

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Análise Numérica de Novos Métodos de Elementos  
Finitos Estabilizados e Enriquecidos Aplicados à  
Modelos de Reação-Difusão Elíptico e Parabólico**

Por

**Honório Joaquim Fernando**

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

JULHO DE 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ANÁLISE NUMÉRICA DE NOVOS MÉTODOS DE ELEMENTOS  
FINITOS ESTABILIZADOS E ENRIQUECIDOS APLICADOS À  
MODELOS DE REAÇÃO-DIFUSÃO ELÍPTICO E PARABÓLICO

Honório Joaquim Fernando

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL  
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-  
SÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

---

Prof. Frédéric Valentin, D.Sc.  
(Presidente)

---

Prof. Alexandre Loureiro Madureira, Ph.D

---

Prof. Márcio Arab Murad, D.Sc.

---

Prof. Henrique Versieux, D.Sc.

---

Prof. Marcus Sarkis, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL  
JULHO DE 2010

Fernando, Honório Joaquim

F363a            Análise numérica de novos métodos de elementos finitos estabilizados e enriquecidos aplicados à modelos de reação-difusão elíptico e parabólico / Honório Joaquim Fernando. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

XXII, 243 p. : il.; 29 cm

Orientador: Frédéric Valentin

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2010.

1. Modelo de Reação-Difusão. 2. Métodos de Elementos Finitos Enriquecidos. 3. Formulação Espaço-Tempo. 4. Métodos Estabilizados. I. Valentin, Frédéric. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 518.25

*“Why finite elements?”*

*A natural question that one may ask is: Why have finite element methods been so popular in both the engineering and mathematical community? ”*

J. Tinsley Oden

### **Dedicatória**

Dedico este trabalho aos meus queridos pais,

Joaquim Cambeche e Maximiana Jaime.

Aos meus irmãos Dino, Candinha e Vina.

À minha filha Stella Cambeche, sempre  
presente na minha vida.

À Gilvania, minha esposa, pela compreensão,  
paciência, carinho e motivação.

# Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer à Deus pela vida e por ter permitido a conclusão desta tese.

Desejo expressar minha sincera gratidão ao meu orientador, Professor Frédéric Valentin, por ter me apresentado ao fascinante mundo da análise numérica, pela cuidadosa orientação, valiosas avaliações críticas, assistência e encorajamento nesse desafio. Por razões diversas, sobretudo de saúde, foram vários os momentos em que me julguei sem forças para continuar, no entanto, seu entusiasmo e confiança substanciados na celebre frase “*acredite em mim, vamos lá que existe vida após o doutorado*” tiveram papel crucial para esse desfecho. Meu especial obrigado pelo convívio muito agradável durante esses anos, pelas lições de vida e demonstrações de honestidade, verdade, justiça, ética e disciplina.

Gostaria de agradecer à todos os professores do LNCC pelos prestimosos e fundamentais conhecimentos transmitidos ao longo dessa jornada. Em especial, os professores Abimael Loula, pela disponibilidade, motivação e lições de elementos finitos, e Márcio Murad, pelas lições de modelagem física.

Agradeço também, aos professores Webe Mansur (COPPE-UFRJ), amigo e orientador do mestrado, José Paulo Soares de Azevedo (COPPE-UFRJ), Flávio César Borba Mascarenhas (COPPE-UFRJ), Otto Corrêa Rotuno Filho (COPPE-UFRJ), José Carlos Cesar Amorim (IME), Álvaro (IME), Nádia (IME), Gerson (IME), Glória (IME) “*in memoriam*” e Luiz António Vieira Carneiro (IME).

Gostaria de estender meu apreço aos professores do ensino fundamental e médio pela inestimável contribuição para minha formação. Em particular, aos professores do Instituto Médio Industrial de Luanda, Cuvula, que me deu a honra

de ter sido seu assistente, Ramalheira, Lucrécio Costa, Ismael, Nelito, Nascimento, Luis Miguel, Good, Leitão, Francisco Simões e Ema Gomes.

Quero agradecer a todos os amigos com os quais pude contar durante o doutorado e que tornaram mais agradável ainda o ambiente de trabalho: Daniel Fernandes, Demerson Nunes, Marcos Alcoforado, Jean Félix, Sidarta, Jairo Faria, Manuel Barreda, Amanda, Jaqueline Silva, Rachel Fontella, Eduardo Coppoli, Dilberto, Nacho, Maicon Correa, Boness, Júlio e Jairo Ramalho. Em especial, ao amicíssimo Flávio Pietrobon, pelo apoio de todos os momentos.

Agradeço sinceramente aos funcionários do LNCC, de todos os setores: limpeza, segurança, suporte e administrativo pela competência laboral. Quero destacar o funcionário Sérgio da biblioteca e as funcionárias Ana Nery, Ana Paula e Angela, todas da secretaria da pós-graduação.

Agradeço ainda ao Leandro Gazoni pela ajuda incondicional à parte computacional.

Com enorme satisfação e sincera emoção, agradeço à minha filha Stella Cambeche e à minha esposa Gilvania Fernando às quais dedico com muito amor todo o esforço despendido neste trabalho e peço desculpas e compreensão pelos momentos de ausência.

Agradecimentos especiais também à minha família em Angola. A meus pais Joaquim Fernando e Maximiana Jaime, pela clarividência do papel da educação como instrumento de transformação social e humana, apesar da baixa escolaridade. A meus queridos irmãos Dino, Candinha e Vina nos quais busco motivação adicional para enfrentar a vida. Ao mano Beto, por compartilharmos o interesse pelo saber desde tenra idade.

Sou eternamente grato à Luis Fernando e Victor Nunes Da Silva, decisivos para a minha vinda ao Brasil e conseqüente realização desse sonho. Obrigado pelo voto de confiança que deu sentido à minha vida, a busca pelo saber.

Agradeço aos amigos Manuel Quintas, Marcos Aurélio Citeli, Vinícius Aiex Rangel, Maurício Cesar Rebelo, Carlos Alexandre Vasconcellos, Da Costa,



Ramon Domingues e Marcos José Pio pela amizade que remonta desde os tempos de graduação no Instituto Militar de Engenharia (IME).

Finalmente, gostaria de agradecer imensamente aos professores Marcus Sarkis (IMPA), Henrique Versieux (UFRJ), Alexandre Madureira (LNCC) e Márcio Murad (LNCC) que me deram a honra de participar da banca da defesa de tese, pela leitura atenciosa e valiosas sugestões.

Ao LNCC pelo apoio institucional e à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**ANÁLISE NUMÉRICA DE NOVOS MÉTODOS DE ELEMENTOS  
FINITOS ESTABILIZADOS E ENRIQUECIDOS APLICADOS À  
MODELOS DE REAÇÃO-DIFUSÃO ELÍPTICO E PARABÓLICO**

Honório Joaquim Fernando

Julho, 2010

**Orientador:** Frédéric Valentin, D.Sc

Quatro novos métodos de elementos finitos destinados à resolução de problemas de reação-difusão singularmente perturbados, e designados por método de Galerkin enriquecido (MGE), método estabilizado multiescala (MEM-p) e (MEM-g), e método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo (MEPGDT), são propostos. Os três primeiros métodos são dedicados à resolução da equação de reação-difusão estacionária, enquanto que o último é proposto para resolver a equação de reação-difusão transiente.

Estimativas à priori de erro ótimas nas normas naturais  $L^2$  e  $H^1$  são derivadas para os métodos MGE, MEM-p e MEM-g. Para o MEPGDT, uma estimativa à priori de erro ótima na norma da energia, é fornecida. As taxas de convergência teóricas são confirmadas através de diversos experimentos numéricos. Os novos métodos numéricos são também validados numericamente através da resolução de problemas singularmente perturbados que demonstram a ótima performance dos novos métodos propostos.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**NUMERICAL ANALYSIS OF NEW ENRICHED AND STABILIZED  
FINITE ELEMENT METHODS APPLIED FOR ELLIPTIC AND  
PARABOLIC REACTION-DIFFUSION MODELS**

Honório Joaquim Fernando

July, 2010

**Advisor:** Frédéric Valentin, D.Sc

Four new finite element methods, namely, Galerkin Enriched Method (MGE), Multiscale Stabilized Method (MEM-p) and (MEM-g), and time-discontinuous Petrov-Galerkin Enriched Method (MEPGDT), are proposed to solve singularly perturbed reaction-diffusion problems. We dedicated the first three methods for solving stationary reaction-diffusion equation, while the latter handles the transient case.

Optimal a priori error estimates in  $L^2$  and  $H^1$  norm for MGE, MEM-p and MEM-g are derived. For MEPGDT, a priori optimal error estimate in the energy norm is provided. Theoretical convergence rates are confirmed and further investigated by numerical experiments. Also, the methods are validated through several numerical tests of singularly perturbed type, which demonstrate their good performance.

# Sumário

<b>1</b>	Introdução	1
1.1	Contexto do Trabalho e Motivação . . . . .	1
1.2	Principais Resultados do Trabalho . . . . .	4
<b>2</b>	Métodos Clássicos para Problemas Parabólicos	7
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Definições e Notações . . . . .	8
2.3	Definição do Problema Modelo . . . . .	10
2.4	Formulação Variacional Discreta . . . . .	12
2.4.1	Discretização Espacial . . . . .	12
2.4.2	Discretização Temporal . . . . .	13
2.4.3	Discretização Espaço-Tempo . . . . .	14
2.4.4	Abordagem de Diferenças Finitas . . . . .	16
2.4.5	Abordagem Espaço-Tempo . . . . .	19
2.5	Métodos Estabilizados . . . . .	21
2.5.1	Esquemas de Diferenças Finitas . . . . .	22
2.5.2	Esquemas de Galerkin Descontínuo no Tempo . . . . .	23
2.5.3	Parâmetro de Estabilização . . . . .	24
2.6	Testes Numéricos . . . . .	26
2.6.1	Caso Assintótico 1 . . . . .	26
2.6.2	Caso Assintótico 2 . . . . .	32
2.7	Conclusões . . . . .	37

<b>3</b>	Novos Métodos de Elementos Finitos Enriquecidos e Estabilizados para o Modelo Elíptico	39
3.1	Introdução	39
3.2	O Modelo	42
3.3	Revisão dos Métodos Enriquecidos	43
3.3.1	Funções de Base Enriquecidas	47
3.3.2	Cálculo das Funções Multiescala do PGEM	49
3.4	Novo Método de Galerkin Enriquecido	52
3.5	Novos Métodos Estabilizados Multiescala	55
3.5.1	Novo Método Estabilizado Multiescala Associado ao PGEM	57
3.5.2	Novo Método Estabilizado Multiescala Associado ao MGE	60
3.6	Análise Numérica dos Novos Métodos Estabilizados	62
3.6.1	Existência e Unicidade para o MEM-p	62
3.6.2	Existência e Unicidade para o MEM-g	63
3.6.3	Estimativas de Erro para o MEM-p	64
3.6.4	Estimativas de Erro para o MEM-g	71
3.6.5	Equivalência Entre o PGEM e o MEM-p	73
3.6.6	Equivalência Entre o MGE e o MEM-g	80
3.7	Análise Numérica do Novo Método Enriquecido	90
3.7.1	Estimativas de Erro para o MGE	91
3.8	Validações Numéricas	92
3.8.1	Problema com Solução Analítica : Validação da Convergência	92
3.8.2	Problema Elíptico com Termo de Fonte Constante	94
3.8.3	Problema Elíptico com Termo de Fonte Variável	96
3.8.4	Problema com Malha não Estruturada	100
3.9	Conclusões	103
<b>4</b>	Novo Método de Elementos Finitos Enriquecido para o Modelo Parabólico	105
4.1	Introdução	105

4.2	Revisão dos Métodos Enriquecidos via Aproximação Temporal por Diferenças Finitas . . . . .	107
4.2.1	Enriquecimento Estacionário . . . . .	107
4.2.2	Enriquecimento Transiente . . . . .	112
4.3	Métodos Enriquecidos via Formulação Espaço-Tempo . . . . .	117
4.3.1	Derivação do Método . . . . .	118
4.3.2	Caso Interpolação Linear no Espaço e Constante no Tempo .	122
4.3.3	Caso Interpolação Linear no Espaço e no Tempo . . . . .	126
4.4	Análise de Erro . . . . .	143
4.4.1	Preliminares e Resultados Auxiliares . . . . .	143
4.4.2	Existência e Unicidade de Solução . . . . .	148
4.4.3	Consistência Variacional . . . . .	151
4.4.4	Estimativas de Erro . . . . .	154
4.5	Validações Numéricas . . . . .	170
4.5.1	Primeiro Caso Assintótico ( $\varepsilon < h^2$ ) . . . . .	170
4.5.2	Segundo Caso Assintótico ( $\varepsilon < (\Delta t)^{-1}$ ) . . . . .	173
4.5.3	Solução Analítica . . . . .	176
4.6	Conclusões . . . . .	179
<b>5</b>	<b>Conclusões e Futuros Desenvolvimentos</b>	<b>180</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>183</b>
	<b>Apêndice</b>	
<b>A</b>	<b>Conceitos, Definições e Resultados da Álgebra Linear</b>	<b>193</b>
A.1	Autovalores Generalizados . . . . .	193
A.1.1	Campo de Valores de uma Matriz . . . . .	193
A.1.2	Problema $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ com $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ Genéricas . . . . .	195

<b>B</b>	Matrizes Elementares e Autovalores Generalizados	196
B.1	Matrizes Elementares . . . . .	196
B.1.1	Matrizes de Massa . . . . .	196
B.1.2	Matrizes de Rigidez . . . . .	205
B.2	Autovalores Generalizados . . . . .	219
B.2.1	Matrizes de Massa . . . . .	219
B.2.2	Matrizes de Rigidez . . . . .	222
B.2.3	Comportamento dos Autovalores Generalizados . . . . .	225
<b>C</b>	Método de Elementos Finitos Estabilizado Não-Usual (USFEM)	234
C.1	Caso Estacionário . . . . .	234
C.2	Caso Transiente . . . . .	235
<b>D</b>	Algoritmo Preditor-Multicorretor de Terceira Ordem	237
<b>E</b>	Parâmetros Decorrentes da Análise de Erro do MEPGDT	239

# Lista de Figuras

## Figura

1.1	Representação esquemática da organização da tese. . . . .	6
2.1	Discretização do domínio espaço-tempo definido por $Q := \Omega \times (0, T]$ . . . . .	15
2.2	Esquema simbólico da função $w$ definida em $J$ , sua restrição a $J_n$ , seus limites laterais e salto nos pontos nodais $t_n$ , $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ . . . . .	16
2.3	Solução via método de Galerkin clássico em distintos instantes de tempo, para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	27
2.4	Solução via método estabilizado clássico, GLS, em distintos instan- tes de tempo, para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	28
2.5	Solução via método estabilizado clássico, USFEM, em distintos ins- tantes de tempo com $\tau = \tau^{\text{FV}}$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	29
2.6	Solução via método estabilizado clássico, USFEM, em distintos ins- tantes de tempo com $\tau = \tau^{\text{Cod}}$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	30
2.7	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 0.1$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	30
2.8	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 0.2$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	31
2.9	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 1$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	31
2.10	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 7.5$ , para $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 10^{-1}$ . . . . .	31



2.11	Solução via método de Galerkin clássico para distintos instantes de tempo, tomando $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	32
2.12	Solução via método estabilizado clássico, GLS, para distintos instantes de tempo, tomando $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	33
2.13	Solução via método estabilizado clássico, USFEM, para distintos instantes de tempo com $\tau = \tau^{\text{FV}}$ , tomando $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . .	34
2.14	Solução via método estabilizado clássico, USFEM, para distintos instantes de tempo com $\tau = \tau^{\text{Cod}}$ , tomando $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . .	35
2.15	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 1 \times 10^{-5}$ , para $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	36
2.16	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 4 \times 10^{-5}$ , para $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	36
2.17	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 1 \times 10^{-3}$ , para $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	37
2.18	Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo $t = 1 \times 10^{-2}$ , para $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ . . . . .	37
3.1	Gráficos de $\lambda_l(x, y)$ e dos perfis $\lambda_j(x, 0.5)$ para distintos valores de $\varepsilon$ .	52
3.2	Gráficos de $\beta_K$ e $C\alpha_K$ versus $\alpha_K$ , $C > 0$ . . . . .	79
3.3	Gráficos de $a_j^K$ limitados por $C\alpha_K$ . . . . .	90
3.4	Convergência dos métodos MEM-p, MEM-g e MGE sob $h$ -refinamento.	93
3.5	Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para $\varepsilon = 10^{-4}$ . . . . .	95
3.6	Solução do método de Galerkin, para $\varepsilon = 10^{-4}$ . . . . .	96
3.7	Comparação entre os métodos PGEM (à esquerda) e MGE (à direita), para $\varepsilon = 10^{-4}$ . . . . .	96
3.8	Perfil das soluções em $x = 0.5$ correspondente zoon à direita para $\varepsilon = 10^{-4}$ . . . . .	96
3.9	Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para $\varepsilon = 10^{-6}$ . . . . .	98

3.10	Perfis das soluções dos diferentes métodos em $y = 0.5$ para $\varepsilon = 10^{-6}$ .	99
3.11	Definição do problema exemplo e malha não estruturada usada.	100
3.12	Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para $\varepsilon = 10^{-6}$ .	101
3.13	Perfis das soluções dos diferentes métodos em $x = 0.5$ para $\varepsilon = 10^{-6}$ .	102
4.1	Perfil das soluções de Galerkin, PGEM-L e USFEM em $y = 0.5$ para distintos instantes de tempo, tomando $\varepsilon = 10^{-6}$ e $\Delta t = 0.1$ .	110
4.2	Perfil das soluções de Galerkin, PGEM-L e USFEM em $y = 0.5$ para diferentes instantes de tempo, tomando $\varepsilon = 1$ e $\Delta t = 10^{-5}$ .	111
4.3	Solução via MEPGDT em distintos instantes de tempo para $\varepsilon = 10^{-6}$ , $\Delta t = 0.1$ .	171
4.4	Solução via PGEM-L em distintos instantes de tempo para $\varepsilon = 10^{-6}$ , $\Delta t = 0.1$ .	172
4.5	Perfil das soluções dos métodos PGEM-L e MEPGDT em $y = 0.5$ para distintos instantes de tempo tomando $\varepsilon = 10^{-6}$ , $\Delta t = 0.1$ .	173
4.6	Solução via MEPGDT em distintos instantes de tempo para $\varepsilon = 1$ , $\Delta t = 10^{-5}$ .	174
4.7	Solução via PGEM-L em distintos instantes de tempo para $\varepsilon = 1$ , $\Delta t = 10^{-5}$ .	175
4.8	Perfil das soluções dos métodos PGEM-L e MEPGDT em $y = 0.5$ para diferentes instantes de tempo tomando $\varepsilon = 1$ , $\Delta t = 10^{-5}$ .	176
4.9	Convergência do MEPGDT na norma $   \cdot   _{h\Delta t}$ sob $\Delta t$ e $h$ -refinamento.	177
4.10	Convergência do MEPGDT na norma natural do espaço $L^2(L^2)$ sob $\Delta t$ -refinamento.	178
4.11	Convergência do MEPGDT nas normas naturais dos espaços $L^2(L^2)$ e $L^2(H^1)$ sob $h$ -refinamento.	178
B.1	Mapeamento isoparámetro de um elemento triangular.	197
B.2	Mapeamento isoparámetro de um elemento retangular.	201

B.3	Perfis de $\varrho_{min}^K$ e $\varrho_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	226
B.4	Perfis de $\sigma\rho_{min}^K$ e $\sigma\rho_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	226
B.5	Perfil de $\theta_{min}^K = \theta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	227
B.6	Perfil de $\sigma\Theta_{min}^K = \sigma\Theta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	227
B.7	Perfis de $\sigma^2\xi_{min}^K$ e $\sigma^2\xi_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	228
B.8	Perfis de $\sigma^2\eta_{min}^K$ e $\sigma^2\eta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	228
B.9	Perfis de $\varrho_{min}^K$ e $\varrho_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	229
B.10	Perfis de $\sigma\rho_{min}^K$ e $\sigma\rho_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	229
B.11	Perfis de $\theta_{min}^K$ e $\theta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	230
B.12	Perfis de $\sigma\Theta_{min}^K$ e $\sigma\Theta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	230
B.13	Perfis de $\sigma^2\xi_{min}^K$ e $\sigma^2\xi_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	231
B.14	Perfis de $\sigma^2\eta_{min}^K$ e $\sigma^2\eta_{max}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	231
B.15	Limitação de $\sigma\mu_{max}^K + \varepsilon\zeta_{max}^K$ por $C\sigma\mu_{min}^k$ versus $\alpha$ . . . . .	232
B.16	Limitação de $\theta_{min}^K$ por $C\theta_{min}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	232
B.17	Comportamento de $\sqrt{\theta_{max}^K}\sqrt{\zeta_{max}^K}$ versus $\alpha$ . . . . .	233
B.18	Comportamento de $C\mu_{min}^K\theta_{min}^K$ versus $\alpha$ . . . . .	233
E.1	Comportamento dos parâmetros $\delta_a^n$ e $(1/\delta_a^n)^{1/2}$ versus $n$ para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	241
E.2	Comportamento dos parâmetros $\delta_b^n$ e $(1/\delta_b^n)^{1/2}$ versus $n$ para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	242
E.3	Perfil de $\left(\beta_{Q_n^e}^{max}/(\sigma\delta_a^n)\right)^{1/2}$ versus $\alpha$ , limitada por $C\alpha$ . . . . .	242
E.4	Perfil de $\left(\xi_{Q_n^e}^{max}/(\sigma\delta_a^n)\right)^{1/2}$ versus $\alpha$ , limitada por $C\alpha$ . . . . .	243
E.5	Perfil de $\left(\alpha_{Q_n^e}^{max}/(\sigma\Delta t\delta_b^n)\right)^{1/2}$ versus $\alpha$ , limitada por $C\alpha$ . . . . .	243

# Lista de Tabelas

## Tabela

5.1	Principais resultados para o problema elíptico. . . . .	181
5.2	Principais resultados para o problema parabólico. . . . .	182

# Lista de Siglas e Abreviaturas

- $C^0(\Omega)$ : Espaço das funções contínuas no domínio  $\Omega$
- $\text{diâm}(\cdot)$  : Abreviatura de diâmetro
- $\text{dim}(\cdot)$  : Abreviatura de dimensão
- $\mathbf{e}$  : Vetor unitário base do sistema cartesiano
- $f$  : Termo de fonte ou função escalar genérica
- $h$  : Medida característica da discretização espacial
- $\Delta t$  : Medida característica da discretização temporal
- $H_0^1(\mathcal{T}_h)$  : Espaço das funções que pertencem ao  $H_0^1(K)$  para todo elemento  $K$  da partição  $\mathcal{T}_h$
- $K$  : Elemento triangular ou quadrangular pertencente a partição  $\mathcal{T}_h$
- $H_0^1(\Omega)$  : Espaço das funções em  $H^1(\Omega)$  que se anulam em  $\partial\Omega$
- $H^1(\mathcal{T}_h)$  : Espaço das funções que pertencem ao  $H^1(K)$  para todo elemento  $K$  da partição  $\mathcal{T}_h$
- $H^1(\Omega)$  : Espaço das funções no  $L^2(\Omega)$  cujas derivadas também pertencem ao  $L^2(\Omega)$
- $\mathcal{N}_K$  : Número de nós do elemento  $K$  da partição  $\mathcal{T}_h$
- $n_K$  : Total de elementos  $K$  da partição  $\mathcal{T}_h$
- $\mathcal{V}_Z$  : Conjunto de todas as arestas  $Z$  pertencentes a  $\mathcal{T}_h$
- $J$  : Intervalo de tempo  $(0, T]$
- $J_n$  : Subintervalo de tempo  $(t_n, t_{n+1})$
- $N$  : Inteiro positivo representando o número de subintervalos em  $(0, T]$
- $n$  : Inteiro não-negativo representando o nível de tempo ou a fatia espaço-tempo  $Q_n$
- $Q_n^e$  : Elemento prismático espaço-tempo pertencente a partição  $\mathcal{T}_h^n$

- $\mathcal{N}_{\Delta t}$  : Conjunto de índices referentes a todos os elementos da partição  $\mathcal{T}_{\Delta t}$
- $S_n^c$  : Espaço das funções lineares ou bilineares por partes no espaço e constantes por partes no tempo
- $S_n^L$  : Espaço das funções lineares ou bilineares por partes no espaço e lineares por partes no tempo
- $\mathcal{I}$  : Operador ou matriz identidade
- $L^2(\Omega)$  : Espaço das funções quadrado integráveis no domínio  $\Omega$  na fronteira do domínio  $\Omega$
- $\text{span}(x_i)$  : Espaço gerado pelas funções  $x_i$
- $\text{ess sup}$  : Abreviatura de supremo essencial
- $\max$  : Abreviatura de máximo
- $S_1(K)$  : Espaço das funções lineares ou bilineares em  $K$
- $u_0$  : Condição inicial nos problemas parabólicos
- $\Delta$  : Representa o laplaciano, exceto se acompanhado de  $t$
- $\varepsilon$  : Coeficiente de difusão nos problemas elípticos e parabólicos
- $\sigma$  : Coeficiente de reação nos problemas elípticos e parabólicos
- $\mathcal{T}_h$  : Partição regular do domínio espacial
- $\mathcal{T}_{\Delta t}$  : Partição regular do domínio temporal
- $\mathcal{T}_h^n$  : Partição regular da fatia espaço-tempo  $Q_n$
- $\phi$  : Função de base de enriquecimento
- $\psi$  : Função de base linear ou bilinear
- $\Omega$  : Domínio aberto limitado do  $\mathbb{R}^2$  com fronteira poligonal  $\partial\Omega$
- $\nabla$  : Gradiente
- $Q$  : Cilindro espaço-tempo
- $\Sigma$  : Fronteira lateral do cilindro espaço-tempo  $Q$
- $D$  : Cilindro ou prisma espaço-tempo
- $(\cdot, \cdot)_D$  : Produto interno do  $L^2(D)$
- $\|\cdot\|_{1,\omega}$  : Norma do espaço  $H^1(\omega)$

- $\|\cdot\|_{0,D}$  : Norma do espaço  $L^2(D)$
- $|\cdot|$  : Representa tanto o módulo de uma função como a medida de área ou comprimento
- MGE: Método de Galerkin Enriquecido
- MEM: Método Estabilizado Multiescala
- MGDT: Método de Galerkin Descontínuo no Tempo
- MEPGDT: Método Enriquecido de Petrov-Galerkin Descontínuo no Tempo

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contexto do Trabalho e Motivação

A equação de reação-difusão aparece em diversas áreas da ciência e engenharia (ciências biológicas, biomédicas, física, química, proteção ambiental e áreas tecnológicas), veja por exemplo (Rothe, 1984), (Britton, 1986), (Grindrod, 1996) e (Murray, 2002) para um contato com o amplo universo das aplicações. Porém, tais aplicações resultam em problemas complexos que requerem o emprego de novos métodos numéricos, mais eficientes, robustos e precisos.

Em particular, essa equação pode transformar-se num problema singularmente perturbado. Como sabemos, tais problemas são caracterizados pela dependência de um parâmetro pequeno que induz às soluções, o desenvolvimento de regiões de altos gradientes conhecidas por camadas limites. No modelo de reação-difusão estacionário, essa situação ocorre no caso de reação dominante (H.G. Roos e Tobiska, 1996). No entanto, a formulação semi-discretizada do modelo de reação-difusão transiente também mostra tal situação quando passos de tempo pequenos são usados, veja (Ilinca e Héту, 2002), (Harari, 2004), (Ramalho, 2005), (Franca et al., 2006a) e (John e Schmeyer, 2008).

Portanto, é necessário desenvolver técnicas que permitem realizar aproximações numéricas de problemas singularmente perturbados em domínios com geometria complexa cujas soluções contêm camadas limites.

No âmbito das aproximações por elementos finitos, os métodos propos-



tos neste trabalho podem ser vistos como parte de três possíveis abordagens para contornar as dificuldades impostas pela presença de camadas limites nas soluções de problemas de reação-difusão singularmente perturbados. A primeira diz respeito ao enriquecimento dos espaços clássicos de elementos finitos constituídos por funções polinômiais por parte (Franca et al., 2005b), (Ramalho, 2005), a segunda consiste no uso de elementos finitos não-conformes, i.e, empregando funções não necessariamente contínuas nas interfaces dos elementos, (Feistauer e Švadlenka, 2004), (Feistauer e Švadlenka, 2007), (Runchang, 2008), e por último temos a abordagem ligada ao desenvolvimento de novas formulações estabilizadas (Ilinca e Héту, 2008).

Quando restrita ao problema elíptico, a abordagem do enriquecimento dos espaços padrão de elementos finitos em (Franca et al., 2005b) deu origem ao método enriquecido de Petrov-Galerkin (PGEM) para o modelo de reação-difusão estacionário. A correspondente análise de erro é apresentada em (Franca et al., 2005a). Ainda dentro dessa abordagem, podemos citar o método das bolhas livres de resíduo (RFB) conforme (Brezzi e Russo, 1994), no qual, ao contrário do PGEM, a função de enriquecimento anula-se no bordo do elemento.

Na discretização de problemas transientes, usa-se tradicionalmente semi-discretizações espaciais, resultando no esquema também conhecido como método das linhas. Nessa abordagem, apenas a discretização da variável espacial é aplicada, enquanto o tempo permanece contínuo. Isso conduz à um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser resolvido numericamente por algum esquema conveniente de integração no tempo, veja por exemplo (Feistauer e Sobotíková, 2005), (Sun e Wheeler, 2005a), (Sun e Wheeler, 2005b). Adotando esse procedimento, uma extensão do PGEM ao modelo de reação-difusão transiente, designada por PGEM-m, é proposta em (Ramalho, 2005) e (Franca et al., 2006a).

Características como alto potencial de paralelização e adaptatividade (tanto com respeito ao parâmetro de malha quanto ao grau do polinômio de aproximação), têm conduzido nos últimos anos a um emprego substancial de elementos

finitos não-conformes em problemas singularmente perturbados, veja por exemplo (Sun, 2003). Para problemas transientes, semi-discretizações de Galerkin descontínuas no tempo, combinadas com discretizações conformes de elementos finitos no espaço, resultam no esquema conhecido como método de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT), introduzido e analisado por (Jamet, 1978) para o problema parabólico com fronteira dependente do tempo. Portanto, no MGDT, fronteiras desse tipo podem ser levadas em conta de maneira natural, o que não ocorre no método das linhas. Segundo (Johnson et al., 1984), as propriedades matemáticas do MGDT são análogas às do método de Galerkin para problemas estacionários. Consequentemente, um bom método numérico para problemas estacionários, pode ser prontamente estendido à problemas transientes em uma formulação espaço-tempo. Essa observação pode novamente ser encarada como uma vantagem do MGDT quando comparado com o método das linhas. Em (Feistauer e Švadlenka, 2007) é considerada a não-conformidade tanto no espaço quanto no tempo aplicada ao modelo de reação-difusão-convecção transiente.

No que concerne ao desenvolvimento de novas formulações estabilizadas, focamos nossa atenção naquelas decorrentes das formulações enriquecidas, conforme (Brezzi et al., 1997), (Brezzi et al., 2003), (Barrenechea e Valentin, 2005), (Araya et al., 2006), (Araya et al., 2009). Como sabemos, as estabilizações clássicas dependem de parâmetros estabilizantes que na maioria dos casos são obtidos de forma “ad-hoc”. Em (Barrenechea e Valentin, 2005), (Brezzi et al., 1997), uma relação entre o parâmetro de estabilização e a média da função de enriquecimento sobre o elemento é estabelecida, provendo assim uma justificativa matemática para construção de parâmetros estabilizantes.

Muitas das características associadas à cada uma das três abordagens descritadas acima sugerem que o uso isolado ou combinado dessas abordagens pode conduzir ao desenvolvimento e análise de potenciais candidatos para uma satisfatória aproximação numérica dos modelos de reação-difusão singularmente perturbados.

## 1.2 Principais Resultados do Trabalho

Neste trabalho, são propostos e analisados quatro novos métodos designados por método de Galerkin enriquecido (MGE), método estabilizado multiescala (MEM-p) e (MEM-g), e método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo (MEPGDT). Os métodos MGE, MEM-p e MEM-g são propostos para solucionar numericamente o modelo de reação-difusão estacionário, enquanto que o MEPGDT destina-se à resolução da contrapartida transiente.

No PGEM introduzido em (Franca et al., 2005b), o espaço das funções tentativas é dado pela soma direta do espaço das funções lineares ou bilineares por partes (espaço padrão da formulação de Galerkin) com um novo espaço denominado espaço de enriquecimento cujas funções resolvem localmente o operador elíptico de reação-difusão com condições de contorno convenientemente escolhidas, enquanto que o espaço das funções testes é uma soma direta dos espaços das funções lineares ou bilineares por partes com o espaço das funções bolhas.

O MGE é construído seguindo as idéias do PGEM comentadas no parágrafo anterior, diferindo apenas na forma como o espaço das funções testes é enriquecido. Agora, consideramos a soma direta do espaço das funções testes do PGEM com o espaço de enriquecimento usado no enriquecimento das funções tentativas do PGEM. Desta forma, o MGE mostra-se superior ao PGEM em problemas onde difusão e reação são ambas importantes.

Os métodos MEM-p e MEM-g representam formulações estabilizadas derivadas a partir dos métodos PGEM e MGE respectivamente. Esses métodos são construídos com dois objetivos essenciais. O primeiro está ligado às principais vantagens dos métodos estabilizados que são a simplicidade de implementação computacional e o baixo custo, enquanto que o segundo está associado à construção de parâmetros estabilizantes que tenham de alguma forma justificativa física e/ou matemática. Os novos métodos estabilizados também mostram-se superiores aos clássicos, reproduzindo em grande medida os resultados obtidos com o MGE.

Tirando proveito novamente do arcabouço matemático desenvolvido em

(Franca et al., 2005b) para a construção do PGEM, na expectativa da preservação de suas propriedades matemáticas em uma formulação espaço-tempo, construímos o MEPGDT para a versão parabólica da equação de reação-difusão.

Em linhas gerais, este trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre os métodos de elementos finitos clássicos para problemas parabólicos lineares. Discutimos o método das linhas, o MGDT e alguns métodos estabilizados, evidenciando as limitações desses esquemas no tratamento de casos singularmente perturbados. A construção e correspondente análise do MGE, do MEM-p e do MEM-g, é feita no capítulo 3. Estimativas de erro nas normas naturais  $L^2$  e  $H^1$  são fornecidas. Resultados numéricos são exibidos. Reservamos o capítulo 4 à construção do MEPGDT, que está baseado no enriquecimento adequado dos espaços do MGDT. Uma estimativa de erro ótima na norma da energia é desenvolvida. Resultados de experimentos numéricos são também apresentados, mostrando que a nova abordagem de enriquecimento de espaços proposta neste trabalho é suficiente para evitar oscilações espúrias na solução numérica. Finalmente, o capítulo 5 é destinado às conclusões do trabalho. A figura 1.1 mostra de maneira sintética a apresentação deste trabalho.

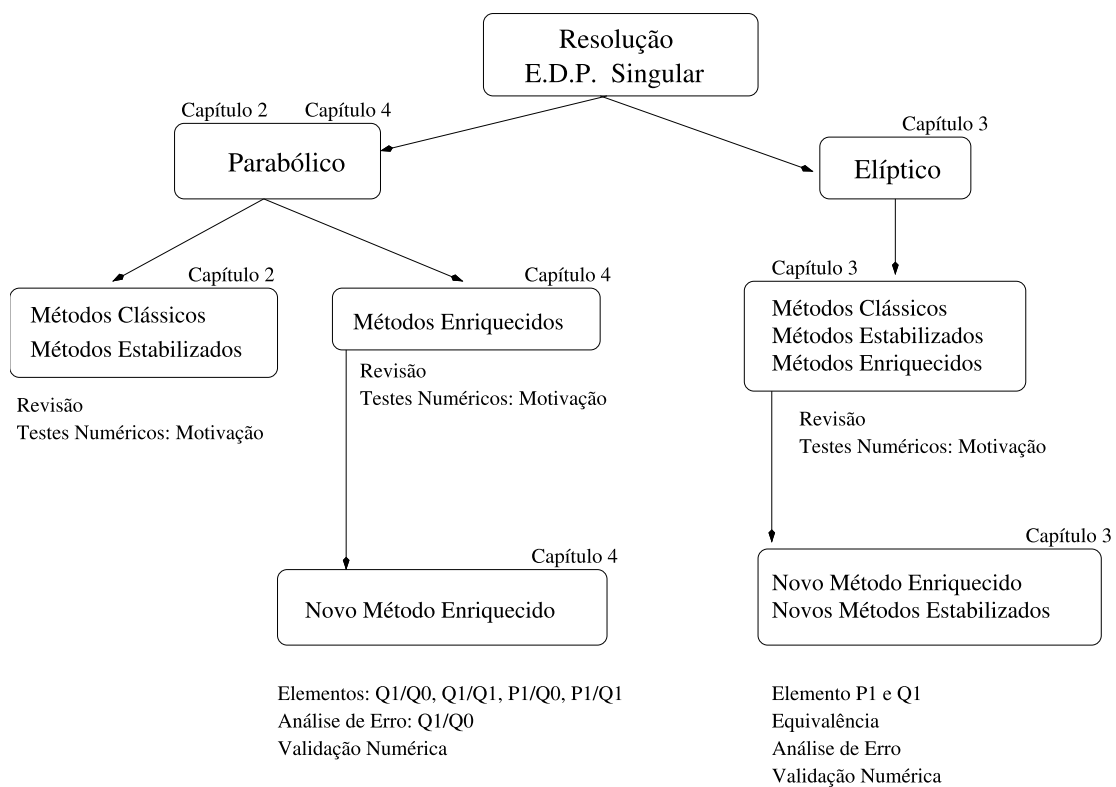


Figura 1.1: Representação esquemática da organização da tese.

# Capítulo 2

## Métodos Clássicos para Problemas Parabólicos

### 2.1 Introdução

A abordagem inicial para a obtenção de soluções numéricas para problemas de evolução através do método de elementos finitos (MEF), consistia exclusivamente em combinar aproximações por elementos finitos no espaço com aproximações por diferenças finitas no tempo. Citando (Hughes e Hulbert, 1988), *“devido a discussão sempre presente de que elementos finitos representam uma metodologia superior a diferenças finitas, não é surpreendente que esforços tenham sido feitos no sentido de explorar elementos finitos no tempo”*, fazendo menção às referências (Oden, 1969), (Fried, 1969), (Argyris e Scharpf, 1969), (Wilson e Nickell, 1966), (Zienkiewicz, 1977b), (Zienkiewicz, 1977c) e (Zienkiewicz, 1977a). Em (Franca et al., 2004), pg. 116, também menciona-se um diálogo entre Strang e Fix em torno da seguinte questão: *“É natural perguntar por que elementos finitos não são usados também no tempo”*. Na sequência tem-se a seguinte resposta; *“Isto certamente tem sido tentado, porém sem muito sucesso”*. Uma extensa lista de referências para uma resenha histórica sobre elementos finitos espaço-tempo pode ser encontrada em (Franca et al., 2004), pgs. 116-123.

O trabalho pioneiro na aplicação do método de elementos finitos para a variável temporal deve-se a Jamet (Jamet, 1978). Nessa referência, Jamet permite

que a formulação espaço-tempo contemple o uso de funções descontínuas com respeito à variável temporal, resultando no esquema numérico hoje conhecido como método de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT). Desde então, vários pesquisadores têm estudado esse método, dentre os quais destacamos os trabalhos de (Eriksson et al., 1985), (Eriksson e Johnson, 1987), (Eriksson e Johnson, 1991), (Eriksson e Johnson, 1995a), (Eriksson e Johnson, 1995b) e (Eriksson e Johnson, 1995c). Makridakis e Babuska (1997) estudaram o efeito do mecanismo de adaptatividade sobre a estabilidade do método. Schwab e Schotzau (2000) têm estudado como resolver o sistema de equações decorrente da aplicação do MGDT, mostrando ser possível desacoplar o sistema em várias equações escalares do mesmo tipo. Em seguida, estratégias de p-refinamento, hp-refinamento e respectivas análises de erro são desenvolvidas.

Assim, apresentamos neste capítulo uma revisão das formulações clássicas do método de elementos finitos aplicado à problemas parabólicos. Discutimos as duas abordagens frisadas acima, tecemos considerações sobre formulações estabilizadas clássicas e identificamos as limitações dessas formulações na resolução de problemas singularmente perturbados. Para fazer isso, estruturamos o capítulo em causa da seguinte maneira:

Na seção 2.2 introduzimos algumas definições e notações necessárias aos desenvolvimentos subsequentes. Formulamos nosso problema modelo na seção 2.3. Na seção 2.4 apresentamos tanto a abordagem clássica do método de elementos finitos de Galerkin com aproximação temporal via diferenças finitas quanto a contrapartida espaço-tempo. A discussão dos métodos estabilizados é feita na seção 2.5. Reservamos a seção 2.6 à apresentação de resultados de experimentos numéricos. A seção 2.7 dedicada às conclusões finaliza este capítulo.

## **2.2 Definições e Notações**

Neste trabalho, seguimos a notação padrão de espaços de funções, veja por exemplo (Quarteroni e Valli, 1997) ou (Lions e Magenes, 1992) para mais

detalhes. Assim, consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio espacial aberto e limitado, com contorno poligonal  $\partial\Omega$ . Para qualquer subconjunto aberto  $\omega$  de  $\Omega$  com contorno Lipschitz  $\partial\omega$ , denotamos por  $H^m(\omega)$ ,  $m = 0, 1, 2$ , o espaço real de Hilbert de ordem  $m$ , equipado com a norma e produto interno usuais denotados por  $\|\cdot\|_{H^m(\omega)} \equiv \|\cdot\|_{m,\omega}$  e  $(\cdot, \cdot)_{m,\omega}$  respectivamente. Em particular, para  $m = 0$  tomamos a notação  $H^0(\omega) = L^2(\omega)$ . Designamos por  $|\cdot|_{H^m(\omega)} \equiv |\cdot|_{m,\omega}$  a semi-norma de  $H^m(\omega)$  e definimos o espaço  $H_0^1(\omega)$  por

$$H_0^1(\omega) := \{v \in H^1(\omega) ; v|_{\partial\omega} = 0\} . \quad (2.1)$$

Adicionalmente consideramos o espaço

$$L^\infty(\omega) := \{v : \omega \mapsto \mathbb{R} ; \text{ess sup}\{|v(x)| ; x \in \omega\} < \infty\} , \quad (2.2)$$

munido com a norma

$$\|v\|_{L^\infty(\omega)} = \|v\|_{\infty,\omega} := \text{ess sup}\{|v(x)| ; x \in \omega\} . \quad (2.3)$$

Seja  $X$  um espaço de Hilbert equipado com a norma  $\|\cdot\|_X$  e semi-norma  $|\cdot|_X$ . Dados dois números reais  $a$  e  $b$  com  $a < b$ , denotamos por  $L^2(a, b; X)$  o espaço das funções  $w$  mensuráveis, definidas sobre o intervalo  $(a, b)$  com valores em  $X$  tal que a função  $t \rightarrow \|w(\cdot, t)\|_X$  está em  $L^2((a, b))$ . Munimos o espaço  $L^2(a, b; X)$  com a norma

$$\|v\|_{L^2(a,b;X)}^2 = \left[ \int_a^b \|v(t)\|_X^2 dt \right]^{1/2} . \quad (2.4)$$

Além disso, definimos os espaços

$$C([a, b]; X) := \left\{ v : [a, b] \rightarrow X, \text{ contínuas, } \|v\|_{C([a,b];X)} = \max_{t \in [a,b]} \|v(t)\|_X < \infty \right\} , \quad (2.5)$$



e

$$L^\infty(a, b; X) := \left\{ v : (a, b) \rightarrow X ; v \text{ é mensurável e } \|v\|_{L^\infty(a, b; X)} = \max_{t \in [a, b]} \|v(t)\|_X < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

Também consideramos o espaço de Hilbert

$$W^2(a, b; X, W) := \left\{ w \in L^2(a, b; X) : \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(a, b; W) \right\}, \quad (2.7)$$

no qual  $X$  e  $W$  são dois espaços de Hilbert tal que  $X \subset W$  é denso em  $W$  com injeção contínua.

Dado um intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$  e um subconjunto  $\omega$  de  $\Omega$ , usamos neste trabalho a abreviatura

$$L^2(D) \equiv L^2(\omega \times (a, b)) := L^2((a, b); L^2(\omega)), \quad (2.8)$$

e porconsequente,  $(\cdot, \cdot)_D$  denota o produto interno em  $L^2(D)$ .

Neste trabalho, denotamos por  $T > 0$  um tempo arbitrário, porém fixo. Com isso, designamos por  $J := (0, T]$ , o intervalo de tempo, por  $Q := \Omega \times J$ , o cilindro espaço-tempo, e definimos  $\Sigma := \partial\Omega \times J$  como sendo a fronteira lateral do cilindro  $Q$ .

### 2.3 Definição do Problema Modelo

Nosso modelo parabólico de interesse é representado pelo seguinte problema de valor inicial e de contorno: Dados  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar a função escalar  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t u = f & \text{em } Q, \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

no qual  $\mathcal{L}_t$  é o operador parabólico linear de reação-difusão dado por

$$\mathcal{L}_t w := \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w, \quad \text{com} \quad \mathcal{L}w := -\varepsilon \Delta w + \sigma w, \quad (2.10)$$

onde assumimos que  $\varepsilon$  e  $\sigma$  são constantes positivas dadas.

O problema variacional contínuo associado à (2.9) consiste em encontrar a função  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ , para cada  $t \in J$ , tal que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_\Omega + a(u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

no qual definimos a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)_\omega$  por

$$a(w, v)_\omega := \varepsilon(\nabla w, \nabla v)_\omega + \sigma(w, v)_\omega. \quad (2.12)$$

Sob determinadas condições de regularidade dos dados, nomeadamente  $f$  e  $u_0$ , é possível mostrar que existe uma única solução fraca para o problema (2.11), veja por exemplo (Evans, 1992), (Lions e Magenes, 1992) e (Lions e Dautry, 1992). Aqui, assumimos  $f \in L^2(Q)$  e  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Supondo por simplicidade,  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$ , procuramos  $u$  em  $W^2(J; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ . A última condição implica em  $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ , veja (Evans, 1992) para detalhes.

O problema fraco em (2.11) encontra-se numa forma conveniente ao desenvolvimento de formulações variacionais discretas usando aproximações por diferenças finitas no tempo. No entanto, para formulações espaço-tempo a seguinte formulação equivalente é mais adequada.

Encontrar a única  $u \in W^2(J; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$  solução do problema fraco

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_Q + a(u, v)_Q = (f, v)_Q, & \forall v \in W^2(J; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)), \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

que pode ser reescrito da seguinte maneira: para toda função  $v$  pertencente ao

espaço  $W^2(J; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ , encontrar a função  $u \in W^2(J; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$  tal que

$$(u(T), v(T))_\Omega - \left( u, \frac{\partial v}{\partial t} \right)_Q + a(u, v)_Q = (u_0, v(0))_\Omega + (f, v)_Q, \quad (2.14)$$

após integração por partes com respeito a variável temporal do primeiro termo no lado esquerdo de (2.13).

Na seção seguinte apresentamos as duas abordagens clássicas de aproximação dos problemas variacionais (2.11) e (2.13) através do método de elementos finitos para a variável espacial, e diferenças finitas ou elementos finitos para a variável temporal.

**Observação 2.1** Notemos que em decorrência de (2.8), preservamos a definição (2.12) com  $D$  em lugar de  $\omega$ . □

## 2.4 Formulação Variacional Discreta

### 2.4.1 Discretização Espacial

#### 2.4.1.1 Partições de Elementos Finitos

Seja  $\{\mathcal{T}_h\} (h > 0)$  uma partição regular do domínio  $\Omega$  em elementos  $K$  (triângulos ou quadriláteros), de contorno  $\partial K$  tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad (2.15)$$

onde a interseção de quaisquer dois elementos é um vértice, ou uma aresta, ou vazia.

Denotamos por  $h_K$  o comprimento característico de  $K \in \mathcal{T}_h$ , tomamos  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$  e introduzimos o conjunto  $\mathcal{V}_Z$  de todas as arestas  $Z$  pertencentes a  $\mathcal{T}_h$ .

### 2.4.1.2 Espaços de Elementos Finitos

Sejam os espaços polinomiais lineares e bilineares por partes dados respectivamente por

$$\mathcal{P}_1(K) := \left\{ w = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} c_{ij} x_1^i x_2^j : c_{ij} \in \mathbb{R}, i + j \leq 1, (x_1, x_2) \in K \right\}, \quad (2.16)$$

e

$$\mathcal{Q}_1(K) := \left\{ w = \sum_{0 \leq i, j \leq 1} c_{ij} x_1^i x_2^j : c_{ij} \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in K \right\}. \quad (2.17)$$

Com isso, definimos o espaço de elementos finitos padrão

$$V_1 := \{ w \in C^0(\bar{\Omega}) : w|_K \in S_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \quad (2.18)$$

onde  $S_1(K)$  representa  $\mathcal{P}_1(K)$  ou  $\mathcal{Q}_1(K)$ .

Adicionalmente definimos

$$V_L := V_1 \cap H_0^1(\Omega). \quad (2.19)$$

### 2.4.2 Discretização Temporal

Seja  $\mathcal{T}_{\Delta t} = \{J_n := (t_n, t_{n+1}) : 0 \leq n \leq N - 1\}$ ,  $\Delta t > 0$ , uma partição uniforme de  $(0, T]$  em  $N$  subintervalos  $J_n$  de comprimento  $\Delta t = T/N$ , com  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Denotamos por  $\mathcal{N}_{\Delta t} = \{0, 1, \dots, N - 1\}$  o conjunto de índices associado à partição  $\mathcal{T}_{\Delta t}$ .

Como veremos mais adiante, subseção 2.4.4, para cada  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ , a abordagem de diferenças finitas considera os valores discretos  $u_L^{n+1} \in V_L$  para aproximação de  $u(t_{n+1})$ , que representa a solução exata de (2.11) avaliada nos pontos nodais  $t_{n+1}$  da partição  $\mathcal{T}_{\Delta t}$ .

### 2.4.3 Discretização Espaço-Tempo

#### 2.4.3.1 Partições de Elementos Finitos Espaço-Tempo

Consideremos o cilindro espaço-tempo,  $Q$ , de fronteira lateral,  $\Sigma$ . Visando definir uma triangulação  $\mathcal{T}_{h\Delta t}$ , resultante da associação de  $\mathcal{T}_h$  com cada elemento de  $\mathcal{T}_{\Delta t}$ , introduzimos as notações

$$Q = \bigcup_{n=0}^{N-1} Q_n, \quad Q_n := \Omega \times J_n, \quad (2.20)$$

e

$$\Sigma = \bigcup_{n=0}^{N-1} \Sigma_n, \quad \Sigma_n := \partial\Omega \times J_n. \quad (2.21)$$

Assim, temos que

$$\mathcal{T}_{h\Delta t} := \{Q_n^e := K \times J_n : 0 \leq n \leq N-1, K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.22)$$

define uma triangulação do cilindro espaço-tempo,  $Q$ , em prismas induzidos pelas partições  $\mathcal{T}_{\Delta t}$  e  $\mathcal{T}_h$ . Em particular, para cada  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ ,  $\mathcal{T}_h^n$  denota a triangulação da fatia “slab” espaço-tempo,  $Q_n$ , ou seja,  $\mathcal{T}_h^n = \mathcal{T}_{h\Delta t}|_{Q_n}$ .

Finalizamos esta subseção com as notações

$$Q_n := \bigcup_{e=1}^{n_K} Q_n^e, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.23)$$

$$\Sigma_n^e = \partial Q_n^e := \partial K \times J_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.24)$$

e apresentação da Figura 2.1 ilustrando uma triangulação do domínio espaço-tempo,  $Q$ . Aqui,  $n_K$  representa o total de elementos  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

#### 2.4.3.2 Espaços de Aproximação Espaço-Tempo

Associamos a cada elemento  $J_n$  da partição  $\mathcal{T}_{\Delta t}$  uma aproximação polinomial no tempo de ordem  $q$ , com  $q = 0, 1$ . Com isso, introduzimos o espaço de

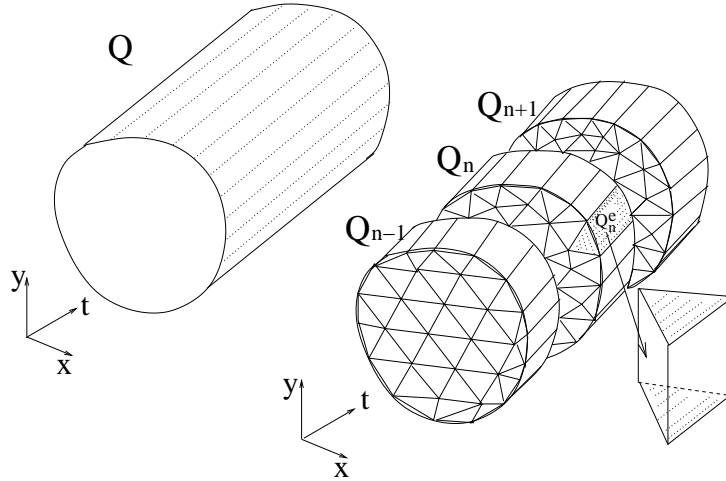


Figura 2.1: Discretização do domínio espaço-tempo definido por  $Q := \Omega \times (0, T]$ .

elementos finitos espaço-tempo dado por

$$S_{h\Delta t}^q = \{w \in L^2(J; V_L); w|_{J_n} \in \mathbb{P}^q(J_n; V_L), 0 \leq n \leq N-1\}, \quad (2.25)$$

onde  $\mathbb{P}^q(J_n; V_L)$  denota o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $q$  definidos sobre  $J_n$  com valores em  $V_L$ .

É importante ressaltar que as funções pertencentes ao espaço  $S_{h\Delta t}^q$  não são necessariamente contínuas nos pontos nodais  $t_n$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ . Para lidar com essas possíveis descontinuidades na variável temporal, introduzimos as definições abaixo.

Seja  $w : J \rightarrow V_L$  uma função pertencente ao espaço  $S_{h\Delta t}^q$ . Para cada  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ , denotamos por  $w_n$ , a restrição de  $w$  à fatia espaço-tempo  $Q_n$ , ou seja,  $w_n$  designa uma função pertencente ao espaço  $\mathbb{P}^q(J_n; V_L)$ . Com isso, definimos limites laterais à esquerda e à direita por

$$w_{n-1}(t_n) := \lim_{s \rightarrow 0^+} w(t_n - s), \quad n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \quad (2.26)$$

e

$$w_n(t_n) := \lim_{s \rightarrow 0^+} w(t_n + s), \quad n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \quad (2.27)$$

respectivamente. Definimos adicionalmente o operador salto temporal  $[[w(t_n)]]$

como

$$[[w(t_n)]] := w_n(t_n) - w_{n-1}(t_n), \quad n \in \mathcal{N}_{\Delta t}. \quad (2.28)$$

A figura 2.2 mostra de forma esquemática as definições ora introduzidas.

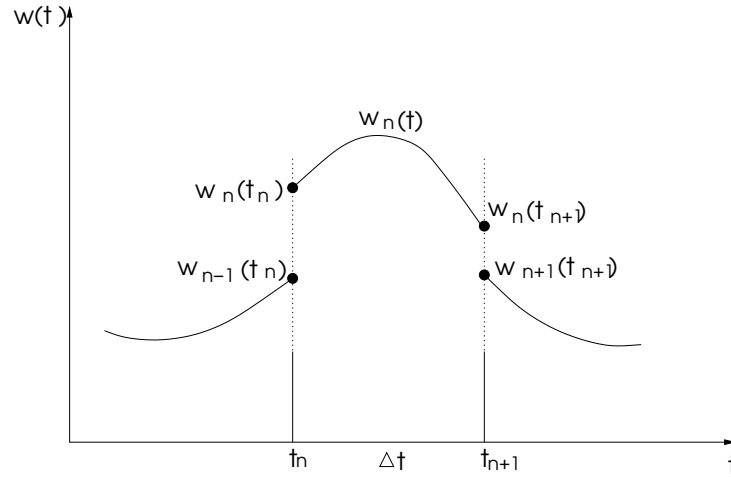


Figura 2.2: Esquema simbólico da função  $w$  definida em  $J$ , sua restrição a  $J_n$ , seus limites laterais e salto nos pontos nodais  $t_n$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ .

Por simplicidade, designamos o espaço  $\mathbb{P}^q(J_n; V_L)$  por  $S_n^q$ , fixamos  $S_n^c$  para  $q = 0$  e  $S_n^L$  para  $q = 1$ .

#### 2.4.4 Abordagem de Diferenças Finitas

Uma prática usual em formulações de elementos finitos para problemas parabólicos, veja por exemplo (Quarteroni e Valli, 1997), (Thoméé, 1997), (Thoméé e Larsson, 2003) ou (Johnson, 1987), consiste em discretizar primeiramente as variáveis espaciais, o que conduz a um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com respeito ao tempo, procedimento denominado de formulação semi-discreta. Então, para completar a discretização do problema parabólico em estudo, resta integrar o sistema diferencial de primeira ordem com respeito ao tempo visando obter a evolução temporal da solução a partir do dado inicial  $u_0(x)$ .

Um extenso aparato de métodos numéricos para equações diferenciais

ordinárias está disponível na literatura de análise numérica. Nessa, tal procedimento é denominado de método das linhas. Aqui, apresentamos o método mais difundido conhecido como  $\theta$ -esquema.

Logo, tomando o espaço  $V_L$  em (2.19) para aproximação por elementos finitos da variável espacial, de (2.11) somos conduzidos ao problema aproximado semi-discretizado (contínuo no tempo) cuja formulação lê-se: Dado  $f \in L^2(Q)$  e  $u_{0,h} \in V_L$  uma aproximação conveniente para a condição inicial  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , para cada  $t \in J$ , encontrar  $u_L(t) \in V_L$  tal que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_L(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega + a(u_L(t), v_L)_\Omega = (f(t), v_L)_\Omega, & \forall v_L \in V_L, \\ u_L(0) = u_{0,h}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Agora, visando obter uma discretização completa de (2.11), aplicamos o  $\theta$ -esquema à aproximação semi-discretizada (2.29), o que conduz ao método de Galerkin totalmente discretizado que pode ser formulado da seguinte maneira: Para cada  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , encontrar  $u_L^{n+1} \in V_L$  tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u_L^{n+1} - u_L^n, v_L)_\Omega + a(\theta u_L^{n+1} + (1-\theta)u_L^n, v_L)_\Omega = \\ \quad (\theta f(t_{n+1}) + (1-\theta)f(t_n), v_L)_\Omega, & \forall v_L \in V_L, \\ u_L^0 = u_{0,h}, \end{cases} \quad (2.30)$$

onde assumimos  $f$  definido em todo intervalo  $[0, T]$  e  $\theta \in [0, 1]$ . Aqui e no restante do texto,  $u_L^n$  denota a aproximação de  $u(x, t_n)$ .

Visando transformar (2.30) num problema estacionário equivalente a ser resolvido de forma iterativa para cada passo de tempo, definimos a forma bilinear modificada

$$\bar{a}(w, v)_\Omega := \tilde{\varepsilon}(\nabla w, \nabla v)_\Omega + \tilde{\sigma}(w, v)_\Omega \quad (2.31)$$

onde

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \Delta t \theta, \quad \tilde{\sigma} = 1 + \sigma \Delta t \theta. \quad (2.32)$$



Com isso, o problema (2.30) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}(u_L^{n+1}, v_L)_\Omega = (u_L^n, v_L)_\Omega + (\theta - 1)\Delta t a(u_L^n, v_L)_\Omega \\ \quad + \Delta t(\theta f(t_{n+1}) + (1 - \theta)f(t_n), v_L)_\Omega, \quad \forall v_L \in V_L, \\ u_L^0 = u_{0,h}. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

**Observação 2.2**

- Notemos que a discussão sobre que discretização deve ser feita primeiramente, i.e, se a temporal ou a espacial, é irrelevante para operadores lineares com coeficientes constantes e uma formulação de Galerkin clássica.
- Diferentes métodos podem ser obtidos de (2.30) dependendo da escolha do parâmetro  $\theta$ . As escolhas  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1/2$  e  $\theta = 1$  resultam nos métodos conhecidos na literatura por método de Euler explícito, método de Crank-Nicolson e método de Euler implícito respectivamente.
- Quarteroni e Valli (1997) mostram que a formulação de Galerkin em (2.30) é incondicionalmente estável com respeito a norma  $L^2(\Omega)$  para  $1/2 \leq \theta \leq 1$ . Caso contrário, i.e, para  $0 \leq \theta < 1/2$ , (2.30) é condicionalmente estável e uma condição de estabilidade é fornecida.
- Estudos de convergência e de estimativas de erro a priori para (2.30) podem ser encontrados em (Quarteroni e Valli, 1997), (Thomée, 1997) e (Thomée e Larsson, 2003), que assumindo adicionalmente certa regularidade para  $u_0$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , apresentam as estimativas

$$\|u_L^n - u(t_n)\|_\Omega = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t), \quad \text{para } \theta \neq 1/2, \quad n > 1, \quad (2.34)$$

e

$$\|u_L^n - u(t_n)\|_\Omega = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t^2), \quad \text{para } \theta = 1/2, \quad n > 1. \quad (2.35)$$

□

### 2.4.5 Abordagem Espaço-Tempo

Na subseção anterior, a aproximação temporal do nosso problema modelo é feita usando esquemas de diferenças finitas, enquanto elementos finitos são empregados apenas para a aproximação espacial. Contudo, interpolações de elementos finitos também podem ser usados no domínio do tempo, dando lugar à classe de métodos de aproximação denominada formulação espaço-tempo.

Neste trabalho, estamos interessados na formulação espaço-tempo usando aproximações descontínuas no tempo, cuja contrapartida clássica é conhecida como método de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT). No capítulo 1 levantamos diversas vantagens do MGDT sobre a abordagem de diferenças finitas. Como veremos no capítulo 4, exploramos a vantagem do MGDT permitir o tratamento de problemas transientes de modo similar aos problemas estacionários correlatos. Com isso, esperamos em tese, que métodos bem sucedidos desenvolvidos para problemas estacionários possam repetir tal feito nos casos transientes usando uma abordagem espaço-tempo.

Iniciamos a descrição do MGDT ressaltando sua não conformidade temporal, i.e, as funções em  $S_{h\Delta t}^q$  não são necessariamente contínuas nos pontos nodais  $t_n$ ,  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ . Isso permite escrever o MGDT conforme veremos mais adiante, equação (2.40), como um esquema recursivo de integração no tempo.

A seguir, definimos a forma bilinear  $B_G(\cdot, \cdot)$  e a forma linear  $F_G(\cdot)$  por

$$B_G(w, v) := \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \left( \frac{\partial w_n}{\partial t}, v_n \right)_{Q_n} + a(w_n, v_n)_{Q_n} \right\} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ ([w(t_n)]), v_n(t_n^+) \right\} + (w_0(t_0^+), v_0(t_0^+))_{\Omega}, \quad (2.36)$$

$$F_G(v) := \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (f, v_n)_{Q_n} \right\} + (u_0, v_0(t_0^+))_{\Omega}. \quad (2.37)$$

Então, é imediato verificar através de integração por partes que  $u \in$

$W^2(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ , solução fraca de (2.14) satisfaz

$$B_G(u, v) = F_G(v) \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)). \quad (2.38)$$

Diante das definições previamente introduzidas, o MGDT pode ser formulado da seguinte maneira: Encontrar  $u_{h\Delta t}^q \in S_{h\Delta t}^q$ ,  $q = 0, 1$ , tal que

$$B_G(u_{h\Delta t}^q, v_{h\Delta t}^q) = F_G(v_{h\Delta t}^q) \quad \forall v_{h\Delta t}^q \in S_{h\Delta t}^q. \quad (2.39)$$

Devido a descontinuidade do espaço das funções tentativas e das funções testes,  $S_{h\Delta t}^q$ , o MGDT em (2.39) pode ser interpretado como um esquema implícito de integração no tempo. Isto significa que a solução  $u_{h\Delta t}^q$ ,  $q = 0, 1$ , pode ser encontrada solucionando sucessivamente para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , o seguintes problemas: Encontrar  $u_n^q \in \mathbb{P}^q(J_n; V_L) \equiv S_n^q$ ,  $q = 0, 1$  tal que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_n^q}{\partial t}, v_n^q \right)_{Q_n} + a(u_n^q, v_n^q)_{Q_n} + (u_n^q(t_n), v_n^q(t_n))_{\Omega} &= (f, v_n^q)_{Q_n} + (u_{n-1}^q(t_n), v_n^q(t_n))_{\Omega}, \\ \forall v_n^q &\in S_n^q, \end{aligned} \quad (2.40)$$

nos quais  $u_{n-1}^q(t_n)$  corresponde a condição inicial no passo de tempo  $J_n$ . Aqui e para o restante do texto, fixamos  $u_{-1}^q(t_0) = u_0$ .

**Observação 2.3** • É importante frisar que em (2.40) a condição inicial é apenas satisfeita no sentido fraco já que em geral  $[[u^q(t_n)]] \neq 0$ .

- Para análise do MGDT em (2.39) fazemos referência a (Eriksson et al., 1985), (Eriksson e Johnson, 1991), (Estep e Larsson, 1993), (Eriksson e Johnson, 1995a) e (Thomé, 1997), onde resultados relativos a existência e unicidade do MGDT, sua consistência variacional e estimativas de erro a priori são fornecidos.
- Para  $q = 0, 1$ , (Eriksson e Johnson, 1991) e (Eriksson e Johnson, 1995a),

provam uma estimativa para o erro  $u - u_{h\Delta t}^q$  em  $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$  que é da ordem de  $q + 1$  globalmente no tempo. Provam também um resultado de superconvergência da ordem de  $2q + 1$  nos níveis de tempo discretos  $t_n$ , na norma  $L^2(\Omega)$ .

- Para  $q = 0$ , o MGDT em (2.40) pode ser encarado como uma variante do método de Euler implícito, sendo equivalentes para  $f$  independente do tempo. Para  $q = 1$  é ainda possível estabelecer uma equivalência entre o MGDT e determinados esquemas de Runge-Kutta, veja (LeSaint e Raviart, 1974).
- Na definição do espaço discreto  $S_{h\Delta t}^q$ , assumimos que a discretização espacial está fixa para todos os subintervalos de tempo  $J_n$ . Contudo, em muitos problemas de aplicação o uso de uma malha diferente para cada subintervalo de tempo  $J_n$  poderá conduzir à discretizações adaptativas mais eficientes. No MGDT, tal consideração pode ser incluída de modo natural.

□

## 2.5 Métodos Estabilizados

Como sabemos, o método de Galerkin clássico não é adequado para tratar problemas singularmente perturbados. Como alternativa clássica, temos os métodos estabilizados que são particularmente atraentes porque são construídos de forma a aumentar a estabilidade das formulações clássicas de Galerkin sem prejuízo das demais propriedades. Outro atrativo das estabilizações clássicas é a preservação da estrutura dos códigos computacionais já desenvolvidos para as formulações clássicas de Galerkin, ou seja, são de fácil implementação computacional.

Apresentamos sucessivamente nas subseções seguintes formulações estabilizadas clássicas com aproximação temporal via diferenças finitas representadas pelo  $\theta$ -esquema e por elementos finitos descontínuos.

### 2.5.1 Esquemas de Diferenças Finitas

A formulação estabilizada clássica semi-discretizada associada ao problema (2.9) pode ser colocada da seguinte maneira: Dado  $f \in L^2(Q)$  e  $u_{0,h} \in V_L$  uma aproximação conveniente para a condição inicial  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , para cada  $t \in J$ , encontrar  $u_L(t) \in V_L$  tal que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_L(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega + a(u_L(t), v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau \mathcal{R}(u_L(t)), \mathcal{P}(v_L))_K = (f(t), v_L)_\Omega, \\ \forall v_L \in V_L, \\ u_L(0) = u_{0,h}, \end{cases} \quad (2.41)$$

onde o operador perturbação,  $\mathcal{P}(\cdot)$ , caracteriza o método de estabilização. O termo estabilizante envolve o operador resíduo,  $\mathcal{R}(\cdot)$ , da equação governante definido por

$$\mathcal{R}(w) := \mathcal{L}_t w - f, \quad (2.42)$$

gerando portanto uma formulação consistente. Temos ainda a presença do parâmetro de estabilização,  $\tau$ , que será objeto de discussão no final da subseção seguinte.

Novamente, para completar a discretização de (2.41) aplicamos o  $\theta$ -esquema, o que conduz ao problema totalmente discretizado cuja formulação lê-se: Para cada  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , encontrar  $u_L^{n+1} \in V_L$  tal que

$$\begin{aligned} & (u_L^{n+1}, v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau u_L^{n+1}, \mathcal{P}(v_L))_K + \theta \Delta t \left[ a(u_L^{n+1}, v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau \mathcal{L} u_L^{n+1}, \mathcal{P}(v_L))_K \right] \\ &= (u_L^n, v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau u_L^n, \mathcal{P}(v_L))_K + (\theta - 1) \Delta t \left[ a(u_L^n, v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau \mathcal{L} u_L^n, \mathcal{P}(v_L))_K \right] \\ & \quad + \theta \Delta t \left[ (f(t_{n+1}), v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau f(t_{n+1}), \mathcal{P}(v_L))_K \right] \\ & \quad + (1 - \theta) \Delta t \left[ (f(t_n), v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau f(t_n), \mathcal{P}(v_L))_K \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

com  $u_L^0 = u_{h0}$ .

Em função da caracterização do operador perturbação,  $\mathcal{P}(\cdot)$ , obtemos classes distintas de métodos estabilizados. Por exemplo, é usual tomar

$$\mathcal{P}(w) = \mathcal{L}w, \quad \text{Galerkin/Mínimos-quadrados (GLS)}, \quad (2.44)$$

ou

$$\mathcal{P}(w) = \mathcal{L}^*w, \quad \text{Não usual (USFEM)}, \quad (2.45)$$

com  $\mathcal{L}^*$  denotando o adjunto do operador  $\mathcal{L}$ .

Em particular, podemos escrever (2.43) de maneira compacta como

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (1 + \rho\tau\sigma)[1 + \theta\sigma\Delta t](u_L^{n+1}, v_L)_K + \theta\varepsilon\Delta t(\nabla u_L^{n+1}, \nabla v_L)_K \right\} = \\ & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (1 + \rho\tau\sigma)[1 + (\theta - 1)\sigma\Delta t](u_L^n, v_L)_K + (\theta - 1)\varepsilon\Delta t(\nabla u_L^n, \nabla v_L)_K \right\} \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \theta\Delta t(1 + \rho\tau\sigma)(f(t_{n+1}), v_L)_K \right\} \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ (1 - \theta)\Delta t(1 + \rho\tau\sigma)(f(t_n), v_L)_K \right\} \quad (2.46) \end{aligned}$$

onde  $\rho = 0$  para o método de Galerkin,  $\rho = 1$  para o método GLS e  $\rho = -1$  para o USFEM.

### 2.5.2 Esquemas de Galerkin Descontínuo no Tempo

Métodos estabilizados para problemas de reação-difusão transientes podem ser facilmente estendidos para o domínio espaço-tempo. Aqui, vamos considerar a estabilização clássica espaço-tempo cuja formulação lê-se: Dado  $u_{-1}^q(t_0) := u_0$ , para cada  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , encontrar  $u_n^q : [t_n, t_{n+1}] \rightarrow V_L$  tal que  $u_n^q \in \mathbb{P}^q(J_n; V_L) \equiv S_n^q$ ,  $q = 0, 1$ , e satisfaz

$$B_{ST}(u_n^q, v_n^q)_n = F_{ST}(v_n^q)_n \quad \forall v_n^q \in \mathbb{P}^q(J_n; V_L), \quad (2.47)$$

onde

$$B_{ST}(w_n, v_n)_n = \left( \frac{\partial w_n}{\partial t}, v_n \right)_{Q_n} + a(w_n, v_n)_{Q_n} + \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_{h\Delta t}^n} (\mathcal{L}_t w_n, \tau \mathcal{P}(v_n))_{Q_n^e} + (w_n(t_n), v_n(t_n))_\Omega, \quad (2.48)$$

e

$$F_{ST}(v_n)_n = (f, v_n)_{Q_n} + (w_{n-1}(t_n), v(t_n))_\Omega + \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_{h\Delta t}^n} (f, \tau \mathcal{P}(v_n))_{Q_n^e}. \quad (2.49)$$

Em particular, tomando  $\mathcal{P}(v_n) = \mathcal{L}_t v_n$ , (2.47) resulta no esquema conhecido como método estabilizado espaço-tempo de Galerkin/mínimos quadrados (GLS/ST).

### 2.5.3 Parâmetro de Estabilização

Os métodos estabilizados apresentados nas duas subseções precedentes, foram construídos adicionando à formulação clássica de Galerkin um termo estabilizante que depende do parâmetro de estabilização,  $\tau$ .

Experimentos computacionais mostram que a performance das estabilizações clássicas está intimamente ligada à escolha do parâmetro  $\tau$ , veja por exemplo (Codina, 2000). Entretanto, via de regra, tal parâmetro é construído de forma “ad-hoc”, ou seja, sem justificativa física e/ou matemática, procedimento que certamente constitui a principal crítica às estabilizações clássicas.

Parâmetros de estabilização projetados para problemas estacionários com resultados satisfatórios estão disponíveis na literatura, veja por exemplo (Valentin e Franca, 1995), (Franca e Valentin, 2000), (Franca e do Carmo, 1989) e (Araya et al., 2006). Assim, baseado no fato de podermos resolver problemas transientes solucionando iterativamente problemas estacionários equivalentes em cada iteração conforme (2.33), surgiu a idéia de estender a problemas transientes os parâmetros de estabilização projetados para problemas estacionários correlatos. Tal adequação de parâmetros de estabilização estacionários a problemas transientes so-

lucionados via  $\theta$ -esquema em (2.33), pode ser encontrada em (John e Schmeyer, 2008), a partir da qual reproduzimos os parâmetros de estabilização

$$\tau^{\text{Cod}} = \left[ \frac{4\tilde{\varepsilon}}{h_K^2} + \tilde{\sigma} \right]^{-1} = \frac{h_K^2}{4\theta\Delta t\varepsilon + h_K^2(1 + \theta\sigma\Delta t)}, \quad (2.50)$$

$$\tau^{\text{KLR}} = \min \left\{ \frac{1}{\tilde{\sigma}}, \frac{h_K^2}{\tilde{\varepsilon}} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1 + \theta\sigma\Delta t}, \frac{h_K^2}{\theta\varepsilon\Delta t} \right\}, \quad (2.51)$$

e

$$\tau^{\text{FV}} = \frac{h_K^2}{\tilde{\sigma}h_K^2\xi(Pe_K) + 6\tilde{\varepsilon}} = \frac{h_K^2}{h_K^2(1 + \theta\sigma\Delta t)\xi(Pe_K) + 6\theta\Delta t\varepsilon}, \quad (2.52)$$

com

$$Pe_K = \frac{6\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\sigma}h_K^2} = \frac{6\theta\Delta t\varepsilon}{h_K^2(1 + \theta\sigma\Delta t)}, \quad \xi(z) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq z \leq 1, \\ z & \text{para } z > 1, \end{cases} \quad (2.53)$$

propostos por (Codina, 2000), (Knopp et al., 2002) e (Franca e Valentin, 2000) respectivamente.

**Observação 2.4** • Ainda relativamente à família de  $\theta$ -métodos, (Donea e Huerta, 2003) apresentam os parâmetros de estabilização

$$\tau^{\text{SHJ}} = \left[ \left( \frac{1}{\theta\Delta t} \right)^2 + 9 \left( \frac{4\varepsilon}{h_K^2} \right)^2 + \sigma^2 \right]^{-1/2}, \quad \theta \in (0, 1], \quad (2.54)$$

e

$$\tau^{\text{SF}} = \left[ \frac{1}{\theta\Delta t} + \frac{4\varepsilon}{h_K^2} + \sigma \right]^{-1}, \quad \theta \in (0, 1], \quad (2.55)$$

propostos por (Shakib et al., 1991) e (Soulaimani e Fortin, 1994) respectivamente.

- Para  $\mathcal{P}(v_n) = \mathcal{L}_t v_n$ , (Donea e Huerta, 2003) consideram o uso de (2.54) em (2.47) tomando  $\theta = 1$ . No entanto, outras definições para  $\tau$  em (2.47) são igualmente possíveis.

□



## 2.6 Testes Numéricos

Nossa intenção agora, é estudar numericamente o comportamento dos métodos clássicos quando aplicados a casos singularmente perturbados. Para tanto, consideramos o problema parabólico de reação-difusão

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + u = 1, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.56)$$

O domínio  $\Omega$  onde resolvemos o problema (2.56) é um quadrado unitário,  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ , discretizado através de uma malha uniforme de  $20 \times 20$  elementos bilineares (tendo 441 pontos nodais). Com isso, solucionamos (2.56) usando o  $\theta$ -esquema em (2.46) com  $\theta = 1$  e consideramos os métodos de Galerkin clássico, GLS e USFEM.

Para o método GLS, tomamos  $\tau = \tau^{\text{SHJ}}$  conforme (2.54), enquanto que para o USFEM usamos  $\tau = \tau^{\text{Cod}}$  e  $\tau = \tau^{\text{FV}}$  conforme (2.50) e (2.52) respectivamente. Fixamos os demais dados do problema conforme o caso tratado em cada uma das subseções subsequentes.

**Observação 2.5** Os problemas numéricos encontrados com a discretização temporal por diferenças finitas são extensíveis à abordagem espaço-tempo.

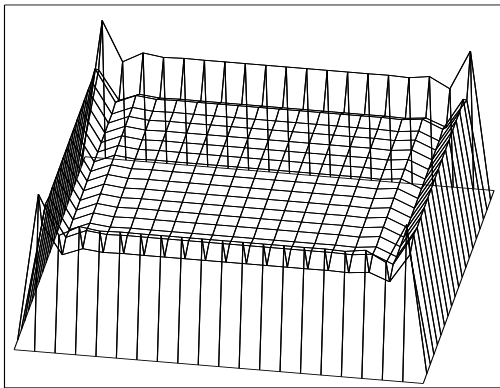
□

### 2.6.1 Caso Assintótico 1

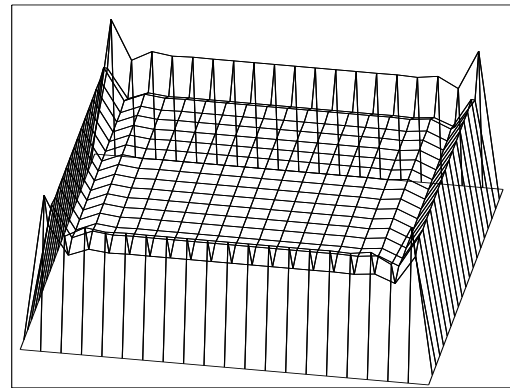
Aqui, fixamos  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ . Os resultados obtidos em diferentes instantes de tempo para os distintos métodos são apresentados nas figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6.

Para auxiliar na comparação dos resultados mostrados nas figuras mencionadas acima, apresentamos nas figuras 2.7 - 2.10, gráficos com os perfis das soluções em cada instante de tempo estudado. Vemos que devido ao carácter singularmente perturbado da equação ( $\varepsilon$  pequeno), a abordagem clássica, de Galerkin

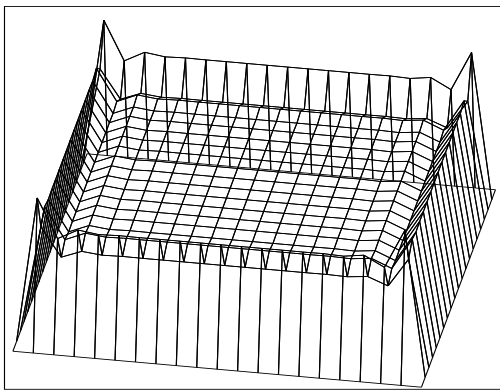
e estabilizada, falha em corrigir as oscilações espúrias.



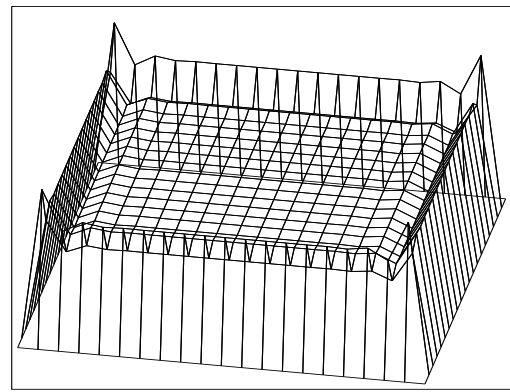
(a) Solução em  $t = 0.1$



(b) Solução em  $t = 0.2$

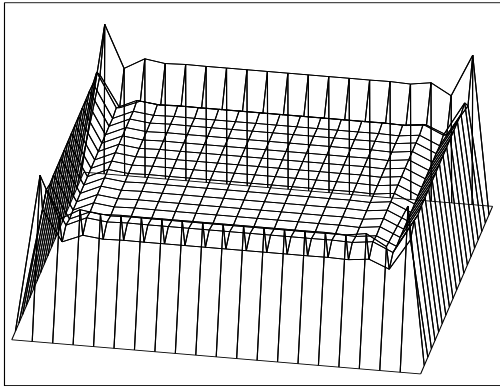


(c) Solução em  $t = 1$

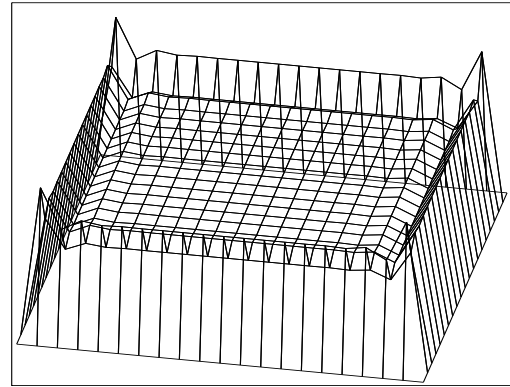


(d) Solução em  $t = 7.5$

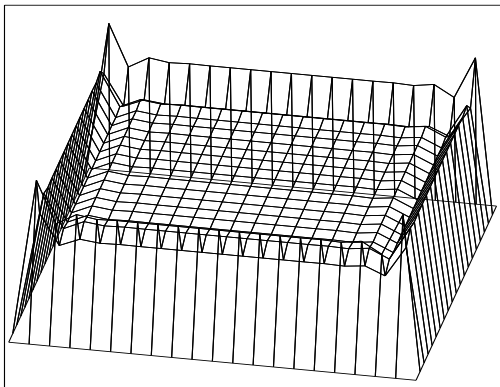
Figura 2.3: Solução via método de Galerkin clássico em distintos instantes de tempo, para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .



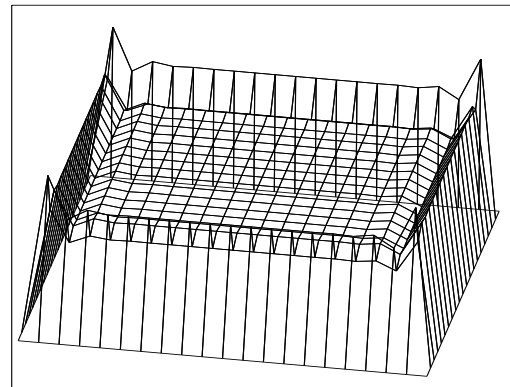
(a) Solução em  $t = 0.1$



(b) Solução em  $t = 0.2$

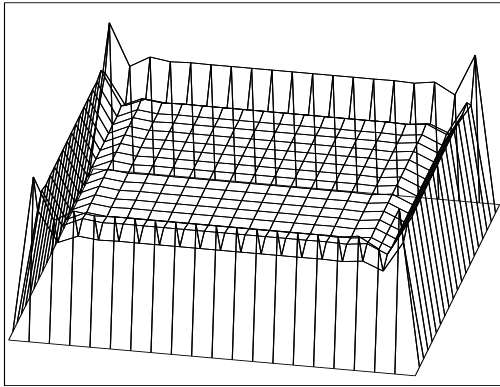


(c) Solução em  $t = 1$

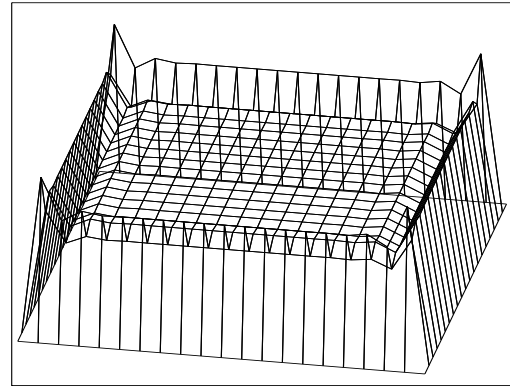


(d) Solução em  $t = 7.5$

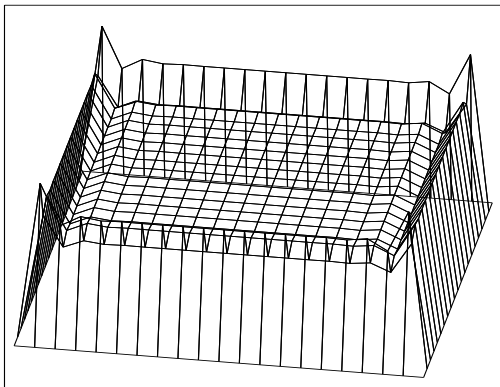
Figura 2.4: Solução via método estabilizado clássico, GLS, em distintos instantes de tempo, para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .



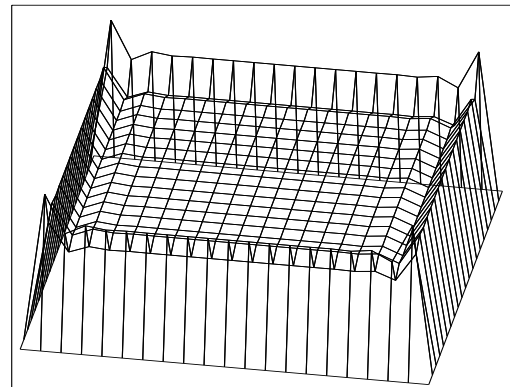
(a) Solução em  $t = 0.1$



(b) Solução em  $t = 0.2$



(c) Solução em  $t = 1$



(d) Solução em  $t = 7.5$

Figura 2.5: Solução via método estabilizado clássico, USFEM, em distintos instantes de tempo com  $\tau = \tau^{\text{FV}}$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

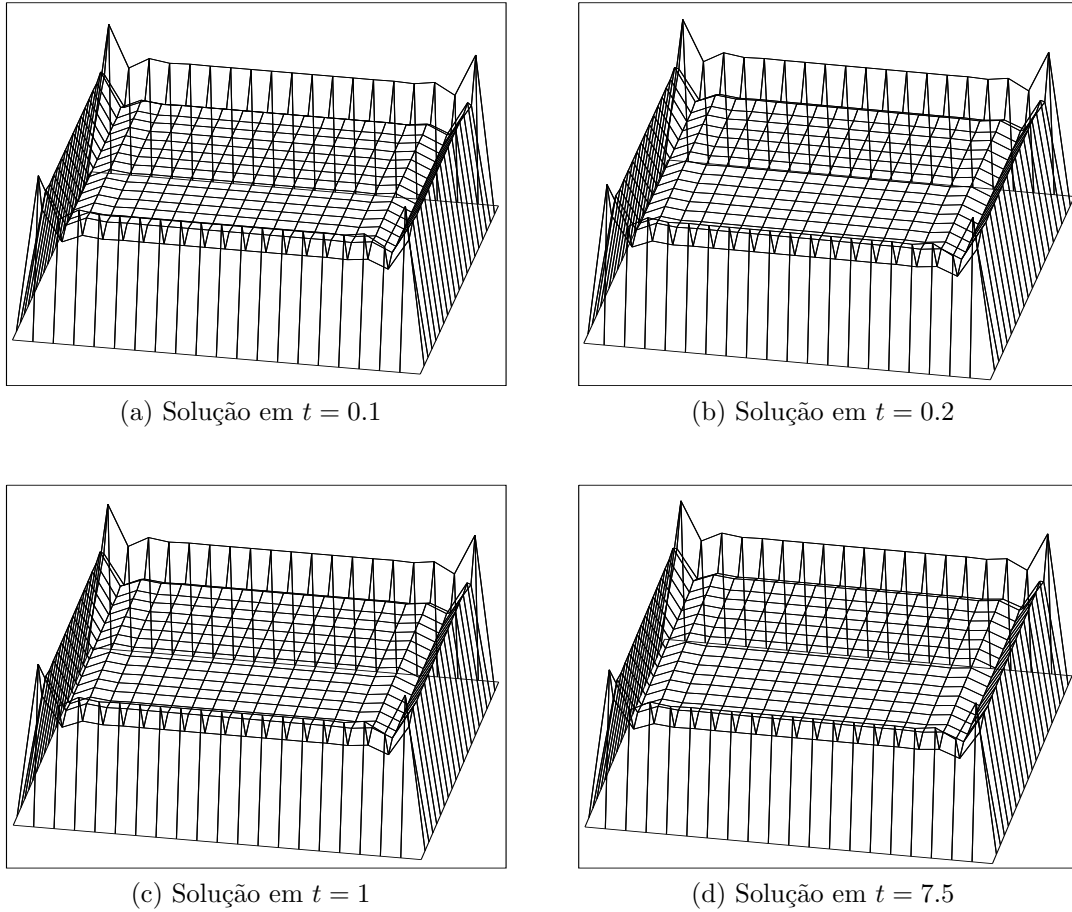


Figura 2.6: Solução via método estabilizado clássico, USFEM, em distintos instantes de tempo com  $\tau = \tau^{\text{Cod}}$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

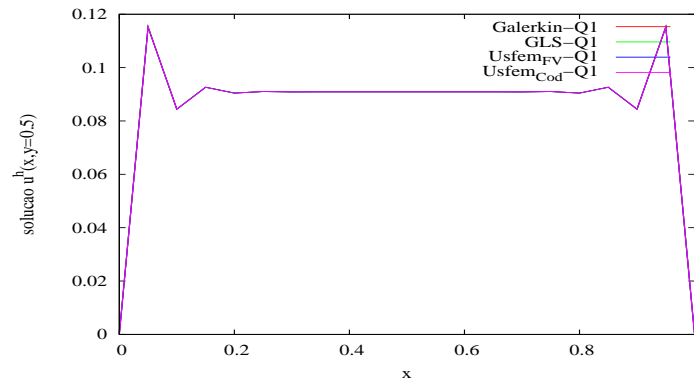


Figura 2.7: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 0.1$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

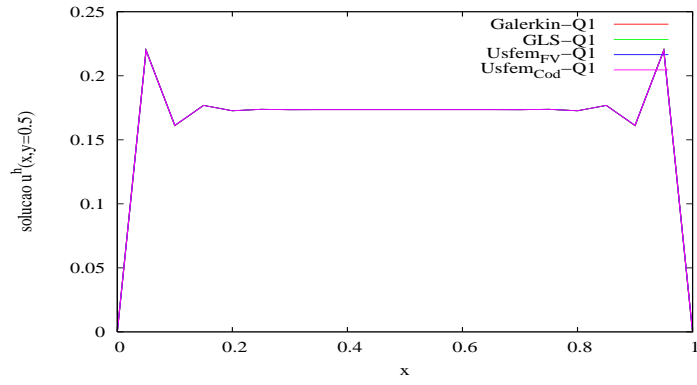


Figura 2.8: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 0.2$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

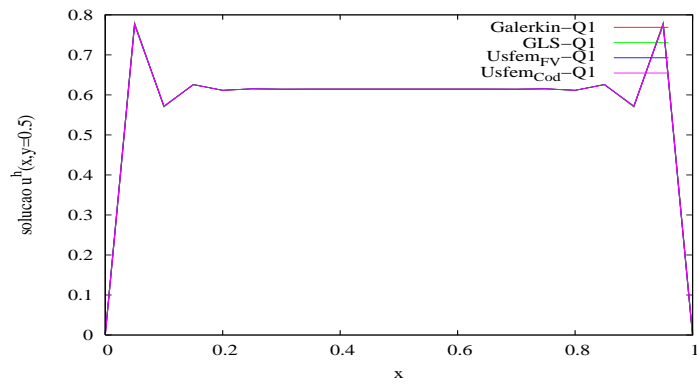


Figura 2.9: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 1$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

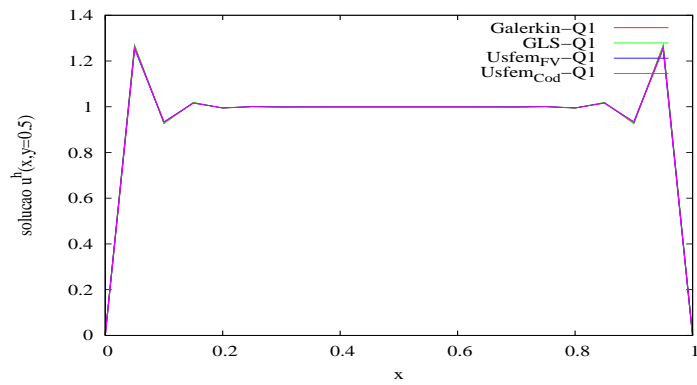


Figura 2.10: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 7.5$ , para  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 10^{-1}$ .

### 2.6.2 Caso Assintótico 2

Agora, fixamos  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ . Os resultados obtidos em diferentes instantes de tempo para os distintos métodos são apresentados nas figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14.

Novamente, visando a comparação dos resultados mostrados nas figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14, apresentamos nas figuras 2.15 - 2.18, gráficos com os perfis das soluções em cada instante de tempo estudado. Neste caso, o problema torna-se singularmente perturbado devido ao uso de  $\Delta t$  pequeno, e novamente tanto o método de Galerkin, quanto os métodos clássicos estabilizados não corrigem adequadamente as oscilações numéricas.

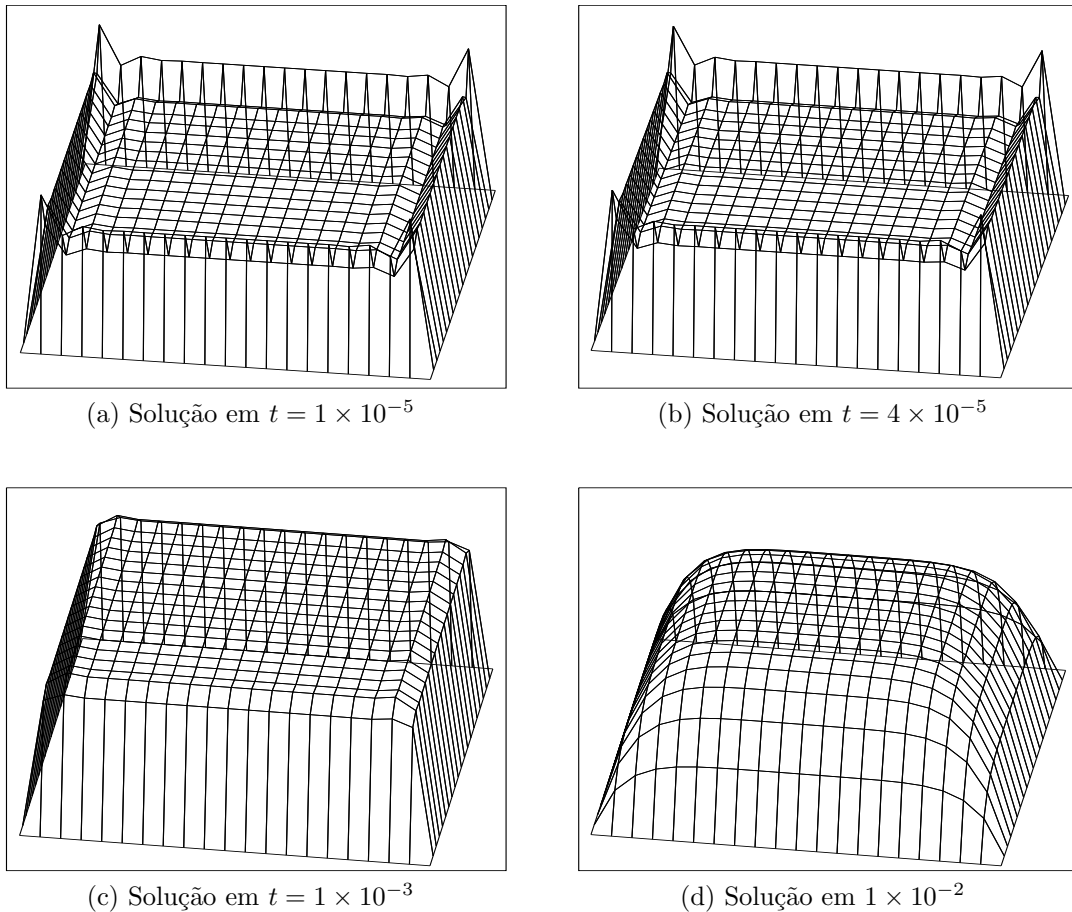
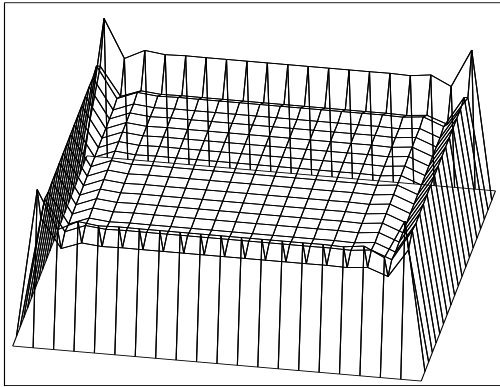
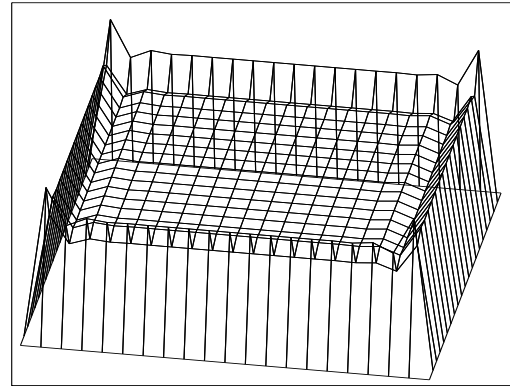


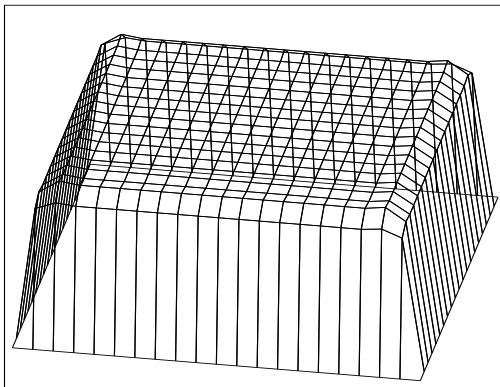
Figura 2.11: Solução via método de Galerkin clássico para distintos instantes de tempo, tomando  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .



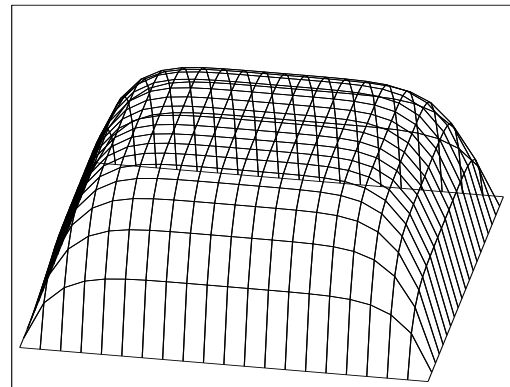
(a) Solução em  $t = 1 \times 10^{-5}$



(b) Solução em  $t = 4 \times 10^{-5}$



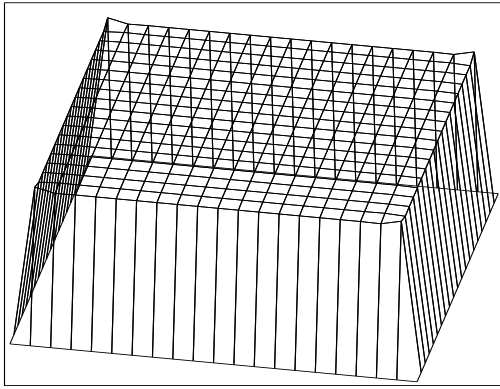
(c) Solução em  $t = 1 \times 10^{-3}$



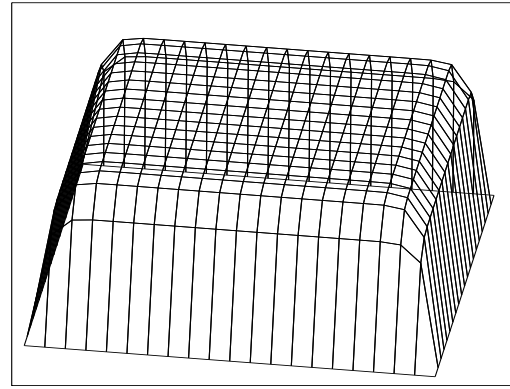
(d) Solução em  $t = 1 \times 10^{-2}$

Figura 2.12: Solução via método estabilizado clássico, GLS, para distintos instantes de tempo, tomando  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

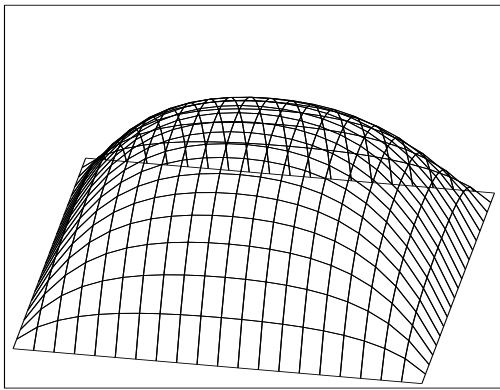




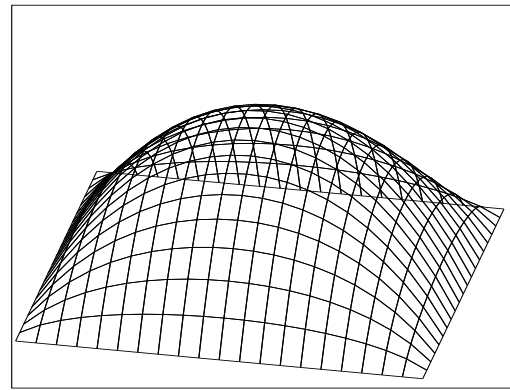
(a) Solução em  $t = 1 \times 10^{-5}$



(b) Solução em  $t = 4 \times 10^{-5}$

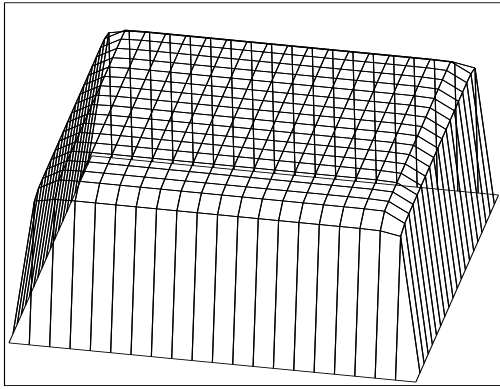


(c) Solução em  $t = 1 \times 10^{-3}$

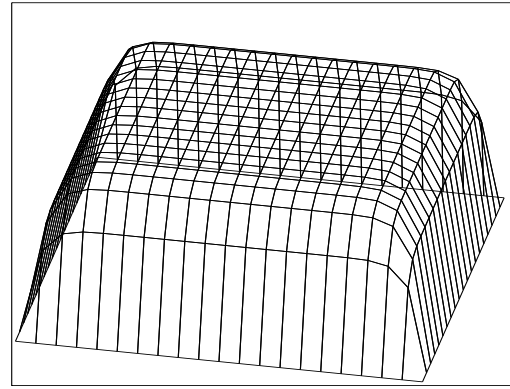


(d) Solução em  $t = 1 \times 10^{-2}$

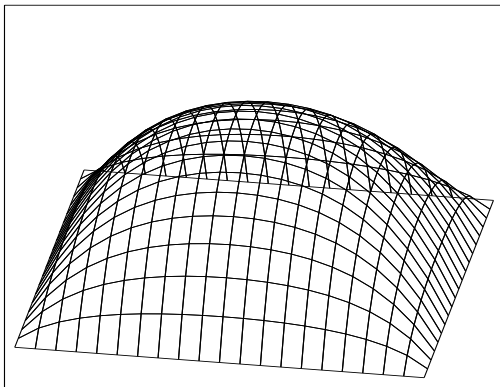
Figura 2.13: Solução via método estabilizado clássico, USFEM, para distintos instantes de tempo com  $\tau = \tau^{FV}$ , tomando  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .



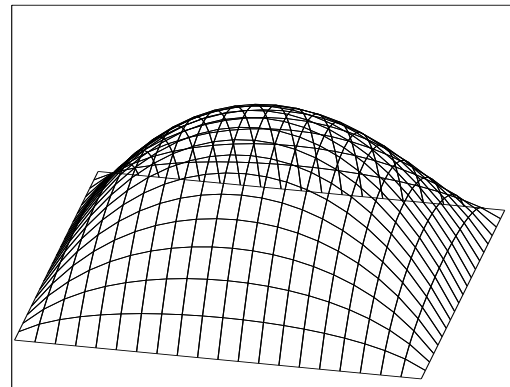
(a) Solução em  $t = 1 \times 10^{-5}$



(b) Solução em  $t = 4 \times 10^{-5}$



(c) Solução em  $t = 1 \times 10^{-3}$



(d) Solução em  $t = 1 \times 10^{-2}$

Figura 2.14: Solução via método estabilizado clássico, USFEM, para distintos instantes de tempo com  $\tau = \tau^{\text{Cod}}$ , tomando  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

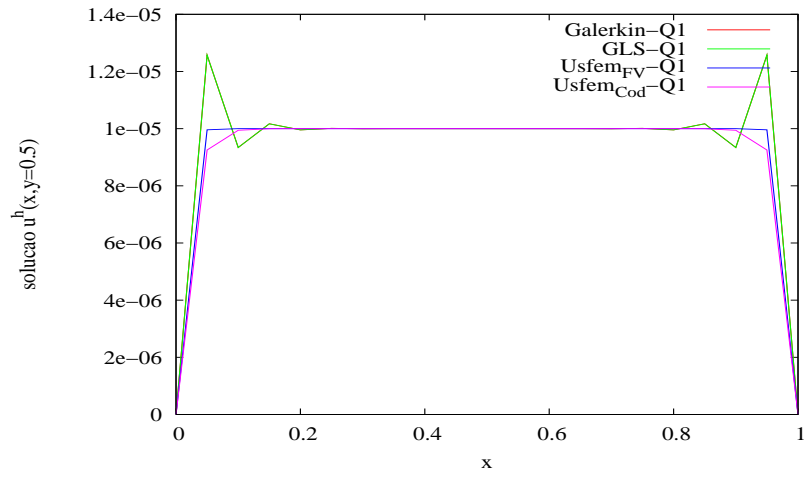


Figura 2.15: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 1 \times 10^{-5}$ , para  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

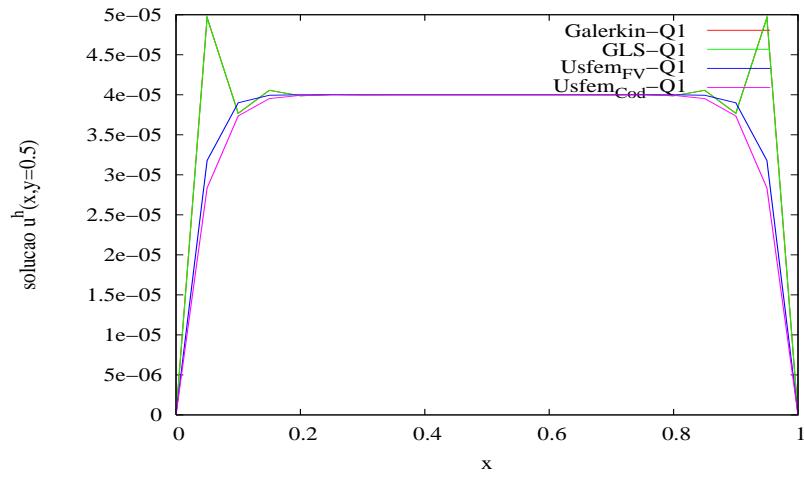


Figura 2.16: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 4 \times 10^{-5}$ , para  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

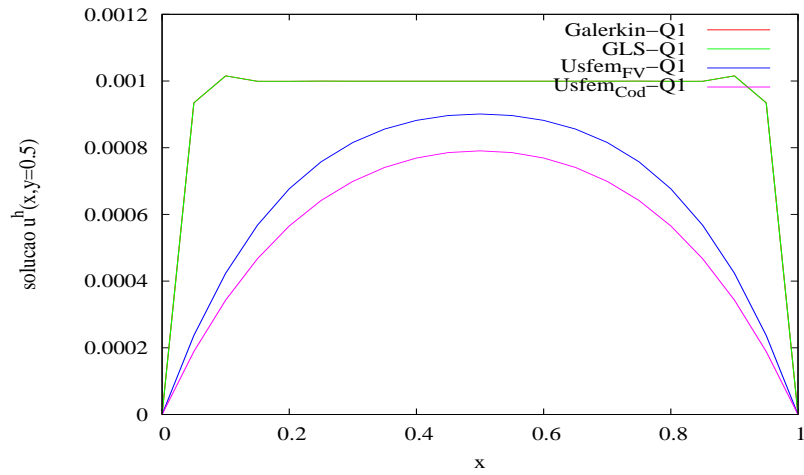


Figura 2.17: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 1 \times 10^{-3}$ , para  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

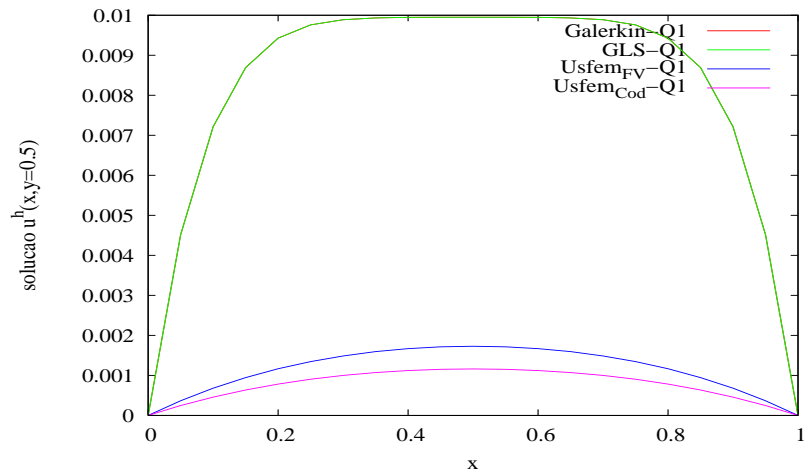


Figura 2.18: Perfis das soluções dos métodos de Galerkin, GLS e USFEM no instante de tempo  $t = 1 \times 10^{-2}$ , para  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

## 2.7 Conclusões

Neste capítulo, efetuamos uma revisão sobre os métodos de elementos finitos clássicos aplicados à problemas parabólicos, apresentando inicialmente as formulações clássicas de Galerkin.

Como os problemas de estabilidade do método de Galerkin clássico existentes nos problemas elípticos e que motivaram o desenvolvimento de formulações estabilizadas clássicas também encontram-se presentes aqui, somando-se ao problema da perda de acuracidade para passos de tempo pequeno (veja por exemplo

(Franca et al., 2006a), (Harari, 2004), (Ramalho, 2005)), estudamos adicionalmente formulações estabilizadas clássicas para problemas parabólicos.

Através do problema exemplo da seção anterior, verificamos a performance dos métodos estudados, o que conduziu às observações abaixo.

- Todos os métodos estudados falham, ou seja, apresentam soluções com oscilações espúrias para o **caso assintótico 1** que pode ser visto como um problema de reação dominante com passo de tempo grande. Além disso, surpreendentemente, as soluções obtidas via formulações estabilizadas também apresentam oscilações até mesmo no estado estacionário, fato que não ocorre quando usamos parâmetros de estabilização estacionários.
- Para o **caso assintótico 2**, onde o passo de tempo é pequeno, os métodos de Galerkin clássico e GLS falham, enquanto que o método USFEM apesar de eliminar as oscilações espúrias presentes nos métodos anteriores, adiciona excessiva difusão à solução de tal modo a descaracterizá-la quando alcança-se o estado estacionário, como mostram as figuras 2.15 - 2.18

Em resumo, os resultados numéricos da seção anterior mostram que o procedimento de estender à problemas transientes parâmetros de estabilização projetados para problemas estacionários é extremamente limitado. Isso coloca o desafio de projetar novos métodos (incluindo-se novas definições de parâmetros de estabilização) que sejam suficientemente robustos. Uma discussão preliminar a respeito desse desafio pode ser encontrada em (Ramalho, 2005) e (Codina et al., 2007). Na última referência, os autores discorrem sobre a necessidade e a insuficiência da dependência de  $\Delta t$  dos parâmetros de estabilização transientes. No entanto, a provisão de um tal parâmetro é ainda um problema em aberto. Isso certamente motivou o desenvolvimento da nova formulação proposta no capítulo 4.

# Capítulo 3

## Novos Métodos de Elementos Finitos Enriquecidos e Estabilizados para o Modelo Elíptico

### 3.1 Introdução

Como observado no capítulo 1, o problema elíptico de reação-difusão pode transformar-se em um problema singularmente perturbado quando o parâmetro de difusão torna-se pequeno comparado ao de reação (H.G. Roos e Tobiska, 1996). Nesse caso, sua solução é caracterizada pela presença de camadas limites. Essas camadas limites impõe severas dificuldades às aproximações numéricas, de modo que os métodos devem ser cuidadosamente construídos para aproximá-las corretamente.

Assim, significativo esforço têm sido dedicado à resolução do problema elíptico de reação-difusão singularmente perturbado. Dentro desse esforço, podemos identificar a técnica que consiste em aumentar a discretização nas regiões com camada limite através de malhas como as do tipo Shishkin (uniformes por sub-regiões), (Xenophontos, 2003), ou do tipo Bakhvalov (gradativas logaritmicamente), (H.G. Roos e Tobiska, 1996). Como podemos ver, essa estratégia de refinamento a priori da malha depende de um conhecimento prévio da localização da camada limite, o que dificulta a geração automática de malhas desse tipo. Outra técnica identificada é a adaptatividade. Técnicas adaptativas podem ser divididas

em três grupos a saber; refinamento da malha (h-refinamento), variação do grau dos polinômios de aproximação (p-refinamento) e combinação dos dois anteriores (hp-refinamento). Um exemplo de aplicação da hp-adaptatividade ao problema linear singularmente perturbado do tipo reação-difusão em duas dimensões pode ser encontrado em (Melenk e Schwab, 1998).

Novamente, como frisamos no capítulo 1, as formulações propostas aqui podem ser encaradas como parte dos métodos estabilizados ou enriquecidos.

Com relação aos métodos de elementos finitos estabilizados, podemos dizer que esses tornaram-se bastante atraentes às aplicações práticas essencialmente por melhorarem a precisão do método de Galerkin com baixo custo. A idéia, introduzida inicialmente com o método SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) em (Brooks e Hughes, 1982), foi rapidamente estendida à diversos problemas, veja por exemplo (Franca e Hughes, 1988). Esta, consiste basicamente em adicionar à formulação de Galerkin padrão, termos que são dependentes da malha, consistentes e numericamente estabilizantes. Para o problema de reação-difusão, destacamos os métodos GGLS, (Franca e do Carmo, 1989), GLS, (Harari e Hughes, 1994), GLS-GGLS, (Valentin e Franca, 1995), e USFEM, (Franca e Valentin, 2000).

Entretanto, a obtenção e correspondente justificativa física e/ou matemática do parâmetro de estabilização presentes nos métodos estabilizados representam ainda questões em aberto, e esforço considerável tem sido dedicado a esses tópicos, veja por exemplo (Brezzi et al., 1997), (Brezzi et al., 2003) e (Araya et al., 2009). É dentro desse esforço que desenvolvemos os dois métodos estabilizados propostos na seção 3.5 deste capítulo.

Já no que diz respeito aos métodos enriquecidos, dirigimos nosso foco à estratégia introduzida em (Franca et al., 2005b), cujas idéias básicas descrevemos abaixo.

Métodos enriquecidos de Petrov-Galerkin são construídos visando fornecer maior precisão e aumento simultâneo de estabilidade. O método está baseado na formulação variacional de um modelo específico e é obtido aproximando a função

tentativa através de polinômios por partes enriquecidos com funções multiescala, enquanto que a função teste é aproximada por polinômios por partes enriquecidos com funções bolhas. Esta diferença entre as aproximações das funções tentativa e teste é parte da abordagem de Petrov-Galerkin.

Escolhendo funções bolhas para enriquecer as funções teste, temos condições de contorno nulas sobre as arestas dos elementos, o que assegura a condensação estática. Desta, resulta uma equação diferencial para a função de enriquecimento válida para cada elemento, que depende da componente polinomial por partes da solução e dos dados. Uma vez que a expressão da componente multiescala da solução está disponível, é então substituída na equação cuja função teste é somente a componente polinomial por partes. Dessa abordagem, resulta um método estabilizado com diversas melhorias. Dentre essas temos:

- (1) O enriquecimento produz estabilidade adicional sem comprometer a consistência de uma maneira distinta dos métodos estabilizados clássicos.
- (2) A precisão é melhorada considerando o enriquecimento multiescala não nulo sobre o contorno dos elementos.
- (3) Os termos estabilizantes adicionais podem ter uma forma diferente da obtida pelas modificações clássicas usando operadores de mínimos-quadrados ou adjunto.

Portanto, apresentamos neste capítulo três novos métodos de elementos finitos aplicados à equação de reação-difusão. Tratam-se de um enriquecido e dois estabilizados associados à métodos enriquecidos, derivados via o conceito de autovalor generalizado, veja por exemplo (Loghin et al., 2006), (Peters e Wilkinson, 1970) e (Stewart, 1972). É importante ressaltar que os métodos estabilizados associados aos métodos enriquecidos têm como vantagem sobre os últimos a simplicidade de implementação computacional.

Nessa ordem de idéias, como nosso primeiro método estabilizado decorre do método enriquecido de Petrov-Galerkin (PGEM) em (Franca et al., 2005b),



fazemos previamente uma apresentação sucinta desse método. Na sequência, seção 3.4, introduzimos o primeiro método designado por método de Galerkin enriquecido (MGE). Na seção 3.5, dedicamos as subseções 3.5.1 e 3.5.2 à derivação dos métodos estabilizados associados ao PGEM e ao MGE respectivamente. Designamos por MEM-p o método estabilizado multiescala associado ao PGEM, e por MEM-g o método estabilizado multiescala associado ao MGE. Reservamos a seção 3.6 à análise de erro dos novos métodos estabilizados, (MEM-p) e (MEM-g). A seção 3.7 apresenta a análise de erro do novo método enriquecido (MGE). Na seção 3.8 apresentamos a validação numérica dos métodos propostos. Finalizamos este capítulo com as conclusões gerais dadas na seção 3.9.

### 3.2 O Modelo

O problema elíptico linear de reação-difusão consiste em encontrar a função escalar  $u = u(\mathbf{x})$ , tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := -\varepsilon\Delta u + \sigma u = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Aqui,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  é o coeficiente de difusão,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  denota o coeficiente de reação e  $f \in L^2(\Omega)$  é uma fonte externa. A formulação variacional associada a este problema consiste em encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$a(u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.2)$$

onde

$$a(u, v)_\Omega := \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_\Omega + \sigma(u, v)_\Omega. \quad (3.3)$$

Pelo teorema de Lax-Milgram, (Quarteroni e Valli, 1997), este é um problema bem posto, pois  $f \in L^2(\Omega)$  e a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)_\Omega$  é contínua e coerciva sobre  $H_0^1(\Omega)$ . Além disso,  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Contudo, esta regularidade é não

uniforme em  $\varepsilon$  já que na estimativa a priori, (Schatz e Wahlbin, 1983),

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C^* \|f\|_{0,\Omega}$$

a constante  $C^*$  depende fortemente de  $\varepsilon$ .

Sem perda de generalidade, assumimos doravante que a função  $f$  pertence ao espaço  $V_1$  definido em (2.18).

**Observação 3.1** Apesar de focarmos nossa atenção ao caso em que os coeficientes  $\varepsilon$  e  $\sigma$  em (3.1) são constantes positivas, a extensão aos casos  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$  e  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ , ambas funções mensuráveis, com constantes positivas  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \sigma_0$  e  $\sigma_1$  tais que

$$0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_1,$$

é direta. Também restringimos o estudo do problema (3.1) ao caso em que as condições de contorno são do tipo Dirichlet homogêneas, pois sua contrapartida não homogênea recai no caso homogêneo por simples mudança de variável, veja por exemplo (Evans, 1992) para mais detalhes.

□

### 3.3 Revisão dos Métodos Enriquecidos

Centrando nossa revisão sobre métodos enriquecidos no PGEM proposto em (Franca et al., 2005b), denotamos por  $H^1(\mathcal{T}_h)$  e  $H_0^1(\mathcal{T}_h)$  os espaços de funções definidas em  $\Omega$  cuja restrição a cada elemento  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  pertence a  $H^1(K)$  e  $H_0^1(K)$  respectivamente.

Por razões que ficarão claras mais adiante, introduzimos os operadores locais  $\mathcal{B}_K$  e  $\mathcal{M}_K$ . O operador local  $\mathcal{B}_K : L^2(\partial K) \rightarrow H^1(\partial K)$  é definido da seguinte maneira: Dada uma função  $w_L \in L^2(\partial K)$ , associa a esta  $w_E = \mathcal{B}_K w_L \in H^1(\partial K)$ , tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\partial K} w_E := \bar{\sigma} w_E - \varepsilon \frac{\partial^2 w_E}{\partial s^2} = w_L & \text{sobre } Z \in \partial K, \\ w_E = 0 & \text{nos nós de } Z \in \partial K, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $s$  é uma variável que parametriza  $\partial K$  por comprimento de arco e  $\bar{\sigma}$  é uma constante positiva que depende de  $\sigma$  e pode variar com as medidas de  $K$  e de  $Z \in \partial K$  como veremos mais adiante. Para o operador local  $\mathcal{M}_K : H^1(K) \rightarrow H^2(K)$  temos a definição que se segue: Dada uma função  $z_L \in H^1(K)$ , associa a esta  $z_E = \mathcal{M}_K z_L \in H^2(K)$ , a solução do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}z_E = z_L & \text{em } K, \\ z_E = \mathcal{B}_K \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} z_L \right) & \text{sobre } \partial K. \end{cases} \quad (3.5)$$

Consideremos o espaço  $V_L$  definido em (2.19). Logo, a aproximação clássica de Galerkin para o problema (3.2) pode ser formulada da seguinte maneira: Encontrar  $u_L \in V_L$ , tal que

$$a(u_L, v_L)_\Omega = (f, v_L)_\Omega \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.6)$$

Como apontado anteriormente, se o problema é de reação dominante, ou seja, singularmente perturbado, então, a menos que  $\sigma h^2$  seja da mesma ordem de  $\varepsilon$ , a solução do problema (3.6) exibirá fortes oscilações junto à camada limite.

Centrando nossa revisão sobre métodos enriquecidos no PGEM proposto em (Franca et al., 2005b), temos que este considera por um lado a aproximação da solução para o problema (3.2), utilizando o espaço das funções tentativas definido por

$$U_A := V_L \oplus U_E, \quad (3.7)$$

no qual  $U_E \subset H^1(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)$  é um espaço de dimensão finita, chamado de espaço de enriquecimento ou espaço multiescala, tal que  $V_L \cap U_E = \{0\}$  e definido precisamente por

$$U_E = \{w_E \in H^1(\mathcal{T}_h) : w_E|_K = \mathcal{M}_K(w_L), \quad \forall w_L \in V_1\}. \quad (3.8)$$

Por outro lado, o espaço das funções teste é definido por

$$V_A = V_L \oplus V_B, \quad (3.9)$$

onde  $V_B \in H_0^1(\mathcal{T}_h)$  é o espaço das funções bolha dado por

$$V_B = \oplus_K H_0^1(K), \quad (3.10)$$

escolhido para enriquecer o espaço padrão das funções teste,  $V_L$ .

Sejam os espaços enriquecidos  $U_A$  e  $V_A$  definidos acima. Então, as funções  $u_A \in U_A$  e  $v_A \in V_A$  podem ser decompostas de maneira única sob a forma

$$u_A = u_L + u_E \in V_L \oplus U_E, \quad \text{com } u_L \in V_L \text{ e } u_E \in U_E, \quad (3.11)$$

e

$$v_A = v_L + v_B \in V_L \oplus V_B, \quad \text{com } v_L \in V_L \text{ e } v_B \in V_B. \quad (3.12)$$

Adicionalmente,  $v_B$  admite decomposição única entre os elementos  $K$  da forma

$$v_B = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} v_b^K, \quad v_b^K \in H_0^1(K). \quad (3.13)$$

Então, o problema variacional (3.2) em  $U_A$  e  $V_A$  pode ser escrito como se segue: Encontrar  $u_A \in U_A$  tal que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(u_A, v_A)_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v_A)_K \quad \forall v_A \in V_A, \quad (3.14)$$

onde o subíndice  $(\cdot)_K$  indica que as integrais envolvidas estão restritas ao elemento  $K$ .

Usando as decomposições (3.11), (3.12), (3.13) e a bilinearidade da forma  $a(\cdot, \cdot)_K$ , constatamos que resolver o problema (3.14) é equivalente a resolver os dois

sub-problemas seguintes: encontrar  $u_A = u_L + u_E \in V_L \oplus U_E$  tal que

$$a(u_L, v_L)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(u_E, v_L)_K = (f, v_L)_\Omega, \quad \forall v_L \in V_L, \quad (3.15)$$

$$a(u_L, v_b^K)_K + a(u_E, v_b^K)_K = (f, v_b^K)_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, v_b^K \in H_0^1(K). \quad (3.16)$$

Da integração por partes temos que

$$a(w, z)_K = (\mathcal{L}w, z)_K \quad \forall z \in H_0^1(K), \quad (3.17)$$

o que permite escrever (3.16) de forma forte como

$$\mathcal{L}u_E = f - \mathcal{L}u_L \quad \text{em } K. \quad (3.18)$$

Visando torná-lo bem posto, o problema diferencial acima deve ser complementado com condições de contorno. Para fazer isso, (Franca et al., 2005b) consideram também a correção do resíduo da equação forte no contorno de  $K$  impondo portanto a seguinte condição de contorno sobre  $u_E$ :

$$u_E = \mathcal{B}_K \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} (f - \mathcal{L}u_L) \right) \quad \text{sobre } \partial K, \quad (3.19)$$

garantindo assim a existência e a unidade da solução do problema (3.18) dada formalmente por

$$u_E = \mathcal{M}_K(f - \mathcal{L}u_L). \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.15) obtemos em termos de  $u_L$  apenas, a equação que representa o PGEM cuja formulação lê-se: encontrar  $u_L \in V_L$  tal que

$$\mathcal{B}_m(u_L, v_L) = \mathcal{F}_m(v_L) \quad \forall v_L \in V_L, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathcal{B}_m(w, z) := a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}w), z)_K, \quad (3.22)$$

e

$$\mathcal{F}_m(z) := (f, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(\mathcal{M}_K f, z)_K. \quad (3.23)$$

**Observação 3.2** No contexto dos métodos enriquecidos (métodos multi-escalas), o termo  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(u_E, v_L)_K$  em (3.15) representa o efeito da microescala (não capturadas pela malha),  $u_E$ , sobre a macroescala,  $u_L$ .

□

**Observação 3.3** Na estratégia de enriquecimento clássica com funções bolhas, como é o caso do método das bolhas livre de resíduo (RFB), conforme abordagem em (Brezzi e Russo, 1994), também é necessário resolver o problema local (3.18), porém assumindo que  $u_E$  se anula sobre todo contorno  $\partial K \in \mathcal{V}_Z$ . Isso implica que o problema local correspondente deva ser resolvido numericamente, recaindo assim nos métodos de elementos finitos em dois níveis (TLFEM), veja por exemplo (Franca et al., 2006a), (Franca e Hwang, 2002) e (Nesliturk, 1999), cujo custo computacional é sempre questionado. Ao contrário do que ocorre na abordagem RFB, no PGEM são obtidas soluções analíticas para (3.18) em virtude da condição de contorno (3.4).

□

**Observação 3.4** A análise do método (3.21) pode ser vista em (Franca et al., 2005a). Nesse trabalho, mostra-se que o PGEM em (3.21) é bem posto, consistente e são apresentados resultados de convergência em ambos os limites assintóticos, i.e, em  $h$  e em  $\varepsilon$ .

□

### 3.3.1 Funções de Base Enriquecidas

Descrevemos agora o modo de implementar o PGEM em (3.21) em termos das funções de base. Para tanto, denotemos

$$U_E = \text{span}\{\phi_i\}_{i \in I} \quad \text{e} \quad V_1 = \text{span}\{\psi_i\}_{i \in I}, \quad (3.24)$$

onde as funções  $\psi_i$ ,  $i \in I$ , representam funções de base contínuas e lineares ou bilineares por partes usuais. Logo,  $f$  e  $u_L$  são dadas por

$$u_L = \sum_{i \in I_0} \psi_i u_i, \quad f = \sum_{j \in I} \psi_j f_j, \quad (3.25)$$

onde  $u_i$ ,  $i \in I_0$ , e  $f_j$ ,  $j \in I$ , são os valores nodais de  $u$  e  $f$  respectivamente. Aqui,  $I$  representa o conjunto de índices do total de pontos nodais em  $\mathcal{T}_h$ , enquanto que  $I_0$  é o conjunto de índices dos pontos nodais internos da triangulação  $\mathcal{T}_h$ . Assim, para satisfazer (3.20) escrevemos

$$u_E = \sum_{i \in I_0} \phi_i u_i - \sum_{i \in I} \phi_i \frac{f_i}{\sigma}, \quad (3.26)$$

onde as funções de base de enriquecimento  $\phi_i \in U_E$ ,  $i \in I$ , definidas por

$$\phi_j := -\mathcal{M}_K(\mathcal{L}\psi_j) = -\sigma \mathcal{M}_K(\psi_j), \quad \forall j \in I, \quad (3.27)$$

satisfazem

$$\begin{cases} \mathcal{L}\phi_j = -\sigma\psi_j & \text{em } K, \\ \mathcal{L}_{\partial K}\phi_j = -\sigma\psi_j & \text{sobre } \partial K, \\ \phi_j = 0 & \text{nos nós de } K. \end{cases} \quad (3.28)$$

Por conveniência de apresentação do PGEM introduzimos as funções multiescala enriquecidas,  $\lambda_i$ ,  $i \in I$ , definidas por

$$\lambda_j := \psi_j + \phi_j = \mathcal{I}\psi_j - \mathcal{M}_K(\mathcal{L}\psi_j) = (\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K)\psi_j, \quad \forall j \in I, \quad (3.29)$$

com  $\mathcal{I}$  denotando o operador identidade.

De (3.29), temos que o problema local (3.28) em termos de  $\lambda_j$  é da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}\lambda_j = 0 & \text{em } K, \\ \mathcal{L}_{\partial K}\lambda_j = 0 & \text{sobre } \partial K, \\ \lambda_j = \psi_j & \text{nos nós de } K. \end{cases} \quad (3.30)$$

Finalmente, usando (3.27) e (3.29) em (3.21), após manipulações algébricas chegamos a formulação matricial do PGEM dada por: Encontrar os coeficientes  $u_j$ ,  $j \in I_0$ , tais que

$$\sum_{j \in I_0} a(\lambda_j, \psi_i)_\Omega u_j = \sum_{j \in I} [a(\lambda_j, \psi_i)_\Omega - \varepsilon(\nabla\psi_j, \nabla\psi_i)_\Omega] \frac{f_j}{\sigma}, \quad \forall i \in I_0. \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Cálculo das Funções Multiescala do PGEM

Métodos enriquecidos tornam-se extremamente competitivos, computacionalmente falando, sempre que podemos fornecer aproximações analíticas para as funções de enriquecimento cujo erro é da ordem do erro do método. É dentro deste contexto que (Franca et al., 2005b) fornecem as funções de enriquecimento multiescala que apresentamos aqui, já que estas funções são obtidas em decorrência da perturbação introduzida na definição do operador local de contorno  $\mathcal{L}_{\partial K}$  em (3.4), ou seja, substituindo  $\sigma$  por um coeficiente perturbado  $\bar{\sigma}$ .

Seja  $K$  um elemento da partição  $\mathcal{T}_h$  com contorno  $\partial K$  e  $Z$  uma aresta de  $\partial K$ . Tomemos primeiramente  $K$  triangular. Neste caso, a dependência do coeficiente  $\bar{\sigma}$  em termos das medidas de  $K$  e de  $Z$  é dada por

$$\bar{\sigma} := \frac{\sigma}{\gamma_K^i |Z|^2}, \quad (3.32)$$

onde a constante positiva  $\gamma_K^i$  é definida por

$$\gamma_K^i = \left( \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \Big|_K \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi_i}{\partial y} \Big|_K \right)^2 = \frac{|\bar{Z}_i|^2}{4|K|^2} \quad \forall i \in I, \quad (3.33)$$



com  $\bar{Z}_i$  denotando a aresta de  $K$  oposta ao nó  $i$ .

Em decorrência das definições (3.32) e (3.33), a solução analítica de (3.29) é dada por

$$\lambda_i(x, y) = \frac{\sinh(\alpha_i \psi_i(x, y))}{\sinh(\alpha_i)} \quad \forall i \in I, \quad (3.34)$$

na qual

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon \gamma_K^i}}. \quad (3.35)$$

Agora, assumimos que  $K$  é um elemento quadrangular e escolhemos  $\bar{\sigma} = \sigma/2$ . Sem perda de generalidade, consideremos um retângulo  $K$  de vértices  $1, \dots, 4$  em  $(0, 0)$ ,  $(h_x, 0)$ ,  $(h_x, h_y)$ ,  $(0, h_y)$ . Como a função de forma bilinear  $\psi_1$  pode ser escrita como  $\psi_1(x, y) = \psi_1^x(x) \psi_1^y(y)$ , segue-se que

$$\lambda_1(x, y) = \frac{\sinh(\alpha_x \psi_1^x(x)) \sinh(\alpha_y \psi_1^y(y))}{\sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \quad (3.36)$$

onde

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{\sigma h_x^2}{2\varepsilon}}, \quad \alpha_y = \sqrt{\frac{\sigma h_y^2}{2\varepsilon}}, \quad (3.37)$$

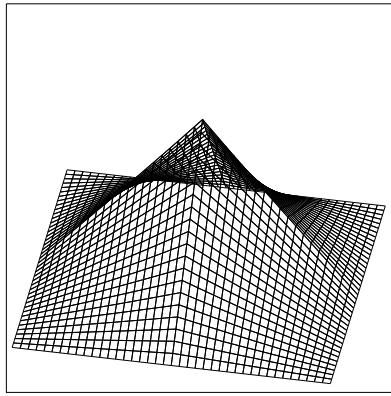
satisfaz (3.30) exatamente. As funções de base  $\lambda_j$ ,  $j = 2, \dots, 4$  são obtidas imediatamente por simples mudança de variável.

Consideremos em particular um ponto nodal  $l \in I$ . Então, examinando todos os elementos conectados a este nó, podemos usar a equação (3.36) para ilustrar a função de forma nodal  $\lambda_l$ . Fixando  $\sigma = 1$ , obtemos para  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-1}$  e  $\varepsilon = 10^{-3}$ , as funções de forma  $\lambda_l$  apresentadas na figura 3.1. Como podemos observar na figura 3.1, a medida que  $\varepsilon$  tende para zero, o suporte da função  $\lambda_l$  que coincide com o da função bilinear,  $\psi_l$ , para  $\varepsilon = 1$ , diminui em torno do ponto nodal  $l$ . Este comportamento da função de forma  $\lambda_l$ , é responsável tanto em adicionar ao PGEM a estabilização e a precisão necessárias nos casos singularmente perturbados ( $\varepsilon < \sigma h^2$ ), como em fornecer resultados próximos do método de Galekin padrão nos casos em que  $\varepsilon$  é da ordem de  $\sigma h^2$ .

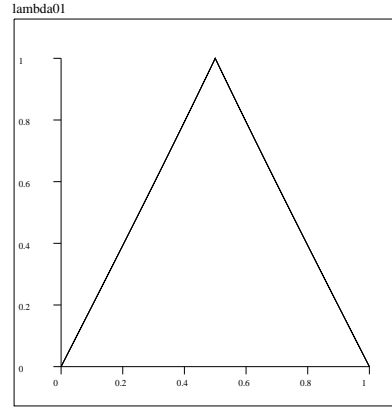
**Observação 3.5** Novamente, tanto a escolha  $\bar{\sigma} = 2\sigma$  quanto a escolha em (3.32)

são justificadas pela análise de erro do método efetuada em (Franca et al., 2005a) e pela consequente melhoria na performance computacional. Contudo, ao contrário do caso de discretização com elementos retangulares, importa realçar que as funções enriquecidas em (3.34) não são necessariamente contínuas nas arestas. Excetuando o caso em que a malha é composta exclusivamente por elementos equiláterais, o valor de  $\gamma_K^j$  nas arestas, e consequentemente o de  $\lambda_j$ , pode mudar de um elemento para outro, como fica evidenciado pela equação (3.33). Em outras palavras, a utilização dessas funções torna o PGEM um método não-conforme.

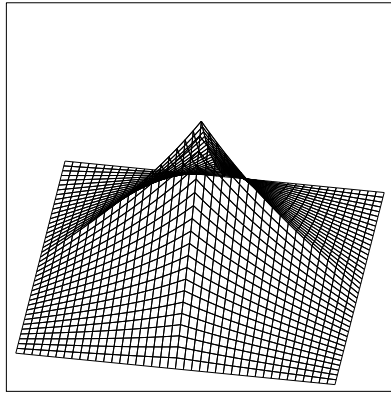
□



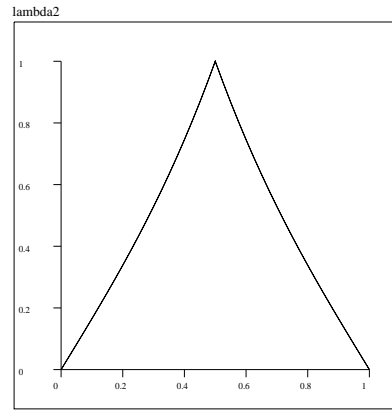
(a) Função de forma  $\lambda_l(x, y)$  para  $\varepsilon = 1$



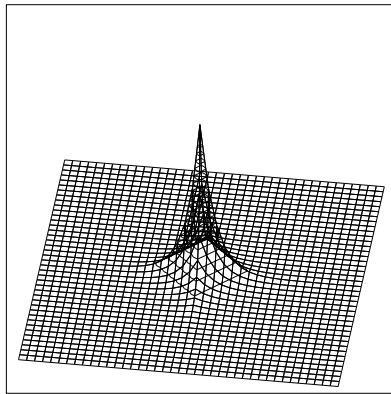
(b) Perfil  $\lambda_l(x, 0.5)$  para  $\varepsilon = 1$



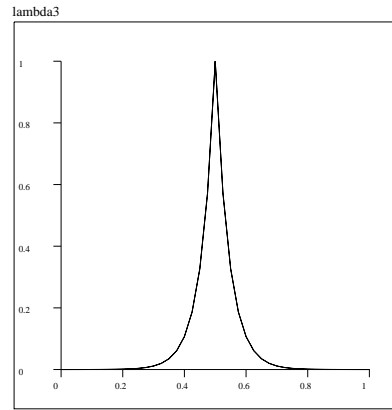
(c) Função de forma  $\lambda_l(x, y)$  para  $\varepsilon = 10^{-1}$



(d) Perfil  $\lambda_l(x, 0.5)$  para  $\varepsilon = 10^{-1}$



(e) Função de forma  $\lambda_l(x, y)$  para  $\varepsilon = 10^{-3}$



(f) Perfil  $\lambda_l(x, 0.5)$  para  $\varepsilon = 10^{-3}$

Figura 3.1: Gráficos de  $\lambda_l(x, y)$  e dos perfis  $\lambda_j(x, 0.5)$  para distintos valores de  $\varepsilon$ .

### 3.4 Novo Método de Galerkin Enriquecido

Como veremos nos exemplos numéricos, seção 3.7, e constatado também por (Ilinca e Héту, 2008), apesar do PGEM apresentar robustez superior aos de-

mais métodos também propostos para superar as dificuldades numéricas impostas pela presença de camada limite na solução de problemas singularmente perturbados, instabilidades residuais ainda persistem para certos valores de  $\sigma h^2/\varepsilon$ . Este fato motivou o desenvolvimento do método de Galerkin enriquecido (MGE) que apresentamos nesta seção.

Para a construção do método de Galerkin enriquecido (MGE), tomamos como base as idéias do PGEM introduzidas na seção precedente, diferindo deste apenas na forma como o espaço das funções teste é enriquecido, conduzindo a um método de Galerkin e não mais de Petrov-Galerkin. Assim, seja o espaço das funções teste para o MGE dado por

$$V_M := V_U \oplus H_0^1(\mathcal{T}_h), \quad \text{com} \quad V_U := V_L + U_E, \quad (3.38)$$

onde  $U_E$  é o espaço definido em (3.8).

Agora, temos que todo elemento  $v_M$  de  $V_M$  admite decomposição única da forma

$$v_M = v_U + v_B, \quad (3.39)$$

com  $v_U \in V_U$ , e  $v_B \in H_0^1(\mathcal{T}_h)$ . Além disso, um elemento  $v_U$  de  $V_U$  possui decomposição não necessariamente única dada por

$$v_U = v_L + v_E, \quad (3.40)$$

na qual  $v_L \in V_L$  e  $v_E \in U_E$ . Assim, nossa aproximação da solução exata no espaço enriquecido (3.7) é definida pela solução do seguinte problema: Encontrar  $u_A \in U_A$  tal que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(u_A, v_M)_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v_M)_K \quad \forall v_M \in V_M. \quad (3.41)$$

Aqui novamente, usando as decomposições (3.10), (3.39) e a bilinearidade da forma  $a(\cdot, \cdot)_K$ , de (3.41) temos imediatamente que a solução correspondente

$u_A \in U_A$  satisfaz

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(u_A, v_U)_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v_U)_K \quad \forall v_U \in V_U, \quad (3.42)$$

$$a(u_A, v_b^K)_K = (f, v_b^K)_K \quad \forall v_b^K \in H_0^1(K), \quad (3.43)$$

onde  $v_b^K = v_B|_K$ .

Como podemos observar, (3.43) é exatamente igual a (3.16). Assim, associado a este problema, consideramos também a solução  $u_E$  conforme (3.20).

Seja  $v_E|_K = \mathcal{M}_K(-\mathcal{L}v_L)$ . Então, usando a decomposição (3.40) para as funções  $v_U \in V_U$ , temos a relação

$$v_U = (\mathcal{I} - \mathcal{M}_K \mathcal{L})(v_L) := \chi_K(v_L). \quad (3.44)$$

Assim, por construção, de (3.42), usando a decomposição em (3.11), as relações (3.20) e (3.44), obtemos finalmente o método de Galerkin enriquecido (MGE) cuja formulação lê-se: encontrar  $u_g \in V_L$  tal que

$$\mathcal{B}_g(u_g, v_L) = \mathcal{F}_g(v_L) \quad \forall v_L \in V_L, \quad (3.45)$$

onde

$$\mathcal{B}_g(w, z) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(\chi_K(w), \chi_K(z))_K, \quad (3.46)$$

e

$$\mathcal{F}_g(z) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [(f, \chi_K(z))_K - a(\mathcal{M}_K(f), \chi_K(z))_K]. \quad (3.47)$$

Das relações (3.44) e (3.29) temos que

$$\chi_K(\psi_j) = \lambda_j, \quad \forall j \in I, \quad (3.48)$$

o que permite formular a contrapartida discreta de (3.45) como se segue: encontrar

os coeficientes  $u_j$ ,  $j \in I_0$  tais que

$$\sum_{j \in I_0} a(\lambda_j, \lambda_i) u_j = \sum_{j \in I} \left[ (\psi_j, \lambda_i) - a(\mathcal{M}_K(\psi_j), \lambda_i) \right] f_j \quad \forall i \in I_0, \quad (3.49)$$

ou equivalentemente

$$\sum_{j \in I_0} a(\lambda_j, \lambda_i) u_j = \sum_{j \in I} \left[ a(\lambda_j, \lambda_i) - \varepsilon(\nabla \psi_j, \nabla \lambda_i) \right] \frac{f_j}{\sigma} \quad \forall i \in I_0. \quad (3.50)$$

**Observação 3.6** Em particular, tomando  $\lambda_i = \psi_i$  em (3.50), obtemos o PGEM em (3.31) proposto em (Franca et al., 2005b) e analisado em (Franca et al., 2005a).

□

### 3.5 Novos Métodos Estabilizados Multiescala

Dedicamos esta seção à construção e análise de dois novos métodos estabilizados para o modelo de reação-difusão estacionário.

Na subseção 3.5.1 apresentamos o primeiro método que designamos por método estabilizado multiescala (MEM-p), o qual está associado ao PGEM em (3.20). Dedicamos a subseção 3.5.2 à apresentação do segundo método designado por método estabilizado multiescala (MEM-g), associado agora ao novo método enriquecido, MGE, em (3.45).

Precedendo a apresentação dos novos métodos, introduzimos resultados auxiliares e algumas definições que serão usadas em seguida.

**Lema 3.7** Sejam os operadores  $\mathcal{M}_K$  e  $\chi_K$  definidos em (3.5) e (3.44) respectiva-

mente. Então, para todo  $v_L \in S_1(K)$  temos;

$$\begin{aligned}
i) \quad & \mu_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\chi_K(v_L), \chi_K(v_L))_K \leq \mu_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2, \\
ii) \quad & \varrho_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\chi_K(v_L), v_L)_K \leq \varrho_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2, \\
iii) \quad & \rho_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\mathcal{M}_K(v_L), v_L)_K \leq \rho_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2, \\
iv) \quad & \gamma_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\mathcal{M}_K(v_L), \mathcal{M}_K(v_L))_K \leq \gamma_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2, \\
v) \quad & \theta_{min}^K |v_L|_{1,K}^2 \leq (\nabla(\chi_K(v_L)), \nabla v_L)_K \leq \theta_{max}^K |v_L|_{1,K}^2, \\
vi) \quad & \zeta_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\nabla(\chi_K(v_L)), \nabla[-\sigma \mathcal{M}_K(v_L)])_K \leq \zeta_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2, \\
vii) \quad & \eta_{min}^K \|v_L\|_{0,K}^2 \leq (\nabla(\mathcal{M}_K(v_L)), \nabla(\mathcal{M}_K(v_L)))_K \leq \eta_{max}^K \|v_L\|_{0,K}^2,
\end{aligned}$$

onde  $\mu_j^K$ ,  $\varrho_j^K$ ,  $\rho_j^K$ ,  $\gamma_j^K$ ,  $\nu_j^K$ ,  $\delta_j^K$  e  $\eta_j^K$ , com  $j = min, max$ , são parâmetros positivos dependentes de  $K$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  (veja apêndice B).

**Prova:** Os resultados acima decorrem da aplicação direta da propriedade do quociente de Rayleigh em (A.5) (vide apêndice A).

Apenas como ilustração, provamos a seguir o item *ii*).

Seja  $\mathcal{N}_K$  o número de nós em  $K$ . Então, lembrando que as funções  $v_L \in S_1(K)$  são da forma  $v_L = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} v_j \psi_j = \mathbf{v} \psi^T$  com  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{\mathcal{N}_K})$  e  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\mathcal{N}_K})$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|v_L\|_{0,K}^2 &= \int_K (v_L)^2 dK = (v_L, v_L)_K \\
&= (\mathbf{v} \psi^T, \mathbf{v} \psi^T)_K = (\mathbf{v} \psi^T, (\mathbf{v} \psi^T)^T)_K \\
&= (\mathbf{v} \psi^T, \psi \mathbf{v}^T)_K = \mathbf{v} (\psi^T, \psi)_K \mathbf{v}^T \\
&= \mathbf{v} [M_{GS1}] \mathbf{v}^T.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Aqui  $[M_{GS1}] = (\psi^T, \psi)_K$ ,  $S = P, Q$  é a matriz de massa definida na subseção B.1.1 do apêndice B, equações (B.8) e (B.22). O super-índice  $T$  em  $\mathbf{v}^T$  e  $\psi^T$  denota a transposição dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\psi$  respectivamente.

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
(\chi_K(v_L), v_L)_K &= ([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](\mathbf{v}\psi^T), \mathbf{v}\psi^T)_K \\
&= ([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](\mathbf{v}\psi^T), (\mathbf{v}\psi^T)^T)_K \\
&= ([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](\mathbf{v}\psi^T), \psi \mathbf{v}^T)_K \\
&= \mathbf{v}(\lambda^T, \psi)_K \mathbf{v}^T = \mathbf{v}[M_{M_s S_1}] \mathbf{v}^T.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

A matriz  $[M_{M_s S_1}]$  introduzida na equação acima encontra-se definida na subseção B.1.1 do apêndice B, equações B.12 e B.26.

Assim, de (3.51) e (3.52) temos que o quociente de Rayleigh,  $z$ , em (A.5) é dado por

$$z = \frac{\mathbf{v}[M_{M_s S_1}] \mathbf{v}^T}{\mathbf{v}[M_{G S_1}] \mathbf{v}^T} \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \tag{3.53}$$

e portanto *ii*) segue-se.

Os restantes itens, exceto o item *vi*), podem ser provados de maneira análoga. Para o item *vi*) seguimos a demonstração proposta em Araya et al. (2007b).

□

### 3.5.1 Novo Método Estabilizado Multiescala Associado ao PGEM

O MEM-p que apresentamos nesta subseção, tem como ponto de partida o PGEM em (3.21).

Partindo também do PGEM, (Araya et al., 2007a) desenvolveram um método estabilizado multiescala onde a idéia central consistiu no estabelecimento de uma relação entre o parâmetro estabilizante,  $\tau_K$ , e a média da função enriquecida ou de enriquecimento sobre  $K$ . Idéia similar aplicada ao operador de difusão-convecção já havia sido explorada por (Brezzi et al., 1997).

No MEM-p que estamos propondo aqui, diferente da abordagem comen-



tada no parágrafo anterior, procuramos estabelecer uma conexão entre o PGEM e o MEM-p definindo um parâmetro de estabilização,  $\tau_p = \sigma \rho_{max}^K$ , decorrente do conceito de autovalor generalizado, veja por exemplo (Franca e Madureira, 1993).

Assim, o MEM-p cuja derivação apresentamos em seguida, consiste em encontrar a função  $u_L(\mathbf{x}) \in V_L$  tal que

$$\mathcal{B}_p(u_L, v_L) = \mathcal{F}_p(v_L) \quad \forall v_L \in V_L, \quad (3.54)$$

onde

$$\mathcal{B}_p(w, z) := a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\tau_p(\mathcal{L}w, z)_K], \quad (3.55)$$

$$\mathcal{F}_p(z) := (f, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\tau_p(f, z)_K], \quad (3.56)$$

com

$$\tau_p = \begin{cases} 1 - \frac{6(\sinh(\alpha_K)) - \alpha_K}{\alpha_K^2 \sinh(\alpha_K)} & \text{para } K \text{ triangular,} \\ 1 - \frac{4(\cosh(\alpha_K) - 1)}{\alpha_K^2 (1 + \cosh(\alpha_K))} & \text{para } K \text{ retangular.} \end{cases} \quad (3.57)$$

**Observação 3.8** Para cada  $K \in \mathcal{T}_h$ , designamos por  $\alpha_K$  o parâmetro adimensional local definido por

$$\alpha_K = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq 3} \{\alpha_i\}, & \text{para } K \text{ triangular,} \\ \max\{\alpha_x, \alpha_y\}, & \text{para } K \text{ retangular,} \end{cases} \quad (3.58)$$

com  $\alpha_i$  dado por (3.35) e  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  conforme (3.37).

□

### 3.5.1.1 Derivação do Método Estabilizado Multiescala (MEM-p)

Partindo de (3.21), esta seção apresenta a derivação do método (3.54). Para tanto, algumas hipóteses são feitas e posteriormente validadas através da análise de erro.

Iniciamos reescrevendo (3.21) na seguinte forma : achar  $u_L \in V_L$  tal que

$$a(u_L, v_L)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [a(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L) - f), v_L)_K] = (f, v_L)_\Omega \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.59)$$

Usando (3.3) no segundo termo do lado esquerdo da expressão acima temos que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [a(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f), v_L)_K] &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f), v_L)_K \\ &\quad + \varepsilon(\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f)), \nabla v_L)_K]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Então, da integração por partes (fórmula de Green), temos a identidade

$$(\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f)), \nabla v_L)_K = (\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f), \nabla v_L \cdot \mathbf{n})_{\partial K}, \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.61)$$

Lembrando que  $(\mathcal{L}u_L - f)|_K \in V_L$ , tomamos a aproximação

$$(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f), v_L)_K \cong \rho_{max}^K(\mathcal{L}u_L - f, v_L)_K. \quad (3.62)$$

Tal aproximação é motivada por (3.64)-(3.68).

Em seguida, negligenciamos o termo de bordo em (3.61). Com isso, usando a aproximação em (3.62) podemos escrever (3.60) como

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [a(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}u_L - f), v_L)_K] \cong \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \rho_{max}^K(\mathcal{L}u_L - f, v_L)_K] \quad (3.63)$$

que substituída em (3.59) completa a derivação de (3.54). Ambas aproximações serão precisamente validadas através da análise de erro. Estas serão baseadas fortemente nos seguintes aspectos:

Seja  $w_L \in S_1(K)$ . Então, para todo  $z_L \in S_1(K)$  as igualdades

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{M}_K(w_L), z_L)_K = \sigma^{-1}(w_L, z_L)_K, \quad (3.64)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\mathcal{M}_K(w_L), z_L)_K = 0, \quad (3.65)$$

são válidas. Em particular, para  $z_L = w_L$ , do lema 3.7, item *iii*), segue-se que

$$\rho_{min}^K \|w_L\|_{0,K}^2 \leq (\mathcal{M}_K(w_L), w_L)_K \leq \rho_{max}^K \|w_L\|_{0,K}^2, \quad (3.66)$$

com

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{min}^K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{max}^K = \sigma^{-1}, \quad (3.67)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho_{min}^K = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_{max}^K = 0, \quad (3.68)$$

conforme ilustrações nas figuras B.4 e B.10, apêndice B, onde são mostrados os gráficos de  $\sigma \rho_{max}^K$  e  $\sigma \rho_{min}^K$  em função do parâmetro  $\alpha_K$ .

### 3.5.2 Novo Método Estabilizado Multiescala Associado ao MGE

Adotando procedimento análogo ao descrito na subseção anterior, apresentamos agora o método estabilizado multiescala, MEM-g, decorrente do MGE, cuja formulação lê-se: encontrar a função  $u_L(\mathbf{x}) \in V_L$  tal que

$$\mathcal{B}_s(u_L, v_L) = \mathcal{F}_s(v_L) \quad \forall v_L \in V_L, \quad (3.69)$$

onde

$$\mathcal{B}_s(w, z) := a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\tau_s(\mathcal{L}w, z)_K], \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F}_s(z) := (f, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\tau_s(f, z)_K], \quad (3.71)$$

com

$$\tau_s = \begin{cases} 1 - \frac{6(4 \cosh(\alpha_K) + (\cosh(\alpha_K))^2 - 2\alpha_K \sinh(\alpha_K) - \alpha_K^2 - 5)}{(\alpha_K \sinh(\alpha_K))^2} & \text{para } K \text{ triangular,} \\ 1 - \frac{3((\sinh(\alpha_K))^2 - \alpha_K^2)}{(\alpha_K \sinh(\alpha_K))^2} & \text{para } K \text{ retangular.} \end{cases} \quad (3.72)$$

### 3.5.2.1 Derivação do Método Estabilizado Multiescala (MEM-g)

Agora, nosso ponto de partida visando alcançar (3.69) é a equação (3.45). Para tanto, consideremos inicialmente o lado esquerdo de (3.45). Então, por definição temos que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a(\chi_K(u_L), \chi_K(v_L))_K &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma(\chi_K(u_L), \chi_K(v_L))_K \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(\nabla(\chi_K(u_L)), \nabla(\chi_K(v_L)))_K \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Supomos as aproximações:

$$(\chi_K(w), \chi_K(z))_K \cong \mu_{max}^K(w, z)_K \quad \forall w, z \in V_L, \quad (3.74)$$

e

$$(\nabla(\chi_K(w)), \nabla(\chi_K(z)))_K \cong (\nabla w, \nabla z)_K \quad \forall w, z \in V_L. \quad (3.75)$$

Além disso, aproximamos primeiramente  $(\nabla(\mathcal{M}_K(f)), \nabla(\chi_K(z)))_K$  por  $(\nabla(\mathcal{M}_K(f)), \nabla z)_K$  e adicionalmente, à semelhança de (3.61), negligenciamos também o termo de bordo  $(\mathcal{M}_K(f), \nabla \chi_K(v_L) \cdot \mathbf{n})_{\partial K}$ .

Com isso, podemos escrever (3.45) sob a forma

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\mu_{max}^K \sigma(u_L, v_L)_K + \varepsilon(\nabla u_L, \nabla v_L)_K] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\mu_{max}^K(f, v_L)_K], \quad (3.76)$$

da qual obtemos o novo método estabilizado formulado em (3.69) fazendo

$$\mu_{max}^K = 1 - \tau_s. \quad (3.77)$$

### 3.6 Análise Numérica dos Novos Métodos Estabilizados

Nesta seção procedemos à análise numérica dos métodos propostos em (3.54) e (3.69), designados por MEM-p e MEM-g respectivamente. Para tanto, definimos inicialmente as normas  $\|w\|_p$  e  $\|w\|_s$  sobre  $V_L$ , dadas por

$$\|w\|_p^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla w\|_{0,K}^2], \quad (3.78)$$

e

$$\|w\|_s^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \mu_{max}^K \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla w\|_{0,K}^2], \quad (3.79)$$

associadas às formas bilineares  $\mathcal{B}_p(\cdot, \cdot)$  e  $\mathcal{B}_s(\cdot, \cdot)$ , respectivamente.

Na sequência temos que  $C, C_1, C_2, C_3, \dots$ , denotam constantes genéricas positivas independentes de  $h_K, \varepsilon$ , e  $\sigma$ , porém seus valores podem variar em cada ocorrência.

#### 3.6.1 Existência e Unicidade para o MEM-p

O resultado a seguir garante, pelo lema de Lax-Milgran, a existência e unicidade de solução de (3.54).

**Lema 3.9** (Continuidade e coercividade). A forma bilinear  $\mathcal{B}_p(\cdot, \cdot)$  satisfaz

$$i) |\mathcal{B}_p(w, z)| \leq C_1 \|w\|_p \|z\|_p, \quad \forall w, z \in V_L, \quad (3.80)$$

$$ii) \mathcal{B}_p(w, w) \geq C_2 \|w\|_p^2, \quad \forall w \in V_L, \quad (3.81)$$

e portanto, o problema (3.54) tem solução única.

**Prova:** Provaremos inicialmente o item *i*). Assim, da definição de  $\mathcal{B}_p(\cdot, \cdot)$ , equação (3.55), da identidade

$$1 - \sigma \rho_{max}^K = \varrho_{min}^K, \quad (3.82)$$

dada em (B.110) (veja apêndice B) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_p(w, z)| &= |a(w, z)_\Omega - \sigma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\rho_{max}^K(\mathcal{L}w, z)_K]| \\ &= | \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma(1 - \sigma \rho_{max}^K)(w, z)_K + \varepsilon(\nabla w, \nabla z)_K] | \\ &= | \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K(w, z)_K + \varepsilon(\nabla w, \nabla z)_K] | = |(w, z)_p| \\ &\leq \|w\|_p \|z\|_p, \end{aligned} \quad (3.83)$$

e portanto o lema segue-se, com a constante de continuidade  $C_1 = 1$ .

O item *ii*) segue-se imediatamente da definição de  $\mathcal{B}_p(\cdot, \cdot)$ , equação (3.55), e uso da igualdade (3.82). Novamente, a constante de coercividade  $C_2$  é unitária.  $\square$

### 3.6.2 Existência e Unicidade para o MEM-g

Pelo lema de Lax-Milgran, o resultado abaixo garante que (3.69) seja bem posto.

**Lema 3.10** (Continuidade e coercividade). A forma bilinear  $\mathcal{B}_s(\cdot, \cdot)$  satisfaz

$$i) |\mathcal{B}_s(w, z)| \leq C_1 \|w\|_s \|z\|_s, \quad \forall w, z \in V_L, \quad (3.84)$$

$$ii) \mathcal{B}_s(w, w) \geq C_2 \|w\|_s^2, \quad \forall w \in V_L, \quad (3.85)$$

e portanto, o problema (3.69) é bem posto.

**Prova:** A prova é análoga à do lema 3.9, sendo suficiente considerar agora as definições de  $\mathcal{B}_s(\cdot, \cdot)$  e  $\|\cdot\|_s$  em (3.70) e (3.79) respectivamente, e a identidade

$$\mu_{max}^K = 1 - \tau_s. \quad (3.86)$$

□

**Observação 3.11** Tal como no lema 3.9, as constantes de continuidade e coercividade no lema 3.10 também são unitárias.

□

### 3.6.3 Estimativas de Erro para o MEM-p

Aqui, mostramos primeiramente no lema que se segue, que o MEM-p em (3.54) possui a propriedade de ortogonalidade de Galerkin.

**Lema 3.12** (Consistência). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) e  $u_L \in V_L$  solução de (3.54), então temos que

$$\mathcal{B}_p(u - u_L, v_L) = 0 \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.87)$$

**Prova:**

Primeiramente temos que  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) também satisfaz o problema (3.54), ou seja ;

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p(u, v_L) &= a(u, v_L)_\Omega - \sum_K [\tau_p(\mathcal{L}u - f), z)_K] \\ &= a(u, v_L)_\Omega \\ &= (f, v_L)_\Omega \quad \forall v_L \in V_L. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_p(u - u_L, v_L) &= \mathcal{B}_p(u, v_L) - \mathcal{B}_p(u_L, v_L) \\
&= \mathcal{F}_p(v_L) - \mathcal{F}_p(v_L) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

□

Visando o estudo da convergência em  $h$  dos métodos propostos neste trabalho, introduzimos o seguinte resultado da teoria de interpolação.

**Lema 3.13** (Interpolação). Seja  $K$  um elemento triangular (ou quadrangular) de vértices  $j = 1, \dots, \mathcal{N}_K$ , e  $u \in H^2(K)$ . Então, a interpolante linear (bilinear) de  $u$  nos vértices de  $K$ , definida por  $I_h u : C^0(\Omega) \rightarrow V_L$ , tal que  $I_K u = I_h u|_K$ , satisfaz

$$|u - I_K u|_{m,K} \leq C h_K^{2-m} |u|_{2,K}, \quad 0 \leq m \leq 2, \tag{3.90}$$

com uma constante  $C > 0$  independente de  $u$  e de  $h_K$ .

**Prova:** Veja (Ciarlet, 1978), (Schwab e Suri, 1998). □

Antecedendo o próximo resultado referente a estimativas de interpolação na norma  $\|\cdot\|_p$ , necessitamos das seguintes desigualdades abaixo (pela definição de  $\varrho_{min}^K$ , vide apêndice B).

$$\min \left\{ \frac{\alpha_K^2}{24}, \frac{1}{\alpha_K^2} \right\} \leq \varrho_{min}^K \leq \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\}. \tag{3.91}$$

Agora, usando o lema 3.13 temos o seguinte resultado de aproximação.

**Lema 3.14** (Aproximação). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $I_h : C^0(\Omega) \rightarrow V_L$  tal como no lema 3.13. Então temos que

$$\|u - I_h u\|_p^2 \leq C h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^2 + \varepsilon \right] |u|_{2,K}^2. \tag{3.92}$$



**Prova:** Da definição da norma  $\|\cdot\|_p$  em (3.78) e usando (3.90) e (3.91), temos que

$$\begin{aligned}
\|u - I_K u\|_p^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K \|u - I_K u\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla(u - I_K u)\|_{0,K}^2] \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^4 |u|_{2,K}^2 + \varepsilon h_K^2 |u|_{2,K}^2 \right] \\
&\leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^2 + \varepsilon \right] |u|_{2,K}^2.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

□

Apresentamos em seguida estimativas de erro a priori para o MEM-p e discutimos alguns aspectos de sua convergência na norma  $\|\cdot\|_p$ .

**Lema 3.15** (Convergência do MEM-p). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) e  $u_L \in V_L$  solução de (3.54). Então vale a seguinte estimativa de erro a priori:

$$\|u - u_L\|_p \leq Ch \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^2 + \varepsilon \right]^{1/2} |u|_{2,K}. \tag{3.94}$$

**Prova:** Consideremos primeiramente a decomposição

$$e := u - u_L = \eta + \xi, \tag{3.95}$$

onde

$$\eta = u - I_K u, \quad \xi = I_K u - u_L. \tag{3.96}$$

Lembrando que a forma bilinear  $\mathcal{B}_p(w, z)$  em (3.55) pode ser escrita sob a forma

$$\mathcal{B}_p(w, z) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K(w, z) + \varepsilon(\nabla w, \nabla z)_K], \tag{3.97}$$

e levando em conta (3.80) e (3.87), de (3.78) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\xi\|_p^2 &= \mathcal{B}_p(\xi, \xi) \\
&= \mathcal{B}_p(e - \eta, \xi) \\
&= \mathcal{B}_p(e, \xi) - \mathcal{B}_p(\eta, \xi) \\
&= -\mathcal{B}_p(\eta, \xi) \quad \text{de (3.85)} \\
&\leq |\mathcal{B}_p(\eta, \xi)| \\
&\leq C_1 \|\eta\|_p \|\xi\|_p,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

e conseqüentemente

$$\|\xi\|_p \leq C_1 \|\eta\|_p. \tag{3.99}$$

Por outro lado, considerando a desigualdade triangular e (3.99), de (3.95) temos que

$$\begin{aligned}
\|e\|_p &= \|\eta + \xi\|_p \\
&\leq \|\eta\|_p + \|\xi\|_p \\
&\leq \|\eta\|_p + C_1 \|\eta\|_p \\
&= (1 + C_1) \|\eta\|_p \\
&= C_3 \|\eta\|_p,
\end{aligned} \tag{3.100}$$

da qual completamos a prova usando (3.92).  $\square$

Analisamos em seguida a convergência do MEM-p na norma  $\|\cdot\|_p$  considerando por conveniência os casos assintóticos  $\varepsilon > \sigma h_K^2$  e  $\varepsilon < \sigma h_K^2$  apesar de ambos conduzirem ao mesmo resultado. Assim, do lema 3.15, temos imediatamente os dois resultados no corolário seguinte:

**Corolário 3.16** Para o erro  $\|u - u_L\|_p$  no lema 3.15 são válidas as estimativas:

$$i) \quad \|u - u_L\|_p \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}, \quad \text{se } \varepsilon > \sigma h_K^2. \tag{3.101}$$

$$ii) \quad \|u - u_L\|_p \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}, \quad \text{se } \varepsilon < \sigma h_K^2. \tag{3.102}$$

**Prova:** Vamos inicialmente provar o item *i*). Neste caso temos que  $\varepsilon > \sigma h_K^2$ , e portanto

$$\varepsilon > \sigma h_K^2 \implies \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} = 1,$$

e conseqüentemente de (3.94) chegamos a

$$\begin{aligned} \|u - u_L\|_p^2 &\leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma h_K^2 + \varepsilon] |u|_{2,K}^2 \\ &\leq Ch^2 \varepsilon |u|_{2,\Omega}^2, \end{aligned}$$

da qual completamos a prova extraindo a raiz quadrada.

No caso do item *ii*) temos  $\varepsilon < \sigma h_K^2$  que implica em

$$\min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} = \frac{2}{\alpha_K^2},$$

e portanto de (3.94) somos conduzidos a

$$\begin{aligned} \|u - u_L\|_p^2 &\leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \frac{2}{\alpha_K^2} h_K^2 + \varepsilon \right] |u|_{2,K}^2 \\ &= Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} 3\varepsilon |u|_{2,K}^2 \\ &\leq Ch^2 \varepsilon |u|_{2,\Omega}^2, \end{aligned}$$

da qual (3.102) segue-se após extração da raiz quadrada.  $\square$

No corolário que se segue apresentamos resultados de convergência em  $h$  do MEM-p nas normas naturais, ou seja, nas normas  $L^2(\Omega)$  e  $H^1(\Omega)$ .

**Corolário 3.17** Sejam  $u$  e  $u_L$  satisfazendo as condições do lema 3.15. Então são válidas as seguintes estimativas de erro a priori:

*i*) Supondo  $\varepsilon < \sigma h_K^2$ , então existe  $C$  independente de  $\varepsilon$  e  $\sigma$  tal que

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega} + h \|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 |u|_{2,\Omega}. \quad (3.103)$$

ii) Supondo  $\varepsilon > \sigma h_K^2$ , então existe  $C^*$  dependente de  $\varepsilon$  e  $\sigma$  tal que

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega} + h\|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega} \leq C^* h^2 |u|_{2,\Omega}. \quad (3.104)$$

**Prova:** Iniciamos a prova pelo item i). Assim, considerando a definição da norma  $\|\cdot\|_p$  em (3.78) e a primeira desigualdade em (3.91), obtemos

$$\begin{aligned} \|u - u_L\|_p^2 &\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ \frac{\alpha_K^2}{24}, \frac{1}{\alpha_K^2} \right\} \|u - u_L\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla(u - u_L)\|_{0,K}^2 \right] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \frac{1}{\alpha_K^2} \|u - u_L\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla(u - u_L)\|_{0,K}^2 \right] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \frac{\varepsilon}{h_K^2} \|u - u_L\|_{0,K}^2 + \varepsilon \|\nabla(u - u_L)\|_{0,K}^2 \right], \end{aligned} \quad (3.105)$$

que combinada com (3.102) conduz a

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega}^2 + h^2 \|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega}^2 \leq Ch^4 |u|_{2,\Omega}^2, \quad (3.106)$$

da qual obtemos (3.103), o que completa a prova do item i).

Apresentamos em seguida a prova do item ii). Agora, como  $\varepsilon > \sigma h_K^2$ , temos que

$$\min \left\{ 1, \frac{1}{\alpha_K^2} \right\} = 1 \quad \text{e} \quad \varrho_{min}^K \rightarrow 1,$$

e portanto, de (3.94) obtemos imediatamente as estimativas

$$\|u - u_L\|_p \leq Ch \sqrt{\sigma h^2 + \varepsilon} |u|_{2,\Omega}, \quad (3.107)$$

$$\|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega} \leq Ch \sqrt{\frac{\sigma h^2}{\varepsilon} + 1} |u|_{2,\Omega}, \quad (3.108)$$

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega} \leq Ch \sqrt{h^2 + \frac{\varepsilon}{\sigma}} |u|_{2,\Omega}. \quad (3.109)$$

Como podemos ver, a estimativa (3.109) é sub-ótima. Para recuperar uma estimativa ótima para (3.109), usamos o argumento da dualidade. Para tanto, seja  $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução do problema dual

$$\begin{cases} \mathcal{L}w := \varepsilon\Delta w + \sigma w = e & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.110)$$

onde  $e \in L^2(\Omega)$ .

Antes de prosseguir gostaríamos de introduzir o resultado de regularidade elíptica, veja por exemplo (Ciarlet, 1978), que para  $w$  solução de (3.110), fornece a estimativa

$$\|w\|_{2,\Omega} \leq C\|e\|_{0,\Omega}. \quad (3.111)$$

A solução  $w$  do problema (3.110) satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p(w, e) &= a(w, e) \\ &= (e, e)_\Omega, \end{aligned} \quad (3.112)$$

pois  $\mathcal{L}w - e = 0$ .

Com isso, de (3.112) chegamos à

$$\begin{aligned} \|e\|_{0,\Omega}^2 &= \mathcal{B}_p(w, e) \\ &= \mathcal{B}_p(w - I_K w, e) + \mathcal{B}_p(I_K w, e) \\ &= \mathcal{B}_p(w - I_K w, e) \quad \text{de (3.87)} \\ &\leq \|w - I_K w\|_p \|e\|_p \quad \text{de (3.80)} \\ &\leq Ch\sqrt{\sigma h^2 + \varepsilon} \|w\|_{2,\Omega} \|e\|_p \quad \text{de (3.92)} \\ &\leq Ch\sqrt{\sigma h^2 + \varepsilon} \|e\|_{0,\Omega} \|e\|_p \quad \text{de (3.113)}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

que implica em

$$\|e\|_{0,\Omega} \leq Ch\sqrt{\sigma h^2 + \varepsilon} \|e\|_p. \quad (3.114)$$

Usando (3.107) em (3.114) obtemos a estimativa

$$\|e\|_{0,\Omega} \leq Ch^2(\sigma h^2 + \varepsilon)|u|_{2,\Omega}. \quad (3.115)$$

Finalmente, multiplicando (3.108) por  $h$  e somando o resultado obtido com (3.115) completamos a prova com  $C^*$  dada por

$$C^* = C \left[ \sigma h^2 + \varepsilon + \sqrt{\frac{\sigma h^2}{\varepsilon} + 1} \right]. \quad (3.116)$$

□

**Observação 3.18** • Notemos que a estimativa de erro a priori na norma  $L_2(\Omega)$  apresentada em (3.103) foi obtida sem recorrer ao argumento da dualidade conhecido na literatura como “Niche-Trick”.

- A dependência do erro com respeito a  $\varepsilon$  é diminuída em relação ao método de Galerkin. Entretanto, ainda não há convergência uniforme com relação a  $\varepsilon$ , pois  $\|u\|_{H^2(\Omega)}$  depende de potências negativas de  $\varepsilon$ .
- As estimativas de erro a priori nas normas naturais  $L_2(\Omega)$  e  $H^1(\Omega)$  em (3.103) e (3.104) para o MEM-p são ótimas.

□

### 3.6.4 Estimativas de Erro para o MEM-g

Mostramos inicialmente no lema que se segue, que o MEM-g em (3.69) é consistente.

**Lema 3.19** (Consistência). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) e  $u_L \in V_L$  solução de (3.69), então temos que

$$\mathcal{B}_s(u - u_L, v_L) = 0 \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.117)$$

**Prova:**

Como  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) satisfaz o problema (3.69), ou seja ;

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s(u, v_L) &= a(u, v_L)_\Omega - \sum_K [\tau_s(\mathcal{L}u - f), z)_K] \\ &= a(u, v_L)_\Omega \\ &= (f, v_L)_\Omega \quad \forall v_L \in V_L, \end{aligned} \tag{3.118}$$

então

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_s(u - u_L, v_L) &= \mathcal{B}_s(u, v_L) - \mathcal{B}_s(u_L, v_L) \\ &= \mathcal{F}_s(v_L) - \mathcal{F}_s(v_L) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.119}$$

□

**Lema 3.20** (Aproximação). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $I_h : C^0(\Omega) \rightarrow V_L$  tal como no lema 3.13. Então

$$\|u - I_h u\|_s^2 \leq Ch^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^2 + \varepsilon \right] |u|_{2,K}^2. \tag{3.120}$$

**Prova:** Como as desigualdades em (3.91) continuam válidas com  $\mu_{max}^K$  em lugar de  $\varrho_{min}^K$ , a prova é análoga à do lema 3.14. □

**Lema 3.21** (Convergência do MEM-g). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) e  $u_L \in V_L$  solução de (3.69). Então vale a seguinte estimativa de erro a priori:

$$\|u - u_L\|_s \leq Ch \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K^2} \right\} h_K^2 + \varepsilon \right]^{1/2} |u|_{2,K}. \tag{3.121}$$

**Prova:** A preservação de (3.91) quando substituímos  $\mu_{max}^K$  por  $\varrho_{min}^K$ , torna a prova análoga à do lema 3.15.  $\square$

**Corolário 3.22** Para o erro  $\|u - u_L\|_s$  no lema 3.21 são válidas as estimativas:

$$i) \quad \|u - u_L\|_s \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}, \quad \text{se } \varepsilon > \sigma h_K^2. \quad (3.122)$$

$$ii) \quad \|u - u_L\|_s \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}, \quad \text{se } \varepsilon < \sigma h_K^2. \quad (3.123)$$

**Prova:** Análoga à prova do corolário 3.16.  $\square$

**Corolário 3.23** Sejam  $u$  e  $u_L$  satisfazendo as condições do lema 3.21. Então são válidas as seguintes estimativas de erro a priori:

*i)* Supondo  $\varepsilon < \sigma h_K^2$ , então existe  $C$  independente de  $\varepsilon$  e  $\sigma$  tal que

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega} + h\|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega} \leq Ch^2|u|_{2,\Omega}. \quad (3.124)$$

*ii)* Supondo  $\varepsilon > \sigma h_K^2$ , então existe  $C^*$  dependente de  $\varepsilon$  e  $\sigma$  tal que

$$\|u - u_L\|_{0,\Omega} + h\|\nabla(u - u_L)\|_{0,\Omega} \leq C^*h^2|u|_{2,\Omega}. \quad (3.125)$$

**Prova:** Análoga à prova do corolário 3.17, pois (3.91) vale com  $\mu_{max}^K$  em lugar de  $\varrho_{min}^K$ .  $\square$

### 3.6.5 Equivalência Entre o PGEM e o MEM-p

Ao longo da derivação do MEM-p apresentada na subseção 3.5.1.1, supomos (3.62) válido e negligenciamos o termo de bordo em (3.61). Esta subseção objetiva essencialmente mostrar que apesar do erro incorporado ao MEM-p através



dessas considerações, este permanece em última instância com um erro que é da mesma ordem do erro do PGEM do qual procede.

Seja  $\theta_{min}^K$  o autovalor generalizado definido na subseção B.2.2 do apêndice B) e consideremos a norma  $\|\cdot\|_h$  sobre  $V_L$ , associada a (3.21), dada por

$$\|w\|_h^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K}^2]. \quad (3.126)$$

Da definição de  $\theta_{min}^K$  temos que

$$\min \left\{ \frac{\alpha_K^2}{24}, \frac{1}{\alpha_K} \right\} \leq \theta_{min}^K \leq \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K} \right\}. \quad (3.127)$$

Em (Franca et al., 2005a), que é um trabalho dedicado à análise numérica do PGEM, mostra-se que este é consistente e bem posto. No entanto, para auxiliar nossa análise apresentamos de maneira breve o resultado referente a coercividade de  $\mathcal{B}_m(\cdot, \cdot)$  em (3.22).

**Lema 3.24** (Coercividade). A forma bilinear  $\mathcal{B}_m(\cdot, \cdot)$  é coerciva com respeito a norma  $\|\cdot\|_h$ , i.e, existe uma constante  $C_2$  tal que

$$\mathcal{B}_m(w, w) \geq C_2 \|w\|_h^2 \quad \forall w \in V_L. \quad (3.128)$$

**Prova:** Dado  $w \in V_L$ , a forma bilinear  $\mathcal{B}_m(w, w)$  pode ser reescrita sob a forma

$$\mathcal{B}_m(w, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma ([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](w), w)_K + \varepsilon (\nabla([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](w)), \nabla w)_K].$$

Assim, da expressão acima e usando o resultado no lema 3.7, itens *ii*) e

v), temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_m(w, w) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](w), w)_K + \varepsilon(\nabla([\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_K](w)), \nabla w)_K] \\
&\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \varrho_{min}^K \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K}^2] \\
&= \|w\|_h^2,
\end{aligned} \tag{3.129}$$

o que completa a prova. Aqui a constante de coercividade é unitária.  $\square$

**Lema 3.25** Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $u_L \in V_L$  soluções de (3.2) e (3.54), respectivamente. Então existe uma constante  $C$  tal que

$$\|u - u_L\|_h \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}. \tag{3.130}$$

**Prova:** Pela definição de  $\theta_{min}^K$  temos que  $0 < \theta_{min}^K \leq 1$ . Com isso, das definições das normas  $\|\cdot\|_p$  e  $\|\cdot\|_h$  em (3.78) e (3.128) respectivamente, temos que

$$\|u - u_L\|_h \leq \|u - u_L\|_p, \tag{3.131}$$

e consequentemente, o lema segue-se do corolário 3.16.  $\square$

**Teorema 3.26** Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  a solução exata de (3.2) e  $u_L$  e  $\bar{u}_L$  soluções de (3.54) e (3.21) respectivamente. Então existe uma constante positiva  $C^*$ , dependente de  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , tal que

$$\|u_L - \bar{u}_L\|_h \leq C^*h|u|_{2,\Omega}. \tag{3.132}$$

**Prova:** Do lema 3.24, da bilinearidade de  $\mathcal{B}_m(\cdot, \cdot)$  e da consistência do método (3.21) temos que

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_h^2 &\leq \mathcal{B}_m(u_L - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\
&= \mathcal{B}_m(u_L - u + u - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\
&= \mathcal{B}_m(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) + \mathcal{B}_m(u - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\
&= \mathcal{B}_m(u_L - u, u_L - \bar{u}_L).
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Consideremos em seguida a definição de  $\mathcal{B}_m(w, z)$  em (3.22) e o lema 3.12. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_m(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma(u_L - u, u_L - \bar{u}_L)_K \\
&+ \varepsilon(\nabla(u_L - u), \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K - \sigma(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u)), u_L - \bar{u}_L)_K \\
&\quad - \varepsilon(\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u))), \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\sigma \rho_{max}^K(\mathcal{L}(u_L - u), u_L - \bar{u}_L)_K - \sigma(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u)), u_L - \bar{u}_L)_K \\
&\quad - \varepsilon(\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u))), \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K].
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Usando a última igualdade de (3.134) em (3.133) e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz chegamos à

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_h^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \rho_{max}^K \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \right. \\
&\quad + \sigma \|\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u))\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \\
&\quad \left. + \varepsilon \|\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u)))\|_{0,K} \|\nabla(u_L - \bar{u}_L)\|_{0,K} \right].
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Pela definição da norma  $\|\cdot\|_h$  em (3.126) temos

$$\|w\|_{0,K} \leq \sqrt{\frac{1}{\sigma \varrho_{min}^K}} \|w\|_h, \quad \|\nabla w\|_{0,K} \leq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \theta_{min}^K}} \|w\|_h, \tag{3.136}$$

que permitem escrever (3.135) como

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_h &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \rho_{max}^K \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho_{min}^K}} \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \right. \\
&\quad + \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho_{min}^K}} \|\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u))\|_{0,K} \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta_{min}^K}} \|\nabla(\mathcal{M}_K(\mathcal{L}(u_L - u)))\|_{0,K} \right].
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Em seguida, como  $\mathcal{L}u = f \in V_L$ , usamos os itens *iv*) e *vii*) do lema 3.7 para escrever (3.137) sob a forma

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_h &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{\varrho_{min}^K}} \left( \sigma \rho_{max}^K + \sqrt{\sigma^2 \gamma_{max}^K} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma} \sqrt{\frac{\sigma^2 \eta_{max}^K}{\theta_{min}^K}} \right] \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Fazendo  $C_1^* = \max\{1/\sqrt{\sigma}, \sqrt{\varepsilon}/\sigma\}$ , e considerando a definição e limitação (veja figura 3.2 para ilustração)

$$\begin{aligned}
\beta_K &:= \left( \sigma \rho_{max}^K + \sqrt{\sigma^2 \gamma_{max}^K} \right) \sqrt{\frac{1}{\varrho_{min}^K}} + \sqrt{\frac{\sigma^2 \eta_{max}^K}{\theta_{min}^K}} \\
&\leq C_2 \alpha_K,
\end{aligned} \tag{3.139}$$

de (3.138) chegamos à

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_h &\leq \sum_K C_1^* \beta_K \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \\
&= \sum_K C_1^* \beta_K \|\sigma(u_L - u) - \varepsilon \Delta(u_L - u)\|_{0,K} \\
&= \sum_K C_1^* \beta_K \|\sigma(u_L - u) - \varepsilon \Delta u_L + \varepsilon \Delta u\|_{0,K} \\
&= \sum_K C_1^* \beta_K \|\sigma(u_L - u) + \varepsilon \Delta u\|_{0,K} \\
&\leq \sum_K C_1^* C_2 \alpha_K \|\sigma(u_L - u) + \varepsilon \Delta u\|_{0,K}.
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Aplicando a desigualdade triangular à última desigualdade em (3.140),

usando o resultado (3.103), corolário 3.17, e considerando a definição de  $\alpha_K = C_3\sqrt{\sigma/\varepsilon}h_K$  obtemos

$$\begin{aligned} \|u_L - \bar{u}_L\|_h &\leq \sum_K [C_1^* C_2 \alpha_K (\|\sigma(u_L - u)\|_{0,K} + \varepsilon|u|_{2,K})] \\ &\leq C^* h |u|_{2,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

□

O próximo resultado demonstra a convergência do método PGEM, um resultado já antecipado em (Franca et al., 2005a). Aqui, o resultado é demonstrado de forma indireta via o novo método estabilizado.

**Corolário 3.27** Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $\bar{u}_L \in V_L$  soluções de (3.2) e (3.21), respectivamente. Então existe uma constante positiva  $C_6^*$  dependente de  $\sigma$  e  $\varepsilon$  tal que

$$\|u - \bar{u}_L\|_h \leq C_6^* h |u|_{2,\Omega}. \quad (3.142)$$

**Prova:** Consideremos  $u_L$  solução de (3.54). Logo, da desigualdade triangular obtemos

$$\|u - \bar{u}_L\|_h = \|u - \bar{u}_L + u_L - u_L\|_h \leq \|u - u_L\|_h + \|u_L - \bar{u}_L\|_h, \quad (3.143)$$

e o resultado segue do lema 3.25 e do teorema 3.26.

□

**Observação 3.28**

- O resultado do teorema 3.26 não só demonstra a convergência do MEM-p como fornece uma justificativa para a sua derivação.
- A figura 3.2 ilustra o comportamento do parâmetro  $\beta_K$  em função de  $\alpha_K$ . Como podemos ver,  $\beta_K$  é limitada superiormente por  $C\alpha_K$ . As expressões e os gráficos de  $\sigma\rho_{max}^K$ ,  $\varrho_{min}^K$ ,  $\sigma^2\gamma_{max}^K$ ,  $\sigma^2\eta_{max}^K$  e  $\theta_{min}^K$  em função de  $\alpha_K$  podem ser vistos no apêndice B.

- Estimativas de erro a priori ótimas e sub-ótimas nas normas  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$  respectivamente, para o erro  $u - \bar{u}_L$  são prontamente obtidas de (3.142). Novamente, usando o argumento da dualidade recuperamos a estimativa ótima em  $L^2(\Omega)$  para o erro  $u - \bar{u}_L$ .

□

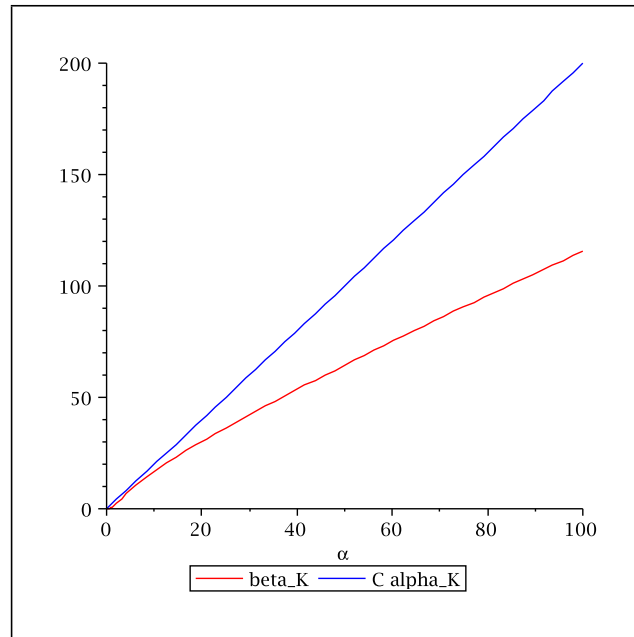


Figura 3.2: Gráficos de  $\beta_K$  e  $C\alpha_K$  versus  $\alpha_K$ ,  $C > 0$ .

### 3.6.6 Equivalência Entre o MGE e o MEM-g

A análise desenvolvida nesta subseção visa justificar as aproximações introduzidas ao longo da derivação do MEM-g apresentada na subseção 3.5.2.1, através do resultado no teorema 3.32, utilizado também na obtenção das estimativas de erro a priori fornecidas na seção 3.7.

Sejam  $\mu_{min}^K$  e  $\theta_{min}^K$  autovalores generalizados definidos na subseção B.2.2 do apêndice B e consideremos a norma  $\|\cdot\|_r$  sobre  $V_L$ , associada a (3.45), dada por

$$\|w\|_r^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \mu_{min}^K \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K}^2 \right]. \quad (3.144)$$

Da definição de  $\theta_{min}^K$  temos que

$$\min \left\{ \frac{\alpha_K^2}{24}, \frac{1}{\alpha_K} \right\} \leq \theta_{min}^K \leq \min \left\{ 1, \frac{2}{\alpha_K} \right\}. \quad (3.145)$$

Apesar de dedicarmos a seção seguinte à análise do MGE, por conveniência, antecipamos os resultados referentes à consistência e existência e unicidade desse método.

**Lema 3.29** (Continuidade e Coercividade para o MGE). A forma bilinear  $\mathcal{B}_g(\cdot, \cdot)$  é contínua e coerciva com respeito a norma  $\|\cdot\|_r$ , i.e, existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$i) \quad |\mathcal{B}_g(w, z)| \leq C_1 \|w\|_r \|z\|_r \quad \forall w, z \in V_L, \quad (3.146)$$

$$ii) \quad \mathcal{B}_g(w, w) \geq C_2 \|w\|_r^2 \quad \forall w \in V_L, \quad (3.147)$$

e conseqüentemente existe uma única solução para o problema (3.45).

**Prova:** Iniciamos a prova pelo item *i*). Antes porém gostaríamos de introduzir a desigualdade seguinte. Dos resultados dos itens *v*) e *vi*), lema 3.7, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi_K(w)\|_{0,K}^2 &= (\nabla \chi_K(w), \nabla \chi_K(w))_K \\ &= (\nabla \chi_K(w), \nabla w)_K + (\nabla \chi_K(w), \nabla [-\sigma \mathcal{M}_K(w)])_K, \end{aligned} \quad (3.148)$$

que implica em

$$\|\nabla\chi_K(w)\|_{0,K} \leq \sqrt{\theta_{max}^K} \|\nabla w\|_{0,K} + \sqrt{\zeta_{max}^K} \|w\|_{0,K}. \quad (3.149)$$

Para  $w, z \in V_L$ , a definição de  $\mathcal{B}_g(\cdot, \cdot)$ , equação (3.46), fornece

$$\mathcal{B}_g(w, z) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma(\chi_K(w), \chi_K(z))_K + \varepsilon(\nabla\chi_K(w), \nabla\chi_K(z))_K \right], \quad (3.150)$$

da qual, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\mathcal{B}_g(w, z) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \|\chi_K(w)\|_{0,K} \|\chi_K(z)\|_{0,K} + \varepsilon \|\nabla\chi_K(w)\|_{0,K} \|\nabla\chi_K(z)\|_{0,K} \right]. \quad (3.151)$$

Levando em conta o resultado do item *i*), lema 3.7, e (3.149), de (3.151) chegamos à

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_g(w, z) &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ (\sigma\mu_{max}^K + \varepsilon\zeta_{max}^K) \|w\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \varepsilon\theta_{max}^K \|\nabla w\|_{0,K} \|\nabla z\|_{0,K} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon\sqrt{\theta_{max}^K} \sqrt{\zeta_{max}^K} \|\nabla w\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \varepsilon\sqrt{\theta_{max}^K} \sqrt{\zeta_{max}^K} \|w\|_{0,K} \|\nabla z\|_{0,K} \right]. \end{aligned} \quad (3.152)$$

O comportamento dos parâmetros  $\mu_{min}^K$ ,  $\mu_{max}^K$ ,  $\zeta_{max}^K$ ,  $\theta_{min}^K$  e  $\theta_{max}^K$  ilustrado no apêndice B (figuras B.14 - B.17), indica que existe uma constante positiva,  $C$ , independente de  $h$  tal que

$$\sigma\mu_{max}^K + \varepsilon\zeta_{max}^K \leq C\sigma\mu_{min}^K, \quad (3.153)$$

$$\theta_{max}^K \leq C\theta_{min}^K, \quad (3.154)$$

e

$$\sqrt{\theta_{max}^K} \sqrt{\zeta_{max}^K} \leq C\sigma\mu_{min}^K \theta_{min}^K. \quad (3.155)$$



Usando as desigualdades (3.153), (3.154) e (3.155) em (3.152) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_g(w, z) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma \mu_{min}^K \|w\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \varepsilon \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K} \|\nabla z\|_{0,K} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sigma \mu_{min}^K \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K} \|z\|_{0,K} + \varepsilon \sigma \mu_{min}^K \theta_{min}^K \|w\|_{0,K} \|\nabla z\|_{0,K} \right], \end{aligned} \quad (3.156)$$

da qual concluímos que

$$\mathcal{B}_g(w, z) \leq C \|w\|_r \|z\|_r, \quad (3.157)$$

como queríamos demonstrar.

Agora provaremos o item *ii*). Assim, considerando inicialmente a definição de  $\mathcal{B}_g(\cdot, \cdot)$  em (3.46), para  $w \in V_L$  temos que

$$\mathcal{B}_g(w, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma (\chi_K(w), \chi_K(w))_K + \varepsilon (\nabla \chi_K(w), \nabla \chi_K(w))_K \right], \quad (3.158)$$

que pode ser escrita sob a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_g(w, w) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma (\chi_K(w), \chi_K(w))_K + \varepsilon (\nabla \chi_K(w), \nabla w)_K \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon (\nabla \chi_K(w), \nabla [-\sigma \mathcal{M}_K(w)])_K \right], \end{aligned} \quad (3.159)$$

da qual, considerando os resultados dos itens *i*) e *vi*) do lema 3.7 obtemos

$$\mathcal{B}_g(w, w) \geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ (\sigma \mu_{min}^K + \varepsilon \zeta_{min}^K) \|w\|_{0,K}^2 + \varepsilon \theta_{min}^K \|\nabla w\|_{0,K}^2 \right], \quad (3.160)$$

de onde o resultado se segue com a constante de coercividade unitária, lembrando que o parâmetro  $\zeta_{min}^K$  é positivo.

□

**Lema 3.30** (Consistência do MGE). Seja  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) e

$u_L$  solução de (3.45). Então,

$$\mathcal{B}_g(u - u_L, v_L) = 0 \quad \forall v_L \in V_L. \quad (3.161)$$

**Prova:** Reescrevendo o MGE proposto em (3.45) sob a forma

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} [a(u_L, \chi_K(v_L))_K + a(\mathcal{M}_K(f - \mathcal{L}u_L), \chi_K(v_L))_K] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, \chi_K(v_L))_K \quad (3.162)$$

$$\forall v_L \in V_L,$$

constatamos imediatamente que  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  solução de (3.2) satisfaz (3.45), pois o segundo termo no lado esquerdo de (3.162) desaparece, uma vez que  $f - \mathcal{L}u = 0$ . Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_g(u - u_L, v_L) &= \mathcal{B}_g(u, v_L) - \mathcal{B}_g(u_L, v_L) \\ &= \mathcal{F}_g(v_L) - \mathcal{F}_g(v_L) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.163)$$

que completa a prova. □

Estimamos primeiramente o erro da solução do método estabilizado (3.69) na norma  $\|\cdot\|_r$ .

**Lema 3.31** Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $u_L \in V_L$  soluções de (3.2) e (3.69), respectivamente. Então existe uma constante  $C$  tal que

$$\|u - u_L\|_r \leq Ch\sqrt{\varepsilon}|u|_{2,\Omega}. \quad (3.164)$$

**Prova:** Pela definição de  $\theta_{min}^K$  temos que  $0 < \theta_{min}^K \leq 1$ . Lembramos também que  $\mu_{min}^K \leq \mu_{max}^K$ . Com isso, das definições das normas  $\|\cdot\|_s$  e  $\|\cdot\|_r$  em (3.78) e (3.144)

respectivamente, temos que

$$\|u - u_L\|_r \leq \|u - u_L\|_s, \quad (3.165)$$

e conseqüentemente, o lema segue-se do corolário 3.22.  $\square$

Em seguida, mostramos o erro entre as soluções dos métodos estabilizado, (3.69), e enriquecido, (3.45), na norma  $\|\cdot\|_r$ .

**Teorema 3.32** Consideremos  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  a solução exata de (3.2). Sejam  $u_L$  e  $\bar{u}_L$  soluções de (3.69) e (3.45) respectivamente. Então existe uma constante positiva  $C^*$  dependente de  $\sigma$  e  $\varepsilon$  tal que

$$\|u_L - \bar{u}_L\|_r \leq C^* h |u|_{2,\Omega}. \quad (3.166)$$

**Prova:** Levando em conta a bilinearidade de  $\mathcal{B}_g(\cdot, \cdot)$ , os resultados em (3.147) e (3.161), somos conduzidos à

$$\begin{aligned} \|u_L - \bar{u}_L\|_r^2 &\leq \mathcal{B}_g(u_L - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\ &= \mathcal{B}_g(u_L - u + u - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\ &= \mathcal{B}_g(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) + \mathcal{B}_g(u - \bar{u}_L, u_L - \bar{u}_L) \\ &= \mathcal{B}_g(u_L - u, u_L - \bar{u}_L). \end{aligned} \quad (3.167)$$

Das definições de  $\mathcal{B}_g(w, z)$  e  $\chi_K(w)$  em (3.46) e (3.44) respectivamente,

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_g(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma(\chi_K(u_L - u), \chi_K(u_L - \bar{u}_L))_K \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon(\nabla(\chi_K(u_L - u)), \nabla(\chi_K(u_L - \bar{u}_L)))_K \right] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma([\mathcal{I} - \mathcal{M}_K \mathcal{L}](u_L - u), [\mathcal{I} - \mathcal{M}_K \mathcal{L}](u_L - \bar{u}_L))_K \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon(\nabla([\mathcal{I} - \mathcal{M}_K \mathcal{L}](u_L - u)), \nabla([\mathcal{I} - \mathcal{M}_K \mathcal{L}](u_L - \bar{u}_L)))_K \right],
\end{aligned} \tag{3.168}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_g(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \sigma(u_L - u, u_L - \bar{u}_L)_K + \varepsilon(\nabla(u_L - u), \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K \right. \\
&\quad - \sigma(\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)], (u_L - \bar{u}_L))_K \\
&\quad + \sigma(\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)], \mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)])_K \\
&\quad - \sigma(u_L - u, \mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)])_K \\
&\quad - \varepsilon(\nabla(u_L - u), \nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]])_K \\
&\quad - \varepsilon(\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]], \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K \\
&\quad \left. + \varepsilon(\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]], \nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]])_K \right].
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Considerando o resultado (3.117), de (3.169) chegamos à

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_g(u_L - u, u_L - \bar{u}_L) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \tau_s (\mathcal{L}(u_L - u), u_L - \bar{u}_L)_K \right. \\
&\quad - \sigma (\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)], u_L - \bar{u}_L)_K \\
&\quad + \sigma (\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)], \mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)])_K \\
&\quad - \sigma (u_L - u, \mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)])_K \\
&\quad - \varepsilon (\nabla(u_L - u), \nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]])_K \\
&\quad - \varepsilon (\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]], \nabla(u_L - \bar{u}_L))_K \\
&\quad \left. + \varepsilon (\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]], \nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]])_K \right].
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Usando (3.170) em (3.167) e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz somos conduzidos à

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_r^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \tau_s \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \right. \\
&\quad + \sigma \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \\
&\quad + \sigma \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]\|_{0,K} \\
&\quad + \sigma \|u_L - u\|_{0,K} \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]\|_{0,K} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]]\|_{0,K} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \|\nabla(u_L - \bar{u}_L)\|_{0,K} \\
&\quad \left. + \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - \bar{u}_L)]]\|_{0,K} \right],
\end{aligned} \tag{3.171}$$

na qual consideramos os resultados do lema 3.7 para obter

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_r^2 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \tau_s \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \right. \\
&+ \sigma \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \\
&+ \sigma^2 \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \sqrt{\gamma_{max}^K} \\
&+ \sigma^2 \|u_L - u\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \sqrt{\gamma_{max}^K} \\
&+ \varepsilon \sigma \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \sqrt{\eta_{max}^K} \\
&+ \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \|\nabla(u_L - \bar{u}_L)\|_{0,K} \\
&+ \left. \varepsilon \sigma \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \|u_L - \bar{u}_L\|_{0,K} \sqrt{\eta_{max}^K} \right].
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Pela definição da norma  $\|\cdot\|_r$  em (3.144) temos

$$\|w\|_{0,K} \leq \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_{min}^K}} \|w\|_r, \quad \|\nabla w\|_{0,K} \leq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \theta_{min}^K}} \|w\|_r, \tag{3.173}$$

que permitem escrever (3.172) como

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_r &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \tau_s \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_{min}^K}} \right. \\
&+ \sigma \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \sigma^2 \|\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]\|_{0,K} \sqrt{\frac{\gamma_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \sigma^2 \|u_L - u\|_{0,K} \sqrt{\frac{\gamma_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \varepsilon \sigma \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{\eta_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \theta_{min}^K}} \\
&+ \left. \varepsilon \sigma \|\nabla[\mathcal{M}_K[\mathcal{L}(u_L - u)]]\|_{0,K} \sqrt{\frac{\eta_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \right].
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Como  $\mathcal{L}u = f \in V_L$ , considerando novamente os resultados do lema 3.7 em (3.174) somos conduzidos à

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_r &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[ \tau_s \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_{min}^K}} \right. \\
&+ \sigma \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{\gamma_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} + \sigma^2 \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{(\gamma_{max}^K)^2}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \sigma^2 \|u_L - u\|_{0,K} \sqrt{\frac{(\gamma_{max}^K)^2}{\sigma \mu_{min}^K}} + \varepsilon \sigma \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{\eta_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \\
&+ \left. \varepsilon \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{\eta_{max}^K}{\varepsilon \theta_{min}^K}} + \varepsilon \sigma \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \sqrt{\frac{\eta_{max}^K}{\sigma \mu_{min}^K}} \right]. \tag{3.175}
\end{aligned}$$

Por conveniência, definimos os parâmetros

$$a_1^K = \frac{1}{\sqrt{\sigma \mu_{min}^K}} \left( \tau_s + \sqrt{\sigma^2 \gamma_{max}^K} + \sigma^2 \gamma_{max}^K \right), \tag{3.176}$$

$$a_2^K = \sigma^2 \gamma_{max}^K \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu_{min}^K}}, \tag{3.177}$$

$$a_3^K = \sqrt{\frac{\sigma \eta_{max}^K}{\mu_{min}^K}}, \tag{3.178}$$

$$a_4^K = \sqrt{\frac{\sigma \eta_{max}^K}{\mu_{min}^K}} + \sqrt{\frac{\sigma^2 \eta_{max}^K}{\varepsilon \theta_{min}^K}}, \tag{3.179}$$

que permitem escrever (3.175) de maneira compacta como

$$\begin{aligned}
\|u_L - \bar{u}_L\|_r &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ a_1^K \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} + a_2^K \|u_L - u\|_{0,K} \right. \\
&+ \left. \varepsilon a_3^K \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} + \varepsilon a_4^K \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} \right\}. \tag{3.180}
\end{aligned}$$

A figura 3.3 ilustra o comportamento dos parâmetros  $a_j^K$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , em função de  $\alpha_K$ , para os quais a limitação

$$a_j^K \leq C \alpha_K, \tag{3.181}$$

é válida. Com isso, de (3.180) chegamos à

$$\|u_L - \bar{u}_L\|_r \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \alpha_K \left[ (1 + \varepsilon) \|\mathcal{L}(u_L - u)\|_{0,K} + \|u_L - u\|_{0,K} + \varepsilon \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \right] \right\}, \quad (3.182)$$

que implica em

$$\begin{aligned} \|u_L - \bar{u}_L\|_r \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \alpha_K \left[ (1 + \varepsilon) \|\sigma(u_L - u) + \varepsilon \Delta(u_L - u)\|_{0,K} \right. \right. \\ \left. \left. + \|u_L - u\|_{0,K} + \varepsilon \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Considerando a desigualdade triangular e rearrumando termos, (3.183)

toma a forma

$$\begin{aligned} \|u_L - \bar{u}_L\|_r \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ C \alpha_K \left[ (\sigma(1 + \varepsilon) + 1) \|u_L - u\|_{0,K} + \varepsilon(1 + \varepsilon) |u|_{2,K} \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon \|\nabla(u_L - u)\|_{0,K} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

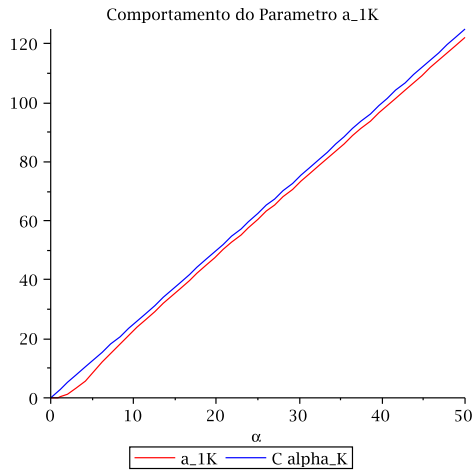
Lembrando que  $\alpha_K = (\sigma h^2 / \varepsilon)^{1/2}$ , e usando os resultados do corolário 3.23, somos finalmente conduzidos à

$$\|u_L - \bar{u}_L\|_r \leq C^* h |u|_{2,\Omega}, \quad (3.185)$$

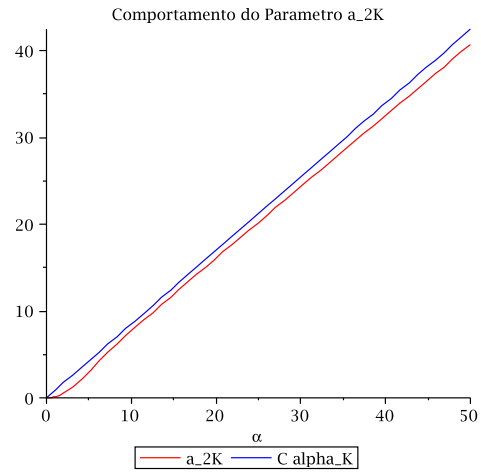
que completa a prova.

□

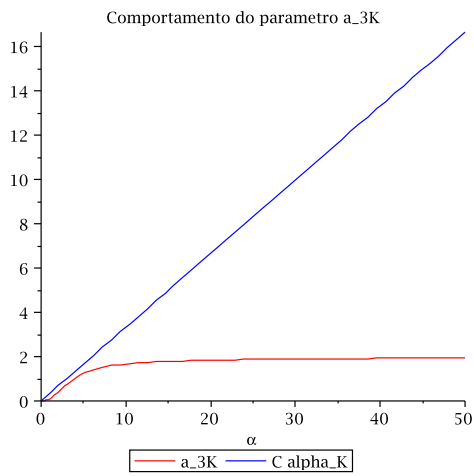




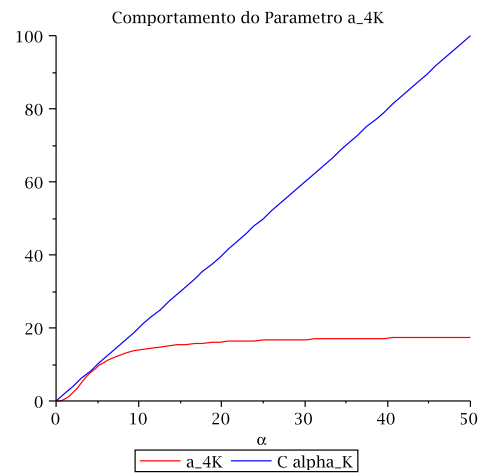
(a) Parâmetro  $a_1^K$  em função de  $\alpha_K$



(b) Parâmetro  $a_2^K$  em função de  $\alpha_K$



(c) Parâmetro  $a_3^K$  em função de  $\alpha_K$



(d) Parâmetro  $a_4^K$  em função de  $\alpha_K$

Figura 3.3: Gráficos de  $a_j^K$  limitados por  $C\alpha_K$ .

**Observação 3.33** O resultado do lema 3.32 não só mostra a preservação da convergência do MEM-g como fornece uma justificativa para a sua derivação.

□

### 3.7 Análise Numérica do Novo Método Enriquecido

Destinamos esta seção à análise numérica do novo método de Galerkin enriquecido (MGE) em (3.45). Já mostramos na seção anterior que o MGE é consistente e bem posto. Com isso, apresentamos imediatamente na subseção seguinte as estimativas de erro a priori para o MGE.

### 3.7.1 Estimativas de Erro para o MGE

**Corolário 3.34** Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $\bar{u}_L \in V_L$  soluções de (3.2) e (3.45), respectivamente. Então existe uma constante positiva  $C^*$  dependente de  $\sigma$  e  $\varepsilon$  tal que

$$\|u - \bar{u}_L\|_r \leq C^* h |u|_{2,\Omega}. \quad (3.186)$$

**Prova:** Consideremos  $u_L$  solução de (3.69). Logo, da desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}_L\|_r &= \|u - \bar{u}_L + u_L - u_L\|_r \\ &\leq \|u - u_L\|_r + \|u_L - \bar{u}_L\|_r, \end{aligned} \quad (3.187)$$

e o resultado segue do lema 3.31 e do teorema 3.32.

□

Apresentamos em seguida estimativas de erro a priori para o MGE nas normas naturais  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ .

**Corolário 3.35** Sejam  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  e  $\bar{u}_L \in V_L$  soluções de (3.2) e (3.45), respectivamente. Então existe uma constante positiva  $C^*$  dependente de  $\sigma$  e  $\varepsilon$  tal que

$$\|u - \bar{u}_L\|_{0,\Omega} + h \|\nabla(u - \bar{u}_L)\|_{0,\Omega} \leq C^* h^2 |u|_{2,\Omega}. \quad (3.188)$$

**Prova:** Como  $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_{min}^K = \lim_{h \rightarrow 0} \theta_{min}^K = 1$ , do resultado do corolário 3.34 temos imediatamente

$$\|u - \bar{u}_L\|_{0,\Omega} \leq C^* h |u|_{2,\Omega}, \quad (3.189)$$

e

$$\|\nabla(u - \bar{u}_L)\|_{0,\Omega} \leq C^* h |u|_{2,\Omega}. \quad (3.190)$$

Entretanto, a estimativa (3.189) é sub-ótima. Usando o argumento da dualidade de modo análogo ao corolário 3.17, recuperamos a otimalidade de (3.189).

O resultado assim obtido juntamente com (3.190) completam a prova.

□

### 3.8 Validações Numéricas

Nesta seção apresentamos os resultados de experimentos numéricos usando os novos métodos propostos para o problema modelo (3.1). Para tanto, tomamos em todos os exemplos  $\Omega \equiv (0, 1)^2$  e  $\sigma = 1$ .

O primeiro exemplo diz respeito a validação das taxas de convergência ótimas provadas na seção anterior. No segundo e terceiro exemplos, consideramos o MEM-p, MEM-g e MGE em problemas de valor de contorno singularmente perturbados. Avaliamos numericamente a robustez dos métodos com relação ao parâmetro,  $\varepsilon$ , e discutimos suas performances em relação aos esquemas de Galerkin, de estabilização clássica USFEM (veja apêndice C), e ao PGEM.

Nas simulações numéricas, consideramos os dois primeiros problemas em um domínio discretizado por malhas estruturadas. Para verificar a sensibilidade dos novos métodos com respeito a malha, resolvemos o terceiro exemplo sobre uma malha triangular não estruturada.

#### 3.8.1 Problema com Solução Analítica : Validação da Convergência

Lembrando que  $\Omega = (0, 1)^2$  e  $\sigma = 1$ , (3.1) toma a forma

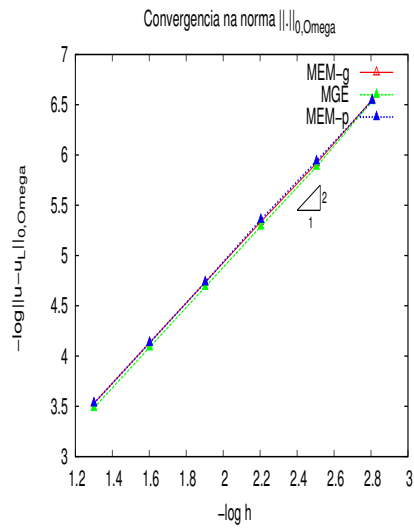
$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.191)$$

onde a função  $f$  é escolhida tal que a solução analítica do problema seja

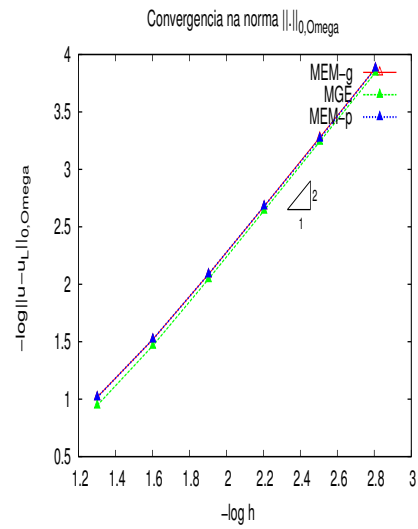
$$u(x, y) = \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \right) \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \right). \quad (3.192)$$

Verificamos que os resultados teóricos são validados numericamente. De

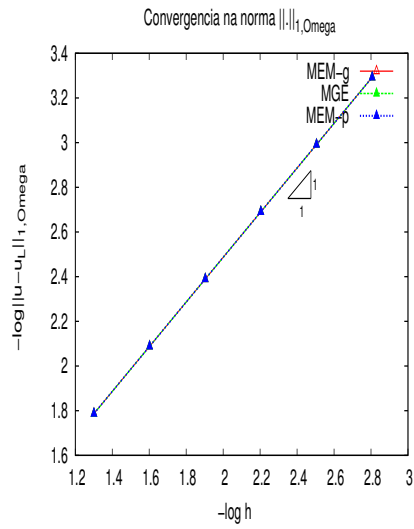
fato, os erros nas normas  $L^2$  e  $H^1$  convergem, respectivamente com ordem  $h^2$  e  $h$  (vide figura 3.4) para os valores de  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = 10^{-3}$ .



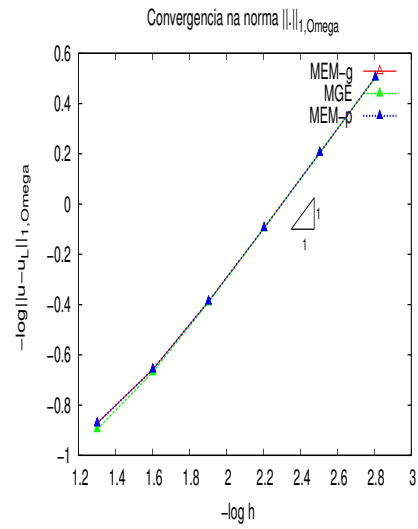
(a) Caso  $\varepsilon = 1$



(b) Caso  $\varepsilon = 10^{-3}$



(c) Caso  $\varepsilon = 1$



(d) Caso  $\varepsilon = 10^{-3}$

Figura 3.4: Convergência dos métodos MEM-p, MEM-g e MGE sob  $h$ -refinamento.

### 3.8.2 Problema Elíptico com Termo de Fonte Constante

Nosso segundo problema exemplo é dado por

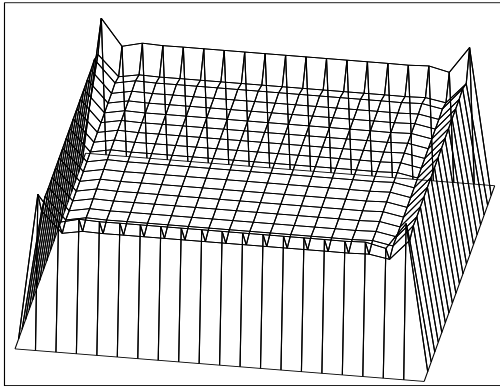
$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + u = 1, & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.193)$$

Com o objetivo de verificar a grau de acuracidade dos métodos MEM-p, MEM-g e MGE em relação as formulações PGEM, Galerkin e USFEM, resolvemos o problema exemplo em (3.193) sobre uma malha uniforme quadrangular de  $20 \times 20$  elementos para  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Para este teste numérico, (Ilinca e Héту, 2008) ressaltam a perda de acuracidade apresentada pelo PGEM.

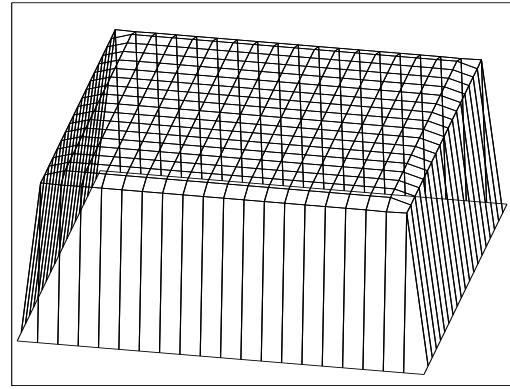
Como trata-se de um caso do tipo reação dominante, algumas dificuldades por parte dos métodos em capturar camadas limites próximas ao contorno são esperadas. As soluções obtidas são mostradas nas figura 3.5. Observando estas figuras, constatamos que todos os métodos apresentam performance superior ao método de Galerkin. Entretanto, os novos métodos propostos fornecem maior precisão.

Apesar de não exibirmos as soluções para  $\varepsilon = 1$  e  $\varepsilon = 10^{-3}$ , constatamos que nesses casos todos os métodos comparados aqui apresentam performances equiparáveis.

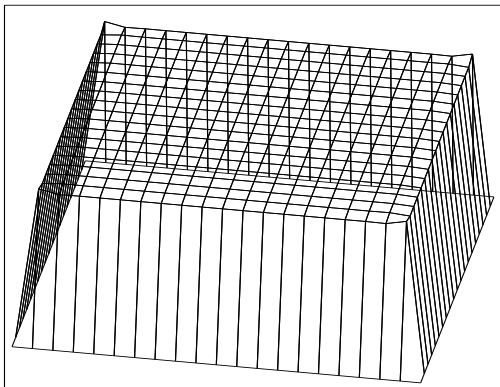
Também validamos o novo método enriquecido, MGE, utilizando uma malha estruturada composta por triângulos. Os resultados apresentados nas figuras 3.6, 3.7 e 3.8 evidenciam a superioridade do novo método em corrigir as oscilações espúrias.



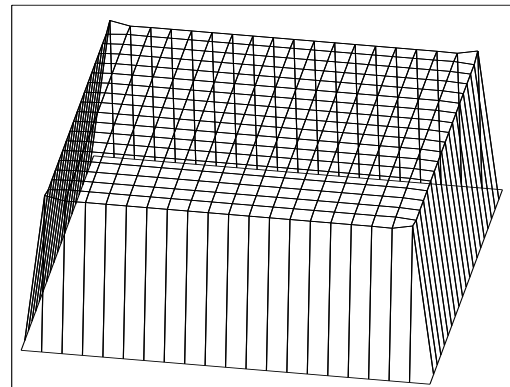
(a) Solução via método de Galerkin



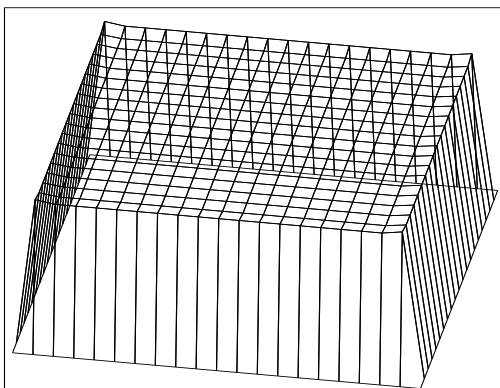
(b) Solução via USFEM



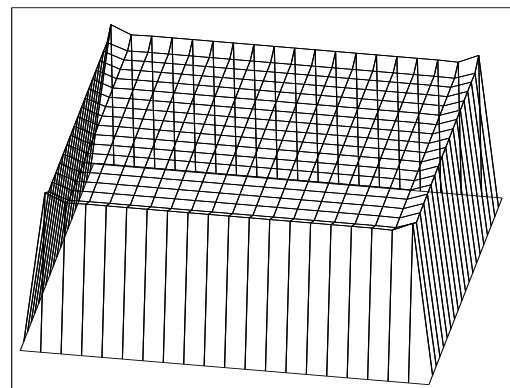
(c) Solução via MEM-p



(d) Solução via MEM-g



(e) Solução via MGE



(f) Solução via PGEM

Figura 3.5: Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

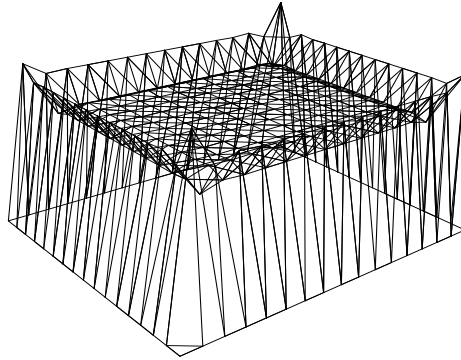


Figura 3.6: Solução do método de Galerkin, para  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

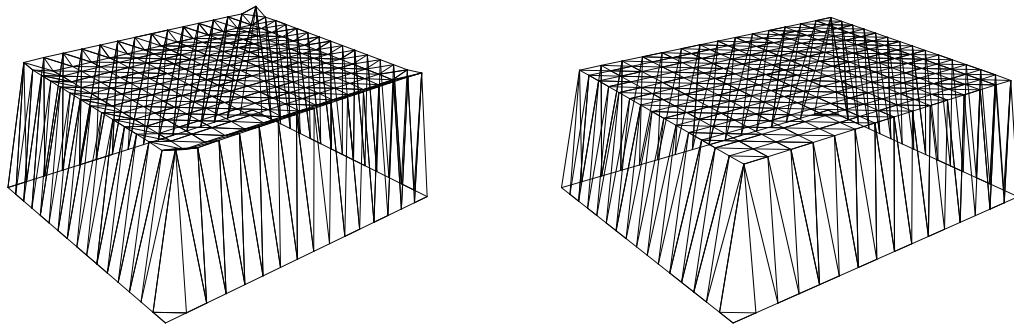


Figura 3.7: Comparação entre os métodos PGEM (à esquerda) e MGE (à direita), para  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

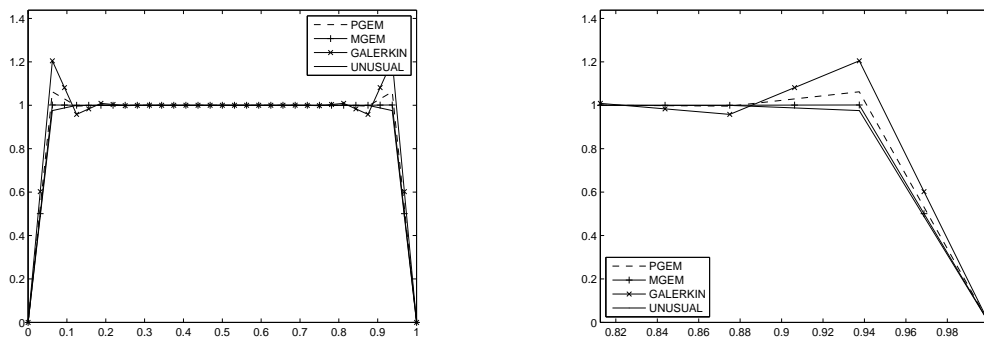


Figura 3.8: Perfil das soluções em  $x = 0.5$  correspondente zoon à direita para  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

### 3.8.3 Problema Elíptico com Termo de Fonte Variável

Neste terceiro problema exemplo, estendemos as observações do exemplo prévio ao caso em que  $f$  não é mais constante. Além disso, modificamos ligeira-

mente as condições de contorno. Portanto, consideremos o problema de valor de contorno

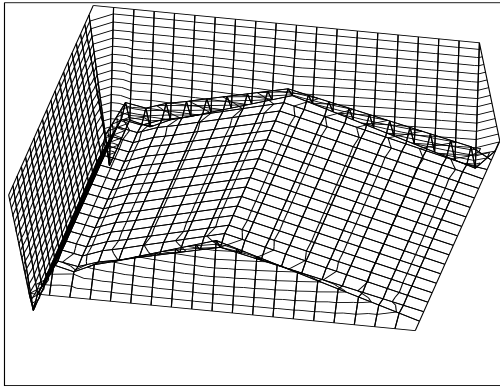
$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + u = f(x, y), & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 1 & \text{para } \begin{cases} x \leq 1, y = 1, \\ y \leq 1, x = 0, \end{cases} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.194)$$

com

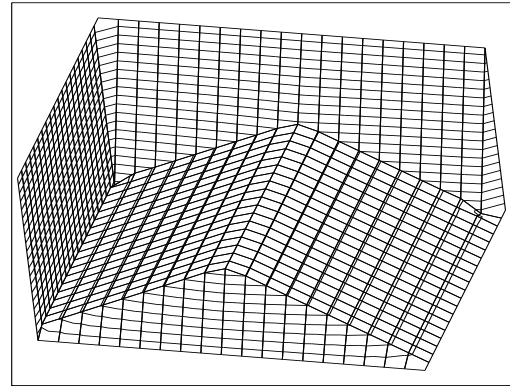
$$f(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.195)$$

Como podemos ver nas figuras 3.9 e 3.10, os novos métodos propostos apresentam performance superior ao método de Galerkin e equiparável aos demais métodos, corrigindo portanto as oscilações espúrias.

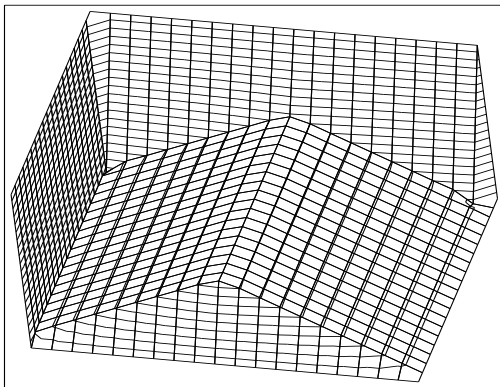




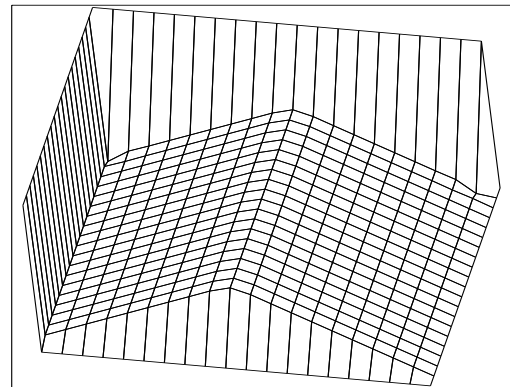
(a) Solução via método de Galerkin



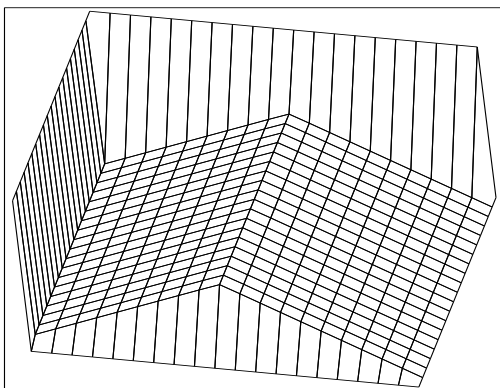
(b) Solução via USFEM



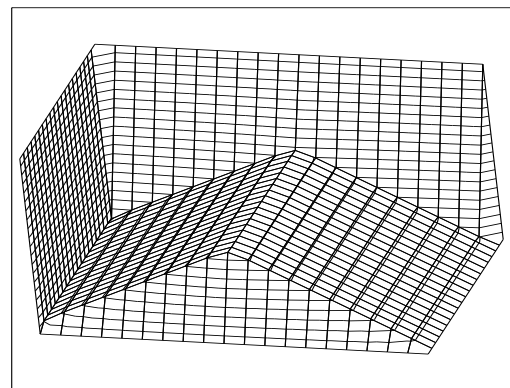
(c) Solução via MEM-p



(d) Solução via MEM-g

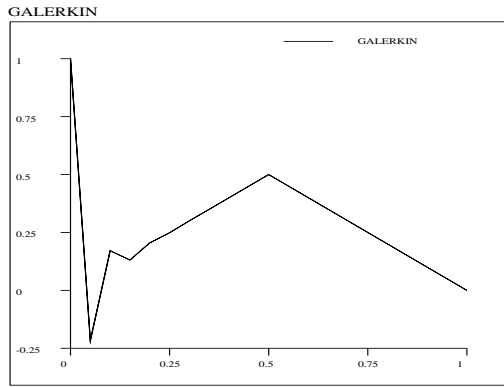


(e) Solução via MGE

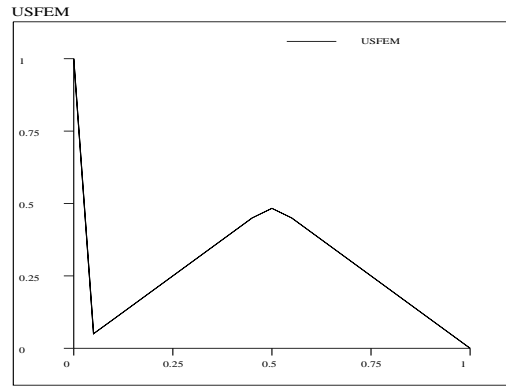


(f) Solução via PGEM

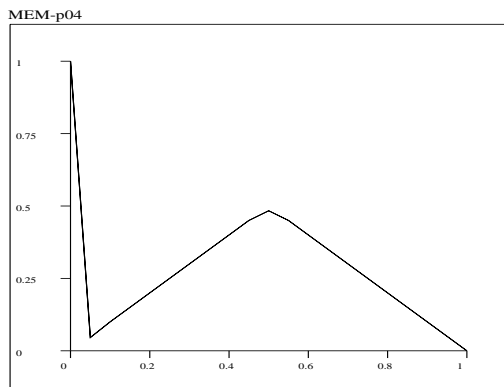
Figura 3.9: Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para  $\varepsilon = 10^{-6}$ .



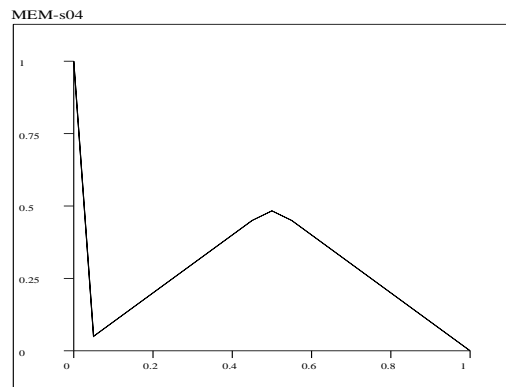
(a) Solução via método de Galerkin



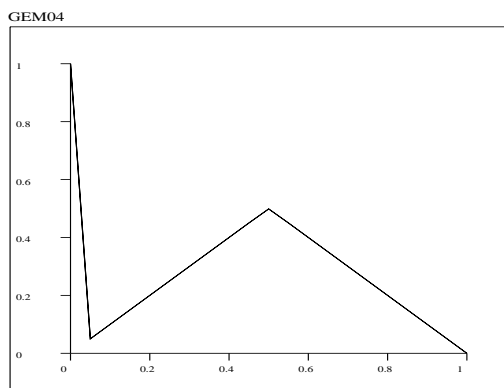
(b) Solução via USFEM



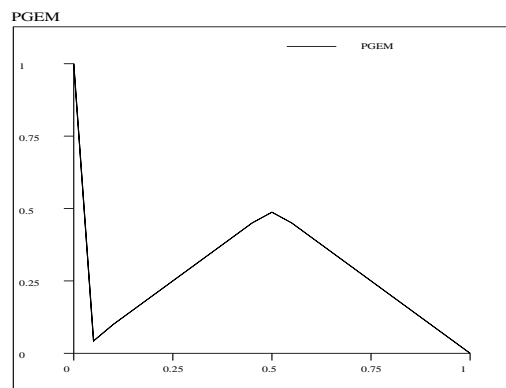
(c) Solução via MEM-p



(d) Solução via MEM-g



(e) Solução via MGE



(f) Solução via PGEM

Figura 3.10: Perfis das soluções dos diferentes métodos em  $y = 0.5$  para  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

### 3.8.4 Problema com Malha não Estruturada

Nosso terceiro problema exemplo consiste do problema exemplo anterior tomando agora a função  $f$  como constante de valor 0.5.

Este teste tem como objectivo avaliar a sensibilidade dos métodos MEM-p, MEM-g e MGE diante de malhas não estruturadas. Para tanto, resolvemos o problema considerando a malha de 988 elementos triangulares e 533 pontos nodais apresentada na figura 3.11b.

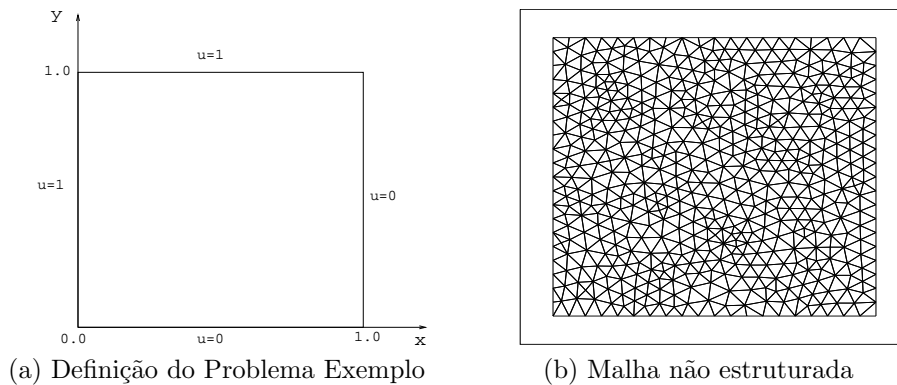
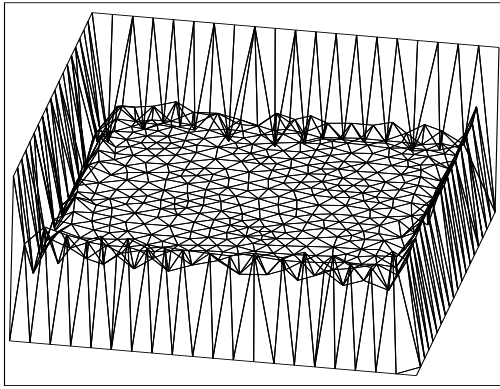
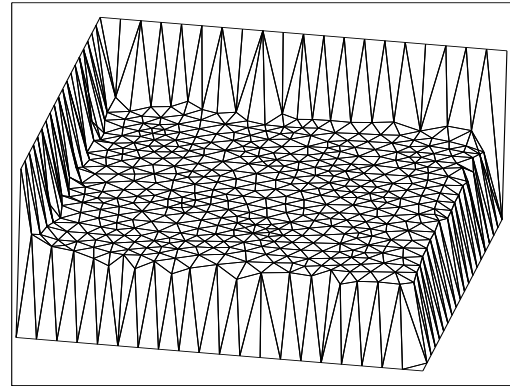


Figura 3.11: Definição do problema exemplo e malha não estruturada usada.

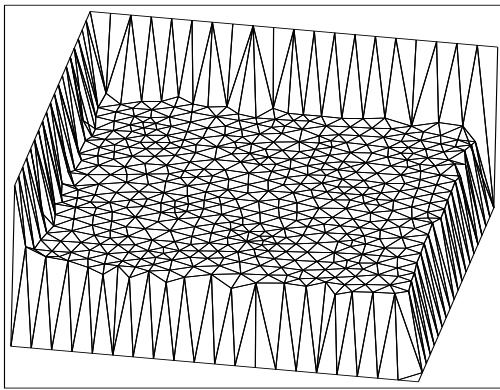
Resolvemos também este problema exemplo através dos métodos de Galerkin, USFEM e PGEM apenas para efeitos de comparação. Os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras 3.12 e 3.13. Os mesmos atestam a robustez dos novos métodos propostos inclusive em malhas não-estrururadas. Em particular, os métodos MGE e PGEM capturam perfeitamente as camadas limites inserindo a correta difusão numérica. Enfatizamos a ausência de quaisquer parâmetros de estabilização a serem previamente escolhidos.



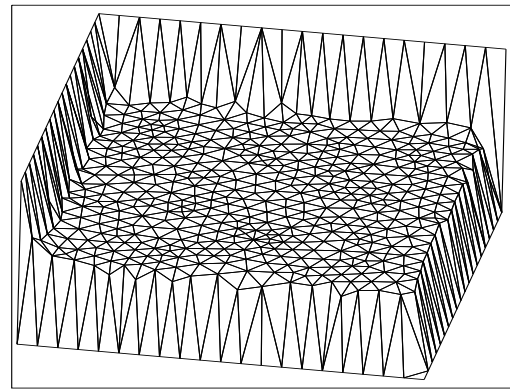
(a) Solução via método de Galerkin



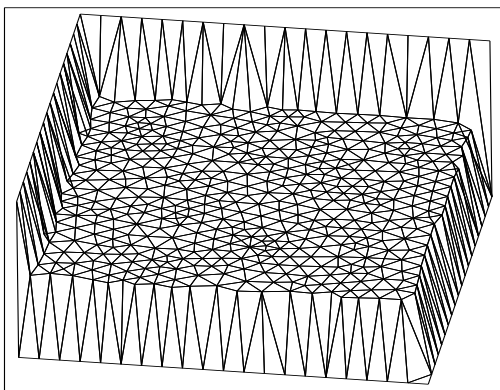
(b) Solução via USFEM



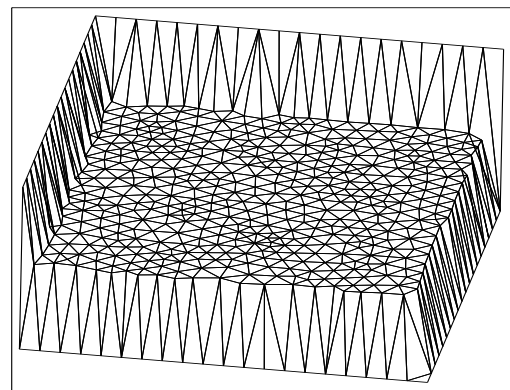
(c) Solução via MEM-p



(d) Solução via MEM-g

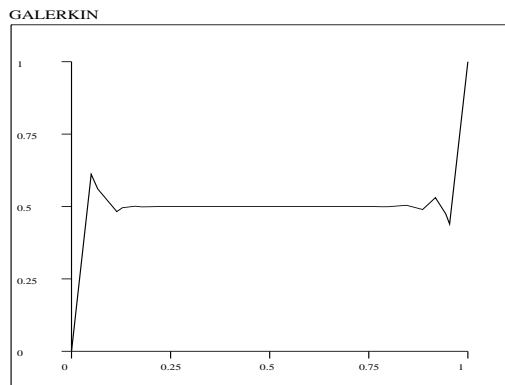


(e) Solução via MGE

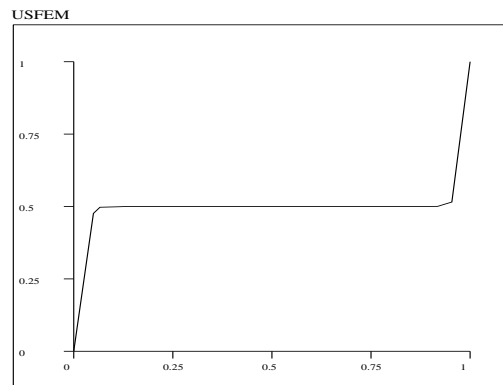


(f) Solução via PGEM

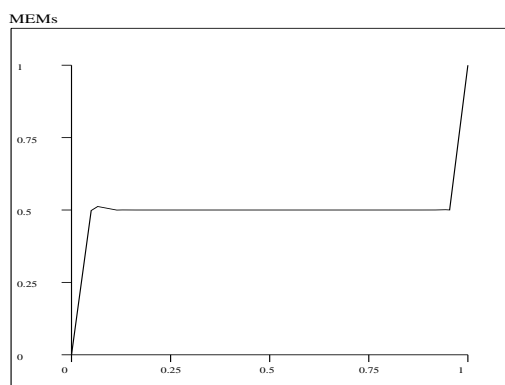
Figura 3.12: Comparação entre os métodos de Galerkin, USFEM, MEM-g, MEM-p, MGE e PGEM para  $\varepsilon = 10^{-6}$ .



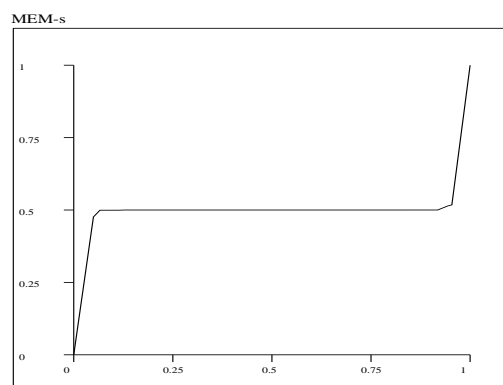
(a) Solução via método de Galerkin



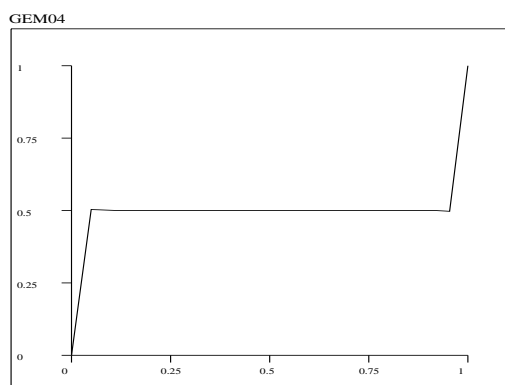
(b) Solução via USFEM



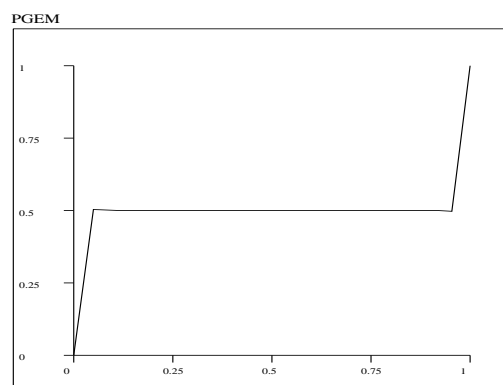
(c) Solução via MEM-p



(d) Solução via MEM-g



(e) Solução via MGE



(f) Solução via PGEM

Figura 3.13: Perfis das soluções dos diferentes métodos em  $x = 0.5$  para  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

### 3.9 Conclusões

Concluimos este capítulo com a discussão de dois aspectos importantes no desenvolvimento de esquemas numéricos que são:

- (1) Simplicidade de implementação computacional dos algoritmos.
- (2) Análise matemática.

Iniciamos nossas considerações finais com o primeiro importante aspecto que é a simplicidade de implementação computacional dos algoritmos numéricos. Com relação a este aspecto, tanto o MEM-p quanto o MEM-g, consideram os efeitos do enriquecimento dos espaços usuais de elementos finitos que resumem-se fundamentalmente em estabilidade e acuracidade presentes no PGEM e no MGE, de forma indireta, i.e, transferem estas propriedades para o parâmetro de estabilização, evitando com isso a integração de funções de forma multiescala para as quais a integração gaussiana é menos precisa (veja (Oliveira et al., 2008) para mais detalhes), resultando em esquemas numéricos com maior simplicidade de implementação computacional. Os resultados numéricos obtidos via MEM-p e MEM-g são equiparáveis aos obtidos através do PGEM e MGE respectivamente. No entanto, os métodos MEM-p e MEM-g apresentam menor custo computacional.

Prosseguindo com as considerações relativas a este primeiro aspecto importante, temos que neste particular, os métodos MEM-p e MEM-g são equivalentes ao USFEM. No entanto é oportuno lembrar que desenvolvemos aqui um arcabouço matemático para a construção dos parâmetros de estabilização dos métodos MEM-p e MEM-g, ao passo que o parâmetro de estabilização não só do USFEM como da imensa maioria dos métodos estabilizados é construído de forma ‘ad-hoc’. Portanto, este arcabouço matemático desenvolvido aqui para a construção de parâmetros estabilizantes, abre novas perspectivas para aplicação desta abordagem em outros problemas com natureza multiescala.

O segundo aspecto importante refere-se a análise matemática dos esquemas numéricos. Deste ponto de vista, a análise numérica dos métodos MEM-p,

MEM-g e MGE, seções 3.6 e 3.7, demonstrando a otimalidade em  $h$  nas normas naturais, pode ser estendida de forma direta ao PGEM. Adicionalmente, nossa análise mostra que o erro do MEM-p é da mesma ordem do erro do PGEM, e que o erro do MEM-g também é da mesma ordem do MGE, o que justifica as aproximações introduzidas nas respectivas derivações.

Finalizamos esta seção e conseqüentemente este capítulo atestando que os testes numéricos apresentados aqui, confirmam a validade e robustez dos métodos propostos e dos resultados teóricos demonstrados.

# Capítulo 4

## Novo Método de Elementos Finitos Enriquecido para o Modelo Parabólico

### 4.1 Introdução

Abordamos no capítulo 2 as limitações intrínsecas às formulações clássicas de elementos finitos, tanto as de Galerkin quanto as estabilizadas, em resolver satisfatoriamente problemas parabólicos quando suas soluções contêm camadas limites. Visando contornar tais limitações, dedicamos este capítulo à construção e análise matemática de um novo método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo aplicado ao problema parabólico linear de reação-difusão em (2.9).

Usando as notações introduzidas no capítulo 2, recordamos que o problema de valor inicial e de contorno lê-se: Dados  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T > 0$ , encontrar a função escalar  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q := \Omega \times J$ ,  $J := (0, T]$  tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t u := \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma := \partial\Omega \times J, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Novamente, por comodidade de leitura, voltamos a reproduzir o problema variacional contínuo associado à (4.1) previamente introduzido em (2.11)



que consiste em encontrar a função  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ , para cada  $t \in J$ , tal que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_\Omega + a(u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega, & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Como usual, para a análise de erro desenvolvida na seção 4.4, necessitamos assumir determinada regularidade para a solução  $u$  do problema (4.2). Com esse propósito, introduzimos o espaço

$$W(0, T) := \left\{ w \mid w \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^0(0, T; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\}, \quad (4.3)$$

e o lema que se segue.

**Lema 4.1** Suponhamos  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Então, (4.2) tem uma única solução  $u$  pertencente ao espaço  $W(0, T)$ , e satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(0, T))} &\leq C \left( \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ &\left. + \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde a constante positiva  $C$  independe de  $f$  e  $u_0$ .

**Prova:** Veja (Evans, 1992). □

O restante do capítulo está organizado da seguinte maneira: Apresentamos na seção 4.2 uma breve revisão do estado da arte do tema em discussão. Dedicamos a seção 4.3 à derivação do novo método enriquecido para o modelo parabólico designado por método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo (MEPGDT). Reservamos a seção 4.4 à análise de erro do MEPGDT usando aproximações bilineares no espaço e constantes no tempo. A seção 4.5 responde pelas validações numéricas do MEPGDT. Finalizamos o capítulo com apresentação das conclusões na seção 4.6.

## 4.2 Revisão dos Métodos Enriquecidos via Aproximação Temporal por Diferenças Finitas

O objetivo desta seção é apresentar de forma sintética as alternativas propostas em (Franca et al., 2006a), (Franca et al., 2006b) e (Ramalho, 2005) no contexto dos métodos de elementos finitos enriquecidos via diferenças finitas no tempo, para superar as limitações das formulações clássicas de elementos finitos levantadas no capítulo 2.

### 4.2.1 Enriquecimento Estacionário

É comum nos métodos estabilizados clássicos, o uso em problemas transientes de parâmetros estabilizantes projetados para os problemas estacionários correlatos. Motivado por essa prática, (Ramalho, 2005) propõe a primeira tentativa de construção de métodos enriquecidos para o problema (4.1). A idéia consiste em tomar o espaço enriquecido  $U_A$  em (3.7) para aproximar a solução exata  $u(t)$ , para cada  $t \in J$ , ao invés do espaço  $V_L$  usado no método de Galerkin. Esta modificação, deu origem a primeira versão do método enriquecido que foi designada por PGEM-L, também conhecida como método das linhas, cuja formulação lê-se: Para cada  $t \in J$ , encontrar  $u_A(t) \in U_A$  tal que

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_A(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega + a(u_A(t), v_L)_\Omega = (f, v_L)_\Omega & \forall v_L \in V_L, \\ u_A(0) = u_{0,h}, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde assumi-se  $f$  independente do tempo. Com isso, de (3.11), (3.25), (3.26) e (3.29), tem-se que as funções  $u_A(t)|_K \in U_A$ , para cada  $t \in J$ , são escritas unicamente como

$$u_A(t)|_K = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} u_j(t) \lambda_j - \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (\lambda_j - \psi_j) f_j, \quad (4.6)$$

que aliadas a escolha  $v_L = \psi_i$ , permitem escrever (4.5) na forma semi-discretizada abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ (\lambda_j, \psi_i) \frac{du_j(t)}{dt} + a(\lambda_j, \psi_i)_K u_j(t) \right] \right\} = \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} [a(\lambda_j, \psi_i)_K - \varepsilon(\nabla \psi_j, \nabla \psi_i)_K] \frac{f_j}{\sigma} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \\ u_j^0 = u_0(\mathbf{x}_j). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Em seguida, aplica-se o  $\theta$ -esquema para a discretização temporal de (4.7), que conduz após manipulação algébrica ao PGEM-L cuja formulação lê-se: Para cada  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , e  $\theta \in (0, 1]$ , encontrar os coeficientes  $u_j^{n+1}$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} [\bar{a}(\lambda_j, \psi_i)_K] u_j^{n+1} \right\} = \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \frac{\theta-1}{\theta} \bar{a}(\lambda_j, \psi_i)_K + \frac{1}{\theta} (\lambda_j, \psi_i)_K \right] u_j^n \right\} \\ + \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} [a(\lambda_j, \psi_i)_K - \varepsilon(\nabla \psi_j, \nabla \psi_i)_K] \frac{f_j}{\sigma} \right\}, \\ i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad \theta \in (0, 1], \\ u_j^0 = u_0(\mathbf{x}_j). \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Com o objetivo de mostrar as limitações dos esquemas numéricos construídos via enriquecimento estacionário, representados aqui pelo PGEM-L em (4.8), ou via emprego de parâmetros estabilizantes estacionários no contexto dos métodos estabilizados, representados aqui pelo USFEM em (C.9) (veja apêndice C), resolvemos o problema exemplo abaixo considerando não só os métodos citados acima, como também o método de Galerkin em (2.30).

#### 4.2.1.1 Problema Parabólico com Termo de Fonte Constante

Seja  $\Omega = (0, 1)^2$  e  $J = (0, 10]$ . Então, nosso problema exemplo é dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + u = 1 & \text{em } Q := \Omega \times J, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma := \partial\Omega \times J, \\ u|_{t=0} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Realizamos testes numéricos para dois casos assintóticos a saber;  $\varepsilon < h^2$  e  $\varepsilon < h^2/\Delta t$ .

##### Caso assintótico 1 : $\varepsilon < h^2$

Supomos  $\varepsilon = 10^{-6}$  e utilizamos uma malha quadrada de  $20 \times 20$  elementos. Adicionalmente, tomamos  $\theta = 1$  e  $\Delta t = 0.1$ . Os resultados obtidos são mostrados na figura 4.1.

Apesar do passo de tempo,  $\Delta t$ , ser relativamente grande, somente o PGEM-L fornece resultados precisos em todos os instantes de tempo. Ademais, com base nas respectivas contrapartidas estacionárias, não é surpreendente observar que enquanto as oscilações produzidas pelo USFEM desaparecem à medida que a solução tende para o estado estacionário, o mesmo não ocorrendo com a solução obtida através do método de Galerkin.

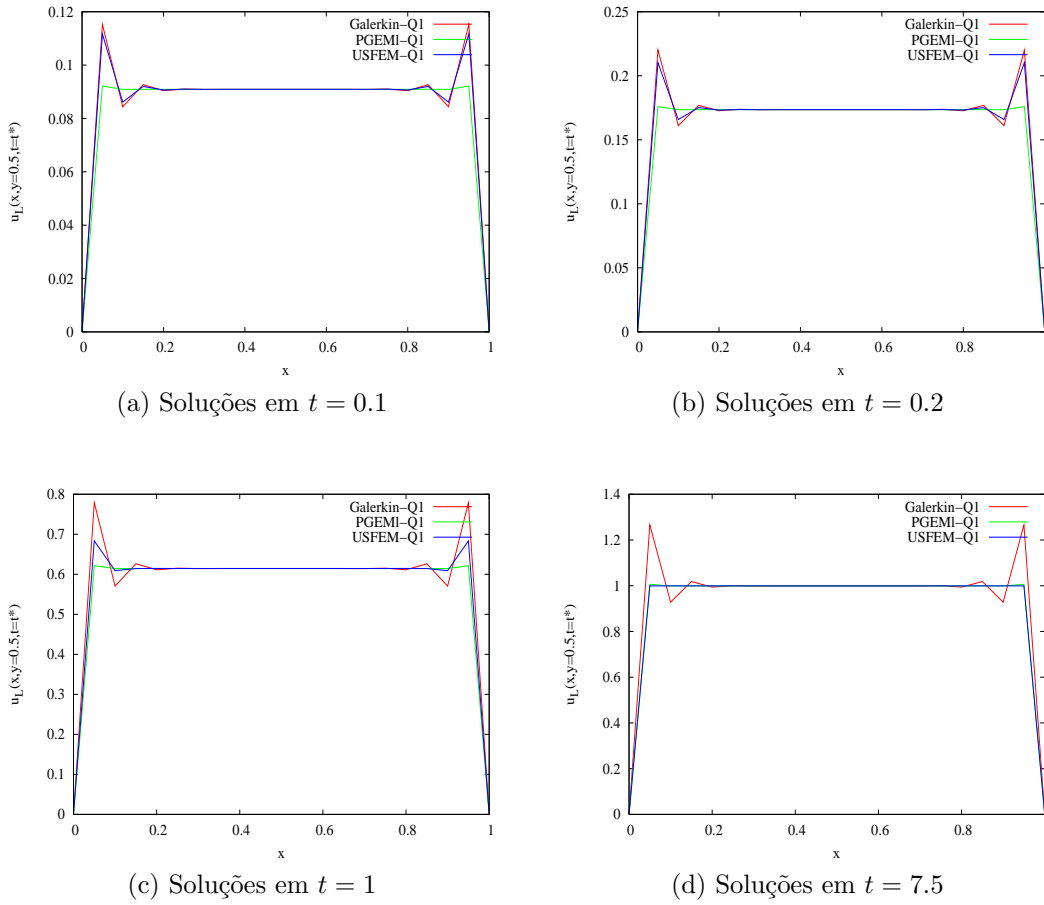


Figura 4.1: Perfil das soluções de Galerkin, PGEM-L e USFEM em  $y = 0.5$  para distintos instantes de tempo, tomando  $\varepsilon = 10^{-6}$  e  $\Delta t = 0.1$ .

**Observação 4.2** Notemos que os resultados obtidos através do método USFEM mostrados na figura 4.1 diferem daqueles exibidos nas figuras 2.7 - 2.10. Agora, as oscilações espúrias são gradualmente eliminadas a medida que a solução evolui para o estado estacionário, mostrando que apesar de não ser ótimo, o USFEM com parâmetro estacionário é preferível à sua variação transiente.

□

**Caso assintótico 2 :**  $\varepsilon < \frac{h^2}{\Delta t}$

Adotando novamente  $\theta = 1$ , escolhemos fixar  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$  e usar a malha do caso anterior. A figura 4.2 mostra os resultados deste experimento numérico. A partir desta, constatamos que nenhum dos métodos fornece resultados satisfatórios nos instantes iniciais.

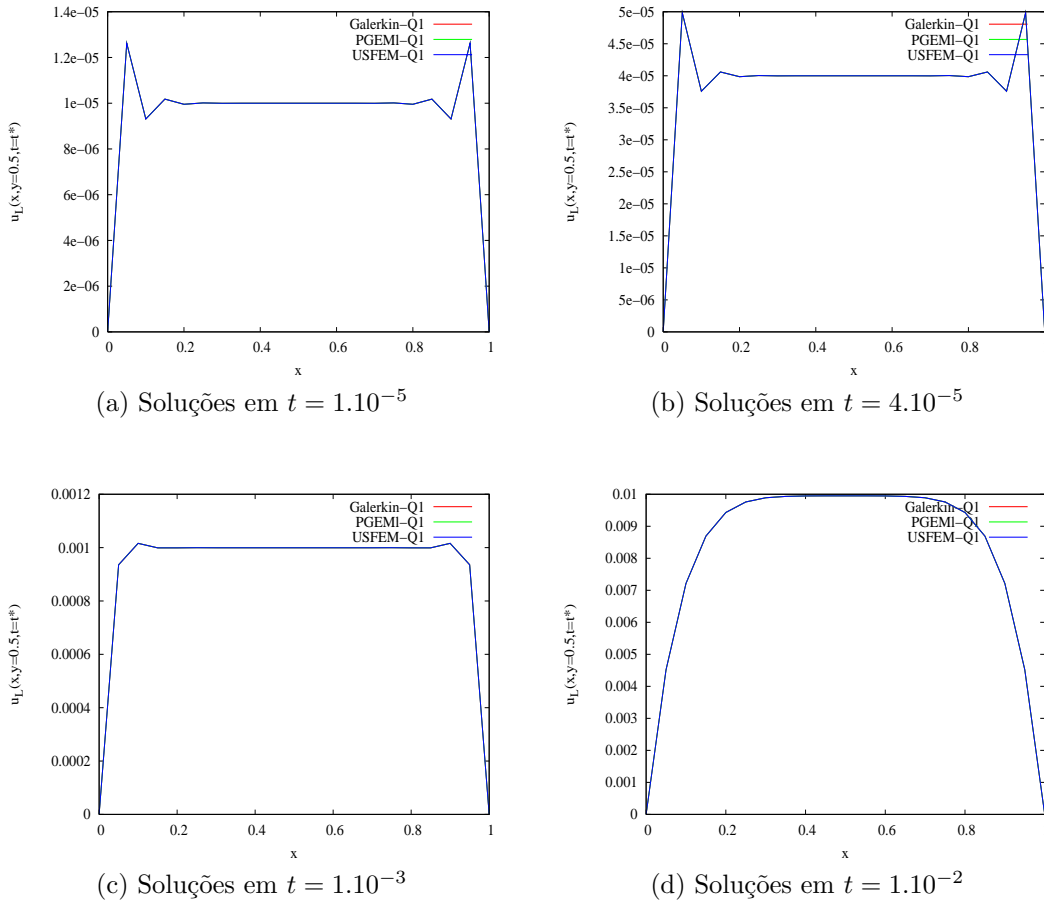


Figura 4.2: Perfil das soluções de Galerkin, PGEM-L e USFEM em  $y = 0.5$  para diferentes instantes de tempo, tomando  $\varepsilon = 1$  e  $\Delta t = 10^{-5}$ .

**Observação 4.3** Novamente, os resultados obtidos através do método USFEM mostrados na figura 4.2 diferem daqueles exibidos nas figuras 2.15 - 2.18. Agora, embora as oscilações espúrias permaneçam nos instantes iniciais, não existe a adição de efeitos difusivos à solução a medida que esta evolui para o estado estacionário.

□

**Observação 4.4** Os resultados insatisfatórios nos instantes iniciais exibidos na figura 4.2 levaram ao desenvolvimento de métodos enriquecidos através de funções enriquecidas variantes no tempo, cuja discussão é objeto da subseção 4.2.2.

□

### 4.2.2 Enriquecimento Transiente

As considerações colocadas no final da subseção precedente, remetemos à necessidade da busca por um enriquecimento variante no tempo. É nesse contexto que (Ramalho, 2005) propõe dois métodos com enriquecimento transiente, sendo o primeiro designado por PGEM-r e o segundo por PGEM-m.

Estes métodos, além de guardarem certa semelhança de forma, apresentam performances computacionais equivalentes, diferindo apenas na maneira como são derivados. Por estas razões, faremos menção somente ao PGEM-m por guardar maior similaridade com os métodos a serem propostos neste trabalho.

Assim, o PGEM-m considera primeiramente uma discretização espacial de (4.2) usando uma família de espaços de funções multiescala variantes no tempo, denotada por  $E_h^m(\Omega)$ , a ser definida mais adiante. Com isso, mantendo  $V_A$  definido em (3.9) como o espaço das funções teste e supondo que  $E_h^m(\Omega) \cap V_L = \{0\}$ ,  $t \in (0, T)$ , seja

$$U_h^t(\Omega) := E_h^m(\Omega) \oplus V_L(\Omega), \quad (4.10)$$

o espaço das funções tentativa. Com essas definições, procuramos  $u_h(t) \in U_h^t(\Omega)$ , para cada  $t \in (0, T)$ , tal que:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega + a(u_h(t), v_L)_\Omega = (f, v_L)_\Omega, & \forall v_L \in V_L, \\ \left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, v_b^K \right)_K + a(u_h(t), v_b^K)_K = (f, v_b^K)_K, & \forall K \in \mathcal{T}_h, v_b^K \in H_0^1(K), \\ u_h(0) = u_{0,h}. \end{cases} \quad (4.11)$$

De (4.11)<sub>2</sub> - (4.11)<sub>3</sub>, integrando por partes e usando  $v_b^K|_{\partial K} = 0$ , obtemos que  $u_h$  satisfaz o problema local de reação-difusão transiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} + \mathcal{L}u_h(t) = f, & \text{em } K \times (0, T), \\ u_h(0) = u_{0,h}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Podemos escrever  $u_h(t)$  univocamente como

$$u_h(t) = u_L(t) + u_e(t) + u_f(t), \quad (4.13)$$

para cada  $t \in (0, T)$ , onde  $u_L(t) \in V_L$  e  $u_e(t) + u_f(t) \in E_h^m(\Omega)$ . Desse modo,  $u_e(t)$  e  $u_f(t)$  são escolhidos satisfazendo os problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_e(t)}{\partial t} + \mathcal{L}u_e(t) = - \left( \frac{\partial u_L(t)}{\partial t} + \mathcal{L}u_L(t) \right), & \text{em } K \times (0, T), \\ u_e(0) = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial u_f(t)}{\partial t} + \mathcal{L}u_f(t) = f, & \text{em } K \times (0, T), \\ u_f(0) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

O próximo objetivo consiste em definir as funções de base de enriquecimento,  $\phi_j(\mathbf{x}, t)$ , em termos das funções de base polinomiais,  $\psi_j(\mathbf{x})$ , de forma que os problemas acima sejam satisfeitos para cada  $t = n\Delta t$  fixo (mas arbitrário). Primeiro, as soluções de (4.14)-(4.15) são procuradas de modo que  $u_e^n(\mathbf{x}) = u_e(\mathbf{x}, n\Delta t)$  e  $u_f^n(\mathbf{x}) = u_f(\mathbf{x}, n\Delta t)$  tenham a seguinte representação

$$u_e^n = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left( u_j^n + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \phi_j^n, \quad \text{em } K, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left( u_j^n + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t}, \quad \text{em } K, \quad (4.17)$$

$$u_f^n = - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \frac{f_j}{\sigma} \phi_j^n, \quad \text{em } K, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} = - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \frac{f_j}{\sigma} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t}, \quad \text{em } K, \quad (4.19)$$

onde  $\phi_j^n = \phi_j(\mathbf{x}, n\Delta t)$  e, como tem sido usual neste texto, estamos supondo  $f \in V_1$  com  $V_1$  definido em (2.18).

As funções  $u_L^n|_K = u_L(t_n)|_K \in V_L$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  são escritas unica-



mente como

$$u_L^n|_K = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} u_j^n \psi_j. \quad (4.20)$$

Em seguida, definindo as funções multiescala  $\phi_j = \phi_j(x, t)$  como soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mathcal{L}\phi_j = -\sigma\psi_j, & \text{em } K \times (0, T), \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \mathcal{L}_{\partial K}\phi_j = -\sigma\psi_j, & \text{em } \partial K \times (0, T), \\ \phi_j = 0, & \text{nos nós de } K, \quad \text{para cada } t \in (0, T), \\ \phi_j(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.21)$$

resulta que as funções  $u_e$  e  $u_f$  representadas de forma discreta por (4.16) e (4.18), respectivamente, satisfazem os problemas (4.14)-(4.15) para todo  $t = n\Delta t$  fixo (mas arbitrário), onde  $n = 1, \dots, N$ .

Com esses resultados, o espaço das funções multiescala é definido como

$$E_h^m|_K = \text{span}\{\phi_j(\mathbf{x}, t)\} \quad \text{com } j = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad t \in (0, T). \quad (4.22)$$

Substituindo a decomposição (4.13) em (4.11)<sub>1</sub>, obtemos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_L(t)}{\partial t} + \frac{\partial u_e(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega + a(u_L(t) + u_e(t), v_L)_\Omega &= (f, v_L)_\Omega \\ - \left( \frac{\partial u_f(t)}{\partial t}, v_L \right)_\Omega - a(u_f(t), v_L)_\Omega &\forall v_L \in V_L. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aplicando o  $\theta$ -esquema à discretização temporal e substituindo (4.16)-(4.19) em (4.23), esta última pode ser escrita em termos de funções de base, no

tempo  $t = (n + 1)\Delta t$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ (\psi_j, \psi_i)_K \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=(n+1)\Delta t} + a(\psi_j, \psi_i)_K [\theta u_j^{n+1} + (1 - \theta)u_j^n] \right. \right. \\
& + \left[ \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \Big|_{t=(n+1)\Delta t}, \psi_i \right)_K + \theta a(\phi_j^{n+1}, \psi_i)_K \right] \left( u_j^{n+1} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=(n+1)\Delta t} \right) \\
& \left. \left. + (1 - \theta)a(\phi_j^n, \psi_i)_K \left( u_j^n + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=n\Delta t} \right) \right\} \right\} \quad (4.24) \\
& = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ (\psi_j, \psi_i)_K + \frac{1}{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \Big|_{t=(n+1)\Delta t}, \psi_i \right)_K + \theta a(\phi_j^{n+1}, \psi_i)_K \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (1 - \theta)a(\phi_j^n, \psi_i)_K \right] \right\} f_j \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned}$$

onde as derivadas temporais são aproximadas por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=(n+1)\Delta t} \approx \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t}.$$

Substituindo a aproximação acima em (4.24) e simplificando, chegamos ao método enriquecido PGEM-m, formulado matricialmente como se segue: Encontrar os coeficientes  $u_j^{n+1}$ ,  $n = 1, \dots, N - 1$ , tal que

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t \tilde{a}(\psi_j, \psi_i)_K + (1 + \sigma \Delta t) [\tilde{a}(\phi_j^{n+1}, \psi_i)_K - (\phi_j^n, \psi_i)_K] \right] u_j^{n+1} \right\} = \\
& \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t (\psi_j, \psi_i)_K + \tilde{a}(\phi_j^{n+1}, \psi_i)_K - \tilde{a}(\phi_j^n, \psi_i)_K + \Delta t a(\phi_j^n, \psi_i)_K \right] f_j \right\} \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t (\psi_j, \psi_i)_K + \sigma \Delta t^2 (\theta - 1) a(\psi_j, \psi_i)_K + \tilde{a}(\phi_j^{n+1}, \psi_i)_K \right. \right. \\
& \left. \left. - (\phi_j^n, \psi_i)_K + (\theta - 1) \Delta t (1 + \sigma \Delta t) a(\phi_j^n, \psi_i)_K \right] u_j^n \right\} \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ (1 - \theta) \Delta t a(\phi_j^n, \psi_i)_K \right] u_j^{n-1} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_K. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Para  $n = 0$ , desejamos encontrar  $u_j^1$ , tal que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t \tilde{a}(\psi_j, \psi_i)_K + (1 + \sigma \Delta t) \tilde{a}(\phi_j^1, \psi_i)_K \right] u_j^1 \right\} \\
= & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t (\psi_j, \psi_i)_K + \sigma \Delta t^2 (\theta - 1) a(\psi_j, \psi_i)_K + \tilde{a}(\phi_j^1, \psi_i)_K \right] u_{0j} \right\} \quad (4.26) \\
& + \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \sigma \Delta t (\psi_j, \psi_i)_K + \tilde{a}(\phi_j^1, \psi_i)_K \right] f_j \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned}$$

decorrente de (4.25) lembrando que  $\phi_j^0 = 0$ .

**Observação 4.5** Notamos que no esquema Euler implícito ( $\theta = 1$ ), que é uma aproximação de primeira ordem para o problema parabólico (4.1), o PGEM-m utiliza apenas um passo anterior,  $u_j^n$ . Por outro lado, para Crank-Nicolson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ), que é uma aproximação de segunda ordem, o método utiliza dois passos  $u_j^n$  e  $u_j^{n-1}$ , como ocorre em outros esquemas de segunda ordem, por exemplo, o método de Adams-Bashforth, veja (Quarteroni e Valli, 1997).

□

**Observação 4.6** É possível definir novamente funções multiescala enriquecidas  $\lambda_j = \psi_j + \phi_j$  obtidas resolvendo os problemas locais do tipo reação-difusão transiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \mathcal{L} \lambda_j = 0, & \text{em } K \times (0, T), \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \mathcal{L}_{\partial K} \lambda_j = 0, & \text{em } \partial K \times (0, T), \\ \lambda_j = \psi_j, & \text{nos nós de } K, \text{ para cada } t \in (0, T), \\ \lambda_j(x, 0) = \psi_j. \end{cases} \quad (4.27)$$

As soluções destes problemas locais são calculadas aplicando a formulação temporal do USFEM, baseada no método das linhas e apresentada no Apêndice C. As soluções locais ( $\lambda_j$ ) possuem as mesmas instabilidades numéricas que as do problema original. Contudo, as eventuais oscilações presentes nas aproximações para as funções  $\lambda_j$  não influenciam significativamente a precisão da solução de (4.25)-(4.26).

□

**Observação 4.7** Supondo  $\lambda_j$  “suficientemente regular” e discretizando (4.27) temporalmente, usando o esquema de Euler implícito ( $\theta = 1$ ), obtemos que  $\lambda_j^n := \lambda_j(\mathbf{x}, n\Delta t)$  satisfaz:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}\lambda_j^n = \lambda_j^{n-1}, & \text{em } K, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\partial K}\lambda_j^n = \lambda_j^{n-1}, & \text{em } \partial K, \\ \lambda_j^n = \psi_j, & \text{nos nós de } K, \end{cases} \quad (4.28)$$

onde  $\lambda_j^0 = \psi_j$ . Aqui,  $\tilde{\mathcal{L}}$  é o operador elíptico definido por

$$\tilde{\mathcal{L}}w := -\tilde{\varepsilon}\Delta w + \tilde{\sigma}w. \quad (4.29)$$

□

### 4.3 Métodos Enriquecidos via Formulação Espaço-Tempo

Na seção anterior, apresentamos o estado da arte das formulações enriquecidas nas quais a variável temporal é aproximada por diferenças finitas. Entretanto, apesar dessa abordagem fornecer resultados estáveis e precisos, três questões podem ser levantadas. A primeira diz respeito ao custo computacional dessas formulações, pois os problemas locais são resolvidos através de métodos de elementos finitos em dois níveis usando submalhas extremamente refinadas. A segunda está ligada à falta de análise numérica dessas formulações, propiciada em grande medida pelo arcabouço matemático em que foram construídas. A terceira e última é que a derivação do método enriquecido via uma estratégia espaço-tempo é mais natural do que usando-se diferenças finitas no tempo.

Como observado por (Johnson et al., 1984), as propriedades matemáticas das formulações espaço-tempo, são análogas às formulações de elementos finitos para problemas estacionários. Conseqüentemente, os instrumentos de análise nu-

mérica de problemas estacionários podem ser aplicados aos problemas transientes em uma formulação espaço-tempo.

A observação acima, aponta um caminho possível para atender as questões colocadas no primeiro parágrafo desta seção. Logo, somando-se ao fato de termos desenvolvido no capítulo anterior um arcabouço matemático que proporcionou a construção e análise numérica de formulações enriquecidas para o problema elíptico correlato, apresentamos nesta seção a construção e análise numérica de uma nova formulação enriquecida via abordagem espaço-tempo.

### 4.3.1 Derivação do Método

Aqui, construímos um novo método enriquecido usando elementos de baixa ordem, ou seja, consideramos primeiramente a aproximação linear no espaço e constante no tempo, seguida da aproximação linear tanto no espaço quanto no tempo. No que segue, usamos as notações introduzidas no capítulo 1. Assim, sejam  $H^1(\mathcal{T}_h^n)$  e  $H_0^1(\mathcal{T}_h^n)$  espaços das funções definidas sobre  $Q_n$  cuja restrição a cada elemento finito espaço-tempo,  $Q_n^e$ , pertence à  $L^2(J_n, H^1(K)) \cap H^1(J_n, L^2(K))$  e  $L^2(J_n, H_0^1(K)) \cap H^1(J_n, L^2(K))$  respectivamente.

Para cada  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ , definimos o espaço *aumentado* das funções tentativas como

$$U_n^A = S_n^q + U_n^E, \quad (4.30)$$

onde  $U_n^E$  é o espaço de enriquecimento também chamado de espaço multiescala, dado formalmente por

$$U_n^E := \left\{ u_n^E \in H^1(\mathcal{T}_h^n); u_n^E|_{Q_n^e} = \mathcal{M}_{Q_n^e} u_n^q \quad \forall u_n^q \in S_n^q \right\}, \quad (4.31)$$

no qual  $\mathcal{M}_{Q_n^e} : S_n^q \rightarrow H^1(\mathcal{T}_h^n)$  é um operador linear a ser definido precisamente mais adiante.

De igual modo, definimos o espaço *aumentado* das funções teste como

$$V_n^A = S_n^q \oplus V_n^B, \quad n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \quad (4.32)$$

onde  $V_n^B$  é o espaço das funções bolha definido por

$$V_n^B := \bigoplus_{Q_n^e} H_0^1(K), \quad (4.33)$$

escolhido para enriquecer o espaço polinômial das funções teste.

Em seguida fazemos as seguintes hipóteses:

**Hipótese 4.8** O enriquecimento das funções teste, via  $V_n^B$ , é feito com funções de suporte compacto em  $K$  e independentes do tempo.

**Hipótese 4.9** Aqui, fixamos  $u_{-1}^A(t_0) = u_0$ , ou seja,  $u_{-1}^E(t_0) = 0$ .

**Hipótese 4.10**  $[[u_n^E(t_n)]] = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$  isto é,  $u_n^E$  é contínua no tempo.

Agora, nossa aproximação da solução exata no espaço aumentado (4.30) é definida pela solução do seguinte problema de Petrov-Galerkin: dado  $u_{n-1}^A(t_n)$ , para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , encontrar  $u_n^A \in U_n^A$  tal que

$$a_A(u_n^A, v_n^A)_n = F_A(v_n^A)_n \quad \forall v_n^A \in V_n^A, \quad (4.34)$$

onde

$$a_A(w, v)_n := \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} a_s(w, v)_{Q_n^e}, \quad F_A(v)_n := \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} (f, v)_{Q_n^e}, \quad (4.35)$$

com

$$a_s(w, v)_{Q_n^e} = a_G(w, v)_{Q_n^e} + ([[w(t_n)]], v(t_n))_K, \quad (4.36)$$

na qual

$$a_G(w, v)_{Q_n^e} := \left( \frac{\partial w}{\partial t}, v \right)_{Q_n^e} + (\varepsilon \nabla w, \nabla v)_{Q_n^e} + (\sigma w, v)_{Q_n^e}, \quad (4.37)$$

e

$$[[w(t_n)]] := w_n(t_n) - w_{n-1}(t_n). \quad (4.38)$$

De (4.32), temos que toda função  $v_n^A \in V_n^A$  admite decomposição única da forma

$$v_n^A = v_n^q + v_n^b, \quad (4.39)$$

onde  $v_n^q \in S_n^q$  e  $v_n^b \in V_n^B$ .

Por outro lado, da equação (4.30) podemos escrever as funções  $u_n^A \in U_n^A$  sob a forma

$$u_n^A = u_n^q + u_n^E, \quad (4.40)$$

onde  $u_n^q \in S_n^q$  e  $u_n^E \in U_n^E$ .

Conseqentemente, resolver o problema (4.34) é equivalente a resolver os subproblemas

$$a_A(u_n^q + u_n^E, v_n^q)_n = F_A(v_n^q)_n \quad \forall v_n^q \in S_n^q, \quad (4.41)$$

e

$$a_s(u_n^q + u_n^E, v_{Q_n^e}^b)_{Q_n^e} = F_A(v_{Q_n^e}^b)_{Q_n^e} \quad \forall Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n, \quad v_{Q_n^e}^b \in H_0^1(K), \quad (4.42)$$

para cada  $n$  pertencente a  $\mathcal{N}_{\Delta t}$ .

Pela hipótese 4.8 temos que  $v_{Q_n^e}^b = v_{Q_n^e}^b(\mathbf{x})$ . Assim, tomando  $v_{Q_n^e}^b \equiv v_K^b$ , de (4.42) chegamos a

$$\begin{aligned} a_G(u_n^E, v_K^b)_{Q_n^e} + a_G(u_n^q, v_K^b)_{Q_n^e} - (f, v_K^b)_{Q_n^e} + \frac{1}{\Delta t} ([[u_n^q(t_n)]], v_K^b)_{Q_n^e} + \\ + ([[u_n^E(t_n)]], v_K^b)_K = 0 \quad \forall v_K^b \in H_0^1(K). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considerando uma integração por partes e utilizando-se de  $v_K^b|_{\partial K} = 0$ , temos que a equação (4.43) é equivalente a

$$(\mathcal{L}_t u_n^E + \mathcal{L}_t u_n^q - f + \frac{1}{\Delta t} [[u_n^q(t_n)]], v_K^b)_{Q_n^e} + ([[u_n^E(t_n)]], v_K^b)_K = 0 \quad \forall v_K^b \in H_0^1(K). \quad (4.44)$$

Logo, levando em conta a hipótese 4.10, temos que  $u_n^E$  satisfaz localmente o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t u_n^E = f - \mathcal{L}_t u_n^q - \frac{1}{\Delta t} [[u_n^q(t_n)]] & \text{em } Q_n^e, \\ u_n^E(t_n) = u_{n-1}^E(t_n) & \text{em } K, \\ u_n^E|_{\Sigma_n^e} = g_n^E. \end{cases} \quad (4.45)$$

Como condição de contorno para o problema local em (4.45), procuramos estender a este problema uma similar à proposta em (Franca et al., 2005b) para o problema estacionário correlato. A idéia principal consiste em definir um novo operador diferencial denotado por  $\mathcal{L}_{t\Sigma_n^e}$  encarado como uma restrição do operador diferencial  $\mathcal{L}_t$  à fronteira lateral  $\Sigma_n^e$  de  $Q_n^e$ , e tomar  $u_n^E|_{\Sigma_n^e}$  como sendo solução do seguinte problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} g_n^E = f - \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^q - \frac{1}{\Delta t} [[u_n^q(t_n)]] & \text{em } \Sigma_n^e := \partial K \times J_n, \\ g_n^E(t_n) = g_{n-1}^E(t_n) & \text{em } \partial K, \\ g_n^E(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{nos nós de } \partial K, \end{cases} \quad (4.46)$$

com

$$\mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} w := \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \bar{\sigma} w, \quad (4.47)$$

onde  $s$  é uma parametrização regular do contorno  $\partial K$ .

**Observação 4.11** Em (4.47),  $\bar{\sigma}$  representa uma perturbação da constante de reação  $\sigma$  visando a obtenção de aproximações analíticas para a solução  $u_n^E$  do problema local (4.45).

□

Agora, estamos em condições de definir precisamente o operador  $\mathcal{M}_{Q_n^e}(\cdot)$ . Portanto, definimos  $\mathcal{M}_{Q_n^e}(\cdot)$  como sendo um operador local linear que dada uma função  $w_n^q \in S_n^q$ , associa à esta a função  $w_n^E = \mathcal{M}_{Q_n^e}(w_n^q) \in H^1(\mathcal{T}_h^n)$  solução do problema local (4.45).

Obtida a função de enriquecimento,  $u_n^E$ , solução do problema local (4.45),



e lembrando que pela hipótese 4.10  $[[u_n^E(t_n)]] = 0, \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ , o novo método denominado por método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo (MEPGDT), que decorre prontamente de (4.41), pode ser formulado da seguinte maneira: dado  $u_{n-1}^q(t_n)$ , encontrar a função  $u_n^q \in S_n^q, n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$ , tal que

$$\sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ a_G(u_n^q, v_n^q)_{Q_n^e} + ([[u_n^q(t_n)]], v_n^q(t_n))_K + a_G(u_n^E, v_n^q)_{Q_n^e} \right\} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ (f, v_n^q)_{Q_n^e} \right\},$$

$$\forall v_n^q \in S_n^q, \quad q = c, L.$$

(4.48)

No novo método dado por (4.48), consideramos uma interpolação linear no espaço. Entretanto, em relação a variável temporal, consideramos os casos interpolação constante e linear. Além disso, para a variável espacial temos ainda os casos elementos lineares e bilineares.

Como a resolução de (4.48) passa necessariamente pela resolução de (4.45) que fornece soluções contendo peculiaridades de cada caso referido no parágrafo anterior, apresentamos nas subseções subsequentes tais desdobramentos.

### 4.3.2 Caso Interpolação Linear no Espaço e Constante no Tempo

Este caso decorre de (4.48) tomando  $q = c$ . Designamos o esquema numérico resultante também por MEPGDT cuja formulação lê-se: dado  $u_{n-1}^c(t_n)$ , encontrar a função  $u_n^c \in S_n^c, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , tal que

$$\sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ a_G(u_n^c, v_n^c)_{Q_n^e} + ([[u_n^c(t_n)]], v_n^c(t_n))_K + a_G(u_n^E, v_n^c)_{Q_n^e} \right\} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ (f, v_n^c)_{Q_n^e} \right\},$$

$$\forall v_n^c \in S_n^c,$$

(4.49)

onde assumimos que  $f|_{Q_n^e} \in S_n^c|_{Q_n^e}$ .

Visando tanto a construção da contrapartida matricial de (4.49), quanto

a resolução de (4.45), seja

$$U_n^E|_{Q_n^e} = \text{span}\left\{\phi_j^n(\mathbf{x}, t)\right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.50)$$

onde  $\mathcal{N}_K$  representa o número de nós em  $K$ . Com isso, definimos  $u_n^E \in U_n^E|_{Q_n^e}$  como

$$u_n^E(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} c_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.51)$$

De igual modo, seja

$$U_n^E|_{\Sigma_n^e} = \text{span}\left\{\mu_j^n(\mathbf{x}, t)\right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.52)$$

e portanto,  $g_n^E(\mathbf{x}, t) \in U_n^E|_{\Sigma_n^e}$  pode ser definida da forma

$$g_n^E(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} c_j^n \mu_j^n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.53)$$

Ademais, temos que

$$S_n^c|_{Q_n^e} = \text{span}\left\{\psi_j(\mathbf{x})\right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.54)$$

e logo,  $u_n^c \in S_n^c|_{Q_n^e}$  pode ser escrita como

$$u_n^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} u_j^{n+1} \psi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.55)$$

Analogamente a (4.55) temos que  $u_{n-1}^c \in S_{n-1}^c|_{Q_{n-1}^e}$  é da forma

$$u_{n-1}^c(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} u_j^n \psi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_{n-1}, t_n]. \quad (4.56)$$

Usando (4.55) e (4.56) podemos expressar o termo de salto  $[[u_n^c(\mathbf{x}, t_n)]]$

como

$$[[u_n^c(\mathbf{x}, t_n)]] := u_n^c(\mathbf{x}, t_n) - u_{n-1}^c(\mathbf{x}, t_n) = \sum_{j=1}^{N_K} [u_j^{n+1} - u_j^n] \psi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in K. \quad (4.57)$$

Como  $f|_{Q_n^e} \in S_n^c|_{Q_n^e}$ , então,

$$f(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{N_K} f_j^{n+1} \psi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.58)$$

Assim, tomando  $u_n^E$  e  $g_n^E$  conforme definidas em (4.51) e (4.53) respectivamente, usando (4.55), (4.57) e (4.58), de (4.45) e (4.46), concluímos que  $\phi_j^n(x, t)$  e  $\mu_j^n(x, t)$  resolvem os problemas abaixo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\phi_j^n(\mathbf{x}, t) = -\sigma\psi_j(\mathbf{x}) & \text{em } Q_n^e, \\ \phi_j^n(\mathbf{x}, t_n) = \phi_j^{n-1}(\mathbf{x}, t_n) & \text{em } K, \\ \phi_j^n(\mathbf{x}, t) = \mu_j^n(\mathbf{x}, t) & \text{sobre } \Sigma_n^e, \end{cases} \quad (4.59)$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\Sigma_n^e} \mu_j^n(\mathbf{x}, t) = -\sigma\psi_j(\mathbf{x}) & \text{em } \Sigma_n^e, \\ \mu_j^n(\mathbf{x}, t_n) = \mu_j^{n-1}(\mathbf{x}, t_n) & \text{em } \partial K, \\ \mu_j^n(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{nos nós de } \partial K, \end{cases} \quad (4.60)$$

com

$$c_j^n = \frac{1 + \sigma\Delta t}{\sigma\Delta t} u_j^{n+1} - \frac{1}{\sigma\Delta t} u_j^n - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1}. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.51), (4.55), (4.57) e (4.58), e tomando

$$v_n^c(\mathbf{x}, t) = \psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (4.62)$$

em (4.49), obtemos nossa contrapartida matricial do MEPGDT, formulada como se segue: dado  $u_j^{-1} \equiv u_{0h}$ , para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , encontrar os coeficientes

$u_j^{n+1}$  tais que;

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ a_G(\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_{Q_n^e} + \frac{1 + \sigma \Delta t}{\sigma \Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}))_{Q_n^e} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] u_j^{n+1} \right\} = \\
& \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] u_j^n \right\} + \quad (4.63) \\
& \Delta t \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^{ht}} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] f_j^{n+1} \right\}, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K.
\end{aligned}$$

**Observação 4.12** É possível estabelecer uma relação entre o MEPGDT em (4.63) e o PGEM-m em (4.25) para  $\theta = 1$ . Portanto, o PGEM-m com  $\theta = 1$  pode ser visto como um caso particular do MEPGDT no qual a função de base de enriquecimento,  $\phi_j^n(\mathbf{x}, t)$ , é considerada constante no tempo em cada ‘slab’  $Q_n$ .

□

#### 4.3.2.1 Resolução dos Problemas Locais

Para finalizar o tratamento do caso interpolação linear no espaço e constante no tempo, resta-nos apenas resolver o problema (4.59) e usar essa solução em (4.63).

Antes porém, é importante frisar que um dos aspectos que pode tornar os métodos enriquecidos extremamente competitivos do ponto de vista computacional é a resolução de problemas locais similares a (4.59) a baixo custo. Como esses são, normalmente, tão complexos quanto o problema original, aproximações analíticas ou numéricas são frequentemente usadas na prática, veja por exemplo (Nesliturk, 1999), (Ramalho, 2005) e (Allendes et al., 2008).

Nosso desafio agora consiste em obter aproximações analítica ou numérica para a função de base de enriquecimento,  $\phi_j^n(\mathbf{x}, t)$ , solução de (4.59). Para tanto, consideremos primeiramente o domínio  $\Omega$  discretizado por elementos qua-

drangulares. Neste caso, foi possível obter uma aproximação analítica satisfatória dada por

$$\phi_j^n(\mathbf{x}, t) = \beta_j^y(y) \gamma_j^x(x) T^x(t) + \beta_j^x(x) \gamma_j^y(y) T^y(t) + \gamma_j^x(x) \gamma_j^y(y) T(t), \quad (4.64)$$

onde

$$\left[ \begin{array}{l} \beta_j^x(x) = \frac{\sinh(\alpha_x \psi_j^x(x))}{\sinh(\alpha_x)}, \quad \beta_j^y(y) = \frac{\sinh(\alpha_y \psi_j^y(y))}{\sinh(\alpha_y)}, \\ \gamma_j^x(x) = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{2\pi}{(\pi)^2 + (\alpha_x)^2} \right) \sin(\pi(1 - \psi_j^x(x))), \\ \gamma_j^y(y) = \left( \frac{2}{\pi} - \frac{2\pi}{(\pi)^2 + (\alpha_y)^2} \right) \sin(\pi(1 - \psi_j^y(y))), \\ T^x(t) = [e^{-Z_x t} - 1] \quad \text{com} \quad Z_x = \left[ \frac{\sigma}{2} + \left( \frac{\pi}{h_x} \right)^2 \varepsilon \right], \\ T^y(t) = [e^{-Z_y t} - 1] \quad \text{com} \quad Z_y = \left[ \frac{\sigma}{2} + \left( \frac{\pi}{h_y} \right)^2 \varepsilon \right], \\ T(t) = [e^{-Z t} - 1] \quad \text{com} \quad Z = Z_x + Z_y. \end{array} \right. \quad (4.65)$$

**Observação 4.13** Em (4.65), as funções  $\psi_j^x(x)$  e  $\psi_j^y(y)$  são tais que  $\psi_j(\mathbf{x}) = \psi_j^x(x)\psi_j^y(y)$  e os parâmetros  $\alpha_x$  e  $\alpha_y$  permanecem os mesmos já definidos em (3.37).

□

Para o caso de elementos triangulares, não foi possível obter uma aproximação analítica adequada para a função  $\phi_j^n(\mathbf{x}, t)$ . Como alternativa, optamos em aproximar  $\phi_j^n(\mathbf{x}, t)$  via método de elementos finitos em dois níveis, TLFEM, conforme (Ramalho, 2005).

### 4.3.3 Caso Interpolação Linear no Espaço e no Tempo

Neste caso, o método enriquecido de Petrov-Galerkin descontínuo no tempo, designado novamente por (MEPGDT), decorre imediatamente de (4.48) fazendo  $q = L$ . Com isso, obtemos a formulação seguinte para o MEPGDT em causa.

Dado  $u_{n-1}^L(t_n)$ , para cada  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , encontrar  $u_n^L \in S_n^L$  tal que

$$\sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^n} \left\{ a_G(u_n^L, v_n^L)_{Q_n^e} + ([[u_n^L(t_n)]], v_n^L(t_n))_K + a_G(u_n^E, v_n^L)_{Q_n^e} \right\} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^n} \left\{ (f, v_n^L)_{Q_n^e} \right\},$$

$$\forall v_n^L \in S_n^L. \quad (4.66)$$

Agora,  $u_n^E$  é solução de (4.45) com  $q = L$ , ou seja,  $u_n^E$  resolve

$$\begin{cases} \mathcal{L}_t u_n^E = f - \mathcal{L}_t u_n^L - \frac{1}{\Delta t} [[u_n^L(t_n)]] & \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^E = f - \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^L - \frac{1}{\Delta t} [[u_n^L(t_n)]] & \text{sobre } \Sigma_n^e := \partial K \times J_n, \\ u_n^E(\mathbf{x}, t_n) = u_{n-1}^E(\mathbf{x}, t_n) & \text{em } K, \\ u_n^E(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{nos nós de } \partial K. \end{cases} \quad (4.67)$$

Seja

$$T_n(t) = \frac{t - t_n}{\Delta t}, \quad \tilde{T}_n(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (4.68)$$

então,  $u_n^L \in S_n^L|_{Q_n^e}$  é dada por

$$u_n^L(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_K} \psi_j(\mathbf{x}) [u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t)] \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.69)$$

Por outro lado,  $u_{n-1}^L \in S_{n-1}^L|_{Q_{n-1}^e}$  é dada por

$$u_{n-1}^L(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_K} \psi_j(\mathbf{x}) [u_j^n T_{n-1}(t) + \tilde{u}_j^{n-1} \tilde{T}_{n-1}(t)] \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_{n-1}, t_n]. \quad (4.70)$$

Usando (4.69) e (4.70), temos que  $[[u_n^L(\mathbf{x}, t_n)]]$  é dada por

$$[[u_n^L(\mathbf{x}, t_n)]] := u_n^L(\mathbf{x}, t_n) - u_{n-1}^L(\mathbf{x}, t_n) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \psi_j(\mathbf{x}) [\tilde{u}_j^n - u_j^n] \quad \mathbf{x} \in K. \quad (4.71)$$

Da definição do operador  $\mathcal{L}_t(\cdot)$  em (4.1) obtemos

$$\mathcal{L}_t u_n^L = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \psi_j(\mathbf{x}) \left[ \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n) + \sigma (u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t)) \right], \quad \mathbf{x} \in K, \\ t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.72)$$

Aqui novamente consideraremos  $f \in S_n^c$ , o que permite tomar  $f|_{Q_n^e}$  conforme (4.58). Assim, levando em conta (4.58), (4.71) e (4.72), podemos escrever (4.67) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t u_n^E = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + T_n(t) u_j^{n+1} + \tilde{T}_n(t) \tilde{u}_j^n - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1} \right], \\ \hspace{15em} \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t \Sigma_n^e} u_n^E = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + T_n(t) u_j^{n+1} + \tilde{T}_n(t) \tilde{u}_j^n - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1} \right], \\ \hspace{15em} \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ u_n^E(\mathbf{x}, t_n) = u_{n-1}^E(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ u_n^E(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K. \end{array} \right. \quad (4.73)$$

Definindo

$$u_n^E := u_n^{E1} + u_n^{E2} + u_n^{E3}, \quad (4.74)$$

podemos separar o problema em (4.73) em três subproblemas da forma;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t u_n^{E1} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1} \right], \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^{E1} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1} \right], \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ u_n^{E1}(\mathbf{x}, t_n) = u_{n-1}^{E1}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ u_n^{E1}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K, \end{array} \right. \quad (4.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t u_n^{E2} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) T_n(t) u_j^{n+1}, \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^{E2} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) T_n(t) u_j^{n+1}, \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ u_n^{E2}(\mathbf{x}, t_n) = u_{n-1}^{E2}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ u_n^{E2}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K, \end{array} \right. \quad (4.76)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t u_n^{E3} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \tilde{T}_n(t) \tilde{u}_j^n \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} u_n^{E3} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \tilde{T}_n(t) \tilde{u}_j^n \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ u_n^{E3}(\mathbf{x}, t_n) = u_{n-1}^{E3}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ u_n^{E3}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K. \end{array} \right. \quad (4.77)$$

Sejam

$$u_n^{E1}|_{Q_n^e} = \text{span} \left\{ \phi_j^{n,E1}(\mathbf{x}, t) \right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.78)$$

$$u_n^{E2}|_{Q_n^e} = \text{span} \left\{ \phi_j^{n,E2}(\mathbf{x}, t) \right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.79)$$

e

$$u_n^{E3}|_{Q_n^e} = \text{span} \left\{ \phi_j^{n,E3}(\mathbf{x}, t) \right\}_1^{\mathcal{N}_K}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.80)$$

Logo, definindo

$$u_n^{E1}(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} c_j^{n,E1} \phi_j^{n,E2}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.81)$$



$$u_n^{E2}(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} c_j^{n,E2} \phi_j^{n,E2}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (4.82)$$

e

$$u_n^{E3}(\mathbf{x}, t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} c_j^{n,E3} \phi_j^{n,E3}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (4.83)$$

concluimos que as funções de base de enriquecimento  $\phi_j^{n,E1}$ ,  $\phi_j^{n,E2}$  e  $\phi_j^{n,E3}$ , satisfazem respectivamente os problemas locais que se seguem ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t \phi_j^{n,E1} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} \phi_j^{n,E1} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ \phi_j^{n,E1}(\mathbf{x}, t_n) = \phi_j^{n-1,E1}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ \phi_j^{n,E1}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K, \end{array} \right. \quad (4.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t \phi_j^{n,E2} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) T_n(t) \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} \phi_j^{n,E2} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) T_n(t) \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ \phi_j^{n,E2}(\mathbf{x}, t_n) = \phi_j^{n-1,E2}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ \phi_j^{n,E2}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K, \end{array} \right. \quad (4.85)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_t \phi_j^{n,E3} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \tilde{T}_n(t) \quad \text{em } Q_n^e, \\ \mathcal{L}_{t\Sigma_n^e} \phi_j^{n,E3} = (-\sigma \psi_j(\mathbf{x})) \tilde{T}_n(t) \quad \text{sobre } \Sigma_n^e, \\ \phi_j^{n,E3}(\mathbf{x}, t_n) = \phi_j^{n-1,E3}(\mathbf{x}, t_n) \quad \text{em } K, \\ \phi_j^{n,E3}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{nos nós de } \partial K, \end{array} \right. \quad (4.86)$$

com

$$c_j^{n,E1} = \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1} \quad (4.87)$$

$$c_j^{n,E2} = u_j^{n+1} \quad (4.88)$$

e

$$c_j^{n,E3} = u_j^n. \quad (4.89)$$

Como podemos ver, a obtenção da função de enriquecimento,  $u_n^E$ , solução de (4.73), requer a resolução dos três problemas locais em (4.84), (4.85) e (4.86). Isto de certa forma onera o método que pretendemos construir. Logo, propomos aproximar o problema local (4.67) da seguinte maneira :

$$T_n(t) \cong T_n(t^*), \quad \tilde{T}_n(t) \cong \tilde{T}_n(t^*), \quad \text{com } t^* = \frac{t_{n+1} + t_n}{2}. \quad (4.90)$$

Desta forma, consideramos (4.51) com coeficientes  $\bar{c}_j^n$  dados por

$$\bar{c}_j^n = \frac{1}{\sigma \Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + T_n(t^*)u_j^{n+1} + \tilde{T}_n(t^*)\tilde{u}_j^n - \frac{1}{\sigma} f_j^{n+1}, \quad (4.91)$$

no lugar de  $c_j^n$  e voltamos a ter um único problema local a ser resolvido.

Em seguida, descrevemos o processo de obtenção da formulação matricial do MEPGDT e tecemos algumas considerações referentes aos aspectos computacionais do método.

#### 4.3.3.1 Aspectos da Implementação Computacional

No caso de aproximação linear tanto no espaço quanto no tempo, o MEPGDT conduz a um sistema acoplado com o dobro do número de graus de liberdade quando comparado com o MEPGDT usando aproximação constante no tempo.

Apresentamos aqui a estratégia usada na resolução do sistema resultante que em linhas gerais consiste em desacoplar o sistema e aplicar um algoritmo preditor-corretor.

Seja

$$v_n^L(\mathbf{x}, t) = \psi_i(\mathbf{x})[v_i^{n+1}T_n(t) + \tilde{v}_i^n\tilde{T}_n(t)] \quad \mathbf{x} \in K, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (4.92)$$

logo,

$$v_n^L(\mathbf{x}, t_n) = \psi_i(\mathbf{x})\tilde{v}_i^n \quad \mathbf{x} \in K. \quad (4.93)$$

Portanto, inserindo as equações (4.51), (4.69), (4.71), (4.91), (4.92) e (4.93) em (4.66), obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ a_G \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \psi_j(\mathbf{x}) \left[ \tilde{u}_j^n - u_j^n \right], \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{v}_i^n \right)_K + a_G \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \tilde{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} \right\} \\
& = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} f_j^{n+1} \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} + \right. \\
& \left. \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ \tilde{u}_j^n - u_j^n \right], \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{v}_i^n \right)_K + a_G \left( \tilde{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} - \right. \\
& \qquad \qquad \left. \left. \left( f_j^{n+1} \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) \left[ v_i^{n+1} T_n(t) + \tilde{v}_i^n \tilde{T}_n(t) \right] \right)_{Q_n^e} \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned} \tag{4.95}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ v_i^{n+1} \left[ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} + \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \left. \left. + a_G \left( \tilde{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} - \left( \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right\} \right] + \\
& \qquad \qquad \tilde{v}_i^n \left[ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \left. \left. \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ \tilde{u}_j^n - u_j^n \right], \psi_i(\mathbf{x}) \right)_K + a_G \left( \tilde{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \left. \left. \left. \left( \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right\} \right] \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned} \tag{4.96}$$

A expressão (4.96) pode ser escrita de maneira compacta como

$$v_i^{n+1}G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n) + \tilde{v}_i^n \tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n) = 0, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.97)$$

onde

$$\begin{aligned} G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n) = & \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_G \left( \bar{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} - \left( \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n) = & \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ u_j^{n+1} T_n(t) + \tilde{u}_j^n \tilde{T}_n(t) \right], \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} + \right. \right. \\ & \left. \left( \psi_j(\mathbf{x}) \left[ \tilde{u}_j^n - u_j^n \right], \psi_i(\mathbf{x}) \right)_K + a_G \left( \bar{c}_j^n \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} - \right. \\ & \left. \left. \left( \psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Como (4.97) vale para todo número real  $v_i^{n+1}$  e  $\tilde{v}_i^n$ , temos que

$$\begin{cases} G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n) = 0, \\ \tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n) = 0. \end{cases} \quad (4.100)$$

Substituindo (4.91) nas equações (4.98) e (4.99), após manipulação al-

g brica chegamos a

$$\begin{aligned}
G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n) = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left[ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right] u_j^{n+1} + \right. \\
\left. \left[ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right] \tilde{u}_j^n - \right. \\
\left. \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right] u_j^n - \right. \\
\left. \left[ \frac{1}{\sigma} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right] \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K,
\end{aligned} \tag{4.101}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n) = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left[ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} \right] u_j^{n+1} + \right. \\
\left[ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + \right. \\
\left. (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] \tilde{u}_j^n - \left[ \frac{1}{\sigma \Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] u_j^n - \\
\left. \left[ \frac{1}{\sigma} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right] \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

As expressões para  $G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n)$  e  $\tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n)$  em (4.101) e (4.102) respectivamente, permitem escrever o sistema (4.100) de forma compacta como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{11} & \mathbb{K}^{12} \\ \mathbb{K}^{21} & \mathbb{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}^1 \\ \mathbb{F}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{4.103}$$

onde

$$\mathbb{K}^{11} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma\Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.104)$$

$$\mathbb{K}^{12} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.105)$$

$$\mathbb{F}^1 = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma\Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right] u_j^n + \left[ \frac{1}{\sigma} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right] \right\} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.106)$$

$$\mathbb{K}^{21} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma\Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.107)$$

$$\mathbb{K}^{22} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right\} \right\} \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.108)$$

e

$$\mathbb{F}^2 = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma\Delta t} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right] u_j^n + \left[ \frac{1}{\sigma} a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} f_j^{n+1} \right] \right\} \right\}, \quad i = 1, \dots, \mathcal{N}_K. \quad (4.109)$$

Seja  $\mathcal{N}_G$  o número de nós da partição  $\mathcal{T}_h$ . Então,  $\mathbb{K}^{11}$ ,  $\mathbb{K}^{12}$ ,  $\mathbb{K}^{21}$  e  $\mathbb{K}^{22}$  representam matrizes quadradas de ordem  $\mathcal{N}_G$ , enquanto que  $\mathbb{F}^1$  e  $\mathbb{F}^2$  são vetores coluna também de ordem  $\mathcal{N}_G$ . Aqui,  $u^{n+1}$  e  $\tilde{u}^n$  denotam vetores incógnitas de

ordem  $\mathcal{N}_G$  que conterão valores nodais decorrentes da solução de (4.103).

Por conveniência, escrevemos as matrizes  $\mathbb{K}^{11}$ ,  $\mathbb{K}^{12}$ ,  $\mathbb{K}^{21}$  e  $\mathbb{K}^{22}$ , como soma de duas parcelas, i.e,

$$\mathbb{K}^{11} = \mathbb{K}_G^{11} + \mathbb{K}_E^{11}, \quad \mathbb{K}^{12} = \mathbb{K}_G^{12} + \mathbb{K}_E^{12}, \quad \mathbb{K}^{21} = \mathbb{K}_G^{21} + \mathbb{K}_E^{21}, \quad \mathbb{K}^{22} = \mathbb{K}_G^{22} + \mathbb{K}_E^{22}, \quad (4.110)$$

onde para  $i = 1, \dots, \mathcal{N}_K$  tomamos

$$\mathbb{K}_G^{11} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.111)$$

$$\mathbb{K}_E^{11} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.112)$$

$$\mathbb{K}_G^{12} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.113)$$

$$\mathbb{K}_E^{12} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.114)$$

$$\mathbb{K}_G^{21} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.115)$$

$$\mathbb{K}_E^{21} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}, \quad (4.116)$$

e

$$\mathbb{K}_G^{22} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ a_G(\psi_j(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} + (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K \right\} \right\}, \quad (4.117)$$

$$\mathbb{K}_E^{22} = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_K} \left\{ \tilde{T}_n(t^*) a_G(\phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x})\tilde{T}_n(t))_{Q_n^e} \right\} \right\}. \quad (4.118)$$

Logo, usando as decomposições em (4.110), podemos reescrever (4.103)

como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_G^{11} & \mathbb{K}_G^{12} \\ \mathbb{K}_G^{21} & \mathbb{K}_G^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_E^{11} & \mathbb{K}_E^{12} \\ \mathbb{K}_E^{21} & \mathbb{K}_E^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}^1 \\ \mathbb{F}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.119)$$

Os desenvolvimentos que se seguem, visam representar o sistema em (4.119) em termos de matrizes elementares. Para tanto, definamos preliminarmente as matrizes quadradas  $\mathbb{A}_e$  e  $\mathbb{B}_e$  de ordem  $\mathcal{N}_K$  como

$$\mathbb{A}_e := (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K, \quad \mathbb{B}_e := (\nabla\psi_j(\mathbf{x}), \nabla\psi_i(\mathbf{x}))_K, \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K. \quad (4.120)$$

Da definição de  $a_G(\cdot, \cdot)_{Q_n^e}$  em (4.37) segue-se:

$$\begin{aligned} a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} &= \left( \frac{\partial\psi_j(\mathbf{x})T_n(t)}{\partial t}, \psi_i(\mathbf{x})T_n(t) \right)_{Q_n^e} + \\ &\varepsilon (\nabla\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \nabla\psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} + \sigma (\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K.$$

Usando (4.120), para  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K$ , temos que

$$\left( \frac{\partial\psi_j(\mathbf{x})T_n(t)}{\partial t}, \psi_i(\mathbf{x})T_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{2} (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{2} \mathbb{A}_e, \quad (4.122)$$

$$(\nabla\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \nabla\psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} = \frac{1}{3} \Delta t (\nabla\psi_j(\mathbf{x}), \nabla\psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{3} \Delta t \mathbb{B}_e, \quad (4.123)$$

$$(\psi_i(\mathbf{x})T_n(t), \psi_j(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} = \frac{1}{3} \Delta t (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{3} \Delta t \mathbb{A}_e, \quad (4.124)$$

o que permite escrever (4.121) sob a forma

$$a_G(\psi_j(\mathbf{x})T_n(t), \psi_i(\mathbf{x})T_n(t))_{Q_n^e} = \frac{1}{2} \mathbb{A}_e + \frac{1}{3} \varepsilon \Delta t \mathbb{B}_e + \frac{1}{3} \sigma \Delta t \mathbb{A}_e. \quad (4.125)$$



De igual modo, para  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K$ , obtemos

$$\left( \frac{\partial \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t)}{\partial t}, \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} = -\frac{1}{2} (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = -\frac{1}{2} \mathbb{A}_e, \quad (4.126)$$

$$\left( \nabla \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \nabla \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{6} \Delta t (\nabla \psi_j(\mathbf{x}), \nabla \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{B}_e, \quad (4.127)$$

$$\left( \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \psi_j(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{6} \Delta t (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{A}_e, \quad (4.128)$$

e portanto,

$$a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e} = -\frac{1}{2} \mathbb{A}_e + \frac{1}{6} \varepsilon \Delta t \mathbb{B}_e + \frac{1}{6} \sigma \Delta t \mathbb{A}_e. \quad (4.129)$$

Além disso, para  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K$ , as igualdades

$$\left( \frac{\partial \psi_j(\mathbf{x}) T_n(t)}{\partial t}, \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{2} (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{2} \mathbb{A}_e, \quad (4.130)$$

$$\left( \nabla \psi_j(\mathbf{x}) T_n(t), \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{6} \Delta t (\nabla \psi_j(\mathbf{x}), \nabla \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{B}_e, \quad (4.131)$$

$$\left( \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t), \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{6} \Delta t (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{A}_e, \quad (4.132)$$

e

$$\left( \frac{\partial \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t)}{\partial t}, \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = -\frac{1}{2} (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = -\frac{1}{2} \mathbb{A}_e, \quad (4.133)$$

$$\left( \nabla \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \nabla \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{3} \Delta t (\nabla \psi_j(\mathbf{x}), \nabla \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{B}_e, \quad (4.134)$$

$$\left( \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{3} \Delta t (\psi_j(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{x}))_K = \frac{1}{6} \Delta t \mathbb{A}_e, \quad (4.135)$$

permitem escrever

$$a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) T_n(t), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = \frac{1}{2} \mathbb{A}_e + \frac{1}{6} \varepsilon \Delta t \mathbb{B}_e + \frac{1}{6} \sigma \Delta t \mathbb{A}_e, \quad (4.136)$$

e

$$a_G \left( \psi_j(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e} = -\frac{1}{2} \mathbb{A}_e + \frac{1}{3} \varepsilon \Delta t \mathbb{B}_e + \frac{1}{3} \sigma \Delta t \mathbb{A}_e. \quad (4.137)$$

Sejam as matrizes elementares

$$\mathbb{K}_E^e := a_G \left( \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) T_n(t) \right)_{Q_n^e}, \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K, \quad (4.138)$$

$$\tilde{\mathbb{K}}_E^e := a_G \left( \phi_j^n(\mathbf{x}, t), \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{T}_n(t) \right)_{Q_n^e}, \quad i, j = 1, \dots, \mathcal{N}_K. \quad (4.139)$$

Designamos por  $\mathbb{F}_e$  o vetor coluna cujas componentes são os valores nodais de  $f(\mathbf{x})$  em  $K$ .

Denotamos por  $\mathcal{A}$  o operador de ‘assembly’ do método de elementos finitos. Com isso, obtemos as matrizes quadradas globais de ordem  $\mathcal{N}_G$  dadas por

$$\mathbb{A} = \mathcal{A}\mathbb{A}_e, \quad \mathbb{B} = \mathcal{A}\mathbb{B}_e, \quad (4.140)$$

$$\mathbb{K}_E = \mathcal{A}\mathbb{K}_E^e, \quad \tilde{\mathbb{K}}_E = \mathcal{A}\tilde{\mathbb{K}}_E^e. \quad (4.141)$$

Logo,

$$\mathbb{K}_E^{11} = \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) \mathbb{K}_E, \quad \mathbb{K}_E^{12} = \left( \tilde{T}_n(t^*) \right) \mathbb{K}_E, \quad (4.142)$$

$$\mathbb{K}_E^{21} = \left( T_n(t^*) + \frac{1}{\sigma \Delta t} \right) \tilde{\mathbb{K}}_E, \quad \mathbb{K}_E^{22} = \left( \tilde{T}_n(t^*) \right) \tilde{\mathbb{K}}_E. \quad (4.143)$$

Para os vetores  $\mathbb{F}^1$  e  $\mathbb{F}^2$  obtemos

$$\mathbb{F}^1 = \frac{1}{\sigma \Delta t} [\mathbb{K}_E] \{u^n\} + \mathcal{A} \left( \left[ \frac{1}{\sigma} \mathbb{K}_E^e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbb{A}_e \right] \{\mathbb{F}_e\} \right), \quad (4.144)$$

$$\mathbb{F}^2 = \left[ \mathcal{A} \left( \frac{1}{\sigma \Delta t} \tilde{\mathbb{K}}_E^e + \mathbb{A}_e \right) \right] \{u^n\} + \mathcal{A} \left( \left[ \frac{1}{\sigma} \tilde{\mathbb{K}}_E^e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbb{A}_e \right] \{\mathbb{F}_e\} \right), \quad (4.145)$$

com  $u^n$  representando o vetor coluna cujas componentes são soluções nos pontos nodais de  $\mathcal{T}_h$  no instante  $t_n$  decorrentes do ‘slab’ anterior.

Usando (4.140)-(4.145), e designando por  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de ordem

$\mathcal{N}_G$ , podemos escrever o sistema em (4.119) como

$$\frac{1}{2}\mathbb{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{6}(\varepsilon\mathbb{B} + \sigma\mathbb{A}) \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_E^{11} & \mathbb{K}_E^{12} \\ \mathbb{K}_E^{21} & \mathbb{K}_E^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}^1 \\ \mathbb{F}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.146)$$

Apresentamos no apêndice D o algoritmo preditor-multicorretor de terceira ordem conforme (Shakib, 1988) e (Castro, 1999). Visando aplicá-lo à resolução de (4.146), pré-condicionamos primeiramente este sistema por meio de uma multiplicação à esquerda pela matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.147)$$

resultando em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mathbb{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \\ & \frac{\Delta t}{6}(\varepsilon\mathbb{B} + \sigma\mathbb{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{K}_E^{11} & \mathbb{K}_E^{12} \\ \mathbb{K}_E^{21} & \mathbb{K}_E^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{F}^1 \\ \mathbb{F}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.148) \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mathbb{A} \begin{bmatrix} 2\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{6}(\varepsilon\mathbb{B} + \sigma\mathbb{A}) \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & 3\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} & \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \\ -\mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} & -\mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{n+1} \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}^1 + \mathbb{F}^2 \\ -\mathbb{F}^1 + \mathbb{F}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.149) \end{aligned}$$

Com isso, podemos identificar (4.149) com o sistema formado pelos funcionais  $G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n)$  e  $\tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n)$  dado por

$$\begin{cases} G(u^{n+1}, \tilde{u}^n, u^n) = 0, \\ \tilde{G}(\tilde{u}^n, u^{n+1}, u^n) = 0, \end{cases} \quad (4.150)$$

e reescrevê-lo sob a forma

$$\begin{cases} \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{2} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) + \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} \right] \{u^{n+1}\} + \left[ \frac{\Delta t}{2} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) + \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \right] \{\tilde{u}^n\} \\ - \mathbb{F}^1 - \mathbb{F}^2 = 0, \\ \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{6} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) - \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \right] \{\tilde{u}^n\} + \\ \left[ -\frac{\Delta t}{6} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) - \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} \right] \{u^{n+1}\} + \mathbb{F}^1 - \mathbb{F}^2 = 0. \end{cases} \quad (4.151)$$

Nosso objetivo agora é resolver o sistema em (4.151). Como podemos observar, o sistema em (4.151) resultou de uma nova reordenação do sistema em (4.103) de tal modo que sua primeira equação está associada à variável primária  $u^{n+1}$  e sua segunda equação está associada à variável secundária  $\tilde{u}^n$ . Além disso, tomando  $\tilde{u}^n$  como parâmetro na primeira equação de (4.151), i.e, conhecido na iteração passada, e tomando  $u^{n+1}$  como parâmetro na segunda equação de (4.151), definimos um processo iterativo para a determinação de  $u^{n+1}$  e  $\tilde{u}^n$  (a idéia é a mesma do método Gauss-Seidel ótimo com ordenação preto/vermelho). Assim, denotando por  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$  as aproximações de  $u^{n+1}$  e  $\tilde{u}^n$  respectivamente na  $i$ -ésima iteração, e por  $\mathbf{u}_h^{(n)}$  o vetor solução no instante  $t_n$ , designado anteriormente por  $u^n$ , definamos;

- Vetor resíduo associado à variável primária

$$\mathbb{R}^{(i)} = G\left(\mathbf{u}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)}\right); \quad (4.152)$$

- Vetor resíduo associado à variável secundária

$$\tilde{\mathbb{R}}^{(i)} = \tilde{G} \left( \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right); \quad (4.153)$$

- Matriz tangente associada à variável primária

$$\mathbb{T}^{(i)} = \frac{\partial G \left( \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)}{\partial \mathbf{u}}; \quad (4.154)$$

- Matriz tangente associada à variável secundária

$$\tilde{\mathbb{T}}^{(i)} = \frac{\partial G \left( \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}. \quad (4.155)$$

Seja a aproximação

$$G \left( \mathbf{u}^{(i+1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right) \cong G \left( \mathbf{u}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right) + \frac{\partial G \left( \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = 0, \quad (4.156)$$

então,

$$\mathbb{R}^{(i)} + \mathbb{T}^{(i)} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbb{T}^{(i)} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = -\mathbb{R}^{(i)}. \quad (4.157)$$

Consideremos o primeiro funcional em (4.151). Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(i)} &= G \left( \mathbf{u}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right) = \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A} \right) + \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} \right] \{ \mathbf{u}^{(i)} \} \\ &+ \left[ \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A} \right) + \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \right] \{ \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \} - \mathbb{F}^1 - \mathbb{F}^2, \end{aligned} \quad (4.158)$$

e

$$\mathbb{T}^{(i)} = \frac{\partial G \left( \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)}{\partial \mathbf{u}} = \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{2} \left( \varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A} \right) + \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} \right]. \quad (4.159)$$

Procedendo de igual modo com relação ao segundo funcional em (4.151)

temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{R}}^{(i)} &= \tilde{G}(\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)}) = \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{6} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) - \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \right] \{\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}\} \\ &+ \left[ -\frac{\Delta t}{6} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) - \mathbb{K}_E^{11} + \mathbb{K}_E^{21} \right] \{\mathbf{u}^{(i)}\} + \mathbb{F}^1 - \mathbb{F}^2, \end{aligned} \quad (4.160)$$

e

$$\tilde{\mathbb{T}}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = \left[ \mathbb{A} + \frac{\Delta t}{6} (\varepsilon \mathbb{B} + \sigma \mathbb{A}) - \mathbb{K}_E^{12} + \mathbb{K}_E^{22} \right]. \quad (4.161)$$

Finalmente, considerando as equações (4.158) - (4.161), do algoritmo preditor-multicorretor de terceira ordem descrito no apêndice (D), obtemos o vetor solução  $u^{n+1}$  decorrente do MEPGDT com aproximação linear tanto no espaço quanto no tempo.

### 4.3.3.2 Resolução dos Problemas Locais

Com base na aproximação (4.90) resta-nos resolver apenas o problema local em (4.59). Para elementos quadrangulares, tomamos como solução de (4.59) a aproximação analítica dada por (4.64). Para elementos triangulares, recorreremos novamente ao método de elementos finitos em dois níveis conforme (Ramalho, 2005).

## 4.4 Análise de Erro

### 4.4.1 Preliminares e Resultados Auxiliares

Esta seção é dedicada à análise de erro do método formulado em (4.49) usando elementos bilineares na aproximação espacial e uma aproximação constante no tempo. Para tanto, consideramos a seguinte hipótese 4.14.

**Hipótese 4.14** Seja a definição de  $\mathcal{M}_{Q_n^e}(\cdot)$  em (4.34). A quantidade  $(\nabla \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_n^c(t_n)]), \nabla v_n^c)_{Q_n^e}$  é desprezível, i.e, o erro associado a sua exclusão é da ordem do método. Este tipo de suposição é exatamente demonstrado em (Franca et al., 2007) no contexto da forma mista do problema de Darcy.

□

Para maior clareza de apresentação, organizamos esta seção da seguinte maneira: Preliminarmente introduzimos algumas definições pertinentes, reapresentamos o método em análise com a hipótese simplificadora assumida acima e fornecemos alguns resultados auxiliares. Na subseção 4.4.2 são estabelecidos os resultados referentes a coercividade e continuidade da formulação. O estudo da consistência do método é feito na subseção 4.4.3. A subseção 4.4.4 finaliza a seção com apresentação de estimativas de erro.

Seja o operador residual local

$$\mathcal{R}_n(w) := f - \mathcal{L}_t w - \frac{1}{\Delta t} [[w(t_n)]]. \quad (4.162)$$

Por simplicidade, assumimos nesta seção que a condição inicial  $u_0 \in V_1$ .

Além disso, consideremos as definições

$$u_n^o(v) := -\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t v), \quad (4.163)$$

$$u_n^s(v) := -\mathcal{M}_{Q_n^e} \left( \frac{1}{\Delta t} v \right), \quad (4.164)$$

$$u_n^f(v) := -\mathcal{M}_{Q_n^e}(v), \quad (4.165)$$

assim como as notações

$$\sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} (\cdot, \cdot)_{Q_n^e} = (\cdot, \cdot)_{\tilde{Q}_n^e}, \quad \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} a(\cdot, \cdot)_{Q_n^e} = a(\cdot, \cdot)_{\tilde{Q}_n^e}, \quad \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} (\cdot, \cdot)_K = (\cdot, \cdot)_{\tilde{K}}, \quad (4.166)$$

$$\|w\|_{0, \tilde{Q}_n^e} = \left( \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \|w\|_{0, Q_n^e}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.167)$$

e

$$\|w\|_{0, \tilde{K}} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w\|_{0, K}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.168)$$

Lembramos que para cada  $u_n^c \in S_n^c$ , o problema (4.45) sempre têm uma única solução  $u_n^E \in H^1(\mathcal{T}_h^n)$  que pode ser escrita como

$$u_n^E = \mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{R}_n(u_n^c)). \quad (4.169)$$

Assim, levando em conta (4.162), consideramos a cisão

$$u_n^E = u_n^o(u_n^c) + u_n^s([u_n^c(t_n)]) - u_n^f(f). \quad (4.170)$$

Importa ressaltar que a análise desenvolvida aqui segue as idéias introduzidas na seção 3.6 do capítulo anterior, que pressupõem a existência de uma expressão explícita para a função de base de enriquecimento  $\phi_j^n$  da qual dependem os diversos parâmetros que surgem no decorrer da análise. É dentro desse contexto que apresentamos os quatro lemas seguintes.

**Lema 4.15** Os parâmetros reais positivos  $\rho_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\rho_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\alpha_{Q_n^e}^{min}$  e  $\alpha_{Q_n^e}^{max}$ , são tais que

$$\rho_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\mathcal{M}_{Q_n^e}(w), w)_{Q_n^e} \leq \rho_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c, \quad (4.171)$$

e

$$\alpha_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}(w)], \nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}(w)])_{Q_n^e} \leq \alpha_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c. \quad (4.172)$$

**Prova:** Veja lema 3.7. □

**Lema 4.16** Os parâmetros reais positivos  $\xi_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\xi_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\gamma_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\gamma_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\beta_{Q_n^e}^{min}$  e  $\beta_{Q_n^e}^{max}$  são tais que

$$\xi_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\mathcal{M}_{Q_n^e}(w), \mathcal{M}_{Q_n^e}(w))_{Q_n^e} \leq \xi_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c, \quad (4.173)$$

$$\gamma_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(w)}{\partial t}, w \right)_{Q_n^e} \leq \gamma_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c, \quad (4.174)$$



e

$$\beta_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(w)}{\partial t}, \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(w)}{\partial t} \right)_{Q_n^e} \leq \beta_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c. \quad (4.175)$$

**Prova:**

Análoga a prova do lema 4.15 . □

**Lema 4.17** Seja o operador  $\chi_{Q_n^e} : S_n^c \rightarrow H^1(\mathcal{T}_h^n)$  definido por

$$\chi_{Q_n^e}(w_n^c) := [\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_{Q_n^e}](w_n^c), \quad \forall w_n^c \in S_n^c. \quad (4.176)$$

Então, para todo  $w \in S_n^c$ , os parâmetros reais positivos  $\lambda_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\lambda_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\mu_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\mu_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\Theta_{Q_n^e}^{min}$  e  $\Theta_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\zeta_{Q_n^e}^{min}$  e  $\zeta_{Q_n^e}^{max}$  são tais que

$$\lambda_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\chi_{Q_n^e}(w), w)_{Q_n^e} \leq \lambda_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e}, \quad (4.177)$$

$$\mu_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\chi_{Q_n^e}(w), \chi_{Q_n^e}(w))_{Q_n^e} \leq \mu_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e}, \quad (4.178)$$

$$\zeta_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\nabla [\chi_{Q_n^e}(w)], \nabla [-\sigma \mathcal{M}_{Q_n^e}(w)])_{Q_n^e} \leq \zeta_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e}, \quad (4.179)$$

e

$$\Theta_{Q_n^e}^{min}(\nabla w, \nabla w)_{Q_n^e} \leq (\nabla [\chi_{Q_n^e}(w)], \nabla w)_{Q_n^e} \leq \Theta_{Q_n^e}^{max}(\nabla w, \nabla w)_{Q_n^e}. \quad (4.180)$$

**Prova:**

Análoga a prova do lema 4.15. □

**Lema 4.18** Seja o operador  $\Upsilon_{Q_n^e} : S_n^c \rightarrow H^1(\mathcal{T}_h^n)$  definido por

$$\Upsilon_{Q_n^e}(w_n^c) := \left[ \mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_{Q_n^e} - \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}}{\partial t} \right](w_n^c), \quad \forall w_n^c \in S_n^c. \quad (4.181)$$

Então, os parâmetros  $\eta_{Q_n^e}^{min}$ ,  $\eta_{Q_n^e}^{max}$ ,  $\Phi_{Q_n^e}^{min}$  e  $\Phi_{Q_n^e}^{max}$  são tais que

$$\eta_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\Upsilon_{Q_n^e}(w), \Upsilon_{Q_n^e}(w))_{Q_n^e} \leq \eta_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c, \quad (4.182)$$

e

$$\Phi_{Q_n^e}^{min}(w, w)_{Q_n^e} \leq (\Upsilon_{Q_n^e}(w), w)_{Q_n^e} \leq \Phi_{Q_n^e}^{max}(w, w)_{Q_n^e} \quad \forall w \in S_n^c. \quad (4.183)$$

**Prova:**

Análoga a prova do lema 4.15. □

**Observação 4.19** Os parâmetros estabelecidos nos quatro lemas acima, dependem das grandezas  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Delta t$  e  $h$ . Um estudo numérico sobre tal dependência pode ser visto no apêndice E. □

A integração por partes no tempo fornece a identidade

$$\left( \frac{\partial w_n}{\partial t}, v_n \right)_{Q_n^e} = (w_n(t_{n+1}), v_n(t_{n+1}))_K - (w_n(t_n), v_n(t_n))_K - \left( w_n, \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{Q_n^e}, \quad (4.184)$$

que também será explorada mais adiante.

Em decorrência da hipótese 4.14 definimos a forma bilinear

$$\bar{a}_G(w, v)_{Q_n^e} := \left( \frac{\partial w}{\partial t}, v \right)_{Q_n^e} + (\sigma w, v)_{Q_n^e}, \quad (4.185)$$

que permite formular nosso método, objeto de análise desta seção, da seguinte maneira: dado  $u_{n-1}^c(t_n)$ , encontrar a função  $u_n^c \in S_n^c$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ , tal que

$$B_A(u_n^c, v_n^c)_n = F_A(v_n^c)_n, \quad \forall v_n^c \in S_n^c, \quad (4.186)$$

onde

$$\begin{aligned} B_A(u_n^c, v_n^c)_n &:= a_G(u_n^c, v_n^c)_{Q_n} + (u_n^c(t_n), v_n^c(t_n))_\Omega + a_G(u_n^o(u_n^c), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} \\ &+ \bar{a}_G(u_n^s(u_n^c(t_n)), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e}, \end{aligned} \quad (4.187)$$

e

$$\begin{aligned} F_A(v_n^c)_n &:= (u_{n-1}^c, v_n^c(t_n))_\Omega + \bar{a}_G(u_n^s(u_{n-1}^c(t_n)), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} + (f, v_n)_n \\ &+ a_G(u_n^f(f), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e}. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Sejam os parâmetros reais positivos

$$\delta_a^n = \Phi_{Q_n^e}^{min}, \quad (4.189)$$

$$\delta_b^n = \Theta_{Q_n^e}^{min}. \quad (4.190)$$

O apêndice E mostra o compartamento de (4.189) e (4.190) em função de  $h$ ,  $\Delta t$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ . Em particular, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta_a^n = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_b^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_a^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_b^n = 1. \quad (4.191)$$

Com isso, para  $v \in S_n^c$ , definimos a norma

$$\|v\|_{h\Delta t}^2 = \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \varepsilon \delta_b^n \|\nabla v\|_{0, Q_n^e}^2 + \sigma \delta_a^n \|v\|_{0, Q_n^e}^2 + \delta_a^n \|v(t_{n+1})\|_{0, K}^2 \right\}, \quad (4.192)$$

na qual provaremos a estabilidade e a convergência do MEPGDT em (4.186).

Aqui como em todo texto,  $C$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , representam constantes positivas que podem assumir diferentes valores em diferentes ocorrências.

#### 4.4.2 Existência e Unicidade de Solução

O resultado que se segue garante, pelo lema de Lax-Milgran, a existência e unicidade de solução de (4.186).

**Lema 4.20** A forma bilinear  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  satisfaz

$$i) B_A(w, v)_n \leq C_1 \|w\|_{h\Delta t} \|v\|_{h\Delta t}, \quad \forall w, v \in S_n^c, \quad (4.193)$$

$$ii) B_A(v, v)_n \geq C_2 \|v\|_{h\Delta t}^2, \quad \forall v \in S_n^c, \quad (4.194)$$

e portanto, o problema (4.186) tem solução única.

**Prova:**

Iniciaremos a prova pelo item *i*). Considerando as definições previamente introduzidas, da definição de  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  em (4.187) temos

$$\begin{aligned} B_A(w_n^c, v_n^c)_n &= \sigma \left( \left[ \mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_{Q_n^e} - \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}}{\partial t} \right] (w_n^c, v_n^c) \right)_{\tilde{Q}_n^e} \\ &+ \varepsilon (\nabla [\mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_{Q_n^e}] (w_n^c, \nabla v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \left( \left[ \mathcal{I} - \sigma \mathcal{M}_{Q_n^e} - \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}}{\partial t} \right] (w_n^c, v_n^c) \right)_{\tilde{Q}_n^e}, \quad \forall w_n^c, v_n^c \in S_n^c, \end{aligned} \quad (4.195)$$

que usando as definições em (4.176) e (4.181) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} B_A(w_n^c, v_n^c)_n &= \sigma (\Upsilon_{Q_n^e}(w_n^c), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} + \varepsilon (\nabla \chi_{Q_n^e}(w_n^c), \nabla v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} (\Upsilon_{Q_n^e}(w_n^c), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e}, \quad \forall w_n^c, v_n^c \in S_n^c. \end{aligned} \quad (4.196)$$

Aplicando primeiramente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando em seguida o resultado em (4.182), da expressão anterior chegamos a

$$\begin{aligned} B_A(w_n^c, v_n^c)_n &\leq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sigma \|\Upsilon_{Q_n^e}(w_n^c)\|_{0, Q_n^e} \|v_n^c\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\nabla \chi_{Q_n^e}(w_n^c)\|_{0, Q_n^e} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^e} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta t} \|\Upsilon_{Q_n^e}(w_n^c)\|_{0, Q_n^e} \|v_n^c\|_{Q_n^e} \right\} \end{aligned} \quad (4.197)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sigma \sqrt{\eta_{Q_n^e}^{max}} \|w_n^c\|_{0, Q_n^e} \|v_n^c\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\nabla \chi_{Q_n^e}(w_n^c)\|_{0, Q_n^e} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^e} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\eta_{Q_n^e}^{max}} \|w_n^c\|_{0, Q_n^e} \|v_n^c\|_{Q_n^e} \right\}, \quad \forall w_n^c, v_n^c \in S_n^c. \end{aligned} \quad (4.198)$$

Além disso, considerando os resultados em (4.179) e (4.180), concluímos que

$$\|\nabla \chi_{Q_n^\varepsilon}(w_n^c)\|_{0, Q_n^\varepsilon} \leq (\Theta_{Q_n^\varepsilon}^{max})^{1/2} \|\nabla w_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} + (\zeta_{Q_n^\varepsilon}^{max})^{1/2} \|w_n^c\|_{Q_n^\varepsilon}. \quad (4.199)$$

Substituindo (4.199) em (4.198) e rearrumando termos chegamos a

$$\begin{aligned} B_A(w_n^c, v_n^c)_n &\leq \sum_{Q_n^\varepsilon \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sigma \sqrt{\eta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|v_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} + \varepsilon \sqrt{\Theta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \|\nabla w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} \right. \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\eta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|v_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} \\ &\left. + \varepsilon \sqrt{\zeta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} \right\}, \forall w_n^c, v_n^c \in S_n^c. \end{aligned} \quad (4.200)$$

Lembrando que os parâmetros  $\eta_{Q_n^\varepsilon}^{max}$ ,  $\zeta_{Q_n^\varepsilon}^{max}$  e  $\Theta_{Q_n^\varepsilon}^{max}$  são limitados, veja apêndice E, existe uma constante  $C_1$  independente de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\Delta t$  e  $h$  tal que

$$\sqrt{\eta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \leq C_1 \delta_a^n, \quad (4.201)$$

$$\sqrt{\Theta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \leq C_1 \delta_b^n, \quad (4.202)$$

$$\sqrt{\zeta_{Q_n^\varepsilon}^{max}} \leq C_1 \delta_a^n \delta_b^n, \quad (4.203)$$

o que permite escrever (4.200) como

$$\begin{aligned} B_A(w_n^c, v_n^c)_n &\leq C_1 \sum_{Q_n^\varepsilon \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sigma \delta_a^n \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|v_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} + \frac{1}{\Delta t} \delta_a^n \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|v_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \right. \\ &\left. + \varepsilon \delta_b^n \|\nabla w_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^\varepsilon} + \varepsilon \delta_a^n \delta_b^n \|w_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \|\nabla v_n^c\|_{0, Q_n^\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (4.204)$$

da qual concluímos que

$$B_A(w_n^c, v_n^c)_n \leq C_1 \|w_n^c\|_{h\Delta t} \|v_n^c\|_{h\Delta t}, \quad \forall w_n^c, v_n^c \in S_n^c, \quad (4.205)$$

o que completa a prova do item *i*).

Em seguida, apresentamos a prova do item *ii*). Aqui, como a idéia da prova é similar à do item *i*), usaremos de imediato as definições em (4.176) e (4.181) na definição de  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  em (4.187). Assim, para todo  $v_n^c$  pertencente a  $S_n^c$  temos

$$B_A(v_n^c, v_n^c)_n = \sigma(\Upsilon_{Q_n^e}(v_n^c), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} + \varepsilon(\nabla\chi_{Q_n^e}(v_n^c), \nabla v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e} + \frac{1}{\Delta t}(\Upsilon_{Q_n^e}(v_n^c), v_n^c)_{\tilde{Q}_n^e}, \quad (4.206)$$

da qual, considerando os resultados em (4.182) e (4.183), obtemos a desigualdade

$$B_A(v_n^c, v_n^c)_n \geq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \sigma \Phi_{Q_n^e}^{min} \|v_n^c\|_{0, Q_n^e}^2 + \varepsilon \Theta_{Q_n^e}^{min} \|\nabla v_n^c\|_{Q_n^e}^2 + \frac{1}{\Delta t} \Phi_{Q_n^e}^{min} \|v_n^c\|_{Q_n^e}^2 \right\}, \quad (4.207)$$

que completa a prova do item *ii*), sendo a constante  $C_2$  unitária.

□

**Observação 4.21** O resultado do lema 4.20 implica em existência e unicidade de solução globalmente, por um argumento de indução.

□

### 4.4.3 Consistência Variacional

Por simplicidade, denotaremos também por  $u$  a restrição da solução exata  $u$  de (4.2) ao slab (fatia)  $Q_n$ . Lembramos ainda da vinculação do índice  $n$  nos diversos parâmetros, funções ou operadores ao slab  $Q_n$ .

Seja  $u_n^c \in S_n^c$  a solução de (4.186). Denotemos o erro de consistência do MEPGDT em (4.186),  $e_n^G$ , como

$$e_n^G := B_A(u - u_n^c, v_n^c)_n \quad \forall v_n^c \in S_n^c, \quad (4.208)$$

para o qual são válidos os dois resultados seguintes, ou seja, (4.209) e (4.216).

**Lema 4.22** (Erro de Consistência). Seja  $u \in W(0, T)$  solução de (4.2) e  $u_n^c \in S_n^c$

solução de (4.186). Então,

$$\begin{aligned}
e_n^G &:= B_A(u - u_n^c, v_n^c)_n \\
&= ([u - u_{n-1}^c](t_n), v_n^c(t_n))_\Omega + \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \left( \frac{\partial u_n^s([u - u_{n-1}^c](t_n))}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&\quad \left. + \sigma(u_n^s([u - u_{n-1}^c](t_n)), v_n^c)_{Q_n^e} \right\} \quad \forall v_n^c \in S_n^c. \tag{4.209}
\end{aligned}$$

**Prova:**

Da linearidade de  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  segue-se que

$$\begin{aligned}
e_n^G &:= B_A(u - u_n^c, v_n^c)_n, \\
&= B_A(u, v_n^c)_n - B_A(u_n^c, v_n^c)_n. \tag{4.210}
\end{aligned}$$

Aplicando a definição de  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  em (4.187) à primeira parcela no lado direito de (4.210) temos que

$$\begin{aligned}
B_A(u, v_n^c)_n &= \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n} + a(u, v_n^c)_{Q_n} + (u(t_n), v_n^c(t_n))_\Omega \\
&\quad - \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t u)}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + a(\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t u), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(u(t_n))}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}(u(t_n)), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\}, \tag{4.211}
\end{aligned}$$

da qual, lembrando que a solução exata  $u$  de (4.2) satisfaz

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n} + a(u, v_n^c)_{Q_n} = (f, v_n^c)_{Q_n}, \quad \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \tag{4.212}$$

e

$$\mathcal{L}_t u = f, \text{ em } Q_n^e \quad \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \tag{4.213}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
B_A(u, v_n^c)_n &= (f, v_n^c)_{Q_n} + (u(t_n), v_n^c(t_n))_\Omega \\
&- \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(f)}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + a(\mathcal{M}_{Q_n^e}(f), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(u(t_n))}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}(u(t_n)), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.214}$$

Por outro lado, combinando (4.186) e (4.188), temos que

$$\begin{aligned}
B_A(u_n^c, v_n^c)_n &= F_A(v_n^c)_n := (f, v_n^c)_{Q_n^e} + (u_{n-1}^c(t_n), v_n^c(t_n))_\Omega \\
&- \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_n^h} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(f)}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + a(\mathcal{M}_{Q_n^e}(f), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(u_{n-1}^c(t_n))}{\partial t}, v_n^c \right)_{Q_n^e} + \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}(u_{n-1}^c(t_n)), v_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.215}$$

A substituição de (4.214) e (4.215) em (4.210), juntamente com a definição (4.164), completam a prova.  $\square$

Em particular, mostramos no corolário seguinte que o erro de consistência no slab inicial,  $n = 0$ , é nulo.

**Corolário 4.23** (Erro de consistência no slab  $n = 0$ ). Para  $n = 0$  temos que

$$e_0^G = 0. \tag{4.216}$$

**Prova:** O resultado decorre em primeiro lugar, do fato que por definição

$$u_{-1}^c := u_0 = u(t_0), \tag{4.217}$$



e em segundo lugar, do fato que

$$u_n^s(0) = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}, \quad (4.218)$$

o que completa a prova.  $\square$

Apresentamos na subseção seguinte, estimativas de erro para o MEPGDT em (4.186).

#### 4.4.4 Estimativas de Erro

Dividimos esta subseção em duas partes a saber: A primeira provê resultados decorrentes das estimativas de interpolação. A segunda parte finaliza a subseção com a apresentação do teorema 4.27 e do corolário 4.28 que fornecem estimativas de erro para o MEPGDT em (4.186) na norma tripla  $||| \cdot |||_{h\Delta t}$  definida em (4.192).

##### 4.4.4.1 Estimativas de Interpolação

Denotamos por  $P_h$  o operador de projeção  $L^2(\Omega)$  sobre o espaço  $V_L$ . Isto significa que tomando  $v \in L^2(\Omega)$ , temos que

$$P_h v \in V_L, \quad (P_h v - v, w)_\Omega = 0 \quad \forall w \in V_L. \quad (4.219)$$

Seja  $\mathbb{P}^q(J_n)$  o espaço dos polinômios de grau  $q$  definidos em  $J_n$ . Denotamos por  $\tilde{\mathcal{I}}_q^n$ , com  $q$  inteiro não-negativo, o operador de interpolação de Lagrange nos pontos de Radau de  $J_n$ , veja (Thomée, 1997), (Thomée e Larsson, 2003), (Eriksson et al., 1985), (Makridakis e Karakashian, 1998) para detalhes, tal que

$$\tilde{\mathcal{I}}_q^n := C(\mathcal{I}_n) \longrightarrow \mathbb{P}^q(J_n), \quad (4.220)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_q^n u(x, \cdot) \in \mathbb{P}^q(J_n), \quad (4.221)$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_q^n u(x, t_n) = u(x, t_n), \quad x \in \Omega, \quad (4.222)$$

e

$$(u - \tilde{\mathcal{I}}_q^n u, w)_{Q_n} = 0 \quad \forall w \in \mathbb{P}^{q-1}(J_n). \quad (4.223)$$

O operador de interpolação  $\tilde{\mathcal{I}}_q^n$  possui a propriedade de aproximação

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_q^n y - y\|_{L^2(J_n)} \leq C(\Delta t)^{q+1} \|y^{(q+1)}\|_{L^2(J_n)}, \quad (4.224)$$

na qual  $y^{(q+1)}$  denota a derivada de  $y$  de ordem  $q + 1$  com respeito ao tempo.

**Observação 4.24** Para  $q = 0$ , a condição (4.233) torna-se inócua.

□

Seja a função

$$W_h^q : (0, T] \longrightarrow H_0^1(\Omega), \quad (4.225)$$

definida por

$$W_h^q(x, t) = \tilde{\mathcal{I}}_q^n P_h u(x, t), \quad (x, t) \in Q_n. \quad (4.226)$$

Para simplicidade de notação, designamos a restrição de  $W_h^q$  à  $J_n$ ,  $W_h^q|_{J_n}$ , também por  $W_h^q$ . Como assumimos  $u_0 \in V_1$ , temos

$$W_h^q(x, 0) = u_0. \quad (4.227)$$

Assumimos que para cada  $t \in [0, T]$ , a família de espaços dada por  $V_1$  satisfaz

$$\|\nabla(v(t) - P_h v(t))\|_{0,\Omega} \leq Ch \|v\|_{2,\Omega}, \quad v(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (4.228)$$

e

$$\|v(t) - P_h v(t)\|_{0,\Omega} \leq Ch^2 \|v\|_{2,\Omega}, \quad v(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (4.229)$$

Das considerações acima, temos os resultados clássicos de aproximação para a função interpolante  $W_h^q(x, t)$  em (4.226) conforme o lema que se segue.

**Lema 4.25** (Estimativas de interpolação). Seja  $u \in W(0, T)$  solução de (4.2) e  $W_h^q$  a função interpolante definida em (4.226). Então, são válidas as estimativas seguintes:

$$\|u - W_h^q\|_{0, Q_n} \leq C \left[ (\Delta t)^{q+1} \|u^{(q+1)}\|_{0, Q_n} + (\Delta t)^{1/2} h^2 \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, \Omega} \right], \quad (4.230)$$

$$\|\nabla(u - W_h^q)\|_{0, Q_n} \leq C \left[ (\Delta t)^{q+1} \|\nabla u^{(q+1)}\|_{0, Q_n} + (\Delta t)^{1/2} h \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, \Omega} \right], \quad (4.231)$$

e

$$\max_{J_n} \|(u - W_h^q)(t)\|_{0, \Omega} \leq C \left[ (\Delta t)^{q+1} \max_{J_n} \|u^{(q+1)}(t)\|_{0, \Omega} + (\Delta t)^{1/2} h^2 \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, \Omega} \right]. \quad (4.232)$$

**Prova:**

Veja por exemplo (Makridakis e Karakashian, 1998).

□

**Lema 4.26** (Erro de interpolação na norma  $\|\cdot\|_{h\Delta t}$ ). Seja  $u \in W(0, T)$  solução de (4.2) e  $W_{hn}^c$  a restrição da função interpolante  $W_h^q$  definida em (4.226) ao slab  $n$  tomando  $q = 0$ . Então, para todo  $n$  pertencente a  $\mathcal{N}_{\Delta t}$ , a estimativa

$$\begin{aligned} \| \|u - W_{hn}^c\| \|_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \Delta t \left[ \sqrt{\sigma \delta_a^n} \|u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + \sqrt{\varepsilon \delta_b^n} \|\nabla u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} \right] \right. \\ &\quad + \sqrt{\Delta t} h \left[ h \sqrt{\sigma \delta_a^n} + h \sqrt{\delta_a^n} + \sqrt{\varepsilon \delta_b^n} \right] \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \\ &\quad \left. + \Delta t \sqrt{\delta_a^n} \max_{J_n} \|u^{(1)}(t)\|_{0, K} \right\}, \end{aligned} \quad (4.233)$$

é válida.

**Prova:** O resultado decorre imediatamente da combinação da definição da norma  $\|\cdot\|_{h\Delta t}$  em (4.192) com as desigualdades (4.230), (4.231) e (4.232).

□

#### 4.4.4.2 Convergência

Iniciamos esta subseção fornecendo as desigualdades abaixo decorrentes da definição da norma  $||| \cdot |||_{h\Delta t}$  em (4.192);

$$|||w|||_{0,Q_n^e}^2 \leq \frac{1}{\sigma\delta_a^n} |||w|||_{h\Delta t}^2, \quad (4.234)$$

$$|||\nabla w|||_{0,Q_n^e}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon\delta_b^n} |||w|||_{h\Delta t}^2, \quad (4.235)$$

$$|||w(t_{n+1})|||_{0,K}^2 \leq \frac{1}{\delta_a^n} |||w|||_{h\Delta t}^2, \quad (4.236)$$

usadas aqui e na subseção seguinte.

Também importa lembrar o resultado similar à (4.218) dado por

$$\mathcal{M}_{Q_n^e}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_{\Delta t}. \quad (4.237)$$

Como foi dito na subseção anterior, denotamos também por  $u$  a restrição da solução exata  $u$  de (4.2) ao slab (fatia)  $Q_n$ . Lembramos novamente que  $u_n^c \in S_n^c$  designa a solução de (4.186). Assim, definimos o erro entre  $u$  e  $u_n^c$  no slab  $Q_n$  por

$$e_n := u - u_n^c. \quad (4.238)$$

Apresentamos no teorema seguinte o principal resultado desta seção, ou seja, uma estimativa para o erro do MEPGDT definido em (4.238).

Visando a simplificação de expressões que aparecerão ao longo da prova do teorema 4.27, definimos os parâmetros reais positivos

$$j_a^n := \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2}, \quad (4.239)$$

$$j_b^n := \left( \frac{\varepsilon}{\delta_b^n} \right)^{1/2}, \quad (4.240)$$

$$j_c^n := \left( \frac{\sigma^2 \Delta t}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^4 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2}, \quad (4.241)$$

e

$$j_d^n := \max \{1, \sigma, \sqrt{\varepsilon}\} \left( \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right)^{1/2}, \quad (4.242)$$

dependentes de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $h$  e  $\Delta t$ . Tal dependência pode ser vista no apêndice E. Em particular, temos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} j_a^n = \lim_{h \rightarrow 0} j_a^n = 1, \quad (4.243)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} j_b^n = \lim_{h \rightarrow 0} j_b^n = \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.244)$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} j_c^n = \lim_{h \rightarrow 0} j_c^n = 0. \quad (4.245)$$

Adicionalmente temos ainda que

$$0 < \delta_a^n, \delta_b^n \leq 1. \quad (4.246)$$

**Teorema 4.27** Seja  $u$  solução exata do problema (4.2) satisfazendo a condição  $u \in W(0, T)$ , onde o espaço  $W(0, T)$  é definido por (4.3), e  $u_n^c$  a solução aproximada obtida através do Método Enriquecido de Petrov-Galerkin Descontínuo no Tempo (MEPGDT) em (4.186). Então, para todo  $n$  pertencente a  $\mathcal{N}_{\Delta t}$ , existe uma constante  $C$  independente de  $h$  e  $\Delta t$  tal que o erro  $e_n = u - u_n^c$  satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \|e_n\|_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sqrt{\Delta t} \left[ \sqrt{\Delta t} \left( j_c^n + \sqrt{\sigma \delta_a^n} \right) + j_d^n h \right] \|u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} \right. \\ &\quad + \Delta t \left( j_b^n + \sqrt{\varepsilon \delta_b^n} \right) \|\nabla u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + j_d^n \varepsilon h \sqrt{\Delta t} \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \\ &\quad + h \sqrt{\Delta t} \left( j_b^n + h j_c^n + h \sqrt{\delta_a^n} + h \sqrt{\sigma \delta_a^n} + \sqrt{\varepsilon \delta_a^n} \right) \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \\ &\quad \left. + \Delta t \sqrt{\delta_a^n} \max_{J_n} \|u^{(1)}(t)\|_{0, K} \right\}. \end{aligned} \quad (4.247)$$

**Prova:** Faremos uma prova por indução sobre cada slab  $n$ . Assim, organizamos a prova em dois itens. No primeiro, apresentamos a prova para o caso  $n = 0$ ,

enquanto que no segundo, supondo conhecido o erro  $\|e_{n-1}\|_{h\Delta t}$ , estabelecemos o resultado final para  $n$ .

*i)* Caso  $n = 0$ :

Seja a cisão

$$\begin{aligned} \|e_n\|_{h\Delta t} &:= \|u - u_n^c\|_{h\Delta t} = \|u - u_n^c + W_{hn}^c - W_{hn}^c\|_{h\Delta t}, \\ &\leq \|u - W_{hn}^c\|_{h\Delta t} + \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.248)$$

O primeiro termo no lado direito da desigualdade (4.248) é estimado prontamente via (4.233). Portanto, resta-nos apenas estimar o segundo termo. Assim, partindo de (4.194) chegamos a

$$\begin{aligned} C\|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}^2 &\leq B_A(W_{hn}^c - u_n^c, W_{hn}^c - u_n^c)_n, \quad \text{de (4.207)} \\ &= B_A(W_{hn}^c - u_n^c + u - u, W_{hn}^c - u_n^c)_n, \\ &= B_A(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_n + B_A(u - u_n^c, W_{hn}^c - u_n^c)_n. \end{aligned} \quad (4.249)$$

Como  $n = 0$ , de (4.216) concluímos que o segundo termo no lado direito de (4.249) é nulo. Com isso, podemos escrever (4.249) sob a forma

$$C\|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}^2 \leq B_A(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_n. \quad (4.250)$$

Da definição de  $B_A(\cdot, \cdot)_n$  em (4.187) temos que

$$\begin{aligned}
B_A(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_n &= \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \frac{\partial[W_{hn}^c - u]}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&+ a(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \\
&+ ([W_{hn}^c - u](t_n), [W_{hn}^c - u_n^c](t_n))_K \\
&- \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t[W_{hn}^c - u])}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&+ \left. a(\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t[W_{hn}^c - u]), W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \right] \\
&- \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([W_{hn}^c - u](t_n))}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&+ \left. \left. \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}([W_{hn}^c - u](t_n)), W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\} \\
&:= \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sum_{j=1}^7 T_j^n \right\}. \tag{4.251}
\end{aligned}$$

Em seguida, estimaremos os termos  $T_j^n$ ,  $j \in \{1, \dots, 7\}$ , em (4.251) separadamente. Assim, aplicando (4.184) ao primeiro termo,  $T_1^n$ , e considerando (4.219), concluímos que  $T_1^n = 0$ . Além disso, (4.219) permite concluir que o terceiro termo,  $T_3^n$ , é também nulo. Da mesma forma, (4.227) juntamente com (4.237) permitem afirmar que os dois últimos termos,  $T_6^n$  e  $T_7^n$ , também são nulos. Portanto, resta-nos estimar os termos  $T_2^n$ ,  $T_4^n$  e  $T_5^n$ . Logo, considerando inicialmente o termo  $T_2^n$  temos que

$$\begin{aligned}
T_2^n &= a(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \\
&= \sigma(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} + \varepsilon(\nabla[W_{hn}^c - u], \nabla[W_{hn}^c - u_n^c])_{Q_n^e}, \tag{4.252}
\end{aligned}$$

da qual, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, somos conduzidos a

$$T_2^n \leq \sigma \|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\nabla[W_{hn}^c - u]\|_{0, Q_n^e} \|\nabla[W_{hn}^c - u_n^c]\|_{0, Q_n^e}. \tag{4.253}$$

Lembrando que  $(W_{hn}^c - u_n^c) \in S_n^c$ , podemos escrever a desigualdade

anterior como

$$T_2^n \leq \sigma \sqrt{\Delta t} \|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0, K} + \varepsilon \|\nabla[W_{hn}^c - u]\|_{0, Q_n^e} \|\nabla[W_{hn}^c - u_n^c]\|_{0, Q_n^e}, \quad (4.254)$$

de onde, levando em conta (4.236) e (4.235), obtemos

$$T_2^n \leq \left[ \|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \left( \frac{\sigma^2 \Delta t}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \|\nabla[W_{hn}^c - u]\|_{0, Q_n^e} \left( \frac{\varepsilon}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \right] \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}. \quad (4.255)$$

Com relação ao termo  $T_4^n$ , dado por

$$T_4^n = - \left( \frac{\partial (\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t[W_{hn}^c - u]))}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e}, \quad (4.256)$$

temos que, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e considerando o fato que  $(W_{hn}^c - u_n^c) \in S_n^c$  obtemos

$$T_4^n \leq \sqrt{\Delta t} \left\| \frac{\partial (\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t[W_{hn}^c - u]))}{\partial t} \right\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0, K}. \quad (4.257)$$

Como  $\mathcal{L}_t u = f \in S_n^c$ , (4.175) é aplicável. Este fato, a definição do operador  $\mathcal{L}_t(\cdot)$  e (4.236), usados em (4.257) conduzem a

$$T_4^n \leq \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left\| \frac{\partial[W_{hn}^c - u]}{\partial t} - \varepsilon \Delta[W_{hn}^c - u] + \sigma[W_{hn}^c - u] \right\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}, \quad (4.258)$$

de onde, lembrando que  $W_{hn}^c \in S_n^c$  e usando a desigualdade do triângulo, obtemos

$$T_4^n \leq \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left[ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \right] \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} + \sigma \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}. \quad (4.259)$$

De igual modo, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao termo



$T_5^n$  dado por

$$\begin{aligned}
T_5^n &= -a(\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)], W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e}, \\
&= -\sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)], W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \\
&\quad - \varepsilon(\nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}(\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u))], \nabla[W_{hn}^c - u_n^c])_{Q_n^e}, \tag{4.260}
\end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned}
T_5^n &\leq \sigma \|\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0, Q_n^e} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]]\|_{0, Q_n^e} \|\nabla[W_{hn}^c - u_n^c]\|_{0, Q_n^e}, \tag{4.261}
\end{aligned}$$

escrita por conveniência como

$$\begin{aligned}
T_5^n &\leq \sigma \sqrt{\Delta t} \|\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0, K} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]]\|_{0, Q_n^e} \|\nabla[W_{hn}^c - u_n^c]\|_{0, Q_n^e}, \tag{4.262}
\end{aligned}$$

da qual, considerando (4.236) e (4.235), obtemos

$$\begin{aligned}
T_5^n &\leq \sigma \|\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]\|_{0, Q_n^e} \left(\frac{\Delta t}{\delta_a^n}\right)^{1/2} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} \\
&\quad + \varepsilon \|\nabla[\mathcal{M}_{Q_n^e}[\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)]]\|_{0, Q_n^e} \left(\frac{1}{\varepsilon \delta_a^n}\right)^{1/2} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}. \tag{4.263}
\end{aligned}$$

Repetindo mais uma vez o argumento que  $\mathcal{L}_t u = f \in S_n^c$ , usamos (4.173)

e (4.172) em (4.263), e obtemos

$$\begin{aligned}
T_5^n &\leq \|\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)\|_{0, Q_n^e} \left(\frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n}\right)^{1/2} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} \\
&\quad + \|\mathcal{L}_t(W_{hn}^c - u)\|_{0, Q_n^e} \left(\frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n}\right)^{1/2} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}, \tag{4.264}
\end{aligned}$$

da qual, considerando a definição do operador  $\mathcal{L}_t(\cdot)$ , o fato que  $W_{hn}^c \in S_n^c$  e a

desigualdade do triângulo, somos conduzidos à

$$\begin{aligned}
T_5^n &\leq \left[ \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \right] \left[ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \right] \\
&\|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} + \sigma \left[ \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \right] \\
&\|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}. \tag{4.265}
\end{aligned}$$

Como  $T_1^n = T_3^n = T_6^n = T_7^n = 0$ , (4.250) toma a forma

$$C \| \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}^2 \leq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ T_2^n + T_4^n + T_5^n \right\}, \tag{4.266}$$

e logo, a substituição de (4.255), (4.259) e (4.265) em (4.266) conduz à

$$\begin{aligned}
C \| \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t}^2 &\leq \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sigma \left[ \left( \frac{\Delta t}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \right] \|W_{hn}^c - u\|_{0, Q_n^e} \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\varepsilon}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \|\nabla[W_{hn}^c - u]\|_{0, Q_n^e} + \left[ \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \right] \right. \\
&\left. \left. \left[ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \right] \right\}, \tag{4.267}
\end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
|||W_{hn}^c - u_n^c|||_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sigma \left[ \left( \frac{\Delta t}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2} \right] |||W_{hn}^c - u|||_{0, Q_n^e} + \left( \frac{\varepsilon}{\delta_b^n} \right)^{1/2} |||\nabla[W_{hn}^c - u]|||_{0, Q_n^e} \right. \\
&+ \left. \left[ \left( \frac{\Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \right] \right. \\
&\left. \left[ |||\frac{\partial u}{\partial t}|||_{0, Q_n^e} + \varepsilon |||\Delta u|||_{0, Q_n^e} \right] \right\}. \tag{4.268}
\end{aligned}$$

Como podemos ver no apêndice E, existe uma constante  $C$  independente de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $h$  e  $\Delta t$  tal que

$$\left( \frac{\beta_{Q_n^e}^{max}}{\sigma \delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch\sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \tag{4.269}$$

$$\left( \frac{\xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch\sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \tag{4.270}$$

$$\left( \frac{\alpha_{Q_n^e}^{max}}{\Delta t \delta_b^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch\sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \tag{4.271}$$

que juntamente com as definições introduzidas em (4.240), (4.241) e (4.242), permitem escrever (4.268) como

$$\begin{aligned}
|||W_{hn}^c - u_n^c|||_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ j_c^n |||W_{hn}^c - u|||_{0, Q_n^e} + j_b^n |||\nabla[W_{hn}^c - u]|||_{0, Q_n^e} \right. \\
&+ \left. Ch\sqrt{\Delta t} j_d^n \left[ |||\frac{\partial u}{\partial t}|||_{0, Q_n^e} + \varepsilon |||\Delta u|||_{0, Q_n^e} \right] \right\}, \tag{4.272}
\end{aligned}$$

da qual, usando os resultados (4.230) e (4.231), lema 4.25, obtemos

$$\begin{aligned}
\| \|W_{hn}^c - u_n^c\| \|_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ j_c^n \left[ \Delta t \|u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + \sqrt{\Delta t} h^2 \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \right] \right. \\
&+ j_b^n \left[ \Delta t \|\nabla u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + \sqrt{\Delta t} h \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \right] \\
&+ \left. j_d^n h \sqrt{\Delta t} \left[ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{0, Q_n^e} + \varepsilon \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \right] \right\} \\
&:= \| \|e_n^c\| \|_{h\Delta t}. \tag{4.273}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (4.233) e (4.273) na desigualdade (4.248) somos conduzidos à

$$\begin{aligned}
\| \|u - u_n^c\| \|_{h\Delta t} &\leq C \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sqrt{\Delta t} \left[ \sqrt{\Delta t} \left( j_c^n + \sqrt{\sigma \delta_a^n} \right) + j_d^n h \right] \|u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} \right. \\
&+ \Delta t \left( j_b^n + \sqrt{\varepsilon \delta_b^n} \right) \|\nabla u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + j_d^n \varepsilon h \sqrt{\Delta t} \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \\
&+ h \sqrt{\Delta t} \left( j_b^n + h j_c^n + h \sqrt{\delta_a^n} + h \sqrt{\sigma \delta_a^n} + \sqrt{\varepsilon \delta_a^n} \right) \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \\
&+ \left. \Delta t \sqrt{\delta_a^n} \max_{J_n} \|u^{(1)}(t)\|_{0, K} \right\}, \tag{4.274}
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

ii) Caso  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t} \setminus \{0\}$  :

Para finalizar a prova por indução, assumimos que (4.247) é válido para  $n - 1$  e mostraremos a validade desse resultado para  $n$ .

Aqui, é suficiente repetir os argumentos introduzidos na prova do caso  $n = 0$  a menos dos termos  $T_6^n$  e  $T_7^n$  que agora são não nulos. Também é não nulo o segundo termo no lado direito de (4.249). Assim, na sequência, trataremos de fornecer uma estimativa para esses termos.

Seja  $e_n^R$  definido por

$$e_n^R := T_6^n + T_7^n + B_A(u - u_n^c, W_{hn}^c - u_n^c)_n. \tag{4.275}$$

Consideremos os termos  $T_j^n$  definidos em (4.251), o resultado (4.209) e

a definição (4.164). Logo,

$$\begin{aligned}
e_n^R &= \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([W_{hn}^c - u](t_n))}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}([W_{hn}^c - u](t_n)), W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \right] \right. \\
&\quad + ([u - u_{n-1}^c](t_n), [W_{hn}^c - u_n^c](t_n))_K \\
&\quad - \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([u - u_{n-1}^c](t_n))}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}([u - u_{n-1}^c](t_n)), W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\}, \tag{4.276}
\end{aligned}$$

que após manipulações algébricas conduz a

$$\begin{aligned}
e_n^R &= \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ ([u - u_{n-1}^c](t_n), [W_{hn}^c - u_n^c](t_n))_K \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n))}{\partial t}, W_{hn}^c - u_n^c \right)_{Q_n^e} \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma(\mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n)), W_{hn}^c - u_n^c)_{Q_n^e} \right] \right\}. \tag{4.277}
\end{aligned}$$

Considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, de (4.277) obtemos

$$\begin{aligned}
e_n^R &\leq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \|[u - u_{n-1}^c](t_n)\|_{0,K} \|[W_{hn}^c - u_n^c](t_n)\|_{0,K} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t} \left\| \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n))}{\partial t} \right\|_{0,Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0,Q_n^e} \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{\Delta t} \|\mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n))\|_{Q_n^e} \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{0,Q_n^e} \right\}. \tag{4.278}
\end{aligned}$$

Como  $(W_{hn}^c - u_n^c) \in S_n^c$ , podemos escrever (4.278) sob a forma

$$\begin{aligned}
e_n^R &\leq \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left\| [u - u_{n-1}^c](t_n) \right\|_{0,K} \left\| [W_{hn}^c - u_n^c](t_n) \right\|_{0,K} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left\| \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n))}{\partial t} \right\|_{0,Q_n^e} \left\| W_{hn}^c - u_n^c \right\|_{0,K} \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}} \left\| \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n)) \right\|_{Q_n^e} \left\| W_{hn}^c - u_n^c \right\|_{0,K} \right\}, \quad (4.279)
\end{aligned}$$

da qual, usando (4.236), chegamos à

$$\begin{aligned}
e_n^R &\leq \left\| W_{hn}^c - u_n^c \right\|_{h\Delta t} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left[ \left\| [u - u_{n-1}^c](t_n) \right\|_{0,K} \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left\| \frac{\partial \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n))}{\partial t} \right\|_{0,Q_n^e} \\
&\quad \left. \left. + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta t}} \left\| \mathcal{M}_{Q_n^e}([u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n)) \right\|_{0,Q_n^e} \right] \right\}. \quad (4.280)
\end{aligned}$$

Em seguida, consideramos (4.173) e (4.175) em (4.280) para obter

$$\begin{aligned}
e_n^R &\leq \left\| W_{hn}^c - u_n^c \right\|_{h\Delta t} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left[ \left\| [u - u_{n-1}^c](t_n) \right\|_{0,K} \right. \right. \\
&\quad + \left( \frac{\beta_{Q_n^e}^{max}}{\Delta t} \right)^{1/2} \left\| [u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n) \right\|_{0,Q_n^e} \\
&\quad \left. \left. + \sigma \left( \frac{\xi_{Q_n^e}^{max}}{\Delta t} \right)^{1/2} \left\| [u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n) \right\|_{0,Q_n^e} \right] \right\}, \quad (4.281)
\end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
e_n^R &\leq \left\| W_{hn}^c - u_n^c \right\|_{h\Delta t} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left[ \left\| [u - u_{n-1}^c](t_n) \right\|_{0,K} \right. \right. \\
&\quad + \left( \beta_{Q_n^e}^{max} \right)^{1/2} \left\| [u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n) \right\|_{0,K} \\
&\quad \left. \left. + \sigma \left( \xi_{Q_n^e}^{max} \right)^{1/2} \left\| [u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n) \right\|_{0,K} \right] \right\}. \quad (4.282)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo a solução  $u$  ao termo  $[u_{n-1}^c - W_{hn}^c](t_n)$  e levando

em conta a desigualdade do triângulo, de (4.282) somos conduzidos à

$$\begin{aligned}
e_n^R \leq & \|W_{hn}^c - u_n^c\|_{h\Delta t} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \left[ \| [u - u_{n-1}^c](t_n) \|_{0,K} \right. \right. \\
& + \left. \left. (\beta_{Q_n^e}^{max})^{1/2} \left( \| [u_{n-1}^c - u](t_n) \|_{0,K} + \| [u - W_{hn}^c](t_n) \|_{0,K} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sigma (\xi_{Q_n^e}^{max})^{1/2} \left( \| [u_{n-1}^c - u](t_n) \|_{0,K} + \| [u - W_{hn}^c](t_n) \|_{0,K} \right) \right] \right\}. \quad (4.283)
\end{aligned}$$

Como podemos ver no apêndice E, existe uma constante  $C$  independente de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $h$  e  $\Delta t$  tal que

$$\left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C \sqrt{\delta_a^{n-1}}, \quad (4.284)$$

$$\left( \frac{\beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C \sqrt{\delta_a^{n-1}}, \quad (4.285)$$

$$\left( \frac{\xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C \sqrt{\delta_a^{n-1}}. \quad (4.286)$$

Usando as desigualdades (4.284), (4.285), e (4.286) em (4.283) obtemos

$$e_n^R \leq \| \|W_{hn}^c - u_n^c\| \|_{h\Delta t} C \left[ \| \|e_{n-1}\| \|_{h\Delta t} + \| \|u - W_{hn}^c\| \|_{h\Delta t} \right]. \quad (4.287)$$

De (4.249) segue-se que

$$\begin{aligned}
C \| \|W_{hn}^c - u_n^c\| \|_{h\Delta t}^2 & \leq B_A(W_{hn}^c - u, W_{hn}^c - u_n^c)_n + B_A(u - u_n^c, W_{hn}^c - u_n^c)_n, \\
& = (T_2^n + T_4^n + T_5^n) + e_n^R. \quad (4.288)
\end{aligned}$$

Levando em conta a estimativa (4.273), válida para a parcela  $(T_2^n + T_4^n + T_5^n)$ , e a estimativa (4.287), de (4.288) chegamos à

$$\| \|W_{hn}^c - u_n^c\| \|_{h\Delta t} \leq C \left[ \| \|e_{n-1}\| \|_{h\Delta t} + \| \|e_n^c\| \|_{h\Delta t} \right]. \quad (4.289)$$

Finalmente, usando a hipótese sobre o erro no “slab”  $n-1$ , a substituição

de (4.289) e (4.233) em (4.248) completa a prova.

□

Apresentamos no corolário seguinte, uma estimativa para o erro global  $e_{\mathcal{N}}$  definido por

$$e_{\mathcal{N}} := \sum_{n \in \mathcal{N}_{\Delta t}} e_n. \quad (4.290)$$

**Corolário 4.28** Seja  $e_{\mathcal{N}}$  o erro global definido em (4.290). Então, a estimativa

$$\begin{aligned} |||e_{\mathcal{N}}|||_{h\Delta t} \leq & C \sum_{n \in \mathcal{N}_{\Delta t}} \sum_{Q_n^e \in \mathcal{T}_h^n} \left\{ \sqrt{\Delta t} \left[ \sqrt{\Delta t} \left( j_c^n + \sqrt{\sigma \delta_a^n} \right) + j_d^n h \right] \|u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} \right. \\ & + \Delta t \left( j_b^n + \sqrt{\varepsilon \delta_b^n} \right) \|\nabla u^{(1)}\|_{0, Q_n^e} + j_d^n \varepsilon h \sqrt{\Delta t} \|\Delta u\|_{0, Q_n^e} \\ & + h \sqrt{\Delta t} \left( j_b^n + h j_c^n + h \sqrt{\delta_a^n} + h \sqrt{\sigma \delta_a^n} + \sqrt{\varepsilon \delta_a^n} \right) \max_{J_n} \|u(t)\|_{2, K} \\ & \left. + \Delta t \sqrt{\delta_a^n} \max_{J_n} \|u^{(1)}(t)\|_{0, K} \right\}, \end{aligned} \quad (4.291)$$

é válida.

**Prova:** É suficiente tomar o somatório em  $n \in \mathcal{N}_{\Delta t}$  de  $|||e_n|||_{h\Delta t}$ , considerar o resultado do teorema 4.27, rearrumar termos e escolher uma constante  $C$  conveniente. □

Finalizamos esta seção tecendo breves considerações na observação abaixo.

**Observação 4.29** • A estimativa (4.291) implica que

$$|||e_{\mathcal{N}}|||_{h\Delta t} = \mathcal{O}(h + \Delta t^{1/2}). \quad (4.292)$$

- A estimativa (4.291) é ótima na norma da energia,  $||| \cdot |||_{h\Delta t}$ .
- Lembramos que  $j_d^n$ , também presente na estimativa (4.291) e definido em (4.242), depende apenas dos parâmetros  $\sigma$  e  $\varepsilon$ .
- A obtenção de uma estimativa de erro a priori ótima na norma natural



$L^2(0, T; L^2(\Omega))$  usando argumentos de dualidade será considerado em um trabalho futuro.

## 4.5 Validações Numéricas

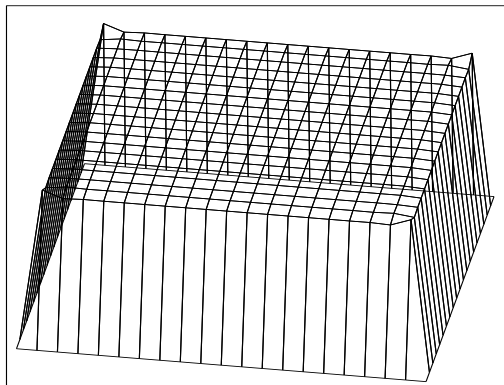
Para avaliar o grau de acuracidade do MEPGDT apresentado na subseção 4.3.1, consideramos novamente o problema exemplo com termo de fonte constante e os dois casos assintóticos discutidos na subseção 4.2.1.1.

Por simplicidade, mostramos nas figuras 4.3-4.8, somente os resultados obtidos através do PGEM-L e do MEPGDT usando a aproximação bilinear no espaço e constante no tempo. O caso de aproximação linear do tempo, os resultados são equivalentes e portanto, não são mostrados aqui.

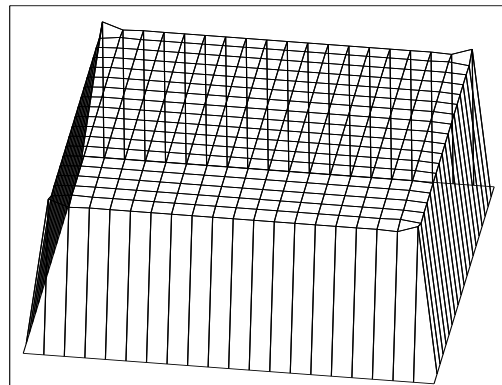
### 4.5.1 Primeiro Caso Assintótico ( $\varepsilon < h^2$ )

Lembremos que reproduzimos este caso adotando  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\Delta t = 0.1$  e uma malha quadrada de  $20 \times 20$  elementos.

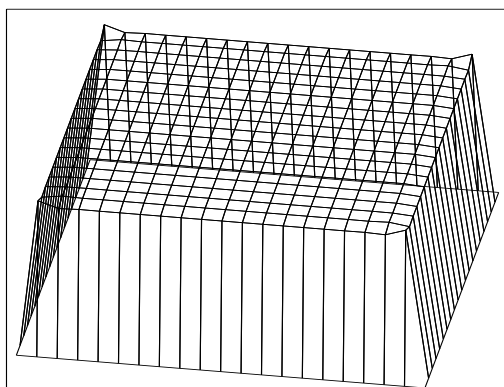
As figuras 4.3 e 4.4 mostram soluções obtidas através dos métodos MEPGDT e PGEM-L respectivamente. Apenas para efeitos comparativos, apresentamos na figura 4.5 os perfís dessas soluções. Vemos que para esse caso assintótico o resultado dos dois métodos são equivalentes, e corrigem as oscilações espúrias presentes no método de Galerkin.



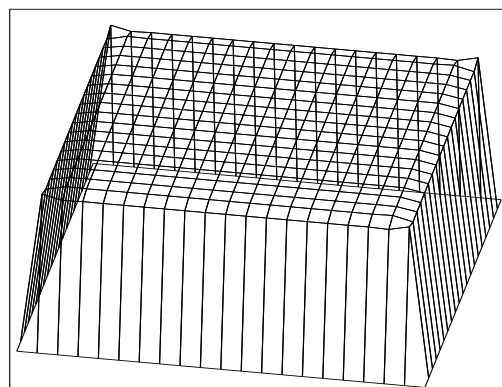
(a) Solução em  $t = 0.1$



(b) Solução em  $t = 0.2$

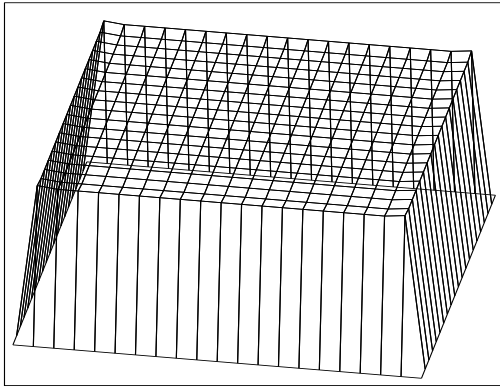


(c) Solução em  $t = 1$

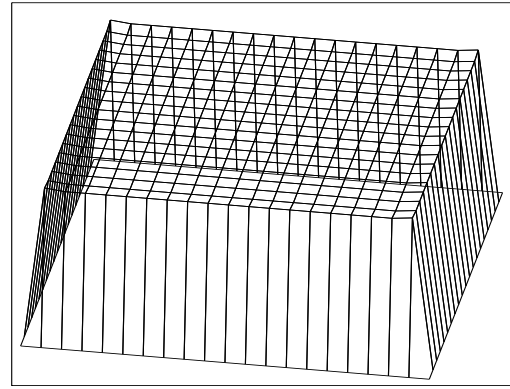


(d) Solução em  $t = 7.5$

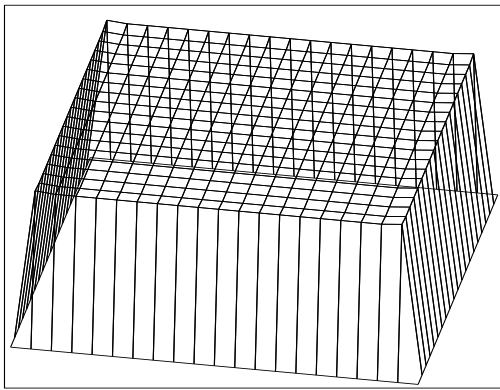
Figura 4.3: Solução via MEPGDT em distintos instantes de tempo para  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\Delta t = 0.1$ .



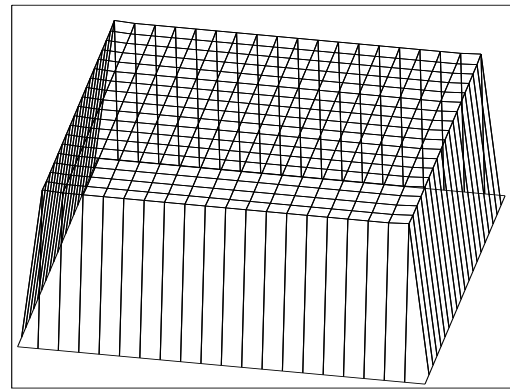
(a) Solução em  $t = 0.1$



(b) Solução em  $t = 0.2$



(c) Solução em  $t = 1$



(d) Solução em  $t = 7.5$

Figura 4.4: Solução via PGEM-L em distintos instantes de tempo para  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\Delta t = 0.1$ .

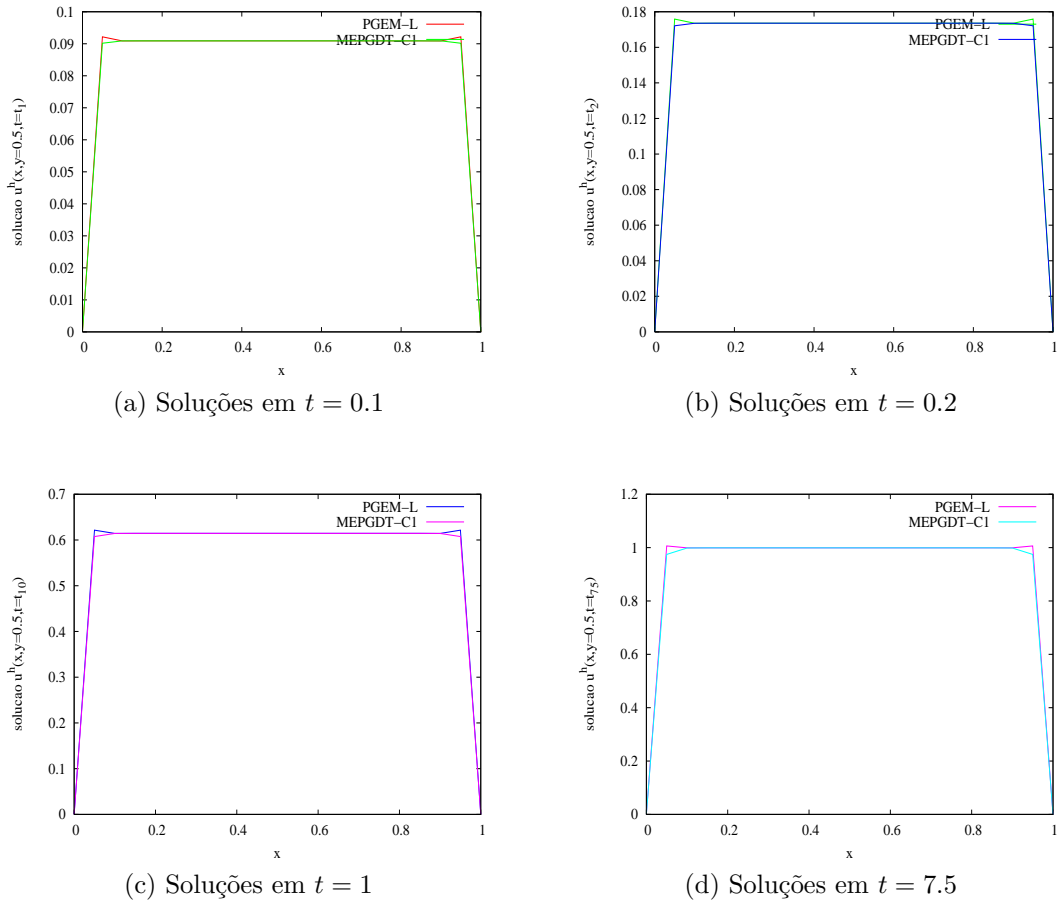
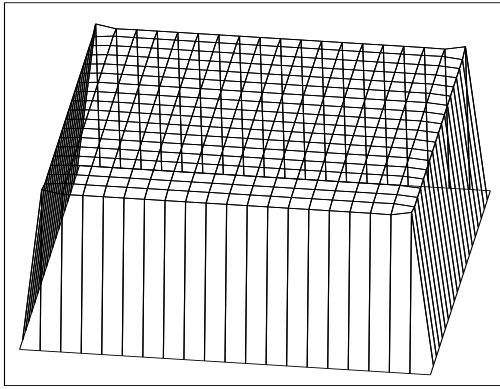


Figura 4.5: Perfil das soluções dos métodos PGEM-L e MEPGDT em  $y = 0.5$  para distintos instantes de tempo tomando  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\Delta t = 0.1$ .

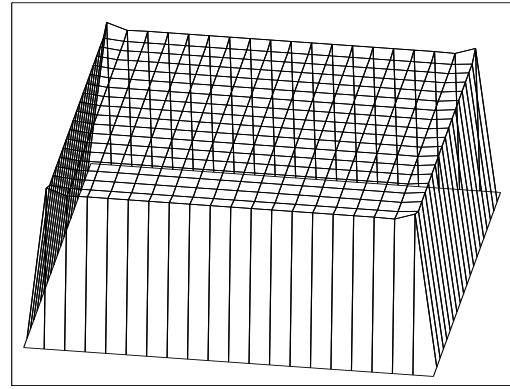
#### 4.5.2 Segundo Caso Assintótico ( $\varepsilon < (\Delta t)^{-1}$ )

Lembramos também que neste caso tomamos  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$  e a malha do caso anterior. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 4.6 e 4.7. Novamente, apenas para fins comparativos, apresentamos na figura 4.8 os perfis dos gráficos das figuras 4.6 e 4.7.

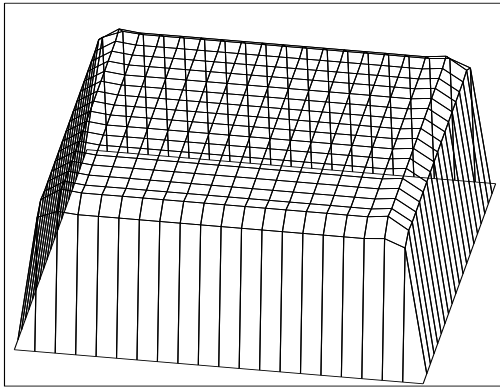
Este teste é emblemático quanto a superioridade do novo método graças ao enriquecimento dependente do tempo. De fato, os resultados mostram a correção das oscilações devidas a passos de tempo pequeno sem introduzir excessiva difusão numérica a medida que a solução evolui para o estado estacionário. O PGEM-L não é capaz de proporcionar tais resultados.



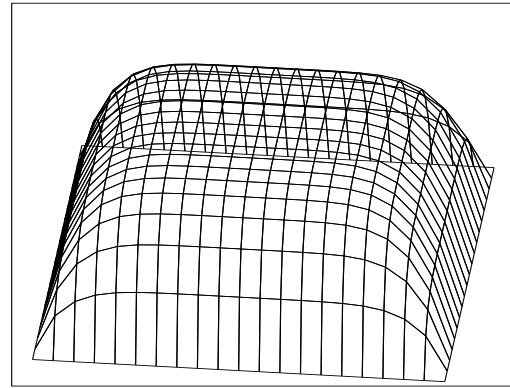
(a) Solução em  $t = 1 \times 10^{-5}$



(b) Solução em  $t = 4 \times 10^{-5}$

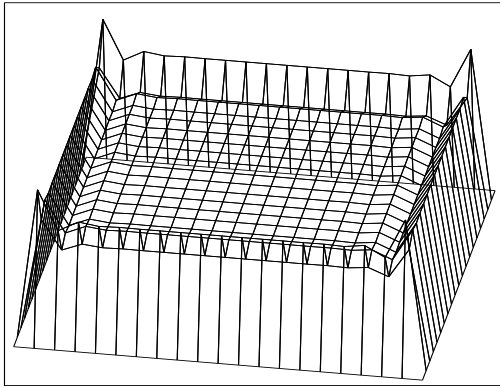


(c) Solução em  $t = 1 \times 10^{-3}$

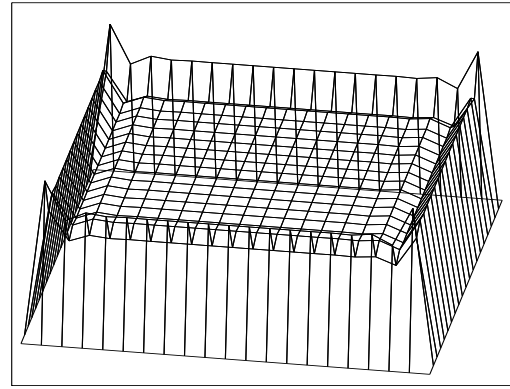


(d) Solução em  $t = 1 \times 10^{-2}$

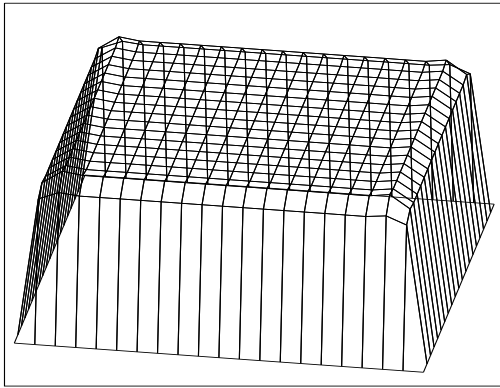
Figura 4.6: Solução via MEPGDT em distintos instantes de tempo para  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$ .



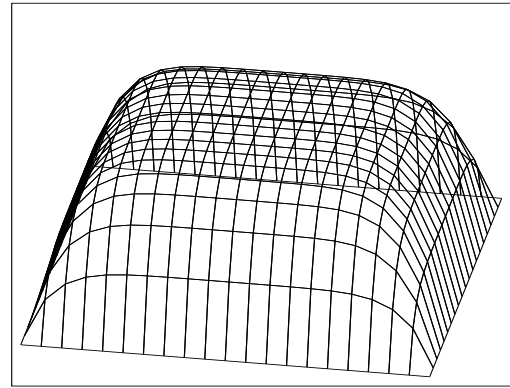
(a) Solução em  $t = 1 \times 10^{-5}$



(b) Solução em  $t = 4 \times 10^{-5}$



(c) Solução em  $t = 1 \times 10^{-3}$



(d) Solução em  $1 \times 10^{-2}$

Figura 4.7: Solução via PGEM-L em distintos instantes de tempo para  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$ .

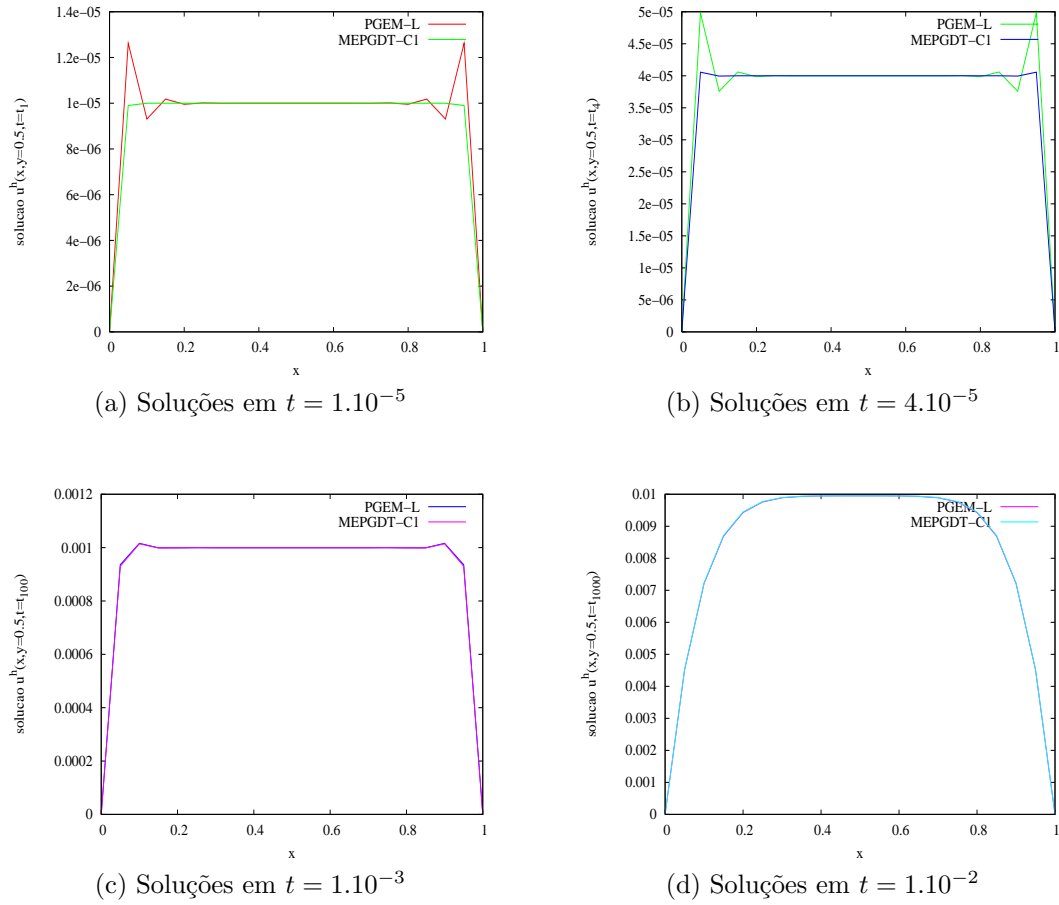


Figura 4.8: Perfil das soluções dos métodos PGEM-L e MEPGDT em  $y = 0.5$  para diferentes instantes de tempo tomando  $\varepsilon = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-5}$ .

### 4.5.3 Solução Analítica

Reservamos esta subseção à apresentação dos resultados numéricos que visam verificar as taxas de convergência teóricas dadas em (4.247). Para tanto, consideramos o problema (4.1) definido no domínio  $Q := (0, 1)^2 \times (0, 1)$ , com condições inicial e de contorno homogêneas, e termo de fonte,  $f = (2\varepsilon\pi^2 + \sigma) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . Com isso, o problema (4.1) possui uma solução suave dada por:

$$u(x, y, t) = (1 - e^{-(2\varepsilon\pi^2 + \sigma)t}) \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (4.293)$$

Adotando  $\sigma = \varepsilon = 1$ , realizamos dois experimentos numéricos. No primeiro, destinado à verificação da taxa de convergência em  $\Delta t$ , fixamos  $h = 1/640$ , ou seja, usamos uma discretização espacial com 640 elementos quadrangulares

em cada lado e associamos a esta, 5 discretizações de  $\Delta t$  conforme a sequência  $(1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256)$ . Já no segundo experimento, associado agora à convergência em  $h$ , fixamos  $\Delta t = 10^{-4}$  e consideramos 5 malhas uniformes de 5, 10, 20, 40 e 80 elementos quadrangulares para cada lado de  $\Omega = (0, 1)^2$ .

Com os resultados obtidos das simulações numéricas descritas no parágrafo anterior, construímos os gráficos mostrados nas figuras 4.9a e 4.9b que confirmam numericamente o resultado teórico em (4.291), isto é, a convergência ótima na norma da energia.

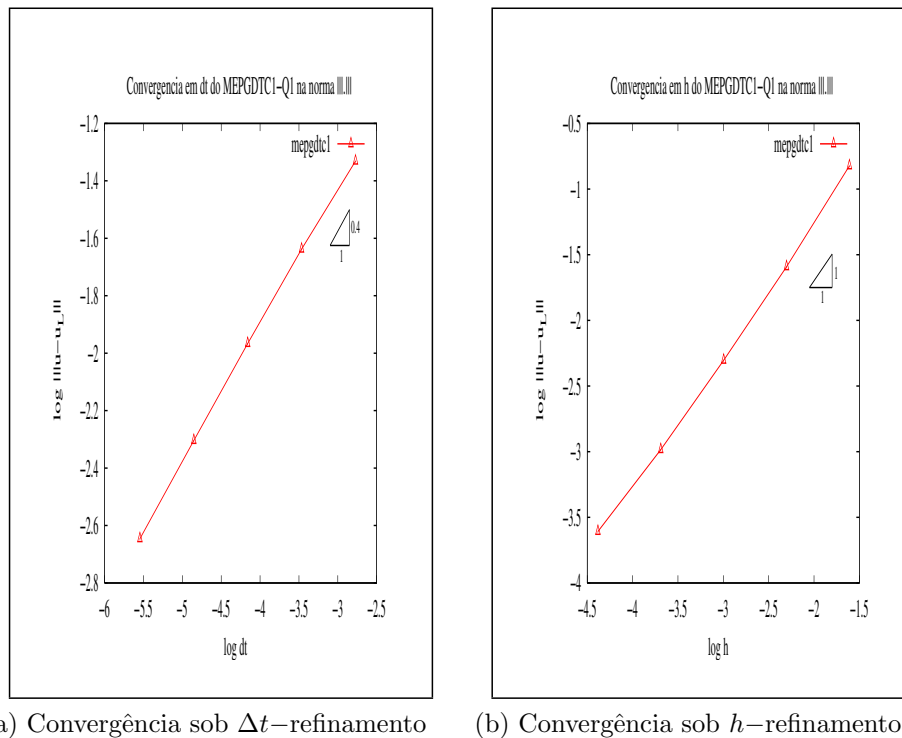


Figura 4.9: Convergência do MEPGDT na norma  $|||\cdot|||_{h\Delta t}$  sob  $\Delta t$  e  $h$ -refinamento.

Apesar de não ter sido demonstrado, esperamos que o MEPGDT convirja com a mesma taxa do método de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT) na norma natural do espaço  $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(L^2)$  que como sabemos, veja por exemplo (Quarteroni e Valli, 1997), é da ordem de

$$|||u - u_h^g|||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \mathcal{O}(h^2 + \Delta t). \quad (4.294)$$

com  $u_h^g$  denotando a solução aproximada via MGDT.



Apresentamos nas figuras 4.10 e 4.11 resultados numéricos confirmando nossas expectativas por (4.294) com  $u_n^c$  em lugar de  $u_h^g$ , mostrando convergência ótima nessa norma.

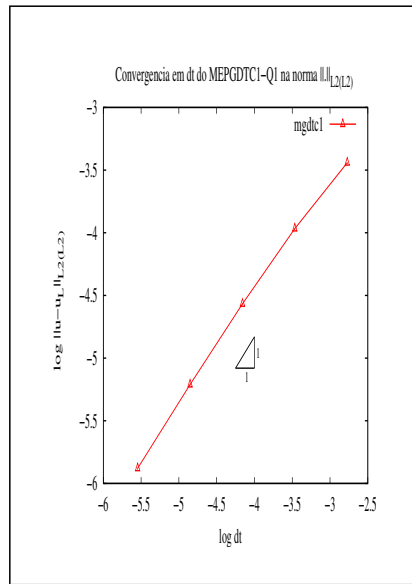
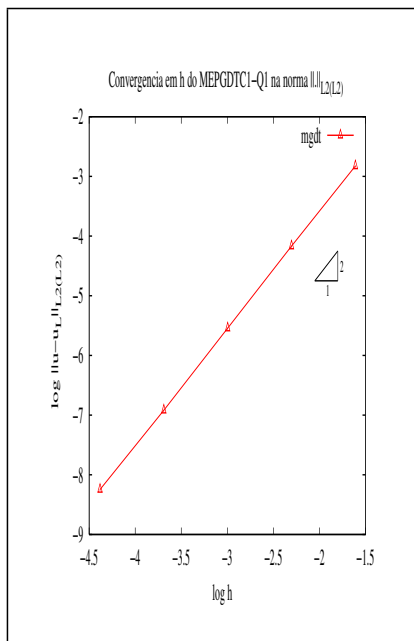
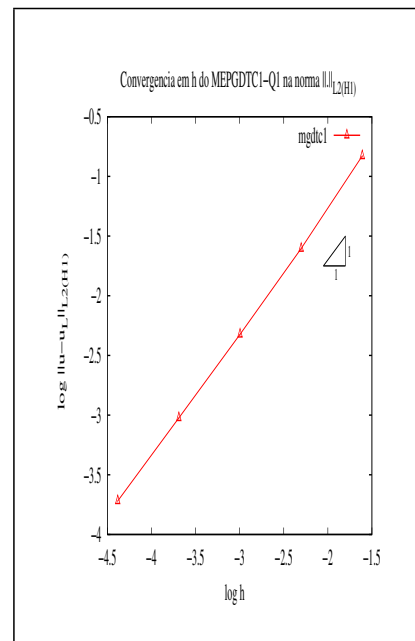


Figura 4.10: Convergência do MEPGDT na norma natural do espaço  $L^2(L^2)$  sob  $\Delta t$ -refinamento.



(a) Convergência em  $L^2(L^2)$  sob  $h$ -refinamento



(b) Convergência em  $L^2(H^1)$  sob  $h$ -refinamento

Figura 4.11: Convergência do MEPGDT nas normas naturais dos espaços  $L^2(L^2)$  e  $L^2(H^1)$  sob  $h$ -refinamento.

## 4.6 Conclusões

Apresentamos um novo método numérico designado por MEPGDT, eficiente para a solução de problemas lineares de reação-difusão transientes, o qual está baseado na combinação do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT) com o método enriquecido de Petrov Galerkin (PGEM).

Na seção 4.4, derivamos estimativas de erro a priori da ordem de  $\mathcal{O}(h + \Delta t^{1/2})$  na norma da energia para o MEPGDT usando elementos bilineares no espaço e uma aproximação constante no tempo. Os resultados obtidos confirmam que o MEPGDT é um método preciso e robusto no tratamento de casos singularmente perturbados do tipo reação-difusão transiente.

Outro aspecto importante do método MEPGDT é o baixo custo computacional, sendo equiparável às formulações clássicas de Galerkin com discretização temporal por diferenças finitas ou elementos finitos.

Os resultados numéricos validam o novo método e mostram a importância do enriquecimento dependente do tempo. Os diferentes casos assintóticos são corretamente aproximados.

A análise apresentada para o MEPGDT representa o primeiro resultado de convergência relativo a enriquecimentos dependentes do tempo, sendo os métodos propostos em (Ramalho, 2005) um caso particular da nova proposta. Os resultados de convergência, existência e unicidade são extensivos a esses métodos, ou seja, àqueles propostos em (Ramalho, 2005). Contudo, algumas questões para futuros desenvolvimentos podem ser levantadas. Dentre essas, destacamos:

- Resgate de estimativas de erro na norma natural do espaço  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  para o MEPGDT a partir da análise ora desenvolvida.
- Extensão da análise de erro para o MEPGDT ao caso de aproximação linear tanto no espaço quanto no tempo.

# Capítulo 5

## Conclusões e Futuros Desenvolvimentos

Nesta tese foram desenvolvidos e analisados novos métodos de elementos finitos enriquecidos e estabilizados para problemas de reação-difusão estacionário e transiente. Investigações numéricas considerando casos singularmente perturbados foram realizadas e validaram os novos métodos em diferentes regimes assintóticos.

As principais contribuições desta pesquisa são resumidas abaixo:

- Um novo método enriquecido chamado de método de Galerkin enriquecido (MGE), proposto para resolver o problema de reação-difusão estacionário, segue as idéias do PGEM em (Franca et al., 2005b), diferindo desse na forma como o espaço das funções testes é enriquecido. O MGE conduz sempre à uma formulação simétrica, o que não ocorre no PGEM em (Franca et al., 2005b) em geral.
- Resultados de experimentos numéricos mostram que o MGE é mais preciso que o PGEM em (Franca et al., 2005b), para número de Peclet intermediário.
- Novos métodos estabilizados multiescala, chamados de MEM-p e MEM-g, fornecem soluções numéricas equiparáveis às formulações originárias, a saber, o PGEM em (Franca et al., 2005b) e o MGE respectivamente, o que confirma os estudos teóricos dados pela análise de erro. Esses métodos possuem a vantagem de serem facilmente implementáveis, com parâmetros

de estabilização fixados a priori.

- A análise de erro a priori fornece taxas de convergência ótimas para o erro medido nas normas naturais  $L^2$  e  $H^1$  para o MGE, MEM-p e MEM-g que são confirmadas numericamente.
- Um novo método enriquecido para a versão parabólica do modelo de reação-difusão foi introduzido. Esse método é do tipo Petrov-Galerkin descontínuo do tempo (MEPGDT). Esse método surge do enriquecimento dos espaços de aproximação clássicos do método de Galerkin descontínuo no tempo (MGDT) com espaços contendo funções adequadas para capturar possíveis camadas limites apresentadas por esse problema. No caso em que o espaço clássico a ser enriquecido é constituído de funções bilineares no espaço e constantes no tempo, uma aproximação analítica para o enriquecimento é proposta, tornando não só o custo do método equiparável ao do MGDT, como viabilizando sua análise de erro. Nesse caso, uma estimativa ótima de erro à priori na norma da energia é fornecida e validada numericamente.
- Apontamos a importância de enriquecer os espaços com funções dependentes do tempo. Esse aspecto é validado numericamente.

As tabelas 5.1 e 5.2 apresentam uma síntese dos principais resultados desta tese.

Tabela 5.1: Principais resultados para o problema elíptico.

Novos métodos propostos	Taxa de convergência	
	Norma $L^2(\Omega)$	Norma $H^1(\Omega)$
MGE	$\vartheta(h^2)$	$\vartheta(h)$
MEM-p	$\vartheta(h^2)$	$\vartheta(h)$
MEM-g	$\vartheta(h^2)$	$\vartheta(h)$

As técnicas investigadas teoricamente e numericamente nesta tese indicam que formulações enriquecidas são adequadas para problemas singularmente

Tabela 5.2: Principais resultados para o problema parabólico.

Novo método proposto	Convergência na norma da energia
MEPGDT	$\vartheta(\sqrt{\Delta t} + h)$

perturbados e mostram alto potencial para derivação de novas formulações estabilizadas cujos principais atrativos são a facilidade de implementação computacional e o baixo custo. Baseados no presente trabalho, seguem-se abaixo as possíveis direções de pesquisa futura.

- Considerar uma aproximação do tipo Galerkin descontínuo também na variável espacial.
- Para o MEPGDT, prover aproximações analíticas para o enriquecimento em se tratando de enriquecer o espaço clássico constituído de funções lineares, diminuindo o custo computacional associado à estratégia de dois níveis.
- Dada a simplicidade de implementação computacional e o baixo custo das formulações estabilizadas, derivar um método estabilizado associado ao MEPGDT, em analogia ao que foi feito para o caso estacionário.
- Desenvolver uma estimativa de erro a priori na norma natural do espaço  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  para o MEPGDT visando confirmar a taxa de convergência ótima decorrente das investigações numéricas.
- Estender as técnicas a outros operadores parabólicos singulares como o problema reactivo-advectivo-difusivo. Também é de interesse o estudo da extensão da teoria à problemas mistos transientes como o modelo de Stokes parabólico.

## Referências Bibliográficas

- A. Allendes, Barrenechea G. R., E. Hernández, L.P. Franca, e F. G. C. Valentin. A two-level enriched finite element method for a mixed problem. Relatório Técnico **22**, LNCC/Petrópolis-Rio de Janeiro, 2008.
- A. Araya, Barrenechea G. R., L.P. Franca, e F. G. C. Valentin. Stabilization arising from pgem: A review and further developments. Relatório Técnico **13**, LNCC/Petrópolis-Rio de Janeiro, 2007a.
- R. Araya, G. R. Barrenechea, L. P. Franca, e F. G. C. Valentin. Stabilization arising from pgem: A review and further developments. **Applied Numerical Mathematics**, 59:2065–2081, 2009.
- R. Araya, G. R. Barrenechea, e F. G. C. Valentin. Stabilized finite element method based on multiscale enrichment for the stokes problem. **SIAM J. Numer. Anal.**, 44(1):322–348, 2006.
- R. Araya, G. R. Barrenechea, e F. G. C. Valentin. From pgem to stabilized finite element methods: The generalized stokes problem. **in preparation**, 2007b.
- J. H. Argyris e D. W. scharpf. Finite element method in time and space. **Nucl. Engrg. Design**, 10:456–464, 1969.
- I. Babuska e J. E. Osborn. Finite element-galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems. **Mathematics of Computation**, 52(186):275–297, 1987.
- G. R. Barrenechea e F. G. C. Valentin. Relationship between multiscale enrichment

- and stabilized finite element method for the generalized stokes problem. **C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.**, 341:635–640, 2005.
- F. Brezzi, L. P. Franca, T. J. Hughes, e A. Russo.  $b = \int g$ . **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 145:329–339, 1997.
- F. Brezzi, G. Hauke, e G. Sangalli. Link-cutting bubbles for the stabilization of convection-diffusion-reaction problems. **Mathematical Models & Methods in Applied Sciences**, 13(3):445–461, 2003.
- F. Brezzi e A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. **Mathematical Models & Methods in Applied Sciences**, 4(4):571–587, 1994.
- N. F. Britton. **Reaction-diffusion equations and their applications to biology**. Inc.[Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1986.
- A. N. Brooks e T. J. R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 32:199–259, 1982.
- R. G. S. Castro. **Análise numérica de formulações de elementos finitos espaço-tempo para escoamentos miscíveis**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ - Rio de Janeiro / Brasil, 1999.
- P. Ciarlet. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. North Holland, 1978.
- R. Codina. On stabilized finite element methods for linear systems the conection-diffusion-reaction equations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 188:61–82, 2000.
- R. Codina, J. Principe, O. Guasch, e S. Badia. Time dependent subscales in stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 196:2413–2430, 2007.

- J. Donea e A. Huerta. **Finite Element Methods for Flow Problems**. John Wiley, England, 2003.
- K. Eriksson e C. Johnson. Error estimates and automatic time step control for nonlinear parabolic problems. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 24:12–23, 1987.
- K. Eriksson e C. Johnson. Adaptative finite element method for parabolic problems i : A linear model problem. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 28:43–77, 1991.
- K. Eriksson e C. Johnson. Adaptative finite element method for parabolic problems ii : Optimal error estimates in  $l_\infty l_2$  and  $l_\infty l_\infty$ . **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 32:706–740, 1995a.
- K. Eriksson e C. Johnson. Adaptative finite element method for parabolic problems iv : Nonlinear problems. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 32:1729–1749, 1995b.
- K. Eriksson e C. Johnson. Adaptative finite element method for parabolic problems v : Long-time integration. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 32:1750–1763, 1995c.
- K. Eriksson, C. Johnson, e V. Thomee. Time discretization of the parabolic problems by discontinuous galerkin method. **RAIRO Modelisation Mathematique et Analyse Numerique**, 19:611–643, 1985.
- D. Estep e S. Larsson. The discontinuous galerkin method for semilinear parabolic problems. **RAIRO Modelisation Mathematique et Analyse Numerique**, 27(1):35–54, 1993.
- L.C. Evans. **Partial differential equations**. American Mathematical Society, Providence-Rhode Island, 1992.



- M. Feistauer e V. Sobotíková. A discontinuous galerkin method for nonlinear convection-diffusion problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 194:2709–2733, 2005.
- M. Feistauer e K. Švadlenka. Discontinuous galerkin of lines for solving nonstationary singularly perturbed linear problems. **J. Numer. Math.**, 2:97–117, 2004.
- M. Feistauer e K. Švadlenka. Space-time discontinuous galerkin for solving nonstationary convection-diffusion problems. **Appl. Math.**, 52:197–233, 2007.
- L. P. Franca, R.G. Barrenechea, e F. G. C. Valentin. A petrov-galerkin enriched method: A mass conservative finite element method for the darcy equation bubble-like functions. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 21-24(196): 2449–2464, 2007.
- L. P. Franca e E. G. D. do Carmo. The galerkin gradient least-squares method. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 74:41–54, 1989.
- L. P. Franca e C. Farhat. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 123:299–308, 1995.
- L. P. Franca e T. J. R. Hughes. Two classes of mixed finite element methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 69:89–129, 1988.
- L. P. Franca e F. N. Hwang. Refining the sub-mesh strategy in the two-level finite element method: application to the advection-diffusion equation. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, 39:161–187, 2002.
- L. P. Franca e A. L. Madureira. Element diameter free stability parameters for stabilized methods applied to fluids. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 105(3):395–403, 1993.
- L. P. Franca, A. L. Madureira, L. Tobiska, e F. G. C. Valentin. Convergence

- analysis of a multiscale finite element method for singularly perturbed problems. **SIAM Multiscale Model. Simul.**, 4(3):839–866, 2005a.
- L. P. Franca, A. L. Madureira, e F. G. C. Valentin. Towards multiscale functions: Enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 194:3006–3021, 2005b.
- L. P. Franca, J. V. A. Ramalho, e F. G. C. Valentin. Enriched finite element methods for unsteady reaction-diffusion problems. **Comun. Num. Methods Engrg.**, 22:619–625, 2006a.
- L. P. Franca, J. V. A. Ramalho, e F. G. C. Valentin. Stabilizing parabolic problem with time-dependent multiscale functions. **in preparation**, 2006b.
- L. P. Franca, T. E. Tezduyar, e A. Masud. **Finite Element Method : 1970's and Beyond**. CIMNE, Barcelona, 2004.
- L. P. Franca e F. G. C. Valentin. On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 190:1785–1800, 2000.
- I. Fried. Finite-element analysis of time dependent phenomena. **Int. J. Numer. Math. Engrg**, 7:1170–1172, 1969.
- I. Fried. Bounds on the extremal eigenvalues of the finite element stiffness and mass matrices and their spectral condition number. **Journal of Sound and Vibration**, 22(4):407–418, 1972.
- I. Fried. Bounds on the spectral and maximum norms of the finite element stiffness, flexibility and mass matrices. **Int. J. Solids Structures**, 9:1013–1034, 1973.
- F. R. Gantmacher. **The Theory of Matrices**. Chelsea Publishing Company, 1997.
- G. H. Golub e C. F. Van Loan. **Matrix Computation**. Johns Hopkins University Press, 1989.

- P. Grindrod. **The theory and applied of reaction-diffusion equations**. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996.
- I. Harari. Stability of semidiscret formulations for parabolic problems at small time steps. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 193:1491–1516, 2004.
- I. Harari e T. J. R. Hughes. What are  $c$  and  $h$ ? inequalities for the analysis and design of finite element methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 97:157–192, 1992.
- I. Harari e T. J. R. Hughes. Stabilized finite element methods for steady advection-diffusion with production. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 115:165–191, 1994.
- M. Stynes H.G. Roos e L. Tobiska. **Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations**. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- R. A. Horn e C. R. Johnson. **Topics in Matrix Analysis**. Cambridge University Press, 1994.
- T. J. R. Hughes e G. M. hulbert. Space-time finite element method for elastodynamics : Formulations and error estimates. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 66:339–363, 1988.
- F. Ilinca e J. Héту. Galerkin gradient least-squares formulation for transient conduction transfer. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 191:3073–3097, 2002.
- F. Ilinca e J. Héту. A new stabilized finite element method for reaction-diffusion problems: The source stabilized petrov-galerkin method. **Int. J. Numer. Engng.**, 75:1607–1630, 2008.
- P. A. Jamet. Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for

- the parabolic equations in a variable domain. **Journal of Computational Physics**, 15:912–928, 1978.
- V. John e E. Schmeyer. Finite element methods for time-dependent convection-diffusion-reaction equations with small diffusion. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 198:475–494, 2008.
- C. Johnson. **Numerical Solution of Partial Differential Equations by Finite Element Methods**. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Sydney-Melbourne, 1987.
- C. Johnson, U. Navert, e J. Pitkaranta. Finite element method for linear hyperbolic problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 45:285–312, 1984.
- T. Knopp, G. Lube, e G. Rapin. Stabilized finite element methods with shock capturing for advection-diffusion problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 191:2997–3013, 2002.
- P. LeSaint e P. A. Raviart. **On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equation**, in **Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations**. C. de Boor, Academic Press, 1974.
- J. L. Lions e R. Dautry. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tecnology**. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- J. L. Lions e E. Magenes. **Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications**. Volume I, Springer-Verlag, New York, 1992.
- D. Loghin, M. Van Gijzen, e E. Jonkers. Bounds on the eigenvalue range and on the field of values of non-hermitian and indefinite finite element matrices. **J. of Comput. and Applied Mathematics**, 189:304–323, 2006.
- C. Makridakis e C. Karakashian. A space-time finite element method for the nonlinear schrodinger equation: The discontinuous galerkin method. **Math. Comp.**, 67(222):479–499, 1998.

- X. Makridakis e I. Babuska. On stability of the discontinuous galerkin method for the heat equation. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 34:389–401, 1997.
- J. M. Melenk e C. Schwab. Hp fem for reation-diffusion equations i: Robust exponetial convergence. **SIAM J. Numer. Anal.**, 35:1520–1557, 1998.
- J. D. Murray. **Mathematical biology. I,II, Interdisciplinary Applied Mathematics**. Springer-Verlag, New York, 2002.
- A. Nesliturk. **Approximating the incompressible Navier-Stokes equation using a two-level finite element method**. Tese de Doutorado, University of Colorado at Denver, USA, 1999.
- J. T. R. Oden. A general theory of finite element, part i and part ii. **Int. J. Numer. Math. Engrg**, 1:205–221, 247–259, 1969.
- S. P. Oliveira, A. L. Madureira, e F. G. C. Valentin. Weight quadrature rules for finite element methods. **J. of Comput. and Applied Mathematics**, 227: 93–101, 2008.
- G. Peters e J. H. Wilkinson.  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$  and the generalized eigenproblem. **SIAM J. Numer. Anal.**, 7(4):479–492, 1970.
- A. Quarteroni e A. Valli. **Numerical approximations of partial differential equations**. Springer-Verlag, 1997.
- J. V. A. Ramalho. **Novos Métodos de Elementos Finitos Enriquecidos Aplicados a Modelos de Reação-Adveccção-Difusão**. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica - Petrópolis - Rio de Janeiro / Brasil, 2005.
- F. Rothe. **Global solutions of reaction-diffusion systems**. Springer Verlag, Berlin, 1984.

- L. Runchang. Discontinuous discretization for least-squares formulation of singularly perturbed reaction-diffusion in one and two dimensions. **SIAM J. Numer. Anal.**, 47:89–108, 2008.
- A. H. Schatz e L. B. Wahlbin. On the finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems in two and one dimension. **Math. Comp.**, 40(161):47–89, 1983.
- C. Schwab e D. Schotzau. Time discretization of parabolic problems by the hp-version of the discontinuous galerkin finite element method. **SIAM Journal of Numeric Analysis**, 38:837–875, 2000.
- C. Schwab e M. Suri. **p and hp Finite Element Methods. Theory and Applications to Solid and Fluid Mechanics**. Oxford University Press, 1998.
- F. Shakib. **Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations**. Tese de Doutorado, Stanford University, Stanford / USA, 1988.
- F. Shakib, T. Hughes, e Z. Johan. A new finite element formulation for computational fluid dynamics. x. the compressible euler and navier-stokes equations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 89:141–219, 1991.
- A. Soulaïmani e M. Fortin. Finite element solution of compressible viscous flows using conservative variables. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 118:319–350, 1994.
- G. W. Stewart. On the sensitivity of the eigenvalue problem  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ . **SIAM J. Numer. Anal.**, 9(4):669–686, 1972.
- S. Sun. **Discontinuous Galerkin Methods for Reactive Transport in Porous Media**. Tese de Doutorado, University of Texas at Austin, USA, 2003.
- S. Sun e M. Wheeler.  $l^2(h^1)$ -norm a posteriori error estimation for discontinuous

- galerkin approximations of reactive transport problems. **J. Sci. Comput.**, 22: 501–530, 2005a.
- S. Sun e M. Wheeler. Symmetric and nonsymmetric discontinuous galerkin methods for reactive transport in porous media. **SIAM J. Numer. Anal.**, 43:195–219, 2005b.
- V. Thomée. **Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems**. Springer, Berlin-New York-Heidelberg-Barcelona-London, 1997.
- V. Thomée e S. Larsson. **Partial Differential Equations with Numerical Methods**. Springer-Verlag, Berlin-New York-Heidelberg, 2003.
- F. G. C. Valentin e L. P. Franca. Combining stabilized finite element methods. **Computational and Applied Mathematics**, 14:285–300, 1995.
- E. L. Wilson e R. E. Nickell. Application of finite element method to heat conduction analysis. **Nucl. Engrg. Design**, 4:1–11, 1966.
- C. Xenophontos. A note on the convergence of finite element method for singularly perturbed problems using the shishkin mesh. **Appl. Math. Comput.**, 142:545–559, 2003.
- O. C. Zienkiewicz. **The Finite Element Method**. McGraw-Hill, London, 1977a.
- O. C. Zienkiewicz. A new look at the newmark, houbolt and other time stepping formulas. a weighted residual approach. **Earthquake Engrg. Structural Dynamics**, 5:413–418, 1977b.
- O. C. Zienkiewicz. Transient field problems - two and three dimensional analysis by isoparametric finite elements. **Internat. J. Numer. Meths. Engrg.**, 2: 61–71, 1977c.

# Apêndice A

## Conceitos, Definições e Resultados da Algebra Linear

No desenvolvimento teórico da seção 3.5, fazemos uso de autovalores generalizados cujo conceito e aplicação podem ser encontrados em (Babuska e Osborn, 1987), (Peters e Wilkinson, 1970), (Stewart, 1972), (Fried, 1972), (Fried, 1973), (Loghin et al., 2006), (Gantmacher, 1997), (Horn e Johnson, 1994) e (Golub e Loan, 1989). Apresentamos de forma resumida resultados pertinentes presentes nesses trabalhos.

### A.1 Autovalores Generalizados

Aqui, as letras maiúsculas em negrito denotam matrizes quadradas de ordem  $n$ , enquanto que as minúsculas também em negrito, denotam vetores coluna de ordem  $n$ . O superíndice  $T$  nas matrizes e vetores denota a transposição. Como usual,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0}$  é a matriz nula ou o vetor nulo.

#### A.1.1 Campo de Valores de uma Matriz

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz quadrada genérica de ordem  $n$ . Então o campo de valores de  $\mathbf{A}$  é definido como

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}) = \left\{ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\}. \quad (\text{A.1})$$



Assim como o espectro (conjunto dos autovalores),  $\chi(\mathbf{A})$ , de uma matriz  $\mathbf{A}$ , o campo de valores  $\mathcal{G}(\mathbf{A})$  pode ser usado para analisar a matriz.

O espectro de uma matriz está contido no seu campo de valores como podemos ver em (A.1) tomando  $\mathbf{x}$  como sendo um autovetor de  $\mathbf{A}$ . Conseqüentemente, um limitante sobre o campo de valores de uma matriz é também um limitante sobre o seu espectro.

Como extensão de (A.1), introduzimos o campo de valores generalizado para o par de matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , com  $\mathbf{B}$  não singular:

$$\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left\{ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\}. \quad (\text{A.2})$$

O conjunto dos autovalores generalizados,  $\lambda^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$ , soluções do problema generalizado,  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ , está contido no campo de valores  $\mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , como podemos ver de (A.2) tomando  $\mathbf{x}$  como sendo um autovetor de  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ . Conseqüentemente, um limitante sobre o campo de valores generalizado do par de matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , é também um limitante sobre o espectro do problema generalizado  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{B} \mathbf{x}$ .

Seja  $\mathbf{A}$  simétrica e  $\mathbf{B}$  simétrica positiva definida. Então o quociente de Rayleigh generalizado  $R^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$  é definido como

$$R^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.3})$$

Um propriedade bastante conhecida na literatura do quociente de Rayleigh, veja por exemplo Horn e Johnson (1994) páginas 176 e 177 para demonstração, é que

$$\lambda_{min}^{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \leq R^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{x}) \leq \lambda_{max}^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{A.4})$$

e conseqüentemente,

$$\lambda_{min}^{\mathbf{A}, \mathbf{B}} \leq z \leq \lambda_{max}^{\mathbf{A}, \mathbf{B}}, \quad \forall z \in \mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (\text{A.5})$$

se  $\mathbf{A}$  é simétrica e  $\mathbf{B}$  é simétrica positiva definida. Aqui,  $\lambda_{\min}^{\mathbf{A},\mathbf{B}}$  e  $\lambda_{\max}^{\mathbf{A},\mathbf{B}}$  representam respectivamente, o menor e o maior elemento do conjunto  $\lambda^{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ .

A definição padrão para o quociente de Rayleigh decorre de (A.3) tomando a matriz  $\mathbf{B}$  como sendo a matriz identidade.

### A.1.2 Problema $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$ com $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ Genéricas

Quando as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  não são simétricas e  $\mathbf{B}$  é não singular, o problema  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$  é equivalente ao problema de autovalor padrão  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ , enquanto que se  $\mathbf{A}$  é não singular, podemos resolver o problema  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bx} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$ .

Quando  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são ambas singulares, um método alternativo é necessário. Para tal situação veja o método proposto por Stewart (1972). Apesar da dificuldade no cálculo dos autovalores generalizados, os limites em (A.5) são substituídos por

$$|\lambda_{\min}^{\mathbf{A},\mathbf{B}}| \leq |z| \leq |\lambda_{\max}^{\mathbf{A},\mathbf{B}}|, \quad \forall z \in \mathcal{G}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (\text{A.6})$$

# Apêndice B

## Matrizes Elementares e Autovalores Generalizados

Apresentamos neste apêndice as matrizes elementares e as expressões para os autovalores generalizados que aparecem ao longo do texto.

### B.1 Matrizes Elementares

Os métodos de elementos finitos descritos neste trabalho envolvem matrizes de massa e de rigidez, a partir dos quais são obtidos os autovalores generalizados. Em seguida, desenvolvemos essas matrizes.

#### B.1.1 Matrizes de Massa

##### B.1.1.1 Elemento Triangular

Para cálculo das matrizes elementares de massa consideremos o mapeamento isoparamétrico do triângulo genérico,  $K$ , sobre o triângulo de referência,  $\hat{K}$ , conforme ilustração da figura B.1.

As funções de forma lineares definidas em  $K$  são dadas por

$$\psi_i(x, y) = \frac{1}{2|K|} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad i \in \mathcal{N}_{P1} = \{1, 2, 3\} \quad , \quad (\text{B.1})$$

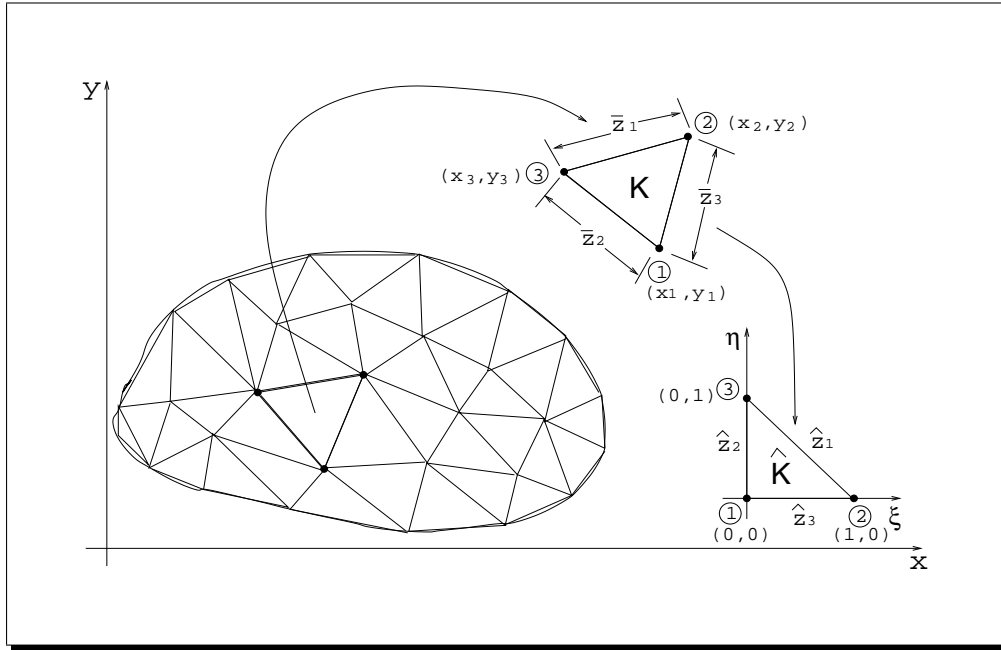


Figura B.1: Mapeamento isoparamétrico de um elemento triangular.

com

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i &= y_j - y_k, \\ c_i &= x_k - x_j, \end{aligned} \right\} i \neq j \neq k, \quad (\text{B.2})$$

e  $i, j, k$  permutam em uma ordem natural. Por exemplo,  $a_2$  é determinado fazendo  $i = 2, j = 3$  e  $k = 1$  na equação (B.2). Como usual, aqui também  $|K|$  denota a medida de  $K$ .

Visando o cálculo das integrais de interesse, consideremos o mapeamento isoparamétrico de  $\hat{K}$  para  $K$  dado por

$$\left[ \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i(\xi, \eta) x_i, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^3 \hat{\psi}_i(\xi, \eta) y_i, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\left[ \begin{aligned} \hat{\psi}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \\ \hat{\psi}_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ \hat{\psi}_3(\xi, \eta) &= \eta, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.4})$$

são as funções de forma lineares definidas em  $\hat{K}$ .

Designamos por  $|J|$  o determinante da matriz jacobiana associado a transformação em (B.3). Um cálculo simples mostra que

$$|J| = 2|K|. \quad (\text{B.5})$$

Seja  $[M_{GP1}] \equiv [M_{GP1}]_{3 \times 3}$  a matriz de massa de componentes

$$[M_{GP1}]_{ij} = (\psi_j(x, y), \psi_i(x, y))_K = |J| \left( \hat{\psi}_j(\xi, \eta), \hat{\psi}_i(\xi, \eta) \right)_{\hat{K}}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{P1}. \quad (\text{B.6})$$

Denotamos por  $[\hat{\psi}]$  o vetor cujas componentes são as funções de forma lineares, também chamadas coordenadas baricentricas, definidas no elemento de referência  $\hat{K}$ , i.e,

$$[\hat{\psi}] = [\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3]. \quad (\text{B.7})$$

Com isso,  $[\hat{\psi}]^T$  representa o vetor coluna obtido através da transposição do vetor  $[\hat{\psi}]$ . Usando esta notação,  $[M_{GP1}]$  toma a forma

$$[M_{GP1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\psi}]^T [\hat{\psi}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.8})$$

cujas componentes

$$[M_{GP1}]_{ij} = \begin{cases} |J| \frac{1}{12} & \text{se } i = j, \\ |J| \frac{1}{24} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

são facilmente obtidas usando a segunda igualdade em (B.6).

Consideremos agora as funções de base enriquecidas em (3.34), rerepresentadas abaixo sob a forma

$$\lambda_j(\mathbf{x}) = \frac{\sinh(\alpha_j \psi_j(\mathbf{x}))}{\sinh(\alpha_j)}, \quad \mathbf{x} \in K, \quad j \in \mathcal{N}_{P1}, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon \gamma_K^j}},$$

e designemos por  $[\hat{\lambda}]$  o vetor cujas componentes são as funções de base em (B.9) definidas no elemento de referência  $\hat{K}$  via mapeamento isoparámetro em (B.3), i.e,

$$[\hat{\lambda}] = [\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3], \quad (\text{B.10})$$

com

$$\hat{\lambda}_j(\mathbf{x}) = \frac{\sinh(\alpha_j \hat{\psi}_j(\mathbf{x}))}{\sinh(\alpha_j)}, \quad \mathbf{x} \in \hat{K}, \quad j \in \mathcal{N}_{P1}. \quad (\text{B.11})$$

Logo podemos representar a matriz de massa enriquecida,  $[M_{MsP1}] \equiv [M_{MsP1}]_{3 \times 3}$ , sob a forma

$$[M_{MsP1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\lambda}]^T [\hat{\psi}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.12})$$

cujas componentes são dadas por

$$[M_{MsP1}]_{ij} = \begin{cases} |J| \frac{\alpha_i \sinh(\alpha_i) - 2 \cosh(\alpha_i) + 2}{\alpha_i^3 \sinh(\alpha_i)} & \text{se } i = j, \\ |J| \frac{2 \cosh(\alpha_i) - \alpha_i^2 - 2}{2\alpha_i^3 \sinh(\alpha_i)} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Outra matriz de massa de interesse é a de enriquecimento, denotada aqui por  $[A_{MsP1}] \equiv [A_{MsP1}]_{3 \times 3}$ . Suas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} [A_{MsP1}]_{ij} &= (\mathcal{M}_k(\psi_j), \psi_i)_K = |J| \left( \mathcal{M}_k(\hat{\psi}_j), \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\ &= \frac{-|J|}{\sigma} \left( \hat{\phi}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{-|J|}{\sigma} \left( \hat{\lambda}_j - \hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\ &= \frac{|J|}{\sigma} \left( \hat{\psi}_j - \hat{\lambda}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{1}{\sigma} ([M_{GP1}]_{ij} - [M_{MsP1}]_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

**Observação B.1** É importante observar que a simetria das matrizes de massa enriquecida,  $[M_{MsP1}]$ , e de enriquecimento,  $[A_{MsP1}]$ , ocorre apenas nos casos em

que a triangulação  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  é constituída exclusivamente por elementos equilaterais, pois nessa situação temos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ , o que torna  $[M_{MsP1}]$  e  $[A_{MsP1}]$  matrizes simétrica.

□

A análise de erro do capítulo 3 motivou a introdução das matrizes  $[W_{MsP1}] \equiv [W_{MsP1}]_{3 \times 3}$  e  $[G_{MsP1}] \equiv [G_{MsP1}]_{3 \times 3}$ , onde a primeira é dada por

$$[W_{MsP1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\lambda}]^T [\hat{\lambda}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.14})$$

e apresenta as componentes

$$\left\{ \begin{array}{l} [W_{MsP1}]_{ii} = |J| \frac{\cosh(2\alpha) - 2\alpha^2 - 1}{8(\alpha \sinh(\alpha))^2}, \quad i = 1, 2, 3 \\ [W_{MsP1}]_{12} = |J| \frac{4(1 - \cosh(\alpha)) + \alpha(\sinh(\alpha) - \cosh(\alpha))(1 - \exp(2\alpha))}{(2\alpha \sinh(\alpha))^2}, \\ [W_{MsP1}]_{13} = |J| \frac{2 - 2 \cosh(\alpha) + \alpha \sinh(\alpha)}{2(\alpha \sinh(\alpha))^2}, \\ [W_{MsP1}]_{23} = |J| \frac{4(1 - \cosh(\alpha)) + \alpha(\sinh(\alpha) - \cosh(\alpha))(1 - \exp(2\alpha))}{(2\alpha \sinh(\alpha))^2}, \end{array} \right.$$

enquanto que a segunda é da forma

$$[G_{MsP1}] = \frac{1}{\sigma^2} \left( [W_{MsP1}] - 2\varrho_{min}^K [M_{MsP1}] + (\varrho_{min}^K)^2 [M_{GP1}] \right). \quad (\text{B.15})$$

No cálculo das componentes de  $[W_{MsP1}]$  apresentadas acima, por simplicidade consideramos apenas a caso simétrico.

### B.1.1.2 Elemento Retangular

Assim como na subseção anterior, consideremos o mapeamento isoparmétrico do retângulo genérico,  $K$ , sobre o retângulo de referência,  $\hat{K}$ , como mostra a figura B.2.

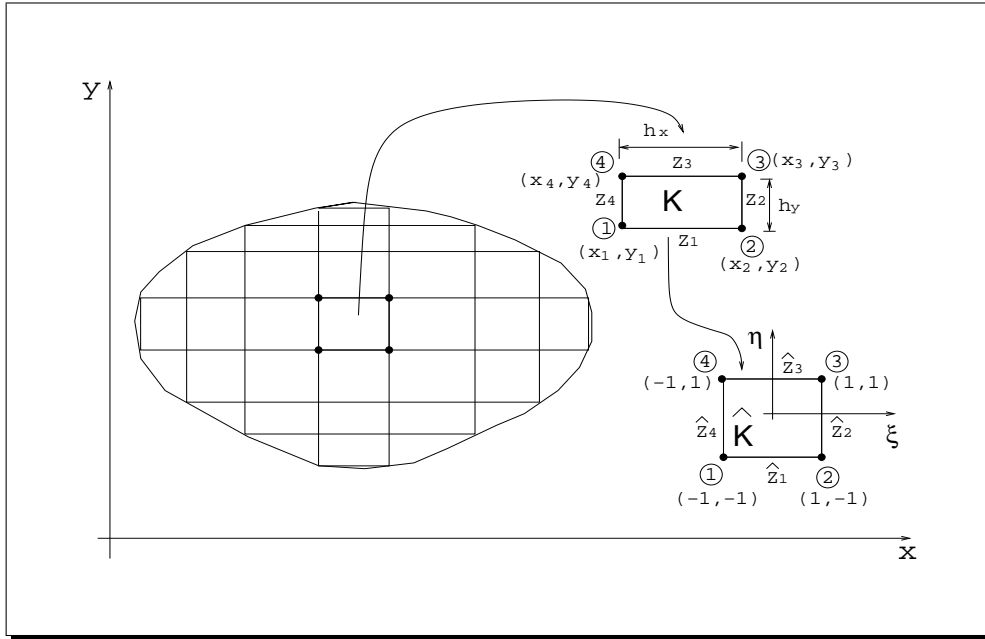


Figura B.2: Mapeamento isoparamétrico de um elemento retangular.

Agora, as funções de forma bilineares definidas em  $K$  são dadas por

$$\left[ \begin{array}{l} \psi_1(x, y) = \frac{1}{|K|} (x_1 - x)(y_4 - y) , \\ \psi_2(x, y) = \frac{1}{|K|} (x - x_1)(y_4 - y) , \\ \psi_3(x, y) = \frac{1}{|K|} (x - x_1)(y - y_1) , \\ \psi_4(x, y) = \frac{1}{|K|} (x_2 - x)(y - y_1) . \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

Por outro lado, o mapeamento isoparamétrico de  $\hat{K}$  para  $K$  toma a forma

$$\left[ \begin{array}{l} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{\psi}_i(\xi, \eta) x_i , \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{\psi}_i(\xi, \eta) y_i , \end{array} \right. \quad (\text{B.17})$$

onde

$$\hat{\psi}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) , \quad i \in \mathcal{N}_{Q1} = \{1, 2, 3, 4\} . \quad (\text{B.18})$$



Aqui também um cálculo simples mostra que

$$|J| = \frac{|K|}{4}. \quad (\text{B.19})$$

Seja  $[M_{GQ1}] \equiv [M_{GQ1}]_{4 \times 4}$  a matriz de massa de componentes

$$[M_{GQ1}]_{ij} = (\psi_j(x, y), \psi_i(x, y))_K = |J| \left( \hat{\psi}_j(\xi, \eta), \hat{\psi}_i(\xi, \eta) \right)_{\hat{K}}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1}. \quad (\text{B.20})$$

Fazendo uso da notação já introduzida na subseção anterior, temos

$$[\hat{\psi}] = [\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3, \hat{\psi}_4], \quad (\text{B.21})$$

de modo que  $[M_{GQ1}]$  toma a forma

$$[M_{GQ1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\psi}]^T [\hat{\psi}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.22})$$

cujas componentes

$$\left[ \begin{array}{l} [M_{GQ1}]_{ii} = |J| \frac{4}{9}, \quad i \in \mathcal{N}_{Q1} \\ [M_{GQ1}]_{ik} = |J| \frac{2}{9}, \quad k = i + 1, \quad i = 1, 2, 3 \\ [M_{GQ1}]_{ik} = |J| \frac{1}{9}, \quad k = i + 2, \quad i = 1, 2 \\ [M_{GQ1}]_{ik} = |J| \frac{2}{9}, \quad k = i + 3, \quad i = 1 \\ [M_{GQ1}]_{ij} = [M_{GQ1}]_{ji}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1}. \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

podem ser obtidas mais facilmente da segunda igualdade em (B.20).

Lembremos que para elementos bilineares, as funções de forma enriquecidas introduzidas em (3.36), definidas para todo  $\mathbf{x} = (x, y)$  pertencente a  $K$ , são

da forma

$$\lambda_j(x, y) = \frac{\sinh(\alpha_x \psi_j^x(x)) \sinh(\alpha_y \psi_j^y(y))}{\sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \quad j \in \mathcal{N}_{Q1}. \quad (\text{B.24})$$

O mapeamento isoparámetro em (B.17) permite definir (B.24) em todo  $\mathbf{x}$  pertencente a  $\hat{K}$  e escrevê-la como

$$\hat{\lambda}_j(x, y) = \frac{\sinh(\alpha_x \hat{\psi}_j^x(x)) \sinh(\alpha_y \hat{\psi}_j^y(y))}{\sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \quad j \in \mathcal{N}_{Q1}. \quad (\text{B.25})$$

Tal como no caso de elementos lineares, designamos por  $[\hat{\lambda}]$  o vetor linha cujas componentes são as funções em (B.24), de modo que a matriz de massa enriquecida,  $[M_{MsQ1}] \equiv [M_{MsQ1}]_{4 \times 4}$ , dada por

$$[M_{MsQ1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\lambda}]^T [\hat{\psi}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.26})$$

apresenta as componetes

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_{MsQ1}]_{ii} = |J| \frac{4(\alpha_x \cosh(\alpha_x) - \sinh(\alpha_x))(\alpha_y \cosh(\alpha_y) - \sinh(\alpha_y))}{\alpha_x^2 \alpha_y^2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \quad i \in \mathcal{N}_{Q1}, \\ [M_{MsQ1}]_{12} = [M_{MsQ1}]_{34} = |J| \frac{4(\sinh(\alpha_x) - \alpha_x)(\alpha_y \cosh(\alpha_y) - \sinh(\alpha_y))}{\alpha_x^2 \alpha_y^2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \\ [M_{MsQ1}]_{13} = [M_{MsQ1}]_{24} = |J| \frac{4(\alpha_x - \sinh(\alpha_x))(\alpha_y - \sinh(\alpha_y))}{\alpha_x^2 \alpha_y^2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \\ [M_{MsQ1}]_{14} = [M_{MsQ1}]_{23} = |J| \frac{4(\alpha_x \cosh(\alpha_x) - \sinh(\alpha_x))(\sinh(\alpha_y) - \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)}, \\ [M_{MsQ1}]_{ji} = [M_{MsQ1}]_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1}. \end{array} \right. \quad (\text{B.27})$$

Seja  $[A_{MsQ1}] \equiv [A_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  a matriz de massa de enriquecimento definida

de modo análogo a matriz  $[A_{MsP1}]$ . Assim sendo, suas componentes são dadas por

$$\begin{aligned}
[A_{MsQ1}]_{ij} &= (\mathcal{M}_k(\psi_j), \psi_i)_K = |J| \left( \mathcal{M}_k(\hat{\psi}_j), \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\
&= \frac{-|J|}{\sigma} \left( \hat{\phi}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{-|J|}{\sigma} \left( \hat{\lambda}_j - \hat{\psi}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\
&= \frac{|J|}{\sigma} \left( \hat{\psi}_j - \hat{\lambda}_j, \hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{1}{\sigma} ([M_{GQ1}]_{ij} - [M_{MsQ1}]_{ij}).
\end{aligned} \tag{B.28}$$

**Observação B.2** Ao contrário do caso de elementos lineares, agora as matrizes  $[M_{MsQ1}]$  e  $[A_{MsQ1}]$  são sempre simétricas.

□

Analogamente ao caso de elementos triângulares, as matrizes  $[W_{MsQ1}] \equiv [W_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  e  $[G_{MsQ1}] \equiv [G_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  motivadas pela análise de erro do capítulo 3 tomam as formas

$$[W_{MsQ1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\hat{\lambda}]^T [\hat{\lambda}] \right) d\hat{K}, \tag{B.29}$$

com

$$\begin{aligned}
[W_{MsQ1}]_{ii} &= |J| \left\{ \frac{2 \cosh(\alpha) - 2 \cosh(3\alpha) + 8\alpha^2 + 8\alpha \sinh(\alpha)}{8\alpha^2 (\sinh(\alpha))^4} \right. \\
&\quad + \frac{-16 \sinh(\alpha) (\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha - 4 (\cosh(0.5\alpha))^2 \cosh(\alpha)}{8\alpha^2 (\sinh(\alpha))^4} \\
&\quad \left. + \frac{4 (\cosh(0.5\alpha))^2 \cosh(3\alpha) - 4\alpha \sinh(2\alpha)}{8\alpha^2 (\sinh(\alpha))^4} \right\}, \quad i \in \mathcal{N}_{Q1}, \\
[W_{MsQ1}]_{12} &= [W_{MsQ1}]_{34} = |J| \left\{ \frac{2 \cosh(\alpha) - 2 \cosh(3\alpha) + 8\alpha^2 + 8\alpha \sinh(\alpha)}{8\alpha^2 (\sinh(\alpha))^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8 \sinh(2\alpha) (\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha - 4\alpha \sinh(2\alpha) - 16 (\alpha \cosh(0.5\alpha))^2}{8\alpha^2 (\sinh(\alpha))^4} \right\}, \\
[W_{MsQ1}]_{13} &= [W_{MsQ1}]_{24} = |J| \left\{ \frac{2 \cosh(2\alpha) - 2 + 4\alpha^2 + 8\alpha \sinh(\alpha)}{64\alpha^2 (\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{16\alpha^2 (\cosh(0.5\alpha))^4 - 16\alpha \sinh(\alpha) (\cosh(0.5\alpha))^2 - 16 (\alpha \cosh(0.5\alpha))^2}{64\alpha^2 (\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} \right\},
\end{aligned}$$

$$[W_{MsQ1}]_{14} = [W_{MsQ1}]_{23} = |J| \left\{ \frac{2 \cosh(2\alpha) - 2 + 8\alpha \sinh(\alpha) + 4(\cosh(0.5\alpha))^2}{64\alpha^2 (\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} + \frac{4\alpha \sinh(\alpha) (\cosh(0.5\alpha) \sinh(0.5\alpha))^2 - (\cosh(0.5\alpha))^2 (\cosh(2\alpha) + 2\alpha^2) + \alpha^2}{16\alpha^2 (\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} \right\},$$

$$[W_{MsQ1}]_{ij} = [W_{MsQ1}]_{ji}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1},$$

e

$$[G_{MsQ1}] = \frac{1}{\sigma^2} ([W_{MsQ1}] - 2\varrho_{min}^K [M_{MsQ1}] + (\varrho_{min}^K)^2 [M_{GQ1}]). \quad (\text{B.30})$$

### B.1.2 Matrizes de Rigidez

Diferentemente da maneira como procedemos para obtenção das matrizes elementares de massa, agora estabelecemos um procedimento genérico de cálculo das matrizes elementares de rigidez, de modo que as de interesse serão obtidas por simples aplicação.

Para tanto, consideremos  $[\mathbf{g}]$  e  $[\mathbf{f}]$  vetores genéricos de componentes  $[g_1, \dots, g_{\mathcal{N}_K}]$  e  $[f_1, \dots, f_{\mathcal{N}_K}]$  respectivamente, com  $g_j$  e  $f_j$  representando funções de forma definidas em  $K$ . Esses vetores e respectivas componentes definidas em  $\hat{K}$  via mapeamentos isoparâmetros em (B.3) ou (B.17) conforme o caso, são designados por  $[\hat{\mathbf{w}}]$  e  $[\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{\mathcal{N}_K}]$ , com  $\mathbf{w} = \mathbf{g}, \mathbf{f}$  e  $w_j = g_j, f_j$ . Aqui novamente,  $\mathcal{N}_K = 3$  para elementos lineares e  $\mathcal{N}_K = 4$  para elementos bilineares.

Denotamos por  $[B_{gen}] \equiv [B_{gen}]_{\mathcal{N}_K \times \mathcal{N}_K}$ , a matriz de rigidez elementar genérica de componentes

$$[B_{gen}]_{ij} = (\nabla g_j(x, y), \nabla f_i(x, y))_K = |J| \left( \nabla \hat{g}_j(\xi, \eta), \nabla \hat{f}_i(\xi, \eta) \right)_{\hat{K}}, \quad i, j \in \mathcal{N}_K, \quad (\text{B.31})$$

e portanto, podemos escrever a primeira igualdade em (B.31) de maneira compacta como

$$[B_{gen}] = \int_K \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{g}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{f}] \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{g}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial y} [\mathbf{f}] \right] \right) dK. \quad (\text{B.32})$$

A regra da cadeia aplicada a  $\mathbf{w}(x, y) = \hat{\mathbf{w}}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \hat{\mathbf{w}}(\xi, \eta)$ ,

fornece

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{w}(x, y)] = \frac{\partial \xi}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{w}}(\xi, \eta)] \right] + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{w}}(\xi, \eta)] \right], & \mathbf{w} = \mathbf{g}, \mathbf{f}, \\ \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{w}(x, y)] = \frac{\partial \xi}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{w}}(\xi, \eta)] \right] + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{w}}(\xi, \eta)] \right], & \mathbf{w} = \mathbf{g}, \mathbf{f}, \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

que usada em (B.32) conduz a

$$[B_{gen}] = |J| \{ b^1 [B_{gen}^1] + b^2 [B_{gen}^2] + b^3 ([B_{gen}^3] + [B_{gen}^4]) \}, \quad (\text{B.34})$$

onde as constantes  $b^j, j \in \mathcal{N}_{P1}$  são dadas por

$$\begin{cases} b^1 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ b^2 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \\ b^3 = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

e, as matrizes  $[B_{gen}^j], j \in \mathcal{N}_{Q1}$  são da forma

$$\begin{cases} [B_{gen}^1] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{g}}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{f}}] \right] \right) d\hat{K}, \\ [B_{gen}^2] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{g}}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{f}}] \right] \right) d\hat{K}, \\ [B_{gen}^3] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{g}}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{f}}] \right] \right) d\hat{K}, \\ [B_{gen}^4] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\mathbf{g}}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\mathbf{f}}] \right] \right) d\hat{K}. \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

### B.1.2.1 Elemento Triangular

Como frisamos anteriormente, agora o cálculo das matrizes de rigidez elementares de interesse resume-se a aplicação de (B.34).

Assim, para a matriz de rigidez elementar de Galerkin,  $[B_{GP1}] \equiv [B_{GP1}]_{3 \times 3}$ ,

obtida de (B.34) tomando  $gen = GP1$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{f} = \psi$  temos

$$\left[ \begin{aligned} b^1 &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{|J|^2} \left( (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 \right) &= \frac{|\bar{Z}_2|^2}{|J|^2}, \\ b^2 &= \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{|J|^2} \left( (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right) &= \frac{|\bar{Z}_3|^2}{|J|^2}, \\ b^3 &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{|J|^2} \left( (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \right) \\ & &= \frac{1}{2|J|^2} \left( |\bar{Z}_1|^2 - (|\bar{Z}_2|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right), \end{aligned} \right. \quad (\text{B.37})$$

$$\left[ \begin{aligned} [B_{GP1}^1] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\ &= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{\hat{K}} d\hat{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.38})$$

$$\left[ \begin{aligned} [B_{GP1}^2] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\ &= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int_{\hat{K}} d\hat{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned}
[B_{GP1}^3] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{\hat{K}} d\hat{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
[B_{GP1}^4] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \int_{\hat{K}} d\hat{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{B.41}$$

que consequentemente conduzem a

$$\begin{aligned}
[B_{GP1}] &= \frac{1}{2|J|} \left\{ |\bar{Z}_2|^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + |\bar{Z}_3|^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( |\bar{Z}_1|^2 - (|\bar{Z}_2|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Portanto,

$$[B_{GP1}]_{ij} = \begin{cases} \frac{|\bar{Z}_i|^2}{2|J|} & \text{para } i = j, \\ \frac{1}{4|J|} \left( |\bar{Z}_3|^2 - (|\bar{Z}_1|^2 + |\bar{Z}_2|^2) \right) & \text{para } i = 1, j = 2, \\ \frac{1}{4|J|} \left( |\bar{Z}_2|^2 - (|\bar{Z}_1|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right) & \text{para } i = 1, j = 3, \\ \frac{1}{4|J|} \left( |\bar{Z}_1|^2 - (|\bar{Z}_2|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right) & \text{para } i = 2, j = 3, \\ [B_{GP1}]_{ji} = [B_{GP1}]_{ij} & \text{para todo } i, j \in \mathcal{N}_{P1}. \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

A matriz de rigidez elementar enriquecida,  $[B_{MsP1}] \equiv [B_{MsP1}]_{3 \times 3}$ , é obtida tomando agora  $gen = MsP1$ ,  $\mathbf{g} = \lambda$  e  $\mathbf{f} = \psi$  em (B.34), de modo que (B.35) permanece como em (B.37), enquanto que (B.36) fornece

$$\begin{aligned} [B_{MsP1}^1] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\ &= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1)} \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1) \\ \frac{\alpha_2}{\sinh(\alpha_2)} \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\ &= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & -\frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & 0 \\ -\frac{\alpha_2 \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2)}{\sinh(\alpha_2)} & \frac{\alpha_2 \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2)}{\sinh(\alpha_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 \\ -\frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$



$$\begin{aligned}
[B_{MsP1}^2] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1)} \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1) \\ 0 \\ \frac{\alpha_3}{\sinh(\alpha_3)} \cosh(\alpha_3 \hat{\psi}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & 0 & -\frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_3 \cosh(\alpha_3 \hat{\psi}_3)}{\sinh(\alpha_3)} & 0 & \frac{\alpha_2 \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2)}{\sinh(\alpha_2)} \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \tag{B.45} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & 0 & \frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{MsP1}^3] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1)} \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1) \\ \frac{\alpha_2}{\sinh(\alpha_2)} \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & 0 & -\frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} \\ -\frac{\alpha_2 \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2)}{\sinh(\alpha_2)} & 0 & \frac{\alpha_2 \cosh(\alpha_2 \hat{\psi}_2)}{\sinh(\alpha_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \tag{B.46} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} \\ -\frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & 0 & \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{MsP1}^4] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\sinh(\alpha_1)} \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1) \\ 0 \\ \frac{\alpha_3}{\sinh(\alpha_3)} \cosh(\alpha_3 \hat{\psi}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & -\frac{\alpha_1 \cosh(\alpha_1 \hat{\psi}_1)}{\sinh(\alpha_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_3 \cosh(\alpha_3 \hat{\psi}_3)}{\sinh(\alpha_3)} & \frac{\alpha_3 \cosh(\alpha_3 \hat{\psi}_3)}{\sinh(\alpha_3)} & 0 \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \quad (\text{B.47}) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & \frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

das quais segue-se que

$$\begin{aligned}
[B_{MsP1}] &= |J| \left\{ b^1 \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 \\ \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & 0 \\ -\frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&+ b^2 \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & 0 & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & 0 & \frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} \end{bmatrix} \\
&+ b^3 \left. \begin{bmatrix} 2\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} & -\frac{\cosh(\alpha_1) - 1}{\alpha_1 \sinh(\alpha_1)} \\ \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} & 0 & \frac{\cosh(\alpha_2) - 1}{\alpha_2 \sinh(\alpha_2)} \\ -\frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & \frac{\cosh(\alpha_3) - 1}{\alpha_3 \sinh(\alpha_3)} & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[B_{MsP1}]_{ij} = c_{ij} \left( \frac{\cosh(\alpha_i) - 1}{\alpha_i \sinh(\alpha_i)} \right), \quad i, j \in \mathcal{N}_{P1}, \quad (\text{B.49})$$

onde

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{|\bar{Z}_i|^2}{|J|}, & \\ c_{12} = c_{21} = \frac{1}{2|J|} \left( |\bar{Z}_3|^2 - (|\bar{Z}_1|^2 + |\bar{Z}_2|^2) \right), & \\ c_{13} = c_{31} = \frac{1}{2|J|} \left( |\bar{Z}_2|^2 - (|\bar{Z}_1|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right), & \\ c_{23} = c_{32} = \frac{1}{2|J|} \left( |\bar{Z}_1|^2 - (|\bar{Z}_2|^2 + |\bar{Z}_3|^2) \right), & \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

que pode ser escrita de maneira compacta sob a forma

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{|\bar{Z}_i|^2}{|J|} & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2|J|} \left( |\bar{Z}_k|^2 - (|\bar{Z}_i|^2 + |\bar{Z}_j|^2) \right) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

com  $i, j, k \in \mathcal{N}_{P1}$  permutando na ordem natural.

Seja  $[C_{MsP1}] \equiv [C_{MsP1}]_{3 \times 3}$  a matriz de rigidez elementar de enriquecimento. Logo, definindo  $[C_{MsP1}]$  de modo análogo a (B.13) temos

$$\begin{aligned} [C_{MsP1}]_{ij} &= \left( \nabla(\mathcal{M}_k(\psi_j)), \nabla\psi_i \right)_K = |J| \left( \nabla(\mathcal{M}_k(\hat{\psi}_j)), \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\ &= \frac{-|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\phi}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{-|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\lambda}_j - \nabla\hat{\psi}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\ &= \frac{|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\psi}_j - \nabla\hat{\lambda}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{1}{\sigma} ([B_{GP1}]_{ij} - [B_{MsP1}]_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

No caso de elementos  $K$  com geometria equilátera, temos  $|\bar{Z}_1| = |\bar{Z}_2| = |\bar{Z}_3| = |\bar{Z}|$ , o que implica em  $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = |\alpha|$ , de modo que de (B.51) obtemos

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{|\bar{Z}_i|^2}{|J|} = |J| \frac{|\bar{Z}|^2}{|J|^2} = |J| \frac{|\bar{Z}|^2}{4|K|^2} = |J| \frac{4}{3} & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2|J|} \left( |\bar{Z}_k|^2 - (|\bar{Z}_i|^2 + |\bar{Z}_j|^2) \right) = -|J| \frac{|\bar{Z}|^2}{2|J|^2} = -|J| \frac{2}{3} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

que usada em (B.42), (B.49) e (B.52), conduz a

$$[B_{GP1}] = \frac{|J|}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.53})$$

$$[B_{MsP1}] = \frac{2|J|}{3} \frac{(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.54})$$

e

$$[C_{MsP1}] = \frac{|J|}{3} \frac{1}{\sigma} \left( 1 - \frac{2(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

respectivamente.

**Observação B.3** Nas sentenças de  $c_{ij}$  que antecedem (B.53), usamos a identidade

$$|K|^2 = \frac{3|\bar{Z}|^2}{16}$$

válida para elementos  $K$  de geometria equilátera.

□

Tal como ocorreu em relação as matrizes de massa, aqui também a análise de erro do capítulo 3 motivou a introdução das matrizes abaixo.

Designamos estas matrizes por  $[V_{MsP1}] \equiv [V_{MsP1}]_{3 \times 3}$  e  $[D_{MsP1}] \equiv [D_{MsP1}]_{3 \times 3}$ , onde a primeira é dada por

$$[V_{MsP1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\nabla \hat{\lambda}]^T [\nabla \hat{\lambda}] \right) d\hat{K}, \quad (\text{B.56})$$

e apresenta as componentes

$$[V_{MsP1}]_{ij} = \begin{cases} |J| \frac{\cosh(2\alpha) + 2\alpha^2 - 1}{6(\sinh(\alpha))^2} & \text{se } i = j, \\ |J| \frac{\alpha(\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha))(1 - \exp(2\alpha))}{6(\sinh(\alpha))^2} & \text{para } i = 1 \text{ e } j = 2, \\ |J| \frac{-\alpha}{3 \sinh(\alpha)} & \text{para } i = 1 \text{ e } j = 3, \\ |J| \frac{\alpha(\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha))(1 - \exp(2\alpha))}{6(\sinh(\alpha))^2} & \text{para } i = 2 \text{ e } j = 3, \end{cases}$$

enquanto que a segunda é da forma

$$[D_{MsP1}] = \frac{1}{\sigma^2} ([V_{MsP1}] - 2[B_{MsP1}] + [B_{GP1}]). \quad (\text{B.57})$$

onde novamente estamos considerando a simetria.

### B.1.2.2 Elemento Retangular

Através de simples aplicação de (B.34) tomando  $gen = GQ1$  e  $\mathbf{g} = \mathbf{f} = \psi$ , obtemos

$$\begin{cases} b^1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \frac{h_y^2}{4|J|^2} = \frac{4}{h_x^2}, \\ b^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{h_x^2}{4|J|^2} = \frac{4}{h_y^2}, \\ b^3 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned}
[B_{GQ1}^1] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \frac{1}{16} \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1+\eta \\ 1-\eta \\ 1+\eta \\ -1-\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+\eta & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \tag{B.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B_{GQ1}^2] &= \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K} \\
&= \frac{1}{16} \int_{\hat{K}} \left( \begin{bmatrix} -1+\xi \\ -1-\xi \\ 1+\xi \\ 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+\xi & -1-\xi & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \right) d\hat{K} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{B.60}
\end{aligned}$$

que conduzem a

$$[B_{GQ1}] = \frac{1}{6} \left\{ \frac{h_y}{h_x} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h_x}{h_y} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}. \tag{B.61}$$

Para a matriz de rigidez elementar enriquecida, também decorrente de

(B.34) tomando  $gen = MsQ1$ ,  $\mathbf{g} = \lambda$  e  $\mathbf{f} = \psi$ , temos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\lambda}] \right]^T = \frac{\alpha_x}{2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)} \begin{bmatrix} -\cosh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1-\xi)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1-\eta)\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1+\xi)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1-\eta)\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1+\xi)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1+\eta)\right) \\ -\cosh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1-\xi)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1+\eta)\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.62})$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\lambda}] \right]^T = \frac{\alpha_y}{2 \sinh(\alpha_x) \sinh(\alpha_y)} \begin{bmatrix} -\cosh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1-\eta)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1-\xi)\right) \\ -\cosh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1-\eta)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1+\xi)\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1+\eta)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1+\xi)\right) \\ \cosh\left(\frac{\alpha_y}{2}(1+\eta)\right) \sinh\left(\frac{\alpha_x}{2}(1-\xi)\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.63})$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 + \eta & 1 - \eta & 1 + \eta & -1 - \eta \end{bmatrix}, \quad (\text{B.64})$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 + \xi & -1 - \xi & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix}, \quad (\text{B.65})$$

e porconsequinte,

$$[B_{MsQ1}^1] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K}$$

apresenta as componentes

$$\left[ \begin{array}{l}
 [B_{MsQ1}^1]_{ii} = \frac{1}{(\alpha_y)^2 \sinh(\alpha_y)} \left( \alpha_y \cosh(\alpha_y) - \sinh(\alpha_y) \right) \quad , \quad i \in \mathcal{N}_{Q1} , \\
 [B_{MsQ1}^1]_{12} = [B_{MsQ1}^1]_{34} = -[B_{MsQ1}^1]_{11} , \\
 [B_{MsQ1}^1]_{13} = [B_{MsQ1}^1]_{24} = \frac{1}{(\alpha_y)^2 \sinh(\alpha_y)} \left( \alpha_y - \sinh(\alpha_y) \right) , \\
 [B_{MsQ1}^1]_{14} = [B_{MsQ1}^1]_{23} = -[B_{MsQ1}^1]_{13} , \\
 [B_{MsQ1}^1]_{ji} = [B_{MsQ1}^1]_{ij} \quad , \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1} ,
 \end{array} \right. \quad (B.66)$$

enquanto que as de

$$[B_{MsQ1}^2] = \int_{\hat{K}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\lambda}] \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} [\hat{\psi}] \right] \right) d\hat{K}$$

são dadas por

$$\left[ \begin{array}{l}
 [B_{MsQ1}^2]_{ii} = \frac{1}{(\alpha_x)^2 \sinh(\alpha_x)} \left( \alpha_x \cosh(\alpha_x) - \sinh(\alpha_x) \right) \quad , \quad i \in \mathcal{N}_{Q1} , \\
 [B_{MsQ1}^2]_{12} = [B_{MsQ1}^2]_{34} = -\frac{1}{(\alpha_x)^2 \sinh(\alpha_x)} \left( \alpha_x - \sinh(\alpha_x) \right) , \\
 [B_{MsQ1}^2]_{13} = [B_{MsQ1}^2]_{24} = -[B_{MsQ1}^2]_{12} , \\
 [B_{MsQ1}^2]_{14} = [B_{MsQ1}^2]_{23} = -[B_{MsQ1}^2]_{11} , \\
 [B_{MsQ1}^2]_{ji} = [B_{MsQ1}^2]_{ij} \quad , \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1} .
 \end{array} \right. \quad (B.67)$$

Logo,  $[B_{MsQ1}]$  é da forma

$$[B_{MsQ1}] = \frac{h_y}{h_x} [B_{MsQ1}^1] + \frac{h_x}{h_y} [B_{MsQ1}^2]. \quad (B.68)$$

Tal como em (B.52), a matriz de rigidez elementar de enriquecimento,



$[C_{MsQ1}] \equiv [C_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  é dada por

$$\begin{aligned}
[C_{MsQ1}]_{ij} &= \left( \nabla(\mathcal{M}_k(\psi_j)), \nabla\psi_i \right)_K = |J| \left( \nabla(\mathcal{M}_k(\hat{\psi}_j)), \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\
&= \frac{-|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\phi}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{-|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\lambda}_j - \nabla\hat{\psi}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} \\
&= \frac{|J|}{\sigma} \left( \nabla\hat{\psi}_j - \nabla\hat{\lambda}_j, \nabla\hat{\psi}_i \right)_{\hat{K}} = \frac{1}{\sigma} ([B_{GQ1}]_{ij} - [B_{MsQ1}]_{ij}).
\end{aligned} \tag{B.69}$$

Em particular, quando  $h_x = h_y = h$  somos conduzidos a  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ , de maneira que (B.61) e (B.69) tomam as formas simplificadas

$$[B_{GQ1}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \tag{B.70}$$

e

$$\left[ \begin{aligned}
[B_{MsQ1}]_{ii} &= \frac{2(\alpha \cosh(\alpha) - \sinh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \quad i \in \mathcal{N}_{Q1}, \\
[B_{MsQ1}]_{12} &= [B_{MsQ1}]_{34} = \frac{2 \sinh(\alpha) - \alpha(1 + \cosh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \\
[B_{MsQ1}]_{13} &= [B_{MsQ1}]_{24} = \frac{2(\alpha - \sinh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \\
[B_{MsQ1}]_{14} &= [B_{MsQ1}]_{23} = \frac{2 \sinh(\alpha) - \alpha(1 + \cosh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \\
[B_{MsQ1}]_{ji} &= [B_{MsQ1}]_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1},
\end{aligned} \right. \tag{B.71}$$

respectivamente.

Agora, as matrizes motivadas pela análise de erro do capítulo 3, designadas por  $[V_{MsQ1}] \equiv [V_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  e  $[D_{MsQ1}] \equiv [D_{MsQ1}]_{4 \times 4}$  são respectivamente da forma

$$[V_{MsQ1}] = |J| \int_{\hat{K}} \left( [\nabla\hat{\lambda}]^T [\nabla\hat{\lambda}] \right) d\hat{K}, \tag{B.72}$$

com componentes

$$[V_{MsQ1}]_{ii} = \frac{(1 - 2(\cosh(0.5\alpha))^2)(\cosh(\alpha) - \cosh(3\alpha)) - 4\alpha^2}{8(\sinh(\alpha))^4}, \quad i \in \mathcal{N}_{Q1},$$

$$[V_{MsQ1}]_{12} = [V_{MsQ1}]_{34} = \frac{8(\alpha \cosh(0.5\alpha))^2 - \cosh(3\alpha) + \cosh(\alpha) - 4\alpha^2}{8(\sinh(\alpha))^4},$$

$$[V_{MsQ1}]_{13} = [V_{MsQ1}]_{24} = \frac{\cosh(2\alpha) - 8(\alpha \cosh(0.5\alpha)(\sinh(0.5\alpha))^2 - 2\alpha^2 - 1)}{64(\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4},$$

$$[V_{MsQ1}]_{14} = [V_{MsQ1}]_{23} = \frac{(1 - 2(\cosh(0.5\alpha))^2)(\cosh(2\alpha) - 1 - 2\alpha^2)}{64(\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4},$$

$$[V_{MsQ1}]_{ij} = [V_{MsQ1}]_{ji}, \quad i, j \in \mathcal{N}_{Q1},$$

e

$$[D_{MsQ1}] = \frac{1}{\sigma^2} ([V_{MsQ1}] - 2[B_{MsQ1}] + [B_{GQ1}]). \quad (\text{B.73})$$

## B.2 Autovalores Generalizados

Por simplicidade, apresentamos aqui apenas os autovalores generalizados decorrentes das matrizes elementares associadas a elementos  $K$  de geometria equilátera e quadrada.

Na subseção B.2.1 apresentamos os autovalores generalizados gerados pelas matrizes elementares de massa, enquanto que na subseção B.2.2 apresentamos aqueles relacionados com as matrizes de rigidez. Em ambos os casos discutimos seus comportamentos em função do parâmetro adimensional  $\alpha$ .

### B.2.1 Matrizes de Massa

Para as matrizes de massa, denotamos por  $\varrho^K(M_{MsS1}, M_{GS1})$  o espectro  $\lambda^{M_{MsS1}, M_{GS1}}$ ,  $\rho^K(A_{MsS1}, M_{GS1})$  o espectro  $\lambda^{A_{MsS1}, M_{GS1}}$  e por  $\xi^K(G_{MsS1}, M_{GS1})$  o espectro  $\lambda^{G_{MsS1}, M_{GS1}}$  sendo  $\rho_j^K$ ,  $\varrho_j^K$  e  $\xi_j^K$ ,  $j \in \mathcal{N}_{S1}$ , seus respectivos elementos. Aqui  $S = P, Q$ .

Como os elementos  $\rho_j^K$ ,  $\varrho_j^K$  e  $\xi_j^K$  são reais, adotamos a convenção de

subindexa-los de forma crescente de acordo com suas magnitudes, i.e,

$$J_{min} = J_1 \leq J_2 \leq \dots \leq J_{N_K} = J_{max}, \quad J = \varrho^K, \rho^K, \xi^K, \quad (\text{B.74})$$

lembrando que definimos previamente  $N_K = 3$  para  $S = P$  e  $N_K = 4$  para  $S = Q$ .

### B.2.1.1 Elemento $K$ de Geometria Equilátera

Assim, tomando  $S = P$  e considerando (B.74) obtemos:

$$\varrho_{min}^K = \varrho_1^K = \frac{6(\sinh(\alpha) - \alpha)}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \quad (\text{B.75})$$

$$\varrho_{max}^K = \varrho_2^K = \varrho_3^K = \frac{12(6 + 2\alpha \sinh(\alpha) - 6 \cosh(\alpha) + \alpha^2)}{\alpha^3 \sinh(\alpha)}, \quad (\text{B.76})$$

$$\rho_{min}^K = \rho_1^K = \rho_2^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha^3 \sinh(\alpha) - 24\alpha \sinh(\alpha) + 72 \cosh(\alpha) - 12\alpha^2 - 72}{\alpha^3 \sinh(\alpha)} \right), \quad (\text{B.77})$$

$$\rho_{max}^K = \rho_3^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{6\alpha + \alpha^2 \sinh(\alpha) - 6 \sinh(\alpha)}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} \right). \quad (\text{B.78})$$

e

$$\xi_{min}^K = \frac{6}{\sigma^2} (2.5a_1 + a_3 - 2a_2 - \sqrt{(-10a_1a_2 + a_3^2 - 4a_2a_3 + 2.25a_1^2 + 12a_2^2 + a_1a_3)}), \quad (\text{B.79})$$

$$\begin{aligned} \xi_{max}^K = \xi_2^K = \xi_3^K = & \frac{24 \cosh(\alpha) - 12\alpha \sinh(\alpha) - 27 + 3 \cosh(2\alpha) - 6\alpha^2}{\sigma^2 (\alpha \sinh(\alpha))^2} \\ & + \frac{144(\sinh(\alpha) - \alpha)(6 \cosh(\alpha) - \alpha^2 - 6 - 2\alpha \sinh(\alpha)) + 36\alpha(\sinh(\alpha) - \alpha)^2}{\alpha^5 (\sinh(\alpha))^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

Em (B.79), os parâmetros  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são dados por

$$a_1 = \frac{\cosh(2\alpha) - 1 - 2\alpha^2}{8(\alpha \sinh(\alpha))^2} - \frac{6(\sinh(\alpha) - \alpha)(4 - 4 \cosh(\alpha) + 1.5\alpha \sinh(\alpha) + 0.5\alpha^2)}{\alpha^5 (\sinh(\alpha))^2},$$

$$a_2 = \frac{4 - (4 + \alpha) \cosh(\alpha) + \alpha \exp(2\alpha) \cosh(\alpha) + \alpha \sinh(\alpha) - \alpha \exp(2\alpha) \sinh(\alpha)}{(2\alpha \sinh(\alpha))^2} - \frac{6(\sinh(\alpha) - \alpha)(2 \cosh(\alpha) - 2 - 0.75\alpha^2 - 0.25\alpha \sinh(\alpha))}{\alpha^5(\sinh(\alpha))^2},$$

e

$$a_3 = \frac{4 - 4 \cosh(\alpha) + 2\alpha \sinh(\alpha)}{4(\alpha \sinh(\alpha))^2} - \frac{6(\sinh(\alpha) - \alpha)(2 \cosh(\alpha) - 2 - 0.75\alpha^2 - 0.25\alpha \sinh(\alpha))}{\alpha^5(\sinh(\alpha))^2}.$$

### B.2.1.2 Elemento $K$ de Geometria Quadrada

Neste caso temos que  $S = Q$ . Com isso, levando em conta (B.74) somos conduzidos a

$$\varrho_{min}^K = \varrho_1^K = \frac{4(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha^2(\cosh(\alpha) + 1)}, \quad (\text{B.81})$$

$$\varrho_2^K = \varrho_3^K = \frac{12(\alpha \sinh(\alpha) - 2 \cosh(\alpha) + 2)}{\alpha^3 \sinh(\alpha)}, \quad (\text{B.82})$$

$$\varrho_{max}^K = \varrho_4^K = \frac{36(4 \cosh(\alpha) + \alpha^2 \cosh(\alpha) + \alpha^2 - 4\alpha \sinh(\alpha) - 4)}{\alpha^4(\cosh(\alpha) - 1)}, \quad (\text{B.83})$$

$$\rho_{min}^K = \rho_1^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{144\alpha \sinh(\alpha) - 36\alpha^2(\cosh(\alpha) + 1) + (\alpha^4 - 144)(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha^4(\cosh(\alpha) - 1)} \right), \quad (\text{B.84})$$

$$\rho_2^K = \rho_3^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{24 \cosh(\alpha) - 24 - 12\alpha \sinh(\alpha) + \alpha^3 \sinh(\alpha)}{\alpha^3 \sinh(\alpha)} \right), \quad (\text{B.85})$$

$$\rho_{max}^K = \rho_4^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha^2 \cosh(\alpha) - 4 \cosh(\alpha) + \alpha^2 + 4}{\alpha^2(\cosh(\alpha) + 1)} \right), \quad (\text{B.86})$$

e

$$\xi_{min}^K = \xi_1^K = \frac{1}{\sigma^2} (a_1 + 2a_2 + a_3), \quad (\text{B.87})$$

$$\xi_2^K = \xi_3^K = \frac{3}{\sigma^2} (a_1 - a_3), \quad (\text{B.88})$$

$$\xi_{max}^K = \xi_4^K = \frac{9}{\sigma^2} (a_1 - 2a_2 + a_3). \quad (\text{B.89})$$

Em (B.87)-(B.89), os parâmetros  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são dados por

$$a_1 = \frac{b_1}{8\alpha^2(\sinh(\alpha))^4} - \frac{b_1(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha^4(1 + \cosh(\alpha))(\sinh(\alpha))^4} + \frac{64(\cosh(\alpha) - 1)^2}{9\alpha^4(\cosh(\alpha) + 1)^2},$$

com

$$b_1 = 4(\cosh(0.5\alpha))^2 \cosh(3\alpha) - 2 \cosh(3\alpha) + 2 \cosh(\alpha) + 8\alpha \sinh(\alpha) \\ - 16(\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha \sinh(\alpha) + 8\alpha^2 - 4 \cosh(\alpha)(\cosh(0.5\alpha))^2 - 4\alpha \sinh(2\alpha),$$

$$a_2 = -\frac{b_2}{8\alpha^2(\sinh(\alpha))^4} + \frac{(\cosh(\alpha) - 1)b_2}{\alpha^4(\cosh(\alpha) + 1)(\sinh(\alpha))^4} + \frac{32(\cosh(\alpha) - 1)^2}{9\alpha^4(\cosh(\alpha) + 1)^2},$$

com

$$b_2 = 4\alpha \sinh(2\alpha) - 8(\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha \sinh(2\alpha) + 2 \cosh(3\alpha) \\ + 16(\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha^2 - 2 \cosh(\alpha) - 8\alpha \sinh(\alpha) - 8\alpha^2,$$

e

$$a_3 = \frac{b_3}{64\alpha^2(\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} \\ - \frac{(\cosh(\alpha) - 1)b_3}{8\alpha^4(\cosh(\alpha) + 1)(\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} + \frac{16(\cosh(\alpha) - 1)^2}{9\alpha^4(\cosh(\alpha) + 1)^2},$$

com

$$b_3 = 8\alpha \sinh(\alpha) - 16(\cosh(0.5\alpha))^2 \alpha \sinh(\alpha) + 2 \cosh(2\alpha) - 2 \\ + 16(\cosh(0.5\alpha))^4 \alpha^2 - 16(\alpha \cosh(0.5\alpha))^2 + 4\alpha^2.$$

## B.2.2 Matrizes de Rigidez

Seguindo descrição análoga à apresentada na subseção B.2.1, agora designamos por  $\theta^K(B_{M_s S1}, B_{GS1}) = \{\theta_j^K\}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ ,  $0 \leq \theta_{min}^K = \theta_1^K \leq \theta_2^K \leq \dots \leq \theta_{max}^K = \theta_{N_K}^K$  o espectro  $\lambda^{B_{M_s S1}, B_{GS1}}$ , por  $\Theta^K(B_{M_s S1}, B_{GS1}) = \{\Theta_j^K\}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ ,  $0 \leq \Theta_{min}^K = \Theta_1^K \leq \Theta_2^K \leq \dots \leq \Theta_{max}^K = \Theta_{N_K}^K$  o espectro  $\lambda^{C_{M_s S1}, B_{GS1}}$  e por  $\eta^K(D_{M_s S1}, M_{GS1}) = \{\eta_j^K\}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ ,  $0 \leq \eta_{min}^K = \eta_1^K \leq \eta_2^K \leq \dots \leq \eta_{max}^K = \eta_{N_K}^K$  o

espectro  $\lambda^{D_{M_s S_1}, M_{GS_1}}$ .

### B.2.2.1 Elemento $K$ de Geometria Equilátera

Como sabemos, trata-se do caso  $S = P$ . Assim sendo, diante do exposto na subseção B.2.2 obtemos:

$$\theta_{min}^K = \theta_1^K = 0, \quad (B.90)$$

$$\theta_{max}^K = \theta_2^K = \theta_3^K = \frac{2(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)}, \quad (B.91)$$

$$\Theta_{min}^K = \Theta_1^K = 0, \quad (B.92)$$

$$\Theta_{max}^K = \Theta_2^K = \Theta_3^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \sinh(\alpha) - 2 \cosh(\alpha) + 2}{\alpha \sinh(\alpha)} \right). \quad (B.93)$$

e

$$\eta_{min}^K = \eta_1^K = \frac{6}{\sigma^2} (2.5a_1 + a_3 - 2a_2 - \sqrt{(-10a_1a_2 + a_3^2 - 4a_2a_3 + 2.25a_1^2 + 12a_2^2 + a_1a_3)}), \quad (B.94)$$

$$\eta_{max}^K = \eta_2^K = \eta_3^K = \frac{1}{\sigma^2} 24(a_1 - a_3), \quad (B.95)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são dados por

$$a_1 = \frac{\cosh(2\alpha) - 1 + 2\alpha^2}{6(\sinh(\alpha))^2} - \frac{8(\cosh(\alpha) - 1)}{3\alpha \sinh(\alpha)} + \frac{2}{3},$$

$$a_2 = - \frac{\alpha(\sinh(\alpha) - \cosh(\alpha) - \exp(2\alpha) \sinh(\alpha) + \exp(2\alpha) \cosh(\alpha))}{6(\sinh(\alpha))^2} + \frac{4(\cosh(\alpha) - 1)}{3\alpha \sinh(\alpha)} - \frac{1}{3}$$

e

$$a_3 = - \frac{\alpha}{3 \sinh(\alpha)} + \frac{4(\cosh(\alpha) - 1)}{3\alpha \sinh(\alpha)} - \frac{1}{3}.$$

### B.2.2.2 Elemento $K$ de Geometria Quadrada

Explorando novamente a subseção B.2.2 para  $S = Q$ , somos conduzidos

a

$$\theta_{min}^K = \theta_1^K = 0, \quad (B.96)$$

$$\theta_2^K = \theta_3^K = \frac{2(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)}, \quad (B.97)$$

$$\theta_{max}^K = \theta_4^K = \frac{6(\alpha \cosh(\alpha) - 2 \sinh(\alpha) + \alpha)}{\alpha^2 \sinh(\alpha)}, \quad (B.98)$$

$$\Theta_{min}^K = \Theta_1^K = 0, \quad (B.99)$$

$$\Theta_2^K = \Theta_3^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{12 \sinh(\alpha) - 6\alpha \cosh(\alpha) + \alpha^2 \sinh(\alpha) - 6\alpha}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} \right), \quad (B.100)$$

$$\Theta_{max}^K = \Theta_4^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \sinh(\alpha) - 2 \cosh(\alpha) + 2}{\alpha \sinh(\alpha)} \right). \quad (B.101)$$

e

$$\eta_{min}^K = \eta_1^K = \frac{1}{\sigma^2} (a_1 + 2a_2 + a_3), \quad (B.102)$$

$$\eta_2^K = \eta_3^K = \frac{3}{\sigma^2} (a_1 - a_3), \quad (B.103)$$

$$\eta_{max}^K = \eta_4^K = \frac{9}{\sigma^2} (a_1 - 2a_2 + a_3). \quad (B.104)$$

onde

$$a_1 = \frac{(\cosh(3\alpha) - \cosh(\alpha))(2(\cosh(0.5\alpha))^2 - 1) - 4\alpha^2}{8(\sinh(\alpha))^4} - \frac{4(\alpha \cosh(\alpha) - \sinh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} + \frac{2}{3},$$

$$a_2 = \frac{\cosh(\alpha) - \cosh(3\alpha) - 4\alpha^2 + 8(\alpha \cosh(0.5\alpha))^2}{8(\sinh(\alpha))^4} - \frac{2(2 \sinh(\alpha) - \alpha \cosh(\alpha) - \alpha)}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} - \frac{1}{6},$$

$$a_3 = \frac{\cosh(2\alpha) - 1 - 8(\alpha \cosh(0.5\alpha) \sinh(0.5\alpha))^2 - 2\alpha^2}{64(\sinh(0.5\alpha) \cosh(0.5\alpha))^4} - \frac{4(\alpha - \sinh(\alpha))}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} - \frac{1}{3}.$$

### B.2.3 Comportamento dos Autovalores Generalizados

A seguir apresentamos gráficos ilustrando o comportamento dos autovalores generalizados calculados acima em função do parâmetro adimensional  $\alpha$ .

Aqui, negligenciamos os autovalores generalizados identicamente nulos e atribuímos o subíndice *min* aos imediatamente superiores. Com isso, para  $S = P$ , de (B.91) e (B.93) temos respectivamente

$$\theta_{min}^K = \theta_{max}^K = \frac{2(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)}, \quad (\text{B.105})$$

e

$$\Theta_{min}^K = \Theta_{max}^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\alpha \sinh(\alpha) - 2 \cosh(\alpha) + 2}{\alpha \sinh(\alpha)} \right), \quad (\text{B.106})$$

enquanto que para  $S = Q$ , (B.97) e (B.100) tornam-se respectivamente

$$\theta_{min}^K = \theta_2^K = \theta_3^K = \frac{2(\cosh(\alpha) - 1)}{\alpha \sinh(\alpha)}, \quad (\text{B.107})$$

e

$$\Theta_{min}^K = \Theta_2^K = \Theta_3^K = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{12 \sinh(\alpha) - 6\alpha \cosh(\alpha) + \alpha^2 \sinh(\alpha) - 6\alpha}{\alpha^2 \sinh(\alpha)} \right). \quad (\text{B.108})$$

Para ambos os casos, i.e,  $S = P, Q$ , temos as seguintes relações:

$$\varrho_{max}^K = 1 - \sigma \rho_{min}^K, \quad (\text{B.109})$$

$$\theta_{max}^K = 1 - \sigma \Theta_{min}^K, \quad (\text{B.110})$$

e

$$\theta_{min}^K = 1 - \sigma \Theta_{max}^K. \quad (\text{B.111})$$

#### B.2.3.1 Gráficos Referentes ao Caso $S = P$



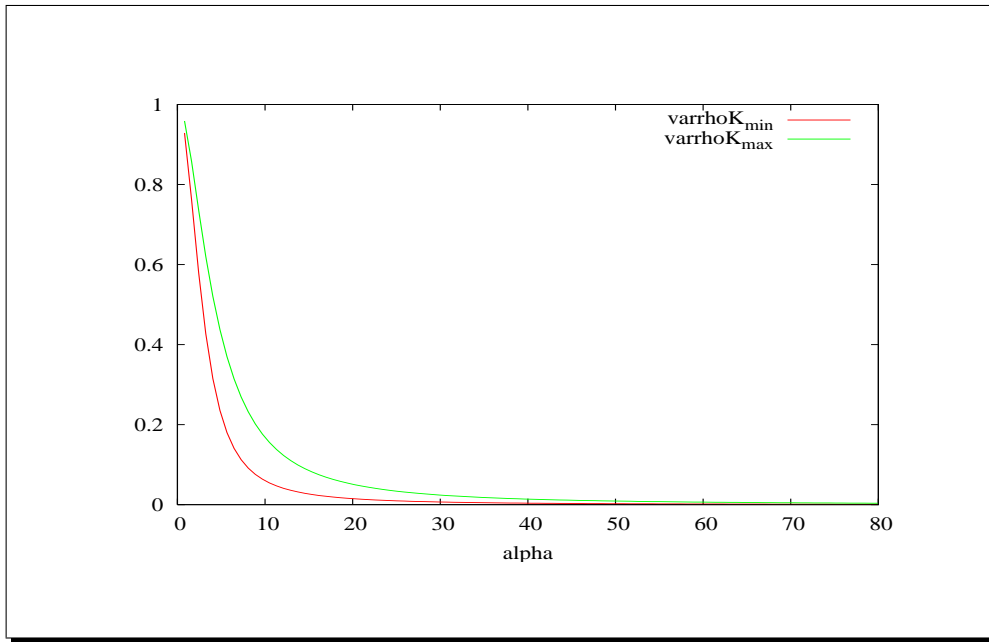


Figura B.3: Perfis de  $\rho_{min}^K$  e  $\rho_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

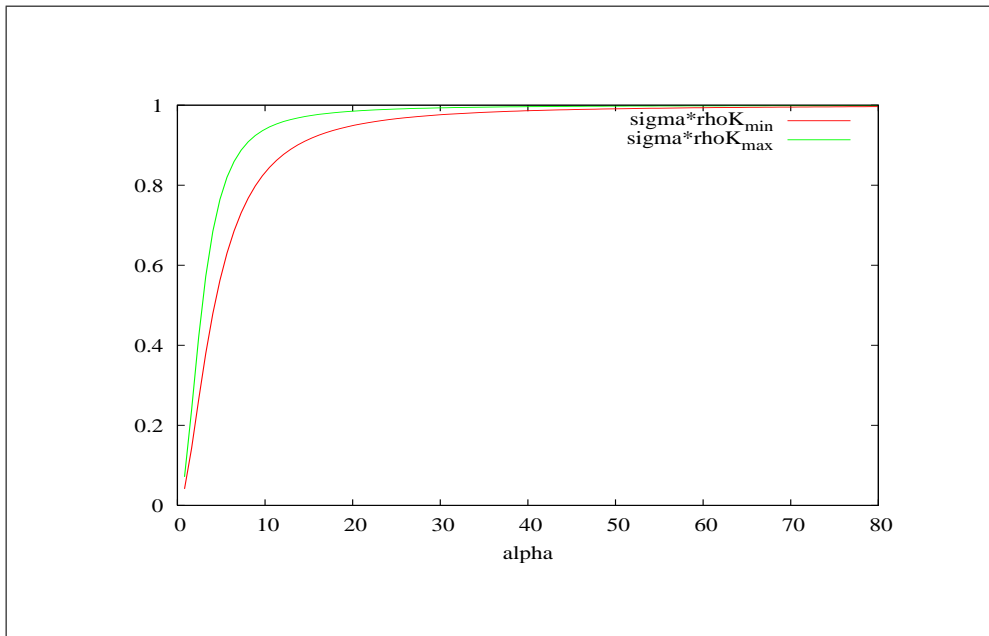


Figura B.4: Perfis de  $\sigma \rho_{min}^K$  e  $\sigma \rho_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

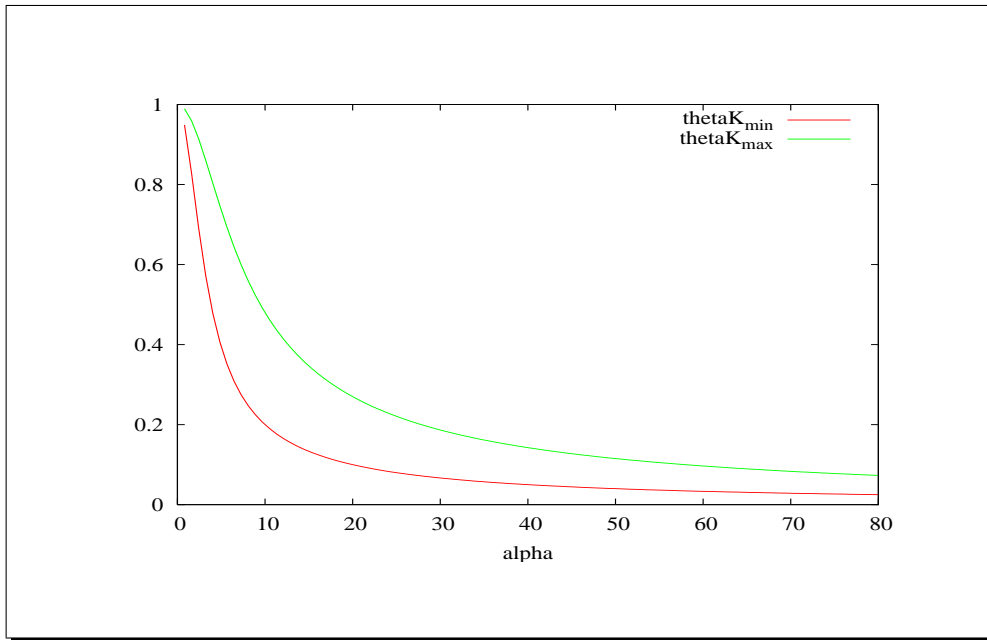


Figura B.5: Perfil de  $\theta_{min}^K = \theta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

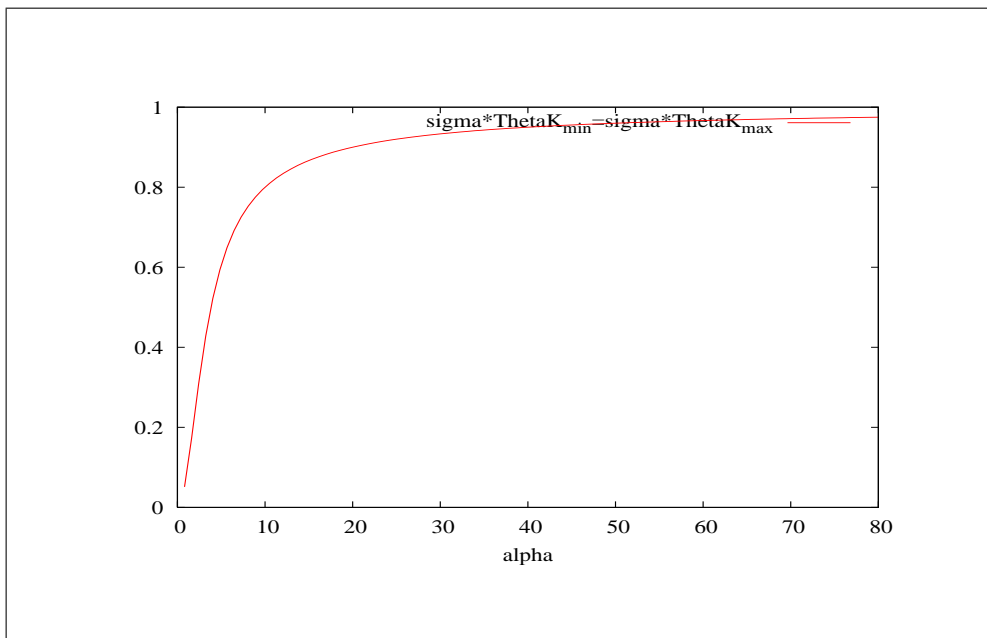


Figura B.6: Perfil de  $\sigma\Theta_{min}^K = \sigma\Theta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

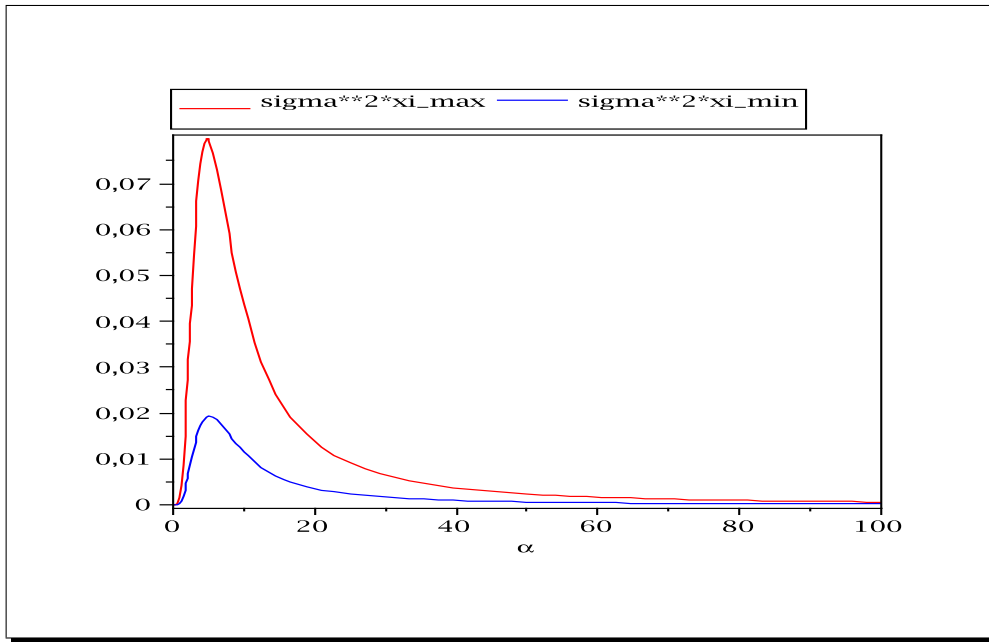


Figura B.7: Perfis de  $\sigma^2 \xi_{min}^K$  e  $\sigma^2 \xi_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

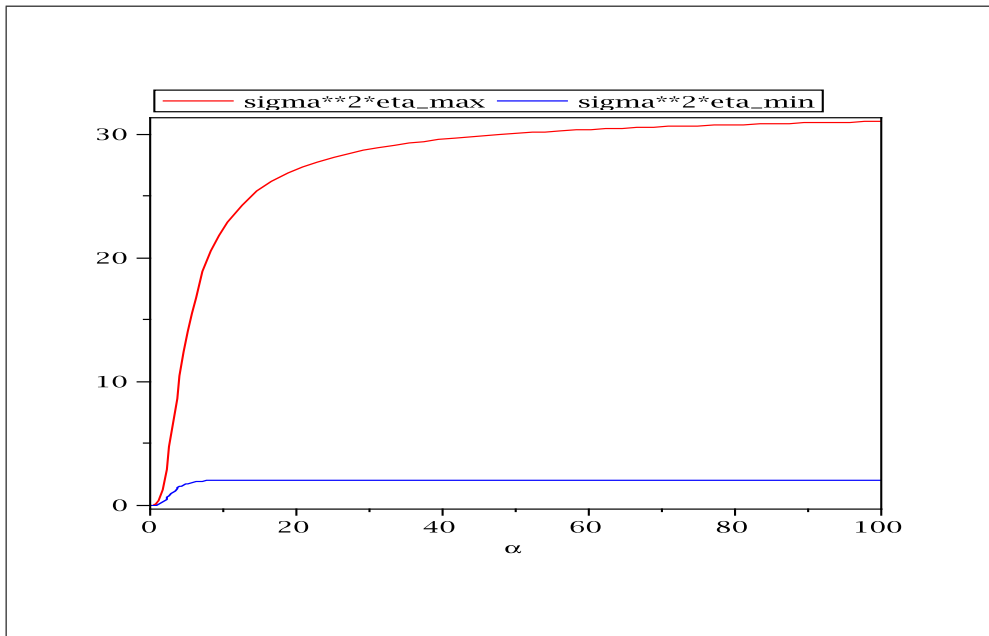


Figura B.8: Perfis de  $\sigma^2 \eta_{min}^K$  e  $\sigma^2 \eta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

### B.2.3.2 Gráficos Referentes ao Caso $S = Q$

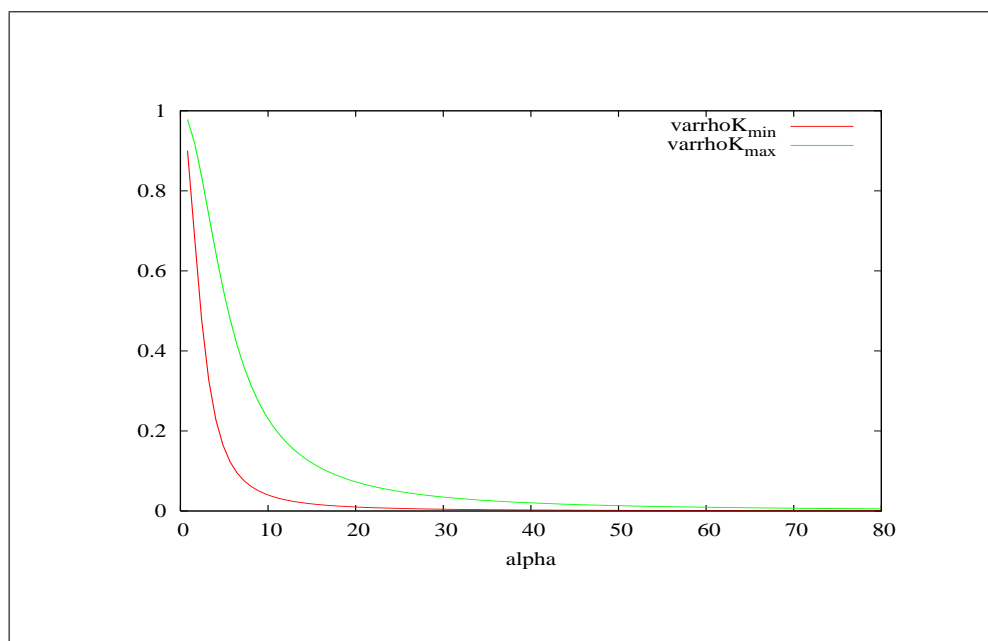


Figura B.9: Perfis de  $\varrho_{min}^K$  e  $\varrho_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

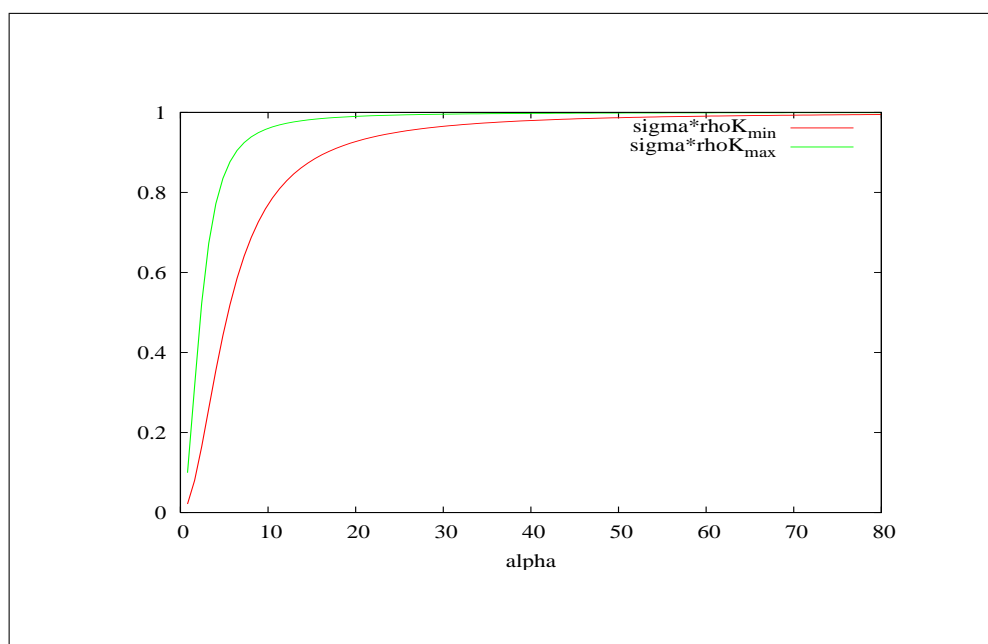


Figura B.10: Perfis de  $\sigma\rho_{min}^K$  e  $\sigma\rho_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

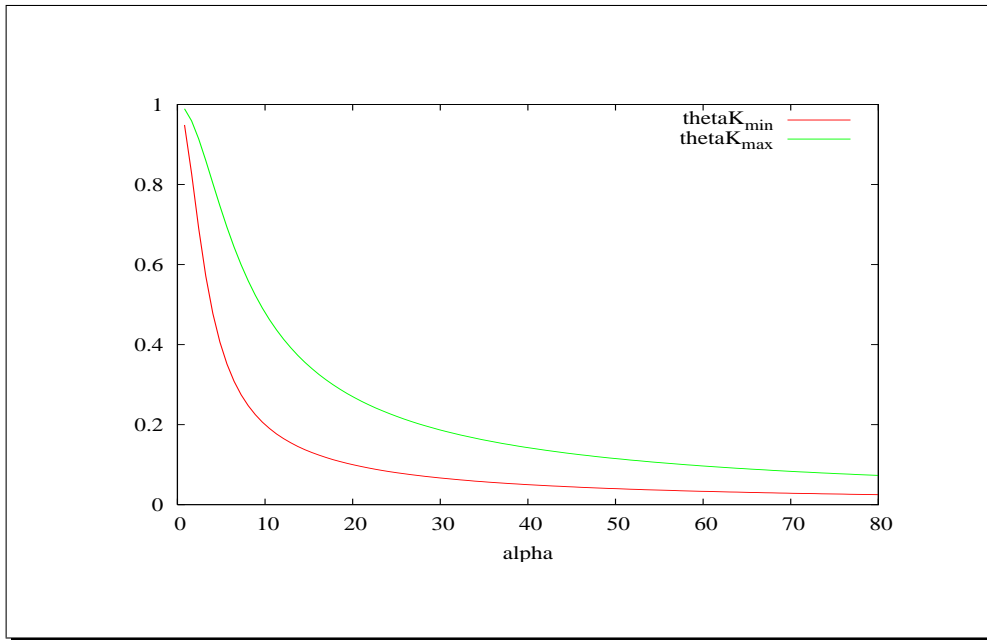


Figura B.11: Perfis de  $\theta_{min}^K$  e  $\theta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

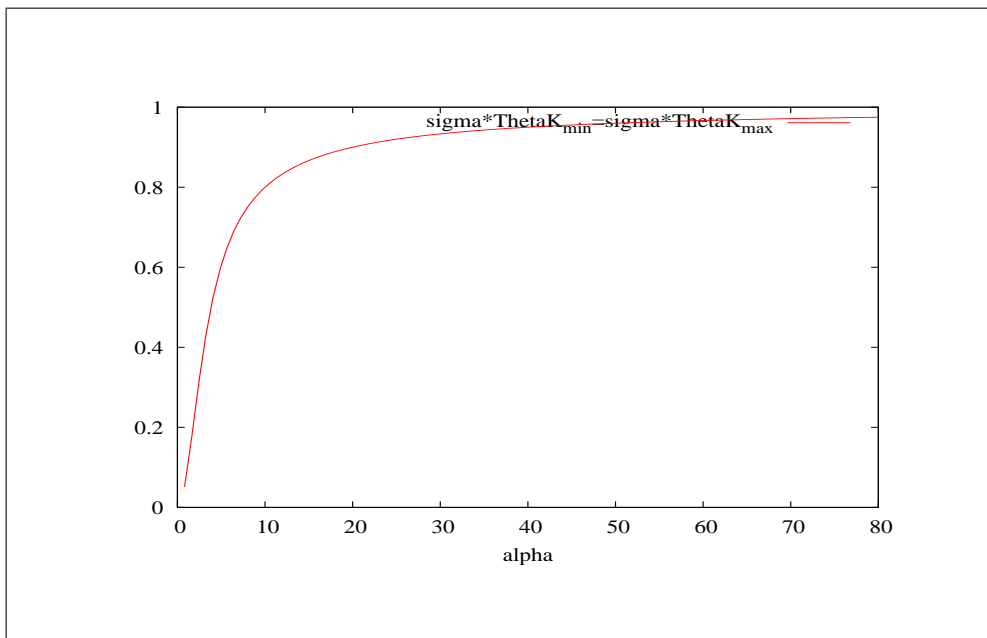


Figura B.12: Perfis de  $\sigma\theta_{min}^K$  e  $\sigma\theta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

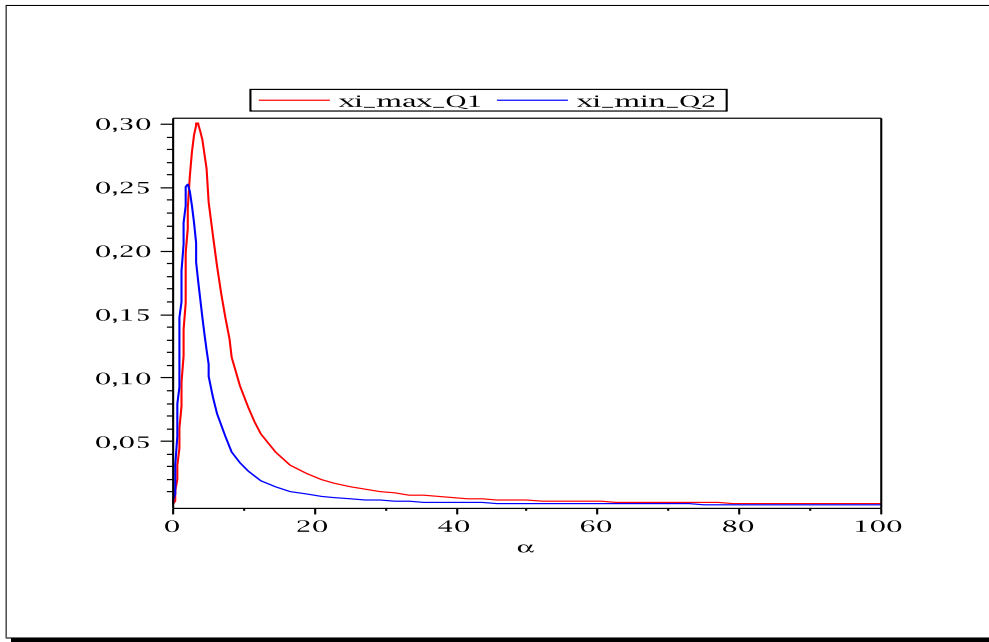


Figura B.13: Perfis de  $\sigma^2 \xi_{min}^K$  e  $\sigma^2 \xi_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

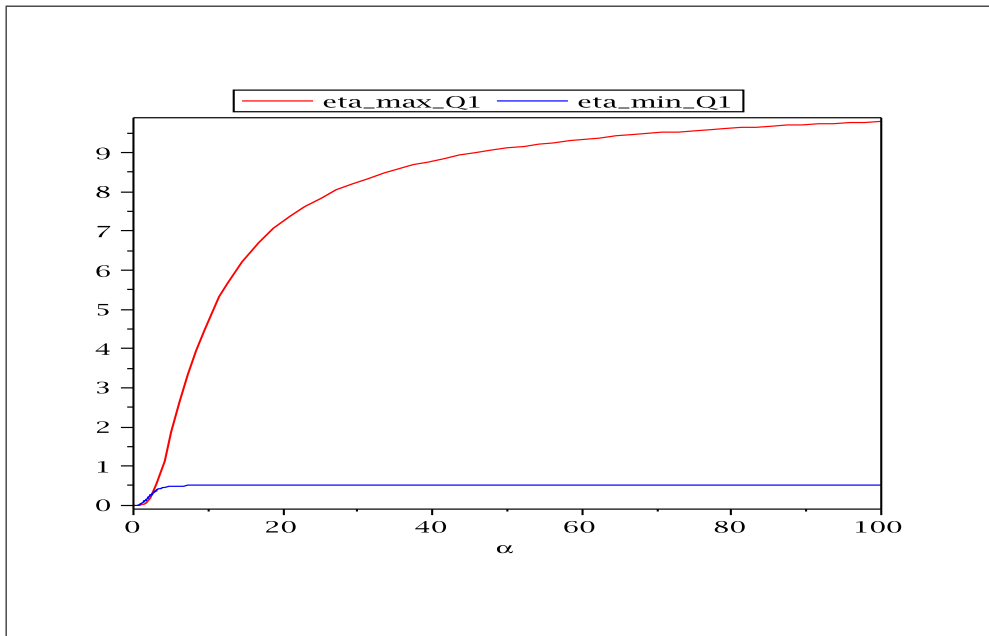


Figura B.14: Perfis de  $\sigma^2 \eta_{min}^K$  e  $\sigma^2 \eta_{max}^K$  versus  $\alpha$ .

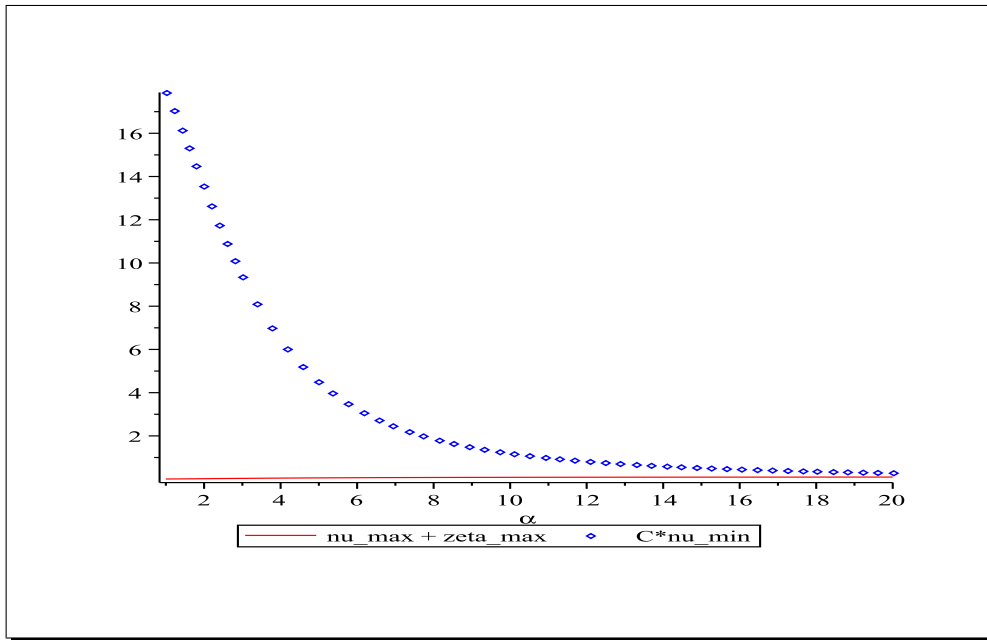


Figura B.15: Limitação de  $\sigma\mu_{max}^K + \varepsilon\zeta_{max}^K$  por  $C\sigma\mu_{min}^k$  versus  $\alpha$ .

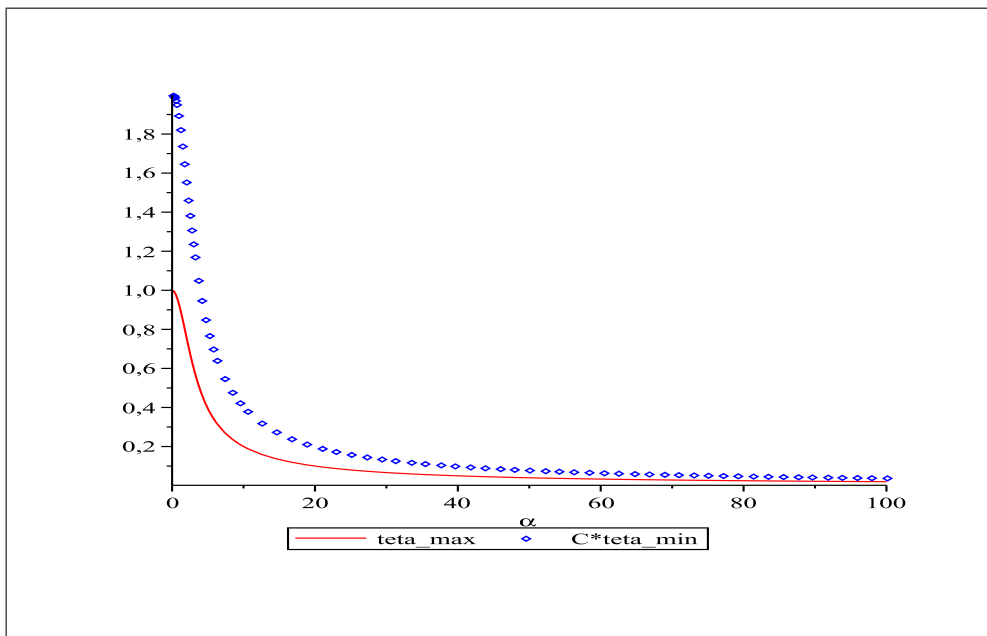


Figura B.16: Limitação de  $\theta_{min}^K$  por  $C\theta_{min}^K$  versus  $\alpha$ .

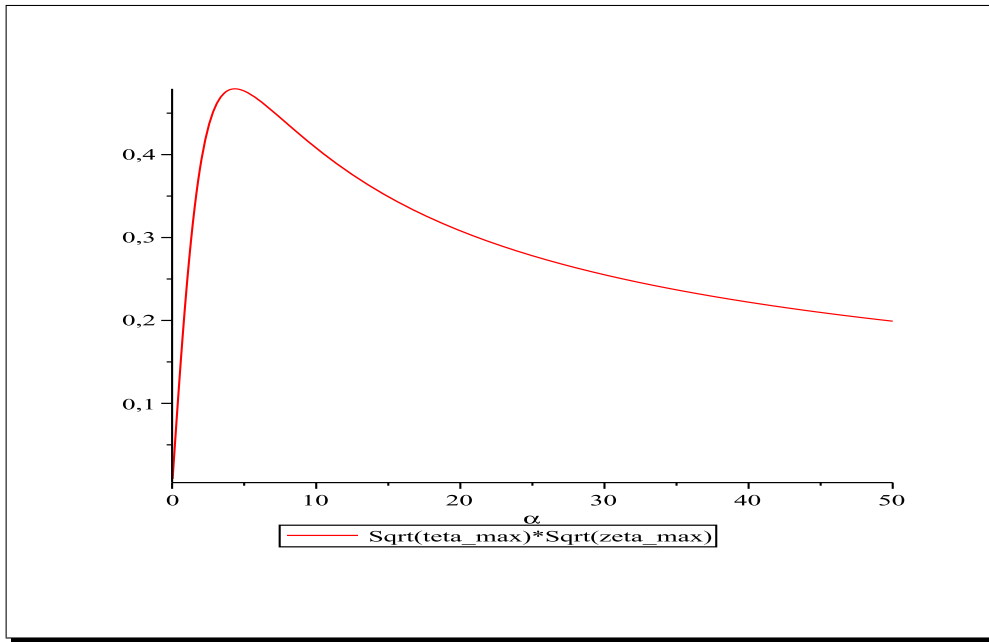


Figura B.17: Comportamento de  $\sqrt{\theta_{max}^K} \sqrt{\zeta_{max}^K}$  versus  $\alpha$ .

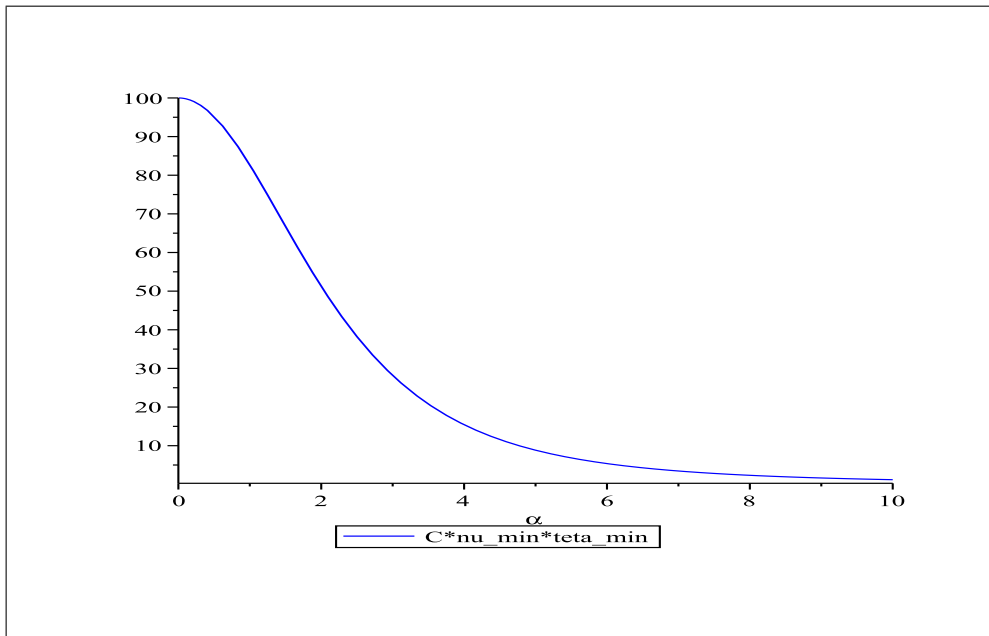


Figura B.18: Comportamento de  $C \mu_{min}^K \theta_{min}^K$  versus  $\alpha$ .



# Apêndice C

## Método de Elementos Finitos

### Estabilizado Não-Usual (USFEM)

Em seguida apresentamos as formulações do USFEM, escolhido neste trabalho como representante dos métodos estabilizados clássicas. Os pormenores deste método podem ser encontrados em (Franca e Farhat, 1995) e (Franca e Valentin, 2000).

#### C.1 Caso Estacionário

O método de elementos finitos não-usual (USFEM), aplicado ao problema de reação-difusão estacionário (3.6), consiste em encontrar  $u_L \in V_L(\Omega)$ , tal que

$$A(u_L, v_L) = F(v_L), \quad \forall v_L \in V_L, \quad (\text{C.1})$$

onde  $A(.,.)$  e  $F(.)$  são, respectivamente, formas bilineares e lineares definidas por

$$A(w, z) := a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K(\mathcal{L}w, \mathcal{L}_a z)_K, \quad (\text{C.2})$$

e

$$F(z) := (f, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K(f, \mathcal{L}_a v)_K, \quad (\text{C.3})$$

Nas definições acima,  $\mathcal{L}$  é o operador elíptico de reação-difusão definido em (3.1)<sub>1</sub>,  $a(.,.)_\Omega$  é a forma bilinear definida em (3.3), e  $\mathcal{L}^*$  é o operador adjunto

de  $\mathcal{L}$ . Para elementos lineares ou bilineares, o parâmetro estabilizante,  $\tau_K$ , é calculado usando as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\tau_K &= \frac{h_K^2}{\sigma h_K^2 \xi(Pe_K^1) + 6\varepsilon}, \\ Pe_K^1 &= \frac{6\varepsilon}{\sigma h_K^2}, \\ \xi(x) &= \max(1, x).\end{aligned}$$

Aqui, (veja por exemplo Harari e Hughes (1992)), o comprimento característico do elemento  $K$ ,  $h_K$ , é dado por:

$$\begin{aligned}h_K &= \frac{4\text{Área}(K)}{\sqrt{3 \sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c|^2}}, \quad \text{para triângulos,} \\ h_K &= h_x h_y \sqrt{\frac{2}{h_x^2 + h_y^2}}, \quad \text{para retângulos,}\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_c$  são as coordenadas dos vértices e do centróide dos triângulos, respectivamente,  $(h_x, h_y)$  são os comprimentos das arestas dos retângulos.

## C.2 Caso Transiente

A formulação temporal do método USFEM, baseada no método das linhas, aplicada ao modelo de reação-difusão transiente (4.1), consiste em encontrar  $u_L(t) \in V_L(\Omega)$ , para cada  $t \in (0, T)$ , tal que

$$\begin{cases} A_t(u_L(t), v_L) = F(v_L), \forall v_L \in V_L(\Omega), \\ u_L(0) = u_{0h}, \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

onde

$$A_t(w, z) = \left( \frac{\partial w}{\partial t}, z \right)_\Omega + a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w, \mathcal{L}^* z \right)_K. \quad (\text{C.5})$$

Como os elementos de  $V_L$  são lineares ou bilineares, (C.5) simplifica-se

para:

$$A_t(w, z) = \left( \frac{\partial w}{\partial t}, v \right)_\Omega + a(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma w, \sigma z \right)_K. \quad (\text{C.6})$$

Consideremos as definições

$$\tilde{A}(w, z) := \bar{a}(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma \tau_K \tilde{\sigma}(u, v)_K, \quad (\text{C.7})$$

onde a forma bilinear,  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ , e o parâmetro,  $\tilde{\sigma}$ , são dados em (2.31) e (2.32) respectivamente, e

$$M(w, z) := \frac{1}{\theta}(w, z)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma \tau_K [1 + \sigma \Delta t (\theta - 1)](w, z)_K, \quad \theta \in (0, 1]. \quad (\text{C.8})$$

Logo, a formulação do USFEM, empregando a família  $\theta$  de aproximações, resume-se em encontrar  $u_L^{n+1} = u_L((n+1)\Delta t) \in V_L(\Omega)$ , para  $n = 0, \dots, N-1$ , tal que

$$\begin{cases} \tilde{A}(u_L^{n+1}, v_L) = \frac{\theta - 1}{\theta} \tilde{A}(u_L^n, v_L) + M(u_L^n, v_L) + \Delta t F(v_L) & \forall v_L \in V_L(\Omega), \\ u_L(0) = u_{0h}, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

# Apêndice D

## Algoritmo Preditor-Multicorretor de Terceira Ordem

Apresentamos em seguida o algoritmo preditor-multicorretor de terceira ordem destinado à resolução do sistema de equações decorrente do MEPGDT considerando uma aproximação linear tanto no espaço quanto no tempo. Aqui,  $i_{max}$  representa o número máximo de iterações, e lembramos que  $N$  é o número de elementos da partição  $\mathcal{T}_{\Delta t}$ .

Dado  $N, i_{max}$

*(Inicialize)*

Dado  $\mathbf{u}_h^{(0)} = u_h(x, t_0^-) = u_{h0}$

Para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$

*(Fase Preditora)*

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_h^{(n)}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{u}_h^{(n)}$$

*(Fase Multicorretora)*

$$\text{Forme o vetor } -\mathbb{R}^{(0)} = -\mathbb{R}^{(0)} \left( \mathbf{u}^{(0)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$$

$$\text{Forme a matriz } \mathbb{T}^{(0)} = \mathbb{T}^{(0)} \left( \mathbf{u}^{(0)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$$

Resolva para o vetor  $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$

$$[\mathbb{T}^{(0)}] \{ \Delta \mathbf{u}^{(0)} \} = - \{ \mathbb{R}^{(0)} \}$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(0)} + \Delta \mathbf{u}^{(0)}$$

*(Fim da fase Multicorretora)*

Para  $i = 1, \dots, i_{max} - 1$

Forme o vetor  $-\tilde{\mathbb{R}}^{(i-1)} = -\tilde{\mathbb{R}}^{(i-1)} \left( \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$

Forme a matriz  $\tilde{\mathbb{T}}^{(i-1)} = \tilde{\mathbb{T}}^{(i-1)} \left( \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)}, \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$

Resolva para o vetor  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)}$

$$\left[ \tilde{\mathbb{T}}^{(i-1)} \right] \{ \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)} \} = - \{ \tilde{\mathbb{R}}^{(i-1)} \}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)}$$

Forme o vetor  $-\mathbb{R}^{(i)} = -\mathbb{R}^{(i)} \left( \mathbf{u}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$

Forme a matriz  $\mathbb{T}^{(i)} = \mathbb{T}^{(i)} \left( \mathbf{u}^{(i)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{u}_h^{(n)} \right)$

Resolva para o vetor  $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$

$$\left[ \mathbb{T}^{(i)} \right] \{ \Delta \mathbf{u}^{(i)} \} = - \{ \mathbb{R}^{(i)} \}$$

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}^{(i)}$$

*(Fim do loop Multicorretor)*

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{(i_{max})}$$

*(Fim do processo de evolução no tempo)*

Sair

# Apêndice E

## Parâmetros Decorrentes da Análise de Erro do MEPGDT

Apresentamos neste apêndice o estudo dos parâmetros introduzidos durante o processo de obtenção da estimativa de erro em (4.247). É importante ressaltar que estes parâmetros foram obtidos a partir da aproximação análítica proposta como solução do problema local em (4.45), considerando elementos bilineares.

Sejam

$$c = \frac{2}{\pi} - \frac{2\pi}{\pi^2 + \alpha^2}, \quad z = \sigma \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{\alpha^2} \right), \quad \alpha^2 = \frac{\sigma h^2}{2\varepsilon}. \quad (\text{E.1})$$

Então,

$$\delta_a^n = \Theta_{Q_n^e}^{min} = 1 - \frac{4c}{z\pi\Delta t} \left[ e^{-z(n+1)\Delta t} - e^{-zn\Delta t} + Z\Delta t \right], \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{Q_n^e}^{min} &= 1 - \frac{16c(\cosh(\alpha) - 1)}{Z\pi\Delta t\alpha \sinh(\alpha)} \left[ e^{-z(n+1)\Delta t} - e^{-zn\Delta t} + z\Delta t \right] \\ &\quad - \frac{8c^2}{z\pi^2\Delta t} \left[ e^{-2z(n+1)\Delta t} - e^{-2zn\Delta t} + 2z\Delta t \right], \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\sigma\gamma_{Q_n^e}^{max} = \frac{16c(\cosh(\alpha) - 1)}{\pi\Delta t\alpha \sinh(\alpha)} \left[ e^{-zn\Delta t} - e^{-z(n+1)\Delta t} \right] + \frac{16c^2}{\pi^2\Delta t} \left[ e^{-2zn\Delta t} - e^{-2z(n+1)\Delta t} \right], \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} \sigma^2\zeta_{Q_n^e}^{max} &= \frac{2c^2(1 - \cosh(\alpha))(\alpha + \sinh(\alpha))}{z\Delta t\alpha(\sinh(\alpha))^2} \left[ e^{-2z(n+1)\Delta t} - e^{-2zn\Delta t} - 2z\Delta t \right] \\ &+ \frac{8c^2(1 - \cosh(\alpha))(\alpha + \sinh(\alpha))}{z\Delta t\alpha(\sinh(\alpha))^2} \left[ e^{-zn\Delta t} - e^{-z(n+1)\Delta t} \right] \\ &- \frac{c^4}{z\Delta t} \left[ e^{-4z(n+1)\Delta t} - e^{-4zn\Delta t} - 4e^{-2z(n+1)\Delta t} + 4e^{-2zn\Delta t} - 4z\Delta t \right] \\ &- \frac{16c^2\pi^2}{z\Delta t(\alpha^2 + \pi^2)^2} \left[ e^{-2z(n+1)\Delta t} - e^{-2zn\Delta t} - 2z\Delta t - 4e^{-z(n+1)\Delta t} + 4e^{-zn\Delta t} \right] \\ &+ \frac{32c^3\pi}{z\Delta t(\alpha^2 + \pi^2)} \left[ e^{-3zn\Delta t} - e^{-3z(n+1)\Delta t} + 3e^{-z(n+1)\Delta t} - 3e^{-zn\Delta t} + 3z\Delta t \right] \\ &+ \frac{48c^3\pi}{z\Delta t(\alpha^2 + \pi^2)} \left[ e^{-2z(n+1)\Delta t} - e^{-2zn\Delta t} \right], \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2\beta_{Q_n^e}^{max} &= \frac{2zc^2(\cosh(\alpha) - 1)(\sinh(\alpha) + \alpha)}{\alpha\Delta t(\sinh(\alpha))^2} \left[ e^{-2zn\Delta t} - e^{-2z(n+1)\Delta t} \right] \\ &+ \frac{4zc^4}{\Delta t} \left[ e^{-4zn\Delta t} - e^{-4z(n+1)\Delta t} \right] + \frac{16\pi^2zc^2}{(\pi^2 + \alpha^2)^2\Delta t} \left[ e^{-2zn\Delta t} - e^{-2z(n+1)\Delta t} \right] \\ &+ \frac{64\pi zc^3}{3(\pi^2 + \alpha^2)\Delta t} \left[ e^{-3zn\Delta t} - e^{-3z(n+1)\Delta t} \right], \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

$$\sigma\rho_K^{min,n} = \frac{24c(2\sinh(\alpha) - \alpha(\cosh(\alpha) + 1))}{\alpha^2\pi \sinh(\alpha)} \left[ e^{-zn\Delta t} - 1 \right], \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{Q_n^e}^{max} &= 1 + \frac{8c}{z\pi\Delta t} \left[ e^{-zn\Delta t} - e^{-z(n+1)\Delta t} - z\Delta t \right] \\ &+ \frac{c^2(\cosh(\alpha) + 1)(\alpha(\pi^2 - \alpha^2) - \sinh(\alpha)(\pi^2 + \alpha^2))}{4\Delta t z\alpha(\sinh(\alpha))^2} \left[ e^{-2z(n+1)\Delta t} \right. \\ &\quad \left. - e^{-2zn\Delta t} + 4e^{-zn\Delta t} - 4e^{-z(n+1)\Delta t} - 2z\Delta t \right], \quad (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Em seguida estudaremos o comportamento dos parâmetros  $j_a^n$ ,  $j_b^n$ , e  $j_c^n$ , presentes na estimativa de erro em (4.247), rerepresentados abaixo por comodidade de

leitura.

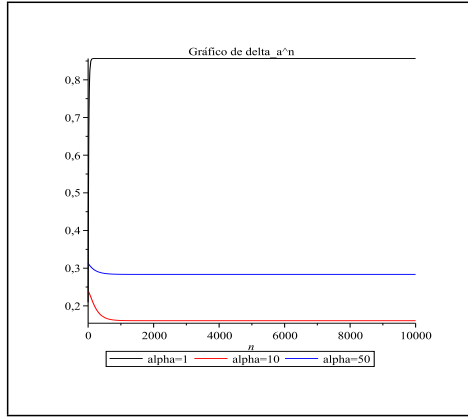
$$j_a^n = \left( \frac{1}{\delta_a^n} \right)^{1/2}, \quad (\text{E.9})$$

$$j_b^n = \left( \frac{1}{\delta_b^n} \right)^{1/2}, \quad (\text{E.10})$$

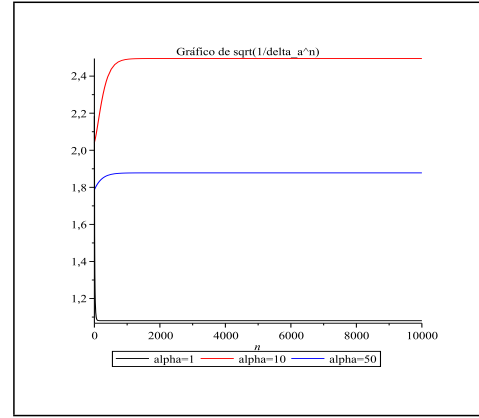
e

$$j_c^n := \left( \frac{\sigma^2 \Delta t}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \Delta t \beta_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^4 \Delta t \xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} + \left( \frac{\sigma^2 \varepsilon \alpha_{Q_n^e}^{max}}{\delta_b^n} \right)^{1/2}. \quad (\text{E.11})$$

Nas figuras abaixo, apresentamos os gráficos dos parâmetros  $\delta_a^n$ ,  $\delta_b^n$ ,  $j_a^n$ ,  $j_b^n$ , e  $j_c^n$ , para os diferentes regimes que como sabemos dependem essencialmente dos parâmetros  $\alpha$  e  $\Delta t$ . Aqui, por conveniência tomamos  $\sigma = 1$ .



(a) Perfis de  $\delta_a^n$  versus  $n$  para  $\Delta t = 10^{-2}$



(b) Perfis de  $(1/\delta_a^n)^{1/2}$  versus  $n$  para  $\Delta t = 10^{-2}$

Figura E.1: Comportamento dos parâmetros  $\delta_a^n$  e  $(1/\delta_a^n)^{1/2}$  versus  $n$  para distintos valores de  $\alpha$ .

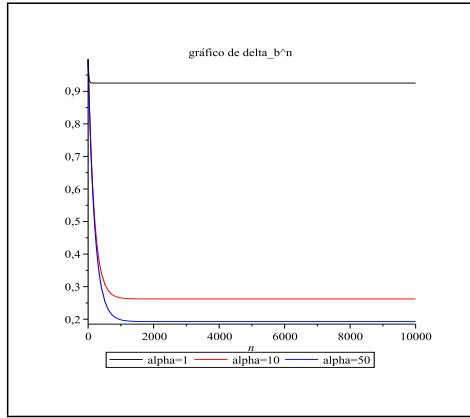
Por conveniência, estudamos o comportamento de  $j_c^n$  analisando os termos

$$\left( \frac{\beta_{Q_n^e}^{max}}{\sigma \delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \quad (\text{E.12})$$

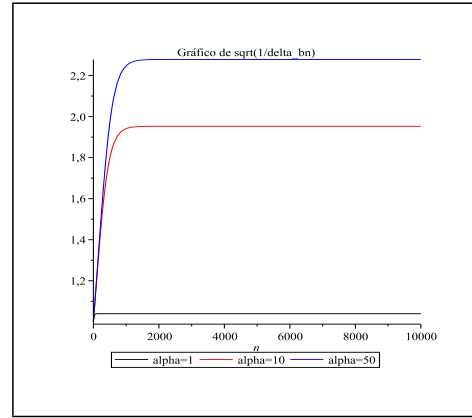
$$\left( \frac{\xi_{Q_n^e}^{max}}{\delta_a^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \quad (\text{E.13})$$

$$\left( \frac{\alpha_{Q_n^e}^{max}}{\Delta t \delta_b^n} \right)^{1/2} \leq C\alpha = Ch \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon}}, \quad (\text{E.14})$$





(a) Perfis de  $\delta_b^n$  versus  $n$  para  $\Delta t = 10^{-2}$



(b) Perfis de  $(1/\delta_b^n)^{1/2}$  versus  $n$  para  $\Delta t = 10^{-2}$

Figura E.2: Comportamento dos parâmetros  $\delta_b^n$  e  $(1/\delta_b^n)^{1/2}$  versus  $n$  para distintos valores de  $\alpha$ .

separadamente conforme as três figuras seguintes. Assim, mostramos na figura E.3 a curva  $(\beta_{Q_n}^{max}/(\sigma\delta_a^n))^{1/2}$  em traço pontilhado limitada por  $C\alpha$  em traço contínuo.

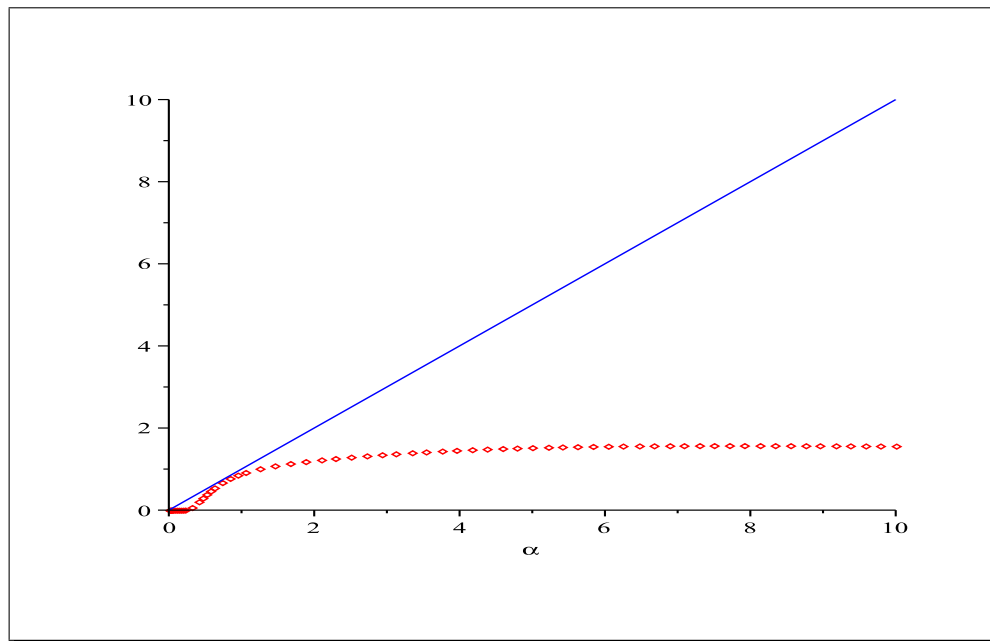


Figura E.3: Perfil de  $(\beta_{Q_n}^{max}/(\sigma\delta_a^n))^{1/2}$  versus  $\alpha$ , limitada por  $C\alpha$ .

A figura E.4 mostra a curva  $(\xi_{Q_n}^{max}/(\sigma\delta_a^n))^{1/2}$  em traço pontilhado limitada por  $C\alpha$  em traço contínuo.

Finalizamos o estudo do parâmetro  $j_c^n$  com apresentação na figura E.5 da curva  $(\alpha_{Q_n}^{max}/(\Delta t\delta_b^n))^{1/2}$  em traço pontilhado limitada por  $C\alpha$  em traço contínuo.

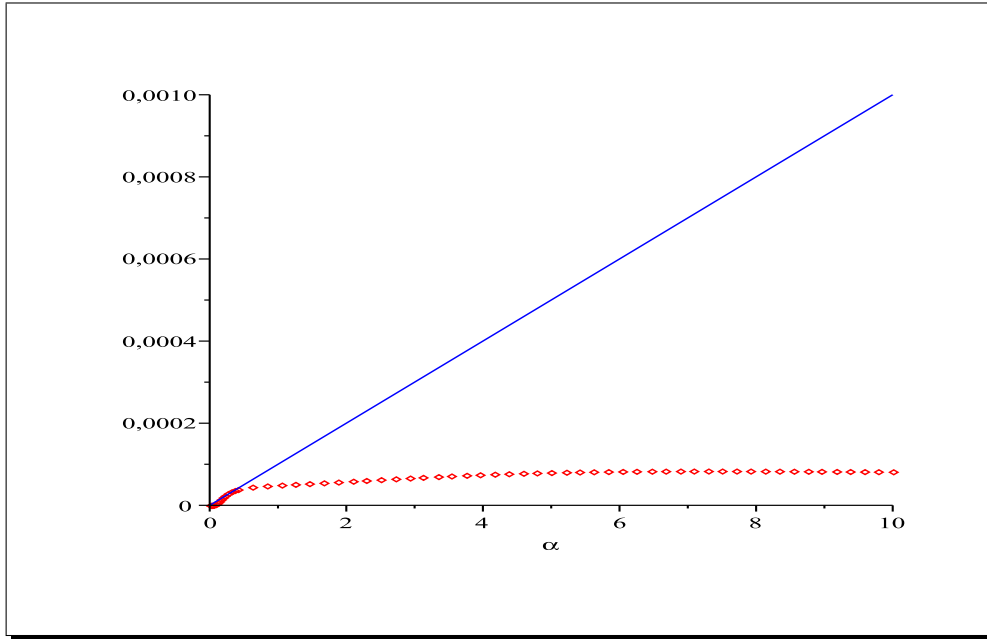


Figura E.4: Perfil de  $\left(\xi_{Q_n^e}^{max}/(\sigma\delta_a^n)\right)^{1/2}$  versus  $\alpha$ , limitada por  $C \alpha$ .

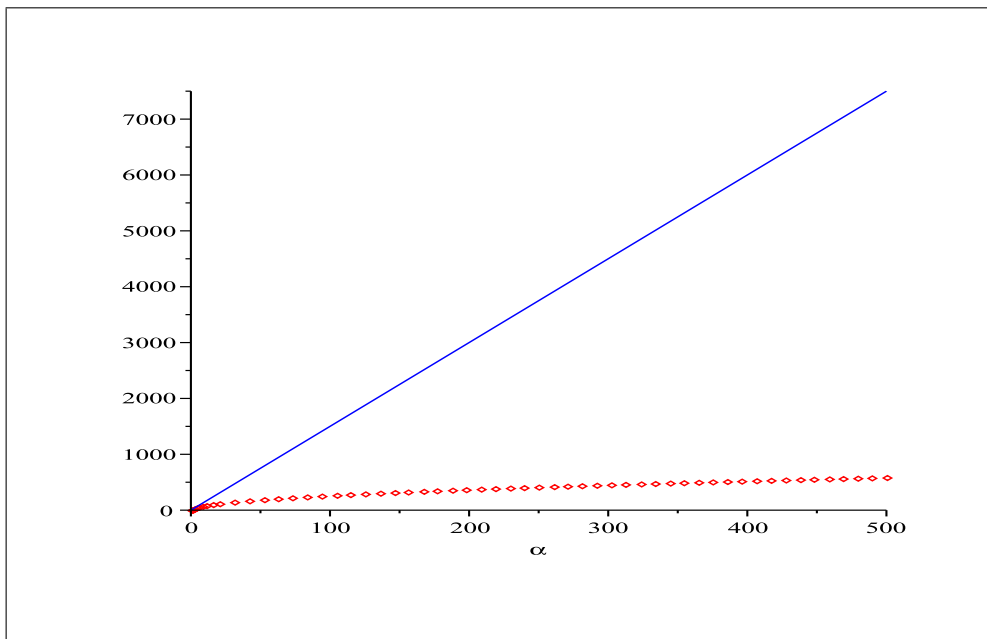


Figura E.5: Perfil de  $\left(\alpha_{Q_n^e}^{max}/(\sigma\Delta t\delta_b^n)\right)^{1/2}$  versus  $\alpha$ , limitada por  $C \alpha$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)