



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

**Dualidade na teoria de Landau-Ginzburg da  
supercondutividade**

Rio de Janeiro  
2010

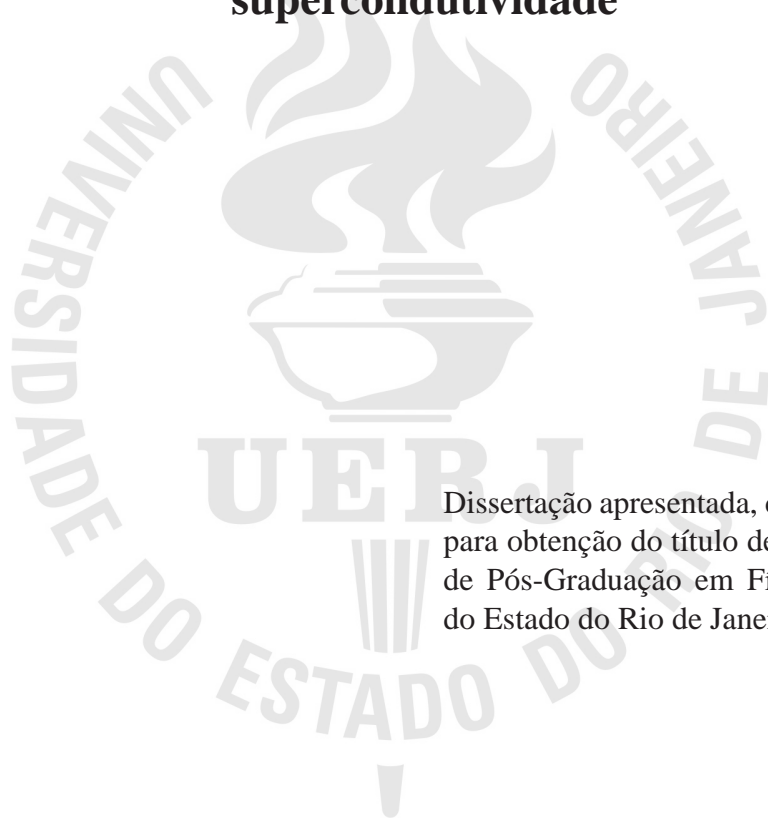
# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

# **Dualidade na teoria de Landau-Ginzburg da supercondutividade**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de mestre, ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro  
2010

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/CTC-D

T266 Teixeira, Bruno Fernando Inchausp.  
Dualidade na teoria de Landau-Ginzburg da supercondutividade/ Bruno  
Fernando Inchausp Teixeira.-2010.  
Instituto de Física Armando Dias Tavares.  
93f.: il. color.

Orientador: Daniel Gustavo Barci.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Supercondutores- Teses. 2. Matéria condensada-Teses.I. Barci,  
Daniel Gustavo.II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de  
Física Armando Dias Tavares.III. Título.

CDU537.31

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese.

---

Assinatura

---

Data

Bruno Fernando Inchausp Teixeira

## **Dualidade na teoria de Landau-Ginzburg da supercondutividade**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de mestre, ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em:

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares (IFADT-UERJ)

---

Prof. Dr. César Augusto Linhares da Fonseca Júnior  
Instituto de Física Armando Dias Tavares (IFADT-UERJ)

---

Prof. Dr. Marco Moriconi  
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Rio de Janeiro  
2010

## AGRADECIMENTOS

Agradeço sempre em primeiro lugar à Deus tanto nos bons, quanto nos maus momentos. Agradeço mais aos maus momentos, pois neles que pude mostrar meu verdadeiro valor. Obrigado, sempre!

Agradeço aos meus pais por terem me oferecido a oportunidade de estudo e de desenvolvimento que eles não puderam ter. Não posso expressar meus agradecimentos em apenas um parágrafo, mas também não preciso, já que posso demonstrar com os meus atos. Amo muito vocês dois, obrigado.

É claro que não vou esquecer dos meus irmãos (amo muito vocês, embora não demonstre muito rs), meu sobrinho que nem fala e nem anda ainda, mas que num simples sorriso consegue me mostrar tantas coisas que nem em mais de um milhão de palavras conseguiria dizer. Meus tios, minhas tias, meus primos (que são pessoas excepcionais), e minha querida avó Clélia. Todos são extremamente importantes na minha vida. Mais uma vez, obrigado.

Para agradecer meus infinitos amigos (não infinito em número, mas sim em qualidade) demandarei mais de um mero parágrafo. Eles são a base do que sou hoje, além da minha família, claro.

Aos amigos Daniel(Presto), um irmão, um compadre, que tive o grande prazer de conhecer na UERJ e que levarei pelo resto da minha vida, Anderson(Paracambi), Marcos(Sal), Vanessa(Nega) e seu agregado Marcello(Negão), Otávio(Hagrid), Edivaldo(Faraó), Yves(Ybas), Walter(no nick rs), Bruno(OZório) e Valdir(Bulmer) quero dedicar meu respeito, amizade, profissionalismo, confiança, e sobretudo esse trabalho de fim de mestrado, que não teria conseguido escrever sem a ajuda de todos vocês me dando os "puxões de orelha" necessários quando estava me sentindo fraco pra continuar. Devo a vocês meu desenvolvimento como físico, como pessoa e como amigo. Pude descobrir com vocês que a amizade é a fonte das nossas forças, que sem ela não chegamos a lugar algum nunca. Obrigado por estarem ao meu lado!

Aos amigos Thiago(Thiagão) e agregada, mas não menos importante, Ana(Aninha), Gustavo(Chicaum), Caio(no nick rs), Maria(no nick rs), Luana(no nick), Luis(Rosalba), Victor(Triste), Marília(no nick rs), Daniele Santos e Daniele Souza(Dani's), Grezielle(Guigui), Arturo(chileno), Víctor e Harley(Colombianos). Essas pessoas são não menos importantes que as de cima, mas participaram da minha vida de forma diferente trazendo outras discussões, outras visões de mundo, me dando um pouco mais de confiança pra seguir em frente. Aprendi com eles coisas que me farão prosseguir tendo a certeza de que sou capaz de realizar meus objetivos. Obrigado pela atenção e pela paciência de todos e pela confiança depositada em mim!

Se vocês acharam que eu iria esquecer de vocês, se enganaram. Aos meus amigos de todos os momentos, Guilherme(Gui) e Mabele(Mabelita) que formam agora uma família que tenho a honra e o extremo prazer de participar. Difícil esquecer e enumerar os momentos em

que vocês me deram o apoio necessário, que me fizeram acreditar que era possível, que eu era capaz o suficiente pra conseguir. Muito obrigado por fazerem parte de uma amizade que o tempo não se fez perder e esquecer nesses 10 anos que nos conhecemos! É isso aí garoto!!! Consegui!! rs

E finalmente, aos amigos que não estão aqui, mas que quando os encontro no corredor, na pós-graduação, na biblioteca, no Cafis, etc, sempre falamos de coisas engraçadas e legais. Me desculpem por não estarem nestes agradecimentos de forma explícita, mas saibam que são importantes como todos os outros, mas sou humano e minha memória me trai neste momento.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador e amigo Daniel Barci que me ajudou a evoluir nestes dois anos de mestrado, que sempre acreditou na minha capacidade, que teve a devida paciência quando tinha muitas dúvidas sobre o assunto deste trabalho. Obrigado pela orientação e pelas discussões sobre como devemos produzir física.

Agradeço aos professores Daniel G. Barci, Vitor E. R. Lemes(DFT-UERJ), Silvio P. Sorella(DFT-UERJ), Santiago E. P. Bergliaffa(DFT-UERJ), César A. Linhares(DFT-UERJ), Maria de Fátima A. da Silva(DFT-UERJ), Nilson Antunes de Oliveira(DEQ-UERJ), Marcelo Chiapparini(DFT-UERJ), Ivan da Costa C. Lima(DEQ-UERJ), Rudnei O. Ramos(DFT-UERJ), Lilian Pantoja Sosmam(DEQ-UERJ), José Roberto P. Mahon(DFNAE-UERJ), Andre Sznajder(DFNAE-UERJ) e José A. Helaÿel-Neto(CBPF). Muitos desses professores me ajudaram a adquirir o conhecimento de física que possuo hoje e outros sempre foram muito gentis comigo e acreditaram em mim durante a minha formação acadêmica. Muito obrigado a todos vocês.

Aos secretários Rogério e Isabel pelo apoio nos assuntos burocráticos da pós-graduação e pelas discussões engraçadas de vez em quando nos corredores.

Finalmente, agradeço ao PPGF-UERJ e à Capes pelo apoio financeiro e pela infraestrutura oferecida para a realização do meu mestrado.

## RESUMO

TEIXEIRA, Bruno Fernando Inchausp. *Dualidade na teoria de Landau-Ginzburg da supercondutividade*, 2010, 93f. Dissertação (Mestrado em Física), Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

Neste trabalho abordamos a teoria de Ginzburg-Landau da supercondutividade (teoria GL). Apresentamos suas origens, características e resultados mais importantes. A idéia fundamental desta teoria é descrever a transição de fase que sofrem alguns metais de uma fase normal para uma fase supercondutora. Durante uma transição de fase em supercondutores do tipo II é característico o surgimento de linhas de fluxo magnético em determinadas regiões de tamanho finito chamadas comumente de vórtices. A dinâmica destas estruturas topológicas é de grande interesse na comunidade científica atual e impulsiona incontáveis núcleos de pesquisa na área da supercondutividade. Baseado nisto estudamos como essas estruturas topológicas influenciam em uma transição de fase em um modelo bidimensional conhecido como modelo XY. No modelo XY vemos que os principais responsáveis pela transição de fase são os vórtices (na verdade pares de vórtice-antivórtice). Villain, observando este fato, percebeu que poderia tornar explícita a contribuição desses defeitos topológicos na função de partição do modelo XY realizando uma transformação de dualidade. Este modelo serve como inspiração para a proposta deste trabalho. Apresentamos aqui um modelo baseado em considerações físicas sobre sistemas de matéria condensada e ao mesmo tempo utilizamos um formalismo desenvolvido recentemente na referência [29] que possibilita tornar explícita a contribuição dos defeitos topológicos na ação original proposta em nossa teoria. Após isso analisamos alguns limites clássicos e finalmente realizamos as flutuações quânticas visando obter a expressão completa da função correlação dos vórtices o que pode ser muito útil em teorias de vórtices interagentes (dinâmica de vórtices).

Palavras-chave: Teoria GL. Transições de fase. Dinâmica de vórtices. Dualidade. Modelo de Schrödinger-Ginzburg-Landau.



## ABSTRACT

In this work we introduced the Ginzburg-Landau theory of superconductivity (GL theory). We have shown your foundations, features and more important results. The fundamental idea of this theory is to describe the phase transition that some metals undergoes from a normal to a superconductor phase. During a phase transition in superconductors of type II is common the appearance of magnetic flux lines in given regions of finite size called of *vortices*. The knowledge of the dynamics of these vortices is of great importance in the current scientific community and drives many research centers to study the superconductivity. In view of this we study how these vortices changes a phase transition in a bidimensional model known as XY model. In XY model one can show that the main responsible for the phase transition are the vortices (or still, vortice-antivortice pairs). Villain, noting this fact, realized that could to turn explicit the contribution of theses topological defects in the partition function of XY model making a duality transformation. This model inspired us to study the subject of this master thesis. We presented here a model based in physical considerations about systems of condensed matter. At the same time we used a formalism developed in reference [29] that permits to turn explicit the contribution of these vortices in the original action proposed in our theory. Finally we analysed some classical limits and we looked for the quantum fluctuations to obtain the complete expression of the correlation function of vortices, whose utility is in the study of interacting vortices is wide (vortex dynamics).

Keywords: GL theory. Phase Transitions. Vortex Dynamics. Duality. Schrödinger-Ginzburg-Landau Model.

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Vizinhos próximos (bolas brancas) do spin $i$ (bola preta) em uma cadeia linear. . . .	14
1.2	Vizinhos próximos (bolas brancas) do spin $i$ (bola preta) em uma cadeia bidimensional. . . . .	15
1.3	Solução gráfica da equação de campo médio. LE BELLAC, Michel, 1991. . . . .	19
1.4	O estado de vácuo verdadeiro é correspondente a $\phi_1$ . O estado $\phi_2$ é instável. O estado $\phi_3$ é metaestável, mas pode decair no $\phi_1$ por tunelamento quântico. PESKIN, M;SCHROEDER, D. 1995. . . . .	25
1.5	Traçamos uma linha reta entre os dois mínimos e tomamos um valor médio do potencial entre $\phi_1$ e $\phi_3$ . PESKIN, M;SCHROEDER, D. 1995. . . . .	25
2.1	Uma onda "solitária"(sóliton). RYDER, Lewis H. 1996. . . . .	37
2.2	Um possível caminho de 0 a $p$ . LE BELLAC, Michel. 1991. . . . .	46
1	Resultado obtido por Onnes para o mercúrio. . . . .	80
2	Curva de magnetização de um supercondutor. . . . .	82
3	Irreversibilidade prevista para um supercondutor. Nas primeiras duas figuras, o metal está com uma temperatura abaixo da crítica. Nas outras duas, primeiramente ele se encontra numa temperatura $T > T_C$ e posteriormente numa temperatura $T < T_C$ , onde mantemos o campo externo $H$ ligado. . . . .	83
4	Reversibilidade encontrada no efeito Meissner-Ochsenfeld. Nas duas primeiras figuras $T > T_C$ , enquanto na última $T < T_C$ . . . . .	84
5	Magnetização $\vec{M}$ em função de $\vec{H}$ (supercondutores do tipo I). . . . .	85
6	Magnetização $\vec{M}$ em função de $\vec{H}$ (supercondutores do tipo II). . . . .	85
7	Vórtices num supercondutor do tipo II. . . . .	86

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	8
<b>1 A TEORIA DE GINZBURG-LANDAU DA SUPERCONDUTIVIDADE</b>	12
1.1 <b>O modelo de Lenz-Ising unidimensional</b>	13
1.2 <b>Solução do modelo de Lenz-Ising unidimensional</b>	15
1.3 <b>A aproximação de campo médio e a transição para/ferromagnética</b>	17
1.4 <b>A teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau</b>	20
1.4.1 <u>A formulação contínua da teoria de Landau</u>	26
1.5 <b>O modelo supercondutor de Ginzburg-Landau</b>	29
1.5.1 <u>Simetria de gauge no modelo GL da supercondutividade</u>	32
<b>2 DUALIDADE EM TEORIA DE CAMPOS E MATÉRIA CONDENSADA</b>	35
2.1 <b>Sólitons e vórtices em matéria condensada</b>	36
2.1.1 <u>O modelo de sine-Gordon</u>	36
2.1.2 <u>Linhas de vórtice</u>	39
2.2 <b>Motivações para se estudar modelos bidimensionais</b>	43
2.3 <b>O modelo XY</b>	45
2.3.1 <u>Estudo qualitativo</u>	45
2.3.2 <u>O modelo de Villain</u>	50
<b>3 DINÂMICA DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES BIDIMENSIONAIS</b>	55
3.1 <b>A teoria GL dual</b>	56
3.2 <b>Funções de correlação clássica e quântica</b>	62
<b>CONCLUSÃO</b>	71
<b>REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS</b>	73

## INTRODUÇÃO

O interesse científico sobre a compreensão da estrutura da matéria sempre foi enorme. Ele existia desde os tempos da Grécia Antiga. Porém, com o sucesso da teoria cinética dos gases, a idéia de um constituinte fundamental da matéria era algo inevitável. A teoria e os resultados experimentais estavam em perfeita concordância, e então assumir que as partículas idealizadas do modelo existiam não era mais considerado um problema grave. Neste contexto, o físico J. J. Thomson realizou um experimento que provocaria alterações profundas em toda a física, mais especificamente na compreensão da estrutura da matéria. A descoberta do elétron, em 1897, proporcionou um aumento assustador na busca da explicação dos fenômenos microscópicos da matéria.

Com esta descoberta revolucionária, várias áreas da física puderam se desenvolver de forma robusta. Uma das áreas favorecidas foi o estudo da condução elétrica e térmica em metais, muito mal compreendida até então. Três anos depois do experimento de Thomson (1900), o físico P. Drude desenvolveu um mecanismo lógico para a condução em metais. O modelo de Drude considerava basicamente que dentro de um metal existia um "gás de elétrons", responsável pelos fenômenos de condução elétrica e térmica no metal. Claramente, Drude estava sob influência da teoria cinética dos gases que já estava muito bem fundamentada.

As previsões do modelo de Drude estavam sendo confirmadas pelos experimentos muito rapidamente. Uma destas previsões consistia na idéia de que a resistividade de um metal cairia com o decréscimo da temperatura, mas que ela se aproximava de um valor constante devido às impurezas dos metais. A resistividade podia até ser nula quando a temperatura também o fosse. Na época (1900 a 1908), as temperaturas próximas de zero não eram fáceis de serem obtidas como nos dias de hoje (que continuam demandando muito dinheiro para a sua produção), o que atrapalhava a verificação desta previsão teórica.

Em 1911, buscando verificar a previsão teórica de Drude sobre a resistividade, o físico Heike Kamerlingh Onnes[1] mediu a resistividade a baixas temperaturas de alguns metais. Para a platina e para o ouro os resultados experimentais estavam de acordo com os teóricos, porém para o mercúrio um resultado inesperado ocorreu. Kamerlingh Onnes optou pelo mercúrio devido ao seu alto grau de pureza, esperando obter a baixas temperaturas uma curva de resistividade perto de zero quando a temperatura fosse nula. Porém, ele obteve que a resistividade do mercúrio a uma temperatura de 4K caía a zero abruptamente. Baseado neste comportamento do mercúrio, ele propôs um nome apropriado para este novo estado da matéria, que abriria portas

para uma imensa área intensa e produtiva: a supercondutividade.

A partir do ano de 1911, as pesquisas sobre a supercondutividade não pararam de crescer, já que elas proporcionavam uma gama enorme de descobertas. Em 1933, os físicos Fritz Meissner e Robert Ochsenfeld demonstraram experimentalmente que um supercondutor, além de possuir um campo elétrico nulo em seu interior, também apresentava campo magnético nulo quando sujeito a um campo magnético externo. Em outras palavras, um supercondutor era um condutor perfeito e também um diamagnético perfeito. Este efeito ficou conhecido como *efeito Meissner-Ochsenfeld*[2].

Desde 1911 os pesquisadores procuravam uma teoria que descrevesse o fenômeno da supercondutividade, mas não a encontravam. Em 1935, os irmãos F. London e H. London[3] finalmente conseguiram mostrar a primeira teoria capaz de explicar a supercondutividade. Esta teoria era descrita por duas equações, hoje conhecidas como primeira e segunda equações de London (ver apêndice A).

Embora a teoria de London da supercondutividade fosse útil, ela não descrevia o comportamento do sistema de um ponto de vista microscópico nem das transições de fase. Em 1950, os físicos V. L. Ginzburg e L. D. Landau publicaram em russo um artigo[4] descrevendo a supercondutividade do ponto de vista fenomenológico, ou seja, este modelo é baseado sobre as características gerais observadas da supercondutividade e não sobre algum modelo microscópico particular. Infelizmente, a tradução desta publicação para o inglês atrasou a difusão deste modelo para o ocidente. A teoria microscópica de Bardeen-Cooper-Schrieffer[5] (teoria BCS) foi lançada em 1957, sete anos após a publicação da obra de Landau e Ginzburg, e descreve muito bem a supercondutividade (tanto que foi estudada antes mesmo da teoria de Landau), mas por ser muito complicada em determinadas situações, a teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau (GL) é muito mais geral.

A teoria GL da supercondutividade só passou mesmo a ser entendida quando Gor'kov publicou um artigo[6] mostrando que ela podia ser derivada da teoria BCS num limite conveniente. O trabalho de 1959 de Gor'kov ajudou a teoria GL a ganhar um maior status diante das teorias de supercondutividade existentes, colocando-a como uma teoria-referência até os dias de hoje.

Antes de falarmos na teoria GL, precisamos identificar o que significa uma transição de fase e mostrar o que vem a ser um parâmetro de ordem. A teoria GL é baseada inteiramente na idéia de um parâmetro de ordem (complexo) para poder explicar a transição de fase normal/supercondutora. A beleza desta teoria é que ela consegue determinar o comportamento dos supercondutores perfeitamente e nas palavras de M. Tinkham[7]:

*"(...) a teoria de Landau-Ginzburg com certeza foi um dos maiores triunfos da intuição física."*

Não há mais dúvidas nos dias de hoje de que a teoria GL é a teoria que nos fornece a

matemática mais fácil para efetuarmos cálculos em modelos de supercondutores. A teoria BCS é a base física microscópica da supercondutividade, mas o seu aparato matemático é absurdamente mais complicado que o da teoria GL, projetando a última como uma melhor teoria pra descrever e prever o comportamento supercondutor.

O ano de 1957 foi um ano ímpar para a teoria dos supercondutores. Em um lado do mundo surgia a famosa teoria BCS que descrevia as características microscópicas da supercondutividade, e do outro lado nasciam os supercondutores do tipo II através do trabalho de Abrikosov[12]. A partir destes dois trabalhos em 1957, as pesquisas em supercondutividade aumentaram de forma impressionante. Em particular, a rede de fluxo de Abrikosov permitiu o desenvolvimento da *dinâmica de vórtices*, tema estruturador deste trabalho de fim de mestrado.

Supercondutores do tipo II possuem uma característica peculiar; eles se comportam como supercondutores do tipo I até um campo crítico  $H_{C1}$ , mas quando aumentamos o campo magnético para valores  $H_{C1} < H < H_{C2}$  algumas regiões de tamanho finito começam a se formar onde existe passagem de fluxo magnético (os chamados vórtices). Estas regiões se comportam com as mesmas características de um metal normal. Quando aumentamos o campo magnético para valores maiores do que  $H_{C2}$ , a supercondutividade é destruída, assim como acontece com os supercondutores tradicionais ou do tipo I.

Uma das formas de se estudar a dinâmica de vórtices é buscar entender o porquê da supercondutividade ser destruída quando elevamos a temperatura ou o valor do campo magnético aplicado sobre o sistema. Qual seria a influência desses vórtices nesta transição de fase supercondutora/normal? Será que eles interagem entre si, e se sim, qual seria a expressão desta interação?

A resposta exata a essas perguntas ainda não existe e isso nos motivou a realizar um estudo sobre a possível interação entre vórtices. Sabemos que para tal devemos obter uma função correlação de vórtices para dela extrairmos o comportamento desta interação. Um dos modelos mais famosos de matéria condensada é o modelo de Villain. Este modelo tenta entender o comportamento dos vórtices em um modelo de rede de spins planares conhecido pelo nome de modelo XY. Uma explicação para a quebra da supercondutividade neste modelo é dada pela *transição de fase de Kosterlitz-Thouless*, que depende exclusivamente da densidade de vórtices na amostra supercondutora.

A partir destes desenvolvimentos nos anos de 1950 (Landau), 1957 (BCS e Abrikosov) e 1959 (Gor'kov), éramos capazes de pensar que a teoria da supercondutividade não apresentaria resultados muito diferentes do que já se tinham obtido. Mas, no ano de 1986, os pesquisadores Karl Müller e Johannes Bednorz descobriram algo incrível: o primeiro supercondutor a altas temperaturas[13]. Aqui, entendemos por altas temperaturas supercondutores com temperatura crítica acima de 30K, pois acreditava-se que não poderíamos obter temperaturas mais altas do que a encontrada pelo artigo de Gavalier em 1973 para filmes de Nb-Ge[14]. Mas ainda bem que essa estimativa estava errada, pois o campo da supercondutividade a alta temperatura é extrema-

mente promissor e atualmente recebe destaque no cenário econômico mundial diante de outras áreas da física por sua aplicabilidade no desenvolvimento tecnológico e social. Uma observação que deve ser feita é a de que todos os supercondutores a altas temperaturas são supercondutores que possuem características do tipo II. Uma consequência extremamente importante para nós, nesse trabalho, é que por isso, o estudo da dinâmica de vórtices é fundamental para o entendimento, domínio teórico e prático, e implementação desses tipos de supercondutores.

Existem alguns efeitos muito conhecidos na literatura de dinâmica de vórtices em supercondutores, como o termo "pinning", que consiste em "fixar" um vórtice em uma determinada região já que sua movimentação no supercondutor gera resistência elétrica. Esses assuntos podem ser encontrados na área *matéria de vórtice* ou ainda, o termo em inglês *vortex matter*. Neste trabalho não estaremos interessados em explicar tais efeitos, nosso objetivo aqui será outro.

Nesta dissertação apresentaremos o modelo GL bidimensional na sua versão relativística com uma pequena modificação no termo de Klein-Gordon; trocaremos esse termo por um termo de Schrödinger utilizando uma justificativa de que nos modelos de matéria condensada os constituintes do sistema se movem em velocidades não-relativísticas. Trabalhamos com uma teoria dual à teoria original na qual tornamos explícitas a contribuição dos vórtices do modelo, de forma muito semelhante ao modelo de Villain. Depois disso, fomos capazes de derivar a função correlação dos vórtices e determinar o comportamento do pólo desta interação.

As aplicações práticas dos supercondutores são intermináveis e impressionantes. O maior experimento do mundo atualmente, o LHC (Large Hadron Collider), se utiliza de placas supercondutoras para a realização de suas experiências. Não é nosso objetivo aqui mostrar as aplicações tecnológicas destes incríveis materiais.

## 1 A TEORIA DE GINZBURG-LANDAU DA SUPERCONDUTIVIDADE

### Introdução

A supercondutividade, descoberta pelo físico Kamerlingh Onnes em 1911[1], representa um fenômeno quântico em escala macroscópica e sempre trouxe amplas questões não só para a área de matéria condensada, mas também para várias outras, como a teoria quântica de campos. Como já foi dito na introdução, existiram algumas teorias que buscaram explicar este novo fenômeno. Estamos interessados na teoria desenvolvida por V. L. Ginzburg e L. D. Landau em 1950[4], que buscava explicar a supercondutividade de um ponto de vista da teoria de transições de fase de segunda ordem.

A contribuição destes estudos de Ginzburg e Landau para a teoria das transições de fase é sem precedentes. Hoje em dia, uma teoria que queira descrever algum fenômeno com quebra de simetria necessariamente deve-se basear nos trabalhos de Landau. Por essa razão, devemos definir alguns conceitos de transições de fase que nos ajudarão a entender por completo esta teoria de Landau da supercondutividade. Deve ser observado aqui que Ginzburg fez algumas correções a esta teoria e por isso ela leva o nome hoje de teoria de Ginzburg-Landau (GL).

A idéia da teoria GL é simples: a expansão da expressão da energia livre de um supercondutor em termos do parâmetro de ordem, responsável por identificar a transição de fase, em potências pares (cuja razão será mostrada mais tarde). Fazendo isso, Landau conseguiu rederivar a famosa equação de campo médio. Para compreendermos bem a teoria supercondutora GL, optamos por definir o que são transições de fase de segunda ordem, e aplicá-las a um caso mais simples do magnetismo, a transição para/ferromagnética.

Um sistema termodinâmico pode existir em um número de fases diferentes cujos comportamentos macroscópicos podem diferir drasticamente. Em geral, sistemas tornam-se mais ordenados quando reduzimos sua temperatura, desde que as forças de coesão começam a se sobrepôr em relação ao movimento térmico e os átomos podem se rearranjar em estados mais ordenados.

Dividimos as transições de fase em dois tipos de acordo com o comportamento das derivadas da energia livre de Gibbs. Identificamos uma transição de fase de primeira ordem quando ocorre alguma mudança descontínua de estado (derivadas primeiras da energia livre de Gibbs em relação a temperatura). Temos uma transição de fase de segunda ordem quando



ocorre uma mudança contínua de estado do sistema (primeira derivada da energia livre de Gibbs em relação à temperatura é analítica, mas a derivada segunda é descontínua). Costumamos chamar as transições de fase de segunda ordem de *transições de fase contínuas*. Segundo a termodinâmica das transições de fase este comportamento se manifesta nas funções resposta do sistema, como o calor específico no caso de fluidos ou com a magnetização no caso de magnetos.

Existem inúmeros exemplos destes dois tipos de transição de fase, desde a transição líquido-vapor d'água (transição de primeira ordem) até a transição de fase normal/supercondutora em metais (cujo comportamento mostra as duas transições de fase, o que torna a teoria supercondutora fascinante).

A maior parte das transições de fase associam a elas um ponto crítico (a transição líquido-sólido não, por exemplo). Existe alguma temperatura bem definida acima da qual uma determinada fase existe, e quando reduzimos a temperatura, uma nova fase surge. Quando uma nova fase aparece, ela possui propriedades de simetria diferentes e uma nova variável termodinâmica, o parâmetro de ordem, surge para caracterizar a nova fase. Para transições de fase de primeira ordem não precisa existir uma conexão entre as simetrias da fase à alta temperatura e a fase à baixa temperatura. Para transições de fase contínuas, sempre existe uma conexão bem definida entre as propriedades de simetria das duas fases.

A teoria de Landau-Ginzburg é inteiramente baseada na teoria geral de quebra de simetria em transições de fase contínuas. Ela envolve uma expansão analítica da energia livre em termos do parâmetro de ordem, que no caso do magnetismo é a magnetização  $\vec{M}$  do sistema.

Neste capítulo discutiremos a transição de fase paramagnética/ferromagnética à luz do modelo de Lenz-Ising para materiais magnéticos. Definiremos o chamado comprimento de correlação  $\xi(T)$  e chegaremos à equação de campo médio, cuja estrutura nos trará motivações fundamentais para escrevermos a Hamiltoniana de Landau-Ginzburg. Este modelo do magnetismo servirá como base para compreendermos o modelo de Landau-Ginzburg da supercondutividade. A diferença crucial entre esses dois modelos consiste na simetria de gauge que existe em cada um deles; no magnetismo temos uma simetria do tipo discreta  $\varphi \rightarrow -\varphi$  enquanto que na supercondutividade, devido ao parâmetro de ordem ser complexo, ao contrário do magnetismo, temos uma simetria do tipo  $\varphi \rightarrow |\varphi|e^{i\theta}$ . Isso gera algumas consequências extremamente importantes para a compreensão dos defeitos topológicos, o que será visto no capítulo 2.

### 1.1 O modelo de Lenz-Ising unidimensional

A transição de fase paramagnética/ferromagnética sempre foi um fenômeno curioso na física. O fenômeno ferromagnético foi estudado por Pierre Curie (1859-1906) e nunca deixou de trazer novas consequências e implicações físicas importantíssimas. Uma dessas questões



Figura 1.1: Vizinhos próximos (bolas brancas) do spin  $i$  (bola preta) em uma cadeia linear.

é a quebra de simetria proporcionada pela magnetização de um material com propriedades magnéticas.

Suponha uma cadeia de spins linear. Sabemos que, a altas temperaturas, os spins deverão estar todos desalinhados e sem nenhuma direção privilegiada para orientação. Mas se resolvermos ir diminuindo a temperatura aos poucos e observarmos o comportamento destes spins seríamos tentados a pensar que eles tenderiam a se alinhar cada vez mais, devido a configuração de energia mínima do sistema (todos alinhados). Quando começa a aparecer uma magnetização “líquida” no sistema, dizemos que ele sofreu uma transição de fase do estado paramagnético para o estado ferromagnético. Esse fenômeno de alinhamento que ocorre com os spins também é conhecido como *quebra espontânea de simetria* (o que antes estava orientado isotropicamente, fica alinhado em uma única direção).

Visando estudar as propriedades deste tipo de materiais, Ernst Ising (1900-1998), físico alemão, sob a orientação de Wilhelm Lenz (1888-1957) também alemão, trabalhou com um modelo de ferromagnetismo idealizado por Lenz desde 1920[17]. Seus estudos sobre este modelo começaram no ano de 1922 e culminaram na apresentação de sua tese de doutorado[18] no ano de 1925, onde mostrou seus resultados. O modelo proposto por Lenz e estudado por Ising é chamado hoje de *modelo de Lenz-Ising*, embora a maior parte dos pesquisadores omitam até hoje o nome do idealizador deste modelo.

Este modelo se baseava em duas simplificações. A primeira delas considerava uma cadeia de spins que possuíam apenas dois graus de liberdade possíveis (duas direções de orientação); spin “up” e spin “down”, cuja notação tradicional e adotada a partir de agora será  $+1$  e  $-1$ , respectivamente.

A segunda simplificação consistia em considerar que as interações entre os spins eram de curto alcance, ou seja, apenas vizinhos próximos a um determinado spin da rede podem interagir com este spin (ver figuras 1.1 e 1.2).

Com essas considerações, escrevemos a hamiltoniana  $H$  para o modelo de Lenz-Ising como:

$$H_{\text{Lenz-Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j, \quad (1.1)$$

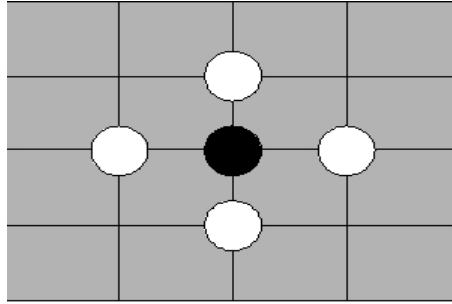


Figura 1.2: Vizinhos próximos (bolas brancas) do spin  $i$  (bola preta) em uma cadeia bidimensional.

com  $S_i = \pm 1$ ,  $J$  uma constante de acoplamento entre os spins e  $\langle i, j \rangle$  representa a interação apenas entre os vizinhos próximos. Com esta hamiltoniana podemos escrever a função de partição

$$Z_{\text{Lenz-Ising}} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} e^{+J/k_B T \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j}, \quad (1.2)$$

ou numa notação mais compacta e conveniente

$$Z_{\text{Lenz-Ising}} = \sum_{[S_i]} e^{+J/k_B T \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j}, \quad (1.3)$$

onde representamos todos os somatórios por um único a fim de melhorar a notação.

Devemos enfatizar o fato de que não especificamos o tipo de geometria disposta para a organização dos sítios de spins. Ela pode ser uma rede cúbica, quadrada ou linear (na verdade ela pode ter qualquer forma poligonal de arranjo). Nos estudos de Ising, ele se deteve na configuração de rede linear, tema da próxima seção, onde faremos os cálculos do modelo sem a presença de um campo magnético externo  $B$ .

## 1.2 Solução do modelo de Lenz-Ising unidimensional

Se observarmos novamente a figura 1.1, veremos que no caso de cadeia linear, um determinado spin só possui interação com seus dois vizinhos e nenhum mais pela simplificação mencionada acima. A hamiltoniana ganha uma forma mais simples,

$$H_{\text{Lenz-Ising}} = -J \sum_{l=1}^{N-1} S_l S_{l+1}, \quad (1.4)$$

e a função de partição fica

$$Z_{\text{Lenz-Ising}} = \sum_{[S_i]} e^{-(H_{\text{Lenz-Ising}})/k_B T} = \sum_{[S_i]} \prod_{l=1}^{N-1} e^{K S_l S_{l+1}}, \quad (1.5)$$

onde definimos  $K = J/k_B T$ , com  $k_B$  sendo a constante de Boltzmann.

Abrindo a expressão acima, teremos  $N$  vezes o fator  $e^K + e^{-K}$  e então teremos uma função de partição do tipo

$$Z_{L-I} = 2^N [\cosh(K)]^N. \quad (1.6)$$

Tendo a função de partição em mãos, podemos dizer que resolvemos o modelo de Lenz-Ising exatamente (analiticamente). Através dela podemos determinar a energia livre de Helmholtz, que nos dirá se o sistema apresenta ou não uma transição de fase. Calculamos a energia livre no limite termodinâmico:

$$\begin{aligned} f &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} F = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( -\frac{kT}{N} \ln Z \right) \\ &= -kT \ln \left( 2 \cosh \left[ \frac{J}{kT} \right] \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Vemos que  $f$  é uma função analítica de  $T$ , exceto em  $T = 0$ . Isso nos mostra que o modelo de Lenz-Ising não possui transição de fase em uma dimensão. Analisando sistemas unidimensionais, Peierls[19] conseguiu generalizar este resultado para o seguinte teorema:

*”Na ausência de interações a longo alcance, nenhum sistema unidimensional pode apresentar uma transição de fase.”*

Através da função de partição podemos ainda determinar a função de correlação que descreve o comportamento de interações do sistema. A função de correlação dos spins é definida por

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z_{L-I}} \sum_{[S_i]} S_i S_j e^{-H_{L-I}/k_B T}. \quad (1.8)$$

Para temperaturas elevadas, esperamos que a correlação entre os spins decaia com a distância entre eles. Pode-se mostrar que a função de correlação entre dois spins  $S_i$  e  $S_j$  possui uma dependência da forma

$$\langle S_i S_j \rangle \approx e^{-r_{ij}/\xi}, \quad (1.9)$$

onde  $\xi$  é chamado de comprimento de correlação e  $r_{ij}$  representa a distância entre os dois spins  $i$  e  $j$ . A forma explícita do comprimento de correlação é

$$\xi = \frac{a}{|\ln(\tanh K)|}, \quad (1.10)$$

onde  $a$  é o espaçamento de rede.

Para sistemas de dimensões maiores ( $D \geq 2$ ), próximo à temperatura crítica, a função correlação possui um comportamento de interação à distância entre os spins dada por

$$\langle S_i S_j \rangle \simeq |\mathbf{r}|^{-(d-2+\eta)}, \quad (1.11)$$

onde  $d$  é a dimensionalidade do parâmetro de ordem e  $\eta$  é o que chamamos de dimensão anômala.

### 1.3 A aproximação de campo médio e a transição para/ferromagnética

A aproximação de campo médio permite que tenhamos uma solução aproximada do modelo de Lenz-Ising sob a aplicação de um campo magnético e foi proposta por Weiss no ano de 1907[20] (devemos frisar que anteriormente obtivemos a solução exata de Lenz-Ising unidimensional, mas sem a presença de campos magnéticos externos). A abordagem dada aqui será a mais simples. Existem abordagens mais sofisticadas sobre o método de campo médio que não abordaremos aqui.

O método de campo médio se baseia na possibilidade de assumir que existe uma interação média de um spin com todos os outros spins vizinhos a ele na rede. Em outras palavras, significa que a energia deste spin é afetada apenas pela interação média dos spins vizinhos restantes. Hoje em dia sabemos que esta aproximação não é a melhor porque supõe que os spins distantes interagem da mesma forma que os spins vizinhos ao spin considerado na rede.

Dito isto, podemos escrever a hamiltoniana para o modelo de Lenz-Ising sujeita a uma interação magnética como

$$H_{L-I} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \mu B \sum_i S_i, \quad (1.12)$$

justamente porque tomamos o campo magnético numa direção específica, alinhado com o momento magnético dos spins. Se quisermos a energia do  $i$ -ésimo spin, devemos tomar na equação acima o valor médio de interação dos  $j$ -ésimos spins (estes spins são os vizinhos próximos ao spin  $i$ ) com o spin  $i$ . Assim, obtemos

$$E_i = -JS_i \sum_j \langle S_j \rangle - \mu B S_i. \quad (1.13)$$

Mas podemos dizer que o somatório da média dos spins corresponde à magnetização do sistema. Assim, temos duas possibilidades de energia devido aos casos  $S_i = +1$  e  $S_i = -1$  que serão dadas por:

$$E_i^+ = -J \sum_j \langle S_j \rangle - \mu B = -qJM - \mu B, \quad (1.14)$$

$$E_i^- = J \sum_j \langle S_j \rangle + \mu B = qJM + \mu B, \quad (1.15)$$

onde  $q$  é o número de vizinhos próximos ao spin  $i$  (o que depende unicamente da configuração de rede, ou seja, se é quadrada, triangular, cúbica e etc). Realizando o cálculo “clássico” da média  $\langle S_i \rangle$ , obtemos o seguinte resultado

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z_{L-1}} \sum_{[S_i]} S_i e^{-(H_{L-1})/k_B T} = \tanh \left( \frac{qJM + \mu B}{k_B T} \right). \quad (1.16)$$

Mas  $\langle S_i \rangle = M$  e obtemos imediatamente uma equação auto consistente dada por:

$$M = \tanh \left( \frac{qJM + \mu B}{k_B T} \right), \quad (1.17)$$

ou que ainda pode ser escrita na forma

$$\tanh^{-1} M = \frac{qJ}{k_B T} M + \frac{\mu B}{k_B T}. \quad (1.18)$$

Esta equação é muito famosa e conhecida como a equação básica de aproximação de campo médio. Ela é uma equação transcendental da magnetização  $M$  e portanto apenas

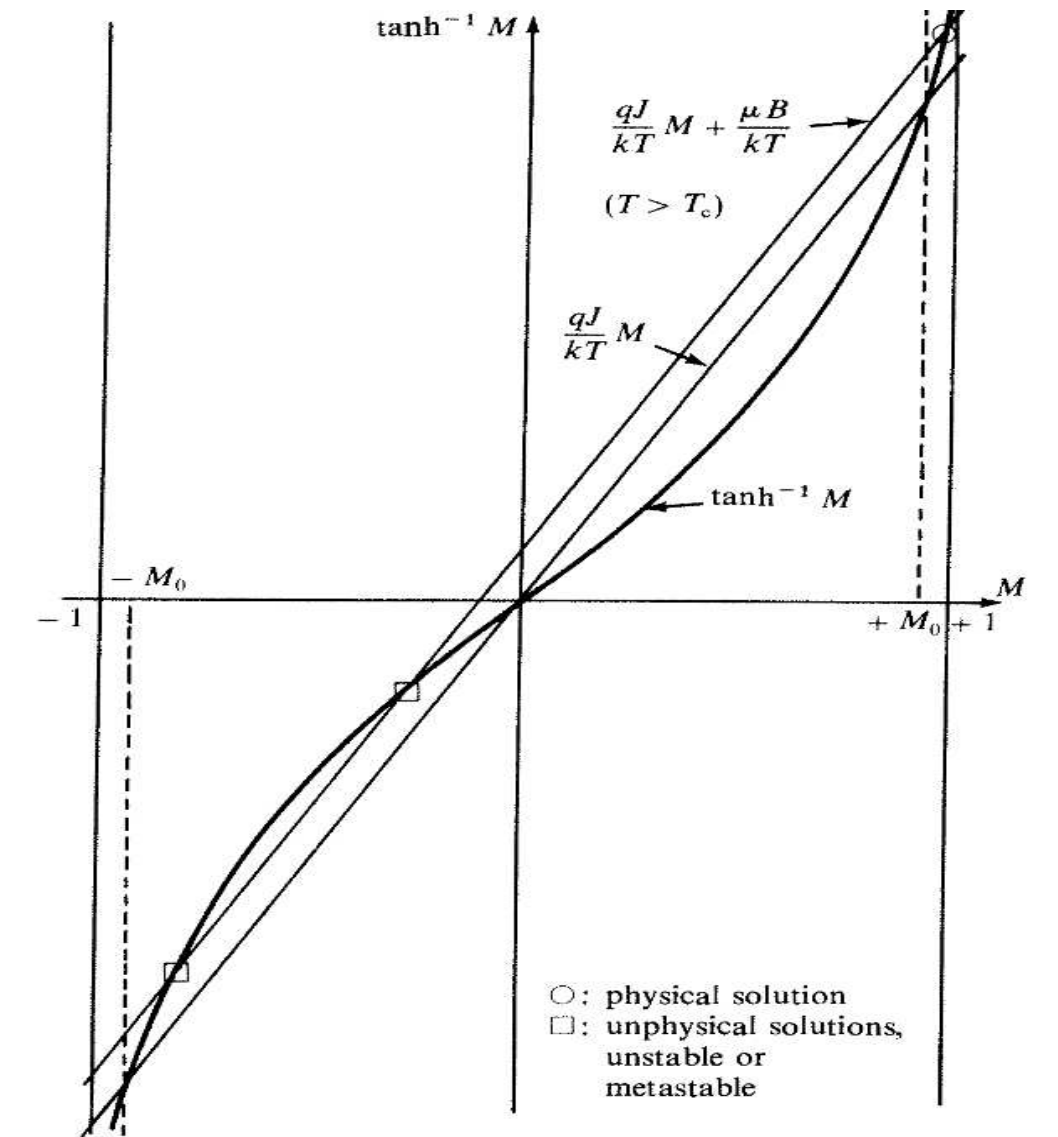


Figura 1.3: Solução gráfica da equação de campo médio. LE BELLAC, Michel, 1991.

soluções numéricas da mesma podem ser obtidas. Mas, ao invés de resolvermos exatamente essa equação, tentamos estudá-la do ponto de vista qualitativo.

Sabemos que a solução da equação de campo médio é obtida quando calculamos os pontos de interseção entre a reta  $(qJ/k_B T)M + \mu B/k_B T$  com a curva  $\tanh^{-1} M$ . O gráfico acima representa estas interseções entre as curvas (ver figura 1.3).

Pelo gráfico, vemos que para  $qJ/k_B T > 1$  (baixas temperaturas) ocorre um valor positivo para  $M_0 \neq 0$  quando  $B \rightarrow 0^+$  (ou  $-M_0$  para  $B \rightarrow 0^-$ ). Para  $qJ/k_B T < 1$  (altas temperaturas), quando  $B \rightarrow 0^+$  ou  $B \rightarrow 0^-$ , a magnetização será  $M_0 = 0$ . Acabamos de nos deparar com o fenômeno de quebra espontânea de simetria: as duas orientações de spin são equivalentes, mas em baixas temperaturas a magnetização espontânea escolhe uma ou outra orientação. Uma mudança infinitesimal no campo  $B$  é suficiente para produzir  $-M_0$  ao invés de  $+M_0$ .

Das análises acima, podemos sumarizar que a aproximação de campo médio prevê uma magnetização não-nula se  $T < T_C = qJ/k_B$  e uma magnetização espontânea nula se  $T > T_C$ . Logo definimos a temperatura crítica de transição de fase como:

$$T_C = \frac{qJ}{k_B}. \quad (1.19)$$

Este comportamento da magnetização é chamado de transição para/ferromagnética. Podemos ir um pouco mais a fundo e tentarmos analisar o comportamento da magnetização perto da transição de fase. Sob estas condições, a magnetização é fraca ( $M \ll 1$ ) e nós expandimos a tangente hiperbólica em série de Taylor:

$$\tanh^{-1} M = M + \frac{1}{3}M^3 + O(M^5). \quad (1.20)$$

Assim, definindo uma temperatura que chamamos de *temperatura reduzida*  $t = \frac{T-T_C}{T_C}$ , podemos reescrever a equação de campo médio como

$$M \simeq (1+t)(M + \frac{1}{3}M^3). \quad (1.21)$$

Logo, conseguimos determinar a dependência da magnetização como sendo

$$M_0 \simeq \sqrt{-3t}, \quad (1.22)$$

e, portanto,

$$M_0 \sim (T_C - T)^{1/2}. \quad (1.23)$$

Estes resultados encontrados para a aproximação da equação de campo médio são a fonte da intuição física empregada por Landau em sua teoria fenomenológica sobre a transição de fase para/ferromagnética. Deles extraímos a idéia chave da teoria de Ginzburg-Landau que será apresentada nas próximas seções com muito mais detalhes.

#### 1.4 A teoria fenomenológica de Ginzburg-Landau

Vimos na seção anterior a equação de campo médio e uma de suas aproximações tomadas. Fizemos esta aproximação a campo magnético nulo ou muito pequeno porque estávamos próximos



à temperatura crítica do sistema (na transição de fase).

Com essas considerações reescrevemos a equação de campo médio como:

$$\frac{\mu B}{k_B T} = M \left( \frac{T - T_c}{T} \right) + \frac{1}{3} M^3. \quad (1.24)$$

A idéia de Landau é simples. Ela consiste em escrever um hamiltoniano que possa reproduzir através de uma função de partição a tão famosa equação de campo médio que conserve as suas características. As duas características fundamentais da estrutura da equação de campo médio podem ser resumidas a

- i. O coeficiente de  $M$  é maior que zero para  $T > T_c$  e menor que zero para  $T < T_c$ ;
- ii. O coeficiente de  $M^3$  é positivo.

Impomos um hamiltoniano  $H(\varphi)$  onde  $\langle \varphi \rangle = M$  é uma variável aleatória assumindo valores reais. Devemos notar que este modelo proposto deve apresentar as mesmas simetrias e propriedades do modelo de Lenz-Ising usado para explicar e derivar a equação de campo médio. Assim, a simetria  $S_i \rightarrow -S_i$  na ausência de campo externo sem alterar o hamiltoniano, deve continuar sendo verificada (logo,  $H(\varphi) = H(-\varphi)$ ). Com isso podemos afirmar que nosso Hamiltoniano deve ser de potência par; além disso, devemos ter uma expansão em potências de  $\langle \varphi \rangle = M$  de ordens pares. Escrevemos um hamiltoniano então, da forma

$$H(\varphi) = \frac{1}{2!} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4, \quad (1.25)$$

e, como tínhamos visto antes, as constantes  $r_0$  e  $u_0$  obedecem algumas características. A constante  $u_0$  deve ser sempre positiva (isto está intimamente relacionado com a estabilidade do vácuo quântico que qualquer teoria deve possuir). Já a constante  $r_0$  pode ser tanto positiva quanto negativa; quando positiva ela gera um único mínimo no potencial; quando negativa, gera dois mínimos (vácuo degenerado) possibilitando uma quebra de simetria, peça-chave para a transição de fase.

Como fizemos antes, podemos colocar uma interação dos campos com alguma fonte externa do tipo  $-B\varphi$ . Com isso, podemos escrever a função de partição do sistema como

$$Z = \int d\varphi e^{-H(\varphi) + B\varphi}. \quad (1.26)$$

Omitimos o fator  $1/k_B T$  porque estamos perto do ponto crítico e neste ponto prevalece a temperatura  $T_c$  que pode ser tratada de forma constante. Vemos que  $H(\varphi) - B\varphi$  tem um mínimo absoluto no ponto  $\varphi = \varphi_0$  que satisfaz a condição

$$H'(\varphi_0) = B, \quad (1.27)$$

e então a exponencial tem um máximo em  $\varphi = \varphi_0$ . A aproximação de Landau consiste em trocar a integral da função de partição pelo valor de seu integrando em  $\varphi = \varphi_0$ :

$$Z \approx e^{-H(\varphi_0) - B\varphi_0}. \quad (1.28)$$

Uma melhor explicação desta aproximação utilizada por Landau é bem simples. A integral nada mais é que a soma sobre todos os valores do campo  $\varphi$ . Como o mínimo absoluto do Hamiltoniano faz com que a exponencial seja máxima nesse ponto, assumimos que a influência dos outros pontos e dos outros mínimos que não sejam absolutos seja desprezível. Uma observação deve ser feita para o caso  $r_0 < 0$  e  $B$  pequeno; neste caso temos dois mínimos absolutos e os dois contribuem significativamente para o resultado da integral da função de partição. Preferimos deixar esse caso para responder um pouco mais à frente e continuar com esses cálculos porque eles ajudam muito didaticamente o leitor. Mais tarde retornaremos a este problema.

A energia livre de Helmholtz fica então

$$F = \ln Z = -H(\varphi_0) + B\varphi_0. \quad (1.29)$$

Já que  $\langle \varphi \rangle = M \approx \varphi_0$ , temos que

$$M = \frac{\partial F}{\partial B} = -H'(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} + \varphi_0 + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} = \varphi_0. \quad (1.30)$$

Com essas grandezas termodinâmicas, podemos determinar a energia livre de Gibbs

$$G = MB - F = \varphi_0 B + H(\varphi_0) - B\varphi_0 = H(M), \quad (1.31)$$

que então, é dada por

$$G(M) = \frac{1}{2!} r_0 M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4. \quad (1.32)$$

Logo, obtemos o campo magnético como sendo

$$B = \frac{\partial G}{\partial M} = r_0 M + \frac{1}{3!} u_0 M^3. \quad (1.33)$$

Podemos ver que a equação acima possui as mesmas propriedades requeridas para a equação de campo médio. A constante  $r_0$  deve respeitar a seguinte propriedade:

$$r_0 = \bar{r}_0(T - T_c), \quad (1.34)$$

ou seja, deve depender da temperatura crítica de transição de fase do sistema. Devemos dizer que esta aproximação de Landau consiste portanto em assumir  $\langle \varphi \rangle = \varphi_0$ , o que pode ser melhorado com o critério de Ginzburg, como explicaremos, mas não entraremos em detalhes, nas seções seguintes.

Podemos generalizar estes resultados para  $N$  sítios, ou seja,  $N$  campos escalares  $\varphi_i$  que acabam acrescentando uma interação entre os sítios vizinhos resultando num “gradiente discretizado” definido por:

$$\partial_{\vec{\mu}} \varphi(\vec{x}_i) = \frac{1}{a} [\varphi(\vec{x}_i + \vec{\mu}) - \varphi(\vec{x}_i)], \quad (1.35)$$

que, ao quadrado e somado sobre todas as direções possíveis, representa a interação entre os sítios;

$$\sum_{i, \vec{\mu}} \frac{1}{a^2} [\varphi(\vec{x}_i + \vec{\mu}) - \varphi(\vec{x}_i)]^2 = \sum_i [\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}_i)]^2. \quad (1.36)$$

E como antes, tentamos escrever um Hamiltoniano que seja capaz de gerar uma propriedade do tipo  $G(M_i) = H(M_i)$ . Dessa forma, o Hamiltoniano mais apropriado seria:

$$H_{GL}[\varphi_i] = a^D \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi_i^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi_i^4 \right], \quad (1.37)$$

onde a soma sobre  $i$  se estende por todo o número de sítios  $N$ .

Quando introduzimos alguma interação com um campo magnético externo, generalizamos nossa função de partição para

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp(-H[\varphi_i] + \sum_i B_i \varphi_i), \quad (1.38)$$

e o máximo da exponencial ocorre quando

$$B_i = \left. \frac{\partial H}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_i = \varphi_{i0}}. \quad (1.39)$$

Utilizando a aproximação de Landau, encontramos para a energia livre de Helmholtz

$$F = \ln Z \approx -H[\varphi_{i0}] + \sum_i B_i \varphi_{i0}, \quad (1.40)$$

e a magnetização será

$$M_i = \frac{\partial F}{\partial B_i} = - \sum_j \left. \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \right|_{\varphi_{j0}} \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial B_i} + \varphi_{i0} + \sum_j B_j \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial B_i} = \varphi_{i0}. \quad (1.41)$$

o que nos permite chegar à conclusão de que

$$G(M_i) = H(M_i). \quad (1.42)$$

O nosso próximo passo será apresentar a formulação contínua da teoria de Landau, visando chegar aos pilares da notação e do formalismo de teoria quântica de campos. Mas antes de prosseguirmos devemos retornar ao problema mencionado para o caso  $r_0 < 0$  e  $B$  pequeno de dois mínimos absolutos que contribuía igualmente para a integral da função de partição quando aplicamos a aproximação de Landau.

Na verdade, este assunto demandaria no mínimo mais uma seção inteira de explicação. Tentaremos esclarecer os pontos principais aqui e o leitor que estiver mais interessado neste problema poderá procurar algumas referências que estarão listadas no fim deste trabalho.

Quando possuímos dois ou mais mínimos no potencial, podendo ser tanto absolutos ou relativos, devemos tomar apenas a parte “convexa” do potencial como mostram as figuras 1.4 e 1.5.

Esta aproximação por potencial convexo possui raízes sólidas na mecânica estatística com o que chamamos de *construção de Maxwell*. Devido ao critério de estabilidade termodinâmico a energia livre de Helmholtz deve ser uma função convexa globalmente. A construção de Maxwell elimina o trecho onde a energia livre de Helmholtz fica côncava, tornando-a convexa e portanto devolvendo-lhe a estabilidade termodinâmica do sistema. Para maiores detalhes do assunto, ver o livro de Stanley [21].

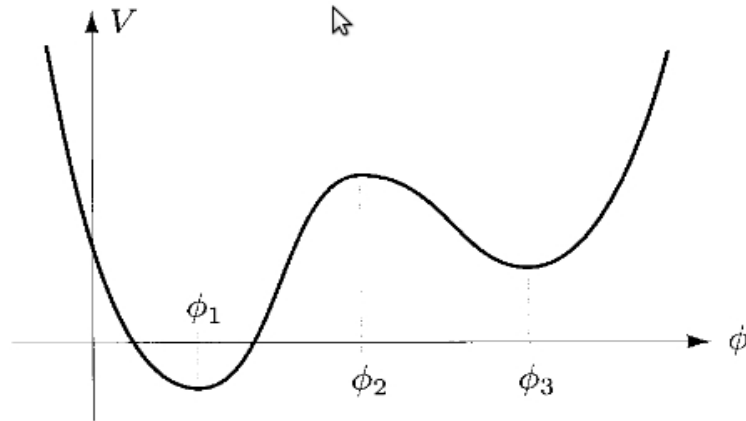


Figura 1.4: O estado de vácuo verdadeiro é correspondente a  $\phi_1$ . O estado  $\phi_2$  é instável. O estado  $\phi_3$  é metaestável, mas pode decair no  $\phi_1$  por tunelamento quântico. PESKIN, M;SCHROEDER, D. 1995.

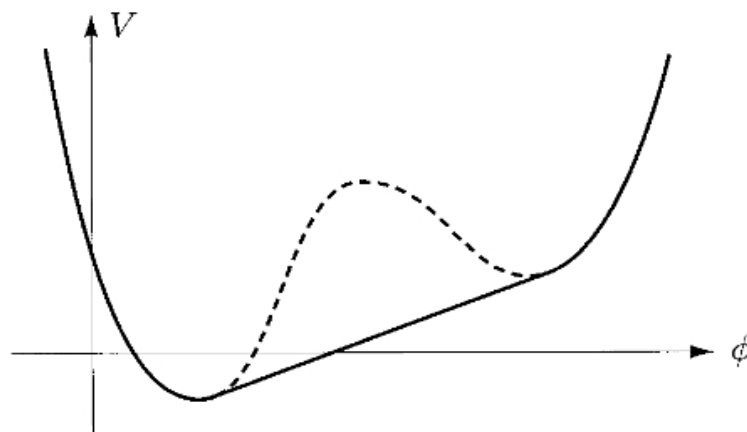


Figura 1.5: Traçamos uma linha reta entre os dois mínimos e tomamos um valor médio do potencial entre  $\phi_1$  e  $\phi_3$ . PESKIN, M;SCHROEDER, D. 1995.

### 1.4.1 A formulação contínua da teoria de Landau

Quando estamos trabalhando no formalismo de espaço-tempo discretizado, perdemos muito tempo nas contas e com isso precisamos criar uma forma de agilizar este processo. Um procedimento adotado consiste em uma formulação contínua do problema. Adotando esse formalismo, algumas coisas precisam ser verificadas e alteradas, como por exemplo,

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}, \quad (1.43)$$

e ainda

$$\varphi(\vec{x}_i) \rightarrow \varphi(\vec{x}). \quad (1.44)$$

Neste limite contínuo, o hamiltoniano de Ginzburg-Landau torna-se

$$H_{GL} = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 \right], \quad (1.45)$$

onde tomamos o limite contínuo daquele “gradiente discretizado” que tínhamos definido anteriormente e transformamos o somatório em uma integral. Assim, a função de partição passa a ser escrita como

$$Z = \int \lim_{a \rightarrow 0} N(a) \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp \left( - \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 - B\varphi \right] \right). \quad (1.46)$$

Definimos por simplicidade de notação a quantidade

$$\mathcal{D}\varphi(x) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} N(a) \prod_{i=1}^N d\varphi_i. \quad (1.47)$$

escrevemos

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left( - \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0 \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 - B\varphi \right] \right), \quad (1.48)$$

onde o fator  $N(a)$  garante que o limite de  $a \rightarrow 0$  exista (pelo menos em casos mais simples).

Isto é o que chamamos de integral de Feynmann em teoria de campos. Ela representa uma

soma sobre todas as configurações possíveis do campo  $\varphi(x)$ , sendo que a maior contribuição vem da aproximação clássica de Landau. As flutuações em torno desta aproximação serão conhecidas como correções de Ginzburg (não entraremos em maiores detalhes sobre estas correções, mas a idéia principal consiste em realizar um pequeno desvio do valor do ponto crítico e expandir a exponencial da função de partição em torno deste pequeno desvio).

Pode-se mostrar, realizando a mesma sequência de passos anteriores, que o funcional de Gibbs pode ser escrito como antes (mas na notação contínua)

$$G(M) = \int d^D x \left( \frac{1}{2} (\vec{\nabla} M)^2 + \frac{1}{2} r_0 M^2 + \frac{1}{4!} u_0 M^4 \right). \quad (1.49)$$

Como sabemos, uma teoria física demonstra os seus aspectos e comportamentos quando nos fornece uma função de correlação ou o que também chamamos em teoria quântica de campos de *função de Green*. Através da função de Green podemos determinar o comportamento e a evolução do sistema de maneira eficaz.

A função de correlação é definida por

$$G(x, y) = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B(x) \partial B(y)} = \frac{\partial M(x)}{\partial B(y)}. \quad (1.50)$$

Sabemos que

$$B(x) = \frac{\partial G}{\partial M(x)} = -\vec{\nabla}^2 M(x) + r_0(T) M(x) + \frac{u_0}{6} M^3(x). \quad (1.51)$$

Diferenciando em respeito a  $B(y)$  a expressão acima, obtemos

$$\left[ -\vec{\nabla}_x^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2(x) \right] G(x, y) = \delta(x - y). \quad (1.52)$$

Se temos a aplicação de um campo  $B$  uniforme, possuímos invariância de translação e tomando a transformada de Fourier da equação acima, obtemos

$$\left( \vec{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2} u_0 M^2 \right) \tilde{G}(\vec{q}) = 1, \quad (1.53)$$

ou ainda

$$\tilde{G}(\vec{q}) = \frac{1}{\vec{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2}u_0M^2}, \quad (1.54)$$

o que no espaço de configurações produz

$$G(x) = \int \frac{d^D\vec{q}}{(2\pi)^D} \frac{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{\vec{q}^2 + r_0(T) + \frac{1}{2}u_0M^2}. \quad (1.55)$$

Agora temos duas situações; a primeira corresponde a  $T > T_0$ , onde  $M = 0$ ; a segunda corresponde a  $T < T_0$ , e com isso  $M^2 = -6r_0/u_0$  (mínimo do potencial).

Na primeira obtemos:

$$\tilde{G}(\vec{q}) = \frac{1}{\vec{q}^2 + \bar{r}_0(T - T_0)} = \frac{1}{\vec{q}^2 \left(1 + \frac{\bar{r}_0(T - T_0)}{\vec{q}^2}\right)}. \quad (1.56)$$

Sabemos, da teoria das transições de fase, que uma análise puramente qualitativa da função correlação próxima ao ponto crítico nos produz a seguinte dependência:

$$G(\vec{r}) = \frac{g(\vec{r}/\xi)}{r^{D+\eta-2}}, \quad (1.57)$$

e que, quando  $r \rightarrow \infty$ , a função  $g(\vec{r}/\xi)$  varia exponencialmente como

$$g(\vec{r}/\xi) \approx \exp(-\vec{r}/\xi), \quad (1.58)$$

onde o comprimento de correlação possui uma dependência do tipo:

$$\xi \sim |T - T_C|^{-\nu} \sim |t|^{-\nu}. \quad (1.59)$$

Identificamos aqui dois expoentes críticos: os expoentes  $\eta$  e  $\nu$ . Com essas definições, extraímos da função correlação  $G(\vec{q})$  os expoentes críticos  $\eta = 0$  e  $\nu = 1/2$  (onde  $\xi = [\bar{r}_0(T - T_C)]^{-1/2}$ ). A dependência do comprimento de correlação com a temperatura será extremamente relevante para os cálculos do capítulo 3 onde seremos capazes de mostrar que o comprimento de correlação do nosso modelo reproduz exatamente a dependência com a temperatura apresentada aqui.

Na segunda situação obtemos



$$\tilde{G}(\vec{q}) = \frac{1}{\vec{q}^2 + 2\bar{r}_0(T_0 - T)}. \quad (1.60)$$

E os expoentes críticos continuam sendo os mesmos! Dizemos então que o modelo de Ginzburg-Landau está na mesma classe de universalidade que o modelo de Lenz-Ising unidimensional estudado nas seções anteriores (os expoentes críticos dos dois modelos são os mesmos). Agora estamos prontos para justificar a forma da hamiltoniana do modelo GL da supercondutividade nos baseando nos resultados apresentados para o magnetismo e na equação de campo médio.

Antes, podemos determinar a função de correlação no espaço de configuração, ou seja, em função das coordenadas, e vemos que sua dependência será [16]

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-r/\xi}. \quad (1.61)$$

Esse resultado será muito importante no capítulo 3 quando mostrarmos um caso limite do nosso modelo para a supercondutividade.

## 1.5 O modelo supercondutor de Ginzburg-Landau

Assim como na transição para/ferromagnética, um supercondutor sofre uma transição de fase normal/supercondutora. Toda a teoria que estudamos nas seções anteriores sobre transições de fase de segunda ordem pode ser reaproveitada neste caso. A única diferença, que se torna crucial na separação das características do magnetismo com as da supercondutividade, é a simetria presente na energia livre de Gibbs (hamiltoniana).

Supercondutores são compostos por elétrons fortemente correlacionados. Uma das principais afirmações da teoria BCS é que a interação elétron-fônon pode produzir, sob determinadas condições, uma interação atrativa entre elétrons ao invés da repulsão coulombiana. Este comportamento foi sugerido primeiramente por Fröhlich em 1950 [22]. Esta característica peculiar da teoria BCS mostra que o parâmetro de ordem da teoria GL nada mais é do que uma espécie de função de onda efetiva da ligação formada entre os dois elétrons, os famosos *pares de Cooper*. Por ser uma função de onda, o parâmetro de ordem deve ser um campo escalar indicando que a interação fortemente correlacionada entre os elétrons nos permite descrevê-los como bósons. Um ramo muito interessante da matéria condensada atual é a bosonização fermiônica que trata justamente desta similaridade entre férmions e bósons nas teorias de supercondutividade e de superfluidez.

Em uma teoria de campos que queira acoplar com a matéria bosônica algum tipo de carga, consideramos campos escalares, porém complexos (uma espécie de campo de Klein-

Gordon generalizado). A estrutura do Hamiltoniano da equação (1.45) será alterada para (em 3 dimensões):

$$H_{GL} = \int d^3x \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2!} r_0(T) |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{4!} u_0 |\varphi(\vec{r})|^4 \right], \quad (1.62)$$

onde o novo parâmetro  $m$  determina o custo de energia associado com o gradiente em  $\varphi(\vec{r})$ . Ele possui dimensões de massa e tem o papel importante de uma massa efetiva para o sistema quântico com uma função de onda macroscópica  $\varphi(\vec{r})$ .

Em termos da energia livre de Gibbs, podemos escrever

$$F_S(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \vec{\varphi}(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2!} r_0(T) |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{4!} u_0 |\varphi(\vec{r})|^4 \right) d^3r. \quad (1.63)$$

onde  $F(S)$  e  $F(n)$  representam as energias livres do sistema nos estados supercondutor e normal, respectivamente.

Escolhemos as 3 dimensões agora por dois motivos: é uma excelente forma de introduzirmos noções de dimensão de campos, gradientes e constantes; o segundo motivo, mais importante e fundamental, é que no capítulo 3 usaremos amplamente a teoria GL bidimensional (2+1-D) quando estudarmos o nosso modelo proposto para supercondutores bidimensionais.

Explicitando os campos  $\varphi(\vec{r})$  e  $\varphi^*(\vec{r})$  na energia livre acima, ficamos com

$$\begin{aligned} F_S(T) = F_n(T) + \int & \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \varphi^*(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2!} r_0(T) \varphi^*(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{4!} u_0 (\varphi^*(\vec{r}))^2 (\varphi(\vec{r}))^2 \right) d^3r, \end{aligned} \quad (1.64)$$

e, tomando as duas equações de Euler-Lagrange da expressão acima, que são dadas por

$$\frac{\partial F_S[\varphi(\vec{r})]}{\partial \varphi(\vec{r})} = 0; \quad \frac{\partial F_S[\varphi(\vec{r})]}{\partial \varphi^*(\vec{r})} = 0, \quad (1.65)$$

obtemos

$$\frac{\partial F_S[\varphi(\vec{r})]}{\partial \varphi^*(\vec{r})} = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{3!} u_0 \varphi(\vec{r}) |\varphi(\vec{r})|^2; \quad (1.66)$$

e

$$\frac{\partial F_S[\varphi(\vec{r})]}{\partial \varphi(\vec{r})} = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} r_0(T) \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{3!} u_0 \varphi(\vec{r}) |\varphi(\vec{r})|^2 \right)^*, \quad (1.67)$$

o que nos fornece uma equação tipo-Schrödinger para  $\varphi(\vec{r})$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \left( r_0(T) + \frac{1}{3} u_0 |\varphi(\vec{r})|^2 \right) \varphi(\vec{r}) = 0. \quad (1.68)$$

O segundo termo entre parênteses mostra que esta equação é não-linear. Por causa desta não-linearidade, o princípio da superposição da mecânica quântica não pode ser aplicado, e a normalização de  $\varphi(\vec{r})$  é diferente da usual em mecânica quântica.

Apesar de termos calculado as expressões acima para bosóns carregados, ainda não estamos verdadeiramente estudando um supercondutor. Para completar nosso estudo temos que incluir um último efeito: o de um campo magnético. A adição deste termo torna a teoria da supercondutividade de Ginzburg-Landau completa, com efeito Meissner-Ochsenfeld, equação de London e assim por diante.

Como podemos incluir os efeitos de campos magnéticos na energia livre? Landau e Ginzburg sugeriram que o campo magnético entra como se  $\varphi(\vec{r})$  fosse uma função de onda para partículas carregadas, isto é, com a troca usual em mecânica quântica do operador de momentum linear:

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A}, \quad (1.69)$$

onde  $q$  é a carga e  $\vec{A}$  é o potencial vetor magnético. Para todos os supercondutores conhecidos sabe-se que a carga apropriada de  $q$  é  $-2e$  (não é difícil perceber que isso corresponde a uma carga “efetiva” dos pares de Cooper).

Com esta mudança, a densidade de energia livre de Ginzburg-Landau de um supercondutor torna-se

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right) \varphi(\vec{r}) \right|^2 + \frac{1}{2!} r_0(T) |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{4!} u_0 |\varphi(\vec{r})|^4. \quad (1.70)$$

Devemos integrar esta expressão para obtermos a energia livre total, mas não podemos deixar de incluir um termo adicional correspondente à energia do campo eletromagnético  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  em cada ponto  $\vec{r}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
F_S(T) &= F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right) \varphi(\vec{r}) \right|^2 + \frac{1}{2!} r_0(T) |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{4!} u_0 |\varphi(\vec{r})|^4 \right) d^3r \\
&+ \frac{1}{2\mu_0} \int B^2(\vec{r}) d^3r,
\end{aligned} \tag{1.71}$$

onde a primeira integral é feita sobre o supercondutor e a segunda sobre todo o espaço.

Minimizando a energia livre acima, obtemos novamente uma equação de Schrödinger não-linear, mas agora com um termo contendo o potencial vetor magnético,

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left( \vec{\nabla} + \frac{2ei}{\hbar} \vec{A} \right)^2 \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \left( r_0(T) + \frac{1}{3} u_0 |\varphi(\vec{r})|^2 \right) \varphi(\vec{r}) = 0. \tag{1.72}$$

Podemos encontrar as supercorrentes devidas aos campos magnéticos através de

$$\vec{j}_S(\vec{r}) = -\frac{\delta F_S}{\delta \vec{A}(\vec{r})}, \tag{1.73}$$

o que nos fornece uma supercorrente

$$\vec{j}_S = \frac{-2e\hbar i}{2m} (\varphi^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi^*(\vec{r})) - \frac{(2e)^2}{m} |\varphi(\vec{r})|^2 \vec{A}, \tag{1.74}$$

onde notamos que a presença do último termo é devida unicamente ao potencial vetor  $\vec{A}$ .

### 1.5.1 Simetria de gauge no modelo GL da supercondutividade

Como havíamos dito no início deste capítulo, a principal diferença entre os modelos de Ising e de Ginzburg-Landau supercondutor se encontra na simetria empregada. No modelo de Ising, vimos que se fizermos a mudança discreta  $\varphi(\vec{r}) \rightarrow -\varphi(\vec{r})$ , a Hamiltoniana continuava a mesma. Isto representa uma simetria, porém discreta.

No modelo de Ginzburg-Landau supercondutor o parâmetro de ordem é complexo e por isso ele possui amplitude e uma fase complexa,

$$\varphi(\vec{r}) = |\varphi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})}. \tag{1.75}$$

Se fizermos uma *transformação de gauge* do potencial vetor magnético

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}), \quad (1.76)$$

devemos realizar uma mudança na fase do parâmetro de ordem. Analisando o termo contendo o operador momentum

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e\vec{A}. \quad (1.77)$$

Realizando uma transformação do grupo U(1) no parâmetro de ordem

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \varphi(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (1.78)$$

obtemos

$$\hat{p}\varphi(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})} = e^{i\theta(\vec{r})} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right) \varphi(\vec{r}) + \varphi(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})} \hbar \vec{\nabla} \theta(\vec{r}), \quad (1.79)$$

ou

$$\hat{p}\varphi(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})} = e^{i\theta(\vec{r})} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e \left( \vec{A} + \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta \right) \right) \varphi(\vec{r}). \quad (1.80)$$

Logo, vemos que a energia livre é imutável sob as transformações

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \varphi(\vec{r})e^{i\theta(\vec{r})}; \quad (1.81)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \frac{\hbar}{2e} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}). \quad (1.82)$$

Isto mostra que a teoria de Ginzburg-Landau supercondutora satisfaz *invariância de gauge local*. Tanto a fase do parâmetro de ordem e o potencial vetor magnético dependem da escolha de gauge, mas todos os observáveis físicos tais como a energia livre, o campo magnético  $\vec{B}$  entre outros, são invariantes de gauge.

Do resultado (1.82), podemos escrever uma nova energia livre com os termos de gauge, da forma

$$F_S = F_S^0 + \rho_S \int d^3r \left( \vec{\nabla}\theta(\vec{r}) + \frac{2e}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}) \right), \quad (1.83)$$

onde definimos acima a *rigidez do supercondutor* por

$$\rho_S = \frac{\hbar^2}{2m} |\varphi(\vec{r})|^2, \quad (1.84)$$

e  $F_S^0$  é a energia livre total no estado fundamental ( $\theta = \text{const.}$ ,  $\vec{A} = \vec{0}$ ). A corrente pode ser calculada de uma derivada funcional da energia livre como vimos na sessão anterior:

$$\vec{j}_S(\vec{r}) = -\frac{\delta F_S[\vec{A}]}{\delta \vec{A}(\vec{r})} = -\frac{2e}{\hbar} \rho_S \left( \frac{2e}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}) \right). \quad (1.85)$$

Mas no estado fundamental, onde  $\theta = \text{cte.}$ , encontramos que para valores pequenos do potencial vetor magnético externo, a corrente será

$$\vec{j}_S = -\rho_S \frac{(2e)^2}{\hbar^2} \vec{A}(\vec{r}), \quad (1.86)$$

que é a mesma da equação de London. A “rigidez”  $\rho_S$  é essencialmente a densidade  $n_S$  de elétrons supercondutores na teoria de London (ver apêndice A para maiores detalhes sobre o assunto).

Uma das consequências mais importantes da simetria U(1) será vista no próximo capítulo em detalhes, quando apresentarmos e estudarmos as *linhas de vórtice* em supercondutores.

## 2 DUALIDADE EM TEORIA DE CAMPOS E MATÉRIA CONDENSADA

### Introdução

No capítulo anterior, estudamos sistemas que sofrem transições de fase. Durante as transições de fase, um sistema físico pode gerar alguns objetos que chamamos de *defeitos topológicos*. Eles são produzidos através dos mecanismos de quebra espontânea de simetria e por isso não é uma surpresa que várias transições de fase possam ser compreendidas em termos destes defeitos.

Uma das maiores áreas onde podemos aplicar defeitos topológicos é a matéria condensada. Em baixas temperaturas, existem linhas de fluxo magnético em supercondutores do tipo II, as linhas de vórtice em  $He^4$  superfluido e ainda a estrutura de domínios magnéticos em materiais ferromagnéticos. Defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria que dá surgimento a um conjunto não-trivial de estados fundamentais degenerados, tais como as orientações de dipolos magnéticos discretos em um ferromagneto. Eles aparecem em sistemas de matéria condensada tanto dentro e tanto fora do equilíbrio.

Defeitos topológicos recebem nomes diferentes dependendo da simetria quebrada e da simetria particular em questão. No magnetismo, eles são chamados de “domain walls” (paredes de domínio); em hélio superfluido e modelo XY, são chamados de “vórtices” ; em cristais periódicos, são conhecidos como deslocamentos; e em teorias de campo de gauge não-abelianas são chamados de monopólos. Eles são vistos hoje na física como um novo ramo e acredita-se que eles possam resolver o problema do confinamento de quarks em física de partículas (sendo os monopólos um dos objetos mais relevantes neste caso justamente pelas suas simetrias não-abelianas).

Muitas vezes, num modelo de teoria de campos ou de matéria condensada, os defeitos topológicos que são gerados durante uma transição de fase (uma quebra de simetria) não aparecem de forma explícita na teoria. Uma teoria dual em teoria de campos e em matéria condensada é aquela que consegue tornar estas contribuições dos defeitos topológicos, explícitas na função de partição de forma tal que os observáveis físicos sejam correspondentes (entre a teoria original e a teoria dual).

Neste capítulo começaremos descrevendo o modelo de sine-Gordon visando clarear e definir alguns conceitos em topologia. Depois veremos a teoria de linhas de vórtice em detalhes,

já que ela será essencial daqui por diante. Estudaremos o modelo XY em baixas e em altas temperaturas para podermos apresentar o modelo de Villain, cuja importância é a de estudar um modelo dual em matéria condensada e além disso nos ajudará a entender o nosso próximo capítulo onde propomos um modelo de supercondutividade bidimensional baseado na teoria de Ginzburg-Landau apresentado no capítulo anterior.

## 2.1 Sólitons e vórtices em matéria condensada

### 2.1.1 O modelo de sine-Gordon

O modelo de sine-Gordon é muito simples; basta analisarmos as soluções para a equação

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \sin(b\phi) = 0, \quad (2.1)$$

sendo que esta equação possui soluções estacionárias, mas também equações dinâmicas. Para encontrarmos soluções dinâmicas, tomamos um campo da forma

$$\phi(x, t) = f(x - vt) \equiv f(\xi), \quad (2.2)$$

e é fácil ver que

$$f(\xi) = \frac{4}{b} \tan^{-1} \left\{ \exp \left[ \pm \left( \frac{\gamma}{\sqrt{b}} \right) \xi \right] \right\}, \quad (2.3)$$

é uma solução da equação de sine-Gordon, onde  $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ . A figura 2.1 mostra a forma desta onda.

Ela é uma onda solitária (um sóliton), que se move sem alterar sua forma ou tamanho (mesmo quando se choca com outra onda solitária), e portanto ela não possui dissipação de energia, ao contrário das ondas produzidas quando uma pedra é lançada num lago (estas ondas perdem energia por dissipação, ao passo que os sólitons não).

Claramente vemos que a equação de sine-Gordon possui um número infinito de soluções constantes do tipo (todas com energia nula)

$$\phi = \frac{2\pi n}{b}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$



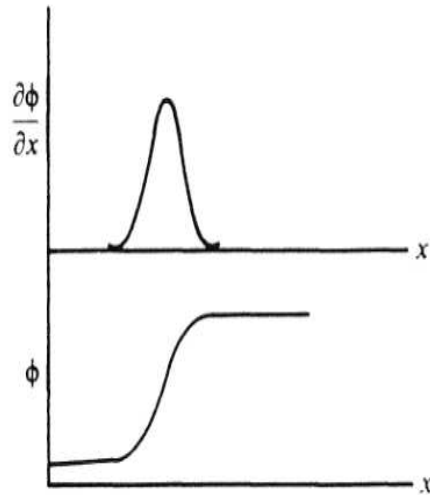


Figura 2.1: Uma onda "solitária"(sóliton). RYDER, Lewis H. 1996.

isto é, a equação de sine-Gordon possui um vácuo degenerado. A lagrangiana para o modelo de sine-Gordon é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \quad (2.5)$$

com

$$V(\phi) = \frac{1}{b^2} [1 - \cos(b\phi)], \quad (2.6)$$

onde escolhemos as constantes tais que as soluções do campo  $\phi = \frac{2\pi n}{b}$  tenham  $V = 0$ . E vemos que elas possuem energia zero, já que a densidade hamiltoniana da configuração de campo é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.7)$$

Realizando uma expansão em série de Taylor no potencial  $V(\phi)$ , obtemos

$$V(\phi) = \frac{1}{2!} \phi^2 - \frac{b^2}{4!} \phi^4 + \dots, \quad (2.8)$$

ou, ainda com  $\lambda = b^2$  e uma constante  $m$  com unidade de massa,

$$V(\phi) = \frac{1}{2!}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \dots, \quad (2.9)$$

que é exatamente o potencial visto na teoria de Ginzburg-Landau (tomando as correspondências entre as constantes corretamente).

Pensamos agora na seguinte configuração. Suponha que  $\phi$  aproxima-se de um dos zeros de  $V$  (como  $n = 0$ ) quando  $x \rightarrow -\infty$ , mas quando  $x \rightarrow \infty$  ele se aproxima de um outro zero de  $V$  (como  $n = 1$ ). Entre estes dois mínimos existe claramente uma região onde

$$\phi \neq \frac{2\pi n}{b}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} \neq 0, \quad (2.10)$$

e portanto, da hamiltoniana, existe uma densidade de energia positiva. Além disso, assumimos que a configuração é estática, logo

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Esperamos encontrar uma energia total finita, pois impomos condições de contorno sobre o campo  $\phi$ . Com a configuração estática, temos que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi}, \quad (2.12)$$

o que, sob integração, nos fornece

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 = V(\phi). \quad (2.13)$$

Assim, a energia total será

$$E = \int \mathcal{H} dx, \quad (2.14)$$

$$E = \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] dx = \int 2V(\phi) dx, \quad (2.15)$$

ou

$$E = \int_0^{2\pi/b} [2V(\phi)]^{1/2} d\phi. \quad (2.16)$$

Substituindo o valor de  $V(\phi)$  e integrando sobre o campo  $\phi$ , obtemos

$$E = \frac{8}{b^2} = \frac{8m^2}{\lambda}. \quad (2.17)$$

Vemos que a energia é inversamente proporcional à constante de acoplamento e finita, o que pode se tornar interessante para os físicos de partículas elementares. Damos o nome desta configuração de “kink” de Gordon. Isto vem do fato que de um lado do eixo real ( $x \rightarrow -\infty$ ) temos uma solução com  $n = 0$  e do outro lado ( $x \rightarrow \infty$ ),  $n = 1$ , ambos com a mesma energia nula. Esta solução tem  $n = 0$  e  $n = 1$  e não é continuamente deformável em  $n = 0$  e  $n = 0$  (pontos extremos do eixo real segundo a nossa configuração), que representa o estado fundamental. O “kink”, então, é um objeto topológico. A existência do “kink” deve-se apenas às propriedades topológicas do espaço (em particular, sua fronteira, que neste caso é discreta). A estabilidade das soluções de sóliton em teorias de campo não-lineares é uma consequência da topologia.

Esta estabilidade do sóliton mostra obviamente uma lei de conservação; deve existir uma carga conservada  $Q$  igual a um inteiro  $N$ , e uma corrente  $j_\mu$  sem divergência da forma

$$j^\mu = \frac{b}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.18)$$

de onde tiramos  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , e portanto a carga será

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \\ &= \frac{b}{2\pi} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)] \\ &= N. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A corrente conservada  $j^\mu$  não é uma corrente de Noether, porque ela não segue de uma invariância da lagrangiana por algum tipo de simetria. Ela é uma corrente topológica devida exclusivamente à topologia do problema.

### 2.1.2 Linhas de vórtice

As linhas de vortex são os defeitos topológicos mais interessantes fisicamente. Existem inúmeras aplicações em toda física destes objetos e seu estudo nos fornece ferramentas para

compreender fenômenos físicos importantíssimos. Um desses exemplos são os supercondutores do tipo II (vide apêndice A), cuja estrutura apresenta o que chamamos de *linhas de vortex* ou *vórtices*. Seu estudo com certeza traz inúmeras vantagens na busca por explicações do comportamento supercondutor.

Os sólitons que estudamos na seção anterior eram unidimensionais. Considere agora um campo escalar num espaço bidimensional. A “fronteira” é um círculo no infinito (denotaremos por  $S^1$ ). Em analogia com o modelo de sine-Gordon, construímos um campo cujo valor na fronteira seja

$$\varphi = ae^{in\theta} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.20)$$

onde  $n$  é um inteiro para mantermos um único valor para  $\varphi$ . Logo,

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{(inae^{in\theta})}{r} \hat{\theta}. \quad (2.21)$$

De forma análoga aos sólitons, a hamiltoniana para um campo escalar bidimensional será dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\varphi|^2 + V(\varphi). \quad (2.22)$$

Consideramos um potencial com a mesma estrutura de antes:

$$V(\varphi) = [a^2 - \varphi^* \varphi]^2, \quad (2.23)$$

tal que  $V = 0$  sobre a fronteira  $S^1$ . Então, numa configuração estática e quando  $r \rightarrow \infty$  teremos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\varphi|^2 = \frac{n^2 a^2}{2r^2}, \quad (2.24)$$

e a energia da configuração estática é

$$E = \int^\infty \mathcal{H} r dr d\theta = \pi n^2 a^2 \int^\infty \frac{1}{r} dr, \quad (2.25)$$

que é logaritmicamente divergente, o que nos permite dizer que não podemos generalizar os sólitons para dimensões maiores, pois a energia diverge.

Para “solucionar” este problema, adicionamos um campo de gauge na derivada (a derivada covariante)

$$\partial_\mu \varphi \quad \rightarrow \quad D_\mu \varphi \equiv \partial_\mu \varphi + ieA_\mu \varphi. \quad (2.26)$$

Supomos uma lagrangiana do tipo (este modelo é conhecido como modelo de Higgs Abelian e é análogo ao modelo GL da supercondutividade, mas sendo mais utilizado este nome na área de teoria de campos; para maiores detalhes deste modelo, veja o apêndice B)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu \varphi|^2 - V(\varphi), \quad (2.27)$$

que, para uma configuração estática, temos  $\mathcal{L} = -\mathcal{H}$ . Queremos que a energia desta configuração de campo seja finita. Para tal, escolhemos um  $A_\mu$  da forma

$$\vec{A} = -\frac{1}{e}\vec{\nabla}(n\theta) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.28)$$

ou seja,

$$A_r \rightarrow 0; \quad \text{e} \quad A_\theta \rightarrow -\frac{n}{er} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (2.29)$$

Assim, em  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D_\theta \varphi &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + ieA_\theta \varphi \\ &= \frac{1}{r}(ian)\varphi - \frac{ian}{r}\varphi = 0; \end{aligned} \quad (2.30)$$

e

$$D_r \varphi = 0. \quad (2.31)$$

Logo,

$$D_\mu \varphi \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (2.32)$$

Vemos que podemos escrever para  $A_\mu$

$$A_\mu \rightarrow \partial_\mu \chi \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.33)$$

com  $\chi$  sendo uma fase adimensional. Imediatamente vemos que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \partial_\mu \chi \equiv 0. \quad (2.34)$$

Com todas estas considerações, observamos que

$$\mathcal{H} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

o que torna possível uma configuração de energia finita. Considere agora a integral

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \Phi_m, \quad (2.36)$$

onde usamos o teorema de Stokes,  $\Phi_m$  é o fluxo magnético e  $C$  representa a fronteira do vórtice. No infinito, teremos

$$\Phi_m = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint A_\theta r d\theta = -\frac{2\pi n}{e}, \quad (2.37)$$

e o fluxo magnético é quantizado. Construimos uma configuração de campo que transporta fluxo magnético, e desde que  $D_\mu \phi \rightarrow 0$  e  $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$  na fronteira ( $r \rightarrow \infty$ ), ela possui uma energia finita. Se adicionarmos uma terceira dimensão espacial (o eixo  $z$ ) onde os campos não possuem dependência, esta configuração dá origem as famosas "linhas de vórtice". Voltando à hamiltoniana (2.28), somos capazes de escrever as equações de movimento desta teoria como (devemos ressaltar que o potencial de Landau possui a forma  $V(\phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$ ):

$$D^\mu (D_\mu \phi) = -m^2 \phi - 2\lambda \phi |\phi|^2, \quad (2.38)$$

$$ie(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) + 2e^2 A_\mu |\phi|^2 = \partial^\nu F_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Embora não entremos em maiores detalhes neste trabalho sobre este assunto, em 1973,

os físicos H. B. Nielsen e P. Olesen [28] conseguiram determinar uma solução para estas equações de campo acopladas e seus resultados foram chamados de vórtice de Nielsen-Olesen.

Neste exemplo, vemos novamente que a topologia dá ao vórtice sua estabilidade de energia finita. A topologia que acabamos de descrever refere-se ao grupo  $U(1)$ . Podemos notar que a lagrangiana (2.28) é a versão relativística da lagrangiana GL, que descreve a supercondutividade. Logo, ela se torna fundamental para as linhas de fluxo de Abrikosov em supercondutores do tipo II. O campo escalar é responsável pelo condensado da BCS (densidade de pares de Cooper num supercondutor).

## 2.2 Motivações para se estudar modelos bidimensionais

Quando a dimensão do espaço é igual a dois ocorrem alguns problemas com os cálculos feitos na aproximação de campo médio. É possível mostrar, utilizando o critério de Ginzburg, que a dependência do parâmetro  $r_0(T)$  com a dimensionalidade do parâmetro de ordem pode ser escrita como [16]

$$\bar{r}_0(T) = \frac{-u_0 S_D \Lambda^{D-2}}{2(2\pi)^D (D-2)}, \quad (2.40)$$

onde  $S_D$  é a área da superfície de uma esfera em um espaço de  $D$  dimensões e  $\Lambda$  representa um “cut-off” do momento linear. Ou seja,  $r(T)$  possui uma divergência em  $D = 2$ , mas experimentalmente obtemos valores finitos do parâmetro  $r(T)$ . A resposta a este problema pode ser dada mostrando que as flutuações em  $D = 2$  de algum sistema físico no ponto crítico se tornam dominantes, e por isso devem ser abordadas de outra maneira.

Para mostrar a dominância destas flutuações, considere um sistema de spins  $S_{\alpha,i}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  (dimensionalidade do parâmetro de ordem), localizados nos sítios  $i$  de uma rede quadrada bidimensional, e sujeitos à condição

$$\sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha,i}^2 = 1. \quad (2.41)$$

Suponha que exista magnetização espontânea próxima de  $T = 0$ , com todos os spins paralelos a uma direção  $n$ :

$$S_{1,i} = S_{2,i} = \dots = S_{n-1,i} = 0 \quad S_{n,i} = 1, \quad (2.42)$$

e estudamos então as pequenas flutuações ao redor deste estado. Suponha que estas flutuações sejam tão pequenas que nos permitam considerá-las apenas em um hiperplano normal à  $n$ , e

assim podemos esquecer da limitação (2.43) sobre os spins. A hamiltoniana das flutuações será

$$H = \frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (S_{\alpha,i} - S_{\alpha,j})^2, \quad (2.43)$$

onde  $\langle i, j \rangle$  representa, assim como antes, vizinhos próximos. Tomando o limite contínuo para baixas temperaturas

$$H \rightarrow \frac{1}{2}J \int d^2x \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\vec{\nabla} \varphi_\alpha)^2. \quad (2.44)$$

Vemos imediatamente que

$$\tilde{G}(k) = \frac{T}{J} \frac{1}{k^2}, \quad (2.45)$$

e então

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \langle \varphi_\alpha^2(x) \rangle = (n-1) \langle \varphi_1^2(x) \rangle = \frac{(n-1)}{J} T \int_{\pi/L}^{\pi/a} \frac{d^D k}{(2\pi^D)k^2}. \quad (2.46)$$

onde  $a$  é o espaçamento de rede e  $L$  é o comprimento da rede.

Para  $D > 2$ , a integral acima é convergente no infravermelho, e nessa suposição de pequenas flutuações quando  $T \rightarrow 0$ , é autoconsistente. Mas para  $D = 2$  têm-se

$$\Delta \approx \frac{(n-1)T}{2\pi J} \ln \frac{L}{a}, \quad (2.47)$$

e quando  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow \infty$  (limite termodinâmico). Por ser uma divergência logarítmica, pode ser resolvida com outros métodos.

Concluimos que em  $D = 2$ , a suposição de pequenas flutuações não é autoconsistente. Buscaremos então uma maneira diferente de realizar os cálculos em duas dimensões e começaremos estudando o modelo XY da matéria condensada.



## 2.3 O modelo XY

### 2.3.1 Estudo qualitativo

Quando  $n = 2$  ( $D = 2$ ) observamos uma transição de fase sem magnetização espontânea [23]. No modelo XY, o spin no sítio  $i$  é um vetor de duas componentes  $\vec{S}_i$ , que pode ser considerado no plano da rede. A hamiltoniana é invariante sob rotações no plano; em outras palavras, tem simetria  $O(2)$ , sendo dada por

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (2.48)$$

onde os ângulos  $\theta_i$  e  $\theta_j$  representam a inclinação dos spins  $i$  e  $j$  em relação a algum eixo de referência.

A função de partição será

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{[\theta_i]} \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \prod_l d\theta_l \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

- **A expansão de Z em altas temperaturas**

Quando  $T \rightarrow \infty$ , expandimos a exponencial em potências de  $(J/T)$  e ficamos apenas com os termos de ordem mais baixa. Somos capazes de estimar utilizando este método a função de correlação entre os dois spins, um no sítio 0 e outro no sítio  $p$ :

$$\langle \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_p \rangle = \langle \cos(\theta_0 - \theta_p) \rangle = \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle. \quad (2.50)$$

Assim, devemos calcular

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^{2\pi} \prod_l d\theta_l \exp[i(\theta_0 - \theta_p)] \exp \left( \frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \right), \quad (2.51)$$

de onde podemos chegar a

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{J}{CT} \int_0^{2\pi} \prod_l d\theta_l \exp \left[ i \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_0 - \theta_p + \theta_i - \theta_j) \right], \quad (2.52)$$

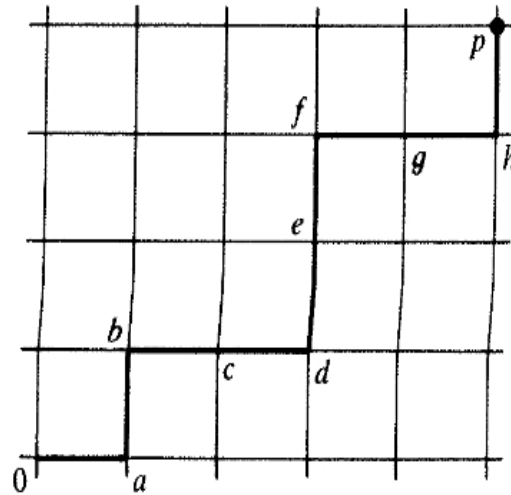


Figura 2.2: Um possível caminho de 0 a p. LE BELLAC, Michel. 1991.

onde  $C = (2\pi)^n$ . Mas sabemos que

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta} = 0. \quad (2.53)$$

Isso nos permite imaginar “um possível caminho” sobre a rede que podemos tomar, pois para a função de correlação não ser nula (resultado trivial) devemos ter integrais de  $d\theta$  e não  $e^{i\theta}d\theta$  como mostramos acima, desde que elas não contribuem para o resultado da função de partição. Assim, escolhemos um caminho tal que (ver Fig. 2.2)

$$e^{i\theta_0}(e^{-i\theta_0}e^{i\theta_a})e^{-i\theta_a}\dots e^{i\theta_h}(e^{-i\theta_h}e^{i\theta_p})e^{-i\theta_p}. \quad (2.54)$$

Como existem muitos caminhos possíveis, podemos escolher como um “caminho médio” o caminho classicamente favorável e então a contribuição “média” do termo  $(J/T)^n$  será aproximadamente  $(J/T)^{r/a}$ . Reunindo estas suposições, chegamos ao seguinte resultado:

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \left( \frac{J}{T} \right)^{r/a} = e^{-(r/a)\ln(T/J)}, \quad (2.55)$$

de onde extraímos o comprimento de correlação

$$\xi = \frac{a}{\ln(T/J)}, \quad (2.56)$$

que corresponde exatamente ao comprimento de correlação clássico.

- **A expansão de  $Z$  em baixas temperaturas**

Quanto  $T \rightarrow 0$ , é razoável supor que as flutuações dominantes sejam aquelas com grande comprimento de onda, e então

$$H \rightarrow H_0 + \frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} (\theta_i - \theta_j)^2, \quad (2.57)$$

onde expandimos  $\cos(\theta_i - \theta_j)$  em potências de  $(\theta_i - \theta_j)$  e  $H_0$  é uma constante que surge da expansão da função cosseno e não contribui para a física do sistema. Podemos introduzir uma notação mais conveniente

$$\partial_\mu \theta_i = \theta_{i+\mu} - \theta_i, \quad (2.58)$$

assim, reescrevemos a hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2}J \sum_i \sum_\mu (\partial_\mu \theta_i)^2, \quad (2.59)$$

ou, no limite contínuo,

$$H = \frac{1}{2}J \int d^2x (\vec{\nabla} \theta)^2. \quad (2.60)$$

Então, a correlação entre os spins 0 e  $p$  fica

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l d\theta_l \exp \left( i(\theta_0 - \theta_p) - \frac{J}{2T} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2 \right), \quad (2.61)$$

sendo

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_l d\theta_l \exp \left( -\frac{J}{2T} \sum_{i,\mu} (\partial_\mu \theta_i)^2 \right). \quad (2.62)$$

Primeiramente, podemos calcular a função correlação do modelo para dois spins próximos  $i$  e  $j$ . Seu cálculo requer paciência e por isso apenas mostramos o resultado bem conhecido na literatura [16]

$$G_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) = a^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}}{4 - 2\cos(k_1 a) - 2\cos(k_2 a)}. \quad (2.63)$$

Vemos que a função de correlação apresenta uma divergência infravermelha ( $k_1 a \approx 0 \rightarrow G_{ij} \rightarrow \infty$ ). Baseado nisso, regularizamos  $G_{ij}$  subtraindo 1 da exponencial e definindo uma função

$$\tilde{G}(\vec{x}) = a^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - 1}{4 - 2\cos(k_1 a) - 2\cos(k_2 a)}, \quad (2.64)$$

também é possível mostrar que

$$\langle r m e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = r m e^{-\frac{T}{2J} [G_{00} + G_{pp} - 2G_{0p}]} = e^{(T/J)\tilde{G}(\vec{x})}, \quad (2.65)$$

pois

$$G_{00} + G_{pp} - 2G_{0p} = 2G_{00} - 2G_{0p} = -\tilde{G}(\vec{x}). \quad (2.66)$$

Pela versão contínua teríamos o resultado

$$-\vec{\nabla}^2 \tilde{G}(\vec{x}) = \delta(\vec{x}), \quad (2.67)$$

cuja solução é muito conhecida (equação de Poisson):

$$\tilde{G}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + \text{cte.} \quad (2.68)$$

Logo,

$$\langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = e^{-\frac{T}{2\pi J} \ln(r/a)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{T/2\pi J} = \left(\frac{a}{r}\right)^{\eta(T)}, \quad (2.69)$$

onde  $\eta(T) = \frac{T}{2\pi J}$ . Esta expressão mostra que o modelo XY não gera magnetização espontânea:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle e^{i(\theta_0 - \theta_p)} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_p \rangle = 0. \quad (2.70)$$

Se estes argumentos heurísticos estiverem certos (o que é razoável), deve existir um determinado ponto da transição de fase onde o comportamento da função de correlação muda de uma lei de potências (baixas temperaturas) para uma exponencial (altas temperaturas). Concluimos que acima de algum ponto da transição, o argumento de baixas temperaturas começa a falhar. No cálculo da função de correlação entre os spins  $0$  e  $p$  em baixas temperaturas consideramos, assim como no de altas temperaturas, a periodicidade de  $\theta$ . Integramos  $\theta$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , e portanto poderíamos nos perguntar se a periodicidade de  $\theta$  torna-se importante, uma vez que as flutuações tornam-se grandes. É exatamente isso que ocorre; a quase-ordem obtida em baixas temperaturas é naturalmente destruída por excitações topológicas (o mesmo que defeitos topológicos), que dependem da periodicidade de  $\theta$ . Já estudamos estes defeitos nas seções anteriores, mais especificamente os definimos como vórtices.

- **O papel dos vórtices na transição de fase**

O gradiente em coordenadas polares é dado por

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\theta}\hat{\theta}, \quad (2.71)$$

mas obviamente  $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$ , e então temos

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{1}{r}\hat{\theta} = \left(0, \frac{1}{r}\right). \quad (2.72)$$

Se  $C$  for uma curva fechada em torno de uma origem  $O$  sobre o plano dos spins, então

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = \oint_C \left(0, \frac{1}{r}\right) \cdot (dr, r d\theta) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (2.73)$$

Geralmente, devido à periodicidade de  $\theta$ , tem-se

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = 2\pi q, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.74)$$

onde  $q$  é a vorticidade, que nada mais é que a “intensidade” do vortex (compare estas expressões com as equações (2.29) e (2.38)). Notamos que os sinais positivos e negativos nos fornecem uma informação extremamente importante; os vórtices ( $q > 0$ ) podem ser acompanhados por antivórtices ( $q < 0$ ) para o mesmo  $|q|$ . Isto nos ajudará a entender a transição de fase que ocorre no modelo XY mais tarde.

A energia associada com o vórtice pode ser posta como

$$\begin{aligned}
E &\approx \int H d^2x = \frac{J}{2} \int (\vec{\nabla}\theta)^2 d^2x \\
&= \frac{J}{2} \int_{\pi/L}^{\pi/a} \frac{(\hat{\theta})^2}{r^2} d^2x = \pi J \ln \frac{L}{a}. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

A entropia associada com a criação de um vórtice é (podemos escolher o centro do vortex em qualquer lugar da rede)

$$S = \ln \left( \frac{L}{a} \right)^2, \quad (2.76)$$

já que existem  $(L/a)^2$  sítios. Com isso, a energia livre correspondente será

$$F = E - ST = (\pi J - 2T) \ln \frac{L}{a}, \quad (2.77)$$

e conseguimos notar que os vórtices desestabilizarão a quase-ordem quando  $T > T_C = \pi J/2$ .

Com estes fatos e resultados, já somos capazes de sumarizar a descrição proposta por Kosterlitz e Thouless para as fases do sistema no ano de 1973[24]. Em baixas temperaturas, somente flutuações de grandes comprimentos de onda contribuem (também conhecidas como “ondas de spin”); a função de correlação entre os spins decresce de acordo com leis de potência, e o sistema é quase ordenado com ilhas de magnetização de todos os tamanhos. Nessa fase não existem vórtices “livres”, mas encontramos pares de vórtices (um vórtice e um antivórtice de vorticidades opostas), cuja influência sobre o sistema está confinada a pequenas distâncias. À medida que aumentamos a temperatura, o tamanho destes pares vórtice-antivórtice aumenta também e ele diverge em  $T = T_C$ , onde os vórtices livres começam a aparecer. Estes vórtices desestabilizam o quase ordenamento das ondas de spin, e a função de correlação decresce exponencialmente. Essa teoria de influência dos defeitos topológicos sobre a correlação entre os spins e a transição de fase deste modelo foi a chave para o desenvolvimento do modelo dual de Villain e é a motivação fundamental deste trabalho.

### 2.3.2 O modelo de Villain

O peso estatístico (o integrando da função de partição) do modelo XY é  $e^{-\beta(1-\cos\theta)}$ . Podemos expandir esta função em série de Fourier. Sabemos que a representação de Fourier para uma função generérica  $f(x)$  é

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad (2.78)$$

onde os coeficientes  $C_n$  são determinados pela expressão

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad \forall n. \quad (2.79)$$

Logo,

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} I_n(\beta) e^{-\beta}, \quad (2.80)$$

onde

$$I_n(\beta) = \int_0^{2\pi} e^{\beta \cos\theta} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (2.81)$$

Quando  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ) podemos expandir a função cosseno em série de Taylor, e ficamos com

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} I_n(\beta) = \int_0^{2\pi} e^{\beta} e^{-\frac{\beta\theta^2}{2}} e^{in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad (2.82)$$

temos então uma integral gaussiana em  $\theta$

$$P = \frac{e^{\beta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(in\theta - \beta \frac{\theta^2}{2})} d\theta = \frac{e^{\beta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\beta/2(\theta^2 - 2in\theta/\beta)} d\theta. \quad (2.83)$$

Completando quadrados,

$$\theta^2 - \frac{2in\theta}{\beta} = \theta^2 + \left(\frac{in}{\beta}\right)^2 - \frac{2in\theta}{\beta} - \left(\frac{in}{\beta}\right)^2 = \left(\theta - \frac{in}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{in}{\beta}\right)^2, \quad (2.84)$$

obtemos

$$P = \frac{e^{\beta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\beta/2\left(\frac{in}{\beta}\right)^2} e^{-\beta/2\left(\theta - \frac{in}{\beta}\right)^2} d\theta, \quad (2.85)$$

ou ainda, fazendo a mudança de variáveis  $\theta' = \theta - \frac{in}{\beta}$ ,

$$Pe^{-\beta} = \frac{e^{-\frac{\beta n^2}{2\beta^2}}}{2\pi} \int e^{-\frac{\beta \theta'^2}{2}} d\theta' \approx \frac{e^{-n^2/2\beta}}{\sqrt{2\pi\beta}}, \quad (2.86)$$

e finalmente

$$e^{-\beta(1-\cos\theta)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} e^{-n^2/2\beta}. \quad (2.87)$$

Lembrando que  $\theta \equiv \theta_i - \theta_j$ , generalizamos este resultado para

$$\exp[-\beta(1-\cos(\partial_\mu\theta(x)))] \rightarrow \sum_{n_\mu(x) \rightarrow -\infty}^{n_\mu(x) \rightarrow +\infty} \exp(in_\mu\partial_\mu\theta(x)) \exp(-n_\mu^2/2\beta), \quad (2.88)$$

ou ainda, escrevemos a função de partição do modelo de Villain como

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_x d\theta(x) \prod_{x,\mu} \sum_{n_\mu(x) \rightarrow -\infty}^{\infty} \exp(in_\mu\partial_\mu\theta(x)) \exp(-n_\mu^2(x)/2\beta). \quad (2.89)$$

Realizando uma integração por partes na primeira exponencial, vemos que anulamos a integral em  $\theta(x)$  se e somente se

$$\sum_\mu \partial_\mu n_\mu(x) = 0, \quad (2.90)$$

ou seja, podemos escolher  $n_\mu(x)$  na forma

$$n_\mu(x) = \sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu p(x), \quad (2.91)$$

onde  $p(x)$  é um campo escalar assumindo valores inteiros. A menos de uma constante,  $Z$  fica

$$Z = \sum_{p(x) \rightarrow -\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2\beta} \sum_{x,\mu} [\partial_\mu p(x)]^2\right). \quad (2.92)$$

Agora precisaremos da fórmula de soma de Poisson que é dada por



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi g(\varphi) e^{2i\pi m\varphi}. \quad (2.93)$$

Considerando isso reescrevemos  $Z$  como

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_x d\varphi(x) \sum_{m(x) \rightarrow -\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{1}{2\beta} \sum_{x,\mu} (\partial_\mu \varphi)^2 + 2i\pi \sum_x m(x)\varphi(x) \right), \quad (2.94)$$

onde  $m(x)$  é um campo escalar assumindo valores inteiros. Integrando no campo  $\varphi$  obtemos

$$Z = Z_{SW} \sum_{m(x) \rightarrow -\infty}^{\infty} \exp \left( -2\pi^2\beta \sum_{x,x'} m(x)G(x-x')m(x') \right). \quad (2.95)$$

Devemos notar que se  $m = 0$  recuperamos o modelo XY, mostrando que os dois modelos são duais. No modelo de Villain conseguimos isolar a hamiltoniana de ondas de spin da hamiltoniana de vórtices (exclusivamente). Esse fato de conseguirmos evidenciar a contribuição dos defeitos topológicos na função de partição original é uma característica que será extremamente explorada no capítulo subsequente quando tratarmos do modelo proposto para supercondutividade. Assim,

$$H = H_{SW} + H_V, \quad (2.96)$$

e então

$$Z = Z_{SW} Z_V. \quad (2.97)$$

Depois de mais alguns cálculos, é possível mostrar que

$$Z = Z_{SW} \sum_{m(x)'} \exp \left( -\frac{\pi^2\beta}{2} \sum_x m^2(x) + \pi\beta \sum_{x \neq x'} m(x) \ln \left| \frac{x-x'}{a} \right| m(x') \right), \quad (2.98)$$

onde o termo  $\exp \left( -\frac{\pi^2\beta}{2} \sum_x m^2(x) \right)$  pode ser pensado como vindo de um potencial químico  $\pi^2\beta/2$  e o escrevemos como

$$\exp(\ln y \sum_x m^2(x)), \quad (2.99)$$

tal que  $y = y_0 = \exp(-\pi^2\beta/2)$ . Identificamos este termo como sendo um potencial químico porque ele monitora a densidade de vórtices. Quando  $y \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow 0$ ), o potencial químico impede a formação de vórtices. Quando  $y$  aumenta, o número de vórtices aumenta também.

A idéia principal desta sessão é crucial para o restante desse trabalho é a dualidade entre as duas teorias. As duas teorias são idênticas no que diz respeito às previsões físicas que cada uma faz, mas a diferença principal consiste no surgimento explícito dos vórtices no modelo de Villain facilitando a visão e interpretação dos vórtices na transição de fase do modelo XY (lembre-se que no modelo XY original não era trivial supor a existência de vórtices, mas que na teoria de Villain torna-se extremamente claro). As conclusões que podemos extrair destes resultados nos levam a crer que uma teoria cujo objetivo seja estudar suas transições de fase podem esconder na sua topologia um determinado tipo de defeito topológico e que é possível, sim, explicitá-los de forma visível na função de partição.

### 3 DINÂMICA DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES BIDIMENSIONAIS

#### Introdução

Como vimos antes, durante uma transição de fase é natural o surgimento de algum tipo de defeito topológico. Suas contribuições podem modificar de alguma forma a temperatura crítica do sistema. O estudo de como esses defeitos topológicos podem influenciar um sistema físico durante uma transição de fase é enorme nos dias de hoje e seus resultados cada vez mais importantes para a compreensão de vários fenômenos físicos atuais, como por exemplo a supercondutividade a altas temperaturas ( $HT_C$  superconductivity).

Existem muitas áreas que exploram estes fenômenos, mas podemos destacar algumas como exemplo:

- na cosmologia, quando procuramos explicar o surgimento de defeitos topológicos no universo primordial e suas consequências sobre a evolução (transições de fase) das estruturas cosmológicas;
- na QCD, quando se busca explicar o mecanismo de confinamento de quarks utilizando condensação de monopólos magnéticos e vórtices;
- na matéria condensada, especialmente na supercondutividade, onde estudam-se as linhas de vortex e sua influência sobre as transições de fase dos materiais supercondutores.

Quando tratamos especificamente da supercondutividade, os defeitos topológicos mais interessantes são as linhas de vórtice. Vimos no modelo de Villain que os vórtices são determinantes para a transição de fase no sistema bidimensional do modelo XY. O modelo de Villain é extremamente motivador para aqueles que querem estudar a influência de linhas de vórtice sobre um determinado sistema supercondutor.

Baseado nisso, tentamos analisar neste capítulo a influência das linhas de vórtice em um modelo GL bidimensional. Em primeiro lugar, propomos um modelo de densidade lagrangiana bidimensional derivado do modelo GL relativístico com a diferença do termo de Klein-Gordon pelo termo de Schrödinger (justamente para descrever sistemas nos quais a relatividade não vem a ser importante, como nos sistemas de matéria condensada). Em seguida, usamos campos transformados duais para explicitar a contribuição das linhas de vortex no modelo proposto.

Os vórtices surgem pela contribuição de uma fase singular na representação do campo escalar através de uma corrente topológica de vórtices. Com a ação dual somos capazes de determinar a função de correlação dos vórtices, o que nos diz sobre como eles interagem entre si dentro de um supercondutor bidimensional (bi-layers e multi-layers).

Devemos enfatizar que o modelo que iremos obter é completamente análogo ao modelo de Villain que foi estudado no capítulo anterior com a diferença de que no nosso caso os vórtices poderão interagir e não serão “diluídos” (não interagentes) como era em Villain. Por isso mesmo, devemos analisar alguns limites neste sentido quando tivermos nossa teoria dual para ratificar tal afirmação e para validar nossos cálculos.

Uma das maiores aplicações deste tipo de estudo é sobre as transições de fase que ocorrem sobre supercondutores a altas temperaturas. Eles apresentam uma estrutura de linhas de vortex muito peculiar, cuja explicação teórica não foi encontrada até os dias de hoje. As fases de vórtices que surgem nesses tipos de supercondutores são extremamente interessantes e não-triviais, tais como a rede de Abrikosov, líquidos de vórtices, vidros de vórtices, etc (conhecemos este campo de estudos como “vortex matter”).

### 3.1 A teoria GL dual

Na teoria GL da supercondutividade tratamos com sistemas relativísticos nos quais a invariância de Lorentz nos ajuda a facilitar os cálculos. O modelo proposto neste trabalho busca atender mais às necessidades de um sistema de matéria condensada, em que as velocidades não são relativísticas e, portanto, a invariância de Lorentz não é mais relevante.

Já foi dito anteriormente que o modelo GL da supercondutividade na sua versão relativística também é conhecido na literatura, mas na área de teoria de campos, como modelo de Higgs abeliano. Existem inúmeros trabalhos que exploram as características desse modelo e no apêndice B é feita uma exposição motivadora para se estudar a dualidade existente entre esse modelo e a hidrodinâmica de Kalb-Ramond-Nambu (KRN)[26][27].

A idéia principal extraída deste apêndice é a de transformação dual; um método muito utilizado nos trabalhos atuais baseado na transformada de Fourier do integrando de alguma função de partição, cujo objetivo é o de “dualizar” a teoria original.

Nesta seção, mostramos um teoria alternativa à teoria GL da supercondutividade. Propomos uma mudança no termo de Klein-Gordon na teoria GL original na versão relativística por um termo que reproduz a equação de Schrödinger. Assim, escrevemos a densidade lagrangiana do nosso modelo como:

$$\mathcal{L}[\phi, \phi^*, \vec{A}, A_0] = -\frac{1}{4\pi\epsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m} |(-i\vec{\nabla} - e\vec{A})\phi|^2 + \phi^*(i\partial_t - eA_0)\phi - V(\phi, \phi^*), \quad (3.1)$$

com  $V(\phi, \phi^*) = -m_\phi^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{3!} |\phi|^4$ .

A análise dimensional da densidade lagrangiana, nos mostra que

$$[\vec{A}] = [A_0] = [\phi] = [\varepsilon] = [m_\phi^2] = [\lambda^{-1}] = [m] = x^{-1} = t^{-1}, \quad (3.2)$$

para  $\hbar = c = 1$ .

Assim, a função de partição (em temperatura finita) pode ser escrita como

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\vec{A} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp[-S_E(A_0, \vec{A}, \phi, \phi^*) - S_{GF}], \quad (3.3)$$

onde  $S_E$  representa a ação euclidiana ( $t \rightarrow -i\tau$ ) em  $(2+1) - D$ , cuja estrutura é dada por

$$S_E(A_0, \vec{A}, \phi, \phi^*) = \int_0^\beta dt \int d^2x \left[ -\frac{1}{4\pi\varepsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m} |(i\vec{\nabla} + e\vec{A})\phi|^2 - \phi^*(\partial_t + eA_0)\phi - V(\phi, \phi^*) \right]. \quad (3.4)$$

e  $S_{GF}$  é a ação de fixação de calibre.

O próximo passo, seguindo a referência [30], será redefinir os campos escalares  $\phi$  e  $\phi^*$  com o objetivo de tornar explícita a contribuição dos vórtices. Tomamos sua representação polar:

$$\phi = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{i\chi}; \quad \phi^* = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{-i\chi}. \quad (3.5)$$

Por causa da transformação dos campos, ganhamos um jacobiano tal que

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\vec{A} \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\chi \left( \prod_x \rho \right) \exp[-S_E(A_0, \vec{A}, \rho, \chi) - S_{GF}], \quad (3.6)$$

onde a ação  $S_E(A_0, \vec{A}, \rho, \chi)$  se torna

$$S_E(A_0, \vec{A}, \rho, \chi) = \int_0^\beta \int d^2x \left[ -\frac{1}{4\pi\varepsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4m} (\vec{\nabla}\rho)^2 + \frac{\rho^2}{4m} (\vec{\nabla}\chi - e\vec{A})^2 - \frac{i\rho^2}{2} (\partial_t\chi) - \frac{e\rho^2}{2} A_0 - V(\rho^2) \right], \quad (3.7)$$

onde agora  $V(\rho^2) = -\frac{m_\phi^2}{2!}\rho^2 + \frac{\lambda}{4!}\rho^4$ .

Para obtermos a ação dual, devemos integrar sobre os campos  $\chi$ ,  $A_0$  e  $\vec{A}$ . Visto que existe um termo da ação que possui um acoplamento entre  $\chi$  e  $\vec{A}$ , integramos primeiramente em  $\chi$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\chi \equiv \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\rho \left( \prod_x \rho \right) \exp \left[ - \int d^3x \left\{ -\frac{i\rho^2}{2}(\partial_t \chi) + \frac{1}{4m}(\vec{\nabla}\rho)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho^2}{4m}(\vec{\nabla}\chi - e\vec{A})^2 - \frac{e\rho^2}{2}A_0 - V(\rho^2) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Linearizamos o termo quadrático em  $\chi$  realizando uma transformação de Hubbard-Stratonovich

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \int \mathcal{D}\chi \exp \left[ - \int d^3x \frac{\rho^2}{4m}(\vec{\nabla}\chi - e\vec{A})^2 \right] = \\ &= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\vec{C} \left( \prod_x \rho^{-3} \right) \exp \left\{ - \int d^3x \left[ \frac{m}{\rho^2} C_i^2 + \frac{iC_i}{2}(\partial_t \chi - eA_i) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde definimos outro campo cuja dimensão é  $[C_i] = x^{-2} = [m^2]$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\chi &= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\vec{C} \left( \prod_x \rho^{-2} \right) \exp \left[ - \int d^3x \left\{ -\frac{i\rho^2}{2}(\partial_t \chi) + \frac{1}{4m}(\vec{\nabla}\rho)^2 + \frac{m}{\rho^2} C_i^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{iC_i}{2}(\partial_t \chi - eA_i) - \frac{e\rho^2}{2}A_0 - V(\rho^2) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A origem dos vórtices está na fase  $\chi$  do modelo, mas podemos considerá-la sendo composta por uma parte singular  $\chi_s$  e outra parte regular  $\chi_r$ . A parte singular dará justamente a origem dos vórtices em nossa teoria. Logo, fazendo  $\chi \rightarrow \chi_r + \chi_s$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\chi_r} &= \int \mathcal{D}\chi_r \exp \left[ - \int d^3x \left\{ -\frac{i\rho^2}{2}(\partial_t \chi_r) + \frac{iC_i}{2}(\partial_t \chi_r) \right\} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\chi_r \exp \left[ - \int d^3x \frac{i}{2}(\partial_t \rho^2 - \partial_i C_i) \chi_r \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

ou, lembrando da definição da função delta,

$$\mathcal{P}_{\chi_r} = \delta[\partial_t \rho^2 - \partial_i C_i] \equiv \delta[\partial_\mu C_\mu], \quad (3.12)$$

com  $C_\mu = (C_0, C_i) \equiv (\rho^2, C_i)$ . Assim, escrevemos como solução

$$\partial_\mu C_\mu = 0; \quad C_\mu = -\frac{ik}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda = -\frac{ik}{2} V_\mu. \quad (3.13)$$

A parte singular gera

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\chi_s &= \int \mathcal{D}\chi_s \mathcal{D}C_0 \mathcal{D}\vec{C} \left( \prod_x \rho^{-3} \right) \delta[\partial_\mu C_\mu] \exp \left[ - \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} C_\mu \partial_\mu \chi_s + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4m} (\vec{\nabla} C_0^{1/2})^2 + \frac{m}{C_0} C_i^2 - \frac{ie}{2} C_\mu A_\mu \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\chi_s &= \int \mathcal{D}\chi_s \mathcal{D}C_\mu \left( \prod_x \rho^{-3} \right) \delta[\partial_\mu C_\mu] \exp \left[ - \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} C_\mu \partial_\mu \chi_s + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4mC_0} (\vec{\nabla} C_0)^2 + \frac{m}{C_0} C_i^2 - \frac{ie}{2} C_\mu A_\mu \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mas vemos que

$$\rho^2 \equiv C_0 = -\frac{ik}{2} \varepsilon_{0\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda = -\frac{ik}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{W})_0 \equiv -\frac{ik}{2} B_d, \quad (3.16)$$

$$C_i = -\frac{ik}{2} \varepsilon_{i\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda \equiv -\frac{ik}{2} E_{i,d}, \quad (3.17)$$

onde os campos  $B_d$  e  $E_{i,d}$  são campos duais. Esta transformação nos levará a uma mudança de jacobiano dada por

$$\left( \prod_x \rho^{-3} \right) \Rightarrow \left( \prod_x B_d^{-3/2} \right), \quad (3.18)$$

e então

$$\mathcal{P}\chi_s = \int \mathcal{D}\chi_s \mathcal{D}C_\mu \left( \prod_x B_d^{-3/2} \right) \exp \left[ - \int d^3x \left\{ -4\pi \frac{i}{2} \left( -\frac{ik}{2} \right) W_\mu j_\mu + \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{k}{8imB_d} (\vec{\nabla} B_d)^2 + \frac{mk}{2iB_d} (\vec{E}_d)^2 - \frac{ek}{4} V_\mu A_\mu \right\}, \quad (3.19)$$

onde

$$j_\mu = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}}{4\pi} (\partial_\nu \partial_\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu) \chi_s, \quad (3.20)$$

é definida como corrente de vórtices. Esta corrente é puramente topológica e a sua conservação é independente das equações de movimento e das simetrias da teoria (reveja o fim da seção sobre o modelo de sine-Gordon para lembrar).

Devemos integrar agora no campo de gauge  $A_\mu$  para obtermos seu campo dual:

$$\Theta = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[ - \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4\pi\varepsilon} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{ek}{4} V_\mu A_\mu \right\} \right]. \quad (3.21)$$

Linearizamos o termo de Maxwell através da expressão (novamente aplicamos a transformação de Hubbard-Stratonovich)

$$\exp \left( \int d^3x \frac{F_{\mu\nu}^2}{4\pi\varepsilon} \right) = \int \mathcal{D}G_\mu \exp \left[ \int d^3x \left( \frac{\pi\varepsilon}{4} G_\mu^2 + \frac{1}{2} \tilde{G}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right], \quad (3.22)$$

onde definimos o dual de  $G_\mu$  como

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} G_\lambda. \quad (3.23)$$

Com isso, a função de partição fica

$$\begin{aligned} Z[\beta] &= \int \mathcal{D}W_\mu \mathcal{D}\chi_s \mathcal{D}G_\mu \left( \prod_x B_d^{-3/2} \right) \exp \left\{ - \int d^3x \left[ -\frac{\pi\varepsilon}{4} G_\mu^2 + \frac{k}{8miB_d} (\vec{\nabla} B_d)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{mk}{2iB_d} (\vec{E}_d)^2 + \frac{m_\phi^2}{2!} B_d - \frac{\lambda}{4!} (B_d)^2 - \pi k W_\mu j_\mu \right] \left. \right\} \times \\ &\times \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ - \int d^3x \left[ -\frac{ek}{4} V_\mu A_\mu - \frac{1}{2} \tilde{G}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

e então



$$\Theta_{A_\mu} \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ - \int d^3x \left[ -\frac{ek}{4} V_\mu A_\mu - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} G_\lambda (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right) \right] \right\}, \quad (3.25)$$

de onde tiramos o resultado

$$\Theta_{A_\mu} = \delta \left[ -\frac{ek}{4} V_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu G_\lambda \right]. \quad (3.26)$$

Ajustando  $ek = 2$ , obtemos:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu [W_\lambda - G_\lambda] = 0 \quad \Rightarrow \quad G_\mu = W_\mu - \frac{1}{\varepsilon} (\partial_\mu \varphi). \quad (3.27)$$

A função de partição no formalismo dual será

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}W_\mu \mathcal{D}\chi_s \mathcal{D}\varphi \left( \prod_x B_d^{-3/2} \right) \exp \{ -S_d[W_\mu, \varphi, \chi_s] - S_{GF} \}, \quad (3.28)$$

onde definimos a ação dual como

$$\begin{aligned} S_d [W_\mu, \varphi, \chi_s] = \int d^3x & \left[ \frac{1}{4meiB_d} (\vec{\nabla} B_d)^2 + \frac{m}{eiB_d} (\vec{E}_d)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\pi\varepsilon}{4} \left( W_\mu - \frac{1}{\varepsilon} (\partial_\mu \varphi) \right)^2 + \frac{m_\phi^2}{2!} B_d - \frac{\lambda}{4!} (B_d^2) - \frac{2\pi}{e} W_\mu j_\mu \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

e  $S_{GF}$  é a ação de fixação de calibre. Através de uma simples fixação de gauge fazendo  $\varphi = 0$ , escrevemos  $S_d$  como

$$\begin{aligned} S_d [W_\mu, \chi_s] = \int d^3x & \left[ \frac{1}{4meiB_d} (\vec{\nabla} B_d)^2 + \frac{m}{eiB_d} (\vec{E}_d)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\pi\varepsilon}{4} W_\mu^2 + \frac{m_\phi^2}{2!} B_d - \frac{\lambda}{4!} (B_d^2) - \frac{2\pi}{e} W_\mu j_\mu \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O modelo descrito por  $S_d$  é completamente equivalente ao modelo proposto originalmente, obtido na representação polar, e deve levar aos mesmos resultados que obteríamos se utilizássemos a ação original. A maior vantagem de usarmos o formalismo dual é que exibimos explicitamente a dependência da configuração singular ao campo de Landau, tornando este método adequado para se estudar transições de fase através de defeitos topológicos [30].

Esse resultado é de extrema importância no nosso trabalho, já que na ação dual temos toda a física que precisamos. Esta ação nos permite estudar as fases de vórtices que existem em supercondutores mais complexos por possuir as interações entre esses vórtices. Se considerarmos vórtices não-interagentes, devemos recair na teoria de Villain.

Calcularemos nas próximas seções as funções de correlação tanto a nível clássico quanto a nível das flutuações quânticas.

### 3.2 Funções de correlação clássica e quântica

Para verificar se o modelo proposto prevê alguns resultados conhecidos na literatura corrente, realizamos a aproximação de Landau, que nada mais é do que uma aproximação a nível clássico. Nesta aproximação, como vimos antes, calculamos o ponto de mínimo correspondente ao potencial dual de Landau (agora escrito em termos de  $B_d$ ) e substituímos na ação dual de nosso modelo visando obter a contribuição máxima do integrando. Assim,

$$V(B_d) = -\frac{m_\phi^2}{2!}B_d + \frac{\lambda}{4!}(B_d)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV(B_d)}{dB_d} = 0; \quad (3.31)$$

ou seja,

$$-\frac{m_\phi^2}{2} + \frac{\lambda}{12}B_d = 0 \quad \Rightarrow \quad B_d^l = \frac{6m_\phi^2}{\lambda}. \quad (3.32)$$

Podemos e devemos buscar uma interpretação física dessa aproximação. Basta lembrarmos que  $B_d \propto \rho^2$ , onde  $\rho$  é o raio do vórtice que é variável na teoria sem aproximações. Porém, na aproximação de Landau  $B_d^l = \frac{6m_\phi^2}{\lambda} \equiv \text{cte}$ , logo os vórtices são estáticos (raio constante) e não-interagentes.

Substituindo  $B_d^l$  na ação dual, obtemos

$$S_d^l[B_d^l] = \int d^3x \left[ \frac{m\lambda}{6m_\phi^2 e i} (\vec{E}_d)^2 - \frac{\pi\varepsilon}{4} W_\mu^2 - \frac{2\pi}{e} W_\mu j_\mu \right]. \quad (3.33)$$

Mas reescrevemos o termo com  $\vec{E}_d$  como

$$E_{i,d} = \varepsilon_{i\nu\lambda} \partial_\nu W_\lambda \Rightarrow \quad (\vec{E}_d)^2 = W_\mu [\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial^2] W_\nu. \quad (3.34)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski em  $(2+1) - D$ .

Logo,

$$\begin{aligned} S_d^l &= \int d^3x [a(\vec{E}_d)^2 + bW_\mu^2 + cW_\mu j_\mu] \\ &= a \int d^3x [(\vec{E}_d)^2 + 2M^2W_\mu^2 + W_\mu j'_\mu], \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde definimos as quantidades  $M^2 = \frac{1}{2}M_0^2 = \frac{b}{2a}$  e  $j'_\mu = \frac{c}{a}j_\mu$ . Então

$$\begin{aligned} S_d^l[W_\mu, \chi_s] &= a \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2}W_\mu(-\partial_\mu\partial_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial^2 - M_0^2\eta_{\mu\nu})W_\nu \right\} \\ &+ a \int d^3x W_\mu j'_\mu. \end{aligned} \quad (3.36)$$

O operador entre chaves deve ser invertido para obtermos a função de correlação na aproximação de Landau. Para tal, isolamos este operador:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu - M_0^2\eta_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

Os projetores em 3 dimensões são dados por

$$\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial_\rho\partial^\rho} \quad \omega^{\mu\nu} = \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\partial_\rho\partial^\rho}. \quad (3.38)$$

Eles são escolhidos de forma a respeitarem a relação  $\eta^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}$  justamente com o intuito de preencher todo o espaço. As relações de ortogonalização são dadas por

$$\theta_{\mu\nu}\theta^{\nu\lambda} = \theta_\mu^\lambda; \quad \omega_{\mu\nu}\omega^{\nu\lambda} = \omega_\mu^\lambda; \quad \omega_{\mu\nu}\theta^{\nu\lambda} = 0. \quad (3.39)$$

No espaço de Fourier, o operador  $\Sigma_{\mu\nu}$  fica

$$\Sigma_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu - M_0^2\eta_{\mu\nu} - k^2\eta_{\mu\nu}, \quad (3.40)$$

ou, em termos dos projetores transverso e longitudinal,

$$\Sigma_{\mu\nu}(k) = -(k^2 + M_0^2)\theta_{\mu\nu} - M_0^2\omega_{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Mas sabemos que

$$\Sigma_{\mu\nu} G^{\nu\lambda} = \eta_{\mu}^{\lambda}. \quad (3.42)$$

Supomos então, alguma solução do tipo

$$G_{\nu\lambda} = a\theta_{\nu\lambda} + b\omega_{\nu\lambda}, \quad (3.43)$$

de onde conseguimos extrair os coeficientes  $a$  e  $b$  como sendo

$$a = -\frac{1}{k^2 + M_0^2} \quad b = -\frac{1}{M_0^2}. \quad (3.44)$$

Logo, a função de correlação será

$$G_{\mu\nu}(k) = \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2(k^2 + M_0^2)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 + M_0^2} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{M_0^2 k^2}. \quad (3.45)$$

Retornando ao espaço de configuração, através da integral de Fourier

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(r) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2(k^2 + M_0^2)} e^{-ik \cdot r} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{M_0^2 k^2} e^{-ik \cdot r} \\ &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\eta_{\mu\nu}}{(M_0^2 + k^2)} e^{-ik \cdot r}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Identificando as integrais acima como

$$I_1(r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot r}}{k^2(k^2 + M_0^2)}; \quad I_2(r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot r}}{M_0^2 k^2};$$

$$I_3(r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot r}}{k^2 + M_0^2}, \quad (3.47)$$

reescrevemos a função de correlação como

$$G_{\mu\nu}(r) = \partial_{\mu} \partial_{\nu} I_1(r) - \partial_{\mu} \partial_{\nu} I_2(r) - \eta_{\mu\nu} I_3(r). \quad (3.48)$$

Depois de alguns cálculos chegamos aos seguintes resultados para as integrações

$$I_1(r) = \frac{2 - e^{-M_0 r}}{4\pi M_0^2 r}; \quad I_2(r) = \frac{1}{2\pi M_0^2 r}; \quad I_3(r) = \frac{e^{-M_0 r}}{4\pi r}. \quad (3.49)$$

Logo,

$$G_{\mu\nu}(r) = \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{(2 - e^{-M_0 r})}{4\pi M_0^2 r} \right\} - \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \frac{1}{2\pi M_0^2 r} \right\} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi r} e^{-M_0 r}. \quad (3.50)$$

Após realizar todas as derivações, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(r) &= \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi r} e^{-M_0 r} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi M_0^2 r^2} e^{-M_0 r} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\pi M_0^2 r^3} e^{-M_0 r} + \\ &+ \frac{x_\mu x_\nu}{4\pi r^3} e^{-M_0 r} + \frac{3x_\mu x_\nu}{4\pi M_0^2 r^5} e^{-M_0 r} + \frac{x_\mu x_\nu}{4\pi M_0^2 r^4} e^{-M_0 r} \\ &= \frac{e^{-M_0 r}}{4\pi r} \left[ \eta_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{M_0^2 r} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{M_0^2 r^2} + \right. \\ &\left. + \frac{x_\mu x_\nu}{r^2} + \frac{3x_\mu x_\nu}{M_0^2 r^4} + \frac{x_\mu x_\nu}{M_0^2 r^3} \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

que é a função de correlação do nosso modelo na aproximação de Landau. Relembrando a equação (1.61), podemos notar que neste caso, no limite em que  $r \rightarrow \infty$ , recuperamos exatamente a função de correlação do modelo GL. Dela extraímos o comprimento de correlação característico  $\xi$ , que será

$$\xi = \frac{1}{M_0} = \frac{1}{(b/a)^{1/2}} = \left( \frac{a}{b} \right)^{1/2}, \quad (3.52)$$

ou, em termos dos parâmetros da nossa teoria,

$$\xi = \left[ \frac{m\lambda}{6m_\phi^2} \frac{4}{ei\pi\epsilon} \right]^{1/2} \propto \left( \frac{\lambda}{m_\phi^2} \right)^{1/2}, \quad (3.53)$$

mas sabemos da teoria GL que  $m_\phi^2 \equiv r_0(T) \propto (T - T_C)$ , logo

$$\xi(T - T_C) \propto (T - T_C)^{-1/2}. \quad (3.54)$$

Este resultado aproximado reproduz exatamente a dependência de  $\xi$  na teoria GL que desenvolvemos no primeiro capítulo. Isso mostra que podemos confiar nos métodos e no formalismo utilizado em nosso modelo sem preocupação. Mas uma teoria física só passa a ser importante quando tem algo de novo, coisa que até agora o modelo não mostrou. Para vermos um novo comportamento do sistema, precisamos calcular as flutuações quânticas em torno do ponto crítico de Landau (critério de Ginzburg). Ou seja,

$$B_d \rightarrow B_d^l + \tilde{B}_d; \quad \tilde{B}_d \ll 1. \quad (3.55)$$

Lembrando da nossa ação dual (3.34), podemos fazer as seguintes aproximações de acordo com (3.60):

$$\frac{1}{(B_d^l + \tilde{B}_d)} \approx \frac{1}{B_d^l} - \frac{\tilde{B}_d}{(B_d^l)^2} + 2\frac{(\tilde{B}_d)^2}{(B_d^l)^3}, \quad (3.56)$$

$$\ln(B_d^l + \tilde{B}_d) \approx \ln(B_d^l) + \frac{2\tilde{B}_d}{B_d^l} - \frac{(\tilde{B}_d)^2}{2(B_d^l)^2}, \quad (3.57)$$

onde este logaritmo foi colocado no momento que exponenciamos o jacobiano de transformação. A ação dual com as flutuações (3.60) torna-se

$$\begin{aligned} \tilde{S}_d &= \mathcal{N} \int d^3x \left\{ \frac{\lambda}{24mm_\phi^2 ei} (\vec{\nabla} \tilde{B}_d)^2 + \frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} (\vec{\tilde{E}}_d)^2 - \frac{\pi \varepsilon}{4} \tilde{W}_\mu^2 + \frac{m_\phi^2}{2!} \tilde{B}_d \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} (\tilde{B}_d)^2 - \frac{m_\phi^2}{2!} \tilde{B}_d - \frac{3}{2\theta^3} \left( 2\frac{\tilde{B}_d}{B_d^l} - \frac{\tilde{B}_d^2}{2(B_d^l)^2} \right) - \frac{2\pi}{e} \tilde{W}_\mu j_\mu \right\} \\ &= \mathcal{N} \int d^3x \left\{ \frac{\lambda}{24mm_\phi^2 ei} (\vec{\nabla} \tilde{B}_d)^2 + \frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} (\vec{\tilde{E}}_d)^2 - \frac{\pi \varepsilon}{4} \tilde{W}_\mu^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} (\tilde{B}_d)^2 - \frac{\lambda}{2\theta^3 m_\phi^2} \tilde{B}_d + \frac{\lambda^2}{48\theta^3 m_\phi^4} (\tilde{B}_d)^2 - \frac{2\pi}{e} \tilde{W}_\mu j_\mu \right\}, \quad (3.58) \end{aligned}$$

onde  $\tilde{W}_\mu$  é a flutuação do campo de calibre dual  $W_\mu$  e  $\tilde{B}_d$  e  $\vec{\tilde{E}}_d$  são as flutuações correspondentes aos campos  $B_d$  e  $\vec{E}_d$ , respectivamente.

Mas como temos

$$(\vec{\nabla} \tilde{B}_d)^2 = \tilde{W}_j \{ \vec{\nabla}^2 [\partial_i \partial_j - \vec{\nabla}^2 \eta_{ij}] \} \tilde{W}_i; \quad (\vec{\tilde{E}}_d)^2 = \tilde{W}_\mu \{ \partial_\mu \partial_\nu - \partial^2 \eta_{\mu\nu} \} \tilde{W}_\nu, \quad (3.59)$$

$$\tilde{B}_d = \varepsilon_{ij} \partial_i \tilde{W}_j; \quad \tilde{B}_d^2 = -\tilde{W}_j \vec{\nabla}^2 \tilde{W}_j; \quad \tilde{W}_\mu^2 = \tilde{W}_\mu \eta_{\mu\nu} \tilde{W}_\nu. \quad (3.60)$$

A ação dual livre será escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{S}_d^{livre} &= \mathcal{N} \int d^3x \left\{ \frac{\lambda}{24mm_\phi^2 ei} \tilde{W}_j \{ \vec{\nabla}^2 [\partial_i \partial_j - \vec{\nabla}^2 \eta_{ij}] \} \tilde{W}_i \right. \\ &+ \frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} \tilde{W}_\mu \{ \partial_\mu \partial_\nu - \partial^2 \eta_{\mu\nu} \} \tilde{W}_\nu \\ &\left. + \frac{\lambda}{4!} \tilde{W}_j \vec{\nabla}^2 \tilde{W}_j - \frac{\lambda^2}{48\theta^3 m_\phi^4} \tilde{W}_j \vec{\nabla}^2 \tilde{W}_j - \frac{\pi\varepsilon}{4} \tilde{W}_\mu \eta_{\mu\nu} \tilde{W}_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

A constante  $\theta^3$  colocada no termo do jacobiano ajuda a manter as dimensões corretas e ela mesmo tem dimensões de  $[\theta^{-1}] = [m] = [x^{-1}] = [t^{-1}]$ . A estrutura matricial da ação pode ser posta na forma

$$\tilde{W}_\mu \hat{O}_{\mu\nu} \tilde{W}_\nu = \begin{bmatrix} \tilde{W}_0 & \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{00} & O_{01} & O_{02} \\ O_{10} & O_{11} & O_{12} \\ O_{20} & O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{W}_0 \\ \tilde{W}_1 \\ \tilde{W}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Com isto, montamos o operador  $\hat{O}_{\mu\nu}$

$$\hat{O}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

onde definimos os termos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , após uma transformada de Fourier aplicada a cada termo da ação dual  $\tilde{S}_d$ , como:

$$A = -\frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} \vec{k}^2 - \frac{\pi\varepsilon}{4} \quad B = -\frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} k_0 k_1 \quad C = -\frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} k_0 k_2; \quad (3.64)$$

$$D = \frac{\lambda}{24mm_\phi^2 ei} \vec{k}^2 [k_1^2 + \vec{k}^2] - \frac{\lambda m}{6m_\phi^2 ei} [k_1^2 + k^2] - \frac{\lambda}{4!} \vec{k}^2 + \frac{\lambda^2}{48\theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^2 + \frac{\pi\varepsilon}{4}; \quad (3.65)$$

$$E = \frac{\lambda}{24mm_\phi^2ei} \vec{k}^2 k_1 k_2 - \frac{\lambda m}{6m_\phi^2ei} k_1 k_2; \quad (3.66)$$

$$F = \frac{\lambda}{24mm_\phi^2ei} \vec{k}^2 [k_2^2 + \vec{k}^2] - \frac{\lambda m}{6m_\phi^2ei} [k_2^2 + k^2] - \frac{\lambda}{4!} \vec{k}^2 + \frac{\lambda^2}{48\theta^3 m_\phi^4} + \frac{\pi\varepsilon}{4}. \quad (3.67)$$

onde  $k^2$  representa o quadrivetor momentum dado por

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2. \quad (3.68)$$

Neste trabalho, estamos interessados em obter a função de correlação de nosso modelo. Nos limitaremos à componente  $\hat{O}_{00}^{-1}$ , por enquanto. A componente  $\hat{O}_{00}^{-1}$  é dada pela expressão

$$\hat{O}_{00}^{-1}(k) = \frac{DF - E^2}{A(DF - E^2) - DC^2 - B^2F + 2BEC}, \quad (3.69)$$

ou ainda, utilizando uma linguagem mais compacta

$$\hat{O}_{00}^{-1}(k) = \frac{\mathcal{N}(k)}{\mathcal{D}(k)}. \quad (3.70)$$

Depois de alguns cálculos, descobrimos que o numerador  $\mathcal{N}(k)$  e o denominador  $\mathcal{D}(k)$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k) = & - \frac{2\lambda^2}{(24)^2 m^2 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^8 + \frac{3\lambda^2}{144 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^4 k^2 + \frac{\lambda^2}{72 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^6 - \frac{3\lambda^2}{(24)^2 m m_\phi^2 ei} \vec{k}^6 + \\ & + \frac{3\lambda^3}{2(24)^2 m m_\phi^6 \theta^3 ei} \vec{k}^6 + \frac{3\lambda \pi \varepsilon}{96 m m_\phi^2 ei} \vec{k}^4 - \frac{\lambda^2 m^2}{36 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^2 k^2 - \frac{\lambda^2 m^2}{36 m_\phi^4 e^2} k^4 + \\ & + \frac{3\lambda^2 m}{144 m_\phi^2 ei} \vec{k}^4 - \frac{3\lambda^3 m}{2(144) \theta^3 m_\phi^6 ei} \vec{k}^4 - \frac{\lambda m \pi \varepsilon}{24 m_\phi^2 ei} \vec{k}^2 - \frac{\lambda m \pi \varepsilon}{12 m_\phi^2 ei} k^2 + \\ & + \frac{\lambda^2}{144} \vec{k}^4 - \frac{\lambda^3}{(24)^2 \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^4 - \frac{\lambda \pi \varepsilon}{48} \vec{k}^2 + \frac{\lambda^4}{4(24)^2 \theta^6 m_\phi^8} \vec{k}^4 + \\ & + \frac{\lambda^2 \pi \varepsilon}{96 \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^2 + \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{16}; \end{aligned} \quad (3.71)$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(k) = & \frac{\lambda^3}{3(24)^2 m m_\phi^6 e^3 i} \vec{k}^{10} - \frac{\lambda^3 m}{3(144) m_\phi^6 e^3 i} \vec{k}^6 k^2 - \frac{\lambda^3 m}{4(144) m_\phi^6 e^3 i} \vec{k}^8 + \frac{2\lambda^3 m^2}{3(144) m_\phi^4 e^2} \vec{k}^6 + \\
& + \frac{\lambda^3 m^2}{6(144) m_\phi^4 e^2} \vec{k}^4 k^2 - \frac{\lambda^4 m^2}{6(144) \theta^3 m_\phi^8 e^2} \vec{k}^6 + \frac{\lambda^4 m^2}{3(24)^2 \theta^3 m_\phi^8 e^2} \vec{k}^4 k^2 - \frac{\lambda^3}{2(24)^2 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^8 - \\
& - \frac{\lambda^4}{4(24)^2 \theta^3 m_\phi^8 e^2} \vec{k}^8 - \frac{\lambda^2 \pi \varepsilon}{(24)^2 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^6 - \frac{\lambda^3 m}{6(144) m_\phi^2 e i} \vec{k}^6 + \frac{\lambda^4 m}{6(24)^2 \theta^3 m_\phi^6 e i} \vec{k}^6 - \\
& - \frac{\lambda^2 m \pi \varepsilon}{4(144) m_\phi^2 e i} \vec{k}^4 - \frac{\lambda^5 m}{(24)^3 \theta^6 m_\phi^{10} e i} \vec{k}^6 + \frac{\lambda^3 m \pi \varepsilon}{2\theta^3 m_\phi^6 e i} \vec{k}^4 + \frac{2\pi \lambda^2 \varepsilon}{4(24)^2 m^2 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^8 - \\
& - \frac{3\lambda^2 \pi \varepsilon}{(24)^2 m_\phi^4 e^2} \vec{k}^4 k^2 + \frac{3\lambda^3 \pi \varepsilon}{8(24)^2 m \theta^3 m_\phi^6 e i} \vec{k}^6 + \frac{\lambda^2 m^2 \pi \varepsilon}{144 m_\phi^4 e^2} k^4 + \frac{\lambda m \pi^2 \varepsilon^2}{48 m_\phi^2 e i} k^2 - \\
& - \frac{\lambda^2 \pi \varepsilon}{(24)^2} \vec{k}^4 + \frac{\lambda^3 \pi \varepsilon}{4(24)^2 \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^4 + \frac{\lambda \pi^2 \varepsilon^2}{4(48)} \vec{k}^2 - \frac{\lambda^4 \pi \varepsilon}{16(24)^2 \theta^6 m_\phi^8} \vec{k}^4 - \\
& - \frac{\lambda^2 \pi^2 \varepsilon^2}{8(48) \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^2 - \frac{\pi^3 \varepsilon^3}{64}. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Não podemos trabalhar de forma exata com esse denominador  $\mathcal{D}(k)$  e por causa disso, precisamos nos limitar a alguns casos mais simples. Vemos que se tomarmos os limites  $\vec{k}^2 \rightarrow 0$  (grandes distâncias) e  $k_0^2 \rightarrow 0$  (baixas energias), mantendo os termos de  $\vec{k}^2$  e  $k_0^2$  que restam depois dessa aproximação, obtemos a relação de dispersão da teoria sob flutuações quânticas

$$\lim_{\vec{k}^2 \rightarrow 0(\vec{k}^2)} \mathcal{D}(\vec{k}^2, k_0^2) \Rightarrow \frac{\lambda^2 m^2 \pi \varepsilon}{144 m_\phi^4 e^2} k_0^4 + \frac{\lambda m \pi^2 \varepsilon^2}{48 m_\phi^2 e i} k_0^2 + \frac{\lambda \pi^2 \varepsilon^2}{4(48)} \vec{k}^2 - \frac{\lambda^2 \pi^2 \varepsilon^2}{8(48) \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^2 - \frac{\pi^3 \varepsilon^3}{64}; \tag{3.73}$$

$$\lim_{k_0^2 \rightarrow 0(k_0^2)} \mathcal{D}(k_0^2) \Rightarrow \frac{\lambda m \pi^2 \varepsilon^2}{48 m_\phi^2 e i} k_0^2 + \frac{\lambda \pi^2 \varepsilon^2}{4(48)} \vec{k}^2 - \frac{\lambda^2 \pi^2 \varepsilon^2}{8(48) \theta^3 m_\phi^4} \vec{k}^2 - \frac{\pi^3 \varepsilon^3}{64}, \tag{3.74}$$

onde a notação do limite significa que permanecem os termos quadráticos em  $\vec{k}$  e em  $k_0$ .

Este pólo possui uma dependência do tipo:

$$\omega^2 - \mathcal{B} \vec{k}^2 - \mathcal{C} M_{W_\mu}^2 = 0. \tag{3.75}$$

Definimos aqui a quantidade  $M_{W_\mu}^2 \equiv \frac{\pi^3 \varepsilon^3}{64}$  como sendo a massa do campo de gauge dual  $W_\mu$  e as constantes  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  são dependentes exclusivamente dos parâmetros da teoria. A massa  $M_{W_\mu}^2$  é responsável pela não singularidade da função de correlação quando tomamos os limites de  $\vec{k}^2$  e  $k_0^2$  indo pra zero, tudo isso graças a fixação de calibre que fizemos na ação dual (3.29).

Essa massa é responsável pela existência de um “gap” no diagrama de dispersão (espectro) do tipo  $\omega \times \vec{k}^2$ . Com ela somos capazes de determinar a quantidade de energia necessária para excitar uma certa densidade de vórtices em função de  $\vec{k}^2$ . A equação (3.75) é a relação de dispersão das excitações.

A riqueza de informações que podem ser extraídas da ação dual (3.30) é enorme. Aqui nos restringimos ao cálculo da relação de dispersão da densidade de vórtices considerando as flutuações quânticas em torno do mínimo do potencial GL.

## CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho fomos capazes de mostrar o desenvolvimento de um ramo da matéria condensada conhecido como *dinâmica de vórtices*. Atualmente existem muitos problemas em aberto no que diz respeito à compreensão de como os vórtices influenciam uma transição de fase, não só em supercondutores, como foi estudado aqui, mas também em cosmologia, confinamento de quarks e muitas outras aplicações. Indiscutivelmente, os estudos sobre estes defeitos topológicos em uma transição de fase são extremamente importantes na física desenvolvida recentemente.

No capítulo 1, revisamos alguns conceitos relevantes como transições de fase e a teoria de Ginzburg-Landau (GL), e apresentamos o formalismo utilizado ao longo do restante do texto. Este capítulo serviu como uma introdução ao modelo proposto desenvolvido no capítulo 3. Discutimos sobre a expressão do comprimento de correlação, sobre as funções de correlação do modelo GL e mostramos o conceito de *classe de universalidade*, extremamente importante para o capítulo 2.

No capítulo 2, estudamos os vórtices, um dos objetos mais importantes na física da matéria condensada atualmente, com o intuito de explorar sua contribuição nas transições de fase do modelo XY. Após essa análise, estudamos o modelo dual de Villain, cuja importância é enorme para este trabalho. Sua motivação nos permite introduzir no capítulo 3 um modelo dual desenvolvido na referência [30] e a partir disso expomos nosso modelo bidimensional.

A riqueza de informações no modelo XY sobre dinâmica de vórtices é impressionante. A transição de fase de Kosterlitz-Thouless é um exemplo relevante de como os vórtices podem modificar a estrutura de transição de fase em supercondutores. Pudemos notar que nela ganhávamos a idéia de pares vórtice-antivórtice que eram responsáveis pela quase-ordem do sistema.

Com este arcabouço teórico, introduzimos no capítulo 3 o nosso modelo de supercondutividade dual. Vimos que uma transformação de dualidade geralmente pode ser pensada como uma transformada de Fourier aplicada ao integrando de alguma função de partição. Utilizamos esta afirmação para estudar um modelo GL bidimensional com um termo de Schrödinger ao invés do termo de Klein-Gordon, como é natural no modelo de Higgs abeliano.

Mostramos em detalhes o formalismo da transformação dual aplicada ao nosso modelo bidimensional. Obtivemos uma ação dual da qual pudemos extrair uma função de Green na

aproximação de Landau e nas flutuações quânticas de Ginzburg. Na aproximação de Landau, conseguimos verificar a dependência do comprimento de correlação com a temperatura e não foi por coincidência que obtivemos a mesma dependência que no modelo GL descrito no capítulo 1, já que isso mostra que o nosso modelo se encontra na mesma classe de universalidade do modelo GL.

Quando realizamos as flutuações quânticas, determinamos a sua função de Green (apenas a componente  $G_{00}$ , já que o pólo que nos diz o comportamento geral) e fizemos uma aproximação para  $\vec{k}^2 \approx 0$  (grandes distâncias). Nesta ocasião achamos os pólos da função e determinamos a relação de dispersão da densidade de vórtices com o “gap” de energia necessário para realizarmos as excitações de vórtices. Este resultado é muito importante, já que pode e deve ser medido em experimentos de supercondutores.

Com a função de correlação quântica, podemos extrair diversos tipos de comportamentos e limites relevantes do ponto de vista teórico e prático. Uma outra linha de pensamento baseada mais no artigo de Sugamoto [25] seria estudar as equações de movimento da teoria apresentada aqui visando obter quais as relações duais entre o nosso modelo e a teoria original, como a relação dual entre as funções de correlação dos dois modelos.

## REFERÊNCIAS E SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ONNES, Heike. Kamerlingh. The superconductivity of mercury. *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*, Leiden, v. 119, 1911.
- [2] MEISSNER, Walther; OCHSENFELD, Robert. Título Original: Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. Tradução para o inglês de Allister M. Forrest: A new effect concerning the onset of superconductivity. Paisley (Scotland). *Eur. J. Phys.*, v. 4, p. 117-120, 1983.
- [3] LONDON, Heinz; LONDON, Fritz. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proc. Roy. Soc. A*, London, v.149, p. 71-88, mar, 1935.
- [4] GINZBURG, Vitaly Lazarevich; LANDAU, Lev Davidovich. On the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, v. 20, p. 1064-1086, nov, 1950.
- [5] BARDEEN, John; COOPER, Leon Neil; SCHRIEFFER, John Robert. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, v. 108, p. 1175-1204, dec, 1957.
- [6] GOR'KOV, Lev Petrovich. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, v. 10, p. 998-1001, dec, 1959.
- [7] TINKHAM, Michael. *Introduction to superconductivity*. 2<sup>nd</sup>ed. [S.l]: McGraw-Hill, 1996, 454p.
- [8] ANNET, James F. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Bristol, Oxford University Press, 2004, 186p.
- [9] WALDRAM, J. R. *Superconductivity of metals and cuprates*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1996, 410p.
- [10] ASHCROFT, Neil W.; MERMIM, N. David. *Solid state physics*. College Edition, [S.l]: Harcourt College Publishers, 1976, 826p.
- [11] KUBO, R. and NAGAMIYA, T. *Solid state physics*. New York, McGraw-Hill, 1969, 840p.
- [12] ABRIKOSOV, Alexei Alexeyevich. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys. JETP*, v. 5, p. 1174-1182, dec, 1957.
- [13] BEDNORZ, Johannes Georg; MÜLLER, Karl Alexander. Possible High Tc Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. *Zeitschrift für Physik B-Condensed Matter*, v. 64, p. 189-193, apr, 1986.

- [14] GAVALER, J. R. Superconductivity in Nb<sub>x</sub>Ge films above 22K. *Appl. Phys. Lett.*, v. 23, p. 480-482, jul, 1973.
- [15] REICHL, Linda E. *A modern course in statistical physics*, 2<sup>nd</sup> ed., [S.l.]: John Wiley & Sons INC, 1998. Capítulo 3.
- [16] LE BELLAC, Michel. *Quantum and statistical field theory*. Oxford, Oxford University Press., 1991, 593p.
- [17] LENZ, Wilhelm. Beiträge zum verständnis der magnetischen eigenschaften in festen körpern. *Physikalische Zeitschrift*, v. 21, p. 613-615, dec, 1920.
- [18] ISING, Ernest. *Contribution to the theory of ferromagnetism*. Traduzido do alemão para o inglês por Jane Ising e Tom Cummings. 4p. Disponível em: < <http://www.hs-augsburg.de/harsch/anglica/Chronology>>. Acesso em: 20 jan. 2009.
- [19] PEIERLS, Rudolph E. On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Cambridge, v. 32, p. 477-481, oct, 1936.
- [20] WEISS, P. Mesure du phénomène de zeeman pour les trois raies bleues du zinc. *Scientific Commons*, v. 6, p. 429-445, jun, 1907.
- [21] STANLEY, H. Eugene. *Introduction to phase transitions and critical phenomena*. London, Oxford University Press, 1971. Capítulo 5.
- [22] FRÖHLICH, H. Theory of the superconducting state.I.The ground state of the absolute zero of temperature. *Phys. Rev.*, v. 79, p. 845-856, sep, 1950.
- [23] MERMIN, N. David; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, v. 17, p. 1133-1136, nov, 1966.
- [24] KOSTERLITZ, J. Michael;THOULESS, D. James. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, v. 6, p. 1181-1203, apr, 1973.
- [25] SUGAMOTO, Akio. Dual transformation in abelian gauge theories. *Phys. Rev. D*, v. 19, p. 1820-1825, mar, 1979.
- [26] KALB, Michael; RAMOND, P. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 2273-2284, apr, 1979.
- [27] NAMBU, Yoichiro. Quark Confinement and Field Theory. In: ROCHESTER CONFERENCE, 1976. Proceedings, New York, Willey, 1977.
- [28] JOSÉ, Jorge V.;KADANOFF, Leo P.; KIRKPATRICK, Scott.; NELSON, David R. Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model. *Phys. Rev. B*, v. 16, p. 1217-1241, aug, 1977.
- [29] NIELSEN, Holger Bech; OLESEN, Poul. Vortex-line models for dual strings. *Nucl. Phys. B*, v. 61, p. 45-61, sep, 1973.

- [30] RAMOS, Rudnei Oliveira; BARCI, Daniel Gustavo; LINHARES, Cesar Augusto; MEDEIROS NETO, João Felipe. Condensation of vortex-strings: effective potential contribution through dual actions. *Braz. Journal of Phys.*, v. 37, p. 251-257, mar, 2007.
- [31] RYDER, Lewis H. *Quantum field theory*. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge, Cambridge University Press., 1996, 502p.
- [32] PESKIN, Michael E.;SCHROEDER, Daniel V. *An introduction to quantum field theory*. Massachusetts, Perseus Books Publishing L.L.C., 1995, 864p.

## APÊNDICE A-EQUAÇÕES DE LONDON

Podemos afirmar que a estrutura da matéria ganhou muito "fôlego" após a descoberta do elétron por J. J. Thomson em 1897. Com isto o estudo da condução elétrica e térmica em metais foi desenvolvido por Drude três anos após a descoberta de Thomson.

O modelo de Drude considerava um metal como sendo composto por um "gás de elétrons". Segundo a teoria cinética dos gases, as partículas de gás seriam esferas sólidas perfeitas que movem-se livremente em linhas retas até colidirem umas com as outras. O tempo de duração de uma única colisão é considerado desprezível e nenhuma força de atração ou repulsão é assumida entre as partículas. Apenas a força do momento que ocorre a colisão é considerada.

Contudo, um metal é um corpo neutro. Se supormos a presença de um gás de elétrons, também teremos que supor a presença de partículas positivas para contrabalançar as negativas. Drude pensou que estas "partículas positivas" eram muito mais pesadas que o elétron e portanto permaneciam imóveis. Hoje em dia, estas "partículas positivas" são os íons correspondentes ao elemento neutro.

Drude também idealizou um parâmetro chamado tempo de relaxação. Este parâmetro ( $\tau$ ) corresponde ao tempo que o elétron demora entre duas colisões sucessivas. Baseado nisso dizemos que a probabilidade do elétron sofrer uma colisão num tempo infinitesimal  $dt$  é  $dt/\tau$ , onde  $\tau$  é o tempo de relaxação.

### Condutividade elétrica em metais sob corrente contínua (DC)

Suponha um elemento de fio infinitesimal de comprimento  $dl$  e área seccional  $A$ . Se ele possui  $n$  elétrons por unidade de volume, podemos escrever a densidade de corrente  $\vec{j}$  como

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A} = -\frac{neA\vec{dl}}{Adt}, \quad (1)$$

$$\vec{j} = -ne\vec{v}. \quad (2)$$

Na expressão (2)  $\vec{v}$  é a velocidade média dos elétrons no metal e o sinal negativo deve-se à carga do elétron. Para acharmos  $\vec{v} = \vec{v}_{media}$  devemos lembrar do impulso recebido pelos elétrons, e então

$$m\Delta\vec{v} = \vec{F}t, \quad (3)$$

tirando a média de (3), obtemos



$$m\vec{v}_{media} = \vec{F}\langle t \rangle_{col.}, \quad (4)$$

mas  $\vec{F} = -e\vec{E}$  e  $\langle t \rangle_{col.} = \tau$ , então

$$\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}\tau. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (2) obtemos

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}, \quad (6)$$

mas da relação constitutiva

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad (7)$$

vemos que

$$\sigma_{DC} = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (8)$$

é a condutividade elétrica do metal. A resistividade  $\rho$  é definida pelo inverso da condutividade, assim

$$\rho_{DC} = \frac{m}{ne^2}\tau^{-1}. \quad (9)$$

As expressões (8) e (9) foram muito importantes para a descoberta da supercondutividade, como veremos mais tarde. Os subíndices DC referem-se a corrente contínua (DC).

Condutividade elétrica em metais sob corrente alternada (AC)

Drude esperava uma modificação na expressão da segunda lei de Newton para cada elétron devido ao processo de colisões entre os mesmos. Então, além da força elétrica de repulsão entre eles, existia uma "força de colisão" dada por

$$\vec{\mathcal{F}}_{col.}(t) = \frac{-\vec{p}(t)}{\tau}. \quad (10)$$

O sinal negativo deve-se a questão da colisão ser considerada uma força de resistência ao movimento. Com isso, a equação de movimento para um único elétron será

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} + \vec{f}(t), \quad (11)$$

onde  $\vec{f}(t)$  é a força elétrica entre os elétrons. A força  $\vec{f}(t)$  é do tipo

$$\vec{f}(t) = -e\vec{E}(t), \quad (12)$$

onde

$$\vec{E}(t) = \Re(\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}). \quad (13)$$

Se supormos uma solução estacionária do tipo

$$\vec{p}(t) = \Re(\vec{p}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad (14)$$

obteremos de (11)

$$-i\omega\vec{p}(\omega) = \frac{-\vec{p}(\omega)}{\tau} - e\vec{E}(\omega), \quad (15)$$

mas

$$\vec{j}(t) = \Re(\vec{j}(\omega)e^{-i\omega t}), \quad (16)$$

e então

$$\vec{j}(\omega) = -ne\vec{v}(\omega) = -\frac{ne}{m}\vec{p}(\omega), \quad (17)$$

nos dando de (15) que

$$\vec{j}(\omega) = \frac{(ne^2/m)\vec{E}(\omega)}{(1/\tau) - i\omega} = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega), \quad (18)$$

onde

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}; \quad \sigma_0 = \frac{ne^2}{m}\tau, \quad (19)$$

são as condutividades geradas pelas correntes AC e DC, respectivamente.

### A Descoberta da Supercondutividade

Como já foi dito anteriormente, a dificuldade de se obter temperaturas cada vez menores era muito grande. Para o modelo de Drude ficar mais completo devemos colocar dois termos adicionais na resistividade  $\rho$  na expressão (9); um termo correspondente à interação elétron-elétron e outro do tipo elétron-fóton. Com estas correções ficamos com

$$\rho = \frac{m}{ne^2}(\tau_{el.-imp.}^{-1} + \tau_{el.-el.}^{-1} + \tau_{el.-ph.}^{-1}), \quad (20)$$

onde os subscritos correspondem, respectivamente, à interação elétron-impurezas, elétron-elétron e elétron-fóton.

Da termodinâmica, já se sabia que as interações elétron-impurezas não dependiam da temperatura; que as interações elétron-elétron dependiam de  $T^2$  e que as interações elétron-fóton dependiam de  $T^5$ . Portanto, quando reduzia-se a temperatura esperava-se obter um valor cada vez mais constante para a resistividade (20). Em outras palavras,

$$\rho(T \rightarrow 0) \approx \rho_0 = cte. \quad (21)$$

Procurando mostrar o resultado teórico da equação (21), H. Kamerling Onnes em Leiden conseguiu alcançar temperaturas de alguns graus Kelvin, suficientes para se obter Hélio liquefeito. Ele mediu a resistividade para a platina e para o ouro a baixas temperaturas. O resultado obtido correspondia ao previsto. Mas, Onnes resolveu medir a resistividade do mercúrio e então obteve uma surpresa (ver figura 1).

A análise da figura 1 é simples: a resistividade se comporta como o esperado até uma temperatura  $T_C$ , mas abaixo desta temperatura a resistividade vai a zero abruptamente. O quê poderia explicar este resultado? Se pensarmos que a resistividade é nula vemos que o metal abaixo de  $T_C$  se torna um condutor perfeito. Baseado nisto, Onnes chamou este novo estado da matéria de *supercondutividade*.

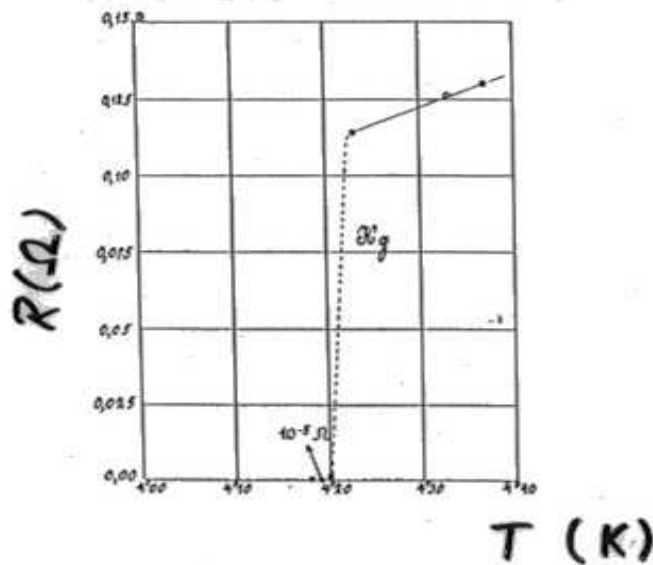


Figura 1: Resultado obtido por Onnes para o mercúrio.

Algumas conseqüências da resistividade nula

Se a resistividade é nula temos que ter uma condutividade infinita abaixo de  $T_C$ . Mas como poderíamos medir densidades de correntes finitas se a condutividade é infinita? A única forma de resolver este problema é supor que

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad (22)$$

para todos os pontos dentro do supercondutor. Com isso temos fluxo de corrente sem campo elétrico. A lei de Faraday nos diz que

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (23)$$

e de (22) vemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad (24)$$

e portanto o fluxo magnético deve ser constante em função do tempo no interior de um supercondutor.

Suponha agora então um anel metálico constituído de um material supercondutor. Quando  $T > T_C$  o anel encontra-se no estado normal do metal; abaixo de  $T_C$  ele estará no estado super-

condutor. Então aplicamos um campo magnético externo  $\vec{H}$  sobre o anel no estado normal. Este campo passa facilmente através do metal normal. Resfriamos o anel até uma temperatura abaixo de  $T_C$ . Desde que

$$\Phi = \int \vec{H} \cdot d\vec{s}, \quad (25)$$

a única forma do fluxo magnético permanecer constante quando desligamos o campo  $\vec{H}$  é se o anel gerar um próprio campo magnético. Isto daria surgimento a uma corrente  $i$  circulando no anel. Desde que a resistividade é nula para um supercondutor, esta corrente permaneceria por um longo período de tempo. Chamaremos estas correntes de *correntes persistentes*. Experimentos comprovam esta previsão de forma surpreendente; estas correntes duram anos.

### O Efeito Meissner-Ochsenfeld

Logo a descoberta da supercondutividade, Onnes mostrou por experimentos que um supercondutor quando exposto a um certo campo magnético externo crítico, ele deixa de ser supercondutor. Este fenômeno sugeria um mecanismo óbvio para o campo magnético dentro do supercondutor.

De (24) vemos que devemos ter  $\vec{B}$  independente do tempo no interior do supercondutor. Em outras palavras, o valor de  $\vec{B}$  é o mesmo que aquele no momento em que ele se torna supercondutor. Se aplicarmos um campo magnético externo ao material que se torna supercondutor, deveríamos ter uma curva do tipo mostrado na figura 2 logo abaixo.

Este gráfico nos mostra que  $\vec{B} = \vec{0}$  para todo  $|\vec{H}| \leq |\vec{H}_C|$  e o material é supercondutor, mas se  $|\vec{H}| > |\vec{H}_C|$  o material torna-se um condutor normal. Assim  $\vec{B} = \vec{H}$ , se nós desprezarmos os efeitos dia e paramagnéticos. Se ao contrário, reduzirmos agora o campo magnético aplicado, então o metal é um condutor normal quando  $|\vec{H}| \geq |\vec{H}_C|$ . Para  $|\vec{H}| < |\vec{H}_C|$ ,  $\vec{B} = \vec{H}_C$ . Contudo,  $\vec{B} \neq \vec{0}$  até mesmo quando  $\vec{H} = \vec{0}$ .

Esta irreversibilidade pode ser vista na figura 3.

Até o ano de 1933 acreditava-se que esta irreversibilidade existia. Era uma previsão coerente da teoria. Porém, neste ano, um experimento revolucionou a teoria dos supercondutores.

### Efeito Meissner-Ochsenfeld

Como já foi dito antes, W. Meissner e R. Ochsenfeld realizaram um experimento buscando comprovar a previsão acima, mas eles não encontraram os resultados teóricos previstos. Meissner e Ochsenfeld perceberam que o fenômeno da reversibilidade ocorria nos supercondutores. A figura 3.4 representa esta reversibilidade.

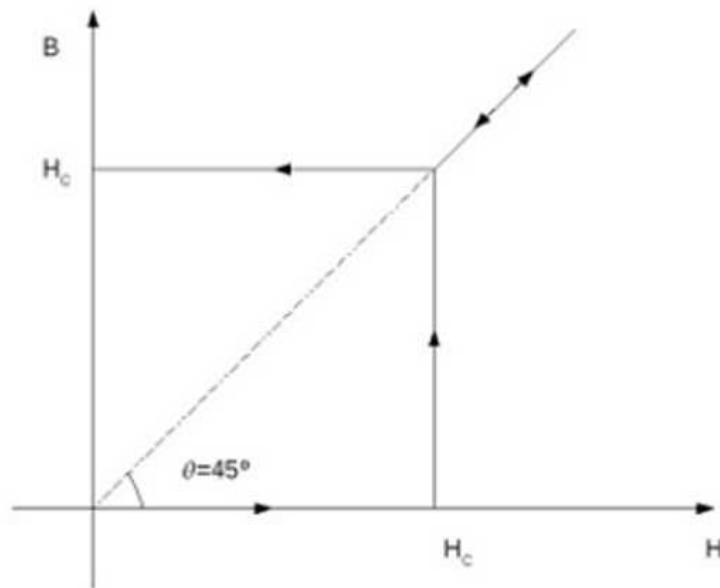


Figura 2: Curva de magnetização de um supercondutor.

A figura 4 mostra que quando eles resfriaram o metal até  $T < T_C$  o campo magnético  $\vec{H}$  era "expulso" do supercondutor, contrariando os resultados teóricos teóricos.

O mais surpreendente é que agora um supercondutor deveria possuir no seu interior um campo elétrico e magnético nulos. Isto o classifica como condutor perfeito e diamagnético perfeito. O fato dele ser diamagnético vem da equação do eletromagnetismo dada por

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad (26)$$

mas  $\vec{B} = \vec{0}$  (supercondutor), então

$$\vec{M} = -\vec{H}, \quad (27)$$

e lembrando que a susceptibilidade magnética é definida por

$$\chi = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0}, \quad (28)$$

temos de (26) que

$$\chi = -1, \quad (29)$$

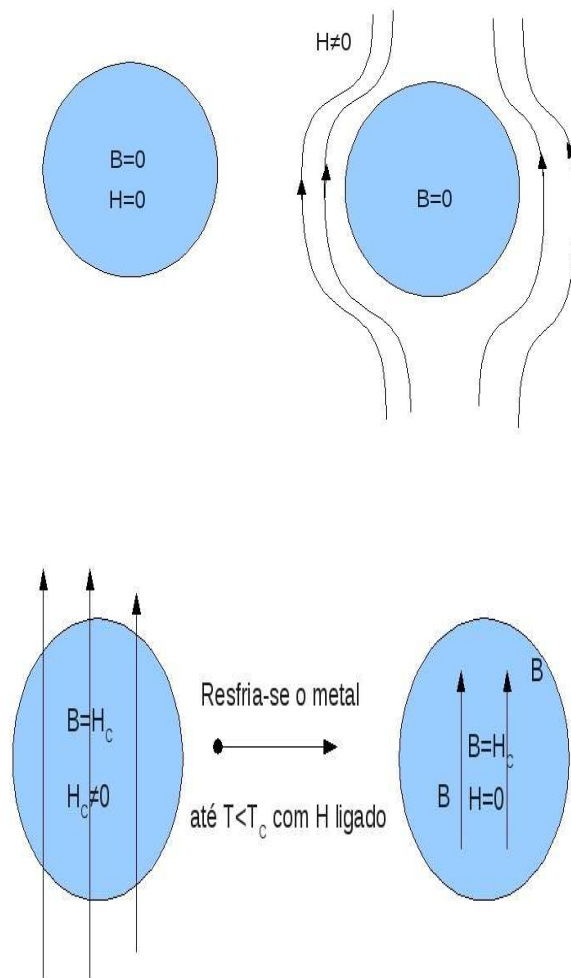


Figura 3: Irreversibilidade prevista para um supercondutor. Nas primeiras duas figuras, o metal está com uma temperatura abaixo da crítica. Nas outras duas, primeiramente ele se encontra numa temperatura  $T > T_C$  e posteriormente numa temperatura  $T < T_C$ , onde mantemos o campo externo  $H$  ligado.

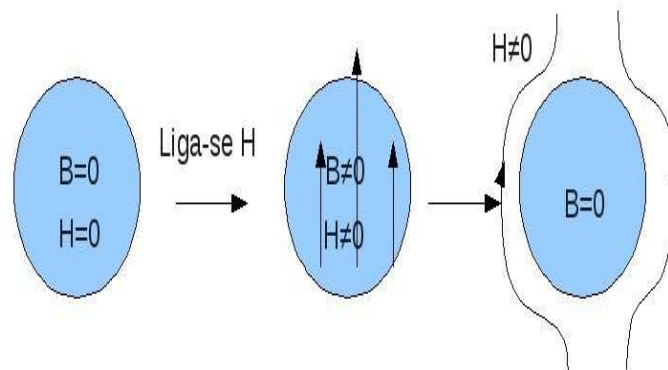


Figura 4: Reversibilidade encontrada no efeito Meissner-Ochsenfeld. Nas duas primeiras figuras  $T > T_C$ , enquanto na última  $T < T_C$ .

que caracteriza um diamagnético perfeito.

Este efeito de reversibilidade é exclusivo de supercondutores e agora é chamado de efeito Meissner-Ochsenfeld. Logo um supercondutor é aquele que apresenta o efeito Meissner-Ochsenfeld.

### Tipos de Supercondutores

A natureza possui dois tipos de supercondutores: do tipo I e do tipo II. A diferença entre os dois tipos reside no comportamento de cada tipo sob campos externos.

Um supercondutor do tipo I apresenta uma curva de magnetização  $\vec{M}$  em função de  $\vec{H}$  como mostra a figura 5.

A figura 5 mostra que quando um supercondutor do tipo I está sujeito a um campo externo  $\vec{H}_C$  ele deixa de ser supercondutor e  $\vec{M} = 0$ , mas para  $\vec{H} < \vec{H}_C$  ele se comporta como visto na expressão (27).

Já num supercondutor do tipo II temos uma curva  $\vec{M}(\vec{H})$  bem diferente (ver figura 6).

A análise da figura 6 nos diz que para campos  $\vec{H} < \vec{H}_{C1}$  o supercondutor se comporta como a expressão (27); para campos  $\vec{H}_{C1} \leq \vec{H} \leq \vec{H}_{C2}$  algum fluxo magnético atravessa o supercondutor; e para campos  $\vec{H} > \vec{H}_{C2}$  a supercondutividade é destruída.

A comparação de um supercondutor do tipo I com um do tipo II nos mostra a presença de vórtices no segundo tipo (ver figura 7). Veremos mais adiante a influência deste resultado experimental na teoria dos irmãos London.



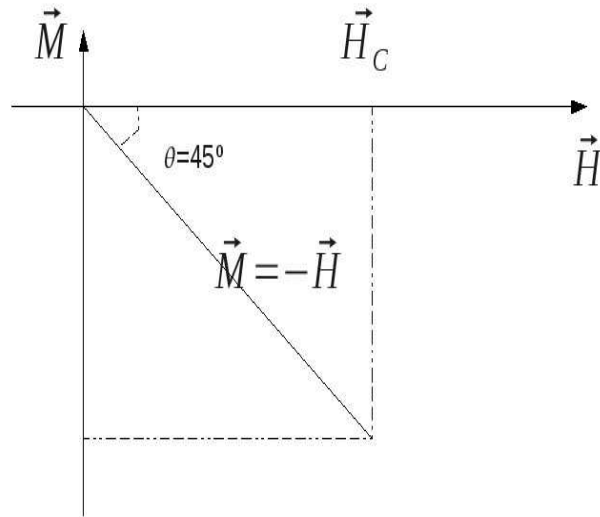


Figura 5: Magnetização  $\vec{M}$  em função de  $\vec{H}$  (supercondutores do tipo I).

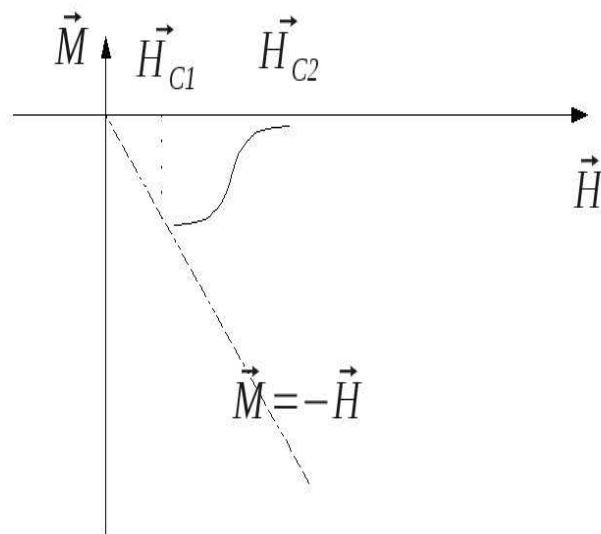


Figura 6: Magnetização  $\vec{M}$  em função de  $\vec{H}$  (supercondutores do tipo II).

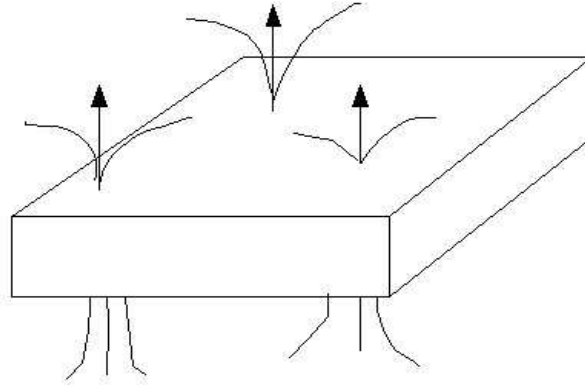


Figura 7: Vórtices num supercondutor do tipo II.

Um resultado experimental muito importante foi que estes vórtices possuíam uma característica muito peculiar; apenas quantidades múltiplas de  $h/2e$  (ver também capítulo 2 desta dissertação para um aprofundamento maior) conseguiam atravessar estes vórtices.

#### As Equações de London-London

Em 1939, dois irmãos físicos chamados de Fritz London e Heinz London, criaram a primeira teoria capaz de descrever a supercondutividade de forma satisfatória. O resultado que a teoria da superfluidade estava obtendo com a idéia que existiam "elétrons normais" e "elétrons supercondutores" influenciou muito nessa descoberta.

Utilizando a segunda lei de Newton para um elétron se movendo sob um campo eletromagnético e a equação (2), obtemos

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = -e\vec{E}, \quad (30)$$

$$-\frac{m}{ne} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -e\vec{E}, \quad (31)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\vec{E}}{\lambda^2}, \quad (32)$$

com

$$\lambda = \left( \frac{m}{ne^2} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

sendo o parâmetro de London. A equação (3.32) é conhecida como primeira equação de London-London. Ela representa claramente uma equação de aceleração: isto implica que depois de um pulso curto de campo elétrico, o sistema terá uma corrente que não decairá, que é uma propriedade da supercondutividade.

Para chegarmos na segunda equação de London-London, tomamos o rotacional de (32), para então

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}}{\lambda^2}, \quad (34)$$

mas  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (Lei de Faraday), daí

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{j}) = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (35)$$

ou finalmente

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{\vec{B}}{\lambda^2}, \quad (36)$$

que é a segunda equação de London-London. Esta equação mostra que mais que o campo elétrico, a supercorrente depende do campo magnético.

Estas duas equações também podem ser condensadas em uma equação com o potencial vetor magnético  $\vec{A}$ . Notando que o momento canônico  $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e\vec{A}}{c}$  e argumentando que na ausência de um campo aplicado deveríamos esperar um estado fundamental com momento total nulo, obtemos

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{A}}{mc}, \quad (37)$$

e então a corrente será

$$\vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle, \quad (38)$$

$$\vec{j} = -\frac{ne^2}{mc}\vec{A}, \quad (39)$$

ou ainda

$$\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\lambda^2 c}. \quad (40)$$

A equação (40) é chamada por alguns autores por equação de London pura e simplesmente, desde que tomando derivadas temporais de (40) obtemos a primeira equação de London e tirando o rotacional de (40) obtemos a segunda equação de London.

Os irmãos London sofreram algumas críticas na época à respeito da equação (40), porque o potencial vetor não tinha sentido físico muito claro. Hoje sabemos que o potencial vetor é o elemento principal para qualquer teoria eletromagnética.

## APÊNDICE B-DUALIDADE ENTRE HIGGS ABELIANO E A HIDRODINÂMICA DE KALB-RAMOND-NAMBU

A densidade Lagrangeana do modelo de Higgs Abeliano é definida como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 - V(\phi), \quad (1)$$

onde as quantidades  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  e  $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$  já haviam sido apresentadas nos capítulos anteriores. O potencial  $V(\phi)$  é conhecido como potencial de Higgs (ou de Landau) e é dado por

$$V(\phi) = -m_{\phi}^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{3!}(|\phi|^2)^2, \quad (2)$$

onde os parâmetros  $m_{\phi}^2$  e  $\lambda$  são da mesma forma que os definimos na teoria supercondutora de Ginzburg-Landau, ou seja,  $m_{\phi}^2 \propto (T - T_C)$  e  $\lambda > 0$ . Este modelo foi um pouco estudado na sessão 2.1.2 sobre linhas de vortex e por isso é crucial neste capítulo.

O estudo sobre as condensações de defeitos topológicos é extenso. Uma das ramificações destes estudos consiste justamente em entender o modelo de Higgs Abeliano em termos de teorias duais. No artigo de Sugamoto [25] é mostrado, por exemplo, que depois de algumas transformações duais o modelo de Higgs Abeliano fornece a mesma função de partição da hidrodinâmica de Kalb-Ramond-Nambu (KRN) [26][27] acoplada com o potencial de Higgs e que estas teorias possuem várias relações duais.

Quando estudamos o modelo de Villain vimos que uma transformada de Fourier (equação 2.83) era a responsável pela separação da Hamiltoniana de ondas de spin da Hamiltoniana de vórtices (2.101). Em várias situações nas teorias duais em matéria condensada o uso de uma transformada de Fourier é essencial. Segundo o próprio Sugamoto:

*"(...) Assim, não é exagero dizer que a transformação dual é um tipo de transformada de Fourier realizada no integrando da função partição."*

Ou seja, um dos métodos para se obter teorias duais é aplicar uma espécie de transformada de Fourier no integrando de uma função partição.

Neste artigo, Sugamoto consegue mostrar a dualidade existente entre a hidrodinâmica KRN e o modelo de Higgs Abeliano se utilizando do método de transformada de Fourier empregado também no artigo de José *et al.* [28] onde mostram como o modelo XY é transformado em uma teoria de ondas de spin com excitações de vórtices.

Baseado nos fundamentos do artigo de Sugamoto, os autores Ramos *et al.* [30] estudaram mais a fundo a dualidade existente entre Higgs Abeliano e a hidrodinâmica KRN. Eles calcularam o potencial efetivo do modelo dual e foram capazes de mostrar, à temperatura finita, que

ocorre transições de fase no modelo devido ao processo de condensação de vórtices. Mais ainda, determinaram a temperatura em que ocorre esta transição de fase.

Uma das maiores dificuldades da física atual é justamente como integrar sobre um ensemble de defeitos topológicos. No artigo [30] é elaborado uma maneira de superar este problema, mas o método apresentado é extremamente complicado e não nos deteremos nele a partir de agora. Nesta dissertação preferimos nos manter nos aspectos da função de Green do modelo sem nos preocupar como resolvemos a integração do ensemble de vórtices.

Em [30] faz-se uso também desta dualidade para se obter características da transição de fase do modelo de Higgs Abeliano através da hidrodinâmica KRN. A ação dual obtida naquela situação, sem a fixação de gauge, (em 3+1-D) é dada por:

$$S_{dual} = \int d^4x \left[ \frac{\mu_W^2}{2e^2\rho^2} V_\mu^2 + \frac{1}{4} (\mu_W W_{\mu\nu} - \partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 - \right. \\ \left. - \frac{m_\phi^2}{2} \rho^2 + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 + i\pi \frac{\mu_W}{e} W_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right], \quad (3)$$

onde  $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}}{4\pi} (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \chi_{sing.}(x)$  e  $W_{\mu\nu}$  é um campo antisimétrico auxiliar devido ao processo de "dualização" da teoria. O termo  $W_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$  evidentemente mostra a contribuição dos vórtices no modelo de Higgs abeliano e também é o termo responsável pela dualidade entre Higgs Abeliano e a hidrodinâmica KRN.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)