UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

JOSIAS NOGUEIRA BADARÓ

Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática

SÃO PAULO

2010

B124s Badaró, Josias Nogueira
Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática / Josias Nogueira Badaró – São Paulo : [s.n.], 2010.
122f.; il. ; 30 cm.

Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática.
Orientadora: Profª Drª . Rosana Nogueira de Lima.

1. Igualdade 2. Três Mundos da Matemática 3. Álgebra
I. Título.

CDD: 510

JOSIAS NOGUEIRA BADARÓ

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática

Dissertação apresentada como exigência parcial à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, para obtenção do título de ***MESTRE em Educação Matemática****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Rosana Nogueira de Lima****.*

SÃO PAULO

2010

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

Josias Nogueira Badaró

Significados do Símbolo de Igualdade numa Jornada por Três Mundos da Matemática

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, na Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, à seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Rosana Nogueira de Lima (Orientadora)
Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) em 2007.

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato (Membro Titular Externo - UNICSUL)
Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP-Rio Claro/SP) em 2005.

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro (Membro Titular Interno – UNIBAN)
Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP) em 2007.

UNIBAN
SÃO PAULO
2010

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocópias ou eletrônicos.

________________________ ____________________________

Dedico este trabalho a minha esposa, Edna e aos meus filhos: Filipe, Giovana e Thiago, porque trazem luz para a minha vida e me fazem desfrutar do verdadeiro amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e pelas graças que me concede, colocando na minha vida, pessoas especiais e possibilitando momentos como este.

A minha família pelo apoio e incentivo incondicionais e irrestritos, sem o qual eu não teria concluído esta jornada;

A Professora Rosana, pela amizade, carinho, extraordinária dedicação e desprendimento com que me orientou neste trabalho;

A todos os professores pelo apoio e interesse com que nos acompanharam desde o primeiro dia;

Aos professores da linha de pesquisa pela participação no dia a dia do nosso trabalho, com sugestões e considerações que só engrandeceram este trabalho;

A professora Vera, pelas perguntas que ajudaram a definir a minha pesquisa;

A todos os amigos da primeira turma, pois juntos formamos um grupo sensacional.

Aos amigos, Francisco, Yuri, e Victor e Paulo Freire pelo companheirismo nas viagens;

Aos amigos de todas as horas, Rosineide, Catia e Marcelo;

Aos "irmãos" Rosangela e Paulo Freire, pelo imenso carinho que me dedicaram e pelo apoio nas horas em que as coisas pareciam que não iam dar certo.

Há sem dúvida quem ame o infinito,
Há sem dúvida quem deseje o impossível,
Há sem dúvida quem não queira nada —
Três tipos de idealistas, e eu nenhum deles:
Porque eu amo infinitamente o finito,
Porque eu desejo impossivelmente o possível,
Porque quero tudo, ou um pouco mais, se puder ser,
Ou até se não puder ser...

Álvaro de Campos

RESUMO

A finalidade da pesquisa que realizamos foi encontrar significados para o símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática. Esses mundos formam o quadro teórico com o qual analisamos os dados de nossa pesquisa. Para atingir esse objetivo, fizemos uma pesquisa bibliográfica para levantamento dos significados, que foi estruturada em três fases: primeiro na história da notação algébrica do símbolo de igualdade; segundo no levantamento de significados obtidos em pesquisas na área de Educação Matemática, e, por último, nos significados dados ao símbolo de igualdade na Matemática. Na jornada que empreendemos pela história, procuramos identificar significados que pudessem ter sido atribuídos ao símbolo, ou símbolos, utilizados para representar a igualdade. Registramos o trajeto da representação da igualdade, desde a representação retórica, passando pela representação sincopada, até a representação simbólica adotada nos dias de hoje, mostrando a longa história desse conceito representado com o símbolo: “=”. Na segunda fase, nossa jornada foi até os trabalhos na área de Educação Matemática que pesquisaram significados atribuídos ao símbolo de igualdade em situações de aprendizagem da Matemática. Essa parte da nossa pesquisa encontrou, no trabalho de Kieran (1981), dois significados identificados como, *operacional* e *equivalência* e que, constatamos depois, balizaram direta ou indiretamente a maioria das demais pesquisas que utilizamos. Nossa terceira jornada foi mais breve, pois procuramos apenas alguns significados dados na Matemática ao símbolo de igualdade. Enquanto transcorriam as jornadas, fomos analisando os dados obtidos em cada etapa, e em todas elas encontramos significados para o símbolo de igualdade, com características dos Três Mundos da Matemática. Da história, dentre outros, quando analisamos os primeiros usos de símbolos, encontramos características do mundo corporificado. Características do mundo simbólico podem ser encontradas no significado de equivalência, e o uso do símbolo de igualdade para indicar uma identidade apresenta características do mundo formal.

Palavras-chave: Igualdade, Três Mundos da Matemática, Álgebra, Educação Matemática.

ABSTRACT

This research study aims at finding meanings for the equality symbol into each of the Three Worlds of Mathematics that compose the theoretical framework with which we analyzed our data. To achieve this goal, we have made a bibliographic research, which was structured in three phases: first, the study of the history of algebraic notation related to the equality symbol; then, a survey of meanings obtained by research studies in the field of Mathematics Education; and finally, a few meanings given to the equality symbol in Mathematics. During the journey we undertook in the history of mathematics, our efforts were to identify meanings that might have been assigned to the symbol, or symbols, used to represent equality. We have reported the path of the different representations of equality from the rhetorical representation, through the syncopated representation, to the symbolical representation adopted nowadays, in a way to present the long history of the concept represented by the symbol "=". In the second phase of our research study, our journey has been through studies in the field of Mathematics Education, which presented meanings attributed to the equality symbol in Mathematics learning situations. We have found, in the work of Kieran (1981), two such meanings, *operational* and *equivalence*, which, as we have found out later, guided direct or indirectly, most of the other research studies we have presented in this phase. Our third journey was shorter, as we were seeking for just a few meanings given to the equality symbol in Mathematics. As the journeys proceeded, we analyzed the data obtained at each stage; and, in all of them, we have found meanings for the equality symbol within the Three Worlds of Mathematics. From history, among others, when we analyze the first uses of symbols, we mainly found characteristics of the embodied world. Characteristics of the symbolic world have been found in the equality symbol as equivalence; and the use of the equality symbol to indicate an identity presents characteristics of formal world.

Keywords: Equality, Three Worlds of Mathematics, Algebra, Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Símbolos como processos e conceitos 33

Figura 2: Desenvolvimento cognitivo através dos Três Mundos da Matemática 37

Figura 3: *Clavis Mathematicae,* de Oughtred 52

Figura 4: Fragmento do Papiro Rhind. 54

Figura 5: Tradução do fragmento do papiro Rhind 55

Figura 6: Manuscrito BAKHSHALI 56

Figura 7: *The Whetstone of Witte*. 60

Figura 8: Apresentação da Soma e Subtração 74

Figura 9 : Linha do Tempo dos Períodos Matemáticos 76

Figura 10: Ilustração da Balança de dois pratos 89

Figura 11: 1ª Tarefa 90

Figura 12: 2ª Tarefa 91

Figura 13: 4ª Tarefa 91

Figura 14: Exemplo do uso do símbolo de igualdade como indicador do lugar para colocar a resposta 108

Figura 15: Balança de dois pratos 109

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Alguns símbolos utilizados por Diofanto de Alexandria 49

Quadro 2: Símbolos encontrados na "Jornada pela História" 69

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14

CAPÍTULO 1: METODOLOGIA...21
1.1 A busca por significados...23
1.1.1 Buscando significados na evolução da notação algébrica 23
1.1.2 Buscando significados na área da Educação Matemática 25
1.1.3 Buscando significados na Matemática...26
1.1.4 Buscando significados ecléticos 27
1.2 Os Três Mundos da Matemática como componente de análise 27
1.3 O processo de análise dos dados 28

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA...30
2.1 Os Três Mundos da Matemática 30
2.1.1 Os “já encontrados”...35
2.1.2 Jornada entre os Três Mundos da Matemática.................................37
2.2 Símbolo e Significado...38

CAPÍTULO 3: JORNADA PELA HISTÓRIA...41
3.1 O Início 42
3.2 A História do Símbolo de Igualdade 44
3.2.1 A notação algébrica 45
3.2.2 Precursores 54
3.2.3 Porque duas coisas não podem ser mais iguais 58
3.2.4 Descartes 61
3.2.5 Símbolos Concorrentes...62
3.2.6 Variações no formato..64
3.2.7 Variações na maneira de utilização 65
3.2.8 Variações de significados 65
3.2.9 A consagração do “=” 67
3.2.10 Análise dos símbolos de igualdade ao longo da história..................70

CAPÍTULO 4: JORNADA PELAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA .78
4.1 Pesquisas em Educação Matemática 79
4.1.1 Significado Operacional...81
4.1.2 Significado de Equivalência 89

4.1.3 Pesquisas realizadas no Brasil 95
4.2 Além dos significados do símbolo de igualdade 98
4.3 Alguns significados do símbolo “=” na Matemática 100
4.4 Significados Ecléticos 103

CAPÍTULO 5: SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO “=” NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA 105
5.1 Mundo Corporificado...108
5.2 Mundo Simbólico 109
5.3 Mundo Formal 110
5.4 Síntese dos significados nos Três Mundos da Matemática.....................111

CONSIDERAÇÕES FINAIS 113
1 Sobre as conclusões deste trabalho..113
2 Os significados nas pesquisas e na história 114
3 Os significados nos Três Mundos da Matemática.......................................115
4 Os “já encontrados” 116
5 Refletindo sobre os Três Mundos da Matemática.......................................117
6 Epílogo...118

Referências 120

INTRODUÇÃO

Difícil imaginar que alguém tenha estudado Matemática e não tenha se deparado com o símbolo de igualdade. Não são poucas as vezes em que este símbolo é colocado na nossa frente, como a nos desafiar para resolvermos uma situação qualquer que nos é proposta.

Mesmo que o símbolo de igualdade não esteja presente explicitamente, a ideia que ele carrega é apresentada muito cedo às crianças, pois, mesmo antes de atingirem a idade escolar, é comum que as vejamos desafiadas a responder questões como: “Quanto é um mais um?”.

Mesmo que uma criança ainda não tenha percebido, quando faz a conta e declara o resultado, está implicitamente envolvida com a utilização do conceito de igualdade. Ela realizou a soma e, mesmo que não tenha sido apresentada ao símbolo de igualdade, vivenciou uma situação que será comum durante a vida escolar.

Seguindo nessa linha de raciocínio, alguns questionamentos começaram a surgir: Será que o símbolo de igualdade desempenha apenas o papel de indicar uma igualdade? Terá ele outros significados de acordo com a situação em que é utilizado, de acordo com o desenvolvimento da Matemática, da notação algébrica, ou do próprio indivíduo que a utiliza? Se existirem, quais seriam esses outros significados? Como é possível relacionar todos estes questionamentos com os Três Mundos da Matemática?

À procura de respostas para algumas dessas perguntas, fizemos uma jornada por outras pesquisas da área de Educação Matemática que encontraram alguns significados atribuídos pelos alunos ao símbolo de igualdade.

Mas os significados do símbolo de igualdade encontrados em outras pesquisas não respondiam a todas as perguntas. Ao contrário, algumas outras questões engendraram-se, estendendo as dúvidas para os aspectos históricos do símbolo de igualdade: Como o símbolo de igualdade se comportou ao longo da história? Qual é a sua própria história? Essa história foi influenciada ou influenciou o desenvolvimento da Matemática?

Essa motivação de estudar o símbolo de igualdade casava com a intenção que tínhamos inicialmente de fazer uma pesquisa com a utilização de um novo quadro teórico, e, se possível, fazer uma pequena contribuição para o seu desenvolvimento.

Esse quadro teórico é os Três Mundos da Matemática (TALL, 2004), que considera pelo menos três diferentes tipos de conceitos em Matemática, agrupados em três mundos: Mundo Conceitual Corporificado, Mundo Proceitual Simbólico e Mundo Formal Axiomático.

Com a história, os significados já encontrados e o quadro teórico, percebemos que estávamos diante de coisas que aparentavam ter características distintas, que não seriam possíveis de se relacionar, mas que, tais quais as partes distintas que formam um mosaico, agregadas de maneira adequada, formariam um novo objeto, e poderiam fornecer conclusões que poderiam colaborar para o entendimento do papel do símbolo de igualdade no estudo da Matemática e trazer uma colaboração para o desenvolvimento do novo quadro teórico.

Da visualização completa desse mosaico, chegamos, por fim, ao objetivo consolidado da pesquisa, ou seja, colaborar com o desenvolvimento do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, identificando significados para o símbolo de igualdade em cada um dos mundos. Aliado a este objetivo, e considerando os questionamentos levantados acima, pretendemos responder às seguintes questões de pesquisa:

→ *É possível identificar significados para o símbolo de igualdade nas pesquisas da área de Educação Matemática e na história da notação desse símbolo?*

→ *Esses significados têm características dos Três Mundos da Matemática?*[1]

→ *Os significados dados ao símbolo de igualdade na Matemática podem habitar algum dos Três Mundos da Matemática?*

→ *Existe alguma similaridade entre o desenvolvimento cognitivo apresentado no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática e a evolução da notação da igualdade ocorrida ao longo da evolução da Matemática?*

---

[1] Esse quadro teórico será apresentado na página 28.

→ *Qual o papel dos "já encontrados"*[2] *no entendimento dos significados matemáticos do símbolo de igualdade?*

A partir de agora, está iniciada a jornada em busca de significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática.

Com esse intuito, faremos um breve relato da história da notação algébrica e uma narrativa mais detalhada da história do símbolo de igualdade. Também apresentaremos um resumo e uma análise de significados dados ao símbolo, por alunos de diferentes níveis de ensino, com base em pesquisas anteriores, e como esses significados podem ser entendidos numa nova teoria que trata do desenvolvimento cognitivo. Trataremos do símbolo de igualdade, da pseudossimplicidade que ele apresenta, tornando-se, pois, uma preocupação e um problema no ensino da Matemática.

Como será apresentado nos capítulos posteriores, o símbolo de igualdade tem uma longa história, repleta de influências da cultura na qual era utilizado e com significados cada vez mais complexos na sua utilização. Da mesma forma que os significados, a representação gráfica do símbolo de igualdade foi sendo alterada ao longo do tempo, também por influência do meio social e do autor, seguindo conveniências de cada época, chegando ao ponto de que uma determinada representação gráfica tivesse significado oposto ao usual, dependendo de quem o utilizasse.

O símbolo gráfico que utilizamos hoje em dia para o símbolo de igualdade é antigo (tem mais de 450 anos), mas conviveu por muitos séculos com outras formas de representação até que uma delas prevalecesse e chegasse até nós.

Quando pensamos em outros fatores que podem influenciar no entendimento do símbolo de igualdade na Matemática, encontramos a questão dos saberes anteriores. Hoje em dia é bastante comum ouvirmos sobre os direitos e igualdades a todos os indivíduos, com extraordinária ênfase aos direitos individuais e coletivos. Desde cedo, aprendemos o significado sociológico de igualdade e, por contraposição, o significado de diferença; quando o aluno chega à sala de aula, logo esses conceitos trazidos do meio social são confrontados com o que ensinamos nas nossas aulas de Matemática, nem sempre com os mesmos significados do senso comum.

[2] Esse conceito faz parte do quadro teórico "Três Mundos da Matemática" e será apresentado na página 33.

Vivemos o tempo que se valoriza mais o “ter” do que o “saber”, da exigência das respostas rápidas, do rápido comer, andar, viver. Aprender é um processo e demanda tempo, e aprender Matemática não é exceção. Cremos até que o processo de aprendizagem permeia a vida toda, nunca se encerrando. Mesmo quando ensinamos, estamos aprendendo.

A evolução dos conceitos matemáticos realizou-se ao longo de séculos (e ainda se realiza), o que se contrapõe à “pressa” com que vivemos e esperamos que a Matemática seja aprendida.

Muitos erros advêm dessa situação, e um deles é o de fazer suposições sobre o que os alunos já sabem. Premidos pelo tempo, muitas vezes, não nos damos conta de que aquilo que nos parece óbvio talvez não o seja para outras pessoas. Problemas com o óbvio são comuns entre o especialista e o leigo, por exemplo, o médico e o paciente ou o professor e o aluno.

Quando olhamos para o ensino da Matemática, identificamos que alguns cuidados deveriam ser tomados com o que é, ou não, óbvio. Dentro desse espírito, **Bell**[3] afirmou: “O óbvio é a palavra mais perigosa da Matemática” (tradução nossa[4]).

O professor, nas lides diárias, preparando as aulas que ministrará, em geral, se preocupa com os conhecimentos matemáticos dos alunos, e pensa numa porção de coisas que acredita seja importante o aluno saber “a priori”. Se for iniciar, por exemplo, o ensino das Equações Polinomiais de Segundo Grau, preocupa-se em saber se eles dominam, ou conseguem resolver, situações-problemas que envolvem operações com raízes, se entendem pelo menos os conceitos básicos de equação, se sabem o significado das palavras: variável, incógnita, raízes, discriminante; afinal, são conceitos geralmente apresentados pela primeira vez na escola, nas aulas de Matemática, e que possuem significados matemáticos essenciais para a compreensão do assunto que será iniciado.

Em outras situações de aprendizagem, não é diferente. Entretanto, nem sempre, ou talvez quase nunca, os professores se preocupam em saber se os alunos entendem algumas coisas que parecem simples ou até mesmo são tratadas como óbvias. Essa é uma situação bem comum com palavras ou expressões que

---

[3] Eric Temple Bell (1883 - 1960), matemático nascido na Escócia.
[4] "Obvious" is the most dangerous word in mathematics. A citação foi obtida em 12 /12/2009 no site: http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/ascquotb.html

não são originadas, ou pelo menos não aprendidas originalmente, nas aulas de Matemática.

"Óbvio", talvez, nem seja a palavra mais perigosa da Matemática, mas, provavelmente, causa muito prejuízo para quem ensina e para quem aprende. É difícil saber de antemão o que os alunos sabem, e, assim como não podemos imaginar que eles não sabem nada, não podemos imaginar que um conceito seja óbvio. O que é óbvio para uma pessoa não é obrigatoriamente óbvio para outra.

Desde que nascemos, somos "apresentados a" e utilizamos, no linguajar cotidiano, expressões como "igual", "diferente", "igualdade", "desigualdade", que são amplamente utilizadas no dia a dia do ensinar e do aprender Matemática. Mas quantas vezes há a preocupação em saber o que os alunos entendem por "igual", "igualdade", por exemplo? Será que o professor se preocupa em saber, para esse mesmo ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau, o que o aluno sabe sobre igualdade? Em geral, esses conceitos parecem óbvios aos professores e podem ser tratados como se o senso comum conseguisse dar conta de tudo o que, do uso deles, se pode depreender. Nem sempre procuram descobrir a "Imagem de Conceito"[5] que os alunos possuem, nem percebem a dificuldade de compressão que representam, pois não possuem instrumentos para identificar quão complexos esses conceitos são e também não conseguem avaliar o desenvolvimento cognitivo que os alunos precisam possuir para que compreendam, e façam uso adequado desses conceitos na aprendizagem da Matemática.

Com os objetivos e questões de pesquisa definidos, o nosso trabalho será uma jornada pela história, pelos significados que carrega e pelos Três Mundos da Matemática, tendo o símbolo de igualdade como ponto de convergência.

O primeiro passo dessa jornada será pelo caminho da Metodologia, apresentada no capítulo 1, buscando esclarecer como este trabalho foi construído, e de que forma as pesquisas que o embasam foram realizadas.

O passo seguinte é a Fundamentação Teórica, que é apresentada no capítulo 2, e mostrará sobre quais pilares as pesquisas e as conclusões estão alicerçadas.

---

[5] [...] estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que incluí todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL e VINNER, 1981, *apud* LIMA, 2007, p. 86)

Mas, para falar de um símbolo com mais de quatrocentos anos de idade, precisamos de uma jornada ao passado. Essa parte da nossa jornada será iniciada pela história da notação algébrica (capítulo 3) e de como ela evoluiu das contagens primitivas, passando pelos registros feitos de forma discursiva até os registros simbólicos como resultado da necessidade de compactar as informações, de tal forma que pudessem ser aglutinadas para transmitir, num registro simplificado, um conjunto maior de conceitos e significados.

Apresentada a história do símbolo de igualdade e o papel que ele desempenhou ao longo do desenvolvimento da Matemática, nossa jornada nos levará aos significados que já foram encontrados para o símbolo de igualdade, descritos no capítulo 4. As fontes dos dados serão pesquisas realizadas no âmbito da Educação Matemática que procuraram descobrir que significados os alunos dão ao símbolo de igualdade, em diversos momentos, no ambiente escolar, em diversos níveis.

Ainda no capítulo 4, vamos apresentar alguns significados adotados na Matemática e realizaremos uma rápida passagem para o conhecimento que os alunos já possuem, herdados do senso comum, quando iniciam o estudo de tópicos da Matemática. Também neste capítulo vamos abordar alguns aspectos relacionados ao símbolo de igualdade, além dos significados, visando complementar o entendimento que procuramos.

Como elemento fundamental da nossa pesquisa, procuraremos demonstrar, no capítulo 2, como o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática está estruturado e utiliza a "Imagem de Conceito" para nos apresentar a ideia dos "já encontrados", buscando mostrar a importância dos saberes anteriores que as crianças já possuem quando entram na escola. Para isso, apresentaremos a estrutura e o funcionamento do desenvolvimento cognitivo, da forma como ele é explicado no quadro teórico, e de alguns habitantes desses mundos, como o conceito de processo amalgamado ao conceito, o *"proceito".*

Precedendo a conclusão e já dispondo dos insumos necessários, o trabalho apresentará no capítulo 5, os possíveis significados que o símbolo de igualdade pode apresentar em cada um dos Três Mundos da Matemática.

Nas considerações finais, apresentaremos as conclusões sobre as questões de pesquisa e uma avaliação sobre o alcance do trabalho em relação aos Três Mundos da Matemática. Também pretendemos tecer considerações sobre alguns cuidados que, entendemos, precisam ser tomados com relação ao ensino de situações matemáticas que envolvam o símbolo de igualdade e deixar algumas sugestões de pesquisas que possam avançar além dos nossos resultados.

CAPÍTULO 1
METODOLOGIA

A nossa proposta para este trabalho é fazer uma pesquisa bibliográfica, procurando encontrar, em pesquisas anteriormente desenvolvidas na área da Educação Matemática, e na história da Matemática, particularmente na história da Notação Algébrica, elementos sobre o símbolo de igualdade que nos possibilitem identificar quais significados esse símbolo pode assumir em cada um dos Três Mundos da Matemática.

A nossa opção pela pesquisa bibliográfica se deu pelo fato de entendermos que, dessa forma, poderíamos encontrar mais significados do que se realizássemos, nós mesmos, uma pesquisa, e também porque, assim, poderíamos ter uma visão mais ampla no que se refere a esses entendimentos por faixa etária.

Essa decisão, de início, nos levou a procurar por trabalhos na área da Educação Matemática que já houvessem pesquisado possíveis significados que os alunos dão ao símbolo de igualdade e as consequências que tais interpretações podem acarretar na aprendizagem do conteúdo trabalhado.

Depois de ter contato com algumas dessas pesquisas, começamos a perceber que alguns fatores poderiam contribuir para os significados que "aparecem" na compreensão das crianças[6] nos momentos de aprendizagem da Matemática, nos quais a noção e a notação de igualdade são apresentadas aos alunos. Também verificamos que algumas das pesquisas que estávamos analisando tinham por objetivo apenas identificar os significados que as crianças apresentavam na resolução de questões relacionadas às igualdades algébricas e aos problemas que alguns desses significados trazem para o desenvolvimento do raciocínio algébrico sem, no entanto, procurar identificar processos anteriores da formação do conhecimento que pudessem justificar os comportamentos adotados por elas diante das situações apresentadas nas pesquisas.

---

[6] As pesquisas que encontramos foram realizadas com crianças com idades entre 5 e 12 anos.

Durante as aulas das disciplinas que compunham o currículo do Mestrado, passamos a observar o uso do conceito de igualdade, tanto na forma coloquial quanto por meio do símbolo algébrico que é utilizado na Matemática. Em seguida, anotar significados encontrados nas mais diversas situações passou a fazer parte da rotina de registros para a elaboração deste trabalho e que, acreditamos, será importante nas análises que pretendemos fazer.

Como é nosso entendimento e baseando-nos no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, que o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem da Matemática que os indivíduos realizam mantém entre si uma relação direta de crescimento, decidimos procurar alguns significados que os indivíduos já possuem sobre igualdade quando vão para a escola e considerar tais conhecimentos na interpretação dos significados que elas apresentam nas aulas de Matemática.

Acreditamos também que a evolução da notação algébrica, e em particular da notação simbólica utilizada para indicar a igualdade, poderia apontar um desenvolvimento no pensamento algébrico que caracterizaria o símbolo de igualdade com uma complexidade que nem sempre reconhecemos de imediato. Com esse pensamento, nos dedicamos a pesquisar a história da notação algébrica em busca desses elementos para compor o nosso conjunto de instrumentos de análise.

Por fim, entendemos que devíamos procurar na própria Matemática por significados que tenham sido atribuídos ao símbolo de igualdade como parte importante na nossa fonte de dados.

Com isso em mente, construído o arcabouço da nossa pesquisa, depreendemos que da interpretação e entendimento dos papéis desses elementos obtidos nas fontes citadas acima, surgiram os subsídios necessários para identificarmos alguns significados que o símbolo de igualdade pode apresentar em cada um dos “Três Mundos da Matemática”.

1.1 A busca por significados

Uma vez decididas as fontes da nossa pesquisa, apresentamos a seguir o processo de obtenção desses dados e de como foram organizados, mantendo em vista o objetivo do nosso trabalho de encontrar significados para o símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática.

1.1.1 Buscando significados na evolução da notação algébrica

Quando iniciamos o levantamento da história do símbolo de igualdade na Matemática, percebemos que o nosso trabalho não poderia se restringir a um registro da história da origem do símbolo tal qual o utilizamos hoje. Percebemos que o processo histórico desse símbolo foi iniciado muito antes dele ter sido cunhado e se consagrou muito tempo depois dele ter sido utilizado pela primeira vez.

Ele faz parte de todo um conjunto se situações da evolução da notação algébrica, que está diretamente ligado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Decidimos então, relatar de maneira resumida, a evolução da notação algébrica, voltando até os primórdios de tais registros, que identificamos serem os registros das primitivas noções de contagem:

> Houve um tempo em que os homens não deviam saber contar. Tanto quanto nos é possível supor, o conceito de número devia resistir no seu espírito o aspecto de uma realidade concreta, indissociável da natureza dos objetos, reduzindo a uma espécie de percepção direta da pluralidade material. Nossos longínquos ancestrais deviam, portanto, muito

> provavelmente se encontrar na incapacidade mental de conceber números por eles mesmos, isto é, sob o ângulo da abstração; [...]. Isso pode nos parecer difícil de admitir pelo fato de que em épocas relativamente recentes a ciência matemática conheceu progressos tão rápidos e tão espantosos, que a simples questão numérica se tornou um jogo de criança para o homem moderno (IFRAH, 1997, v. 1, p. 5).

As fontes de dados relacionados à história da Matemática e às formas de notação algébrica são livros de historiadores renomados e referências bibliográficas em curso de História da Matemática.

A escolha inicial dos livros se processou pela quantidade de vezes que os autores eram citados em trabalhos acadêmicos. Para obter a relação, foram utilizados mecanismos de procura na *internet*, especificamente desenvolvidos para procura de trabalhos acadêmicos[7].

Para a História da Matemática, as pesquisas indicaram dois autores: **Boyer**[8] com seu livro *História da Matemática* e **Eves**[9] com Introdução a *História da Matemática*.

A partir da leitura dos livros selecionados inicialmente, fomos obtendo referências para assuntos específicos e algumas dessas referências passaram a fazer parte da nossa fonte de dados.

Ao pesquisar a história do símbolo de igualdade, uma obra mostrou-se a principal referência sobre a história da notação matemática, tendo sido citada em todas as outras obras que encontramos sobre o assunto: *A History of Mathematical Notations* publicada pela primeira vez no final da década de 20 do século passado por **Cajori**[10]. Esse livro teve reconhecimento mundial, sendo ainda, a principal referência sobre o assunto: "[...] é simplesmente monumental e permanece insuperável em erudição e detalhes meticulosos" (ZUND, 1999, p.190-191, tradução nossa[11]).

---

[7] Google Acadêmico: http://scholar.google.com.br/schhp?hl=pt-BR
[8] Carl Benjamin **Boyer** (1906-1976), matemático e historiador norte-americano.
[9] Howard Whitley **Eves** (1911-2004), matemático e historiador norte-americano.
[10] Florian **Cajori** (1859-1930). Matemático nascido na Suíça, mas migrou ainda jovem para os EUA, onde desenvolveu a sua carreira de matemático e historiador.
[11] "[...] is simply monumental and remains unsurpassed in its detail and meticulous scholarship."

A maneira como Cajori (2007a) organiza os dados sobre a notação algébrica por meio de parágrafos e relacionando-os permite ao leitor montar a história dos principais símbolos utilizados na Matemática. Ele inclusive dá um grande destaque ao símbolo de igualdade, o que nos permitiu montar a cronologia da sua história.

Depois de nos posicionarmos em relação à história da notação algébrica no surgimento do símbolo de igualdade utilizado nos nossos dias, o passo seguinte foi organizar os dados históricos encontrados sobre o símbolo, extrair desses dados os possíveis significados que a história traz até os nossos dias e procurar situações em que o símbolo de igualdade possa ter sido influência ou ter influenciado, contribuído ou sido um estorvo para o desenvolvimento e entendimento da Matemática.

1.1.2 Buscando significados na área da Educação Matemática

Logo no início do nosso levantamento sobre trabalhos publicados que apresentassem possíveis significados e maneiras de utilização do símbolo de igualdade, ficou evidente que o assunto foi, e ainda é, alvo de inúmeras pesquisas. Com o auxílio de instrumentos contemporâneos de pesquisa da informação, encontramos na *internet* uma quantidade muito grande de trabalhos publicados.

A primeira constatação foi que o volume disponibilizado para leitura era desproporcional ao tempo disponível para realização deste trabalho, sendo então necessário elaborar alguns critérios de seleção entre as pesquisas encontradas.

Uma característica comum entre as pesquisas é a citação que umas fazem de outras, ou seja, algumas publicações são mencionadas em muitas outras. Dessa observação, criou-se o critério de seleção: as pesquisas que tivessem sido mais citadas em outras seriam contempladas neste trabalho. Utilizando ainda as ferramentas de procura na *web*, foi possível fazer uma classificação das pesquisas que mais vezes serviram de base ou de referência para outras, o que permitiu uma concentração de esforços num grupo muito menor de fontes da lista de trabalhos encontrados.

Verificado o resultado final da seleção de pesquisas, percebemos que, no conjunto selecionado, não havia nenhuma que houvesse sido feita no Brasil. No entanto, entendemos que, mesmo fora das pesquisas selecionadas pelos critérios iniciais, seria oportuno para o nosso trabalho, se trouxéssemos resultados de pesquisas realizadas no Brasil, dentro da realidade do nosso sistema de ensino. Voltamos aos mecanismos de pesquisa na *internet* e encontramos somente duas pesquisas que acrescentamos ao conjunto formado pelos critérios iniciais.

De uma maneira geral, todos os textos tratam do símbolo de igualdade como elemento importante para a constituição do pensamento algébrico, e da forma como a compreensão errada ou limitada que se faz dele compromete o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Das pesquisas que utilizaremos para análise, destacamos o trabalho de Kieran (1981) não só pela quantidade de vezes que foi referenciado, mas também pela forma como o agrupamento em duas categorias que ela propôs para o significado do símbolo de igualdade, *operacional* e *equivalência*, tem sido base para outros estudos. Da mesma forma, nosso trabalho utilizará tal categorização para organizar a análise que faremos das demais pesquisas.

1.1.3 Buscando significados na Matemática

Ao longo da nossa pesquisa, nos deparamos, às vezes, com trabalhos que tratavam da notação algébrica, com textos que apresentavam definições de igualdade no âmbito da Matemática. Isso nos despertou a atenção para o fato de que, quando estivéssemos analisando os significados encontrados nas outras fontes, seria oportuno ter algumas referências de significado de igualdade na própria Matemática, como elemento guiador entre o conteúdo matemático e os significados encontrados nas demais fontes que pesquisamos. Então, decidimos utilizar três fontes diferentes, escritas em épocas e com objetivos diferentes: a visão filosófica de

Freudenthal (1999), a utilização em equações de Usiskin (1995), e a abordagem epistêmica em números reais, de Wilhelmi, Godino e Lacasta (2004).

1.1.4 Buscando significados ecléticos

O vocábulo “igualdade” faz parte de um conjunto de palavras das quais nos apropriamos desde os primeiros anos de vida. Nada mais normal, então, que o significado que a criança possua para ele seja levado para a sala de aula e seja utilizado como um conhecimento prévio na tentativa de resolução de uma situação matemática que lhe seja apresentada em sala de aula.

Procuramos, então, encontrar alguns desses significados prévios e utilizá-los como elementos que nos ajudem na busca dos significados, que é o objeto do nosso trabalho.

Para obter esses significados, fizemos registros dos significados para igualdade que encontrávamos nas aulas que fizemos durante o mestrado e na leitura de textos e livros.

1.2 Os Três Mundos da Matemática como componente de análise

Outro componente desta pesquisa é o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. As informações que serão utilizadas neste trabalho, os conceitos, a estrutura e o funcionamento foram obtidos no site pessoal de David Tall[12], na página

[12] www.davidtall.com

de professor do *site* da Universidade de Warwick[13], de palestras que ele proferiu no Brasil e da tese de doutorado de Lima (2007).

Acreditamos que, mesmo sendo uma pesquisa bibliográfica, este trabalho possui um diferencial, pois pretende fazer uma contribuição para um novo quadro teórico, encontrando significados para o símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática.

1.3 O processo de análise dos dados

Os dados obtidos nas pesquisas passarão por análises diferentes, de acordo com as fontes, mas com a mesma preocupação de encontrar significados dados ao símbolo de igualdade.

Na análise dos dados obtidos na história do símbolo de igualdade, pretendemos verificar se a maneira como se procedeu a evolução da notação desse símbolo está relacionada ou representa o pensamento matemático da época onde foi utilizado, e se tal evolução acompanha o desenvolvimento do pensamento algébrico que se processou ao longo dos últimos séculos, carregando-o com significados, conceitos e processos, de tal forma que o símbolo, “=”, que hoje utilizamos, possa ser habitante do todos os Mundos da Matemática.

Por sua vez, os dados obtidos nas pesquisas em Educação Matemática sobre o símbolo de igualdade serão analisados quanto ao tipo de significado e os possíveis relacionamentos que possam ser feitos com os Três Mundos da Matemática. Isso será feito ao longo da apresentação de cada uma das pesquisas, procurando, também, encontrar indicadores do desenvolvimento cognitivo em cada um dos significados apontados por essas pesquisas.

[13] www.warwick.ac.uk/staff/david.tall

Com isso, esperamos encontrar subsídios para identificar componentes dos significados para que possamos compará-los com as características de cada um dos Três Mundos da Matemática.

CAPÍTULO 2
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Ao longo deste capítulo, apresentaremos a estrutura dos Três Mundos da Matemática, como eles se relacionam com o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, e como os significados se desenvolvem por esses mundos.

Ao longo deste trabalho, nas análises que faremos, procuraremos sempre relacionar significados que forem encontrados com as características de cada um dos Três Mundos da Matemática

Também neste capítulo, apresentaremos qual entendimento de “significado” e de “símbolo” serão utilizados neste trabalho.

2.1 Os Três Mundos da Matemática

O pesquisador David Tall, professor emérito da *University of Warwick*, é internacionalmente reconhecido por trabalhos que publicou individualmente ou em parceria com outros grandes nomes da Educação Matemática, como, por exemplo, Shlomo **Vinner** e o desenvolvimento da teoria de “Imagem de Conceito”.

Já durante os estudos que resultaram no livro *Advanced Mathematical Thinking*, em 1991, Tall apresentava reflexões e a possível formatação de um quadro teórico que integraria corporificação, encapsulamento de um processo em um objeto e prova formal em Matemática. Na conclusão desse livro, no último capítulo, Tall propõe a existência de pelo menos três diferentes tipos de Matemática: uma construída por meio da identificação das propriedades e suas coerências; outra, do encapsulamento de processos em conceitos; e a terceira baseada num conjunto de definições teóricas e provas, de acordo com a visão formalista da Matemática, elaborada por **Hilbert**[14].

Seguindo no desenvolvimento desse quadro teórico, Tall (2004) nos mostra que, de cada um dos três diferentes tipos de Matemática, emerge um tipo diferente de desenvolvimento cognitivo, que ele descreve como pertencendo a três mundos diferentes.

Esses mundos não são isolados nem podem ser considerados como “estágios de desenvolvimento”, mas devem ser entendidos como resultante do crescimento cognitivo que cada indivíduo obtém e da evolução do pensamento Matemático que cada um constrói. Cada um desses mundos representa uma condição desse pensamento matemático, que pode ser utilizado da maneira que seja conveniente, de acordo com a situação matemática com que cada indivíduo esteja se confrontando.

Frequentemente, realizamos jornadas pelos mundos da Matemática para fazer frente a algumas dessas situações, e é natural que, para resolvermos o desafio matemático com o qual estamos nos deparando, façamos uso do repertório de conhecimento que se encontra em mais de um desses mundos.

O conhecimento e a evolução do pensamento matemático são resultado de um processo que demanda tempo, necessidade e oportunidade de aprendizagem, e é natural que os indivíduos nem sempre possuam conhecimento que habitem todos os Três Mundos da Matemática.

Na descrição de cada um dos mundos, Tall (2004) apresenta, em primeiro lugar, o que ele chamou de “Mundo Conceitual Corporificado” ou simplesmente “Mundo Corporificado”, sendo que “corporificado” vem da noção de “dar um corpo” a uma ideia abstrata. É nele que temos a percepção do mundo, não somente do mundo físico, mas do nosso próprio mundo de entendimentos e de experiências sensórias que nos habilitam a reconhecer e até mesmo prever (ou imaginar) concepções que não existem no mundo externo, como por exemplo, uma linha é perfeitamente reta, que só encontramos no pensamento matemático.

O mundo corporificado não trata apenas da manipulação física de objetos, mas também de imagens de situações concretas, de situações mentais construídas

[14] David **Hilbert** (1862-1943), nascido na Alemanha é considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

pela percepção que temos e pelas observações que efetuamos. Tais situações possibilitam perceber propriedades matemáticas nesses objetos e agir sobre eles para entender o que significam (LIMA, 2007).

Neste mundo, a verdade é estabelecida pela realização de um experimento para ver se o resultado esperado acontece. A verdade fica estabelecida porque é visível.

Neste mundo, quando o sinal de igualdade é encontrado, ele será relacionado com coisas concretas, como indicar o resultado de uma contagem ou o lugar onde a resposta de uma expressão deve ser colocada.

Acompanhando o desenrolar do crescimento cognitivo, Tall (2004) apresenta o Mundo Proceitual Simbólico ou simplesmente Mundo Simbólico, que é o mundo dos símbolos que utilizamos para calcular e fazer manipulações.

Neste mundo, ampliam-se os significados dados no mundo corporificado aos conceitos matemáticos, e, para que algo seja aceito como verdade, são necessários cálculos e manipulação dos símbolos que o habitam. Nesse ponto do desenvolvimento cognitivo, os indivíduos passam a perceber que os símbolos podem representar processos e conceitos de maneira imbricada. Eles deixam de ser apenas uma indicação de ação ou de demanda de um processo e passam a encapsular conceitos e processos.

Gray e Tall (1994) apontam para o fato de que os símbolos matemáticos são constituídos por uma dualidade dentre **proc**esso e conc**eito**, que reuniram em uma única palavra: "proceito".

Os símbolos representam não somente os conceitos, "mas também as ações exercidas sobre os objetos e o produto dessas ações" (LIMA, 2007, p. 57). Segundo a autora, isso acontece pela manipulação que os símbolos permitem, sendo tal manipulação a síntese das ações exercidas sobre os conceitos matemáticos, que geralmente são representados por símbolos.

Símbolo	*Processo*	*Conceito*
4	contagem	número
3 + 2	adição	soma
-3	subtrair 3 (3 passos à esquerda)	3 negativo
3 / 4	divisão	fração
3 + 2x	avaliação	expressão
$y = f(x)$	atribuição	função
$\int f(x)\,dx$	integração	integral

Figura 1: Símbolos como processos e conceitos

Fonte: Tall (2001, tradução e adaptação nossa)

Mas os "proceitos" associados a um símbolo não se restringem a um único processo-conceito. Segundo Gray e Tall (1994), a referida dualidade exerce uma compressão de processos para conceitos, partindo da definição de "proceitos" elementares como sendo: "[...] o amálgama de três componentes: um *processo*, que produz um *objeto matemático*, e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo quanto o objeto" (GRAY; TALL, 1994, p. 120 apud LIMA, 2007, p. 57, grifo nosso).

Segundo Lima (2007), tais "proceitos" elementares podem ser entendidos como procedimentos que levam ao mesmo resultado. Dessa forma, 4+3, 5+2, 2+5 são "proceitos" elementares de um mesmo processo e resultam no número 7. O desenvolvimento da compreensão de que cada um desses procedimentos é oriundo do mesmo processo, possibilita que o indivíduo passe a vê-los como o mesmo conceito, no exemplo acima, a soma.

Essa flexibilidade de passar de processo para conceito é o que Gray e Tall (1994) chamam de "pensamento proceitual". "Assim, símbolos matemáticos são 'proceitos' quando eles carregam consigo a possibilidade de serem vistos tanto como procedimentos quanto como o conceito que eles representam" (LIMA, 2007, p. 58).

No mundo simbólico, o símbolo de igualdade passa a representar um "proceito", portando no seu âmago processos e conceitos. Um exemplo dessa situação, encontramos no significado do símbolo de igualdade relacionado a uma equação na qual ele representa tanto o conceito de equação, como o processo de resolução da mesma.

No mundo simbólico, a verdade é estabelecida pelo cálculo com números e manipulações com os símbolos algébricos.

Na continuação do desenvolvimento do pensamento matemático, começam a surgir situações em que o indivíduo passa a ter condição de “fazer Matemática”. Essa situação Tall (2004) caracteriza como sendo pertencente ao “Mundo Formal Axiomático” ou simplesmente mundo formal. O conhecimento que habita esse mundo é aquele que está baseado em provas reconhecidas, em propriedades expressas, em definições formais e em axiomas.

O mundo formal caracteriza-se pela construção axiomática dos diferentes campos da Matemática, além de utilização da linguagem formal e das definições formais para os conceitos, a partir das quais são feitas deduções e demonstrações. A presença ou não desse mundo em sua totalidade, no trabalho de um indivíduo com a Matemática, está ligada ao desenvolvimento cognitivo que ele alcançou e ao conhecimento da Matemática que ele obteve ao longo desse desenvolvimento.

Nesse mundo, a verdade é estabelecida pela prova formal, pelo cotejo com os axiomas. Transitar pelos conhecimentos desse mundo não apenas possibilita o uso da Matemática, mas também a construção da mesma, ou seja, desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos.

No mundo formal, o símbolo de igualdade extrapola o entendimento que lhe é dado no mundo simbólico, passando a ser entendido como a indicação de uma verdade, resultado de uma prova, ou então, algo que ainda precisa ser provado para alcançar essa situação.

Esse quadro teórico é chamado hoje de “Três Mundos da Matemática”, e, embora esteja em pleno desenvolvimento, já apresenta uma formatação consistente que permite ser utilizado na compreensão da aprendizagem da Matemática.

2.1.1 Os “já encontrados”

Durante a nossa vida, incluído o tempo da nossa vida escolar, cada indivíduo percorre uma jornada por caminhos diferentes, vive situações e problemas diferentes, adquire percepção e entendimento das coisas de forma individual e, de acordo com essa experiência de vida, é que desenvolve a sua própria imagem de conceito, isto é,

> [...] estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, *apud* LIMA, 2007, p. 86).

Os “já encontrados”[15] podem ser definidos como sendo “[...] um construto mental que um indivíduo usa em determinado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente. Eles são uma parte da imagem de conceito de um indivíduo” (LIMA, 2007, p. 86).

Para resolver uma nova situação, o indivíduo parte de conhecimentos ou processos que já conhece, podendo modificá-los, ou não, para serem adaptados a essa situação.

No entanto, segundo Lima (2007), os “já encontrados”, podem tanto exercer influência positiva quanto negativa no processo de aprendizagem. Eles podem agir de maneira negativa quando são utilizados numa situação de aprendizagem diferente da original ou também quando os “já encontrados” foram criados matematicamente incorretos, causando erros ou dificuldades para a aprendizagem.

Entendemos que os “já encontrados” são uma peça importante nesta pesquisa, pois, usualmente, o significado de igualdade costuma fazer parte da imagem de conceito dos indivíduos, mesmo antes que eles iniciem os estudos de Matemática. Além disso, como veremos no **CAPÍTULO 4: JORNADA PELAS**

[15] No inglês: *met-before*.

PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, as crianças criam uma imagem de conceito do símbolo de igualdade baseada nas primeiras lições que aprendem, e depois têm dificuldade de adquirir outros significados que lhes são apresentados. Não raramente, elas levam esse primeiro "já encontrado" até o curso superior.

Ainda nesse contexto, no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, é apresentado o conceito de "a encontrar"[16]. "Usamos o termo 'a encontrar' para denotar uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos anteriores" (LIMA, 2007, p. 88).

Os "a encontrar" estão numa situação transitória: "[...] 'a encontrar' são experiências que podem não ser ainda parte da imagem de conceito, mas podem tanto modificá-la quanto vir a fazer parte dela. Neste último caso, eles acabam tornando-se 'já encontrados'" (LIMA, 2007, p. 89).

Nesta pesquisa, os Três Mundos da Matemática são a referência para onde vamos estar sempre mirando os significados do símbolo de igualdade que encontrarmos, procurando identificar em quais dos mundos esses significados podem ser encontrados ou, quais particularidades que podem surgir do uso das definições apresentadas acima. Para essa tarefa, faremos uso das definições de cada um dos mundos, dos conceitos de "proceito" e "já encontrados", num trabalho de comparação e enquadramento.

[16] No inglês, met-after.

2.1.2 Jornada entre os Três Mundos da Matemática

O quadro abaixo apresenta, esquematicamente, a relação entre os Três Mundos da Matemática e o crescimento cognitivo do indivíduo.

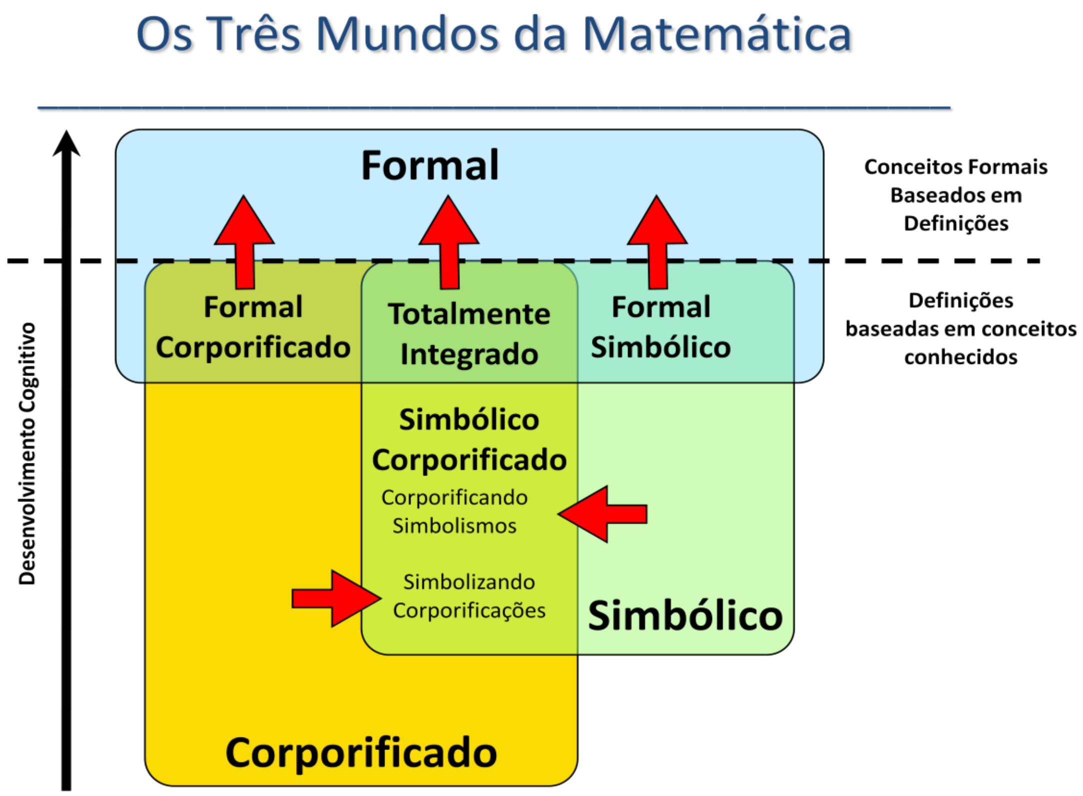


Figura 2: Desenvolvimento cognitivo através dos Três Mundos da Matemática
Fonte: Tall (2007, tradução e adaptação nossa)

O esquema acima mostra a integração dos Três Mundos da Matemática e indica, por meio do eixo vertical, o crescimento cognitivo adquirido ao longo do tempo e a maneira como tal crescimento se relaciona com cada um dos Três Mundos da Matemática.

Nas áreas ocupadas por cada um dos mundos, existem regiões de fronteira com os outros mundos, nas quais é identificada a situação de uso do conhecimento matemático que pode ser feita naquele ponto do desenvolvimento cognitivo.

A fronteira entre os mundos Corporificado e Simbólico é chamada de região do "Conhecimento Simbólico Corporificado". Quando, partindo do Mundo Corporificado, atinge-se o Mundo Simbólico, dizemos que o indivíduo está "Simbolizando Corporificações", e no sentido contrário, "Corporificando Simbolismos".

Na área de fronteira entre o Mundo Corporificado e o Mundo Formal, forma-se a região do conhecimento "Formal Corporificado" e na área da fronteira entre os Mundos Simbólico e Formal encontra-se o conhecimento "Formal Simbólico".

Na região onde os três mundos se entrelaçam, surge a situação de total integração entre os Três Mundos da Matemática.

2.2 Símbolo e Significado

Duas palavras têm sido utilizadas algumas vezes nesse trabalho: símbolo e significado. A palavra "significado", como um dos objetivos deste trabalho, e "símbolo" como o centro da nossa pesquisa.

Resolvemos, então, apresentar alguns esclarecimentos sobre essas palavras, pois, ao longo das pesquisas que realizamos, percebemos que, pela diversidade de entendimentos que a palavra "significado" apresenta, poderia causar dúvidas quanto ao uso que fazemos dela neste trabalho. Sobre a palavra "símbolo", desejamos apresentar alguma definição que auxilie o entendimento da importância dessa forma de representação na Matemática.

Para a palavra "símbolo", encontramos em Hiebert (1988) uma definição de símbolo com a qual ele inicia a apresentação de uma teoria do desenvolvimento de competências com a escrita de símbolos matemáticos: "[...] símbolos são entidades que representam ou tomam o lugar de outra coisa. As entidades podem tomar uma variedade de formas, desde objetos concretos até marcas escritas em papel" (HIEBERT, 1988, p. 334, tradução nossa[17]).

Entendendo que essa definição ainda não trazia todos os esclarecimentos que procurávamos, buscamos, então, dois esclarecimentos que pudessem completar essa definição: a função de um símbolo na Matemática, e como ele é interpretado. Encontramos em *A Experiência Matemática*, os dois esclarecimentos: "As funções principais de um símbolo na Matemática são de designar com precisão e clareza e de abreviar" (DAVIS; HERSH, 1986, p. 154-155), e "Interpretar um símbolo é associar-lhe algum conceito ou imagem mental, assimilá-lo na consciência humana" (DAVIS; HERSH, 1986, p. 156).

Por sua vez, a palavra "significado", parece não ter uma definição única dentro da Educação Matemática, e não é nosso objetivo trazer um novo entendimento ou questionar qualquer das linhas de pensamento que procuram definir o que seja "significado". Procurando identificar sobre qual aspecto assentaríamos o nosso entendimento sobre "significado", encontramos em uma publicação organizada por Kilpatrick, Hoyles e Skovsmose sobre significados em Educação Matemática.

Já na abertura da publicação, Kilpatrick, Hoyles e Skovsmose (2005) reconhecem a existência de uma grande variedade de "significados" em Educação Matemática, que pode variar do utilizado por um indivíduo contrapondo ao comum adotado numa comunidade. Para eles, "[...] Significados têm que ser interpretados com referência ao 'horizonte' do indivíduo" (KILPATRICK, HOYLES; SKPVSMOSE, 2005, p. 9, tradução nossa[18]).

Ainda na publicação supracitada, para Otte (2005), que discorria sobre significados e Matemática:

> "Um símbolo tem significado, mas não existe como uma coisa concreta, porque é uma ideia geral, um tipo, e não um emblema. Uma coisa, pelo contrário, não tem nenhum significado por si só. Simbolização, portanto,

---

[17][...] symbols are entities that stand for or take the place of something else. The entities themselves can take a variety of forms, from concrete objects to written marks on paper.

[18] Meanings have to be interpreted with reference to the "horizon" of the individual.

> eleva-se a generalização. Na interpretação, nós temos que ver algo em particular como uma ideia geral” (OTTE, 2005, p. 235, tradução nossa[19]).

Para Otte (2005), a distinção entre símbolos e coisas parece fundamental, pois, embora os significados sejam universais, eles são dados pelos objetos. No entanto, o significado não permanece sempre o mesmo, mas evolui na mesma velocidade com a qual é utilizado em diferentes contextos e objetivos.

As colocações acima apontavam na direção do que buscávamos, mas ainda não traduziam completamente o entendimento sobre significado que adotamos no nosso trabalho.

Encontramos o complemento que procurávamos num trabalho de Godino (1996), numa citação da definição de entendimento dada por Sierpinska: “[...] experiência mental de um assunto pelo qual ele/ela se relaciona um objeto (sinal) para outro objeto (o significado)” (SIERPINSKA, 1994, apud GODINO, 1996).

Portanto, para nós, “significado” é o relacionamento entre um objeto e o uso que o indivíduo faz dele, partindo das suas imagens de conceito sobre o objeto.

Como o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática sugere que, para diferentes tipos de conceitos matemáticos, existem pelo menos três tipos de desenvolvimento cognitivo (TALL, 2004) e que “esta distinção nos leva a supor que existem diferentes significados ligados ao simbolismo matemático e que eles poderiam afetar a maneira dos alunos entenderem álgebra” (LIMA; TALL, 2006, tradução nossa[20]), concluímos que o entendimento que o indivíduo possui do significado do símbolo de igualdade está diretamente relacionado com o desenvolvimento cognitivo que possui e com os “já encontrados” nas suas experiências anteriores. Com isso, entendemos que será possível identificar os significados que encontrarmos nas pesquisas em Educação Matemática e na história da notação do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática.

---

[19] A symbol has meaning, but does not exist like a concrete thing, because it is a general, a type, not a token. A thing in contrast has per se no meaning at all. Symbolization thus amounts to generalization. In interpretation we have to see something particular as a general.

[20] “This distinction leads us to hypothesise that there are different meanings attached to mathematical symbolism and that they would affect the way students understand algebra.”

CAPÍTULO 3
JORNADA PELA HISTÓRIA

No princípio, não havia nada.

E Deus criou o céu e a terra e todas as coisas que nela há.

Galileu dizia que Deus era um grande geômetra e que o Universo fora escrito em linguagem Matemática.

Não é difícil enxergar a Matemática ao nosso redor. A própria estrutura do Universo, mesmo pelo pouco que conhecemos até hoje, parece indicar a todo instante a beleza de uma construção, a demonstração de um grande teorema, a resolução detalhada de um grande e fantástico problema, tudo criado por Deus, com a Matemática.

Na descrição da obra de Deus, encontrada no primeiro capítulo da *Bíblia*, encontramos um relato cronológico dessa criação, marcado pela contagem dos atos divinos. Contagem é um conceito da Matemática. Cremos que, não por acaso, esta é uma das primeiras aprendizagens que o homem, a maior criação do próprio Deus, demonstra na sua vida. A capacidade de contar está ligada ao desenvolvimento da inteligência, por meio de um fenômeno mental muito complicado, e é um atributo exclusivamente humano (IFRAH, 1994, p. 44).

Mas, ao contrário do que possa parecer, contar não é uma operação mental simples. São necessárias outras condições além do desenvolvimento da inteligência para que o homem saiba contar:

> [...]
>
> *– ele deve ser capaz de atribuir um "lugar" a cada ser que passar diante dele;*
>
> *– ele deve ser capaz de intervir para introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as que a precederam;*
>
> *– ele deve saber conceber essa sucessão simultaneamente.*
>
> (IFRAH, 1994, p. 45, grifo do autor).

Estudos arqueológicos e antropológicos mostram que sociedades tribais com organização primitiva, embora não fossem de conceber os números de forma abstrata, conseguiam expressar a contagem de quantidades relativamente pequenas usando meios concretos, e até mesmo partes do corpo para indicar as quantidades (IFRAH, 1994, p. 31).

3.1 O Início

Não é nossa intenção promover neste trabalho uma discussão antropológica ou teológica da criação do homem e da Matemática. Também não pretendemos trilhar o caminho polêmico na discussão se a Matemática foi inventada pelo homem ou descoberta por ele. O que pretendemos é fazer um registro inicial de quanto a Matemática está presente no nosso dia a dia e como a vivemos ou a compartilhamos com as demais coisas existentes no mundo. Ao mesmo tempo, desejamos registrar que acreditamos que a Matemática não é um pacote pronto, mas resultado da capacidade humana de raciocinar e desenvolver pensamentos complexos, na individualidade da pessoa ou no conjunto de um grupo social.

Quando apareceu no mundo, o homem vivia de maneira nômade, e apenas por volta de 8.000 a.C. é que passou a fixar-se na terra, formando grupos ou sociedades que se organizavam para o trabalho e defesas comuns. Isso ocorreu no período neolítico, ou Idade da Pedra Polida, que recebeu esse nome porque o homem aperfeiçoou os instrumentos de pedra mediante o polimento. O homem passa a abrir espaço nas florestas para a criação do gado e para plantações que passa a dominar. Historiadores creditam a esse período o início das transações comerciais (e, consequentemente, operações com números e quantidades), representadas pela valorização diferenciada que se atribuía a tipos de animais e sementes nas relações de trocas dos excedentes agropecuários produzidos (PINSKY, 2006, p. 52).

Na organização social, a transmissão do conhecimento passa a ser feita de maneira sistematizada, surgindo, assim, uma nova forma de perpetuar o conhecimento adquirido, além das maneiras informais ou de imitação que existiam até então.

No nosso entendimento, embora sem registros que forneçam uma comprobação explícita, é a partir da descrição dos hábitos dos povos primitivos realizada por antropólogos, com base nas descobertas arqueológicas, que encontramos elementos da Matemática nas práticas cotidianas dessas sociedades.

Registros de entalhe em madeira ou ossos foram encontrados em escavações arqueológicas e datados entre 35.000 e 20.000 a.C. Embora não se possa afirmar qual seja a destinação desses entalhes, os historiadores afirmam que tais traços, que foram gravados intencionalmente, não tinham correspondência com nenhuma preocupação estética.

> São numerosos ossos, levando cada um uma ou mais séries de entalhes regularmente espaçados, [...]. Entre eles um rádio de lobo munido de cinquenta e cinco entalhes repartidos em duas séries de grupos de cinco.[...] Não há nenhuma dúvida de que esse osso [...] constitui um dos mais velhos documentos aritméticos que chegaram até nós. [...] para não ter que recontar cada vez o conjunto dos entalhes correspondentes, tinha tomado o hábito de reparti-los em grupos de cinco como os dedos da mão [...]. Tinha assim elaborado na base cinco uma *verdadeira notação gráfica* dos números inteiros. (IFRAH, 1997, v. 1, p. 123-124, grifo do autor).

Das expansões dessas sociedades, formaram-se as primeiras civilizações. Registros de historiadores trazem rica descrição dessas civilizações e da maneira como se impuseram sobre as demais: “Com efeito, a fragmentação de uma civilização única em civilizações múltiplas constitui apenas uma consequência do progresso realizado pelo homem” (CROUZET, 1993, v. 1, p.35).

Mas, mesmo depois que se organizou em sociedades, o homem demorou muitos séculos para fazer ou criar registros, fosse sistemático ou não, da sua presença ou do conhecimento que adquirira ao longo do tempo.

Os registros da presença e do conhecimento humano são recentes. Estudos arqueológicos indicam que as primeiras tentativas de criar um sistema de escrita remontam ao período de 4.000 a.C. e, geralmente, são creditados aos sumérios (escrita cuneiforme) e aos egípcios (hieróglifos).

> Desde o fim do IV milênio antes da nossa era, os egípcios praticavam a escrita. (CROUZET, 1993, v. 1, p. 175).
>
> Tal estado de coisas explica-se facilmente pela complexidade da escrita mesopotâmica maior ainda que a da escrita egípcia. Seria muito difícil atribuir com certeza à prioridade cronológica a um ou a outro desses sistemas: também na Mesopotâmia, achados arqueológicos recentes, fazem-nos remontar seus inícios pelo menos à segunda metade do IV milênio. (CROUZET, 1993, v. 1, p.244).

É a partir dos registros escritos que trazemos o foco deste trabalho para a Matemática. Verificamos que, com os algarismos, primeiros registros do que podemos entender como notação Matemática, a situação não foi diferente, pois o início da representação das quantidades por meio de símbolos é mais recente do que a escrita, e também sofreu um longo processo de desenvolvimento até chegar à forma como é utilizada nos nossos dias.

Da mesma forma que os registros das contagens por meio de algarismos, à medida que as ideias matemáticas evoluíam, outras representações se fizeram necessárias e outras formas de registros foram sendo incorporadas ao conhecimento matemático da humanidade.

Neste trabalho, vamos olhar para o símbolo que representa a igualdade, por meio das várias formas que foi representado e entendido, com objetivo de buscar os significados dados a ele numa jornada pelos Três Mundos da Matemática.

3.2 A História do Símbolo de Igualdade

Nesse início de jornada pelos mundos do conhecimento matemático, entendemos que o momento atual que cada ser humano vive é sempre uma resultante das decisões que foram tomadas anteriormente pelo próprio indivíduo ou por outro alguém e, se quisermos entender porque as coisas são como são, precisamos voltar aos registros do passado para compreender os nossos dias.

Da mesma forma, como o foco da nossa pesquisa está num símbolo matemático, que existe a mais de 400 anos, para entendermos por que ele é da forma que o usamos hoje, precisamos voltar aos registros do passado, conhecer a sua história, predecessores, origens, significados e formas gráficas ao longo do tempo, isto é, entender o valor e os significados do símbolo de igualdade nos nossos dias começa por saber a sua história e evolução através do tempo.

Podemos aprender com o passado, entendendo como o símbolo de igualdade foi utilizado, buscando novos entendimentos para o estudo dele no presente. Nesse sentido, Cajori (2007b) afirmou: “A história da Matemática pode ser tão instrutiva como agradável; e pode não só relembrar-nos do que temos, mas pode também ensinar-nos como aumentar a nossa bagagem.”

O caminho do símbolo de igualdade foi longo e nossa descrição dessa jornada começa com uma introdução sobre a história da notação algébrica, que, como veremos, tem total relação com o nosso objeto de estudo.

3.2.1 A notação algébrica

Segundo Crouzet (1993), foi na região compreendida entre o Egito e a Mesopotâmia que surgiram duas das mais antigas das grandes civilizações. Diversos povos (sumérios, acadianos, amoritas, assírios, caldeus, babilônios) habitaram essa região e deixaram, nos registros da sua existência, comprovações de que já dominavam conteúdos matemáticos.

Uma grande contribuição de um dos povos dessa região (os sumérios) foi a escrita cuneiforme (marcas em formato de cunha), feita em placas de barro mole e secadas ao Sol, por volta de 4.000 a.C. Muito do que é conhecido sobre essa época deve-se a esses registros: “Cerca de meio milhão de placas foram desenterradas, das quais somente poucas centenas são de Matemática” (CAJORI, 2007b, p. 21).

Ainda segundo Cajori (2007a), com o desenvolvimento do comércio, surgiu um tipo especial de escriba, que era treinado em registros matemáticos, tais como aritmética e equações, geralmente voltadas para aplicações práticas.

Outro documento histórico importante, quando falamos dos registros matemáticos antigos, é conhecido como o papiro egípcio *Rhind*, de A. Henry Rhind que o adquiriu no Egito, ou de Ahmes, que vem a ser o nome do escriba egípcio que o escreveu por volta de 1.685 a.C. (EVES, 2008 p. 70).

Segundo Eves (2008), esse papiro é uma fonte importante sobre a Matemática egípcia antiga, na qual estão descritos métodos de multiplicação e divisão, o uso que faziam das frações, a regra da falsa posição, uma solução para o problema da área de um círculo e outros problemas, mostrando a utilização da Matemática em problemas práticos.

Apesar de reconhecidamente importante, o papiro *Rhind* suscita algumas controvérsias. A primeira é sobre a originalidade do conteúdo, pois acredita-se que ele seja cópia de um mais antigo:

> Por volta de 650 a.C. vivia no Egito um escriba chamado A'h-mose, comumente chamado de Ahmes por escritores modernos. Ele escreveu um trabalho sobre a matemática, ou melhor, ele copiou um antigo tratado, pois ele diz: "Este livro foi copiado no ano 33, em um quarto mês da temporada de inundação, sob a majestade do rei do Alto e do Baixo Egito, ‘A-user-Rê', dotado de vida, à semelhança de escritos dos antigos, feitos no tempo do rei do Alto e do Baixo Egito, Ne-ma'et-Rê'. É o escriba A’h-mosè quem copia esta escrita” (SMITH, 1958, v. 1, p. 47 – tradução nossa)[21].

Outra questão é levantada por Dantzig (1970), quando afirma que, embora sejam registros importantes do conhecimento da época, tendo em vista os erros grosseiros encontrados no papiro, Ahmes deve ter sido um mero escriba que

[21] About 1650 B.C. there lived in Egypt a scribe named A‘h-mosè, commonly called Ahmes by modern writers. He wrote a work on mathematics; or rather he copied an older treatise, for he says: “This book was copied in the year 33, in a fourth month of the inundation season, under the majesty of the king of Upper and Lower Egypt, ‘A-user-Rê‘, endowed with life, in likeness to writings of old made in the time of the king of Upper and Lower Egypt, Ne-ma‘et-Rê‘. It is the scribe A‘h-mosè who copies this writing.”(SMITH, 1958, v.1, p.47)

entendia muito pouco do que copiava. Certamente, os egípcios tinham um conhecimento muito maior do que faz supor o documento, e não existe dúvida de que a Álgebra entre os egípcios antecedeu o papiro em muitos séculos.

Quando escrevemos os números e as relações entre eles, utilizamos algarismos, letras e sinais gráficos diversos, com um padrão que denominamos notação algébrica. Essa forma de representação é o resultado de séculos de evolução, contradições, descobertas, invenções e modificações pelo estabelecimento de um padrão dessa forma de notação. A nossa jornada por esse tipo de notação se iniciará pelos algarismos e pelo conceito de número que, com eles, conseguimos representar.

Os números eram entendidos pelos antigos como uma propriedade inseparável de um conjunto de objetos, propriedade essa que não conseguiam distinguir claramente. Mas os homens evoluíram nesse entendimento da relação com os números e objetos, ou quantidades por eles representadas, e, como reflexo desse aprimoramento do entendimento, foram estabelecendo e assimilando as relações entre os próprios números, surgindo, dessa evolução, o que hoje chamamos de operações matemáticas.

Na medida em que os homens se organizavam em grupos, as relações sociais e a necessidade de registros foram intensificadas e se tornaram mais complexas. A necessidade de organizar os registros e torná-los apropriados para as partes envolvidas impulsionou o aperfeiçoamento dos nomes e das representações simbólicas dos números.

Essa evolução das representações dos números, o sistema de numeração, ocorreu em paralelo com a escrita e, em algumas civilizações, a representação dos números era feita com letras do próprio alfabeto, como, por exemplo, o sistema de numeração grego que empregava 27 caracteres do alfabeto, as 24 letras maiúsculas do alfabeto e mais três outras obsoletas: *digamma*, *koppa* e *sampi* (EVES, 2008, p. 35).

O avanço na forma da notação algébrica foi lento, mas gradativo. Saindo dos primeiros registros cuneiformes até a notação que utilizamos nos nossos dias, foram decorridos muitos séculos. A maneira de registrar o conhecimento matemático passou sucessivamente por pelos menos três formas de representação: primitivo ou retórico, intermediário ou sincopado e simbólico ou final (BOYER, 1974, p. 132), segundo a caracterização definida por G.H.F. **Nesselmann**[22] em 1842 (EVES, 2008, p. 206).

Os primeiros registros da notação algébrica que encontramos eram retóricos, e caracterizaram-se por serem escritos de maneira extensa, unicamente com palavras do vocabulário comum, ou seja, pela ausência de qualquer símbolo, a não ser, é claro, pelo fato de que as próprias palavras estão sendo utilizadas no seu significado simbólico (DANTZIG, 1970, p. 78).

Para representar o que hoje escrevemos como $x + 3 = 5$, deveríamos escrever *"uma coisa mais três é igual a cinco"*; ou para relatarmos uma propriedade, o registro seria feito como: *"a ordem dos fatores não altera o produto",* que com o auxílio de símbolos poderíamos escrever: *"$a . b = b . a$"*. Dantzig (1970) relata que essa forma de notação iniciou-se no Egito e na Babilônia antes de 1.650 a.C., tendo perdurado mais tempo fora da Grécia, na Europa ocidental, pelo menos até o século XV. Nesse tipo de representação, para indicar uma igualdade, eram escritas palavras como: *aequales, aequantur, esgale, faciunt, glelijch ou gleich*.

Não existem registros muito precisos do início da representação algébrica na forma sincopada, mas, segundo Eves (2008, p. 208-209), pode-se considerar **Diofanto** de Alexandria[23] um dos pioneiros na notação algébrica sincopada. Nessa forma de notação, as palavras completas que designavam as operações ou quantidades que se repetiam com muita frequência eram substituídas por abreviaturas ou mesmo por desaparecimento de fonemas no interior do vocábulo.

Diofanto escreveu o livro *Arithmétikê* (Aritmética), que teve grande influência na álgebra e na teoria dos números. A palavra "Arithmétikê" vem da junção das palavras gregas "*arithmos*", que significa número, e da palavra *"techne",* que significa ciência.

Em *Aritmética* Diofanto foi o primeiro a utilizar símbolos para números desconhecidos, bem como abreviações para representar potências de números, relações e operações. A notação utilizada por ele influenciou a passagem da notação retórica para a notação sincopada de uma maneira geral e de uma maneira individual na evolução de alguns símbolos. Um exemplo dessa situação foi a

---

[22] Georg Heinrich Ferdinand **Nesselmann** (1811-1881). Matemático alemão, em *Die algebra der griechen*, 1842.
[23] **Diofanto** de Alexandria (250 a.C., ?)

utilização de um símbolo para a incógnita, a letra “ζ“ - *sigma* - do alfabeto grego. Segundo Dantzig (1970, p. 80), a letra *sigma* tinha duas formas de escrita, “σ” e “ζ“, sendo que a primeira era utilizada na representação numérica com o valor 60 e a segunda possuía valor, por isso foi escolhida para representar a incógnita.

Símbolo	Significado
$\bar{\alpha}$	1
$\bar{\beta}$	2
$\bar{\varepsilon}$	5
$\bar{\iota}$	10
ζ	O valor desconhecido
δ^{υ}	A segunda potência do número desconhecido, do grego δύναμις
κ^{υ}	A terceira potência do número desconhecido, do grego κύβος

Quadro 1: Alguns símbolos utilizados por Diofanto de Alexandria

Fonte: Heath, 1885

Na forma sincopada de notação algébrica, outra maneira de indicar a igualdade era por meio da expressão “*aeq*”, sincopação da palavra “*aequales*”.

Em outras partes do mundo, a Matemática também se desenvolvia, e hoje reconhecemos a extraordinária capacidade demonstrada nessa área pelos árabes e hindus. Embora não existam muitos registros sobre o desenvolvimento da Álgebra entre os árabes e hindus antes do século V a.C., os hindus **Aryabhata**[24] e

[24] **Aryabhata** (476-550)

Brahmagupta[25] também desenvolveram um tipo de notação algébrica na forma sincopada:

> Os hindus sincoparam sua álgebra. Como Diofanto, indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se "*bha"* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, "produto") depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *"ka"* (da palavra *karana*, "irracional") antes da quantidade. (EVES, 2008, p. 256).

Brahmagupta chamou a quantidade desconhecida de "*yâvattâvat*" e, diferentemente de Diofanto, no caso de várias quantidades diferentes, utilizava um nome e símbolo distintos para cada uma delas.

Nesse período, a pouca produção de Matemática no continente Europeu era feita na notação retórica. A Europa não se beneficiou da álgebra sincopada de Diofanto, Aryabhata e Brahmagupta, pois, nessa época, apenas alguns poucos trabalhos circularam por lá. Um deles foi *Líber Abaci*, publicado em 1202, escrito por Leonardo de Pisa (**Fibonnaci**)[26].

Somente depois da chegada dos árabes, que antes haviam conquistado outras regiões como a Índia, Mesopotâmia e norte da África, o legado cultural adquirido dos povos conquistados chegou à Europa. Ao longo das conquistas, os árabes assimilaram a Matemática Grega e Hindu, e, quando os comerciantes e sábios árabes transmitiram essas ideias pelo mundo, levaram também o sistema numeral posicional hindu-arábico que utilizamos até hoje. Juntos, com a invenção da imprensa e o revigoramento da economia, criaram as condições para o rápido desenvolvimento da álgebra simbólica (BAUMGART, 1994).

Com o passar do tempo, algumas abreviações se tornavam tão contraídas e se distanciavam tanto das palavras da qual se originaram, que acabavam tomando formas que não possuíam mais uma conexão evidente com as palavras das qual tiveram origem. A sincopação acabava por tornar-se um símbolo.

Embora já existissem alguns símbolos algébricos nos registros na notação sincopada, a notação algébrica simbólica começou a ser desenvolvida apenas por

---

[25] **Brahmagupta** (589-668)
[26] Leonardo de Pisa, **Fibonnaci** (1175 – 1250). Comerciante e matemático italiano.

volta do ano de 1.500, mas na Europa continuou convivendo com as outras notações até o século XVII. Segundo Cajori (2007b, p.168), os trabalhos de François **Viète**[27] e William **Oughtred**[28] são os pioneiros, na Europa, com esse tipo de notação.

Viète**,** também conhecido como Vieta, uma forma semilatina do seu nome, estudou e praticou a Advocacia, mas dedicou maior parte do seu tempo de lazer à Matemática, desenvolvendo trabalhos em trigonometria, álgebra e geometria.

> O mais famoso trabalho de Viète é "*In artem*" ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito deve. Neste texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Viète adotava qualificar os coeficientes de uma equação polinomial de modo a torná-la homogênea e usava os símbolos atuais + e – mas não tinha nenhum símbolo para a igualdade. Assim o que escreveríamos "$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$", para ele seria "*B 5 in A quad – C plano 2 in A + A cub aequatur D solido*" (EVES, 2008, p. 308-309).

O outro pioneiro na Europa da notação simbólica, Oughtred, nasceu em Eton, Inglaterra, e era um ministro episcopal na paróquia de Bletchingdon em Albury, perto de Londres. Ele é mais conhecido por ter sido o inventor da "régua de cálculo", construída em madeira, originalmente circular com visor giratório (1622) e depois retangular com visor corrediço (1633), criando escalas em que a posição dos números era proporcional ao seu logaritmo, embora não tenha sido o primeiro a publicar a invenção. A sua obra mais importante, *Clavis Mathematicae*, na qual fazia uma recapitulação do conhecimento de algébrico existente na sua época, foi publicada em 1631.

Oughtred deu extraordinária ênfase aos símbolos, tendo utilizado mais de 150 deles nas suas obras. "Destes, somente três chegaram aos dias atuais, ou seja, '**X**' para a multiplicação, '**::**' para proporção e '∼' para diferença" (CAJORI, 2007b, p. 225). Também utilizou símbolos de outros autores, como o "=", como é possível observar na figura abaixo:

---

[27] François **Viète** (1540–1603) é considerado o maior matemático francês do século XVI.
[28] William **Oughtred** (1574–1660), nascido em Eton, Inglaterra.

Notæ ſeu ſymbola quibus in ſequentibus utor:

Æquale =
Majus .
Minus .
Non majus .
Non minus .
Simile *Sim.*
Proxime majus .
Proxime minus .
Æquale vel minus .
Æquale vel majus .
Proportio, ſive ratio æqualis ::
Major ratio . Minor ratio .
Continuè proportionales .
Commenſurabilia .
Incommenſurabilia .
Commenſurabilia potentiâ .
Incommenſurabilia potentiâ .
Rationale, ῥητὸν, R, vel .
Irrationale, ἄλογον, .
Medium ſive mediale
Linea ſecta ſecundum extremam & mediam rationem ς
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.
Z eſt A + E. ζ eſt a + e.
X eſt A-E. ξ eſt a-e
A 2 Z eſt

Figura 3: *Clavis Mathematicae,* de Oughtred

Fonte: Eves (2008, p. 351)

Refletindo sobre as mudanças na notação algébrica, parece-nos que a mudança da notação retórica para sincopada foi apenas uma simplificação na escrita, mas a mudança para a notação simbólica representa uma mudança importante, não apenas na representação gráfica, mas também na forma de pensar.

A alteração na notação algébrica não é um fato isolado no contexto social do século XVI. Por volta desse século, num período que conhecemos como Renascimento, redescobriu-se o valor do saber, o que levou a uma mudança na forma de pensamento e, por consequência, na forma da escrita. As transformações conduzem a mudanças na maneira de utilizar os signos, de forma que, para que funcionem, é necessário que tanto o signo quanto o que ele significa sejam dados a conhecer ao mesmo tempo. O signo, para cumprir o seu papel, deve estar ao mesmo tempo inserido no que ele significa e ser distinto dele. Conhecer será, pois, interpretar: ir do que se vê, o símbolo, ao que se diz por meio dele, sem o que, ele permaneceria como uma palavra nunca pronunciada (FOUCAULT, 2007).

Com essa valorização do saber, mesmo que tenha ocorrido por questões de ordem prática, como a necessidade de se estabelecer novas formas de relações comerciais, a aritmética passa a despertar grande interesse no povo, inclusive entre as classes menos favorecidas:

> Como consequência do interesse pela educação e do crescimento enorme da atividade comercial do Renascimento, começaram a aparecer muitos textos populares de aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII. Essas obras eram de dois tipos, basicamente as escritas em latim por intelectuais de formação clássica, muitas vezes ligados a escolas da Igreja, e outras escritas no vernáculo por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais (EVES, 2008, p. 299).

Com essa mudança no pensamento do homem europeu, a evolução da notação algébrica passa a ser apenas entre os próprios símbolos, até que se chegasse a uma padronização na forma de escrever e representar o pensamento algébrico.

O símbolo de igualdade nem sempre teve a forma pela qual o conhecemos hoje. Demorou muitos séculos para ter o seu formato definido e padronizado na notação simbólica. Nos próximos tópicos, iremos mostrar uma história da evolução desse símbolo e o longo processo até o estabelecimento de um padrão.

3.2.2 Precursores

Como veremos mais adiante, aceitamos que o símbolo de igualdade que hoje utilizamos foi inventado no século XVI da nossa era. Mas, em Cajori (2007a), encontramos referências a outros símbolos com a mesma finalidade, e até a um símbolo com o mesmo formato, que o antecederam.

No papiro Rhind, ou de Ahmes, foi encontrado um símbolo com o significado “dá” que tem o formato semelhante ao atualmente em uso.

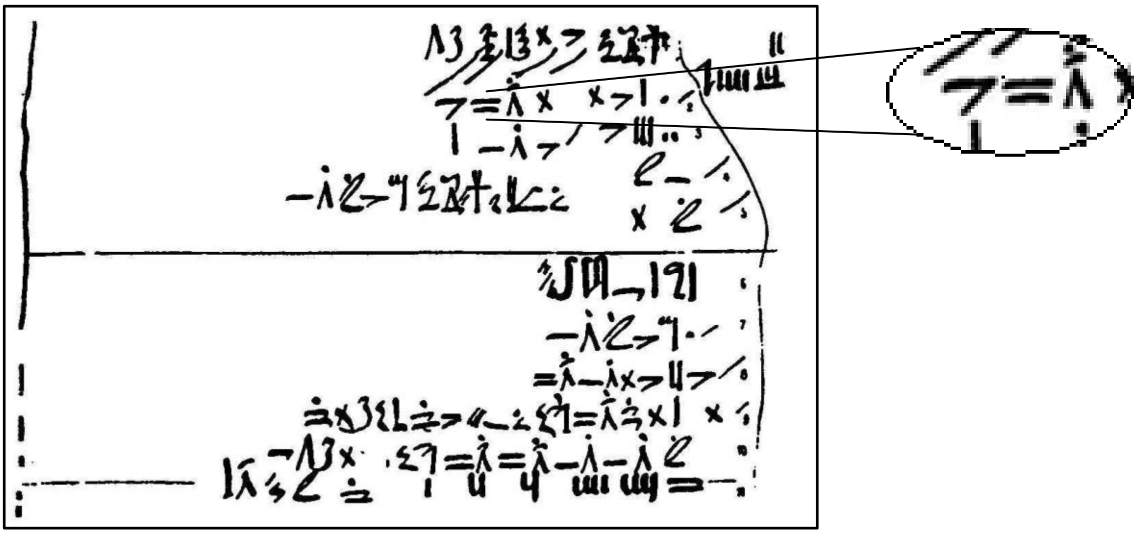


Figura 4: Fragmento do Papiro Rhind.

Fonte: Cajori (2007a, p. 15)

Cajori (2007a) também apresenta a tradução do fragmento do papiro Rhind acima, que foi identificado como o problema de número 34. Como a escrita hierática é feita da direita para a esquerda, Cajori (2007a) fez a tradução escrevendo também da direita para a esquerda, mantendo a mesma posição relativa do papiro, exceto os números que foram escritos na ordem que nos é familiar, ou seja, o número 37 foi escrito na tradução de Cajori (2007a) como 37 e não 73 como aparece no papiro.

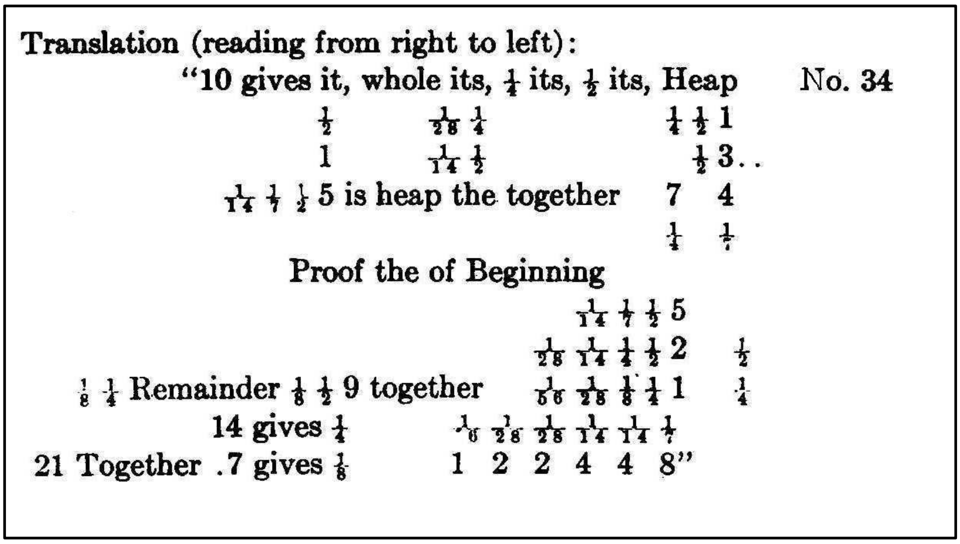

Translation (reading from right to left):
"10 gives it, whole its, $\frac{1}{4}$ its, $\frac{1}{2}$ its, Heap No. 34
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1
1 $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 3..
$\frac{1}{14}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$ 5 is heap the together 7 4
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{7}$
Proof the of Beginning
$\frac{1}{14}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{2}$ 5
$\frac{1}{28}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ Remainder $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ 9 together $\frac{1}{56}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ 1 $\frac{1}{4}$
14 gives $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{56}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{28}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{7}$
21 Together .7 gives $\frac{1}{8}$ 1 2 2 4 4 8"

Figura 5: Tradução do fragmento do papiro Rhind

Fonte: Cajori (2007a, p. 15)

Na figura acima, vemos uma tradução de um trecho do papiro, onde é utilizada a expressão "it gives", ou "dá" em português, para substituir o símbolo original que tinha a forma semelhante à do atual (**Figura 4: Fragmento do Papiro Rhind.** Também Diofanto, na representação sincopada, utilizava regularmente o símbolo "*ἴσ*" para indicar a igualdade.

Mas não era somente no Egito que a Matemática florescia. Na Ásia Meridional, na região que hoje é compartilhada entre Índia e Paquistão, o desenvolvimento da Matemática também avançava.

Próximo ao vilarejo de Bakhshali, que hoje pertence ao Paquistão, e fica na região da fronteira noroeste da Índia, foi encontrado, em 1881, um manuscrito indiano que recebeu o nome desse vilarejo. Esse manuscrito foi escrito em pedaços de casca de vidoeira, e estava em péssimo estado de conservação, dos quais apenas por volta de 70% pôde ser aproveitado. Ainda não foi possível identificar com precisão a época em que foi feito, mas estima-se que se situe entre os séculos III e XII da Era Cristã. Ele é uma cópia de outro manuscrito antigo, bastante semelhante aos trabalhos encontrados em Brahmagupta e Bkaskara, com uma importante diferença na notação que utilizava o símbolo "+" ao invés do símbolo "–" para indicar as quantidades negativas.

Nesse manuscrito, a igualdade era representada por “pha” (फ) que se originou da palavra *phala* (फल - fruto em sânscrito), com o significado “o resultado de um cálculo” (WILLIAMS, 2008), como se vê no exemplo abaixo em que está representada a operação 5/1 + 2/1 = 7:

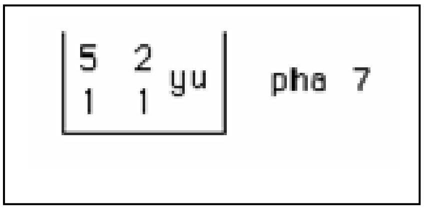


Figura 6: Manuscrito BAKHSHALI
Fonte: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Diagrams/

Outra região, a Arábia, desde muito tempo atrás, também fazia avanços na Matemática. Segundo Cajori (2007b), os árabes tiveram uma excelente e significativa produção no campo da Matemática, mas se valeram por muito tempo da notação retórica. Um trabalho que mostra uma mudança na forma de notação dos árabes foi *Raising of the Veil of the Science of Gubar,* de **al-Qalasâdî**[29], do século XV d.C., que mostrou um trabalho com muitos símbolos. Para representar o símbolo de igualdade foi utilizada a letra “ل” *(lam)* de “*adala”*, que significa igualdade (FINK, 1900, p. 89).

Já na Europa, a notação retórica predominou até por volta do século XV, mas alguns matemáticos, vez por outra, se valiam de símbolos para representar as suas ideias ou soluções.

Um exemplo dessa forma de representação pode ser encontrado no trabalho de **Regiomontanus**[30], que é apresentado por Eves (2008) como o mais capaz e influente matemático do século XV. Embora utilizasse essencialmente a notação

[29] Abu'l Hasan ibn Ali al-Qalasâdî, (ou al-Kalasadi) (1412–1486), nasceu em Bastah, uma cidade mourisca da Andaluzia, que hoje faz parte da Espanha.
[30] **Reggiomontanus** (1436–1476). O nome verdadeiro era Johann Müller, e utilizava o apelido por ser uma forma latinizada do nome da cidade onde nasceu, Königsberg (“montanha do rei”), na Alemanha.

retórica, em algumas cartas ou manuscritos utilizava símbolos. Nesses documentos, muitas vezes utilizou um traço (—) para representar uma igualdade.

Já Luca **Paccioli**[31], cuja obra mais importante e influente, *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, mais conhecida como *Summa*, foi editada pela primeira vez em 1494, tinha uma forma muito peculiar de escrever, pois utilizava os símbolos com muita liberdade. Um mesmo símbolo podia ter vários significados e, para representar um mesmo significado, utilizava mais de um símbolo. Ele também utilizou o traço "—" para representar uma igualdade. Na verdade, como era o seu estilo, utilizou o traço para outras várias finalidades. Ao observarmos diferentes obras desse autor, embora dentro de um livro ele mantenha sempre um símbolo com o mesmo significado, ele muda de ideia num outro livro e utiliza o mesmo símbolo com outro significado.

Por sua vez, Girolano **Cardano**[32], em sua principal obra, *Ars Magna,* publicada em 1545, diferentemente de Regiomontanus e Paccioli, não utilizava um símbolo, mas palavras (*aequale* ou *aequatur)* para indicar a igualdade, e em algumas situações, simplesmente deixava um espaço em branco no lugar que deveria ser a indicação da igualdade.

Outro matemático europeu que utilizou símbolos foi **Bombelli**[33]. "Em 1572, uns poucos anos antes de Cardano morrer, Bombelli publicou uma álgebra que se constituiu numa contribuição notável para a resolução das equações cúbicas" (EVES, 2008, p. 308). A primeira edição era composta apenas dos três primeiros volumes da sua grande obra, *Algebra*, sendo que os dois últimos volumes só foram publicados depois da sua morte, em 1575. Bombelli utilizava, para indicar igualdade, a expressão *equale*, ou um traço "—". No entanto, segundo Cajori (2007a), existem informações de que um manuscrito de Bombelli, guardado na Universidade de Bolonha, contém um símbolo igual ao usado atualmente, "=", representando a igualdade, que se acredita tenha sido desenvolvido de forma independente e, talvez, antes dele.

[31] Luca **Paccioli** (1445–1517), nascido na Itália, era um frade franciscano.
[32] Girolano **Cardano** (1501–1576), cujo nome aparece também como Hieronymus Cardanus, Geronimo Cardano, Hieronymo Cardan ou Jerome Cardan, nasceu na Itália.
[33] Rafael **Bombelli** (1526–1573), nascido em Bolonha, Itália, e era Engenheiro Hidráulico.

3.2.3 Porque duas coisas não podem ser mais iguais

Nada que foi feito antes, nem o que foi feito depois, foi forte o suficiente para sobrepujar Robert **Recorde**[34], o autor do símbolo de igualdade no formato que utilizamos hoje. Ele justificou assim a escolha do símbolo:

> Porei, como muitas vezes uso no trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas de um comprimento assim: ═══════ porque duas coisas não podem ser mais iguais (BOYER, 1974, p. 197).

Recorde era formado em Medicina, mas mesmo antes dessa graduação, já dava aulas de Matemática. Teve várias funções no reino da Grã-Bretanha, no entanto, encontrou tempo para publicar cinco livros, um de Medicina e quatro de Matemática. Smith (1958, p. 317) afirma que ele foi o mais influente matemático inglês com obra publicada no século XVI. Boyer (1974, p. 211) vai mais além, declarando que Recorde praticamente fundou a escola inglesa de Matemática. Com tal fama, não é de se espantar que uma de suas invenções perdure até hoje.

Os seus livros de Matemática tinham preocupação com a linguagem, e Recorde procurava escrever de forma simples e clara. Escreveu todos os seus livros na língua inglesa, o que demonstrava a sua intenção de que sua obra pudesse ser acessível a pessoas do povo. Talvez por conta dessa intenção de alcançar a massa, batizava os seus livros com nomes fantasiosos. Enquanto os outros livros traziam títulos em que constavam palavras como *Summa*, *Algebra*, *Collectaneorum,* ele batizou um dos seus livros com o título: *The Castle of Knowledge (O Castelo do Conhecimento).*

Valeu-se algumas vezes da escrita na forma de diálogo entre mestre e aluno, o que era comum para a época, procurando conduzir, passo a passo, o leitor ao entendimento do conhecimento matemático que o livro apresentava.

---

[34] Robert **Recorde** (1510-1558) nasceu em Tenby, no País de Gales, e faleceu em Londres.

Seu primeiro livro foi *The Grounde of artes* (*No Terreno das artes*), de 1543, um livro de aritmética que abordava cálculos por ábaco, proporções, regras de três e algoritmos com aplicações comerciais; teve bastante sucesso e se tornou a aritmética mais popular no século XVI, com pelo menos 18 edições antes de 1601 e pelo menos onze no século seguinte.

Em 1551, escreveu *Pathwaie to Knowledge* (*Caminho para o Conhecimento*), um livro que foi considerado uma versão condensada de *Os Elementos* de Euclides.

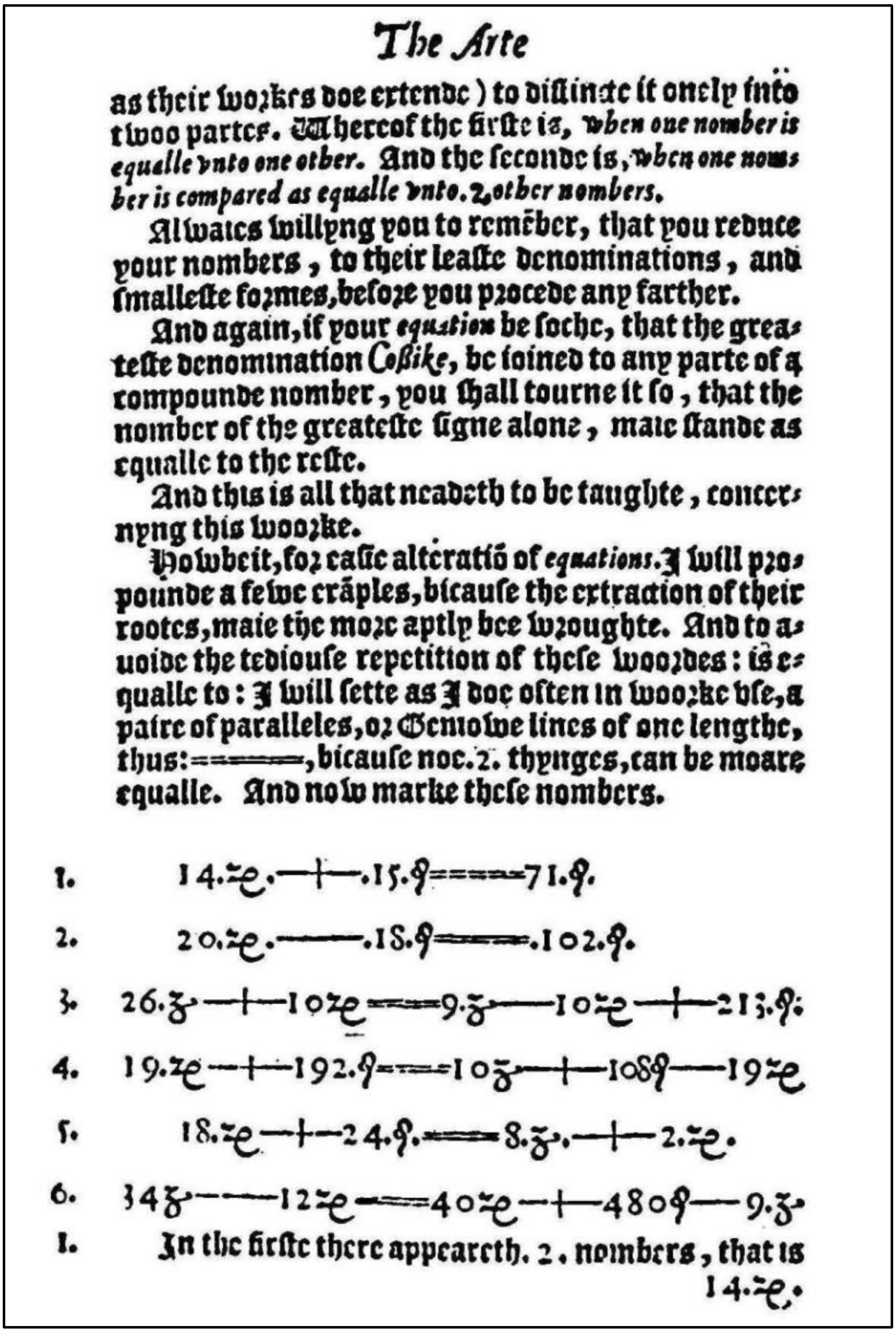
O ano da publicação de *The Castle of Knowledge* (*O Castelo do Conhecimento*) pode ter sido 1551 ou 1556, sendo esse um trabalho sobre astronomia, no qual o sistema Copérnico é citado pela primeira vez para os leitores ingleses (SMITH, 1958, p. 319).

Mas foi no seu último livro, publicado em 1557, *The Whetstone of Witte* (*A Pedra de Afiar da Inteligência*), que pela primeira vez apareceu impresso o símbolo de igualdade como o conhecemos hoje. “O título *Whetstone* (*Pedra de Amolar*) era evidentemente um trocadilho com a palavra ‘coss’, pois *cos* em latim significa pedra de amolar e o livro trata de *cossike practise* (isto é, álgebra)” (BOYER, 1974, p. 212-213).

O símbolo de igualdade na forma como é utilizado hoje, “=”, é, na verdade, um pouco menor do que o símbolo que apareceu publicado ao mundo pela primeira vez em 1557, “$=\!=\!=\!=\!=$”.

Entretanto, o símbolo de igualdade de Recorde não teve aceitação imediata. Demorou 61 anos para que ele voltasse a aparecer impresso, e quase 100 anos para que começasse a ser adotado e aparecesse em obras impressas de matemáticos mais renomados em outras partes do mundo.

Símbolos matemáticos individuais, como o de igualdade e os sinais das operações matemáticas, tiveram um desenvolvimento lento, meio por acaso. Um autor criava um símbolo, e o outro, tomando conhecimento do símbolo por meio da obra do primeiro, o adotava. Também era comum que, pelo desconhecimento da existência ou pelo prazer de ter um símbolo próprio, um autor inventasse outro símbolo. Isso fez com que o símbolo de Recorde concorresse com outros ao longo de séculos.


The Arte

as their woorkes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle vnto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle vnto.2.other nombers.*

Alwaies willyng you to remēber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe.2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ꝛ.—+—.15.ϕ=====71.ϕ.
2. 20.ꝛ.———.18.ϕ=====.102.ϕ.
3. 26.ʒ—+—10ꝛ=====9.ʒ———10ꝛ—+—213.ϕ.
4. 19.ꝛ—+—192.ϕ=====10ʒ—+—108ϕ———19ꝛ
5. 18.ꝛ—+—24.ϕ.=====8.ʒ.—+—2.ꝛ.
6. 34ʒ———12ꝛ=====40ꝛ—+—480ϕ———9.ʒ.

1\. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ꝛ.

Figura 7: *The Whetstone of Witte*.[35]
Fonte: Cajori (2007a, p. 165)

[35] Na notação algébrica atual, as expressões que aparecem na figura seriam escritas da seguinte forma, segundo Molina, Castro e Castro (2007):

1. $14x + 15 = 71$
2. $20x - 18 = 102$
3. $26x^2 + 10x = 9x^2 - 10x + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 - 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 - 12x = 40x + 408 - 9x^2$

3.2.4 Descartes

René **Descartes**[36] é reconhecido como um dos pensadores mais influentes na história da humanidade, tido por alguns historiadores como o fundador da filosofia moderna: “A filosofia e a ciência de Descartes eram quase revolucionárias em sua ruptura com o passado [...]” (BOYER, 1974, p. 246). Não é difícil imaginar que a obra de um homem com tamanho reconhecimento tenha tido grande influência durante e depois da sua vida.

Descartes utilizava, nos seus trabalhos matemáticos, o símbolo “∝” para indicar a igualdade, para o qual foram feitas várias tentativas de identificar como fora obtido. Georg **Cantor**[37] dizia que parecia ser a combinação do **æ** de *aequales* que significa igual. Por sua vez, Heinrich **Wieleitner**[38] foi um pouco mais preciso ao descrever o símbolo de igualdade de Descartes como o **œ** invertido: **ꝏ**. No entanto, na opinião de Cajori (2007a), o símbolo de igualdade de Descartes era o símbolo utilizado na astronomia para identificar a constelação de Touro “♉”, colocado invertido, com a parte aberta para a esquerda. Esse símbolo era bastante utilizado em trabalhos de astronomia e estava disponível nas gráficas da época, o que o tornava acessível para outros usos.

Descartes nunca fez menção ao símbolo de igualdade de Robert Recorde, mas, segundo Cajori (2007a), certamente o conhecia através do livro *Praxis,* de Thomas **Harriot**[39], que utilizava o símbolo de Recorde com regularidade. No entanto, o próprio Descartes utilizou o símbolo “=” numa carta que escreveu em 1640. O símbolo de Descartes chegou até a Inglaterra em 1659, na edição em latim

---

[36] René **Descartes** (1596 – 1650), filósofo e matemático francês, nascido em La Haye (atualmente Descartes),Touraine, França.
[37] Georg Ferdinand Ludwig Philipp **Cantor** (1845-1918). Matemático nascido na Rússia.
[38] Heinrich **Wieleitner** (1874-1931), matemático nascido na Alemanha.
[39] Thomas **Harriot** (1560-1621) foi um matemático inglês, considerado o fundador da escola inglesa de Álgebra. Utilizou diversos símbolos nas suas obras e foi o introdutor dos símbolos “>” (maior que) e “<” (menor que). A sua principal obra *Ars analyticae práxis,* na qual demonstrava que as equações podiam ter raízes negativas e imaginárias, foi publicada postumamente em 1631.

do livro *Miscellanies,* de Samuel **Foster**[40]. No entanto, na edição em inglês, o símbolo de Descartes foi substituído pelo de Recorde.

Como Descartes havia morado na Holanda, é natural que matemáticos de lá, como Frans **van Shooten**[41] em 1646, Christiaan **Huygens**[42] e Johann **Hudde**[43], utilizassem o símbolo de igualdade por ele criado. Embora o símbolo de Descartes tenha feito muito sucesso na França e na Holanda no final do século XVII e no começo do século XVIII, nunca conseguiu se firmar em outras partes da Europa.

Segundo Cajori (2007a), o sucesso do livro *La Géométrie,* no qual o símbolo apareceu pela primeira vez, contribuiu para que o símbolo criado por Descartes passasse sem muito destaque. A geometria analítica e o aperfeiçoamento da notação exponencial “a^n" chamaram muito mais a atenção dos matemáticos.

3.2.5 Símbolos Concorrentes

Símbolos concorrentes com “=====” surgiram rapidamente na Europa continental e na Inglaterra. Apenas dois anos após o surgimento do símbolo de Recorde, em 1559, um monge francês, Johannes **Buteo**[44], publicou o seu livro *Logistica,* no qual utilizou o símbolo “**[**” para indicar a igualdade.

Em 1571, o alemão **Xylander**[45] utilizou um par de linhas verticais “**||**” para designar a igualdade, quando lançou uma edição de *Arithmetica,* de Diofanto. Outros autores, como os italianos Giovanni Camillo **Glorioso**[46], no livro *Ad theorema geometricum* (1613) e Michaelis **Riccii**[47]**,** no livro *Exercitatio geométrica de maximis et minimis,* de 1668, também utilizaram o símbolo de igualdade de Xylander.

[40] Samuel **Foster** (antes de 1600 – 1652). Matemático e astrônomo inglês.
[41] Frans **van Shooten** (1615-1660).
[42] Christian **Huygens** (1629-1695).
[43] Johann van Waveren **Hudde** (1628-1704).
[44] Johannes **Buteo** (≅1492 – 1564~1572), matemático francês, religioso da Abbaye de St.-Antoine. Seu nome francês era Jean Borrel. Na tradução para a forma latina, também são encontradas as formas: Boteo, Butèon, e Bateon.
[45] **Xylander** (1532-1576), cujo nome original era Wilhelm Holzmann, nascido em Augsburg, Alemanha.
[46] Giovanni Camillo **Glorioso** (1572 – 1643), matemático italiano, nascido em Giffoni, próximo de Salerno.
[47] Michaelis Angeli **Riccii** (ou Michelangelo Ricci)-(1619 - 1682) foi um matemático e cardeal italiano, nascido em Roma.

Conforme Cajori (2007a), este mesmo símbolo foi adotado por outros matemáticos alemães e franceses ao longo dos 100 anos seguintes, principalmente quando escreviam sobre proporções.

O símbolo de duas linhas verticais também foi utilizado por outros matemáticos: Descartes em *Opuscules* (1619-1621); Pierre de **Carcavi**[48] numa carta para Descartes em 1649; Balthazar **de Monconys**[49] (1666); René **de Sluse**[50] (1668); Phillipe **de La Hire**[51] (1701); Abraham **de Graaf**[52] (1703), Antoine **Parent**[53] (1713) e por alguns outros autores do *Journal dês Sçavans*. Samuel **Reyher**[54] utilizou um símbolo com apenas uma linha vertical "**|**" e na sua obra o atribuiu ao astrônomo alemão Jacob **Golius**[55].

Leonard **Digges**[56] iniciou e seu filho Thomas **Digges**[57] concluiu e publicou em 1590 o livro *Stratioticos*, onde introduziram diversos símbolos novos, incluindo o símbolo "∋∈" para o símbolo de igualdade. Outra forma diferente do símbolo de Recorde, "ℨ", foi utilizada por Johann **Andreae**[58] em 1614 no livro *Collectaneorum Mathematicorum*.

Uma notação bastante estranha foi utilizada por Pierre **Hérigone**[59] no livro *Cursus mathematicus* (1634). Ele utilizou o símbolo "2|2" para indicar a igualdade, baseado na sua própria ideia de que "3|2" indicava "maior que" e "2|3" simbolizava "menor que". Com esse tipo de notação a representação que faria de uma equação "$a^2+ab=b^2$" seria: "*a2+ba2|2b2*". Esse autor também utilizou o símbolo "⊔" para indicar a igualdade. A forma contrária desse símbolo, "⊓" foi utilizada com a mesma

[48] Pierre de **Carcavi** (1600–1684) foi um matemático amador francês, que, embora a história não tenha registrado desenvolvimento na Matemática, se tornou conhecido pela troca de correspondência com outros matemáticos.
[49] Balthasar **de Monconys** (1611 - 1665), nascido na França, era diplomata, médico e magistrado.
[50] René François Walter **de Sluze** (ou Slusius, na forma latinizada)-(1662–1685) – Matemático, nascido no Principado de Liège (atualmente Bélgica).
[51] Philippe **de La Hire** (1640 – 1718). Nascido na França, era matemático, astrônomo, físico, naturalista e pintor.
[52] Abraham de **Graaf** (1635 – 1717). Matemático holandês.
[53] Antoine **Parent** (1666-1716). Nascido na França, era matemático, físico e astrônomo.
[54] Samuel **Reyher** (ou Reyherus)-(1635-1714). Nascido na Alemanha, era matemático.
[55] Jacob **Golius** (1596 – 1667). Nascido Jacob van Gool, também era conhecido como Jacob Gohl ou Iacobo Golio, foi um orientalista e matemático holandês.
[56] Leonard **Digges** (1520 – 1559). Matemático inglês.
[57] Thomas **Digges** (1546 – 1595). Matemático inglês era filho de Leonard Digges
[58] Johann Valentin **Andreae** (1586–1601).Nascido em Herrenberg no Ducado de Württemberg.
[59] Pierre **Hérigone** (1580–1643), também conhecido pela forma latinizada do seu nome, Petrus Herigonius, foi um matemático e astrônomo francês.

finalidade por **Dulaurens**[60] em *Specimina Mathematica Duobus Libris Comprehensa* em 1667.

Bellavitis[61], em *Annali del R. Lombi-Vem,* de 1832, utilizou o símbolo “♎”, que também tem origem na astronomia (constelação de Libra, ou Balança), para indicar a igualdade de vetores.

3.2.6 Variações no formato

O símbolo, tal qual Recorde imaginou, foi utilizado na álgebra de Harriot e, ocasionalmente, em outras publicações; por exemplo, em *Memoirés de l'académie,* de De **Lagny**[62]**,** entre 1666 e 1699 e em *Euclides Data,* de **Schwad**[63], em 1780. Alguns autores utilizaram o símbolo de Recorde, porém colocaram as linhas mais curtas, como **Weigeli**[64] em *Philosophia mathematica,* publicada em 1693.

Partindo da ideia de paralelas, outros autores, como **Swedenborg**[65] em *Daedalus Hyperboreus,* um periódico científico que publicou entre 1716 e 1718, utilizaram o símbolo bem curto e inclinado para cima “**//**”**.**

Em alguns artigos no *Journal de Sçavans* como o de F. **Nicole**[66] em 1728, o símbolo de igualdade foi utilizado com um espaçamento maior entre as linhas paralelas: “=”. Mas o mais comum era encontrar o símbolo de Recorde impresso com o símbolo do número 1, colocado horizontalmente: “” ou “” (Cajori, 2007a, p. 307).

---

[60] François **Dulaurens** (??-??). Também adotava o nome Frascisci. Não encontramos outros dados da sua biografia.
[61] Giusto **Bellavitis** (1803 - 1880). Foi um matemático autodidata italiano
[62] Thomas Fantet de **Lagny** (1660-1734), matemático francês.
[63] Johann Christoph **Schwad** (1743-1821)
[64] Erhardi **Weigeli** (Erhard Weigel)-(1625-1699). Nascido na Alemanha, era matemático e astrônomo.
[65] Emanuel **Swedenborg (**Emanuel Swedberg**)-**(1688-1772). Cientista e filósofo sueco.
[66] François **Nicole** (1683 – 1758). Matemático francês, em 1717 publicou *Traité du calcul des Différences finies* que trata de regras de formação de diferenças e somatório de determinadas séries.

3.2.7 Variações na maneira de utilização

Ainda segundo Cajori (2007a), alguns autores inovaram na utilização do símbolo criado por Recorde ou acrescentaram outros detalhes na forma. Um deles foi Antoine **Deidier**[67], que em 1740, no livro *La Mesure des surfaces et des solide*", utilizou o símbolo de igualdade de uma maneira muito peculiar:

$$\frac{0+1+2}{2+2+2} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad ; \qquad \frac{0.\ 1.\ 4\ .}{4,\ 4,\ 4,} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

Tacquet[68], em 1654, publicou o livro *Elementa geometriae*, que teve grande sucesso e foi publicado em várias edições por mais de 100 anos. Na edição de 1725 que foi publicada com o nome *Elementa Euclidea geometriae*, foi encontrada uma situação curiosa com a utilização de "=", a vírgula e a palavra *aequalis* na mesma expressão: "erit 8X432=3456 aequalis 8X400=3200,+8X30=240,+8X2=16".

Na *The Columbiam Arithmetician* (*American Arithmetics*) de 1911, foi encontrada outra forma bem particular de utilização do símbolo de igualdade numa representação de uma sequência de cálculos: "1 + 6, = 7, X 6 = 42, div 2 = 21".

3.2.8 Variações de significados

Cajori (2007a) esclarece que uma dificuldade que o símbolo de Recorde encontrou para se firmar como padrão da representação da igualdade foi o fato de que outros autores o utilizaram com significados diferentes.

---

[67] Antoine **Deidier** (1696 – 1746), médico e químico francês, nascido em Montpelier.
[68] Andrea **Tacquet** (1612-1660) era formado em Teologia e ensinava Matemática no próprio seminário onde se formou.

Viète, no livro *In artem analyticen isagoge,* utilizou o símbolo “=” para identificar a diferença matemática, sendo seguido por outros matemáticos. Descartes utilizou o símbolo que hoje adotamos para identificar a igualdade, para designar “mais ou menos”, ou seja, “±”. **Caramuel**[69] em 1670, no seu livro *Mathesis Biceps, vetus et nova*, utilizou o mesmo símbolo para indicar a separação entre a parte inteira e a parte decimal de um número. O nosso 245,459 era escrito por ele como 245=459. G.H. **Paricius**[70] nos seus livros utilizava indistintamente os sinais “**=**”, “**:**” e “**–**” para separar os números no processo de resolução de problemas. Completando este quadro caótico, Dulaurens e Reyher utilizaram o símbolo “=” para indicar linhas paralelas.

Nos séculos seguintes, outras utilizações trouxeram mais significados para o símbolo criado por Recorde. **Bolyai**[71], no seu *Tentamen* de 1832, utilizou o símbolo “≐” para indicar igualdade absoluta e o símbolo “⩦” para mostrar igualdade no conteúdo. Utilizou também as formas: “A (=B” ou “B=) A” para indicar que cada valor de A é igual a algum valor de B; “A (=) B” para indicar que cada valor de A é igual a algum valor de B e vice-versa.

No século XX, alguns autores passaram a adotar o símbolo de igualdade de Recorde com significados mais abrangentes. **Stolz**[72]**,** em *Theoretische Atithmetik*[73]*,* de 1911, o utilizou com o significado de “é explicado por” ou “está associado com”.

De Morgan[74], em 1842, num artigo sobre a teoria de logaritmos que escreveu para o jornal da Cambridge Philosophical Society, utilizou um duplo símbolo de igualdade, “= =”, para indicar que “[...] cada símbolo deve expressar não apenas o comprimento e a direção de uma linha, mas também a quantidade de revolução pela qual uma linha, estabelecida a partir da linha de unidade, deveria atingir esse sentido” (CAJORI, 2007a, p. 307, tradução nossa[75]).

---

[69] Juan **Caramue**l y Lobkowitz (Johann Caramuel)-(1606-1682). Nascido em Madri, Espanha. Era engenheiro profissional e astrônomo amador.
[70] Georg Heinrich **Paricius** (1675-1725), matemático alemão.
[71] Farkas **Bolyai** (1775-1856), também conhecido por Wolfgang Bolyai, em alemão, nascido na Transilvânia, Hungria, e se notabilizou pelos seus trabalhos em geometria.
[72] Von Otto **Stolz** (1842-1905), matemático austríaco.
[73] O livro *Theoretische Atithmetik,* foi escrito por Stolz, com a colaboração do seu aluno J.A. Gmeiner, do qual não foram encontrados dados biográficos.
[74] Augustus **De Morgan** (1806-1871). Nascido na Índia, filho de pais ingleses.
[75] “[...] that every symbol shall express not merely the length and direction of a line, but also the quantity of revolution by which a line, setting out from the unit line, is supposed to attain that direction.”

A *Encyclopaedia Britannica*, no artigo *Algebra* de 1910, para indicar que a relação entre os coeficientes de potências de x numa série era apenas formal, não aritmética, utilizou o símbolo “$\underset{/}{=}$”.

Pasquier[76], em 1920, utilizou um símbolo de dupla igualdade “ ≣ ” com significado de “igual por definição”, num artigo sobre números complexos que enviou para o Congresso de Matemáticos realizado em Strasbourg.

3.2.9 A consagração do “=”

Apesar de demorar 61 anos para aparecer impresso depois de *The Whetstone of Witte*, e mais de 100 anos para que começasse a aparecer em obras impressas de matemáticos mais importantes, o símbolo inventado por Recorde conseguiu a supremacia sobre todos os concorrentes que enfrentou ao longo dos anos.

No século XVII obteve completa supremacia na Inglaterra, onde apenas dois livros foram impressos com outro símbolo, o “ $\propto$ ” de Descartes.

Apesar do símbolo de Recorde ter sido utilizado em diversos manuscritos e cartas, inclusive uma escrita por Descartes, as primeiras publicações no continente europeu que utilizaram o símbolo “=” para indicar a igualdade foram as do alemão J. **Stampionen**[77] em 1639 e 1640 e **Rahn**[78] em 1659. Na França, de autoria de **Arnauld**[79], a primeira publicação a utilizar o símbolo de Recorde foi publicada em 1667.

Outros matemáticos utilizaram o símbolo “=” para indicar a igualdade**:** **Prestet**[80], **Castelan**[81] e **Tschirnhaus**[82], **Hoste**[83], **Ozanam**[84], **Nieuwentijt**[85],

[76] Louis-Gustave Du **Pasquier** (1876–1957), matemático suíço.
[77] Jan Jansz de Jonge **Stampioen** (1610-1690), matemático alemão.
[78] Johann Heinrich **Rahn** (1622-1676), nascido na Suíça, foi o primeiro matemático a utilizar o símbolo “÷” para indicar uma divisão.
[79] Antoine **Arnauld** (1612-1694), matemático francês, também era chamado de "O Grande Arnauld".
[80] Jean **Prestet (**1648-1690). Matemático francês, utlizou o simbolo “=” na obra *Éléments de mathématiques* em 1675
[81] Antoine Louis **Castelan** (1772-838). Arquiteto, pintor e antiquário francês.
[82] Ehrenfried Walter von **Tschirnhaus** (1651-1708), nascido em Kieslingswalde Alemanha, atualmente Sławnikowice, Polônia.
[83] Paul l’**Hoste** (1652-1700). Nascido na França, era um teórico da guerra naval.
[84] Jacques **Ozanam** (1640-1717). Matemático francês.
[85] Bernard **Nieuwentijt** (1654-1718). Foi um médico e clérigo alemão. Entre 1694 e 1700, estabeleceu uma disputa com Leibniz sobre as bases do cálculo infinitesimal.

Weigel[86], **de Lagny**[87], **Carré**[88], **de L´Hopital**[89], **Polinière**[90] e **Reyneau**[91]. E como nessa época o cálculo diferencial e integral sofria um grande avanço, o fato de **Newton**[92] e **Leibniz**[93] utilizarem o símbolo de Recorde estimulou a adoção generalizada do mesmo: “A vitória final de ‘=’ sobre ‘$\propto$’ parece ter ocorrido principalmente devido à influência de Leibniz durante o período crítico do final do século dezessete” (CAJORI, 2007a, p. 306, tradução nossa[94]).

Há de se enaltecer o fato do símbolo criado por Recorde ter se tornado ubíquo, tendo em vista que, até os nossos dias, existe uma considerável diversidade de sinais em outros grupos de símbolos em cada ramo da Matemática.

Para a análise dos símbolos de igualdade ao longo da história da notação algébrica, organizamos o **Quadro 2: Símbolos encontrados na “Jornada pela História”**, e, em nossa análise, os símbolos serão citados pelo nome do autor ou do documento onde foram encontrados.

[86] Erhard **Weigel** (ou Erhardi Weigelii) (1625-1699). Matemático, astrônomo e filósofo alemão.
[87] Thomas Fantet **de Lagny** (1660-1734), Matemático francês.
[88] Louis **Carré** (1663-1711). Matemático Francês.
[89] Guillaume François Antoine Marquis **de L'Hôpital** (1661-1704), matemático francês.
[90] Pierre **Polinière** (ou Polynier)-(1671 - 1734). Médico e físico francês, estudou Matemática com Pierre Varignon (1654-1722), que foi um dos primeiros a utilizar o cálculo diferencial no estudo de mecânica.
[91] Charles René **Reyneau** (1656-1728). Matemático francês.
[92] Sir Isaac **Newton** (1643-1727). Matemático inglês.
[93] Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (1646-1716), matemático alemão.
[94] “The final victory of = over $\propto$ seems mainly due to the influence of Leibniz during the critical period of the close of the seventeenth century ” (adaptação nossa).

	Autor / Fonte	Local	Ano	Símbolo	Observações
1	**Papiro Rhind**	Egito	1685 a.C.		*"it gives" – "dá"*
2	**Diofanto**	Grécia	~200 a.C.	*ἴσ*	
3	**Manuscrito Bakhshali**	Índia	200 ~ 800 d.C.	फ "pha"	Originado na palavra "phala" (फल) (fruto em sânscrito) Significado: "o resultado de um cálculo"
4	**Regiomontanus**	Alemanha	~1450 d.C.	—	Traço
5	**al-Qalasâdî**	Arábia	antes de 1486	ل	*Adala (igualdade)*
6	**Paccioli**	Itália	1494	—	O autor utilizava com diversos significados
7	**Cardano**	Itália	1545	*"espaço em branco"*	
8	**Bombelli**	Itália	1545	—	Utilizou o símbolo " =", provavelmente antes de Recorde (por volta de 1550)
9	**Recorde**	Inglaterra	1557	═══	1ª vez que o símbolo = apareceu impresso
10	**Xylander**	Alemanha	1571	‖	
11	**Digges**	Inglaterra	1590	϶€	Leonard e Thomas (Pai e filho)
12	**Andrea**	Alemanha	1614	·3	
13	**Hérigone**	França	1634	2|2	3|2 significava "maior que" e 2|3 significava "menor que"
14	**Hérigone**	França	1634	⊔	
15	**Descartes**	França	1637~1638	∝	
16	**Dulaurens**	França	1667	⊓	
17	**Buteo**	França	1698	[	
18	**Swedenborg**	Suécia	1716	//	
19	**Nicole**	França	1728	‾‾ __	
20	**Reyher**	Alemanha	antes de 1714	|	
21	**Diversos**	Europa	1700 ~ 1800	11 *ou* 11	Facilitava a impressão
22	**Bellavitis**	Itália	1832	♎	Constelação de Libra
23	**De Morgan**	Inglaterra	1842	= =	
24	**Pasquier**	Suiça	1920	≣	

Quadro 2: Símbolos encontrados na "Jornada pela História"

3.2.10 Análise dos símbolos de igualdade ao longo da história

A nossa análise, seguirá, sempre que possível, à ordem cronológica, segundo os registros históricos que encontramos nas nossas pesquisas e estão apresentados no **Quadro 2: Símbolos encontrados na "Jornada pela História"**.

Quando analisamos o símbolo "  ", encontrado no Papiro Rhind e ***"ἴσ",*** utilizado por Diofanto, identificamos que eles indicam o resultado da sentença que os precede, tanto que o símbolo do papiro Rhind, traduzido literalmente, significa "isso dá", indicando que, na sequência, será apresentado o resultado da expressão numérica que o antecede.

Como nessa época os indivíduos trabalhavam basicamente com os números, especialmente os naturais, e, no nosso entendimento, a ideia de fazer contas em aritmética é corporificada, esse significado de colocar o resultado depois do símbolo de igualdade também é habitante do mundo corporificado.

Segundo a nossa análise, o símbolo, "फ" (pha), utilizado no manuscrito Bakhshali, também se enquadra na situação acima, isto é, tem características do mundo corporificado, mas vale destacá-lo pela origem do símbolo na palavra *phala*, que significa fruto. Acreditamos que a utilização dessa palavra, na forma abreviada, indicava que o valor colocado após o símbolo representava o fruto (resultado) de uma expressão que o precedia.

Antes de partirmos para a análise dos símbolos originados na Europa Ocidental, trazemos o símbolo "ل" utilizado por al-Qalasâdî, que nasceu na região de Andaluzia, na Espanha, mas era de origem árabe, tendo feito a sua formação em países com predomínio muçulmano, como Argélia e Egito.

Como já mostramos no item **4.2.2 Precursores** (p. 52), os árabes detinham um conhecimento bastante evoluído da álgebra, mas permaneceram muito tempo utilizando a notação retórica, e o símbolo "ل" que al-Qalasâdî utilizou pode ser entendido como uma forma sincopada da palavra árabe "*adala*" que significa igualdade.

Os árabes fizeram, ao longo dos séculos, grandes investimentos na pesquisa dos conhecimentos matemáticos dos Gregos e dos Hindus, e, além de se tornarem depositários desses conhecimentos, fizeram contribuições ao desenvolvimento da Matemática: “Resolveram equações cúbicas por construção geométrica, aperfeiçoaram a trigonometria até um alto nível e conseguiram avanços menores e por toda Matemática, a Física e Astronomia” (CAJORI, 2007b, p. 168). Apesar disso, dada a pouca familiaridade deles com símbolos e dado que o símbolo adotado por al-Qalasâdî é uma letra, entendemos que se tratava apenas de uma simplificação da escrita, nada indicando que pudesse estar colocado, nesta forma de indicar a igualdade, algo mais do que uma representação corporificada.

Chegando na nossa jornada aos símbolos utilizados por matemáticos da Europa Ocidental para indicar a igualdade, encontramos, de início, duas situações que acreditamos sejam semelhantes: o uso de um traço e o uso de espaço.

Alguns autores (Regiomontanus, Paccioli, Bombelli) utilizam um traço “—” para indicar a igualdade, enquanto Cardano simplesmente deixava um espaço em branco. Entendemos que tais representações ainda não caracterizavam o uso real de um símbolo para indicar a igualdade, pois o traço e o espaço em branco parecem indicar apenas a resposta de uma proposição ou expressão anteriormente formulada. Tais representações estão caracterizadas como recursos do mundo corporificado, pois parecem apenas querer indicar um registro físico de separação entre o fim da proposição e o início da resposta. O espaço e o traço não parecem representar um conceito ou um processo.

No nosso entendimento, a diversidade de símbolos que surgiram depois do “=” criado por Robert Recorde, desde meados do século XVI até o século XIX, (Xylander “||”; Digges “϶€” ; Andrea “ʒ” ; Hérigone “⊔”; Dulaurens “⊓” ; Buteo “[“; Swedenborg “//” ; Nicole “⌆” ; Reyher “|”), são resultados da evolução da notação algébrica, na qual alguns matemáticos desse período estavam abandonando a álgebra retórica e sincopada, e procuravam apresentar as suas descobertas utilizando símbolos.

Em Cajori (2007a), esses símbolos são apresentados em situações que podem estar associadas a significados do mundo corporificado quando utilizados em representações para indicar o resultado, e também representavam a evolução do pensamento matemático, e ocupavam lugar em demonstrações dos novos conhecimentos que iam sendo apresentados. Nessa condição, esses símbolos também traziam significados do mundo formal, pois tais demonstrações se valiam do conhecimento Matemático que já existia, baseando-se em axiomas e formulações do pensamento avançado da época. Para exemplificar a situação descrita acima, vamos destacar a análise dos símbolos adotados por Hérigone “2|2” e Descartes “∝” .

Entendemos que, quando Herigone utilizou o símbolo “2|2”, estava com o pensamento com características do mundo corporificado. A representação da igualdade colocada dessa maneira mostra que o autor tinha a preocupação de fazer uma apresentação da igualdade de maneira concreta, utilizando um símbolo que já trazia na sua notação a própria igualdade, querendo lembrar ao leitor que o símbolo colocado entre duas expressões ou termos estava ali para indicar que eram iguais, tanto quanto 2 é igual a 2. Mais clara essa conclusão fica quando verificamos os símbolos que ele utilizava para representar “maior que” e “menor que”: “3|2” e “2|3”, respectivamente.

Quanto ao símbolo utilizado por Descartes “∝”, aparentemente reutilizado dos símbolos da Astronomia, parecia indicar algo mais do que uma simples igualdade. Para ele, foi necessário simbolizar a igualdade com algo do cosmos e, quem sabe, baseando-se na filosofia grega, num objeto do Universo regido por leis e regularidades. Pela variedade e qualidade da sua obra, acreditamos que Descartes chegou a um desenvolvimento cognitivo do conhecimento matemático, que tanto podia utilizar o símbolo de igualdade com as características do mundo corporificado, quanto utilizá-lo com características do mundo formal nas demonstrações dos novos conhecimentos matemáticos que produzia.

Da mesma forma, a conclusão sobre o símbolo de Herigone não impede que, embora com estrutura notacional bastante corporificada, possa ter sido utilizado em situações que pudessem ser identificadas com características do mundo formal, como, por exemplo, na demonstração de um teorema. Essa condição vale para todos os símbolos que encontramos, e saber se o uso de um símbolo se restringiu a um determinado mundo, ou poderia ter sido utilizado em todos eles, exigiria uma análise da obra completa de todos os matemáticos que citamos, o que não é o objetivo deste trabalho.

Já no século XIX, Bellavitis utilizou também um símbolo da Astronomia, “ ♎ ”, que representa a constelação de Libra ou Balança. Novamente, a utilização desse símbolo parece indicar a força que o autor queria dar para o equilíbrio representado pela igualdade, o que significa que este símbolo foi usado com características semelhantes ao símbolo de Descartes, isto é, corporificadas.

Por sua vez, De Morgan, em 1842, ao utilizar “= =”, trouxe uma nova definição, acrescentando um novo significado para o símbolo. No seu trabalho, ele fazia uma contribuição ao desenvolvimento da Teoria dos Logaritmos e duplicou o símbolo de igualdade para indicar que duas situações deveriam acontecer ao mesmo tempo. Pretendia dessa forma, expressar tanto o comprimento e direção de uma linha quanto a quantidade de revoluções que essa linha deveria cumprir.

Encontramos, na utilização feita por De Morgan do símbolo de igualdade, uma situação que possui as características tanto do mundo corporificado quando do mundo formal. Do mundo corporificado, vem a representação utilizando dois símbolos para identificar que existem duas igualdades; e do mundo formal, encontramos a características de uma nova construção na Matemática, tanto do símbolo novo quanto da definição dos novos conceitos que ele representa, não só da dupla indicação de igualdade, mas também da nova definição, está uma contribuição para o desenvolvimento da Teoria dos Logaritmos.

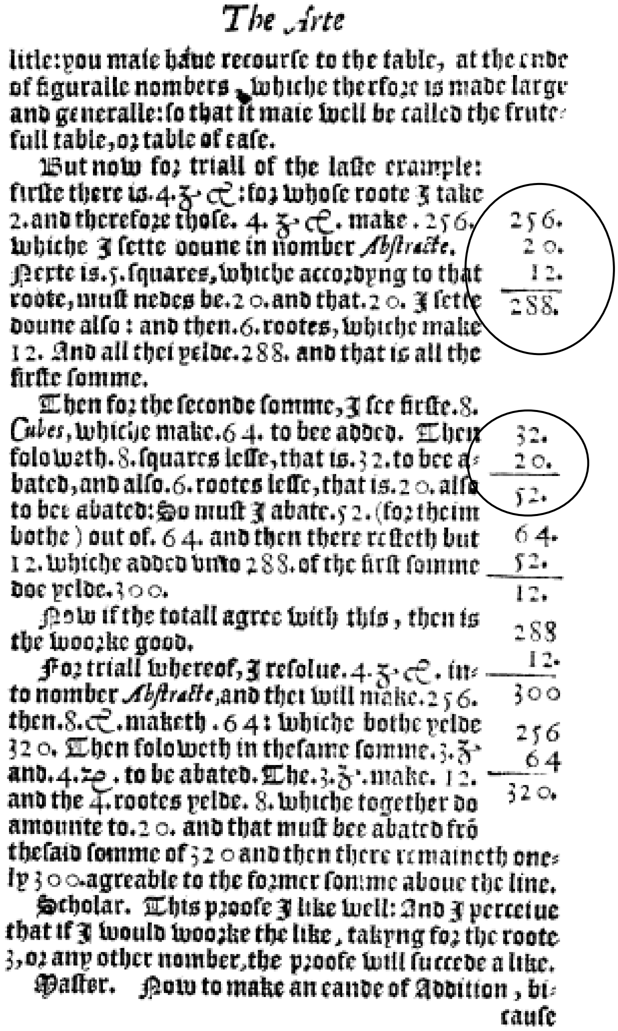
Também Pasquier, em 1920, quando criou o símbolo “ ≣ ” com um duplo sinal de igualdade, para indicar uma “igualdade por definição” estava utilizando recursos do mundo formal, pois apresentava uma nova definição para o símbolo de igualdade. Num trabalho sobre séries, ele utilizou esse símbolo para indicar que: “As relações entre os coeficientes das potências de x em uma série podem ser expressas por uma igualdade formal que envolve a série como um todo [...] onde o símbolo “ ≣ ” indica que a igualdade é apenas formal, não aritmética” (CAJORI, 2007a, p. 308, tradução nossa[95]).

De maneira proposital, deixamos para o fim o símbolo “=”, e voltando no tempo, reencontrarmos com Robert Recorde e o seu símbolo para a igualdade: “═════”, que apareceu pela primeira vez no livro *Whetstone of Witte,* de 1557, que

[95] The relations between the coefficients of the powers of x in a series may be expressed by a formal equality involving the series as a whole [...] where the symbol “ ≣ ” indicates that the equality is only formal, not arithmetical.

se propunha a ensinar aritmética e álgebra para pessoas sem conhecimento anterior. Recorde escreveu um livro repleto de esquemas com chaves, tabelas, desenhos de quadrados e cubos, explicações por meio de diálogos entre professor e aluno, orientações passo a passo, e com uma linguagem acessível ao povo em geral.

Em mais da metade do livro, Recorde utilizou uma barra sob o último número para indicar o lugar da resposta, tal qual é comum até hoje nas séries iniciais das nossas escolas:


The Arte

litle: you maie haue recourse to the table, at the ende of figuralle nombers, whiche therfore is made large and generalle: so that it maie well be called the frutefull table, or table of ease.

But now for triall of the laste example: firste there is. 4. ȝ·cȝ: for whose roote I take 2. and therefore those. 4. ȝ·cȝ. make. 256. whiche I sette doune in nomber *Abstracte*. Nexte is. 5. squares, whiche accordyng to that roote, must nedes be. 20. and that. 20. I sette doune also: and then. 6. rootes, whiche make 12. And all thei yelde. 288. and that is all the firste somme.

Then for the seconde somme, I see firste. 8. *Cubes*, whiche make. 64. to bee added. Then foloweth. 8. squares lesse, that is. 32. to bee abated, and also. 6. rootes lesse, that is. 20. also to bee abated: So must I abate. 52. (for theim bothe) out of. 64. and then there resteth but 12. whiche added unto 288. of the first somme doe yelde. 300.

Now if the totall agree with this, then is the worke good.

For triall whereof, I resolue. 4. ȝ·cȝ. into nomber *Abstracte*, and thei will make. 256. then. 8. cȝ. maketh. 64: whiche bothe yelde 320. Then foloweth in the same somme. 3. ȝ· and. 4. ȝ. to be abated. The. 3. ȝ·. make. 12. and the 4. rootes yelde. 8. whiche together do amounte to. 20. and that must bee abated fro the said somme of 320 and then there remaineth onely 300. agreable to the former somme aboue the line.

Scholar. This proofe I like well: And I perceiue that if I would worke the like, takyng for the roote 3, or any other nomber, the proofe will succede a like.

Master. Now to make an cande of Addition, bicause

256.
20.
12.
288.
32.
20.
52.
64.
52.
12.
288
12.
300
256
64
320.

Figura 8: Apresentação da Soma e Subtração

Fonte: *Whetstone of Witte* (1557)

Em um livro de pouco mais de 300 páginas, somente depois da página 200 é que Recorde introduziu o símbolo "=" para indicar a igualdade e, ao lado da frase "Porei, como muitas vezes uso no trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas, de um comprimento assim: ══════, porque duas coisas não podem ser mais iguais" (BOYER, 1974, p. 197), que utilizou para justificar a escolha, completou que era para não ficar repetindo a palavra "aequalis". Isso ocorreu quando ele passou a explicar o que eram e mostrar tipos de equações.

Com essas constatações, entendemos que o símbolo de "=" foi criado por Recorde com o intuito de diferenciar a situação de igualdade quando apresentou em seu livro os conteúdos de aritmética, da parte que trabalhava com conceitos algébricos de equação. Isso nos leva a concluir que ele tratava a igualdade utilizada na equação com conceitos do mundo simbólico e, por conseguinte, o símbolo "=" foi criado nesse contexto.

Durante a nossa análise dos símbolos de igualdade ao longo da história da notação algébrica, foi surgindo a ideia de que haveria, por volta do final do século XVI e início do século XVII, um período que nos parecia caracterizar uma mudança importante e disseminada entre os matemáticos da época. Embora estivéssemos olhando apenas para o símbolo de igualdade, percebíamos que a generalização do uso de símbolos por parte dos matemáticos da Europa Ocidental indicava uma tendência de mudança, não somente na notação, mas também na forma do pensamento algébrico. De acordo com esse pensamento, encontramos, em Eves (2008), a afirmação de que o século XVII representa o que ele chamou de "A Alvorada da Matemática Moderna" (Figura 9: Linha do Tempo dos Períodos Matemáticos). Como é nosso entendimento que a Matemática resulta de um processo de evolução do conhecimento humano e do aumento da sua capacidade cognitiva, podemos imaginar que os matemáticos que viveram antes desse período tiveram participação nesse processo de evolução.

Focando na participação de Robert Recorde nesse processo, ele demonstrava uma preocupação em resgatar e levar ao povo o conhecimento matemático em aritmética, álgebra e geometria, tomando a iniciativa de publicar suas obras na língua inglesa e com títulos bastante estimulantes: *No Terreno das Artes; Caminho para o Conhecimento; O Castelo do Conhecimento; A Pedra de afiar da inteligência*.

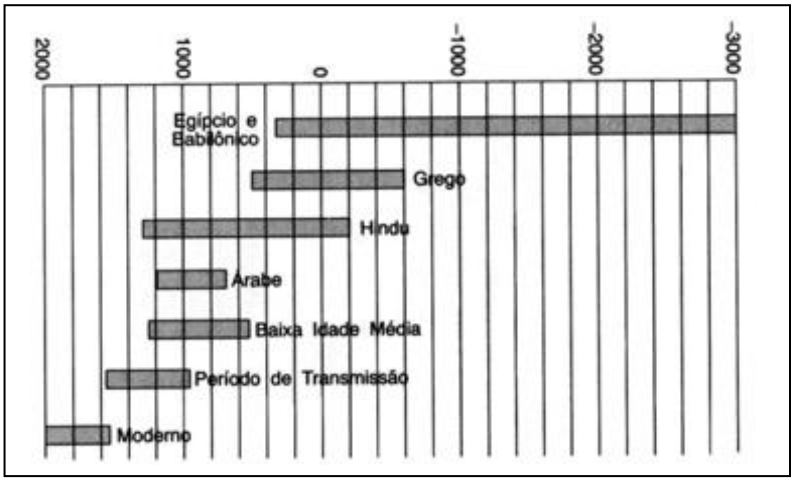


Figura 9 : Linha do Tempo dos Períodos Matemáticos
Fonte: Eves (2008, p. 741)

A invenção, em meados do século XV, da impressão por tipos mecânicos móveis, ajudou a popularizar os livros e, dessa forma, ajudou a impulsionar a divulgação do conhecimento matemático nas sociedades da época. Essa forma de impressão facilitava a criação e reutilização de tipos, o que levou cada vez mais a utilização dos símbolos para representação desse conhecimento. Já apresentamos neste trabalho os símbolos utilizados por Descartes e Bellavitis, adaptados de símbolos da Astronomia, mas entendemos que o exemplo mais marcante dessa prática aparece nas adaptações realizadas para representar o símbolo de igualdade de Recorde, com a utilização do algarismo 1: “ ” ; “ ”.

Entendemos que, com o início da popularização do conhecimento da Matemática, novos indivíduos tiveram oportunidade de desenvolver o conhecimento e, num processo de retroalimentação, divulgar tal conhecimento para a população em geral.

Isso faz com que o símbolo inventado por Recorde tenha sofrido, ao longo do tempo, uma constante mudança em relação ao significado original. Com a universalização do uso desse símbolo, a cada avanço da Matemática em que seja necessário representar uma situação de igualdade, o símbolo “=” ganha um novo significado.

Como vamos apresentar no **CAPÍTULO 5: SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO “=” NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA**, tanto o desenvolvimento da Matemática quanto de um símbolo utilizado para representar ideias matemáticas parece seguir um ciclo similar ao apontado no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para um indivíduo.

CAPÍTULO 4
JORNADA PELAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme critérios apresentados no **CAPÍTULO 1: METODOLOGIA**, dentre as pesquisas efetuadas na área da Educação Matemática que selecionamos para analisar os significados já encontrados para o símbolo de igualdade, destacaremos a de Kieran (1981), e, inicialmente, analisaremos os relatos de pesquisas, relacionando-os com os significados, operacional e de equivalência, apresentados por ela.

Alguns trabalhos que analisamos tinham como objetivo encontrar o papel do símbolo de igualdade no desenvolvimento do pensamento algébrico e o impacto que ele pode causar quando inserido no ensino da Álgebra nas séries iniciais.

De uma maneira geral, os trabalhos analisados foram concluídos apresentando os significados encontrados para o símbolo de igualdade e, por meio deles, mostraram tanto o impacto deles no desenvolvimento do pensamento algébrico quanto o impacto da introdução dos fundamentos da Álgebra nas séries iniciais. Entretanto, neste nosso trabalho, os nossos olhos estão focados apenas nos significados que essas pesquisas apresentaram para o símbolo de igualdade.

Também neste capítulo, apresentaremos outros significados encontrados ao longo da nossa pesquisa, resultado de observações do cotidiano e de publicações que apresentavam significados para o símbolo de igualdade num contexto de conteúdos matemáticos, filosóficos e práticos.

4.1 Pesquisas em Educação Matemática

Kieran (1981) fez uma revisão de algumas pesquisas anteriores que destacaram os diferentes entendimentos que alunos da escola básica possuíam sobre o símbolo de igualdade e trouxe novas contribuições para o assunto. Para ela, não se pode subestimar a importância do símbolo de igualdade no estudo da álgebra, pois a falta de entendimento desse símbolo parece criar enormes problemas conceituais.

De acordo com o relato de Kieran (1981), os alunos da pré-escola veem o símbolo de igualdade como uma comparação entre as quantidades de dois conjuntos de objetos que podem ser contados. Nos seis primeiros anos do Ensino Fundamental, os alunos entendem que o símbolo de igualdade tem a função de indicar que "alguma coisa deve ser feita". Assim, para os alunos com esse entendimento do símbolo de igualdade, é mais difícil entender a expressão $9 = 5 + 4$ do que a expressão $5 + 4 = 9$, pois, nessa última maneira, o símbolo de igualdade vem antes da resposta, e coincide com a ideia de que ele aponta a necessidade de uma ação ou a resposta do problema. Segundo a autora, não foram encontradas evidências de que os alunos mudam a sua maneira de pensar sobre o símbolo de igualdade enquanto cursam esses anos iniciais. A maneira como as crianças tratavam as questões apresentadas e significado que elas davam ao símbolo de igualdade foram nomeados por Kieran (1981) como entendimento ou significado *operacional*.

No nosso entendimento, essa situação encontrada por Kieran (1981), nos remete ao mundo corporificado, pois, nesse mundo, os conceitos matemáticos estão relacionados à manipulação física dos objetos ou a imagens de situações concretas. Na situação avaliada por Kieran (1981), percebemos que as crianças conseguiam manipular as duas quantidades e, com o conceito da soma, dar a resposta, mas não conseguiam enxergar a simetria que o conceito de igualdade apresenta. As crianças tinham que "materializar" a reposta da operação que realizaram e colocá-la logo após o símbolo de igualdade, que elas identificavam como o indicador do lugar da resposta.

Na sequência do seu trabalho, Kieran (1981) aponta que, numa pesquisa feita com alunos de séries iniciais, na qual foi trabalhado o conceito de equivalência, foi percebido que os alunos tiveram mais flexibilidade para aceitar o símbolo de igualdade numa variedade maior de tipos de sentenças matemáticas, mas o símbolo de igualdade continuou sendo entendido, primeiramente, como um operador e não como um símbolo relacional.

Nas séries iniciais, eles não conseguiam entender expressões como 5 + 4 = 3 + 6 e afirmavam que 5 + 4 = 9. Segundo Kieran (1981), somente entre os 10 e 13 anos de idade, os alunos, podem aceitar os dois lados da expressão como tendo o mesmo resultado, sem ter de fazer a substituição para poder garantir isso. Para muitos alunos por volta dos 13 anos de idade, inicia-se uma fase de transição entre precisar colocar uma resposta depois do símbolo de igualdade e passar a entendê-lo com o significado de *equivalência,* segundo a definição apresentada pela autora[96]. Esse período, apesar das confusões que a transição traz, parece mostrar que, quando ele começa a comparar os dois lados da igualdade, ele está começando a ver o símbolo de igualdade mais como um símbolo “de equivalência” do que como um “operador” para fazer alguma coisa.

Nesse momento, entendemos que os alunos pesquisados por Kieran (1981), tendo passado por um desenvolvimento cognitivo em Matemática, estavam iniciando a utilização dos conceitos matemáticos do mundo simbólico. Nesse mundo, os símbolos deixam de ser apenas uma indicação de ação ou de demanda de um processo e passam a encapsular conceitos e processos. O símbolo de igualdade passa a ser um proceito, e, na expressão 5 + 4 = 3 + 6, passa a ser entendido com a representação tanto do processo da adição, quanto do conceito da soma. Essa mudança sofrida no entendimento do significado de igualdade gera também uma abertura para que o símbolo de igualdade possa ser visto com mais de um proceito, permitindo dessa forma, que ele também seja reconhecido como a representação de uma equivalência.

---

[96] "Podemos ver que a identidade é um tipo de relacionamento muito restritivo no que diz respeito a real similaridade, que aponta a igualdade para um atributo que não muda, e que equivalência refere-se com um maior relacionamento onde se concorda que, para certos propósitos, é possível substituir um item por outro. Equivalência, sendo a relação mais abrangente, será também a mais flexível e, portanto, a mais útil." (GATTEGNO, 1974, P. 83 *apud* KIERAN, 1981, p. 317 tradução nossa: "We can see that identity is a very restrictive kind of relationship concerned with actual sameness, that equality points at an attribute which does not change, and that equivalence is concerned with a wider relationship where one agrees that for certain purposes it is possible to replace one item by another. Equivalence being the most comprehensive relationship it will also be the most flexible and therefore the most useful".

Pela representatividade e tendo em vista a importância e o reconhecimento do trabalho de Kieran (1981), os significados que ela apresentou, *operacional* e *equivalência*, serão adotados como base da nossa pesquisa.

4.1.1 Significado Operacional

O trabalho de Behr, Erlwanger e Nichols (1980), publicado um pouco antes da pesquisa de Kieran, já sinalizava para o entendimento que os alunos fazem do símbolo de igualdade, relacionando-o com a necessidade de "dar uma resposta". Os autores apontaram que muitos alunos têm a ideia persistente de que o símbolo de igualdade é um "indicador sintático", isto é, um símbolo indicando onde a resposta deve ser escrita ou um "símbolo de operação", isto é, um estímulo à ação, "fazer alguma coisa". A diferença entre essas duas classificações pode ser vista nos seguintes exemplos: quando é apresentada a expressão 3 + 4 = 6 + 1, os estudantes que entendem o símbolo de igualdade como um indicador sintático, afirmam que a expressão está incorreta, pois 3 + 4 = 7, não 6, uma vez que, para eles, a resposta ocorre imediatamente depois do símbolo de igualdade. De forma diferente, estudantes que entendem o símbolo de igualdade como um operador, afirmam que a expressão está incorreta porque 3 + 4 = 7 + 1 = 8 ou que 3 + 4 = 7 + 6 = 13 + 1 = 14, num desdobramento sequencial de operações, não considerando o símbolo de igualdade como uma referência no meio de duas expressões.

Embora os autores apresentem uma interessante distinção entre o que chamam de "indicador sintático" e "símbolo de operação", entendemos que as situações apresentadas nos remetem unicamente ao significado operacional apresentado por Kieran.

No nosso entendimento, as conclusões apresentadas por Behr, Erlwanger e Nichols (1980) são uma subdivisão das conclusões de Kieran (1981) e corroboram com a nossa posição de que o significado operacional que foi apontado em Kieran (1981) está firmado em conceitos do mundo corporificado.

Quando Behr, Erlwanger e Nichols (1980) apontam que um número significativo de crianças só aceitou o símbolo de igualdade se precedido por um ou mais símbolos de operação (+ ; ÷; ...), entendemos que tais crianças estão tão arraigadas ao significado operacional, ou seja, "ter" que fazer uma operação ou de colocar a resposta de uma operação após o símbolo de igualdade, que não conseguem entender o símbolo "=" quando apresentado sem um símbolo que indique a operação a ser feita.

Por sua vez, o trabalho de Falkner, Levi e Carpenter (1999) apresenta uma pesquisa realizada nos EUA, com foco na pré-escola e nas duas séries iniciais. O objetivo era avaliar de que forma as crianças entenderiam o papel do símbolo de igualdade em algumas situações, e apresentaram para uma turma de pré-escola (idades entre 5 e 6 anos) a expressão $4 + 5 = \square + 6$, solicitando que preenchessem o quadradinho. Todas as crianças responderam que deveria ser colocado 9 no quadradinho.

Num segundo momento, o mesmo problema foi apresentado usando pilhas de nove e seis cubos. Os professores perguntaram se as pilhas tinham a mesma quantidade e todos responderam que não. Algumas crianças foram capazes, inclusive, de apontar o que deveria ser feito para que as duas pilhas ficassem com o mesmo número de cubos. No entanto, quando o primeiro problema foi apresentado novamente, todas elas continuaram respondendo que no quadradinho deveria ser colocado o número 9.

Embora fosse expectativa dos autores da pesquisa que os alunos relacionassem as duas situações, no nosso entendimento, as duas propostas são muito diferentes entre si, uma vez que a utilização das pilhas de cubos está relacionada com o mundo corporificado e a capacidade que os alunos possuíam de encontrar a resposta pela manipulação dos objetos; e a utilização do papel com símbolos e um "quadradinho" para encontrar a resposta requeria conhecimento matemático que só estaria disponível nos conceitos do mundo simbólico, o que exigiria dos alunos um desenvolvimento cognitivo em Matemática que eles demonstraram não possuir.

A situação descrita acima nos remete ao significado operacional apresentado por Kieran e, se quisermos especificar a situação segundo a estrutura apresentada por Behr, Erlwanger e Nichols (1980), as crianças entendiam o símbolo de igualdade como um indicador sintático.

Um problema semelhante havia sido apresentado pelos mesmos autores, numa sala com alunos na faixa entre 11 e 12 anos. Foi solicitado que resolvessem o problema: $8 + 4 = \square + 5$, e todos os 145 alunos envolvidos no teste erraram a resposta, afirmando que o valor a ser colocado no quadradinho deveria ser 12 ou 17.

Novamente, os resultados da pesquisa de Falkner, Levi e Carpenter (1999) nos levam para o entendimento do símbolo de igualdade como operacional, e, nesse segundo caso, como um “símbolo de operação”, segundo o detalhamento do significado operacional do símbolo de igualdade apontado por Behr, Erlwanger e Nichols (1980).

A conclusão de Falkner, Levi e Carpenter (1999), quando compararam as duas pesquisas que realizaram, aponta que as crianças da pré-escola, com pouca experiência no uso do símbolo de igualdade, não parecem ter as mesmas concepções erradas de crianças mais velhas sobre esse mesmo símbolo, mas não bastam apenas alguns exemplos para que elas compreendam o significado de equivalência desse símbolo. Eles entendem que as crianças têm uma boa compreensão da igualdade quando estão lidando com objetos concretos, mas apresentam dificuldade para entender a representação simbólica envolvendo o símbolo de igualdade.

No nosso entendimento, as conclusões acima ilustram as dificuldades que os alunos têm de fazer relações entre os conceitos dos mundos corporificado e simbólico, o que refirma a necessidade de um desenvolvimento cognitivo do indivíduo na Matemática para que eles possam utilizar o conceito de igualdade, relacionado tanto ao mundo corporificado quanto ao mundo simbólico.

Essas conclusões vêm ao encontro de nosso entendimento, com base no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, de que as crianças na faixa etária da pré-escola, que participaram da pesquisa, pela pouca idade e tempo de aprendizagem da Matemática, somente dispõem de conhecimentos do mundo corporificado e a noção de equivalência só é desenvolvida com elementos do mundo simbólico.

Falkner, que era professora de uma turma de primeiros e segundos anos escolares (6 a 8 anos de idade), aplicou esta mesma pesquisa na sua sala de aula e as respostas foram praticamente as mesmas das crianças da pré-escola. A diferença foi que algumas crianças responderam de uma maneira que ela chamou de “curiosa”, colocando mais um símbolo de igualdade e dando 17 como resultado final: $8 + 4 = \square + 5 = 17$. Essa situação já havia sido descrita por Behr, Erlwanger e Nichols (1980), que chamaram essa forma de entendimento do símbolo de igualdade como um “símbolo de operação”.

No ano seguinte, Falkner aplicou novamente o mesmo teste e a maioria dos alunos que o responderam no ano anterior se lembrou do problema e respondeu corretamente. No entanto, os novos alunos do primeiro ano colocaram 12 como resposta ou ficaram sem responder o problema.

Segundo Falkner, Levi e Carpenter (1999), o símbolo de igualdade é uma convenção, foi escolhido pelos matemáticos para representar a noção de igualdade. No entanto, as crianças que entendem o significado da igualdade representada nesse símbolo terão um caminho aberto para representar as ideias aritméticas e serão capazes de comunicar essa e outras ideias.

Concordamos com as conclusões acima e trataremos dessa questão no **CAPÍTULO 5: SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO “=” NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA**, no qual pretendemos mostrar o papel do símbolo no entendimento de significados de igualdade.

Com relação às dificuldades, os autores perceberam que, mesmo depois de explicar um significado de igualdade para a classe, o de “calcular”, para algumas crianças isso não é suficiente, e elas não conseguem adotar o procedimento que foi explicado para o uso do símbolo de igualdade. Os autores concluíram, então, que é preciso tempo para que o símbolo de igualdade seja entendido por todas as crianças.

Embora as conclusões apresentadas por Falkner, Levi e Carpenter (1999) não tenham especificado sobre qual significado do símbolo de igualdade estavam tratando quando afirmaram a importância de compreendê-lo no que se referiam ao tempo como elemento fundamental para que essa compreensão se realizasse, no nosso ponto de vista, tais conclusões sinalizam para o fato de que o entendimento do significado do símbolo de igualdade acompanha a evolução cognitiva da criança.

Esse processo se inicia com o entendimento operacional, num primeiro momento, como indicador sintático e, posteriormente, como um símbolo de operação que, com o decorrer do tempo, levará a criança a adotar procedimentos mais flexíveis no tratamento das situações matemáticas, nas quais esteja presente o símbolo de igualdade.

Esse mecanismo é o que está retratado nos Três Mundos da Matemática, em que, no início do desenvolvimento cognitivo, a criança se vale dos conhecimentos do mundo corporificado e, no desenrolar do seu desenvolvimento, passa a utilizar o repositório de conhecimento que habita os demais mundos da Matemática.

Outro trabalho que consideramos na nossa análise foi o de Warren (2003), que apresentou o resultado de uma pesquisa longitudinal ao longo de 3 anos com turmas entre o terceiro e quinto ano escolar. A idade média inicial das crianças era 8,5 e a final era 10,5. A pesquisa foi realizada numa escola do Ensino Fundamental na Austrália e procurava acompanhar as mudanças do entendimento sobre “igual” e “equivalente” que as crianças manifestam ao longo de um determinado período escolar.

Para a pesquisa, ela utilizou um teste escrito ao final de cada ano, com a mesma quantidade de questões ao longo dos três anos, e uma entrevista com cada uma das crianças para esclarecer as respostas dadas no teste escrito, solicitando que elas explicassem como tinham obtido a resposta que apresentaram e, sempre que possível, contando uma história, com palavras, sobre a questão apresentada. Um exemplo é a questão apresentada no final do quarto e quinto anos, onde era solicitado que encontrassem o número que estava faltando na expressão: $7 + 8 = \square + 5$.

As conclusões apresentadas pelos autores dessa pesquisa apontam que, uma vez estabelecidos os equívocos no entendimento do símbolo de igualdade, por exemplo, entender o símbolo como um indicador de realizar uma operação ou realizar a operação sempre da esquerda para a direita permanece bastante estável e muito comumente persiste por todo o Ensino Fundamental. Uma segunda conclusão mostra que muitos alunos são capazes de expressar o pensamento por palavras escritas ou orais. Essas expressões do pensamento refletem os processos que eles utilizaram para procurar as respostas. No entanto, a maioria encontrou dificuldades em expressar a representação simbólica num contexto da linguagem, escrita ou oral, do mundo real.

A nosso ver, na situação descrita até aqui no trabalho de Warren (2003), está caracterizada a dificuldade da passagem do mundo corporificado para o simbólico. Enquanto os alunos tiverem a necessidade de se valerem unicamente de manipulações e objetos materiais para expressarem as suas ideias, eles estarão fazendo uso somente dos conceitos do mundo corporificado.

Quando solicitado que as crianças contassem uma história sobre uma determinada expressão, a impressão da autora é que somente no final do quinto ano é que algumas delas começam a se expressar com palavras do mundo real. Até então, elas criam histórias que se espelham nas respostas que deram na tarefa.

Em outra conclusão, a autora afirma que, apesar de algumas crianças não serem capazes de interpretar situações equivalentes, elas são capazes de reconhecer a estrutura implícita da equivalência e expressar isso em palavras apropriadas do mundo real. Mas, em muitos casos, elas precisavam atribuir um valor para o desconhecido antes de poderem criar um problema.

A conclusão final é que as estreitas concepções que as crianças têm do símbolo de igualdade, como tratar o símbolo como um indicador do lugar de colar a resposta, não somente ocorrem cedo no seu desenvolvimento, mas também persistem durante todo o período da escola fundamental.

Na nossa interpretação, essa pesquisa apresenta uma situação similar à que temos apresentado com relação ao desenvolvimento cognitivo e à disponibilidade para entender o significado do símbolo de igualdade como uma equivalência, pois mostra a facilidade das crianças em aprenderem significados relacionados aos conceitos do mundo corporificado e a dificuldade que demonstram em entender os significados associados aos conceitos do mundo simbólico. Também evidência um “já encontrado”, o significado operacional dado ao símbolo de igualdade, quando relata a dificuldade das crianças abandonarem significados mais restritos em relação ao símbolo de igualdade que apreenderam anteriormente.

Oksuz (2007) realizou sua pesquisa com 50 crianças entre 10 a 12 anos de uma escola de subúrbio nos EUA. O objetivo do trabalho era pesquisar a compreensão das crianças sobre o conceito do símbolo de igualdade. Para isso, o pesquisador construiu um instrumento com 25 questões que abrangiam uma larga gama de tipos de problemas: violação de regra, desconhecidos, significado do termo, transferência de palavra-número, e outras circunstâncias; composto de questões de falso/verdadeiro, múltipla escolha, preencher lacunas e questões abertas. Para essa construção, ele se baseou em estudos anteriores sobre o assunto, alguns deles analisados neste trabalho, como os de Kieran (1981), Behr, Erlwanger e Nichols (1980), Falkner, Levi e Carpenter (1999), e Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998), e nas conclusões sobre dificuldades e problemas de entendimento do significado da igualdade que eles mostraram.

Na conclusão, Oksuz (2007) reporta que as crianças mais novas enxergam o símbolo de igualdade como um símbolo operacional para realizar os cálculos da esquerda para a direita e que as com um pouco mais de escolaridade o veem como um separador, onde do lado esquerdo está a questão e do lado direito a resposta. Estes resultados, segundo o autor, coincidem com os resultados das pesquisas nas quais baseou o seu trabalho.

Nas conclusões de Oksuz (2007), encontramos uma relação com os símbolos para representar a igualdade utilizada ao longo da história, pois Regiomontanus, Paccioli e Bombelli já se valiam de traço para indicar a igualdade, e Cardano deixava um espaço para indicar logo após a resposta.

Quando Oksuz (2007) analisou os erros cometidos na resolução de problemas, concluiu que, quando as crianças estão diante de problemas em um contexto desconhecido ou em uma representação não usual, elas tendem a cometer mais erros. Também observou que a compreensão dos alunos sobre o conceito de igualdade e seu símbolo parecia ser limitada a um contexto, e que tinham dificuldade para transferi-la para outro contexto. Os alunos também apresentaram dificuldades de transferir sentenças numéricas em palavras e sentenças escritas em números.

Novamente, identificamos a dificuldade de passar do mundo corporificado, das coisas concretas e comprováveis pela própria existência, para o mundo simbólico, das representações nas quais os símbolos podem possuir mais de um significado e os processos e conceitos podem estar representados por um mesmo símbolo.

Outra constatação de Oksuz (2007) foi que alguns estudantes não conseguiram ler a sentença 6 = 6, ou leram sem dar nenhum significado a ela, e alguns chegaram a colocar um símbolo de operação no lado esquerdo da sentença, para, no entendimento deles, a expressão ter sentido e poder, então, ser lida.

Nessa situação, entendemos que os estudantes, diante de uma identidade, precisariam utilizar um conceito do mundo formal, difícil de ser compreendido, até pela necessidade de evolução cognitiva na Matemática para chegar a esse mundo.

Outra pesquisa selecionada para a nossa análise foi desenvolvida por Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) que tinha o foco do trabalho na “construção conceitual e interpretações dos alunos”. Para isso, realizaram uma pesquisa com crianças, seis meninas e oito meninos, na faixa de idade entre 8 e 9 anos, numa escola com orientação sócio-construtivista. Elaboram diversas tarefas, de modo a possibilitar que as crianças as organizassem em blocos de dez.

Não havia, nesta pesquisa, a intenção de avaliar o entendimento dos alunos quanto a uma classificação entre entendimento operacional ou de equivalência, pois as atividades utilizadas na pesquisa tinham a finalidade de possibilitar às crianças: construir as estratégias de adição; gerar estratégias mentais independentes da disposição vertical de números; pensar num determinado número em termos de outros números e das quatro operações fundamentais; repensar igualdade enquanto também pensam na “não igualdade”; trabalhar na resolução de problemas dados e na elaboração de novos problemas escritos.

Na análise dos resultados, as autoras identificaram que as crianças que participaram da pesquisa não simbolizam a igualdade de uma única forma e, em conversas com elas, perceberam que as crianças, de início, interpretam o símbolo de igualdade como uma indicação de que é preciso fazer alguma coisa com os números apresentados, fazer um cálculo com os números que precede o símbolo de igualdade e que o número colocado depois é o resultado, a resposta do cálculo.

Embora não houvesse por parte das pesquisadoras a intenção de identificar significados dados pelas crianças ao símbolo de igualdade, vemos uma indicação do significado operacional que as crianças, na faixa etária desta pesquisa, frequentemente apresentam.

Por fim, quando as pesquisadoras concluem que as crianças necessitam realizar um grande esforço cognitivo na interpretação e na construção de significados dos símbolos matemáticos, somos remetidos aos Três Mundos da Matemática e ao registro do desenvolvimento cognitivo que é necessário para que as crianças possam expandir os seus conhecimentos matemáticos e fazer uso não somente do mundo corporificado, mas também do conhecimento que habita o mundo simbólico.

4.1.2 Significado de Equivalência

O trabalho apresentado por Warren e Cooper (2005), realizado com 20 crianças com idade média de 8 anos, buscava descobrir as habilidades que elas possuíam para encontrar valores desconhecidos utilizando o modelo da balança.

Os autores trabalharam preliminarmente com as crianças, apresentando o conceito de igualdade de três formas: concreta, por ilustração e simbólica. Na forma concreta, eles utilizaram pequenas latas, de mesma forma e peso, que eram colocadas em balanças de dois pratos e macarrão espaguete para representar os números. Como ilustração, utilizaram figuras, veja abaixo, que, neste exemplo, procurava mostrar que: 2 + 3 = 4 + 1.

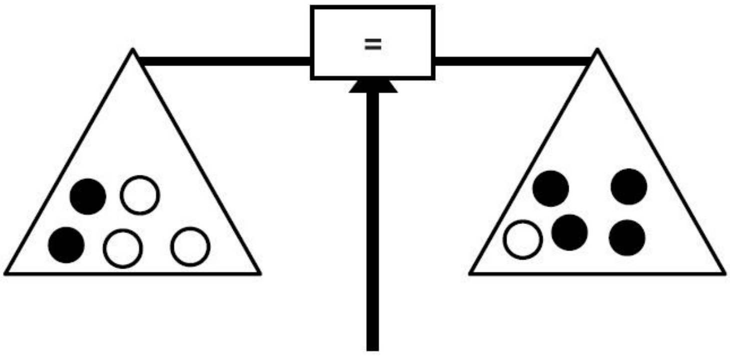


Figura 10: Ilustração da Balança de dois pratos
Fonte: Warren e Cooper (2005)

Durante as aulas, os alunos eram estimulados a trocar as formas de representação, da forma concreta para a balança e vice-versa. Depois dessa fase, eles passaram a ser incentivados a utilizar também a representação simbólica.

Para a segunda fase da pesquisa, os autores criaram um instrumento com quatro tarefas: a primeira utilizava a linguagem para descrever as situações de equivalência e as de não equivalência; a segunda tratava do reconhecimento da "igualdade quantitativa"[97] ou seja, a expressão no lado esquerdo do símbolo de igualdade representa a mesma quantidade do que a do lado direito; a terceira buscava trabalhar com conversão do modelo físico para equações simbólicas; e a quarta tarefa, trabalhava com o equilíbrio como uma estratégia para encontrar quantidades desconhecidas.

Na primeira tarefa, eram apresentados cartões **(Figura 11: 1ª Tarefa – Warren e Cooper)** que os alunos deveriam ler, organizar em grupos, dar um nome para cada grupo, explicar por que cada cartão foi colocado junto com outros em cada um dos grupos e descrever como essas palavras ou símbolos podem ser usados na Matemática. Os pesquisadores entendem que, ao estudar as reações e as atitudes das crianças quando elas têm oportunidade de definir, comparar e classificar palavras, é criado um poderoso instrumento para avaliar o entendimento e uma ampla oportunidade de explorar os múltiplos significados que as crianças possuem das palavras.

DIFERENTE DE	O MESMO QUE	IGUAIS
NÃO IGUAL	EQUILIBRADO	DESEQUILIBRADO
EQUAÇÃO	=	≠

Figura 11: 1ª Tarefa

Fonte: Warren e Cooper (2005)

Na segunda tarefa, os alunos receberam dois cartões (**Figura 12: 2ª Tarefa – Warren e Cooper**) e foi solicitado a eles que respondessem se eram verdadeiros ou

[97] Em inglês: *quantitative sameness.*

não verdadeiros, e explicassem as respostas. Na proposta dos pesquisadores, os cartões foram concebidos para verificar se os estudantes identificavam o símbolo de igualdade como algo mais do que a indicação do lugar para colocar a resposta.

6 = 2 + 4	**2 + 3 = 6 - 1**

Figura 12: 2ª Tarefa

Fonte: Warren e Cooper (2005)

Na terceira tarefa, os pesquisadores deixaram de lado os cartões e trabalharam com material concreto. Eles modelaram 3 + 4 = 7 e ? + 7 = 11 com latas e balanças de dois pratos, e, apontando para o modelo, perguntaram, para cada estudante, o que eles achavam que aquilo significava. A incógnita era representada por um saco contendo quatro latas que haviam sido colocadas lá dentro sem que os alunos soubessem.

Para a última tarefa, os pesquisadores utilizaram quatro cartões, **(Figura 13**: **4ª Tarefa – Warren e Cooper**), apresentavam aos alunos um cartão de cada vez, solicitavam que eles encontrassem o valor desconhecido e explicassem como chegaram às respostas**.**

Cartão 1:	?	-	4	=	5				
Cartão 2:	?	+	7	=	11				
Cartão 3:	5	+	?	=	12				
Cartão 4:	?	+	?	+	2	=	?	+	5

Figura 13: 4ª Tarefa

Fonte: Warren e Cooper (2005)

Apenas as três primeiras questões correspondiam ao conteúdo já trabalhado em sala de aula, e a quarta questão seria utilizada para verificar se as crianças haviam compreendido o significado de equivalência do símbolo de igualdade.

Analisando as tarefas à luz dos Três Mundos da Matemática, identificamos que a primeira tarefa partia dos conhecimentos das crianças dentro dos conceitos do mundo corporificado e buscavam descobrir se elas tinham entendimento da equivalência, que é um conceito do mundo simbólico: cartões com palavras e símbolos para fazer uma pilha permitem a manipulação dos objetos e a colocação dos cartões com símbolos permitiria perceber se, pelos menos, elas associavam o símbolo com o significado. No entanto, no nosso entendimento, essa associação da palavra com o símbolo, não é uma garantia de que a criança consiga levar para a resolução de um problema matemático o conceito de equivalência. A terceira tarefa também remete ao mundo corporificado, pois os conceitos que as crianças necessitariam utilizar nessa tarefa com latas e balanças, manipulação e comparação, são habitantes do mundo corporificado.

Na segunda tarefa, a completa compreensão das sentenças matemáticas, no nosso modo de ver, só seria possível com conceitos do mundo simbólico, tais como simetria e equivalência. O mesmo raciocínio vale para a quarta questão, com o aumento da complexidade, pois, para a resolução completa da tarefa, o aluno precisaria ter conhecimento das propriedades da relação de igualdade: reflexiva, simetria e transitiva.

A análise do resultado do teste da primeira questão feita por Warren e Cooper (2005) aponta que 18 dos 20 alunos classificaram as cartas predominantemente em dois grupos. O primeiro grupo era composto pelas cartas: **IGUAL**, **O MESMO QUE**, **=** e **EQUILIBRADO.** O segundo grupo era formado pelas cartas: **NÃO IGUAL**, **≠**, **NÃO EQUILIBRADO** e **DIFERENTE DE.** Nove alunos não tinham certeza do significado da palavra “**EQUAÇÃO**”, e a deixaram de fora da classificação. Ao nomear os grupos de cartas formados, eles tenderam a chamá-los de “equilibrado” e “não equilibrado”.

A conclusão dos autores sobre essa atividade é que a maioria dos alunos não teve dificuldade em entender a linguagem introduzida na tarefa e nem ao descrever as diferenças entre equivalência e não equivalência, sendo que doze relacionaram corretamente “igual” com “equilibrado” e “diferente” com “não equilibrado”.

Eles apontam que a importância dessa tarefa na pesquisa é que ela mostra a capacidade de crianças de oito anos entenderem e relacionarem o significado do símbolo de igualdade com o equilíbrio, indicando que tinham a noção de que valores expressos nos dois lados do símbolo de igualdade têm que ser equivalentes, ou, na linguagem adotada na pesquisa, têm que ser equilibrados.

Quando avaliamos o resultado dessa tarefa da pesquisa de Warren e Cooper, identificamos que as crianças já possuíam um conceito de igualdade, relacionando-o com uma coisa ser igual à outra em quantidade ou forma, que entendemos sejam os "já encontrados" que essas crianças já possuíam antes de realizar a tarefa. Entendemos também que esses "já encontrados" mostram que elas estavam utilizando os conceitos de igualdade do mundo corporificado.

Como será apresentado na análise dos resultados das demais tarefas, o conhecimento que as crianças pareciam demonstrar sobre os conceitos de igualdade e de equivalência na primeira tarefa não foi garantia para a utilização de forma correta, no nosso entender, desse conceito, quando confrontado com as situações das outras tarefas. A nosso ver, as crianças estavam utilizando o conceito de equilíbrio de uma forma concreta, pela manipulação das fichas e montagem de pilhas, e não demonstraram o entendimento do conceito de equivalência na forma como ele é representado no mundo simbólico.

Na segunda tarefa, todos os alunos afirmaram que a sentença $6 = 4 + 2$ era verdadeira, mas a explicação da maioria (15 alunos) estava firmada em que $4 + 2 = 6$. Por essa explicação dada pelos alunos, invertendo os lados da sentença, podemos identificar que eles enxergaram o símbolo de igualdade como um operador, ou seja, uma resposta precisa ser colocada depois dele.

Na análise das respostas do segundo cartão, uma situação semelhante foi demonstrada, pois 18 alunos explicaram que a sentença ($3 + 2 = 6 - 1$) era verdadeira, pois $3 + 2$ é igual a 5 e $6 – 1$ também é igual a 5. Pela explicação dada pelos alunos, fica claro que eles realizaram as operações e compararam os resultados, mais uma vez utilizando o símbolo de igualdade com o significado operacional e, dessa forma, utilizando conceitos do mundo corporificado. Apesar de estar diante de uma identidade, nessa situação, entendemos que ela não foi interpretada pelos alunos como tal, mas, sim, como resultado de duas operações que fizeram, e 5 = 5 estava representando o resultado de duas “contas” que deram o mesmo resultado.

Na situação descrita acima, é nosso entendimento que as crianças estavam confirmando a igualdade pela comparação de dois algarismos, um conhecimento “já encontrado”. Nessa condição, elas demonstraram utilizar recursos do mundo corporificado.

Na terceira tarefa, uma situação interessante aconteceu, pois metade dos alunos só descobriu a resposta manipulando fisicamente as latas. A outra metade simplesmente afirmou que a resposta era 4, pois 4 + 7 = 11, demonstrando mais uma vez o uso do símbolo de igualdade como um indicador do local para colocar a resposta. Na nossa análise, o segundo grupo de alunos continuava a tratar o símbolo de igualdade como operacional (pois 4 + 7 = 11) e o primeiro grupo ainda se valia dos conceitos do mundo corporificado, por meio da manipulação propiciada pelas latas, para encontrar a solução.

Na última tarefa, embora os autores tenham avaliado que a maioria dos alunos tenha acertado as respostas das três primeiras questões (15, 19, 12 respostas corretas, respectivamente), na questão final, que indicaria se as crianças haviam abstraído a noção de equivalência quando apresentadas a uma situação ainda não tratada em sala de aula, os resultados não foram os mesmos, pois somente três alunos conseguiram chegar à resposta correta. Segundo os autores da pesquisa, a situação proposta nessa quarta tarefa, “[...] representa um exemplo do que Filloy e Rojano (1989) se referem como o *corte didático* entre aritmética e álgebra, uma equação de primeiro grau com incógnitas em ambos os membros”[98] (WARREN; COOPER, 2005, p. 69, grifo dos autores, tradução nossa).

No nosso entendimento, pela análise dos resultados das tarefas anteriores, nas quais as crianças já demonstravam utilizar recursos do mundo corporificado, houve uma confirmação dessa situação na última tarefa, pois o reconhecimento do significado de equivalência para o símbolo de igualdade só ocorreria com a utilização dos recursos do mundo simbólico.

---

[98] … represents an example of what Filloy and Rojano (1989) refer to as the *didactic cut* between arithmetic and algebra, a first-degree equation with unknowns on both sides.

4.1.3 Pesquisas realizadas no Brasil

Quando decidimos incluir neste trabalho pesquisas feitas no Brasil, encontramos somente duas dissertações de mestrado que tratam do assunto. Elas foram apresentadas por Vanessa Vasconcelos Cosme (COSME, 2007) ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, e por José Dilson Beserra Cavalcanti (CAVALCANTI, 2008) ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Cosme (2007) fez uma pesquisa sobre os significados dados ao símbolo “=” por alunos e professores de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental e uma pesquisa bibliográfica sobre a história do símbolo de igualdade, desde o século XVI, procurando identificar como a igualdade matemática tem sido representada ao longo dos anos e como isso pode ter influenciado o uso desse símbolo nos dias atuais. A pesquisadora assistiu algumas aulas das turmas envolvidas na pesquisa para obter os significados atribuídos ao símbolo de igualdade, e elaborou questionários para entrevistar professores e alunos.

Como resultado da sua pesquisa, Cosme (2007) identificou os seguintes significados atribuídos pelos alunos ou professores ao símbolo “=”: *Resultado; Resposta; Equivalência ou Equilíbrio; Identidade; Semelhança; Conectivo; Igualdade Social.*

No nosso entendimento, os símbolos identificados por Cosme (2007) como *resultado*, *resposta, identidade*, *semelhança* e *conectivo* estão enquadrados no que Kieran (1981) identificou como significado operacional, e possuem as características do mundo corporificado, por representarem um símbolo utilizado apenas como um processo.

Por sua vez, o que Cosme (2007) chamou de equivalência ou equilíbrio trata da mesma situação e corresponde ao mesmo significado, equivalência, que encontramos no trabalho de Kieran (1981). Como já analisamos anteriormente, nesta situação, por estar constituído de processos e conceitos, o significado possui as características do mundo simbólico.

Já o que Cosme (2007) intitula "significado social", acreditamos estar fora da análise do nosso trabalho por não tratar de um significado da igualdade relacionado ao uso na Matemática, mas ao uso de um símbolo matemático no cotidiano das pessoas.

No outro trabalho que encontramos, embora o autor tenha definido o objetivo como sendo "[...] investigar as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio acerca dos significados do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos", Cavalcanti (2008, p. 8), na conclusão dos dados que obteve na pesquisa, esclareceu que estava adotando o vocábulo "concepção" como sendo os "significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos" (CAVALCANTI, 2008, p. 50). Dessa forma, entendemos que, apesar dos vocábulos "concepção" e "significado" não serem sinônimos, poderíamos utilizar os resultados que Cavalcanti (2008) obteve em nossa proposta de encontrar os significados que alunos apresentam sobre o símbolo "=".

Utilizando questionários para efetuar a pesquisa, Cavalcanti (2008) encontrou sete concepções: "*operacional"*; "*igualdade relacional"*; "*equivalência em igualdade condicional"*; "*funcional"*; "*relacional nome símbolo"*; "*símbolo separador"* e "*operacional sintático"*. As cinco primeiras concepções haviam sido definidas *a priori*, e as duas últimas *a posteriori*, de acordo com a metodologia adotada na pesquisa.

De acordo com os resultados e conclusões apresentadas por Cavalcanti (2008), entendemos que as concepções, "operacional" e "igualdade relacional", se relacionam com o significado "operacional" conforme descrito por Kieran (1981), e que tais concepções podem ser encontradas no pensamento inerente aos objetos do mundo corporificado, pois esse entendimento que os estudantes parecem apresentar do símbolo de igualdade não indica que eles o utilizem com pelo menos um processo e um conceito.

Por sua vez, as concepções "equivalência em igualdade condicional" e "funcional", no nosso ponto de vista, abarcam as condições definidas por Kieran (1981) como sendo de significado de equivalência. Da mesma forma, como já dissemos anteriormente numa situação análoga, essa situação nos remete ao entendimento existente no mundo simbólico para o símbolo de igualdade.

A quinta categoria definida *a priori* por Cavalcanti (2008), “relacional nome símbolo”, trata da situação em que o autor não encontra elementos para classificar o entendimento do símbolo de igualdade como “operacional” nem como “equivalência”. Não encontramos na pesquisa de Cavalcanti (2008) elementos que pudessem nos levar a uma conclusão diferente da que o autor chegou, embora nos pareça possível avançar no questionamento das crianças que deram essa resposta no sentido de buscar outros elementos para classificar mais adequadamente a resposta dada.

Nos resultados apresentados por Cavalcanti (2008) foram apresentadas mais duas concepções encontradas *a posteriori*. A primeira o autor chamou de “símbolo separador”, quando o símbolo de igualdade é utilizado apenas para separar: “[...] letras e números numa equação, os membros, uma incógnita e outra numa função” (Cavalvanti, 2008, p. 121). Quando analisamos essa situação, entendemos que se trata da utilização do símbolo de igualdade com o significado de equivalência, e que, dependendo da complexidade da situação, pode ser visto como entendimento tanto do mundo simbólico quanto do mundo formal. Esta situação será apresentada no **CAPÍTULO 5: SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO “=” NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA**, no qual procuraremos mostrar quando se trata de entendimento inerente ao mundo simbólico ou ao mundo formal.

A segunda concepção encontrada *a posteriori* por Cavalcanti (2008) foi chamada de “operacional sintático” e definida como sendo a situação em que os alunos utilizavam o símbolo de igualdade para: “[...] mostrar o resultado da incógnita, ou para dar o valor de x, por exemplo” (CAVALCANTI, 2008, p.121). Nessa última concepção, identificamos que, embora possa ser entendida como uma subcategoria do significado “operacional”, assim como as concepções apresentadas por Behr, Erlwanger e Nichols (1980), para a nossa análise, consideraremos como “operacional”, segundo apresentado por Kieran (1981) e como tal, identificada com as características do mundo corporificado, conforme já foi apresentado neste texto.

4.2 Além dos significados do símbolo de igualdade

No conjunto de pesquisas na área da Educação Matemática que selecionamos para análise, encontramos algumas que, apesar de não tratar diretamente da procura de significados dados ao símbolo de igualdade pelos entrevistados, se relacionavam com o símbolo e traziam conclusões que acreditamos importantes e que devemos considerar no nosso estudo.

Nessa linha, encontra-se o trabalho de Freiman e Lee (2004), que apresentam parte de uma pesquisa sobre o desenvolvimento inicial do pensamento algébrico em crianças do jardim da infância depois da introdução, no currículo dessas turmas, de algum trabalho com álgebra. O exemplo que apresentam é parte de um projeto que visa a construção de uma ferramenta que possibilite que pesquisadores façam o acompanhamento do desenvolvimento do pensamento algébrico nas crianças, na medida em que evoluem nos estudos das séries iniciais.

Nesse trabalho, eles olharam para “[...] um pequeno, mas largamente reconhecido elemento do pensamento algébrico, o conceito de igualdade e o entendimento relacionado do sinal de igual, como um exemplo da construção e utilização desse instrumento” (FREIMAN; LEE, 2004, p. 2-416, tradução nossa[99]), e fizeram um levantamento de pesquisas anteriores na área da Educação Matemática, apontando que muitas delas concluíram pela necessidade de uma compreensão muito clara do símbolo de igualdade para que possa ocorrer a passagem da aritmética para a álgebra.

Freiman e Lee (2004) citam Behr, Erlwanger e Nichols (1980) e reafirmam que é possível que algumas crianças possam entender, por exemplo, “+ =” como sendo um único símbolo de operação e o símbolo “+” indica apenas o tipo de operação que deve ser feita.

Essa situação reforça a análise que vimos fazendo com relação ao modo como algumas crianças, utilizando os conceitos do mundo corporificado, entendem o sinal de igualdade, como um indicador de operação a ser feita, e, neste caso em

[99][…] one small but widely recognized element of algebraic thinking, the concept of equality and the related understanding of the equal sign, as an example of the construction and use of this instrument.

particular, identificando-o não apenas como um indicador, mas como parte do símbolo que representa a operação.

Em outro trabalho, Carpenter, Franke e Levi (2003) realizaram uma pesquisa com preocupações com o desenvolvimento do raciocínio algébrico e identificaram a possibilidade de existir uma relação entre os restritos conhecimentos de aritmética que algumas crianças apresentam e a dificuldade do desenvolvimento do raciocínio algébrico. Destacam na pesquisa que uma dessas situações nas quais o conhecimento restrito parece vir a ser empecilho para o desenvolvimento do raciocínio algébrico está relacionada com o entendimento restrito que as crianças pequenas possuem do símbolo de igualdade. Os pesquisadores também entendem que o significado dado por muitas crianças ao símbolo de igualdade é apenas o de “aqui vem a resposta”, o que, no nosso entendimento, caracteriza o significado “operacional” e indica características do mundo corporificado. Essas observações reforçam o nosso entendimento de que tal situação retrata a visão unicamente operacional que as crianças mais jovens possuem do símbolo de igualdade.

Complementando as conclusões, Carpenter, Franke e Levi (2003) afirmam que, uma vez que esses equívocos estão instalados, eles são muito difíceis de serem mudados e tornam-se cada vez mais entrincheirados ao longo dos anos escolares. Nessa situação de equívoco, identificamos a presença dos “já encontrados”, que o trabalho de Lima (2007) já indicava como possíveis de serem motivo de algumas dificuldades de aprendizagem.

Nesta mesma linha de problema, o trabalho de Malara & Navarra (2003) enfatiza que, no ensino da Matemática, a ênfase dada nas atividades ao resultado das operações, representado pelo significado operacional do símbolo de igualdade, ao invés dos processos, parece conduzir a conhecimentos limitados e equívocos, limitando aprendizagens futuras.

Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) corroboram com as conclusões acima, pois, para elas, não é uma tarefa fácil ajudar os alunos que entendem o símbolo de igualdade como um indicador sintático a entenderem o símbolo de igualdade como uma equivalência, e Baroody e Ginsburg (1983) apontam que a compressão incorreta do símbolo de igualdade, vinda dos primeiros anos escolares, parece continuar até o ensino superior afetando a aprendizagem da Matemática nesse nível.

Quando analisamos essas conclusões, entendemos que quem se encontra nessa situação não conseguiu o desenvolvimento cognitivo necessário para desfrutar do mundo simbólico, ficando preso ao que conseguiu se apropriar do mundo corporificado. Nessa condição, o símbolo de igualdade ainda não é um proceito, e, sem avanço no desenvolvimento do conhecimento matemático, não consegue realizar uma jornada plena pelo mundo simbólico, onde encontraria então o símbolo de igualdade com o significado de equivalência.

4.3 Alguns significados do símbolo “=” na Matemática

Na nossa busca por significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, procuramos encontrar significados em diversas situações, como apresentado neste capítulo. Assim, depois de apresentar alguns significados obtidos em pesquisas feitas na área da Educação Matemática, neste tópico, vamos trazer alguns significados apontados para o símbolo de igualdade na própria Matemática.

No nosso trabalho, não pretendemos fazer um tratado sobre o símbolo de igualdade na Matemática, mas trazer alguns elementos para a nossa análise final sobre alguns significados deste símbolo nos Três Mundos da Matemática.

Na busca por fontes com enfoque diferente sobre os significados do símbolo de igualdade, encontramos em Freudenthal (1999) uma indicação de que o uso do símbolo de igualdade parece recair em quatro categorias principais:

1. Resultado de uma operação (por exemplo, 5 + 7 = 12)
2. Igualdade Quantitativa (por exemplo, 2 + 3 = 4 + 1).
3. Sentença onde qualquer valor é verdadeiro para as variáveis (por exemplo, a + b = b + a)
4. Sentença que atribui um valor a uma nova variável (por exemplo, a + b = c)

Entendemos que o primeiro significado pode ser encontrado no mundo corporificado, pois indica a posição em que a resposta deve ser colocada, e corresponde ao significado operacional apontado por Kieran (1981)

O segundo significado, no nosso entendimento, está relacionado ao mundo simbólico, pois indica a equivalência, que é um conceito possível de se provar, sendo esta, uma característica do mundo simbólico.

O terceiro significado mostra a propriedade simétrica da igualdade, que pela possibilidade de ser provada, indica pertencer ao mundo simbólico, mas, como o conceito de propriedade é um habitante do mundo formal, entendemos que esse significado pertença aos dois mundos, simbólico e formal.

O último significado apresenta uma generalização, e no nosso entendimento, as generalizações são conceitos do mundo formal.

Quando procuramos exemplos de significados relacionados aos usos do significado de igualdade, encontramos em Usiskin (1995, p.10) uma apresentação da diversidade de significados que o símbolo pode ter, mesmo quando apresentado para mostrar uma mesma situação, no caso, o produto de dois números que resulta num terceiro:

1. $A = b \cdot h$
2. $40 = 50x$
3. $\text{sen}\, x = \cos x \cdot \text{tg}\, x$
4. $1 = n \cdot (1 / n)$
5. $y = kx$

Segundo Usiskin (1995), esses significados são usualmente chamados de:

1. Fórmula
2. Equação (ou sentença aberta)
3. Identidade
4. Propriedade

5. Equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta (não é para resolver)

Analisando os significados acima, entendemos que fórmula e equação são conceitos do mundo simbólico, pois são passíveis de comprovação. Já propriedade e proporcionalidade direta são conceitos do mundo formal, pois o reconhecimento de cada um desses significados demanda demonstrações calcadas em axiomas.

No trabalho de Wilhelmi, Godino e Lacasta (2004), onde realizaram uma abordagem epistêmica em números reais, encontramos algumas definições de igualdade segundo áreas de relevância da Matemática. Eles apresentaram seis definições de igualdade entre dois números:

1. *"Equivalência*", relacionada com os valores em $\mathbb{R}$ que os números possam ter, independentemente da representação que é utilizada;
2. *"Ordem"*, na relação de ordem entre dois números em $\mathbb{R}$;
3. *"Métrica",* da relação métrica entre dois números em $\mathbb{R}$;
4. *"Conectiva*", como espaço topológico em $\mathbb{R}$;
5. *"Algébrica",* vinda de uma definição algébrica, referindo-se a soluções de uma equação;
6. *"Funcional",* que vem da teoria das funções e é encontrada na definição de que dois números são iguais se as sua imagens numa mesma função são iguais, exceto se a função for linear.

No nosso entendimento, todos os significados apresentados estão relacionados a conceitos do mundo formal, pois demandam ou são produto de prova por demonstrações e axiomas e carregam características formais do conceito**.**

4.4 Significados Ecléticos

Ao estudar um conceito, muitas coisas que levamos para a sala de aula foram obtidas antes de iniciarmos esse estudo, ou mesmo são obtidas durante os estudos escolares, mas fora das salas de aula.

No nosso entendimento, o conceito inicial de igualdade, em geral, é aprendido no dia a dia das pessoas, e, quando o utilizamos no cotidiano, usamos a ideia de que duas coisas são iguais se tiverem o mesmo formato, o mesmo tamanho, a mesma quantidade..., isto é, forem resultado de uma comparação, seja visual, seja por medição, ou por qualquer outra característica física que possa ser utilizada para comparar duas coisas quaisquer. Embora as pessoas não se deem conta, ao fazerem comparações, estão utilizando recursos matemáticos do mundo corporificado.

Também na sala de aula, às vezes, nos referimos à igualdade, tanto alunos quanto professores, com expressões que nem sempre mostram o significado que ela possui. Dizemos por exemplo "é" para indicar a igualdade entre duas expressões ou para apresentarmos o resultado de uma operação, como em 2 + 3 "é" 5. Outra situação que aparece com frequência é o uso do símbolo "=" para indicar continuação, ou substituição por outra coisa. Em situações assim, reconhecemos o uso de conceitos matemáticos do mundo simbólico, como por exemplo, a equivalência.

Em outras ocasiões, embora presente no conceito matemático que está sendo apresentado, o uso da igualdade não se mostra na representação visual. Um exemplo é quando utilizamos "..." na representação de um número: 0,999999... = 1, que no nosso entendimento, para ser compreendido, precisa utilizar recursos do mundo formal.

Mas o significado mais original que encontramos para o símbolo de igualdade foi dado para o uso do símbolo "=" na famosa equação "$E = mc^2$":

> “Uma boa equação não é simplesmente uma fórmula para computação. Não é a escala de uma balança que confirma que dois itens que você suspeitava fossem praticamente iguais são realmente iguais. Pelo contrário, os cientistas começaram a usar o *símbolo = como uma espécie de telescópio para novas ideias*, — um artifício para dirigir a atenção a novos e insuspeitados domínios” (BODANIS, 2001, p. 35-36, grifo nosso).

Percebemos que, da maneira como foi descrita acima, o significado para o símbolo de igualdade possui características do mundo corporificado, pela forma como o autor associou o uso que os cientistas passaram a fazer do símbolo como um telescópio. No entanto, a equação em si, utilizando o símbolo “=” como uma equivalência, apresenta também características do mundo simbólico. Mas é possível ir mais além, e identificamos, na explicação de Bodanis (2001), as indicações para novas possibilidades, ou para uso do símbolo de igualdade em situações ainda não descobertas, demonstrando, assim, as características de desenvolvimento da Matemática, inerentes ao mundo formal.

Com isso, encontramos em Bodanis (2001), uma situação em que o símbolo de igualdade apresenta características dos Três Mundos da Matemática, colocando-o na região “Totalmente Integrada”, tal qual apresentado na **Figura 14: Desenvolvimento cognitivo através dos Três Mundos da Matemática.**

Dessa forma, entendemos que, a partir disso, percebe-se que o símbolo “=”, que muitas vezes passa até despercebido na nossa leitura, possui potencial inimaginável de utilização e identificação com novos significados.

CAPÍTULO 5
SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO “=” NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Quando iniciamos a nossa longa jornada em busca dos significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, não tínhamos como prever nem estimar os resultados da nossa pesquisa, pois pretendíamos encontrar os significados, não previstos *a priori*, em fontes de dados bastante diferentes.

Mas, na medida em que a pesquisa se aprofundava nos significados encontrados, o nosso entendimento sofria uma evolução, saindo de um mundo em que tínhamos a necessidade de ver materializados os significados obtidos nas pesquisas que avaliamos, ou nos registros que encontramos na história da notação algébrica, para uma condição de reflexão num mundo em que o pensamento e as conclusões aconteciam sem a necessidade de um apoio corporificado.

Dessas reflexões, veio um entendimento da evolução que ocorreu na notação algébrica, como reflexo da evolução da Matemática, ou, mais objetivamente, do pensamento matemático.

Percorrendo a história da notação algébrica, percebemos que a evolução do símbolo de igualdade ocorreu através de gerações. O formato do símbolo era alterado e os significados que ele representava eram acumulados no mesmo símbolo. Entendemos que essa forma de desenvolvimento é própria do ser humano e do conhecimento que acumula ao longo do tempo. Na tese de doutoramento de Lulu Healy, encontramos uma indicação dessa característica do ser humano:

> "Um princípio central da teoria sociocultural é que os seres humanos têm uma qualidade mental especial, que envolve a necessidade e a capacidade de fazer uso de artefatos - sejam eles físicos, simbólicos ou cognitivos - para mediar as suas atividades e incentivar a apropriação dessas formas de mediação pelas gerações subsequentes" (COLE e WERTSCH, 1996 apud HEALY, 2002), e completando: "Artefatos são criados em um determinado momento na trajetória histórica de uma cultura como resposta à demanda de uma determinada prática. Esses artefatos modificam as atividades de quem os utiliza e também podem, por sua vez, serem modificados pelo uso

> que os protagonistas fizerem deles” (HEALY, 2002, p. 21-22, tradução nossa[100]).

Firmados nessa colocação, concluímos que se torna explicitado que o desenvolvimento cognitivo acompanha o desenvolvimento histórico e vice-versa.

Como vimos nos registros históricos, as evidências mais antigas que já foram encontradas do pensamento matemático estão relacionadas à contagem e num processo de longa duração do registro da contagem. Para que os registros das contagens chegassem ao formato que hoje utilizamos, foram muitos séculos, num longo e diversificado processo, inerente ao desenvolvimento de cada povo, de cada civilização. Junto com o desenvolvimento da notação da contagem, aconteceu o desenvolvimento da Matemática, e, no seu bojo, o desenvolvimento da Álgebra.

Com o registro das ideias algébricas não foi diferente. Ao longo dos séculos, os registros foram mudando de forma, passando do uso exclusivo da escrita para uma forma abreviada da própria escrita até chegar à forma atual, com o uso intensivo de símbolos. Por sua vez, muitos símbolos, representações gráficas simplificadas de conceitos muitas vezes não tão simples, também viveram um processo de transformação tanto na forma quanto no conteúdo que representavam.

Nessa condição, encontra-se o conceito de igualdade, que foi utilizado em todas as formas de notação algébrica; e, quando passou a ser representado por um símbolo, também sofreu transformações na forma e no conceito que representava. Esse símbolo tem tanta representatividade que acompanha a evolução da Matemática e, com isso, incorpora, frequentemente, novos significados.

Se olharmos para o quadro evolutivo descrito acima e compararmos com a descrição dos Três Mundos da Matemática, veremos que existe uma similaridade de situações que não acreditamos seja apenas coincidência.

O quadro teórico dos Três Mundos da Matemática não procura explicar o desenvolvimento evolutivo da Matemática, mas, sim, o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos em relação à aprendizagem e o uso que fazem da Matemática; mas,

[100] A central tenet of sociocultural theory is that human beings have a special mental quality which involves the need and ability to make use of artefacts - be they physical, symbolic or cognitive - to mediate their activities and to encourage the appropriation of these forms of mediation by subsequent generations (Cole and Wertsch, 1996). Artefacts are created at a particular moment in the historical trajectory of a culture, as a response to demand of a particular practice. These artefacts modify the activities of those using them and can also, in their turn, be modified in use by the actors who use them.

quando olhamos para a descrição acima e vemos a maneira como o desenvolvimento da Matemática e da Notação Algébrica aconteceu, podemos relacionar esse processo evolutivo com o que acontece com um indivíduo em relação à própria Matemática.

Olhando para a história, o início da Matemática tem extraordinária similaridade com o mundo corporificado. Não havia nada além das ideias relacionadas ao uso concreto da contagem. Com a evolução, as situações do cotidiano foram tornando as ideias mais complexas, o que nem sempre permitia que as situações matemáticas fossem visualizadas. Então, passou-se a provar que as ideias estavam corretas sem a necessidade de uso de recursos físicos. Eis aí a similaridade com o mundo corporificado; e mais, quando nos damos conta do desenvolvimento da Matemática que ocorria, percebemos, nesses momentos, as características do mundo formal.

Se aplicarmos o mesmo raciocínio para o símbolo que representa a igualdade, percebemos que ele percorre a mesma trajetória.

Nos usos iniciais, o símbolo de igualdade era utilizado para representar o resultado de operações, o indicativo da resposta. Era visto apenas como o indicador do fim de um processo, sem reconhecimento de um conceito associado ao processo. Dessa forma, entendemos que o símbolo de igualdade era utilizado com as características do mundo corporificado.

Quando a evolução da Matemática passou a exigir prova da veracidade das representações, descolando-se da necessidade de comprovação física, o símbolo de igualdade passou a ser o indicativo não somente da resposta, mas passou a representar, associado ao processo que era demonstrado, o conceito de igualdade. Nessa situação, identificamos as características dos mundos simbólico e formal.

Por fim, quando olhamos para o indivíduo e para o uso que ele faz do símbolo de igualdade, percebemos que ocorre a mesma situação descrita acima, ou seja, o símbolo de igualdade está presente em todos os Mundos da Matemática.

Com essas conclusões preliminares e, voltando ao objetivo principal da nossa pesquisa para responder quais são os significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, decidimos não tentar colocar os significados encontrados nas pesquisas que fizemos nos Mundos da Matemática, mas, sim, partir de cada um dos mundos para tentar encontrar os significados que a ele pertencem.

5.1 Mundo Corporificado

É nosso entendimento que os significados do símbolo de igualdade habitantes do mundo corporificado deverão ter características relacionadas à maneira como são vistos pelos indivíduos em situações materializáveis ou perceptíveis pelos sentidos do indivíduo.

Duas dessas situações foram vistas nas pesquisas que analisamos no **CAPÍTULO 4: JORNADA PELAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** A primeira foi quando o símbolo de igualdade foi entendido como o indicador do lugar da resposta da operação que o precedia, e a segunda, quando a ilustração da balança não foi entendida como a representação de uma equivalência.

A primeira situação é bastante comum no ensino da Matemática, principalmente nas séries iniciais. Com o objetivo de praticar as quatro operações fundamentais, são apresentadas atividades como esta:

Calcule:

a. 2 + 3 =
b. 5 – 4 =

Figura 14: Exemplo do uso do símbolo de igualdade como indicador do lugar para colocar a resposta

Já o recurso de utilizar uma ilustração para apresentar o símbolo de igualdade com o significado de equivalência, utilizando, por exemplo, a figura de uma balança de dois pratos, no nosso entendimento, também está caracterizada com os elementos do mundo corporificado. Essa forma de apresentar a equivalência utiliza recursos de comparação entre os dois lados, buscando mostrar que o "algo" colocado num prato de um lado da balança, comparado com outro objeto ou valor no prato do lado oposto está em equilíbrio, portanto, mesmo sendo "coisas" diferentes, têm peso "equivalente".

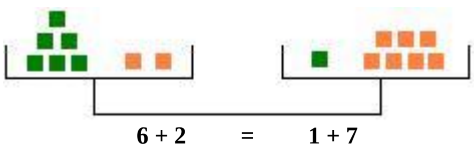


Figura 15: Balança de dois pratos
Fonte: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/equacao-equivalente.htm

Na descrição dessa ilustração, encontramos alguns conceitos do mundo corporificado: pratos, balança, peso..., o que, no nosso entendimento, caracteriza que a imagem de conceito da equivalência que se queria demonstrar está identificada como uma "coisa" concreta, corporificada, pois a manipulação física que ela representa é um aspecto presente no mundo corporificado.

5.2 Mundo Simbólico

O símbolo de igualdade, para habitar o mundo simbólico, precisa estar revestido de conceito e processo. Ele precisa ser reconhecido como um "proceito" e ser utilizado e entendido como tal. Com essa premissa, entendemos que, quando ele é utilizado com o significado de equivalência, ele é um habitante desse mundo, pois esse significado comporta, pelo menos, o conceito de igualdade entre dois objetos e, pelo menos, o processo de transformação que possibilitará a comprovação, ou não, dessa premissa.

Exemplo dessa situação pode ser encontrado no uso do símbolo de igualdade numa equação. Por exemplo, a equação "$-x^2 + 2x = 8$" não está indicando uma operação, mas uma condição para a manutenção da equivalência entre os lados do símbolo de igualdade. O símbolo "=", nessa situação, representa um "proceito", ou seja, um conceito, o da equivalência, e, ao mesmo tempo, carrega um processo que possibilita encontrar os valores para a incógnita que sejam as raízes da função $f(x) = -x^2 + 2x - 8$.

5.3 Mundo Formal

No mundo formal, a representação da igualdade reveste-se de características diferentes dos outros mundos. No mundo dos axiomas e das definições formais, a igualdade entre dois entes nem sempre é escrita com a notação simbólica. Não é incomum que as demonstrações, ou mesmo a formulação dos axiomas, sejam escritas numa notação retórica. No entanto, independente da notação que seja utilizada, demonstrações e axiomas são constituídos pelos mesmos significados. Esses significados não necessitam da corporificação, da existência ou manipulação física e, quando originados dos axiomas, nem precisam ser provados.

Na nossa pesquisa, encontramos a utilização do símbolo de igualdade, que se reveste de alguns significados que entendemos se enquadram nessa descrição, tais como na Relação de Equivalência[101] e na Identidade.

No mundo formal, os significados de igualdade são obtidos das experiências anteriores que o indivíduo passou, mantendo as características corporificadas e simbólicas que vieram dos outros dois mundos e a partir da abstração que é exigida

[101] Uma Relação é de Equivalência entre elementos de um determinado conjunto quando é binária e possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva (adaptado de MONTEIRO, 1971).

na formulação das provas que podem ser feitas neste mundo, no símbolo ou na representação retórica da igualdade, culminando no significado que leva à conclusão final do que se queira provar.

No mundo formal, não se pensa na igualdade pela representação que se faz dela, mas, sim, como meio de se demonstrar a afirmação que se busca fazer.

5.4 Síntese dos significados nos Três Mundos da Matemática

Depois de feitas as análises dos significados do símbolo de igualdade que encontramos nas nossas pesquisas e das relações que apresentamos desses significados com o conceito de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, a nossa conclusão é que, de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, ele pode utilizar o conceito de igualdade sem depender do símbolo.

Quando o indivíduo está utilizando unicamente recursos do mundo corporificado, ele só entende, ou só reconhece, a igualdade em situações corporificadas, o que prescinde o uso de um símbolo.

No mundo simbólico, no qual a verdade é estabelecida pelo cálculo com números e manipulações com os símbolos algébricos, a utilização do símbolo de igualdade se torna imprescindível, porém o significado também não está no símbolo, mas no conceito representado por ele.

E é no mundo formal que a presença do símbolo realmente parece se tornar desnecessária para indicar um conceito. Embora seja frequente a invenção de novos símbolos para representar novas definições, parece-nos que, neste mundo, os símbolos são utilizados muito mais como uma maneira de simplificar a notação do que criados para se tornar um meio de levar os conceitos ou processos que a nova construção na Matemática apresenta.

Entendemos também que, quando uma demonstração se faz unicamente por símbolos, ela já está sendo remetida para o mundo simbólico, uma vez que acreditamos que o pensamento matemático que produz uma nova teoria ou demonstração se processa de forma retórica.

Impossível negar a colaboração da notação simbólica no desenvolvimento da Matemática pela padronização e simplificação das representações que propicia, mas, depois das análises dos significados do símbolo de igualdade em cada um dos mundos, fizemos uma reflexão final e concluímos que, nos Três Mundos da Matemática, os significados não estão representados nos símbolos, mas, sim, na utilização que se faz dele.

No nosso entendimento, embora não possamos prescindir dos símbolos, não é nele que estão os significados, mas é por meio deles, no contexto em que está sendo utilizado e de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, é que os significados podem ser encontrados. Se não fosse assim, o símbolo de igualdade teria o mesmo significado em cada um dos Três Mundos da Matemática, mas, como vimos, os significados variam de acordo com o mundo onde ele é utilizado, embora o símbolo seja o mesmo.

Com a nossa conclusão de que nos Três Mundos da Matemática os significados não estão representados nos símbolos, mas na utilização que se faz dele, esperamos prestar uma colaboração ao desenvolvimento desse quadro teórico, pois acreditamos que, desvinculando o significado dos símbolos utilizados para representá-los, os esforços aplicados no ensino possam ser concentrados nos conceitos, e, no caso particular do símbolo da igualdade, procurar apresentá-lo com os conceitos e processos (proceitos) que ele carrega, independentemente do formato com o qual ele é apresentado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegando à última etapa da nossa jornada, retomamos as questões de pesquisa, apresentamos as conclusões a quais chegamos e fazemos algumas sugestões de pesquisas para continuidade da procura dos significados do símbolo de igualdade nos Três Mundos da Matemática.

1 Sobre as conclusões deste trabalho

Quando concluímos a análise das pesquisas realizadas na área de Educação Matemática sobre os significados do símbolo de igualdade, percebemos um desequilíbrio quantitativo entre as pesquisas que apontaram resultados que indicavam significados relacionados ao mundo corporificado em relação aos demais mundos, simbólico e formal.

Avaliando esse resultado, concluímos que tal situação ocorreu em virtude da maior parte dos pesquisadores ter optado trabalhar com crianças em idade pré-escolar ou das séries iniciais, e utilizando-se de igualdades numéricas. Com isso, as pesquisas só puderam encontrar significados dados ao símbolo de igualdade por estudantes iniciais de Matemática, o que explica que a maioria dos significados encontrados se relacione ao mundo corporificado.

Entendemos que sejam necessárias outras pesquisas, com alunos em idades mais avançadas e até mesmo com alunos de curso superior, que englobem diferentes tipos de igualdade. Uma sugestão é que pesquisas sejam feitas sobre o significado do símbolo de igualdade utilizando equações, com as quais, no nosso entendimento, surgiriam situações em que os conceitos que habitam o mundo simbólico estariam presentes.

Diversificando as faixas etárias pesquisadas e as situações de uso do símbolo de igualdade, acreditamos que outros significados relacionados ao mundo simbólico e também ao mundo formal deverão ser encontrados. Dessa forma, outras pesquisas poderão ser feitas, com base nesses resultados, para verificar a consonância desses significados com os Três Mundos da Matemática.

Entendemos que o nosso trabalho é apenas o início da procura de significados do símbolo de igualdade em cada um dos Três Mundos da Matemática, e que novos trabalhos, feitos com o mesmo objetivo, virão enriquecer os resultados que encontramos.

Também é nosso entendimento que a procura de novos significados sempre será possível, tendo em vista não só as lacunas que a nossa pesquisa possa ter deixado, mas também porque o desenvolvimento da Matemática e o desenvolvimento cognitivo do indivíduo relacionado à Matemática podem propiciar a oportunidade do surgimento de novos significados para o símbolo de igualdade.

2 Os significados nas pesquisas e na história

Depois de analisarmos algumas pesquisas na área de Educação Matemática, podemos responder nossa primeira questão de pesquisa – "*É possível identificar significados para o símbolo de igualdade nas pesquisas da área de Educação Matemática e na história da notação desse símbolo?*" – de maneira afirmativa. Quanto às pesquisas na área da Educação Matemática, mesmo que ficássemos somente nos significados encontrados por Kieran (1981), operacional e equivalência, já seria possível responder afirmativamente à nossa questão.

Ao longo desse trabalho, outros significados foram apresentados, tendo sido identificadas, inclusive, subcategorias para o significado operacional: "indicador sintático", isto é, um símbolo indicando onde a resposta deve ser escrita ou um "símbolo de operação", ou seja, um estímulo à ação, a "fazer alguma coisa".

No entanto, não foi possível encontrar tal detalhamento para o significado de equivalência, talvez pelo que já dissemos, sobre as pesquisas terem sido realizadas com crianças de séries escolares iniciais.

Na história da notação algébrica do símbolo de igualdade, pudemos acompanhar a própria evolução da Matemática. Do símbolo sendo utilizado como indicador do local da resposta até o uso do símbolo de igualdade com mais de um significado, pudemos constatar que os símbolos, ao longo da história, carregam os significados que os matemáticos estavam pensando quando fizeram uso deles. Os significados ao longo da história da notação do símbolo de igualdade não só existiram como evoluíram junto com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3 Os significados nos Três Mundos da Matemática

Para responder às três questões de pesquisa seguintes – *"Esses significados têm características dos Três Mundos da Matemática?"*; *"Os significados dados ao símbolo de igualdade na Matemática podem habitar algum dos Três Mundos da Matemática?"; "Existe alguma similaridade entre o desenvolvimento cognitivo apresentado no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática e a evolução da notação da igualdade ocorrida ao longo da evolução da Matemática?"* –, fizemos um estudo de todos os significados que encontramos, e os confrontamos com as características de cada um dos Três Mundos da Matemática.

Na nossa análise, concluímos que os significados encontrados nas pesquisas da área de Educação Matemática e na história da notação algébrica do símbolo de igualdade carregam as características dos Três Mundos da Matemática. Por exemplo, quando utilizado com o significado operacional, apresenta características do mundo corporificado; com o significado de equivalência, possui características do mundo simbólico; e quando o significado é de identidade, mostra características do mundo formal.

Além disso, os significados dados ao símbolo de igualdade habitam os Três Mundos da Matemática, com a ressalva de que, de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, ele pode utilizar o conceito de igualdade sem depender do símbolo.

Como apresentado no **CAPÍTULO 5: SIGNIFICADOS DO SÍMBOLO "=" NOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA** é nosso entendimento que não só existe similaridade entre o desenvolvimento cognitivo no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática e evolução da notação de igualdade, como também entendemos que é possível enxergar os significados, operacional e de equivalência, na história. Por exemplo, com o uso do "—" para indicar a resposta de expressões que calculavam, Regiomontanus, Paccioli, Bombelli indicavam a utilização do mesmo com o significado operacional. Por sua vez, entendemos que Newton e Leibniz, no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, utilizaram o símbolo "=" com significado de equivalência.

4 Os "já encontrados"

A quinta questão de pesquisa – "*Qual o papel dos "já encontrados" no entendimento dos significados matemáticos do símbolo de igualdade?"* – foi elaborada pela nossa preocupação, apresentada no início deste trabalho, com o tratamento dispensado no ensino da Matemática a coisas que parecem óbvias, que é o tratamento que, entendemos, tem sido dispensado ao símbolo de igualdade.

Em nossas análises, procuramos mostrar o importante papel que os "já encontrados" desempenham no processo de aprendizagem. Entendemos que o professor deve sempre ter em mente, em qualquer situação de ensino, que os alunos podem já ter construído uma imagem de conceito relacionada à igualdade. Essa preocupação deve estar presente quando o professor inicia a lida com o símbolo "=", pois, desde esse momento, é importante que o professor não trate o conceito de igualdade como se fosse único ou como uma coisa óbvia.

Encontramos, nas pesquisas realizadas na área de Educação Matemática, algumas situações que indicam os "já encontrados" que os alunos pesquisados possuíam; por exemplo, quando as crianças mais novas relacionam o conceito de igualdade a uma coisa ser igual à outra em quantidade ou forma ou quando elas utilizam o significado operacional, mesmo diante de uma situação matemática que indica uma equivalência.

Como vimos neste trabalho, são inúmeros os significados que podem ser atribuídos ao símbolo de igualdade, e como esse conceito, pelo uso da palavra na língua materna, ou outras formas, pode ter sido desenvolvido no indivíduo antes do significado matemático, deixamos a sugestão para que os "já encontrados" sobre o conceito de igualdade sejam pesquisados nos alunos antes da sua utilização no ensino da Matemática. Também entendemos que seja importante uma pesquisa para buscar a influência da língua materna no entendimento do sinal matemático de igualdade.

5 Refletindo sobre os Três Mundos da Matemática

Quando apresentamos o quadro teórico "Os Três Mundos da Matemática", mostramos que existem três regiões entre estes mundos (Figura 1: **Desenvolvimento Cognitivo através dos Três Mundos da Matemática**), que são habitadas por conhecimentos de mais de um mundo. São as regiões: "Simbólico Corporificado", "Formal Corporificado" e "Formal Simbólico". Entendemos que essas regiões propiciam as mudanças de compreensão de um determinado conceito, resultado do desenvolvimento cognitivo, levando o indivíduo a utilizar o conhecimento da forma como é entendido no outro mundo.

Entendemos que esse processo ocorre com o símbolo de igualdade, pois, como resultante do desenvolvimento cognitivo, o indivíduo deixa de entendê-lo como um símbolo operacional que se relaciona com o mundo corporificado, e que, como vimos no **CAPÍTULO 4: JORNADA PELAS PESQUISAS EM EDUCAÇÃO**

MATEMÁTICA, em geral, é o primeiro que os indivíduos reconhecem. Dessa forma, passam a entender esse símbolo com outros significados que habitam o mundo simbólico. Essa mudança, no nosso entendimento, ocorre na região que recebe o nome de “Simbólico Corporificado”. Um processo similar acontece na passagem entre os mundos simbólico e formal, na região chamada “Formal Simbólico”.

É nessa passagem entre os mundos que existe outra possibilidade de pesquisa: buscar entender quais mecanismos são utilizados pelo indivíduo, que possibilitam a compressão de novos significados do símbolo de igualdade na passagem entre um mundo e outro.

6 Epílogo

Na medida em que desenvolvíamos o trabalho, começamos a imaginar que, talvez, não seja por acaso que Boyer (1974) tenha iniciado o capítulo 15, “O Renascimento”, com a citação da frase que Robert Recorde proferiu para justificar o formato do símbolo de igualdade que criara. Entendemos que esse símbolo é um marco da nova era que se vivia, e que a história registrou como sendo o Renascimento.

Como já apresentamos no **CAPÍTULO 3: JORNADA PELA HISTÓRIA**, Foucault (2007) definiu o período do Renascimento como o início de uma nova maneira de pensar, na qual as coisas deixavam de ser porque sempre foram assim, para ter uma nova significância. Um novo olhar se tornava possível, e essa aculturação se fazia presente também na representação das coisas por meio de símbolos. Eles passavam a representar não apenas a si próprios, mas também um conteúdo que estava embutido nele, na mensagem que se pretendia que aquele símbolo levasse. Tal situação se mostrava presente também no simbolismo que passava a ser utilizado de maneira mais intensa na cultura européia.

Da mesma forma que a maneira de pensar da sociedade se manifestava no novo comportamento que ela adotava com relação aos símbolos matemáticos, esses também retornavam para o uso da sociedade com novas representações, não só no formato, mas também no conteúdo, repletos de processos e conceitos que passavam a traduzir. Alguns símbolos, em particular, sofreram grandes mudanças no conteúdo que representavam e um exemplo dessa situação pode ser encontrado no símbolo de igualdade.

A cada avanço que a Matemática experimentava, o símbolo de igualdade passava a ter novos significados. Quando nos referimos a esse avanço, não estamos falando somente de novos campos que os matemáticos descobriam, mas também da descoberta de novas situações de uso de conceitos antigos.

Entendemos que o significado do símbolo de igualdade na equação seja um exemplo dessa situação, pois, com o passar do tempo e a evolução dos significados que ele passou a ter, na medida em que se avançava na descoberta dos processos para resolução de equações mais complexas, o entendimento do significado do símbolo de igualdade passava a exigir, cada vez mais, um desenvolvimento do raciocínio matemático, provavelmente nem imaginado por Recorde quando utilizou pela primeira vez o símbolo “=”.

Acreditamos que o desenvolvimento da Matemática só se tornou possível com o desenvolvimento cognitivo da sociedade, fruto da capacidade desenvolvida pelos indivíduos que a compõem.

Quando, nos dias atuais, procuramos ensinar Matemática, precisamos estar atentos a isso, ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo, para que ele seja capaz de compreender a Matemática que ensinamos.

Nesse contexto, é que entendemos que os Três Mundos da Matemática têm muito a contribuir para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, e a compreensão dos significados do símbolo de igualdade em cada um dos três mundos é uma pequena contribuição para tornar esse quadro teórico cada vez mais perto daqueles que se incumbem da nobre e difícil missão de ensinar Matemática.

Referências

BAROODY, A. J.; GINSBURG, H. P. **The effects of instruction on children's understanding of the equals sign**. Elementary School Journal, n. 84, 1983. 199-212.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Álgebra. São Paulo: Atual Editora, 1994.

BEHR, M.; ERLWANGER, S.; NICHOLS, E. **How children view the equals sign.** Mathematics Teaching, v. 92, p. 13-18, 1980.

BODANIS, D. **E = mc2: Uma biografia da equação que mudou o mundo e o que ela significa**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CAJORI, F. **A History of Mathematical Notations**. New York: Cosimo, 2007a.

_________. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007b.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M.; LEVI, L. **Thinking mathematically: Integrating arithmetic an algebra in elementary school**. [S.l.]: [s.n.], 2003.

CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções de Alunos do 3º do Ensino Médio sobre o Significado do Símbolo “=” em Contextos Aritméticos e Algébricos**. [S.l.]: [s.n.], 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco.

COLE, M.; WERTSCH, J. V. **Beyond the individual-social antimony in discussion of Piaget and Vygotsky**. [S.l.]: [s.n.], 1996. Human evelopment, v.39, n.5 p.243-249.

COSME, V. V. **Igualdade Matemática: Um estudo de sua história e significados.** [S.l.]: [s.n.], 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

CROUZET, M. **História Geral ds Civilizações: O Oriente e a Grécia antiga - As civilizações Imperiais**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, v. 1, 1993.

DANTZIG, T. **Números: A linguagem da Ciência**. Tradução de Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experência Matemática**. Rio de Janeiro: Frncisco Alves, 1986.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.

FALKNER, K.; LEVI, L.; CARPENTER, T. **Children's Understanding of Equality: A Foundation of Algebra**. Teaching children mathematics, Reston - VA, v. 6, n. 4, p. 232-236, 1999.

FILLOY, E.; ROJANO, T. **Solving equations: The transition from arithmetic to algebra**. [S.l.]: [s.n.], 1989. For the Learning of Mathematics, 9(2), 19–25.

FINK, K. **A Brief History of Mathematics**. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1900.

FOUCAULT, M. **As palavras e as Coisas**. Tradução de Salma Tannus Muchail. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

FREIMAN, V.; LEE, L. **Tracking Primary Students'understanding of the Equality Sign**. Bergen, Norway: [s.n.]. 2004. p. 415–422. Proceedings of the 28th Intenational Conference for the Psychology of Mathematics Education.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. New York: Kluwer Academic Publishers, 1999.

GATTEGNO, C. **The Common Sense of Teaching Mathematics**. New York: Educational Solutions, 1974.

GODINO, J. D. **Mathematical concepts, their meanings and understanding**. Proceedings of the 20th International Conference of PME, Vol. 2. Valencia: [s.n.]. 1996. p. 417-424.

GRAY, E.; TALL, D. O. **Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic.** The Journal for Research in Mathematics Education, 26, 1994. 115-141.

HEALY, L. **Iterative design and comparison of learning systems for reflection in two dimensions**. [S.l.]: [s.n.], 2002. Tese (Doutorado) - University of London - Londres.

HEATH, T. L. **Diophantos of Alexandria: A Study in the history of Greek Algebra**. [S.l.]: Cambridge, 1885.

HIEBERT, J. **A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols**. In: Educational Studies in Mathematics. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, v. 19, 1988. p. 333-355.

IFRAH, G. **Os números: história de uma grande invenção**. 6. ed. São Paulo: Globo, 1994.

_________. **História Universal dos Algarismos**. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatiz Katisnski. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, v. 1, 1997.

KIERAN, C. **Concepts associated with the equality symbol**. [S.l.]: Dordercht, v. 12, 1981. 317-326 p. Educational Studies in Mathematics.

KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O. **Meanings of Meaning of Mathematics**. In: KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O. Meanings in Mathematics Education. [S.l.]: Springer, 2005. p. 20-27.

LIMA, R. N. **Equações Algébricas no Ensino Médio: uma Jornada por diferentes Mundos da Matemática.** São Paulo: [s.n.], 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

__________.; TALL, D. O. **What does equation mean? A brainstorm of the concept**. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS at undergraduation. Istanbul: [s.n.]. 2006. Proceedings of Third International Conference on the Teaching of Mathematics, ICTM 3.

MALARA, N.; NAVARRA, G. **Arithmetic pathways towards favouring pre-algebric thinking**. Bologana: Pitagora, 2003.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; CASTRO, E. **História del Signo Igual**. In: GUSMÁN, M. Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Granada: Editorial Atrio, 2007. p. 249-261.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. São Paulo: Ao Livro Técnico. 1971.

OKSUZ, C. **Children's Understanding of Equality and the Equal Symbol**. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2007.

OTTE, M. **Meaning and Mathematics**. In: KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O. Meaning in Mathematics Education. [S.l.]: Springer, 2005. p. 238-267.

PINSKY, J. **As primeiras civilizações**. São Paulo: Contexto, 2006.

RECORDE, R. **The Whetstone of Witte**. London: [s.n.], 1557.

SAENZ-LUDLOW, A.; WALGAMUTH, C. **Third Grader's Interpretations of Equality and the Equal Symbol**, v. 35, n. 2, p. 153 - 187, Fevereiro 1998.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics**. London: The Falmer Press, 1994.

SMITH, D. E. **History of Mathematics**. New York: Dover Publications, v. I, 1958.

TALL, D. O. **Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking.** Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2001. 81-104.

__________. **Thinking through three worlds of mathematics**. Proceedings of the 28th Intenational Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway: [s.n.]. 2004. p. 281–288.

__________. **Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education**. [S.l.]: [s.n.], 2007.

__________.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity**. In: Educational Studies in Mathematics. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, v. 12, 1981. p. 151-169.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

WARREN, E. **Young Children's Understanding of Equals: A Longitudinal Study**. Procedings of the 27th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education., Honolulu - HI, v. 4, p. 379-386, 2003.

_________.; COOPER, T. J. **Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns**. Mathematics Education Research Journal, v. 17, n. 1, p. 58-72, 2005.

WILHELMI, M. R.; GODINO J. D.; LACASTA E. **Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales,** 2004. Disponivel em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf />. Acesso em: 16 fev. 2010.

WILLIAMS, M. **Sanscrit Lexicon**. **Monier Williams Sanskrit-English Dictionary**, 2008. Disponivel em: <http://www.sanskrit-lexicon.uni-koeln.de/monier/>. Acesso em: 13 fev. 2010.

ZUND, J. D. **American National Biografy**. Oxford: [s.n.], v. 4, 1999.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo