{t-d_t}^T Q(\omega_{t-d_t}) \zeta_{t-d_t} < 0 . \end{aligned} \quad (6.26)$$

Considerando um espaço aumentado dado por $\varphi \in \mathbb{R}^{6n} : \varphi = [\zeta_{t+1}^T \quad \zeta_t^T \quad \zeta_{t-d_t}^T]^T$, pode-se reescrever (6.26) e (6.9), respectivamente, como

$$\varphi^T \begin{bmatrix} P(\omega_{t+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -Q(\omega_{t-d_t}) \end{bmatrix} \varphi < \mathbf{0} \quad (6.27)$$

$$[\mathbf{I} \quad -\mathcal{A}(\omega_t) \quad -\mathcal{A}_d(\omega_t)] \varphi = \mathbf{0} . \quad (6.28)$$

Dessa forma, por meio do Lema de Finsler, considerando (6.27), (6.28) e o bloco de variáveis de folga $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6n \times 2n}$, é possível obter

$$\begin{bmatrix} P(\omega_{t+1}) + F^T + F & -F\mathcal{A}(\omega_t) & -F\mathcal{A}_d(\omega_t) \\ \star & (\delta + 1)Q(\omega_t) - P(\omega_t) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q(\omega_{t-d_t}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (6.29)$$

Note que F em (6.29) é uma matriz regular, pois $P(\omega_{t+1}) > \mathbf{0}$ e $P(\omega_{t+1}) + F^T + F < \mathbf{0}$. Sendo assim, a matriz F e sua inversa podem ser particionadas como

$$F = \begin{bmatrix} Y & M \\ V & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} X & L \\ Z & \bullet \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

em que o símbolo \bullet representa valores irrelevantes, permitindo também que Y e X sejam consideradas matrizes não-singulares. Além disso, por meio de (6.24) e (6.22), é possível notar que as desigualdades $\bar{P}_{11,i} > 0$, $\bar{P}_{22,i} > 0$, $\bar{Q}_{11,i} > 0$, $\bar{Q}_{22,i} > 0$, $i = 1, \dots, N$, implicam na regularidade de Y e X . Da mesma forma que para a matriz F , é possível concluir que a matriz

$$\begin{bmatrix} Y^T & T \\ \mathbf{I} & X^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & T - Y^T X \\ \mathbf{I} & X \end{bmatrix}$$

possui posto completo e, conseqüentemente, $T - Y^T X$ também (veja (6.21)). Dessa forma, é sempre possível escolher matrizes regulares Z e V em (6.21) utilizando-se algum método de decomposição matricial adequado a essa situação. Finalmente, o conjunto de LMIs dado por

$$\mathcal{M}(\omega_t) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11}(\omega_{t+1}) + Y + Y^T & \bar{P}_{12}(\omega_{t+1}) + \mathbf{I} + T \\ \star & \bar{P}_{22}(\omega_{t+1}) + X^T + X \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ -Y^T A(\omega_t) - \hat{B}_c(\omega_t)C(\omega_t) & -\hat{A}_c(\omega_t) \\ -A(\omega_t) - B(\omega_t)\hat{D}_c C(\omega_t) & -A(\omega_t)X - B(\omega_t)\hat{C}_c(\omega_t) \\ (\delta + 1)\bar{Q}_{11}(\omega_t) - \bar{P}_{11}(\omega_t) & (\delta + 1)\bar{Q}_{12}(\omega_t) - \bar{P}_{12}(\omega_t) \\ \star & (\delta + 1)\bar{Q}_{22}(\omega_t) - \bar{P}_{22}(\omega_t) \\ \star & \star \\ \star & \star \\ -Y^T A_d(\omega_t) - \hat{B}_{cd}(\omega_t)C(\omega_t) & -\hat{A}_{cd}(\omega_t) \\ -A_d(\omega_t) - B(\omega_t)\hat{D}_{cd} C(\omega_t) & -A_d(\omega_t)X - B(\omega_t)\hat{C}_{cd}(\omega_t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{Q}_{11}(\omega_{t-d_t}) & -\bar{Q}_{12}(\omega_{t-d_t}) \\ \star & -\bar{Q}_{22}(\omega_{t-d_t}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (6.31)$$

pode ser obtido por meio das seguintes manipulações algébricas:

- faz-se uma transformação de singularidade em (6.29), pré e pós-multiplicando esse conjunto de LMIs respectivamente por \mathcal{T}^T e \mathcal{T} , com

$$\mathcal{T} = \mathbf{I}_3 \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{I} & X \\ \mathbf{0} & Z \end{bmatrix};$$

- considera-se F conforme definido em (6.30), com X, Z, Y, V satisfazendo as relações (6.20) e (6.21);
- consideram-se $P(\omega_t)$ e $Q(\omega_t)$ conforme as respectivas definições em (6.16) e (6.17), com P_i e Q_i dados em (6.22);
- fazem-se as seguintes substituições de variáveis:

$$\begin{aligned} \hat{D}_c &= D_c \\ \hat{C}_c(\omega_t) &= D_c C(\omega_t) X + C_c(\omega_t) Z \\ \hat{B}_c(\omega_t) &= Y^T B(\omega_t) D_c + V^T B_c(\omega_t) \\ \hat{A}_c(\omega_t) &= Y^T (A(\omega_t) + B(\omega_t) D_c C(\omega_t)) X + V^T A_c(\omega_t) Z \\ &\quad + V^T B_c(\omega_t) C(\omega_t) X + Y^T B(\omega_t) C_c(\omega_t) Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{cd} &= D_{cd} \\ \hat{C}_{cd}(\omega_t) &= D_{cd} C(\omega_t) X + C_{cd}(\omega_t) Z \\ \hat{B}_{cd}(\omega_t) &= Y^T B(\omega_t) D_{cd} + V^T B_{cd}(\omega_t) \\ \hat{A}_{cd}(\omega_t) &= Y^T (A_d(\omega_t) + B(\omega_t) D_{cd} C(\omega_t)) X + V^T A_{cd}(\omega_t) Z \\ &\quad + V^T B_{cd}(\omega_t) C(\omega_t) X + Y^T B(\omega_t) C_{cd}(\omega_t) Z . \end{aligned}$$

Completando a prova, note que (6.24) pode ser recuperada de (6.31), bastando fazer¹

$$\mathcal{M}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N (2 - 0^{j-i}) \omega_\ell(t+1) \omega_m(t-d_t) \omega_i(t) \omega_j(t) \mathcal{M}(i, j, \ell, m) . \quad \square$$

Note que a condição formulada no Teorema 6.1 não impõe restrições às matrizes P_i e Q_i , $i = 1, \dots, N$, que compõem o candidato a funcional de Lyapunov Krasovskii (6.12)-(6.17). Além disso, o uso da matriz de folga F permite que esse funcional candidato seja dependente de parâmetro, consequentemente um compensador dinâmico de saída dependente de parâmetro é obtido. Caso se considere que as matrizes em (6.12)-(6.17) sejam independentes de ω_t , uma condição de síntese baseada na abordagem conhecida como “estabilidade quadrática” pode ser recuperada como caso especial do Teorema 6.1, conforme mostrado no corolário a seguir. Nesse caso, a condição obtida é numericamente menos complexa que a apresentada no referido teorema, ao custo de ser, em geral, mais conservadora.

¹Defina $0^0 = 1$ e $0^r = 0$, $r \in \mathbb{N}^*$.

Assim, as matrizes $C_c(\omega_t)$, $B_c(\omega_t)$, $C_{cd}(\omega_t)$ e $B_{cd}(\omega_t)$ podem ser obtidas de

$$\begin{aligned} C_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) C_{c,i} & B_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) B_{c,i} \\ C_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) C_{cd,i} & B_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) B_{cd,i} \end{aligned}$$

Note que esse recurso não pode ser utilizado para $A_c(\omega_t)$, pois essa matriz é determinada a partir das $N(N+1)/2$ matrizes $\hat{A}_{c,ij}$, $i = 1, \dots, N$, $j = i, \dots, N$, utilizadas para possibilitar a linearidade das condições de síntese apresentadas até o momento. Como as demais matrizes dependentes de ω_t envolvidas em (6.18) são compostas com a ponderação de N elementos, $A_c(\omega_t)$ só pode ser calculada conforme indicado nesse mesmo conjunto de equações. Analogamente, esse inconveniente acontece com a matriz $A_{cd}(\omega_t)$.

Observe ainda que, tanto o Teorema 6.1 como o Corolário 6.1 suportam o caso em que uma única matriz seja utilizada para relacionar os estados às saídas de um sistema, ou seja, quando o comportamento desse sistema possa ser descrito de forma simplificada, por (6.3) e

$$y_t = Cx(t) . \quad (6.33)$$

Porém, essa situação pode ser melhor explorada por meio de um desenvolvimento similar ao apresentado em [LCMV10], conforme formulado no corolário a seguir. Nesse caso particular, supõe-se que a lei de controle será fornecida por um compensador dinâmico de saída dado por (6.7) e

$$u_t = C_c \hat{x}_t + C_{cd} \hat{x}_{t-d_t} + D_c y_t + D_{cd} y_{t-d_t} . \quad (6.34)$$

Tais simplificações permitem que o processo de linearização da condição apresentada a seguir seja matematicamente menos complexo do que os anteriores. Além disso, o número de operações matriciais em tempo real utilizadas pelo controlador é significativamente menor.

Corolário 6.2. *Se existirem matrizes $Y, X, T, \bar{P}_{12,i}, \bar{Q}_{12,i}, \hat{A}_{c,i}, \hat{A}_{cd,i}$, matrizes simétricas e definidas positivas $\bar{P}_{11,i}, \bar{P}_{22,i}, \bar{Q}_{11,i}, \bar{Q}_{22,i}$, pertencentes a $\mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\hat{B}_{c,i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\hat{B}_{cd,i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $\hat{C}_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{C}_{cd} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{D}_c \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $\hat{D}_{cd} \in \mathbb{R}^{m \times q}$, e um escalar $\delta = \bar{d} - \underline{d}$ conhecido, tal que (6.37) seja verificada, então o compensador dinâmico de saída formado por (6.7) e (6.34) com matrizes dadas e compostas por*

$$\left. \begin{aligned} D_c &= \hat{D}_c \\ C_c &= (\hat{C}_c - D_c C X) Z^{-1} \\ B_{c,i} &= (V^T)^{-1} (\hat{B}_{c,i} - Y^T B_i D_c) \\ A_{c,i} &= (V^T)^{-1} (\hat{A}_{c,i} - Y^T (A_i + B_i D_c C) X - V^T B_{c,i} C X - Y^T B_i C_c Z) Z^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{cd} &= \hat{D}_{cd} \\ C_{cd} &= (\hat{C}_{cd} - D_{cd} C X) Z^{-1} \\ B_{cd,i} &= (V^T)^{-1} (\hat{B}_{cd,i} - Y^T B_i D_{cd}) \\ A_{cd,i} &= (V^T)^{-1} (\hat{A}_{cd,i} - Y^T (A_{d,i} + B_i D_{cd} C) X - V^T B_{cd,i} C X - Y^T B_i C_{cd} Z) Z^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

e matrizes V , Z e L satisfazendo (6.20)-(6.21), estabiliza assintoticamente o sistema fuzzy T - S discreto no tempo com atraso variante nos estados formado por (6.3) e (6.33). Além disso, (6.12)-(6.17) é um funcional L - K que assegura a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada com (6.22).

$$\bar{\mathcal{M}}(i, j, \ell) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11,j} + Y + Y^T & \bar{P}_{12,j} + \mathbf{I} + T & -Y^T A_i - \hat{B}_{c,i} C \\ * & \bar{P}_{22,j} + X^T + X & -A_i - B_i \hat{D}_c C \\ * & * & (\delta + 1) \bar{Q}_{11,i} - \bar{P}_{11,i} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\hat{A}_{c,i} & -Y^T A_{di} - \hat{B}_{cd,i} C & -\hat{A}_{cd,i} \\ -A_i X - B_i \hat{C}_c & -A_{di} - B_i \hat{D}_{cd} C & -A_{di} X - B_i \hat{C}_{cd} \\ (\delta + 1) \bar{Q}_{12,i} - \bar{P}_{12,i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\delta + 1) \bar{Q}_{22,i} - \bar{P}_{22,i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -\bar{Q}_{11,\ell} & -\bar{Q}_{12,\ell} \\ * & * & -\bar{Q}_{22,\ell} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$i, j, \ell = 1, \dots, N$. (6.37)

Demonstração. Seguindo-se os mesmos passos utilizados na demonstração do Teorema 6.1, porém considerando devidamente $C(\omega_t) = C$, $\hat{C}_c(\omega_t) = \hat{C}_c$ e $\hat{C}_{cd}(\omega_t) = \hat{C}_{cd}$, o seguinte conjunto de LMIs é obtido

$$\bar{\mathcal{M}}(\omega_t) = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11}(\omega_{t+1}) + Y + Y^T & \bar{P}_{12}(\omega_{t+1}) + \mathbf{I} + T & -Y^T A(\omega_t) - \hat{B}_c(\omega_t) C \\ * & \bar{P}_{22}(\omega_{t+1}) + X^T + X & -A(\omega_t) - B(\omega_t) \hat{D}_c C \\ * & * & (\delta + 1) \bar{Q}_{11}(\omega_t) - \bar{P}_{11}(\omega_t) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -\hat{A}_c(\omega_t) & -Y^T A_d(\omega_t) - \hat{B}_{cd}(\omega_t) C & -\hat{A}_{cd}(\omega_t) \\ -A(\omega_t) X - B(\omega_t) \hat{C}_c & -A_d(\omega_t) - B(\omega_t) \hat{D}_{cd} C & -A_d(\omega_t) X - B(\omega_t) \hat{C}_{cd} \\ (\delta + 1) \bar{Q}_{12}(\omega_t) - \bar{P}_{12}(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\delta + 1) \bar{Q}_{22}(\omega_t) - \bar{P}_{22}(\omega_t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -\bar{Q}_{11}(\omega_{t-d_t}) & -\bar{Q}_{12}(\omega_{t-d_t}) \\ * & * & -\bar{Q}_{22}(\omega_{t-d_t}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

(6.38)

Sendo assim, para completar a prova, note que (6.37) pode ser recuperada de (6.38), bastando fazer

$$\bar{\mathcal{M}}(\omega_t) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \omega_\ell(t - d_t) \omega_j(t + 1) \omega_i(t) \bar{\mathcal{M}}(i, j, \ell). \quad \square$$

Observação 6.2. Note que, se o projeto for factível, a quantidade de operações em tempo real utilizadas para formar a lei de controle nesse caso é consideravelmente menor do que

nos casos anteriores. Isso pois, todas as matrizes dependentes de ω_t que constituem o controlador proposto nesta última abordagem podem ser obtidas apenas por

$$\begin{aligned} B_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) B_{c,i} & A_c(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) A_{c,i} \\ B_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) B_{cd,i} & A_{cd}(\omega_t) &= \sum_{i=1}^N \omega_i(t) A_{cd,i} \end{aligned}$$

com $B_{c,i}$ e $A_{c,i}$ definidos em (6.35) e $B_{cd,i}$ e $A_{cd,i}$ definidos em (6.36).

Ao se aplicar qualquer uma das condições propostas nesta seção, as relações em (6.20)-(6.21) são utilizadas para se determinar V , Z e L a partir de T , X e Y . Tal objetivo pode ser alcançado por meio de decomposições matriciais comuns, por exemplo, aplicando-se a decomposição ortogonal-triangular (QR) à (6.21) e isolando-se N em (6.20). Outros tipos de decomposição certamente levarão a outros conjuntos de parâmetros para o controlador, porém qualquer um estabilizará o sistema, caso o projeto tenha sido factível. Neste trabalho, os resultados independem de L . Espera-se que essa matriz possa ser explorada em pesquisas futuras, de tal forma que um controlador com garantias de desempenho possa ser projetado, por exemplo, com esforço de controle garantido por meio da norma \mathcal{H}_∞ .

Todas as condições apresentadas também podem ser utilizadas nos casos em que os valores do atraso d_t não estejam disponíveis. Para tal, é suficiente impor $\hat{A}_{cd,ij} = \mathbf{0}$, $\hat{B}_{cd,i} = \mathbf{0}$, $\hat{C}_{cd,i} = \mathbf{0}$ e $\hat{D}_{cd} = \mathbf{0}$ em (6.24) e (6.32) e $\hat{A}_{cd,i} = \mathbf{0}$, $\hat{B}_{cd,i} = \mathbf{0}$, $\hat{C}_{cd} = \mathbf{0}$ e $\hat{D}_{cd} = \mathbf{0}$ em (6.37). Dessa forma, resultando em compensadores dinâmicos de saída independentes de d_t . Além disso, vale observar que todas as condições suportam o caso em que o atraso é constante no tempo, ou seja, quando $\delta = 0$.

6.3.2 Complexidade Numérica

As complexidades numéricas das condições apresentadas aqui podem ser determinadas pela quantidade de variáveis escalares, \mathcal{K} , e o número de linhas nas LMIs, \mathcal{L} , envolvidas nos problemas de otimização que as mesmas representam. Por exemplo, utilizando-se o *toolbox* SeDuMi, o número de operações com ponto flutuante para solucionar esses problemas é da ordem de $\mathcal{K}^2 \mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2}$, veja [Stu99]. Os valores de \mathcal{K} e \mathcal{L} associados aos testes de factibilidade propostos nesse capítulo são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Quantidade de variáveis escalares (\mathcal{K}) e linhas (\mathcal{L}) nas LMIs propostas

Condição	\mathcal{K}	\mathcal{L}
Teorema 6.1	$n^2 N^2 + (5n^2 + 2mn + 2qn + 2n)N$	$3nN^4 + 3nN^3 + 4nN$
Corolário 6.1	$n^2 N^2 + (n^2 + 2mn + 2qn)N + 4n^2 + 2n$	$3nN^2 + 3nN + 4n$
Corolário 6.2	$(6n^2 + 2n)N + 3n^2 + 2(mn + qn + mq)$	$6nN^3$

A partir desses valores, é possível notar que o Teorema 6.1 apresenta uma condição numericamente mais complexa do que as formuladas em seus corolários, porém podendo levar a resultados menos conservadores, conforme mostrado na próxima seção.

6.4 Exemplo Numérico

O Exemplo apresentado nesta seção investiga o problema de estabilização de sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados por meio do compensador dinâmico de saída (6.7)-(6.8). Mostra-se que, para um determinado conjunto de sistemas, a região de estabilização encontrada com a aplicação do Teorema 6.1 é maior do que com o uso do Corolário 6.1. Além disso, algumas simulações temporais são utilizadas para demonstrar a eficiência das condições propostas. Todas as implementações foram executadas utilizando-se um processador AMD Phenom[®] 9500 Quad-Core, 2.21 GHz com 4 Gb de memória RAM e, quando necessário, o *toolbox* SeDuMi, desenvolvido para MATLAB[®].

Exemplo 6.1 (Projeto do Compensador Dinâmico de Saída). Neste exemplo, as condições de síntese propostas no Teorema 6.1 e no Corolário 6.1 são utilizadas para procurar regiões em que sistemas dados por (6.1)-(6.6) possam ser estabilizados por meio da lei de controle (6.7)-(6.8). Para tal, considere as possíveis variações de um sistema fuzzy T-S discreto no tempo com atraso variante nos estados com $N = 3$, $n = 2$, $m = 1$, $p = 1$, e subsistemas descritos por $\rho \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, 3$, com

$$\mathcal{V}_i = \left[\begin{array}{c|c|c} A_i & A_{di} & B_i \\ \hline C_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

$$\mathcal{V}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1.0 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.51 & -0.1 & -0.25 & 0 & 1 \\ \hline 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{V}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0.1 & 0.25 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0.15 & -0.5 & 0.15 & 0 & -0.5 \\ \hline 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{V}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1.2 & 0.75 & 0.19 & 0 & 1.6 \\ 0.25 & -0.8 & 0.06 & 0 & 0.5 \\ \hline 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Esse sistema, com $\rho = 1$, foi originalmente investigado para o projeto de controladores por realimentação de estados em [LL08, Exemplo 3], considerando-se a ação de um atraso constante no tempo. Aqui, supõe-se que os estados desse sistema estejam sujeitos a um atraso variante no tempo. Além disso, as matrizes C_i , $i = 1, 2, 3$, foram introduzidas para permitir a simulação de sua saída. O objetivo é determinar regiões, no plano $\delta \times \rho$, em que o projeto do compensador dinâmico de saída proposto seja factível por meio das condições avaliadas. Conforme definido anteriormente, δ representa o intervalo de possível variação do atraso. A Figura 6.1 mostra, abaixo de cada curva, as regiões obtidas com a aplicação do Teorema 6.1 (linha sólida) e do Corolário 6.1 (linha pontilhada). Em ambos os casos, as condições de síntese foram usadas duas vezes, considerando que os valores do atraso d_t estão disponíveis (marcas com círculo) e considerando que não estão (marcas com quadrados). Ou seja, nesse último caso, as condições (6.24) e (6.32) foram utilizadas com $\hat{A}_{cd,ij} = \mathbf{0}$, $\hat{B}_{cd,i} = \mathbf{0}$, $\hat{C}_{cd,i} = \mathbf{0}$ e $\hat{D}_{cd} = \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, a parte em atraso do controlador (6.7)-(6.8) não foi projetada.

A partir das curvas apresentadas na Figura 6.1, fica claro que a condição proposta no Teorema 6.1 leva a resultados menos conservadores do que os encontrados com a aplicação

do Corolário 6.1, independentemente da disponibilidade dos valores do atraso d_t . Também é fácil notar que o compensador dinâmico de saída proposto, empregando a realimentação de sinais em atraso, permite que uma região de estabilização significativamente maior seja detectada. Por exemplo, para $\delta > 10$, somente a *plena* utilização do Teorema 6.1 (quando esse é empregado para se projetar todos os parâmetros do controlador proposto) apresenta resultados factíveis.

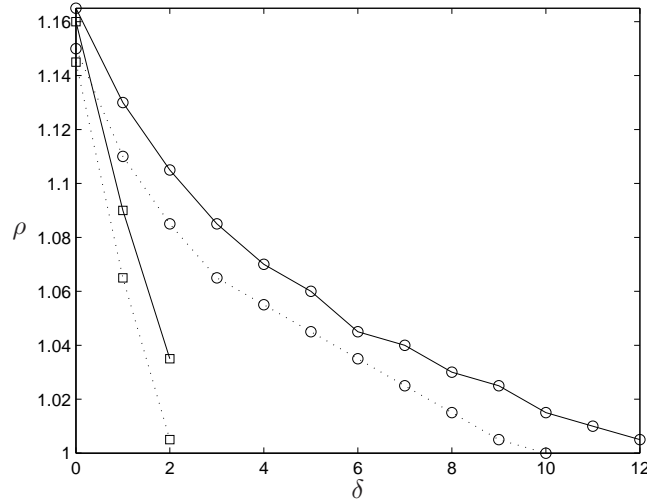


Figura 6.1: Regiões em que os sistemas considerados podem ser estabilizados com o Teorema 6.1 (linha sólida) e com o Corolário 6.1 (linha pontilhada).

Mais especificamente, para $\delta = 11$ e $\rho = 1$, um compensador dinâmico de saída foi projetado e simulações temporais foram realizadas para o sistema em malha fechada, considerando que as premissas das regras fuzzy são compostas pelas seguintes funções de pertinência

$$\begin{aligned}\mu_{M_{11}}(x_1(t)) &= e^{-(x_1(t)+5)^2/8} \\ \mu_{M_{21}}(x_1(t)) &= e^{-x_1(t)^2/4.5} \\ \mu_{M_{31}}(x_1(t)) &= e^{-(x_1(t)-5)^2/8} .\end{aligned}$$

O controlador é dado por (6.7)-(6.8) com (6.18)-(6.19) em que

$$\begin{aligned}[\hat{D}_c \mid \hat{D}_{cd}] &= [-0.5873 \mid -0.1364] \\ [\hat{C}_{c,1} \mid \hat{C}_{cd,1}] &= [10.3054 \quad 7.3822 \mid 0.6413 \quad -0.5610] \\ [\hat{C}_{c,2} \mid \hat{C}_{cd,2}] &= [2.1388 \quad 2.6489 \mid 4.8396 \quad -5.4707] \\ [\hat{C}_{c,3} \mid \hat{C}_{cd,3}] &= [6.2327 \quad 6.2103 \mid 1.6202 \quad -1.8049] \\ [\hat{B}_{c,1} \mid \hat{B}_{cd,1}] &= \begin{bmatrix} 61.7245 & 0.5354 \\ 66.3597 & -13.9927 \end{bmatrix} \\ [\hat{B}_{c,2} \mid \hat{B}_{cd,2}] &= \begin{bmatrix} 4.1199 & 15.2356 \\ 15.3678 & 16.3048 \end{bmatrix} \\ [\hat{B}_{c,3} \mid \hat{B}_{cd,3}] &= \begin{bmatrix} 65.1207 & 12.3433 \\ 65.9951 & 10.5692 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{A}_{c,11} \mid \hat{A}_{cd,11}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0575 & 0.5514 & 0.0287 & -0.0339 \\ -0.1167 & -0.1415 & -0.0182 & 0.0205 \end{array} \right] \\
[\hat{A}_{c,12} \mid \hat{A}_{cd,12}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0739 & 0.2797 & 0.0542 & -0.0633 \\ -0.0064 & -0.3885 & 0.0029 & -0.0029 \end{array} \right] \\
[\hat{A}_{c,13} \mid \hat{A}_{cd,13}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0507 & 0.3410 & 0.0057 & -0.0089 \\ 0.0457 & -0.3305 & -0.0124 & 0.0146 \end{array} \right] \\
[\hat{A}_{c,22} \mid \hat{A}_{cd,22}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0180 & 0.1167 & 0.0147 & -0.0165 \\ 0.1448 & -0.4086 & 0.0027 & -0.0031 \end{array} \right] \\
[\hat{A}_{c,23} \mid \hat{A}_{cd,23}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0242 & 0.2204 & -0.0126 & 0.0147 \\ 0.0778 & -0.3758 & 0.0007 & -0.0009 \end{array} \right] \\
[\hat{A}_{c,33} \mid \hat{A}_{cd,33}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0.0336 & 0.0331 & 0.0034 & -0.0041 \\ 0.0534 & -0.3644 & 0.0099 & -0.0116 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

As Figuras 6.2 e 6.3 apresentam as simulações, realizadas com $\underline{d} = 1$, $\bar{d} = 12$ e condições iniciais $x(t) = [2.0 \ -1.5]^T$, $t = -12, \dots, 0$. A Figura 6.2 mostra o comportamento da saída do sistema em malha fechada. O sinal de controle é apresentado na parte superior da Figura 6.3 e, logo abaixo, os valores de atraso, gerados aleatoriamente dentro do intervalo considerado. Demonstrando, dessa forma, que a abordagem proposta no Teorema 6.1 pode levar a resultados menos conservadores.

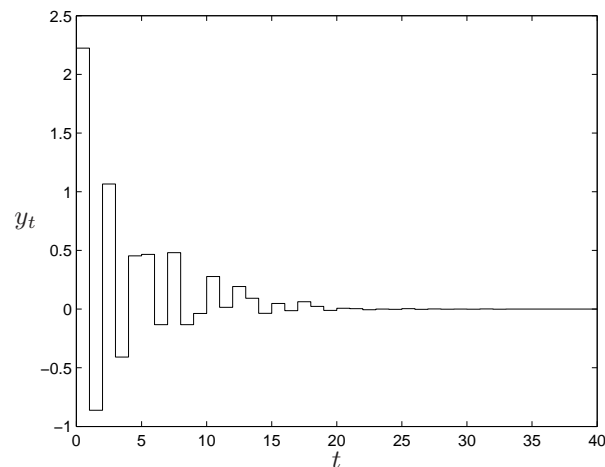


Figura 6.2: Simulação da saída do sistema em malha fechada.

6.5 Conclusões

Condições convexas que permitem a síntese de compensadores dinâmicos de saída para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados foram apresentadas neste capítulo. Como visto, essas condições possibilitam que o controlador proposto realmente tanto as saídas atuais do sistema como seus valores em atraso, além de permitirem que este seja implementado de forma similar aos que utilizam a técnica conhecida

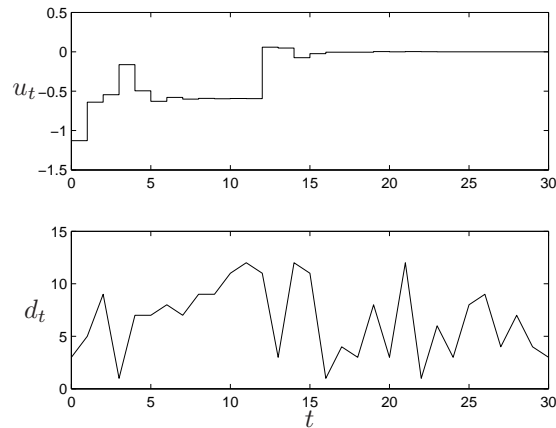


Figura 6.3: Simulação do sinal de controle e do atraso variante no tempo: u_t (acima) e d_t (abaixo).

como PDC, comumente aplicada na realimentação de estados de sistemas fuzzy T-S. A formulação da condição principal baseou-se no mesmo candidato a funcional L-K dependente de parâmetro utilizado no Capítulo 5, permitindo a consideração do intervalo de variação do atraso nos projetos realizados. Dois casos particulares foram obtidos a partir dessa condição. No primeiro, uma condição de síntese baseada na abordagem quadrática foi recuperada ao se considerar que as matrizes do candidato a funcional L-K fossem constantes. No segundo, considerando que alguns sistemas possam ser modelados de forma mais simples, foi obtida uma condição que possibilita a geração do sinal de controle a partir de uma quantidade reduzida de operações matriciais. O funcional L-K utilizado, é, de fato, mais simples do que outros encontrados na literatura, porém acredita-se que os conceitos apresentados possam ser estendidos para que funcionais mais elaborados sejam empregados. Além disso, existe a possibilidade de estender a abordagem proposta para que especificações de desempenho ou a garantia do esforço de controle sejam acrescentadas às condições de projeto.

Capítulo 7

Considerações Finais

A classe formada pelos sistemas fuzzy T-S com atrasos nos estados constituiu-se no objeto de investigação dessa dissertação. Especificamente, foram abordados os problemas de análise de estabilidade e de síntese de controladores por realimentação de estados e por realimentação de saída, atendendo aos objetivos propostos no Capítulo 1.

Os fundamentos necessários ao desenvolvimento dessa dissertação foram sucintamente apresentados no Capítulo 2, incluindo conceitos sobre sistemas de controle discretos no tempo, estabilidade, sistemas não-lineares com atraso no tempo, sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), desigualdades matriciais lineares (LMIs) e outras ferramentas da álgebra linear. Uma extensão do segundo método de Lyapunov, conhecida como “método de Lyapunov-Krasovskii” [Kra63], foi utilizada para tratar sistemas com atraso nos estados. O Lema de Finsler foi amplamente utilizado como um elemento chave para a obtenção das formulações convexas que permitem a análise de estabilidade e a síntese de controladores para os sistemas estudados. Tais formulações são de grande interesse por culminarem em problemas numéricos de otimização que podem ser resolvidos de forma eficiente, em tempo polinomial, com ajuda de *softwares* especializados e já disponíveis no meio acadêmico, inclusive, gratuitamente.

No Capítulo 3, foi apresentado um estudo comparativo entre as abordagens utilizadas para o tratamento de problemas que envolvem a estabilidade de sistemas com incertezas politópicas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S. Além de propiciarem esclarecimentos importantes, a investigação das diferenças e semelhanças entre as manipulações algébricas associadas a cada tipo de sistema permitiu que novas¹ abordagens para a análise de estabilidade e para a estabilização de sistemas fuzzy T-S fossem desenvolvidas. Merecem destaque a combinação do Lema de Finsler com a técnica para consideração de sistemas em malha fechada, proposta em [LL08], e a obtenção de condições de síntese com auxílio de uma variável instrumental. Apesar da utilização de uma candidata à função de Lyapunov bastante simples, a possibilidade de extensão dessas abordagens representa o ponto de partida para algumas das principais contribuições do presente trabalho, registradas nos capítulos subsequentes. Destacadas a seguir, essas contribuições também foram publicadas em conferências internacionais.

¹Conforme revisão bibliográfica, parece que essas abordagens nunca foram utilizadas anteriormente, por outros autores.

7.1 Principais Contribuições

Os Capítulos 4, 5 e 6 baseiam-se em publicações elaboradas, com participação deste autor, no escopo do presente trabalho. As contribuições desenvolvidas neste período, todas relacionadas à análise de estabilidade e à síntese de controladores para sistema fuzzy T-S com atraso nos estados, podem ser encontradas nesses capítulos.

No Capítulo 4, os resultados publicados em [LL08], para sistemas fuzzy T-S com atraso incerto e invariante nos estados, foram melhorados. As condições apresentadas foram estendidas a partir de algumas abordagens propostas no Capítulo 3. Para tal, um funcional L-K semelhante ao empregado na referência mencionada, porém dependente de parâmetro, foi utilizado. No caso da análise de estabilidade, consegue-se obter um grau de conservadorismo reduzido em relação às condições propostas em [CF00] e em [LL08], sendo que a última pode ser obtida como caso particular do problema de otimização proposto, conforme demonstrado analiticamente. Já para a síntese de controladores, as condições propostas podem levar a resultados complementares em relação aos encontrados nessa mesma referência. Mas, conforme ilustrado por um exemplo numérico, esses resultados podem ser menos conservadores e obtidos com custo computacional muito semelhante. Alguns dos resultados apresentados nesse capítulo também podem ser encontrados em [VLM10a].

Por meio de um candidato a funcional L-K mais elaborado, introduzido em [LM08b], as abordagens propostas no Capítulo 3 foram novamente estendidas no Capítulo 5, desta vez para permitir a consideração de sistemas com atraso variante nos estados. As condições convexas obtidas, duas para análise de estabilidade e duas para síntese de controladores por realimentação de estados, são dependentes do intervalo de variação do atraso. A diferença entre as condições para análise de estabilidade está na forma de se considerar o comportamento do sistema em malha fechada. Enquanto a primeira abordagem considera apenas a equação que descreve diretamente esse comportamento, a segunda considera as equações que determinam o comportamento do sistema em malha aberta e o sinal de controle, separadamente. Mostrou-se que a segunda abordagem tende a ser mais eficaz, levando a resultados menos conservadores a partir de um menor custo computacional. A mesma conclusão foi obtida ao se comparar as duas condições de síntese. A formulação da primeira seguiu passos relativamente convencionais, usados para obtenção de condições convexas destinadas à estabilização de sistemas incertos, como em [LM08b]. Por sua vez, a segunda condição foi obtida com o auxílio de uma variável instrumental, conforme proposto originalmente no Capítulo 3. Deve-se destacar que, as manipulações algébricas apresentadas já haviam sido utilizadas em outros trabalhos, porém aparentemente nunca em conjunto com o funcional L-K considerado, permitindo o tratamento de sistemas com atraso variante no tempo. Os resultados apresentados nesse capítulo podem ser parcialmente encontrados em [VLM10b].

No Capítulo 6 foram apresentadas condições convexas destinadas à síntese de compensadores dinâmicos de saída para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com atraso variante nos estados. Tais condições baseiam-se no mesmo candidato a funcional L-K dependente de parâmetro utilizado no Capítulo 5, porém o processo de derivação do controlador é substancialmente diferente. Dois casos particulares foram obtidos a partir de uma formulação principal, que é dependente do intervalo de variação do atraso. No primeiro, uma condição de síntese baseada na abordagem quadrática foi recuperada ao se

considerar que as matrizes do candidato a funcional L-K fossem constantes. Os principais aspectos da formulação principal e deste caso particular foram registrados em [VLMC10]. No segundo caso, considerando que alguns sistemas possam ser modelados de forma mais simples, foi obtida uma condição que possibilita a geração do sinal de controle a partir de uma quantidade reduzida de operações matriciais. Resultados semelhantes a esse podem ser encontrados em [LCMV10], para sistemas com parâmetros variantes no tempo. Vale ressaltar que, em todos os casos, as condições permitem que o controlador proposto realmente tanto as saídas atuais do sistema como seus valores em atraso.

7.2 Perspectivas

O trabalho registrado nessa dissertação permite que algumas direções de pesquisa sejam sugeridas como temas a serem explorados em novas investigações. A primeira dessas direções seria a utilização das manipulações algébricas apresentadas nessa dissertação em conjunto com funcionais de Lyapunov-Krasovskii mais elaborados, já disponíveis na literatura. Por exemplo:

$$V(\omega_t, t) = \sum_{v=1}^5 V_v(\omega_t, t)$$

com

$$\begin{aligned} V_1(\omega_t, t) &= x_t^T P(\omega_t) x_t & V_2(\omega_t, t) &= \sum_{j=t-d_t}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j \\ V_3(\omega_t, t) &= \sum_{\ell=2-\bar{d}}^{1-\bar{d}} \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q(\omega_j) x_j & V_4(\omega_t, t) &= \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=t+\ell}^{t-1} y_m^T Z(\omega_m) y_m \\ V_5(\omega_t, t) &= \sum_{j=t-d_t}^{t-1} y_j^T Z(\omega_j) y_j \end{aligned}$$

em que $y_j = x_{j+1} - x_j$ e as matrizes $P(\omega_t)$, $Q(\omega_t)$ e $Z(\omega_t)$ podem assumir valores diferentes a cada instante t e são definidas como

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad Q(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Q_i \quad Z(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Z_i .$$

Ou ainda:

$$V(\omega_t, t) = \sum_{v=1}^8 V_v(\omega_t, t)$$

com

$$\begin{aligned} V_1(\omega_t, t) &= x_t^T P(\omega_t) x_t & V_2(\omega_t, t) &= \sum_{j=t-d_t}^{t-1} x_j^T Q_1(\omega_j) x_j \\ V_3(\omega_t, t) &= \sum_{j=t-\bar{d}}^{t-1} x_j^T Q_2(\omega_j) x_j & V_4(\omega_t, t) &= \sum_{j=t-\underline{d}}^{t-1} x_j^T Q_3(\omega_j) x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5(\omega_t, t) &= \sum_{\ell=2-\underline{d}}^{1-\underline{d}} \sum_{j=t+\ell-1}^{t-1} x_j^T Q_1(\omega_j) x_j & V_6(\omega_t, t) &= (\bar{d} - \underline{d}) \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1-\underline{d}} \sum_{m=t+\ell}^{t-1} y_m^T Q_4(\omega_m) y_m \\
V_7(\omega_t, t) &= \bar{d} \sum_{\ell=-\bar{d}}^{-1} \sum_{m=t+\ell}^{t-1} y_m^T Z_1(\omega_m) y_m & V_8(\omega_t, t) &= \underline{d} \sum_{\ell=-\underline{d}}^{-1} \sum_{m=t+\ell}^{t-1} y_m^T Z_2(\omega_m) y_m
\end{aligned}$$

em que $y_j = x_{j+1} - x_j$ e as matrizes $P(\omega_t)$, $Q_j(\omega_t)$, $j = 1, \dots, 4$, e $Z_\ell(\omega_t)$, $\ell = 1, 2$, podem assumir valores diferentes a cada instante t e são definidas como

$$P(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) P_i \quad Q_j(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Q_{ji} \quad Z_\ell(\omega_t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) Z_{\ell i} .$$

As condições para análise de estabilidade e síntese de controladores obtidas a partir desses funcionais devem, a exemplo do que ocorre em formulações já publicadas para sistemas incertos, depender do atraso máximo presente nos estados dos sistemas e da faixa de variação desse atraso. Por envolverem funcionais mais completos, essas condições devem ser menos conservadoras que as propostas nesse trabalho, porém exigindo um maior custo computacional para serem avaliadas. Condições com essas mesmas características também poderiam ser obtidas a partir dos mesmos funcionais L-K utilizados nessa dissertação, considerando que as variáveis de folga empregadas nos desenvolvimentos apresentados possam ser dependentes de parâmetro. Por exemplo, as variáveis de folga $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $X_{42} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, utilizadas para obtenção da condição de síntese formulada no Teorema 4.2, poderiam ser respectivamente substituídas pelas variáveis $X_{11}(\omega_t)$, $X_{21}(\omega_t)$, $X_{31}(\omega_t)$, $X_{41}(\omega_t)$ e $X_{42}(\omega_t)$, de mesmas dimensões. Esse recurso provavelmente diminuiria o conservadorismo da condição original, no entanto uma maior quantidade de manipulações algébricas seria necessária para linearizá-la, implicando no aumento de sua complexidade computacional.

Em outra direção de pesquisa, pode-se perceber que a presença de incertezas em modelos fuzzy T-S vem merecendo cada vez mais atenção na literatura. Embora um estudo comparativo entre sistemas com incertezas variantes no tempo e sistemas fuzzy T-S tenha sido apresentado no Capítulo 3, essa questão não foi abordada nesse trabalho. Acredita-se, no entanto, que o estudo mencionado possa servir como ponto de partida para esse tipo de investigação. Igualmente de interesse, o desenvolvimento de condições para a síntese de observadores de estados para os sistemas estudados também pode ser sugerido. Provavelmente tal objetivo possa ser alcançado por meio de adaptações nas formulações utilizadas no Capítulo 6, destinadas ao projeto de compensadores dinâmicos de saída.

Outra extensão natural da pesquisa realizada seria a adaptação das condições de síntese desenvolvidas. Os principais objetivos seriam permitir que especificações de desempenho sejam consideradas ou que o esforço de controle seja garantido, por exemplo, por meio da norma \mathcal{H}_∞ . Espera-se também que problemas de seguimento de referência possam ser tratados a partir de pequenas modificações nas formulações desenvolvidas, especialmente nas relacionadas com a síntese de compensadores dinâmicos de saída, apresentadas no Capítulo 6. Uma característica importante desses compensadores é a possibilidade, quase imediata, de aplicá-los a sistemas reais, representando uma perspectiva importante para a continuidade dos estudos desenvolvidos.

Além disso, uma nova abordagem para a síntese de tais controladores pode ser indicada como sugestão final da pesquisa realizada. Os sinais envolvidos nas equações²

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= A(\omega_t)x_t + A_d(\omega_t)x_{t-d_t} + B(\omega_t)u_t, \\y_t &= C(\omega_t)x(t)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{x}_{t+1} &= A_c(\omega_t)\hat{x}_t + A_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + B_c(\omega_t)y_t + B_{cd}(\omega_t)y_{t-d_t}, \\u_t &= C_c(\omega_t)\hat{x}_t + C_{cd}(\omega_t)\hat{x}_{t-d_t} + D_c y_t + D_{cd} y_{t-d_t}\end{aligned}$$

podem ser reunidos em um espaço aumentado, como

$$\varphi \in \mathbb{R}^{6n+m+2q} : \varphi = \left[x_t^T \quad x_{t-d_t}^T \quad u_t^T \quad x_{t+1}^T \quad y_t^T \quad y_{t-d_t}^T \quad \hat{x}_t^T \quad \hat{x}_{t-d_t}^T \quad \hat{x}_{t+1}^T \right]^T.$$

Esse espaço seria então utilizado de forma similar ao que foi proposto originalmente no Capítulo 3. Ou seja, por meio de algumas manipulações algébricas, de um bloco apropriado de variáveis de folga e do Lema de Finsler, uma nova condição de síntese poderia ser obtida.

²Esses pares de equações são utilizados no Capítulo 6 para descrever respectivamente o comportamento do sistema fuzzy T-S e a dinâmica do controlador considerado.

Apêndice A

Provas Matemáticas

A.1 Complemento de Schur

Assuma

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

e defina

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

então

$$F(u, v) > 0 \quad \forall [u, v] \neq 0 .$$

Primeiro, considere $u = 0$. Então

$$F(0, v) = v^T R(x)v > 0, \quad \forall v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad R(x) > 0 .$$

Em seguida, considere

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u, \quad \text{com } u \neq 0 .$$

Então

$$\begin{aligned} F(u, v) &= u^T (Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u > 0, \quad \forall u \neq 0 \\ \Rightarrow \quad &Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 . \end{aligned}$$

Agora assumo

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, \quad R(x) > 0$$

e $F(u, v)$, conforme definida em (A.1). Considere também a otimização dessa função.

Fixando-se u

$$\nabla_v F^T = 2Rv + 2S^T u = 0 . \quad (\text{A.2})$$

Como $R > 0$, (A.2) apresenta uma única extremidade, com $v = -R^{-1}S^T u$. Levando-se esse valor à (A.1), obtém-se

$$F(u) = u^T (Q - SR^{-1}S^T)u .$$

Como $Q - SR^{-1}S^T > 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre com $u = 0$, implicando também que $v = 0$. Assim, o mínimo de $F(u, v)$ ocorre em $(0, 0)$ e é igual a zero. Dessa forma, $F(u, v)$ é definida positiva.

A.2 Lema de Finsler

A prova desse lema é baseada na demonstração apresentada em [dOS01], para o caso em que as matrizes são constantes. Verifica-se **i**) \Leftrightarrow **ii**), pois todo x tal que $\mathcal{B}(\alpha_t)x = \mathbf{0}$ pode ser escrito como $x = \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp y$ e, conseqüentemente, **i**) $\Rightarrow y^T \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp{}^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp y < \mathbf{0}$, para todo $y \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp{}^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp < \mathbf{0}$. Por outro lado, assumindo que **ii**) é verificada, multiplique o lado esquerdo dessa condição, à direita por $y \neq \mathbf{0}$ e à esquerda por y^T , para obter **i**).

Multiplique o lado esquerdo de **iii**) ou **iv**), à direita por $\mathcal{B}(\alpha_t)^\perp$ e à esquerda por $\mathcal{B}(\alpha_t)^\perp{}^T$, para obter **ii**). Assumindo que **ii**) seja verificada, a condição **iii**) pode ser recuperada como se segue: fatore $\mathcal{B}(\alpha_t)$ em um produto de matrizes de posto completo, $\mathcal{B}(\alpha_t) = \mathcal{B}_\ell(\alpha_t) \mathcal{B}_r(\alpha_t)$, defina $\mathcal{W}(\alpha_t) = \mathcal{B}_r(\alpha_t)^T (\mathcal{B}_r(\alpha_t) \mathcal{B}_r(\alpha_t)^T)^{-1} (\mathcal{B}_\ell(\alpha_t)^T \mathcal{B}_\ell(\alpha_t))^{0.5}$ e aplique a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha_t)^T \\ \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp{}^T \end{bmatrix} (\mathcal{Q}(\alpha_t) - \mu(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^T \mathcal{B}(\alpha_t)) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha_t) & \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha_t)^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{W}(\alpha_t) - \mu(\alpha_t) \mathbf{I} & \mathcal{W}(\alpha_t)^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp \\ \star & \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp{}^T \mathcal{Q}(\alpha_t) \mathcal{B}(\alpha_t)^\perp \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (\text{A.3})$$

Como o bloco (2, 2) de (A.3) é definido negativo (por hipótese), conclui-se que existe $\mu(\alpha_t) \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande tal que a condição acima seja verificada. Resta mostrar que **iii**) \Rightarrow **iv**). Para isso, basta escolher $\mathcal{X}(\alpha_t) = -0.5\mu(\alpha_t)\mathcal{B}(\alpha_t)^T$.

Referências Bibliográficas

- [AGB95] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. 31(9):1251–1261, 1995.
- [Agu07] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas*. UFMG, 2007.
- [Bar83] B. R. Barmish. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):848–850, October 1983.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1994.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [Bha07] A. Bhaya. *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, chapter Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Lineares. Editora Blücher, 2007.
- [BMVSSO04] I. Baturone, F. J. Moreno-Velo, S. Sanchez-Solano, and A. Ollero. Automatic design of fuzzy controllers for car-like autonomous robots. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(4):447–465, August 2004.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, July 1989.
- [Cav08] A. L. O. Cavalcanti. *Análise e Desenvolvimento de Controladores Preditivos Multivariáveis Baseados em Multi-Modelos Bilineares*. Tese de doutorado, UFRN, Natal (RN), Brasil, October 2008.
- [CC05] Y. C. Chang and B. S. Chen. Intelligent robust tracking controls for holonomic and nonholonomic mechanical systems using only position measurements. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(4):491–507, August 2005.
- [CF00] Y. Y. Cao and P. M. Frank. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(2):200–211, April 2000.
- [Che99] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.

- [CL05] B. Chen and X. Liu. Fuzzy approximate disturbance decoupling of MIMO nonlinear systems by backstepping and application to chemical processes. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(6):832–847, December 2005.
- [CRF96] S. G. Cao, N. W. Rees, and G. Feng. Analysis and design of a class of continuous time fuzzy control systems. *International Journal of Control*, 64:1069–1087, June 1996.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete-time systems with time-varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43:355–359, August 2001.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, June 2002.
- [dOGH99] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1-3):27–38, June 1999.
- [dOS01] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. Reza Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 241–257. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [DY08] J. Dong and G.-H. Yang. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties. *Systems & Control Letters*, 57(2):123–131, February 2008.
- [DY09a] J. Dong and G.-H. Yang. Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control synthesis for discrete-time T–S fuzzy systems via switching fuzzy controllers. *Fuzzy and Sets Systems*, 160(4):482–499, February 2009.
- [DY09b] J. Dong and G.-H. Yang. Static output feedback \mathcal{H}_∞ control of a class of nonlinear discrete-time systems. *Fuzzy and Sets Systems*, 160(19):2844–2859, October 2009.
- [DZ08] H. Du and N. Zhang. \mathcal{H}_∞ control for buildings with time delay in control via linear matrix inequalities and genetic algorithms. *Engineering Structures*, 30(1):81–92, January 2008.
- [Fen04] G. Feng. \mathcal{H}_∞ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 34(1):283–292, February 2004.

- [Fen06] G. Feng. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5):676–697, October 2006.
- [FK01] C. W. Frey and H. B. Kuntze. A neuro-fuzzy supervisory control system for industrial batch processes. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):570–577, August 2001.
- [FS02] E. Fridman and U. Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1931–1937, November 2002.
- [FS03] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.
- [GBM09] K. Guelton, T. Bouarar, and N. Manamanni. Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems—a descriptor redundancy approach. *Fuzzy and Sets Systems*, 160(19):2796–2811, October 2009.
- [GdOB02] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):700–711, 2002.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1-3):69–80, December 1998.
- [GKC03] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser, Boston, 2003.
- [GL07] J. M. Gomes da Silva Jr. and V. J. S. Leite. *Enciclopédia de Automática – Controle & Automação*, chapter Sistemas lineares com atrasos de tempo. Editora Blücher, 2007.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB[®], User’s Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [Gon06] E. N. Gonçalves. *Análise e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Domínios Politópicos de Incerteza*. Tese de doutorado, UFMG, Belo Horizonte (MG), Brasil, Setembro 2006.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.

- [GPS93] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, April 1993.
- [GPTZ03] G. Garcia, B. Pradin, S. Tarbouriech, and F. Zeng. Robust stabilization and guaranteed cost control for discrete-time linear systems by static output feedback. *Automatica*, 39(9):1635–1641, 2003.
- [HL93] J. Hale and S. M. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [HN07] D. Huang and S.-K. Nguang. Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach. *Information Science*, 177(14):3005–3015, July 2007.
- [HV01] S. Haykin and B. V. Veen. *Sinais e Sistemas*. Bookman, 2001.
- [HWLS08] Y. He, M. Wu, G. Liu, and J. She. Output feedback stabilization for discrete-time systems with a time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11):2372–2377, November 2008.
- [KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9):1141–1144, September 1998.
- [KM99] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Springer, 1st edition, 1999.
- [Kra63] N. N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.
- [KSVS04] S. Kanev, C. Scherer, M. Verhaegen, and B. De Schutter. Robust output-feedback controller design via local BMI optimization. *Automatica*, 40(7):1115–1127, July 2004.
- [LCMV10] V. J. S. Leite, E. B. Castelan, M. F. Miranda, and D. C. Viana. Dynamic output compensator design for time-varying discrete time systems with delayed states. Baltimore, MY, USA, June-July 2010. To appear.
- [LL07] H. K. Lam and F. H. F. Leung. Sampled-data fuzzy controller for time-delay nonlinear systems: Fuzzy-model-based LMI approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 37:617–629, June 2007.
- [LL08] H. K. Lam and F. H. F. Leung. Stability analysis of discrete-time fuzzy-model-based control systems with time delay: Time delay-independent approach. *Fuzzy and Sets Systems*, 159(8):990–1000, April 2008.
- [LL09] L. Li and X. Liu. New results on delay-dependent robust stability criteria of uncertain fuzzy systems with state and input delays. *Inf. Sci.*, 179(8):1134–1148, March 2009.

- [LM08a] V. J. S. Leite and M. F. Miranda. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008:1–15, 2008. Article ID 875609.
- [LM08b] V. J. S. Leite and M. F. Miranda. Stabilization of discrete time-varying delay systems: a convex parameter dependent approach. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 4934–4939, Seattle, WA, USA, 2008.
- [Löf08] J. Löfberg. Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008.
- [LP03] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504, March 2003.
- [LWL04] C. Li, H. Wang, and X. Liao. Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 151(4):417–421, July 2004.
- [LWLH07] C. Lin, Q-G. Wang, T. H. Lee, and Y. He. *LMI Approach to Analysis and Control of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time Delay*. Springer, 2007.
- [Lya92] A. M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3):531–773, 1992.
- [LZ03] X. Liu and Q. L. Zhang. New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. 39(9):1571–1582, September 2003.
- [MA75] E. H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal Man-Machine Studies*, 7(1):1–13, January 1975.
- [Mac89] N. MacDonald. *Biological delay systems: linear stability theory*, volume 8. Cambridge studies in mathematical biology, 1989.
- [ML08] M. F. Miranda and V. J. S. Leite. Convex analysis and synthesis for uncertain discrete-time systems with time-varying state delay. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 4910–4915, Seattle, WA, USA, 2008.
- [MMHZ07] N. Manamanni, B. Mansouri, A. Hamzaoui, and J. Zaytoon. Relaxed conditions in tracking control design for a T-S fuzzy model. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 18(2):185–210, April 2007.
- [MPA09] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. C. Avellar. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Science*, 179(8):1149 – 1162, March 2009.

- [NG04] S.-I. Niculescu and K. Gu, editors. *Advances in Time-Delay Systems*, volume 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, London, 2004.
- [Nic01] S. I. Niculescu. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [Oga03] Katsuhiko Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall, 4 edition, 2003.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [Par06] M. N. A. Parlakçı. Robust stability of uncertain time-varying state delayed systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 153(4):469–477, July 2006.
- [QFY08] J. Qiu, G. Feng, and J. Yang. Delay-dependent robust \mathcal{H}_∞ output feedback control for uncertain discrete-time switched systems with interval time-varying delay. In *Proceedings of the 2008 American Control Conference*, pages 3975–3980, June 2008.
- [Rez03] S.O. Rezende. *Sistemas Inteligentes: Fundamentos e Aplicações*. Manole, 2003.
- [Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.
- [RW06] B.-J. Rhee and S. Won. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi–Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy and Sets Systems*, 157(9):1211–1228, May 2006.
- [SADG97] CV. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback — a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, February 1997.
- [SDM07] S. B. Stojanović, D. L. Debeljković, and I. Mladenović. A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 4(2):109–117, November 2007.
- [SGB05] A. Sala, T. M. Guerra, and R. Babuška. Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy and Sets Systems*, 156(3):432–444, December 2005.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, July 1997.
- [SK86] M. Sugeno and G. T. Kang. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy and Sets Systems*, 28(1):329–346, October 1986.

- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*. John Wiley and Sons Ltd., 2005.
- [SSJ04] D. Srinivasagupta, H. Schättler, and B. Joseph. Time-stamped model predictive previous control: an algorithm for previous control of processes with random delays. *Computers & Chemical Engineering*, 28(8):1337–1346, July 2004.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [Sug98] M. Sugeno. *Fuzzy Control*. Nikkan Kougyou Shinbunsha Publisher, Tokyo, 1998.
- [TAA03] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and R. G. Avellar. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):613–623, October 2003.
- [TIW98] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.-O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265, May 1998.
- [TS85] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 15(1):116–132, February 1985.
- [TS92] K. Tanaka and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy and Sets Systems*, 45(2):135–156, January 1992.
- [TW01] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. Wiley-Interscience, 2001.
- [TYZ09] E. Tian, D. Yue, and Y. Zhang. Delay-dependent robust \mathcal{H}_∞ control for T–S fuzzy system with interval time-varying delay. *Fuzzy and Sets Systems*, 160(12):1708–1719, June 2009.
- [VB00] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4):363–385, August 2000.
- [VLM10a] D. C. Viana, V. J. S. Leite, and M. F. Miranda. Fuzzy control of delayed systems: less conservative convex conditions. Baltimore, MY, USA, June–July 2010. To appear.
- [VLM10b] D. C. Viana, V. J. S. Leite, and M. F. Miranda. Stability analysis and controller design for discrete-time fuzzy systems with time-varying delay. Prague, Czech Republic, June 2010. To appear.

- [VLMC10] D. C. Viana, V. J. S. Leite, M. F. Miranda, and E. B. Castelan. Dynamic output stabilizing design for discrete-time fuzzy systems with time-varying delay. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, December 2010. Submitted.
- [WB95] C. R. Wylie and L. C. Barrett. *Advanced Engineering Mathematics*. McGraw-Hill, New York, 6 edition, 1995.
- [WHS04] M. Wu, Y. He, J. H. She, and G. P. Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. 40(8):1435–1439, August 2004.
- [WHU99] Z. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen. Robust \mathcal{H}_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty: the discrete-time case. *Automatica*, 35(6):1161–1167, June 1999.
- [WHU01] Z. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen. Robust \mathcal{H}_∞ observer design of linear time-delay systems with parametric uncertainty. *Systems & Control Letters*, 42(4):303–312, March 2001.
- [Wu06] H.-N. Wu. Delay-dependent stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with state delay: A fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 36(4):954–962, August 2006.
- [Wu08] H.-N. Wu. Delay-dependent \mathcal{H}_∞ fuzzy observer-based control for discrete-time nonlinear systems with state delay. *Fuzzy and Sets Systems*, 159(20):2696–2712, October 2008.
- [XL08] S. Xu and J. Lam. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. *International Journal of Systems Science*, 39(12):1095–1113, December 2008.
- [YNKI00] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, and A. Ichikawa. Output stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy and Sets Systems*, 111(2):253–266, April 2000.
- [Zad73] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 3(1):28–44, January 1973.
- [ZFLX05] S. Zhou, G. Feng, J. Lam, and S. Xu. Robust \mathcal{H}_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *Information Science*, 174(3–4):197–217, August 2005.
- [ZLL07] H. Zhang, S. Lun, and D. Liu. Fuzzy \mathcal{H}_∞ filter design for a class of nonlinear discrete-time systems with multiple time delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):453–629, June 2007.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)