



**COPPE/UFRJ**

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO MÚLTIPLOS SISTEMAS PASSIVOS  
DE ABSORÇÃO

Diego Rodrigues Torres

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Carlos Magluta  
Ney Roitman

Rio de Janeiro  
Setembro de 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO MÚLTIPLOS SISTEMAS PASSIVOS  
DE ABSORÇÃO

Diego Rodrigues Torres

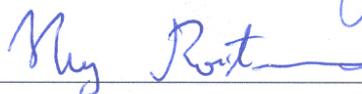
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA  
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:



---

Prof. Carlos Magluta, D.Sc.



---

Prof. Ney Roitman, D.Sc.



---

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



---

Prof. Eliane Maria Lopes Carvalho, D.Sc.



---

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2010

Torres, Diego Rodrigues

Redução de Vibrações utilizando Múltiplos Sistemas Passivos de Absorção / Diego Rodrigues Torres. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XI, 81 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Carlos Magluta

Ney Roitman

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 72-76.

1. Redução de Vibrações. 2. Controle Passivo. 3. Múltiplos Absorsores. 4. Análise Dinâmica. I. Magluta, Carlos, *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

## DEDICATÓRIA

*“Para meu avô, Abílio, e  
para a Cida (in memoriam).”*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pelo dom da vida.

Aos professores Carlos Magluta e Ney Roitman, pela orientação, estímulo e paciência que tiveram para comigo durante a confecção deste trabalho.

Aos meus pais, Ivan e Dúnia, pelo amor, afeto e valores que a mim foram transmitidos, moldando o que sou hoje.

Aos meus irmãos, Patty e Pedro, pela amizade, compreensão e carinho.

Aos meus demais familiares, em especial, à minha avó, Linda, e à minha bisavó, Tereza, pelo amparo e presença constante.

Aos amigos que fiz no Laboratório de Estruturas da COPPE ao longo desta jornada, pela amizade e companhia dispensadas, principalmente à Tamara, Flávia, Rosana, Hector e Nelson.

Ao George, por ter me fornecido suas rotinas baseadas no Método de Arnoldi, o que possibilitou o desenvolvimento do sistema utilizado neste trabalho.

Ao CNPq pela bolsa que me foi concedida durante boa parte do período em que este trabalho esteve em fase de elaboração.

Aos colegas da Petrobras.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO MÚLTIPLOS SISTEMAS PASSIVOS DE ABSORÇÃO

Diego Rodrigues Torres

Setembro/2010

Orientadores: Carlos Magluta

Ney Roitman

Programa: Engenharia Civil

Sistemas de controle vêm sendo nas últimas décadas cada vez mais considerados como medida prática para a redução dos níveis de vibrações em estruturas civis. Dentre os inúmeros dispositivos existentes, destacam-se os sistemas de controle passivo baseados na transferência da energia armazenada na estrutura para sistemas auxiliares, denominados absorsores.

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de metodologias visando o projeto de múltiplos sistemas absorsores instalados numa estrutura. Para tanto, foram implementadas ferramentas numéricas que permitem a análise do problema no domínio da frequência utilizando dois modelos distintos, um baseado numa formulação analítica do problema, em que a estrutura é modelada como um sistema mecânico de um grau de liberdade, e outro baseado numa formulação numérica na qual a estrutura é modelada em elementos finitos. Através da aplicação das metodologias desenvolvidas em duas estruturas distintas (uma viga e uma laje) são apresentados os resultados da utilização de múltiplos absorsores com massas menores distribuídas espacialmente ao longo da estrutura em comparação a adoção de apenas um sistema de absorção com a mesma massa total. Os resultados obtidos mostram que, de um modo geral, a adoção de múltiplos absorsores parece corresponder a uma solução bastante interessante tendo em vista os níveis de redução que podem ser alcançados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## VIBRATION CONTROL USING MULTIPLE TUNED MASS DAMPERS

Diego Rodrigues Torres

September/2010

Advisors: Carlos Magluta  
Ney Roitman

Department: Civil Engineering

Control systems in recent decades have been increasingly seen as practical way to reduce vibration levels in civil structures. Among the many existing devices, stands out passive control systems based on the transfer of energy stored in the structure by auxiliary systems, known as absorbers, commonly called tuned mass dampers.

The aim of this dissertation is to develop design's methodologies of multiple tuned mass dampers installed in a structure. Therefore, it were implemented numerical tools for analyzing the problem in the frequency domain using two different models, one based on an analytical formulation of the problem, in which the structure is modeled as a one degree of freedom system, and another based on a numerical formulation in which the structure is modeled by finite elements. Through the application of methodologies developed in two distinct structures (a beam and a slab) it's shown the results of adopting multiple absorbers with lower masses spatially distributed along the structure as compared to adoption of only one absorption system with the same total mass. The results show that, in general, the adoption of multiple tuned mass dampers appears to correspond to a solution quite interesting in view of the reduction levels that could be achieved.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO DO TRABALHO .....	1
1.2	OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO .....	5
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	7
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA .....</b>	<b>11</b>
2.1	FORMULAÇÃO ANALÍTICA.....	11
	- ANÁLISE DA ESTRUTURA ORIGINAL .....	12
	- ANÁLISE DO SISTEMA “ESTRUTURA + SISTEMAS DE ABSORÇÃO” .....	16
2.2	FORMULAÇÃO NUMÉRICA .....	22
<b>3</b>	<b>DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO .....</b>	<b>28</b>
3.1	ORGANIZAÇÃO DAS FERRAMENTAS NUMÉRICAS .....	28
3.2	MONTAGEM DAS MATRIZES .....	31
3.3	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR .....	33
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO .....</b>	<b>38</b>
4.1	APLICAÇÃO 1: ANÁLISE DE UMA VIGA BI-APOIADA .....	38
4.2	APLICAÇÃO 2: ANÁLISE DE UMA LAJE.....	61
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS .....</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>72</b>
	<b>ANEXO A. VERIFICAÇÃO DO FUNCIONAMENTO DO SISTEMA</b>	
	<b>DESENVOLVIDO .....</b>	<b>77</b>
	<b>ANEXO B. EXPRESSÕES DE JANGID.....</b>	<b>80</b>

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1 – Vista geral e detalhe da “Millenium Footbridge” localizada sobre o Rio Thâmisa/Londres [8] e [9]. .....	2
Fig. 1.2 – Detalhe com oito absorsores instalados no vão central da Ponte Rio – Niterói [42]. .....	10
Fig. 2.1 – Passos da metodologia utilizada para a formulação analítica de um sistema estrutural adicionado de um conjunto com três sistemas de absorção. ....	12
Fig. 2.2 – Metodologia aplicada para a formulação numérica de um sistema estrutural adicionado de sistemas de absorção. ....	22
Fig. 3.1 – Fluxograma representando a estrutura geral do sistema desenvolvido. ....	30
Fig. 3.2 – Relação entre amortecimento e frequência (Amortecimento de Rayleigh). ...	32
Fig. 4.1 – Vista geral da estrutura em estudo com três absorsores instalados [17]. ....	39
Fig. 4.2 – Forma modal do 1º modo de vibração da viga, normalizada em relação à massa modal. ....	40
Fig. 4.3 – FRF da estrutura original e da estrutura com o absorsor S1 instalado. ....	43
Fig. 4.4 – FRF do sistema estrutura + absorsor S1 variando-se $\alpha$ (a) e $\xi_a$ (b). ....	44
Fig. 4.5 – Resposta ótima da FRF da estrutura utilizando Den Hartog. ....	46
Fig. 4.6 – FRF da estrutura adicionado de 2 ou 3 absorsores derivados do absorsor preliminar. ....	50
Fig. 4.7 – FRF do sistema estrutura + S3 variando-se $\beta$ (a) $\alpha$ (b) e $\xi_a$ (c). ....	51
Fig. 4.8 – Resposta ótima da FRF da estrutura utilizando Jangid e <i>MinMax</i> . ....	55
Fig. 4.9 – Distribuição na frequência dos absorsores. ....	56

Fig. 4.10 – FRF da estrutura adicionada de 2, 3 ou 5 absorsores calibrados pelo procedimento <i>MinMax</i> para as situações A e B. ....	58
Fig. 4.11 – Distribuição na frequência dos absorsores para três situações distintas. ....	59
Fig. 4.12 – Comparação das reduções (a) e taxas de amortecimento (b) ótimas para múltiplos absorsores instalados no ventre do modo e distribuídos ao longo da estrutura. ....	60
Fig. 4.13 – Vista geral da estrutura de ensaio da placa de alumínio do LADEPIS. ....	62
Fig. 4.14 – Modos de vibração da placa (a) 1º modo; (b) 2º modo; (c) 3º modo. ....	63
Fig. 4.15 – FRF da placa comparada a FRF normalizada da viga.....	63
Fig. 4.16 – Arranjo da distribuição dos absorsores na placa. ....	64
Fig. 4.17 – FRF's da placa 2 m x 1.5 m para T1 (a) e T2 (b), confrontando modelo analítico x formulação numérica. ....	65
Fig. 4.18 – FRF da placa variando-se a relação largura/comprimento (b/L).....	66
Fig. 4.19 – FRF da placa 2 m x 1.8 m para T1 e T2, $\mu \cong 0.025$ .....	67
Fig. 4.20 – FRF da placa 2 m x 1.8 m para T1 e T2, $\mu \cong 0.082$ .....	68
Fig. A.1 – Placa submetida à compressão no plano .....	77
Fig. A.2 – Correlação teórica x numérica do efeito de carregamento axial nas frequências naturais da placa LADEPIS .....	79

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Comparação entre as frequências naturais teóricas e as obtidas no modelo numérico.....	40
Tabela 4.2 – Quadro comparativo dos parâmetros modais da estrutura controlada.....	42
Tabela 4.3 – Parâmetros modais, correlação formulação analítica x numérica para a estrutura com o sistema S2.....	49
Tabela B.1 – Valores dos coeficientes nas expressões explícitas de Jangid para os parâmetros ótimos dos absorsores .....	81

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação do Trabalho

O projeto estrutural deve atender ao Estado Limite Último (ELU), que corresponde à verificação da estrutura quanto a sua integridade quando submetida a carregamentos extremos de projeto, e ao Estado Limite de Serviço (ELS), em que a estrutura é verificada quanto a sua funcionalidade de acordo com o fim para qual a estrutura foi projetada. Um edifício residencial, por exemplo, deve atender a exigências quanto ao conforto humano devido a vibrações excessivas ao passo que um laboratório precisa atender a exigências quanto a deslocamentos máximos para não comprometer o funcionamento dos equipamentos [1].

Em geral, o Estado Limite Último (ELU) rege o dimensionamento estrutural. Entretanto, com os avanços recentes quanto à resistência e ductibilidade dos materiais, a criação de novos materiais compósitos e a contínua evolução dos recursos computacionais, possibilitando a adoção de premissas de projeto menos conservadoras e, por conseguinte, possibilitando novas concepções arquitetônicas, têm exigindo o projeto de estruturas civis cada vez mais arrojadas. Com esta tendência de estruturas cada vez mais esbeltas, ocorre naturalmente a redução dos valores das frequências naturais, conduzindo a valores próximos das frequências de carregamentos ambientais (vento, sismos, ondas e marés), de atividades humanas, de máquinas e de passagem de tráfego, podendo acarretar em elevadas amplitudes de resposta da estrutura.

Em decorrência disso, as elevadas respostas estruturais provenientes de solicitações estruturais corriqueiras tais como, por exemplo, as derivadas de atividades humanas (andar, correr, pular, dançar, etc.) tem causado transtornos aos usuários, o que vem despertando o interesse de muitos autores [2,3,4,5]. Em 1991, o CEB [6] publicou um boletim com uma série de recomendações em que são definidas medidas práticas de projeto considerando limites máximos de deslocamento e de aceleração em função do fim ao qual a estrutura será projetada.

Um caso que teve grande repercussão, o qual ilustra este problema, foi o ocorrido na inauguração da “Millenium Footbridge”, Inglaterra, mostrada nas Fig. 1.1 (a-b). Esta estrutura consiste numa passarela metálica suspensa e extremamente flexível. Ao ser

inaugurada, na virada do milênio, esta começou a apresentar oscilações laterais de aproximadamente 20 cm ao longo dos seus 345 m de comprimento, precisando ser interditada. Estudos realizados concluíram que a ação do caminhar das pessoas produzia uma carga lateral que se sincronizava com a estrutura nessa direção [7], conduzindo assim, a elevados níveis de vibrações.



a) Vista geral



b) Detalhe da passarela em uso

Fig. 1.1 – Vista geral e detalhe da “Millenium Footbridge” localizada sobre o Rio Thâmisa/Londres [8] e [9].

No Brasil, podem-se citar uma série de estruturas que apresentaram problemas de vibração em estado de serviço, dentre as quais o Estádio do Maracanã, devido às ações das grandes torcidas pulando em sincronismo [10], e a Ponte Rio - Niterói, devido às ações decorrentes do desprendimento de vórtices sobre os tabuleiros do vão central provocadas por ventos da ordem de 60 km/h [11].

Estes exemplos ilustram como o Estado Limite de Serviço (ELS) tem-se tornado cada vez mais condicionante para o dimensionamento estrutural. Desta forma, se torna cada vez mais necessário que engenheiros considerem em seus projetos a análise do

comportamento dinâmico estrutural tal como o estudo de redução ou controle de vibrações.

Até meados dos anos 60, o problema de vibrações em estruturas era visto pelos engenheiros como um problema a ser solucionado mediante enrijecimento estrutural, como por exemplo, inclusão de pilares intermediários ou reforço estrutural das vigas. Tal medida tem por objetivo aumentar as frequências naturais da estrutura distanciando as mesmas da faixa espectral das excitações. O estudo de LENZEN [12] reflete bem o pensamento dos engenheiros da época em relação à utilização de sistema de absorção para o controle de vibrações. Ainda que este estudo tenha representado um marco quanto ao início das pesquisas relacionadas a controle de vibrações em estruturas civis, o mesmo cita a adoção de absorsores sem mais detalhes e recomenda como medida corretiva o enrijecimento estrutural.

Os sistemas de controle surgiram então nesta época como uma alternativa ao enrijecimento estrutural para estruturas já existentes e que apresentavam problemas de vibrações não previstas em projeto onde a intervenção por meio de enrijecimento ou reforço tornava-se inviável.

Segundo BATTISTA [13], podem-se dividir os sistemas de controle em dois grandes grupos:

- Sistemas Passivos:

- Mecanismos de Amortecimento Adicional;
- Isoladores de Vibração;
- Absorsores de Vibração.

- Sistemas Ativos:

- Sistemas de Controle Ativo;
- Sistemas de Controle Semi-ativo;
- Sistemas de Controle Passivo-Ativo (Sistemas Híbridos).

Os sistemas passivos se distinguem dos sistemas ativos pelo fato de não necessitar de fontes externas de energia de controle, como por exemplo, atuadores. Devido à inexistência de dispositivos eletrônicos, sua manutenção é muito mais simples que a de sistemas ativos, tornando sua confiabilidade extremamente alta desde que calibrado corretamente. Além disso, o seu custo de instalação é mais baixo. Em contrapartida suas principais limitações referem-se à baixa eficiência para cargas transientes haja vista sua resposta não ser imediata. Outra limitação está associada à faixa de frequência em que atua, assim como sua sensibilidade em relação a incertezas quanto ao comportamento dinâmico do sistema estrutural. Estas características levam à necessidade do conhecimento do espectro das cargas atuantes, da identificação dos parâmetros modais da estrutura e da calibração adequada dos absorsores.

Uma forma de reduzir estas deficiências é através da adoção de múltiplos sistemas de absorção, de modo a cobrir uma banda maior de frequências além de minimizar os efeitos de calibrações mal-realizadas. Além disso, como grande parte das ações ambientais e das provocadas pelas atividades humanas pode ser representada por processos estocásticos em que a parcela transiente é menos representativa que a parcela permanente, sistemas passivos se apresentam geralmente como a opção mais viável em relação à adoção de sistemas ativos. Por isso, nos sistemas passivos, a análise em frequência torna-se extremamente interessante tanto sob o ponto de vista numérico, quanto para a interpretação física do problema.

Os sistemas com múltiplos absorsores de vibração têm sido amplamente pesquisados para vários tipos de carregamento assim como vários modelos têm sido propostos considerando diferentes configurações (tais como absorsores interligados e não-interligados) e diferentes tipos de amortecimento (viscoso, histerético, de Coulomb, etc.). A maioria dos trabalhos realizados sobre este tema considera a estrutura representada por um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL (um grau de liberdade). Esse tipo de modelagem tem como base a constatação obtida por alguns autores [14,15] de que para a situação em que as frequências naturais da estrutura estão bem espaçadas a modelagem da estrutura representada por 1 GL é suficiente para representar o comportamento do sistema estrutural adicionado de sistemas absorsores.

Entretanto, à medida que o grau de complexidade da estrutura em interesse aumenta, os modos vão se tornando mais próximos [16]. Como consequência esta

premissa passa a se tornar falsa, fazendo-se necessário atacar o problema de forma numérica considerando a estrutura como um todo, exigindo-se maiores recursos computacionais, uma vez que se trata da solução de um problema de autovalor complexo com matrizes com dimensão duas vezes maior do que a dimensão da modelagem convencional. Com o crescente avanço da capacidade de processamento e de memória dos computadores portáteis esta metodologia tem se tornado viável. MAGLUTA [17], para contornar a limitação de memória frente à época, recorreu à técnica de sub-estruturação, em que são definidos nós internos, referentes à malha da estrutura e nós externos onde estão os apoios e os nós da estrutura que se conectam aos absorsores. Assim sendo, mediante uma transformação de coordenadas os nós internos são sintetizados permitindo que a dimensão total do problema seja bem reduzida, facilitando assim o cálculo das frequências naturais e modos de vibração.

Apesar de esta técnica apresentar boas respostas para os deslocamentos e acelerações, ela possui limitações quanto à avaliação dos esforços solicitantes. Na hipótese da existência de cargas axiais atuando simultaneamente aos absorsores, por exemplo, ambos como agentes de controle passivo, este método torna-se deficiente. Um caso prático seria a implementação de absorsores em risers flexíveis ou em estruturas protendidas. Assim sendo, torna-se necessário o desenvolvimento de uma ferramenta numérica para a estimativa do problema de autovalor mais eficiente.

Por outro lado, o projeto de sistemas de absorção através de modelagens da estrutura por elementos finitos, pode se tornar proibitivo e até mesmo desnecessário, como é o caso em que a obtenção da calibração de projeto dos sistemas absorsores é realizada através de uma busca numérica dos parâmetros ótimos destes dispositivos para a situação em que as frequências associadas aos modos de vibração da estrutura estão bem espaçadas. Neste caso, é mais interessante uma abordagem por meio de modelos da estrutura representada por um sistema de 1 GL.

## **1.2 Objetivo e Descrição do Trabalho**

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de metodologias visando o projeto de múltiplos sistemas de absorção. Para tanto, foram desenvolvidas duas metodologias para análise no domínio da frequência de sistemas estruturais adicionados de sistemas de absorção. A primeira metodologia desenvolvida, a qual parte da hipótese

de que os modos de vibração estão bem espaçados em frequência, é baseada numa formulação analítica do problema na qual a estrutura é condensada em um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL, o qual é associado a múltiplos absorsores que podem estar localizados em quaisquer pontos da estrutura. A segunda metodologia corresponde a uma formulação numérica considerando a estrutura modelada por elementos finitos adicionada de múltiplos sistemas de absorção.

A eficiência das metodologias desenvolvidas é avaliada através das suas aplicações em duas estruturas: uma viga bi-apoiada e uma laje simplesmente apoiada em todos os bordos, nas quais é adicionado um número distinto de sistemas absorsores.

Desta maneira, a organização geral do presente trabalho pode ser resumida da seguinte maneira:

- Capítulo 1 – Trata da introdução ao presente trabalho por meio de uma descrição sumária a respeito das pesquisas sobre os absorsores até os dias atuais através da apresentação do “estado da arte” deste tema;
- Capítulo 2 – São apresentados os conceitos fundamentais para a formulação do problema caracterizado por agregar múltiplos absorsores sintonizados em um modo de vibração específico localizados em pontos distintos da estrutura;
- Capítulo 3 – São descritas de forma bem genérica as ferramentas numéricas implementadas em linguagem Fortran dando ênfase para a resolução do problema de autovalor com o conjunto de rotinas implementadas por AINSWORTH JR. [18], baseadas no Método de Arnoldi com Reinício Implícito visando a solução do problema de autovalor complexo de uma maneira mais eficiente;
- Capítulo 4 – São apresentadas as aplicações das metodologias desenvolvidas para o projeto de múltiplos sistemas de absorção utilizando duas estruturas distintas: uma viga bi-apoiada e uma laje apoiada nos quatro bordos, como já mencionado anteriormente;

- Capítulo 5 – São apresentadas algumas conclusões a respeito do presente trabalho desenvolvido, bem como são elencadas uma série de sugestões de trabalhos futuros de modo a dar continuidade nesta linha de pesquisa.

### 1.3 Revisão Bibliográfica

Na literatura internacional, os absorsores passivos de vibrações são comumente chamados de *Tuned Mass Dampers (TMD)* e consistem em um ou mais sistemas massa-mola-amortecedor agregados ao sistema principal cujo princípio de funcionamento se baseia na transferência de energia do sistema principal para o sistema secundário (no caso, os absorsores) seguida da dissipação desta energia através de seu amortecedor [1].

O marco para o início do estudo destes dispositivos para redução e controle de vibrações data de 1909, quando FRAHM [19] aplicou este conceito básico de transferência de energia para reduzir o movimento de rotação em torno do eixo longitudinal de navios. O modelo empregado no caso era muito simples, consistindo em um sistema massa-mola agregado a um sistema principal também representado por uma massa e uma mola.

Tal dispositivo no caso apresentava uma série de limitações sendo aplicável somente para sistemas mecânicos submetidos a cargas harmônicas cuja frequência era conhecida a priori. Além disso, eventuais desvios de calibração do absorsores tornavam-no ineficaz podendo até mesmo amplificar as respostas [20].

ORMONDROYD e DEN HARTOG [21] concluíram posteriormente que adicionando um amortecedor ao absorsores de Frahm, o mesmo se tornava mais eficiente e mais robusto quanto a eventuais desvios na frequência de excitação. DEN HARTOG [22] deu seqüência ao estudo obtendo expressões ótimas para os parâmetros modais dos absorsores considerando amortecimento viscoso para estes dispositivos e desconsiderando o amortecimento do sistema principal. Mais tarde, BISHOP e WELBOURN [23] incluíram amortecimento à massa principal em seus estudos e SNOWDOWN [24] estendeu o modelo utilizado por Den Hartog para outros tipos de amortecimento.

WARBURTON [25], THOMPSON [26], TSAI e LIN [27] e MAGLUTA [17] deram continuidade à pesquisa por parâmetros ótimos para os absorsores para diferentes

tipos de solicitações. TSAI e LIN [27], por meio de ajustes de curvas derivadas de buscas numéricas visando à minimização do FAD (“Fator de Amplificação Dinâmica”), obtiveram fórmulas para parâmetros ótimos do absorvedor, concluindo que, quanto maior o amortecimento do sistema principal, menor a eficiência dos absorvedores. Constataram também que a existência de amortecimento no sistema principal influencia mais na calibração da frequência do que na calibração do amortecimento ótimo para o absorvedor e que as respostas do sistema com absorvedor agregado são pouco influenciadas pelo amortecimento do sistema principal.

MAGLUTA [17] investigou as vantagens e limitações de sistemas passivos, realizando estudos paramétricos e buscas por parâmetros ótimos para absorvedores agregados em estruturas, por meio do algoritmo de programação linear multi-objetivos “Goal Programming”. Como resultados deste estudo foram apontados valores práticos para as razões de massa e de amortecimento a serem utilizados no projeto de grandes estruturas.

Nos anos 90, a busca por dispositivos de controle passivo menos sensíveis a desvios de calibração, ou seja, maior robustez, levaram diversos autores à pesquisa de modelos considerando mais de um absorvedor agregado à estrutura. Destacam-se neste período os trabalhos das refs. [15] e [28,29,30,31,32,33,34].

XU e IGUSA [28] constataram que se utilizando múltiplos absorvedores com frequências naturais distribuídas uniformemente em torno da frequência natural da estrutura, o sistema de controle torna-se mais eficiente e mais robusto que um único absorvedor com a mesma massa total para sistemas excitados por bandas de frequências largas.

Em IGUSA e XU [31] é apresentada uma formulação analítica para a análise de sistemas com múltiplos absorvedores e para a otimização dos absorvedores através de cálculo variacional para sistemas excitados por bandas largas em frequência. Estes autores concluem que a largura ótima para banda de frequências é proporcional à raiz quadrada da massa total dos absorvedores.

KAREEM e KLINE [32] apontam como as principais vantagens da adoção de múltiplos absorvedores, além da maior eficiência e robustez, a maior portabilidade dos mesmos devido à utilização de menores massas, tornando-os atrativos tanto para novas

instalações quanto para construções de uso temporário e para estruturas que sofreram o processo de “retrofit” (modificação de sua funcionalidade).

ABE e IGUSA [15], por meio da teoria da perturbação, investigaram a influência da proximidade entre as frequências naturais da estrutura no comportamento da estrutura adicionada de múltiplos absorsores igualmente espaçados em frequência. Eles constataram que, para estruturas cujas frequências naturais estão espaçadas, o projeto de absorsores de modo a reduzir as amplitudes de resposta de determinado modo não depende das demais frequências, podendo a estrutura ser representada como um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL.

JANGID [34], através de ajustes de curvas oriundas de buscas numéricas, generalizou o estudo desenvolvido por Tsai e Lin para múltiplos absorsores, obtendo expressões para parâmetros ótimos dos absorsores para sistemas não-amortecidos submetidos a excitações de base, supondo as frequências dos absorsores distribuídas uniformemente em torno da frequência média de calibração.

GU *et al.* [35] utilizaram múltiplos absorsores para reduzir as amplitudes de resposta do 1º modo de vibração na direção vertical da ponte estaiada Yangpu, em Xangai - China, considerando a influência da ação do vento e das cargas rodoviárias na frequência natural da estrutura. Neste estudo foram obtidos parâmetros ótimos para sete conjuntos diferentes de absorsores alocados no vão central, corroborando os estudos anteriores de que os principais parâmetros de influência no projeto dos absorsores são a razão de frequência e a largura de banda, sendo a taxa de amortecimento dos absorsores uma variável secundária.

Mais recentemente, novas pesquisas têm apontado que a distribuição não-uniforme em frequência dos absorsores, tal como a adoção de valores distintos para as taxas de amortecimento dos absorsores conduz a maiores reduções nas respostas da estrutura [36,37]. Além disso, estudos têm apontado a adoção de absorsores interligados como uma boa alternativa para a redução de deslocamentos no topo de edifícios, mobilizando menos espaço para a colocação e atuação dos absorsores. Tal solução conduz a valores diferentes dos parâmetros ótimos obtidos para absorsores comuns, ou seja, não-interligados [38,39].

No que se refere à aplicação prática da adoção de múltiplos absorvedores para minimizar a redução de vibrações em estruturas, pode-se citar as mesmas estruturas já mencionadas anteriormente, “Millenium Footbridge” e Ponte Rio - Niterói. Na “Millennium Footbridge” a solução adotada consistiu na adoção de 37 amortecedores viscosos atuando como mecanismos de amortecimento adicional, 4 pares de absorvedores para controlar os deslocamentos horizontais na direção transversal à passarela e complementarmente 26 pares de absorvedores instalados sob o tabuleiro para reduzir os deslocamentos verticais [40]. Na Ponte Rio - Niterói, a solução adotada para reduzir as oscilações verticais da ordem de 50 cm para cima e para baixo provocadas pela amplificação do 1º modo de vibração natural pela ação de despreendimento de vórtices, correspondeu à adoção de um conjunto de 32 sistemas absorvedores, designados como MADS (“Múltiplos Absorvedores Dinâmicos Sincronizados”), projetados pelo Prof. Ronaldo C. Battista da COPPE/UFRJ e instalados no interior dos caixões das vigas metálicas do vão central da ponte [41]. A Fig. 1.2 ilustra a instalação destes dispositivos na estrutura.



Fig. 1.2 – Detalhe com oito absorvedores instalados no vão central da Ponte Rio – Niterói [42].

## **2 FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA**

Neste capítulo serão apresentados os modelos teóricos utilizados no presente trabalho para a investigação do comportamento dinâmico de uma estrutura acoplada a um ou mais absorvedores. É dado enfoque para a análise do sistema “estrutura + sistemas de absorção” no domínio da frequência utilizando duas formulações distintas: uma formulação analítica baseada num modelo da estrutura condensada em um sistema de 1 GL e outra formulação numérica baseada num modelo discreto da estrutura. Adicionalmente também são apresentadas as estratégias adotadas para a obtenção da FRF (Função de Resposta em Frequência) em cada um desses casos.

### **2.1 Formulação analítica**

A formulação do problema de maneira analítica utilizada neste trabalho implica na utilização de um modelo que considera a estrutura como um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL, chamado de sistema principal. Agregado a este sistema principal tem-se os sistemas absorvedores. A Fig. 2.1 ilustra esquematicamente a representação do modelo teórico da estrutura mais três absorvedores através de um modelo analítico deste mesmo sistema correspondente a um sistema principal de 1 GL, o qual representa um dos modos da estrutura principal, acoplado a 3 GL não-interligados, os quais representam os absorvedores.

Modelos analíticos similares a este representando uma estrutura adicionada de múltiplos absorvedores já foram amplamente estudados por diversos autores [28,29,34]. Entretanto, o que se propõe neste trabalho é que este modelo seja extrapolado para o caso em que os absorvedores estejam situados em qualquer posição da estrutura, visto ser esta uma situação mais realista. Mas para que isto seja possível, é necessário primeiro apresentar alguns conceitos básicos a respeito da análise modal de estruturas, onde a aplicação da transformação do espaço real para o espaço modal e vice-versa é detalhada.

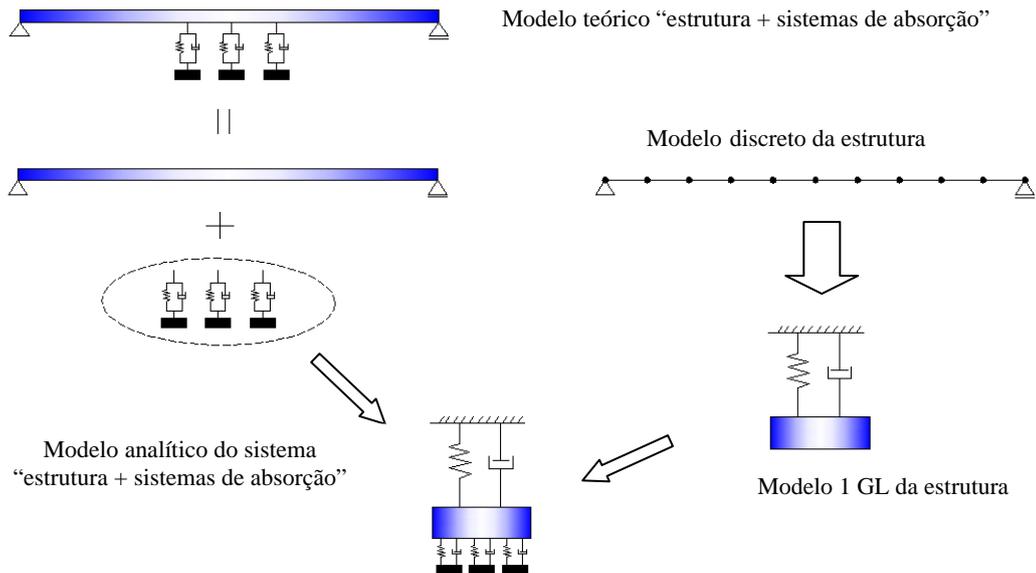


Fig. 2.1 – Passos da metodologia utilizada para a formulação analítica de um sistema estrutural adicionado de um conjunto com três sistemas de absorção.

## - Análise da estrutura original

Os corpos elásticos podem de um modo geral, através da discretização do meio contínuo, ser representados por um sistema mecânico formado por  $n$  graus de liberdade (daí a designação  $n$  GL). A equação que expressa o equilíbrio dinâmico de um sistema desta natureza é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

onde:

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  – Matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, de dimensões  $n \times n$ ;

$\mathbf{X}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$ ,  $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{F}(t)$  – Vetores de deslocamento, velocidade, aceleração e de força, respectivamente, de dimensões  $n \times 1$ .

Tratando-se de um sistema estrutural, as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  podem ser obtidas por meio do método dos elementos finitos. Da mesma maneira, a montagem da matriz  $\mathbf{C}$  se dá pela hipótese geralmente válida para as estruturas usuais de que  $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$ , ou seja, a matriz de amortecimento é proporcional às matrizes de rigidez e de massa. A

essa hipótese dá-se o nome de Amortecimento de Rayleigh. Maiores detalhes a respeito da montagem destas matrizes podem ser encontradas em [43] e no Capítulo 3 deste trabalho.

Adotando-se as hipóteses de que a estrutura esteja sob vibração livre, ou seja, o vetor de forças  $\mathbf{F}$  seja nulo e que o deslocamento em um ponto  $i$  possa ser escrito como o produto de uma parcela referente à variação da sua posição no tempo  $q(t)$ , por outra parcela com a informação do espaço dada pelo  $i$ -ésimo termo de um vetor qualquer  $\phi_i$ , o vetor de deslocamentos da estrutura pode ser escrito como  $\mathbf{X} = \phi.q(t)$ .

Aplicando a hipótese de Rayleigh e assumindo que a resposta da estrutura no tempo pode ser descrita por um comportamento harmônico, isto é, que  $q(t) = q_0 e^{i\omega t}$ , é possível demonstrar que o problema de vibrações livres amortecido derivado da eq. (2.1) pode ser simplificado para um problema de vibrações não-amortecidas, que é descrito pelo seguinte problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{K}\phi = \omega^2 \mathbf{M}\phi \quad (2.2)$$

onde, o auto-vetor  $\phi$  representa um vetor real de dimensão  $n \times 1$  contendo as coordenadas modais dos graus de liberdade e a raiz quadrada do autovalor  $\omega^2$  a frequência natural angular referente a esta forma modal, sendo possível obter teoricamente tantos pares destas variáveis quantos forem os graus de liberdade deste sistema.

A resposta da eq. (2.1) agora pode ser escrita como a superposição de  $m \leq n$  modos de vibração da estrutura, dada por:

$$\mathbf{X} = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) + \dots + \phi_m q_m(t) \quad (2.3)$$

A eq. (2.3) corresponde ao vetor de deslocamentos  $\mathbf{X}$  escrito numa base modal  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_m\}$ . Isto significa que o sistema dinâmico, que pertence a um espaço real  $\mathfrak{R}^n$ , pode ser projetado em um subespaço do espaço modal também  $\mathfrak{R}^n$ . Como o número de graus de liberdade de um modelo em elementos finitos é bem maior que o número de modos considerados, que correspondem geralmente aos modos associados às frequências mais baixas, é possível concluir que  $m \ll n$ . No caso, a solução do problema de autovalor da eq. (2.2) efetuada por meio de rotinas convencionais na

análise estrutural, como, por exemplo, as baseadas na técnica de Iteração por Subespaços [44], fornece essa base modal  $\Phi$ . Isso será abordado mais com mais ênfase no Capítulo 3.

Além disso, é possível demonstrar que  $\Phi$  forma uma base ortogonal em relação às matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ . Por consequência, tem-se que:

$$\begin{aligned}\phi_r^T \mathbf{M} \phi_r &= m_r \\ \phi_r^T \mathbf{C} \phi_r &= c_r \\ \phi_r^T \mathbf{K} \phi_r &= k_r\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde,  $m_r$ ,  $c_r$  e  $k_r$  correspondem a massa, amortecimento e rigidez modal, respectivamente, do modo  $r$  e que o produto dos termos cruzados  $\phi_r^T \phi_l$  é igual a zero, onde  $r \neq l$ . Pré-multiplicando a eq. (2.1) por  $\phi_r^T$  e utilizando (2.4), tem-se assim a  $r$ -ésima equação de um sistema de  $m$  equações agora desacoplado:

$$m_r \ddot{q}_r + c_r \dot{q}_r + k_r q_r = f_r\tag{2.5}$$

A eq. (2.5) exprime a condensação da estrutura em um sistema massa-mola-amortecedor de 1 GL, cuja resposta é a coordenada generalizada  $q_r$  referente ao  $r$ -ésimo modo de vibração dessa estrutura. Da mesma maneira, a parcela da direita da expressão representa a projeção da força no espaço real para o espaço modal dada por  $f_r = \phi_r^T \mathbf{F}(t)$ . A condensação da estrutura num sistema mecânico de 1 GL corresponde ao primeiro passo para a obtenção do modelo analítico de uma estrutura adicionada de um sistema de absorção.

É importante ressaltar que, como as magnitudes dos auto-vetores  $\phi$  são arbitrárias, é usual a orto-normalização da base modal em relação à matriz de massa. Nesse caso a base modal fica  $\Phi = \{\phi_1 / m_1^{1/2}, \phi_2 / m_2^{1/2} \dots \phi_m / m_m^{1/2}\}$  e a massa modal por consequência, torna-se igual à unidade para todos os modos. Além disso, na prática a montagem da matriz de amortecimento de Rayleigh da estrutura não é necessária. No caso, o amortecimento modal pode ser estimado diretamente da relação  $c_r = 2\xi_r \omega_r m_r$ , onde  $\xi_r$  é a taxa de amortecimento do  $r$ -ésimo modo. Pelo fato de a taxa de amortecimento associada a um modo de vibração ser um dado puramente experimental,

o atendimento à hipótese de Rayleigh exige um tratamento específico para este parâmetro, cuja explanação será apresentada no Capítulo 3.

Considere agora que a estrutura esteja excitada por uma força harmônica no grau de liberdade “ $a$ ”. Desse modo a força  $f_r$  da eq. (2.5) pode ser expressa por  $\phi_r^a F_0 e^{i\omega t}$  onde o índice “ $a$ ” se refere à coordenada modal desse grau de liberdade no modo  $r$ . Da mesma maneira, a coordenada generalizada  $q_r(t)$  pode ser expressa por  $q_r = q_{0r} e^{i\omega t}$ . Substituindo essas relações em (2.5), obtém-se:

$$(-\omega^2 m_r + i\omega.c_r + k_r) q_{0r} e^{i\omega t} = \phi_r^a F_0 e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

Eliminando a informação do tempo dada pelo termo  $e^{i\omega t}$  na eq. (2.6) em ambos os lados, tem-se a equação de equilíbrio do  $r$ -ésimo modo expressa no domínio da frequência. Essa equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$q_{0r} = (-\omega^2 m_r + i\omega.c_r + k_r)^{-1} \phi_r^a F_0 \quad (2.7)$$

onde, o termo da esquerda pode ser interpretado como a amplitude do deslocamento generalizado do  $r$ -ésimo modo submetido a uma força harmônica generalizada de amplitude  $\phi_r^a F_0$ . Portanto, a parcela  $( )^{-1}$  pode ser encarada como a Função de Transferência, isto é, a função que correlaciona uma dada entrada (no caso, a força) a uma saída (no caso, o deslocamento) do  $r$ -ésimo sistema.

Lembrando que a resposta da estrutura no tempo é dada pela eq. (2.3), o deslocamento de um grau de liberdade “ $b$ ” no domínio da frequência pode ser escrito como:

$$X_b = \sum_{r=1}^m \phi_r^b q_{0r} \quad (2.8)$$

Logo,

$$X_b = \sum_{r=1}^m \left( \frac{\phi_r^b \phi_r^a}{-\omega^2 m_r + i\omega.c_r + k_r} \right) \cdot F_0 \quad (2.9)$$

que pode ser re-escrito da seguinte forma:

$$X_b(\omega) = H_{ba}(\omega) F_a(\omega) \quad (2.10)$$

onde,

$$H_{ba}(\omega) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\phi_r^b \phi_r^a}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \right) \quad (2.11)$$

é a Função de Resposta em Frequência (FRF), também chamada por “Flexibilidade Dinâmica”, que correlaciona o deslocamento em “*b*” devido à força em “*a*” enquanto que  $X(\omega)$  e  $F(\omega)$  correspondem aos espectros do deslocamento e da força, respectivamente.

Analisando a expressão (2.11) é possível concluir que a FRF da estrutura é obtida pelas contribuições das Funções de Transferência de cada modo “*r*” multiplicadas pelos termos  $\phi_r^b \phi_r^a$ . Estes termos podem então ser encarados como os responsáveis pela projeção das Funções de Transferência do espaço modal para o espaço real. Como será visto mais a frente esta propriedade será explorada para a formulação da FRF do sistema “estrutura + sistemas de absorção”.

### **- Análise do sistema “estrutura + sistemas de absorção”**

Considere agora que seja instalado um absorsor num ponto *i* da estrutura e que este dispositivo esteja associado ao *r*-ésimo modo de vibração da estrutura. Neste caso, o índice “*r*” pode ser suprimido e, adotando para a denominação do sistema principal o índice “*p*” e, para o absorsor o índice “*a*”, a eq. (2.5) pode ser re-escrita como:

$$m_p \ddot{q} + c_p \dot{q} + k_p q = f_p + \phi_i f_a \quad (2.12)$$

onde,  $f_a$  é a força do absorsor sobre a estrutura, representada como uma força externa em adição a força externa principal  $f_p = \phi^T \mathbf{F}$ . Realizando-se o diagrama de corpo livre do absorsor a equação que expressa o equilíbrio dinâmico do absorsor é dada por:

$$c_a (\dot{x}_a - \dot{x}_i) + k_a (x_a - x_i) = -m_a \ddot{x}_a \quad (2.13)$$

onde,  $x_a$  e  $x_i$  correspondem, respectivamente, aos deslocamentos do absorsor e da estrutura na posição *i*.

Desse modo, a força exercida pelo absorvor sobre a estrutura no ponto  $i$  é igual à parcela da esquerda da eq. (2.13), equivalente a soma de uma parcela de força de amortecimento com uma parcela de força elástica.

Como  $x_i = \phi_i q$ , tem-se que:

$$m_a \ddot{x}_a + c_a (\dot{x}_a - \phi_i \dot{q}) + k_a (x_a - \phi_i q) = 0 \quad (2.14)$$

Logo,

$$f_a = c_a (\dot{x}_a - \phi_i \dot{q}) + k_a (x_a - \phi_i q) \quad (2.15)$$

Aplicando (2.15) em (2.12) tem-se a equação explícita que representa o equilíbrio do sistema principal. Sendo assim, as eqs. (2.12) e (2.14) expressam o sistema dinâmico de uma estrutura condensada em um sistema mecânico de 1 GL adicionado de um absorvor instalado em qualquer posição da estrutura.

A generalização para  $n$  absorvores adicionados em  $n$  posições distintas, consiste no somatório das forças oriundas desses absorvores sobre o sistema principal, ou seja:

$$f_a = \sum_{i=1}^n c_{ai} (\dot{x}_{ai} - \phi_i \dot{q}) + k_{ai} (x_{ai} - \phi_i q) \quad (2.16)$$

onde, o índice  $i$  agora se refere ao  $i$ -ésimo absorvor instalado, sendo a informação da posição destes dispositivos na estrutura suprimida da formulação de modo que  $\phi_i$  corresponde agora à coordenada modal onde o  $i$ -ésimo absorvor está instalado na estrutura.

Aplicando (2.16) em (2.12), e agrupando as  $n$  equações dos absorvores, obtêm-se as seguintes “ $n+1$ ” equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{q} + c_p \dot{q} - \phi_1 [c_{a1} (\dot{x}_{a1} - \phi_1 \dot{q})] - \dots - \phi_i [c_{ai} (\dot{x}_{ai} - \phi_i \dot{q})] - \dots - \phi_n [c_{an} (\dot{x}_{an} - \phi_n \dot{q})] + \\ + k_p q - \phi_1 [k_{a1} (x_{a1} - \phi_1 q)] - \dots - \phi_i [k_{ai} (x_{ai} - \phi_i q)] - \dots - \phi_n [k_{an} (x_{an} - \phi_n q)] = f_p \\ m_{a1} \ddot{x}_{a1} + c_{a1} (\dot{x}_{a1} - \phi_1 \dot{q}) + k_{a1} (x_{a1} - \phi_1 q) = 0 \\ \vdots \\ m_{ai} \ddot{x}_{ai} + c_{ai} (\dot{x}_{ai} - \phi_i \dot{q}) + k_{ai} (x_{ai} - \phi_i q) = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ m_{a_n} \ddot{x}_{a_n} + c_{a_n} (\dot{x}_{a_n} - \phi_n \dot{q}) + k_{a_n} (x_{a_n} - \phi_n q) &= 0 \end{aligned}$$

Rearranjando (2.17) e escrevendo na forma matricial, tem-se a eq. (2.1) em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & m_{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ & & & m_{a_i} & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & & & m_{a_n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_p + \sum_{k=1}^n \phi_k^2 c_{a_k} & -\phi_1 c_{a_1} & \cdots & -\phi_i c_{a_i} & \cdots & -\phi_n c_{a_n} \\ & c_{a_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ & & & c_{a_i} & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & & & c_{a_n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_p + \sum_{k=1}^n \phi_k^2 k_{a_k} & -\phi_1 k_{a_1} & \cdots & -\phi_i k_{a_i} & \cdots & -\phi_n k_{a_n} \\ & k_{a_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ & & & k_{a_i} & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \text{sim.} & & & & & k_{a_n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{X} &= [q \quad x_{a_1} \quad \cdots \quad x_{a_i} \quad \cdots \quad x_{a_n}]^T \\ \mathbf{F} &= [f_p \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \end{aligned} \tag{2.18}$$

A eq. (2.18) exprime o sistema dinâmico de uma estrutura condensada em um sistema mecânico de 1 GL adicionado de  $n$  absorsores instalados em  $n$  posições quaisquer da estrutura. Esse sistema difere de um sistema usual na medida em que o deslocamento da estrutura está escrito no espaço modal ao passo que os deslocamentos do sistema de absorção permanecem no espaço real. Portanto, a visualização de um modelo analítico como o da Fig. 2.1 possui caráter apenas ilustrativo.

Considere agora a mesma situação tal qual a analisada originalmente em que a estrutura está excitada por uma força harmônica de magnitude  $|F_0|$  no grau de liberdade “ $a$ ”. Nesse caso, o comportamento dinâmico da estrutura adicionada do sistema de absorção é representado pela 1ª linha do sistema expresso em (2.17), que por sua vez depende de variáveis escritas nas demais linhas desse sistema, ou seja, esta equação está acoplada às demais, diferentemente da situação original. Como a colocação do sistema de absorção corresponde à introdução de um sistema de natureza distinta do sistema estrutural original, não é razoável a adoção da hipótese de Rayleigh nesse caso, ou seja,  $\mathbf{C} \neq a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$  e, por conseguinte, o desacoplamento deste sistema exige um tratamento diferente do apresentado para a estrutura original.

De um modo geral, a resposta de qualquer sistema regido pela eq. (2.1) no domínio da frequência pode ser expressa por:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{B}(\omega)^{-1} \mathbf{F}(\omega) \quad (2.19)$$

onde,  $\mathbf{B}(\omega)$  é dado por:

$$\mathbf{B}(\omega) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \quad (2.20)$$

e, portanto, a FRF do sistema expresso em (2.20) é dada por sua matriz inversa, ou seja,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{B}(\omega)^{-1}$ . Logo, o deslocamento da coordenada generalizada do sistema estrutural adicionado do sistema absorção pode ser obtido por:

$$q_0 = H(\omega)_{1,1} \phi_a F_0 \quad (2.21)$$

Como o deslocamento de um ponto “ $b$ ” da estrutura é dado por  $X_b = \phi_b q_0$ , a expressão final que correlaciona a resposta neste ponto “ $b$ ” para um sistema “estrutura + sistema de absorção” submetido a uma força  $F_0$  num ponto “ $a$ ” da estrutura fica:

$$X_b = H(\omega)_{1,1} \phi_a \phi_b F_0 \quad (2.22)$$

Por conseqüência, conclui-se que a FRF que correlaciona a resposta em um ponto “ $b$ ” submetido a uma força em um ponto “ $a$ ” da estrutura é expressa por:

$$H(\omega)_{b,a} = \phi_b \phi_a H(\omega)_{1,1} \quad (2.23)$$

A eq. (2.11) sintetiza a formulação analítica de um sistema estrutural adicionado de múltiplos absorvedores localizados em quaisquer pontos desta estrutura. Tal como na formulação da estrutura original, o termo  $\phi_b \phi_a^A$  é responsável pela projeção da Função de Transferência do espaço modal para o espaço real.

A inversa de  $\mathbf{B}(\omega)$  tal como descrita na eq. (2.23) pode ser obtida utilizando a seguinte propriedade:

$$\mathbf{B}(\omega)^{-1} = \frac{\mathbf{B}(\omega)^A}{\det[\mathbf{B}(\omega)]} \quad (2.24)$$

onde,  $( )^A$  indica a matriz adjunta que equivale à transposta da matriz dos co-fatores.

Calculando-se as raízes do polinômio característico de  $\det[\mathbf{B}(\omega)] = 0$ , obtém-se “ $n+1$ ” pólos  $\lambda$  e seus respectivos complexos conjugados  $\bar{\lambda}$ . Por conseguinte, o denominador da parcela à direita da eq. (2.24) pode ser reescrito como:

$$\det[\mathbf{B}(\omega)] = C^{te} \cdot \prod_{r=1}^n (i\omega - \lambda_r) \cdot (i\omega - \bar{\lambda}_r) \quad (2.25)$$

Logo:

$$H(\omega)_{1,1} = \frac{\text{Cofator}[B(\omega)_{1,1}]}{C^{te} \cdot \prod_{r=1}^n (i\omega - \lambda_r) \cdot (i\omega - \bar{\lambda}_r)} \quad (2.26)$$

Expandindo (2.26) em frações parciais [45], obtém-se que:

$$H(\omega)_{1,1} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{A_{r1,1}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{A}_{r1,1}}{i\omega - \bar{\lambda}_r} \right) \quad (2.27)$$

onde  $A_{r1,1}$  é o resíduo complexo do sistema principal associado ao  $r$ -ésimo modo.

A eq. (2.27) associada a (2.23) explicitam por completo a FRF da estrutura adicionada do sistema de absorção. Igualmente, todas as informações para o cálculo dos parâmetros modais do sistema “estrutura + sistema de absorção” são fornecidas pelos “ $n+1$ ” pólos  $\lambda$ , os “ $n+1$ ” resíduos  $A$  e a forma modal original  $\phi$ .

É possível demonstrar que a equação que define o  $r$ -ésimo pólo é dada por:

$$\lambda_r = -\xi_r \cdot \omega_r + \left( \omega_r \cdot \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \cdot i \quad (2.28)$$

Logo, a frequência natural do  $r$ -ésimo modo é dada por  $\omega_r = |\lambda_r|$  e a taxa de amortecimento é dada por  $\xi_r = \text{Re}(\lambda_r) / |\lambda_r|$ , onde  $\text{Re}(\ )$  é a parcela real de  $(\ )$ .

Da mesma maneira, é possível demonstrar que a forma modal do  $r$ -ésimo modo do “sistema principal + sistema de absorção” é dada por qualquer uma das colunas da matriz de resíduos  $A_r$ , de dimensão “ $(n+1) \times (n+1)$ ”. Por consequência a forma modal complexa  $\psi$  do  $r$ -ésimo modo de um sistema “estrutura + sistema de absorção” para uma estrutura com  $m$  graus de liberdade adicionada de  $n$  absorsores pode ser estimada pela seguinte correlação:

$$\psi_r^T = \left\{ \left( A_{r1,1} / \phi_{ventre} \right) \cdot [\phi_1 \ \cdots \ \phi_m] : [A_{r2,1} \ \cdots \ A_{rn+1,1}] \right\} \quad (2.29)$$

onde,  $\phi_{ventre}$  corresponde à coordenada modal do ventre do modo, equivalente à coordenada modal da estrutura original com a amplitude máxima tal como  $A_{ri,j}$  pode ser interpretado como o resíduo localizado na linha  $i$  e coluna  $j$  pertencente à matriz de resíduos  $A_r$ .

Analisando (2.29), é possível constatar que a forma modal original quando multiplicada pelo resíduo complexo  $A_{r1,1}$  torna-se complexa. Entretanto, essa transformação se dá apenas com o intuito de compatibilizar as coordenadas modais da estrutura com as coordenadas modais do sistema de absorção, que são grandezas complexas. Isso significa que as formas modais da estrutura em essência não são alteradas pelo acréscimo do sistema de absorção utilizando esta formulação. Como será visto mais adiante, essa hipótese nem sempre é válida, como por exemplo, quando os modos da estrutura original se encontram próximos uns dos outros e por consequência, essa formulação analítica proposta perde acurácia.

## 2.2 Formulação numérica

A formulação numérica do problema é de um modo geral bem mais simples e direta que formulação analítica apresentada anteriormente. Tal como naquela formulação, a estrutura é discretizada em elementos finitos, mas, diferentemente do modelo analítico, a introdução dos sistemas de absorção se dá diretamente neste modelo discreto da estrutura. Portanto, o modelo numérico utilizado nesta formulação é constituído da estrutura dividida em elementos finitos e dos absorsores que da mesma maneira, também podem ser modelados por elementos discretos. A Fig. 2.2 ilustra de forma simplificada a metodologia empregada nesta formulação para a situação em que uma estrutura é adicionada de três sistemas absorsores quaisquer.

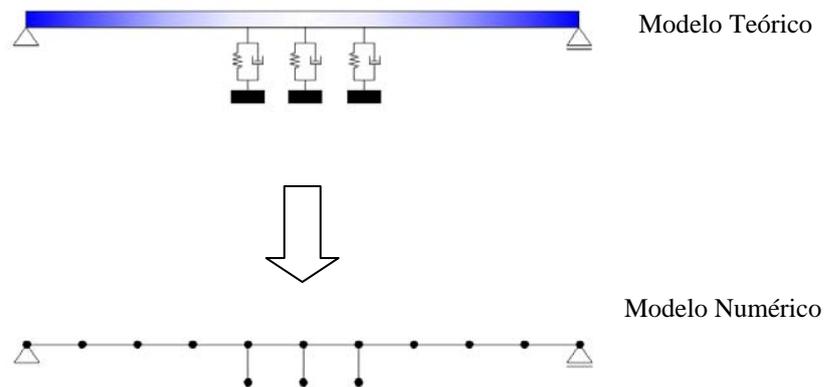


Fig. 2.2 – Metodologia aplicada para a formulação numérica de um sistema estrutural adicionado de sistemas de absorção.

Comparando a Fig. 2.1 com a Fig. 2.2, fica claro que a metodologia da formulação numérica é bem mais direta que a formulação analítica. Se na Fig. 2.2 cada ponto representa um grau de liberdade, a colocação de  $n$  “elementos absorsores” na estrutura original discretizada em um sistema  $m$  GL, introduz  $n$  graus de liberdade ao sistema e sendo assim, o modelo numérico da estrutura adicionada dos absorsores corresponde a um sistema “ $m+n$ ” GL.

Os termos da equação que expressa o equilíbrio de um sistema dinâmico dada pela eq. (2.1) para o modelo numérico apresentado neste caso ficam:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & m_e & \cdots & & & \\ & \vdots & \ddots & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & m_{a1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_{an} \end{array} \right] \\
\mathbf{C} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & c_e + c_{a1} & \cdots & & -c_{a1} & \\ & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ & & & c_e + c_{an} & & -c_{an} \\ \hline & & & & & \\ -c_{a1} & & & c_{a1} & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_{an} \\ \hline & & & & & \\ & & & -c_{an} & & \end{array} \right] \\
\mathbf{K} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ & k_e + k_{a1} & \cdots & & -k_{a1} & \\ & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ & & & k_e + k_{an} & & -k_{an} \\ \hline & & & & & \\ -k_{a1} & & & k_{a1} & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & k_{an} \\ \hline & & & & & \\ & & & -k_{an} & & \end{array} \right] \\
\mathbf{X} &= \left[ \cdots \quad x_e \quad \cdots \quad x_e \quad \cdots \mid x_{a1} \quad \cdots \quad x_{an} \right]^T \\
\mathbf{F} &= \left[ \cdots \quad f_e \quad \cdots \quad f_e \quad \cdots \mid 0 \quad \cdots \quad 0 \right]^T
\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde o índice “e” se refere aos termos, nas matrizes e vetores, pertencentes à estrutura original.

Conforme já foi apresentado, as matrizes de rigidez e de massa da estrutura são obtidas por meio do método dos elementos finitos tal como a matriz de amortecimento dessa estrutura pode ser dada pela hipótese de Rayleigh.

O fato então de que o modelo numérico não faz distinção entre a origem dos graus de liberdade, sejam eles advindos da estrutura ou dos sistemas absorsores, todos sendo

descritos no espaço real indica que a formulação numérica é também mais simples, visto que não há a manipulação de transformações do espaço real para o modal e vice-versa, tal como é exigido pela formulação analítica.

Entretanto, ainda que a formulação das equações de equilíbrio deste sistema seja mais simples, a solução e a obtenção da FRF deste sistema possuem um custo computacional bem superior. Conforme já mencionado, a hipótese de Rayleigh não é válida e, portanto, a projeção do modelo numérico para um espaço modal, o que permitiria o desacoplamento das equações deste sistema, não pode ser realizada utilizando uma base  $\Phi$  formada pelos auto-vetores  $\phi$  obtidos pela solução da eq. (2.2). No modelo numérico a estrutura é modelada por elementos finitos e normalmente são utilizadas malhas com centenas ou até milhares de graus de liberdade conduzindo à necessidade de uma formulação eficiente para obter os parâmetros modais.

Tomando-se por hipótese que o sistema  $n$  GL “estrutura + sistema de absorção” encontra-se vibrando livremente, ou seja, sem forças externas, o deslocamento do sistema pode ser expresso por  $\mathbf{X} = \phi e^{\lambda t}$  onde  $\phi$  é um dos modos de vibração e  $\lambda$  é o pólo associado. Desse modo a resolução da eq. (2.30) recai no seguinte problema de autovalor quadrático [46]:

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \phi = 0 \quad (2.31)$$

A solução de um problema desta natureza pode ser efetuada por meio de um processo de linearização do problema de autovalor através de uma mudança de variável, tal como a seguinte:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad (2.32)$$

A equação diferencial de movimento de um sistema mecânico expressa por (2.1), pode ser re-escrita então da seguinte maneira:

$$[\mathbf{C} \quad \mathbf{M}]_{n \times 2n} \cdot \dot{\mathbf{Y}} + [\mathbf{K} \quad \mathbf{0}]_{n \times 2n} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{F}(t) \quad (2.33)$$

Como o número de incógnitas em (2.33) é o dobro do nº de equações, a solução deste sistema não pode ser determinada. Adicionando a essa equação a seguinte identidade:

$$[\mathbf{M} \ \mathbf{0}]_{n \times 2n} \cdot \dot{\mathbf{Y}} + [\mathbf{0} \ -\mathbf{M}]_{n \times 2n} \cdot \mathbf{Y} = 0 \quad (2.34)$$

obtêm-se o seguinte sistema agora determinado:

$$\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Q}(t) \quad (2.35)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (2.36)$$

$$\text{e } \mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ 0 \end{bmatrix}_{2n \times 1}.$$

A eq. (2.35) corresponde à equação diferencial de movimento de um sistema mecânico escrito no espaço de estados [45]. A partir desta equação, fazendo  $\mathbf{Q}(t) = 0$  e  $\mathbf{Y} = \psi e^{\lambda t}$ , recai-se no seguinte problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{A} \psi = \lambda \mathbf{B} \psi \quad (2.37)$$

onde,  $\psi = \begin{Bmatrix} \phi \\ \lambda \phi \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$ , sendo equivalente ao problema de autovalor da eq. (2.31)

linearizado.

A solução do problema expresso em (2.37) produz  $n$  auto-vetores  $\psi$  e seus respectivos complexos conjugados  $\bar{\psi}$ , associados a  $n$  autovalores  $\lambda$  e seus respectivos complexos conjugados  $\bar{\lambda}$ . Portanto, esta técnica apesar de bastante direta apresenta a desvantagem de dobrar a dimensão do problema, o que incorre num maior custo computacional. Como já mencionado, em geral o cômputo dos primeiros modos de vibração da estrutura é suficiente para exprimir o comportamento estrutural e, portanto,

a estratégia a ser adotada para a solução numérica deste problema consiste na projeção deste problema para um subespaço tal como realizado para a estrutura original.

Devido ao fato dos autovalores e auto-vetores serem complexos, a utilização de rotinas convencionais na análise de estruturas baseadas na técnica de Iteração por Subespaço [44] não é aplicável. Entretanto, este problema de autovalor ainda assim pode ser projetado para um subespaço conhecido como Subespaço de Krylov [46]. Utilizando o IRAM (“Implicit Restarted Arnoldi Method” - Método de Arnoldi com Reinício Implícito), AINSWORTH JR. [18] implementou este método através de uma série de rotinas em Fortran que serão utilizadas neste trabalho e o princípio de funcionamento deste método será abordado em maior profundidade no Capítulo 3.

A solução da eq. (2.37) permite a construção de uma base modal  $\Psi = \{ \psi_1 \ \cdots \ \psi_m \mid \bar{\psi}_1 \ \cdots \ \bar{\psi}_m \}$ , sendo que  $m \ll n$ , na qual o problema definido pela eq. (2.35) pode ser projetado. Sendo assim, a resposta deste sistema é obtida pela superposição das respostas dos  $2m$  modos, ou seja:

$$\mathbf{Y} \approx \psi_1 \alpha_1(t) + \bar{\psi}_1 \bar{\alpha}_1(t) + \dots + \psi_m \alpha_m(t) + \bar{\psi}_m \bar{\alpha}_m(t) \quad (2.38)$$

onde,  $\alpha_r(t)$  corresponde à coordenada generalizada do  $r$ -ésimo modo.

Os auto-vetores podem ser orto-normalizados em relação à matriz  $\mathbf{B}$ . Como consequência direta disso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \psi_r^T \mathbf{A} \psi_r &= \lambda_r \\ \psi_r^T \mathbf{B} \psi_r &= 1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

tal como,  $\psi_r^T ( ) \psi_l = 0$ , se  $r \neq l$ .

Logo, pré-multiplicando por  $\psi_r^T$  e utilizando a eq. (2.38), a  $r$ -ésima equação do sistema da eq. (2.35) fica:

$$\dot{\alpha}(t)_r - \lambda_r \cdot \alpha(t)_r = \phi_r^T \cdot \mathbf{F}(t) \quad (2.40)$$

Se no caso o sistema se encontra submetido por uma força harmônica no grau de liberdade “ $a$ ”, a projeção desta força na  $r$ -ésima equação (2.40) é dada por  $\phi_r^a F_0 e^{i\omega t}$  e o

deslocamento da coordenada generalizada associada pode ser expresso por  $\alpha_r(t) = \alpha_{0,r} e^{i\omega t}$ . Desse modo, tem-se que:

$$i\omega\alpha_{0,r}e^{i\omega t} - \lambda_r \cdot \alpha_{0,r}e^{i\omega t} = \phi_r^a F_0 e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

Eliminando  $e^{i\omega t}$  a eq. (2.41) pode ser re-escrita como:

$$\alpha_{0,r} = (i\omega - \lambda_r)^{-1} \phi_r^a F_0 \quad (2.42)$$

A partir da eq. (2.38), é possível demonstrar que o deslocamento em um ponto “b” é dado por:

$$X_b = \sum_{r=1}^m (\phi_r^b \alpha_{0,r} + \bar{\phi}_r^b \bar{\alpha}_{0,r}) \quad (2.43)$$

Logo,

$$X_b = \sum_{r=1}^m \left( \frac{\phi_r^a \phi_r^b}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{\phi}_r^a \bar{\phi}_r^b}{i\omega - \bar{\lambda}_r} \right) \cdot F_0 \quad (2.44)$$

e, portanto, a FRF que correlaciona o deslocamento em um ponto “b” a uma força em um ponto “a” é dada por:

$$H_{ba}(\omega) = \sum_{r=1}^m \left( \frac{\phi_r^a \phi_r^b}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\bar{\phi}_r^a \bar{\phi}_r^b}{i\omega - \bar{\lambda}_r} \right) \quad (2.45)$$

É importante ressaltar que a equação que define  $\lambda_r$  é exatamente a mesma expressa no desenvolvimento da formulação analítica do item anterior, dada pela eq. (2.28), da qual podem ser capturadas as frequências naturais e as taxas de amortecimento dos  $m$  modos produzidos. Estes parâmetros junto com as coordenadas modais dadas por  $\phi$  serão no Capítulo 4 utilizados para a correlação dos resultados obtidos por esta formulação com os resultados obtidos pela formulação analítica proposta.

Em conseqüência disto, conclui-se que a FRF do sistema estrutural adicionado de sistemas absorvedores, é montada a partir de seus parâmetros modais, tal qual a FRF da estrutura original foi explicitada.

## 3 DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO

Neste capítulo são descritas as ferramentas numéricas desenvolvidas em linguagem Fortran para a resolução do problema de múltiplos sistemas passivos acoplados a uma estrutura modelada em elementos finitos. Apresenta-se inicialmente a organização geral dos sistemas computacionais com uma descrição resumida das estratégias adotadas nas modelagens. Em seguida são abordadas as técnicas empregadas para a resolução do problema de autovalor, dando ênfase às rotinas desenvolvidas por AINSWORTH JR. [18] baseadas no Método de Arnoldi com Reinício Implícito.

### 3.1 Organização das ferramentas numéricas

O sistema computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran com a finalidade de se obter uma ferramenta numérica para aplicação nas diversas pesquisas relacionadas a sistemas de controle passivo que estão sendo realizadas no LADEPIS (Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais), da COPPE. Este programa engloba a análise de um sistema estrutural sob tensões normais, que simula o efeito de protensão para a atenuação de vibrações estruturais, na medida em que, são modificadas as características modais da estrutura original (para maiores detalhes, ver o trabalho da ref. [47]), e/ou adicionado de múltiplos sistemas absorsores. Em resumo, o programa foi dividido hierarquicamente nos seguintes módulos:

- EST\_0: é o módulo responsável pela leitura das propriedades físicas, geométricas e pela análise estática da estrutura. Nesta etapa é montada a matriz de rigidez da estrutura sendo gravada em formato binário junto com outras informações essenciais da estrutura. Este módulo lê as forças estáticas ou deslocamentos prescritos, calcula os deslocamentos e salva as tensões atuantes na estrutura em formato binário;
- KG\_0: é um módulo alternativo, que somente é utilizado quando a estrutura é submetida a solicitações axiais. Este módulo recebe os dados da estrutura gravados em disco fornecidos pelo módulo EST\_0 e monta a matriz geométrica da estrutura em função das tensões obtidas nesse módulo. Em seguida, grava em binário a matriz de rigidez modificada pela contribuição da matriz geométrica;

- **DIN\_0:** é o módulo de análise dinâmica da estrutura original. Este módulo lê as informações gravadas em disco da estrutura do módulo EST\_0 e, em caso de tensões axiais, lê a matriz de rigidez modificada do módulo KG\_0. Em seguida monta a matriz de massa, calcula os modos e as frequências naturais da estrutura e imprime em formato ASCII. Por fim, ele regrava em binário as informações da estrutura original com a matriz de massa e de rigidez modificada;
- **DIN\_1:** é o módulo de análise dinâmica da estrutura adicionada dos sistemas de absorção. Este módulo lê o arquivo binário escrito pelo módulo DIN\_0, seguido da leitura dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh e da leitura das características dos absorsores. Em seguida, monta a matriz de amortecimento da estrutura, introduz os absorsores nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Por fim, monta as matrizes **A** e **B** do espaço de estados, calcula e imprime as formas modais, frequências naturais e as taxas de amortecimento do sistema “estrutura + absorsores” nos formatos ASCII e binário;
- **DIN\_FRF:** é um módulo de pós-processamento do programa. Ele recebe os parâmetros modais obtidos no módulo anterior e calcula e imprime a FRF (Função de Resposta em Frequência) do sistema estrutural adicionado dos sistemas de absorção.

O esquema geral de funcionamento do sistema está ilustrado no fluxograma da Fig. 3.1.

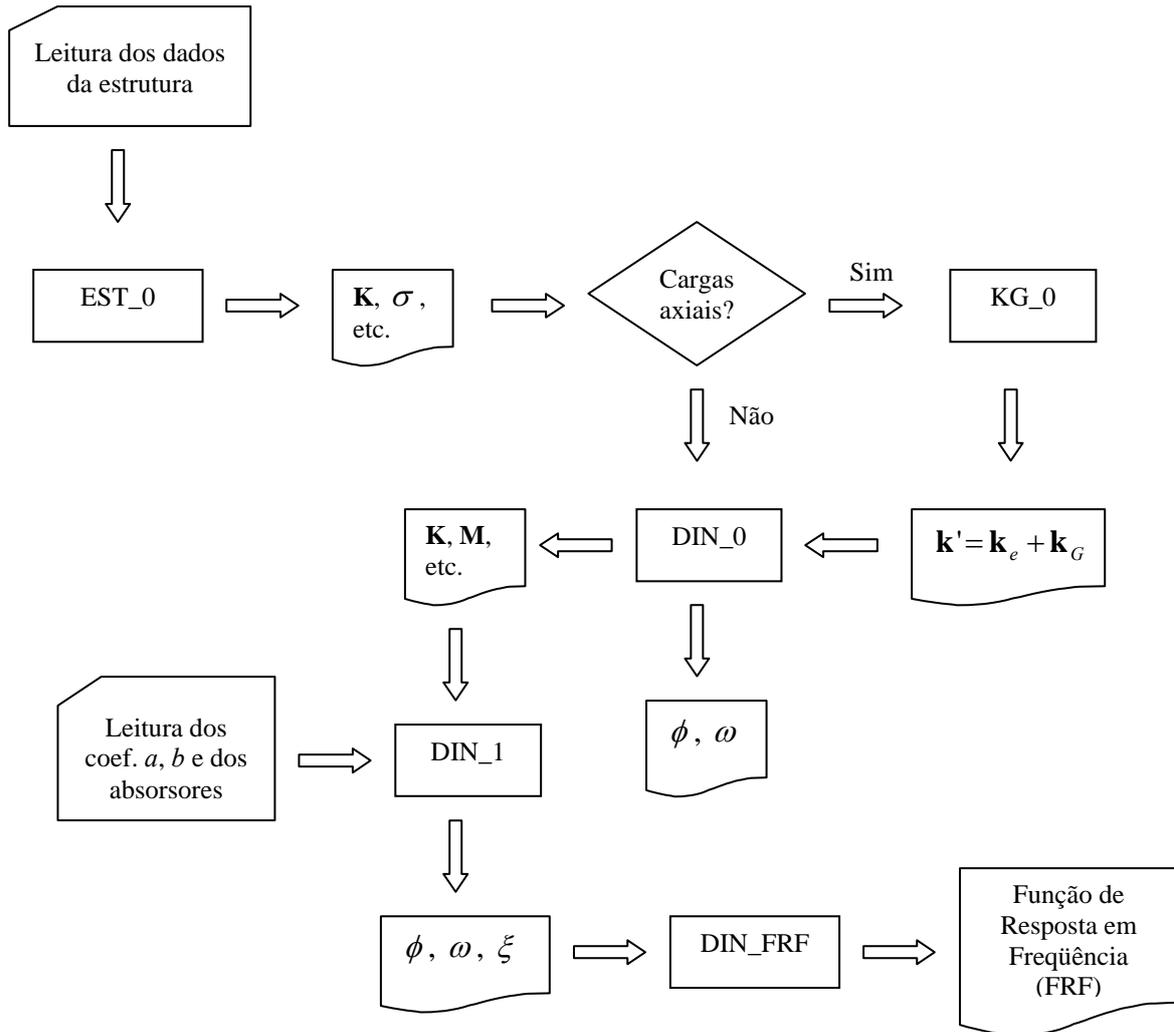


Fig. 3.1 – Fluxograma representando a estrutura geral do sistema desenvolvido.

Como já mostrado no capítulo anterior, foram desenvolvidas duas metodologias para a análise de um sistema estrutural adicionado de um ou mais sistemas de absorção. A primeira metodologia, que é baseada num modelo analítico da estrutura representada por um sistema mecânico de 1 GL, recebe os parâmetros modais obtidos pelo módulo DIN\_0, sendo as etapas subsequentes desta formulação realizadas no MathCad. Já a segunda metodologia, que consiste numa formulação mais completa, baseada num modelo numérico da estrutura em elementos finitos adicionada dos absorvedores, é resolvida por completo pelo sistema computacional desenvolvido.

Ressalta-se que, o módulo KG\_0 foi implementado com a finalidade específica de investigar a adoção da protensão como uma alternativa para a redução de vibrações estruturais em lajes. Para uma investigação experimental desse gênero, foi montada no

LADEPIS/COPPE uma estrutura de ensaio que consiste numa placa de alumínio (ver a Fig. 4.13). Uma futura correlação numérico x experimental dos resultados dos ensaios possibilitará, por exemplo, a validação do método de Galerkin Iterativo proposto por MACHADO [47] para o cálculo das cargas críticas e das frequências naturais de placas retangulares com condições de contorno arbitrárias. Sendo assim, com o intuito de verificar o funcionamento deste módulo, foi realizado um estudo paramétrico do efeito de uma pré-tensão nas frequências naturais desta placa modelada por elementos finitos e seus resultados são apresentados no ANEXO A.

Adicionalmente, esse sistema computacional é complementado pelo programa de pré e pós-processamento GID, responsável pela geração das malhas e pela visualização das formas modais.

## 3.2 Montagem das matrizes

Conforme foi mencionado no capítulo anterior, as matrizes de rigidez e massa da estrutura são montadas utilizando o método dos elementos finitos. As montagens dessas matrizes se dão a partir das contribuições das rijezas e massas dos elementos que incidem sobre um determinado nó do modelo numérico da estrutura. No presente trabalho, o sistema computacional foi implementado com uma biblioteca possuindo elemento de pórtico espacial e elemento de casca de oito nós, conhecido como elemento *serendipity*. O elemento de pórtico espacial foi extraído do programa utilizado por FARIA [48] ao passo que o elemento de casca foi fornecido pelo Prof. Fernando L. B. Ribeiro, da COPPE/UFRJ. A escolha pela utilização desse elemento de oito nós em detrimento da utilização de um elemento de casca MITC (do inglês “Mixed Interpolation of Tensorial Components”) de quatro nós, mais comumente empregado, é justificada pelo fato da disponibilidade de antemão da matriz geométrica do elemento *serendipity*. Outra razão para a escolha desse elemento é devido ao fato de sua modelagem requerer um número inferior de elementos. A descrição detalhada da formulação destes elementos pode ser encontrada em [44,49].

Da mesma maneira, a montagem da matriz de amortecimento da estrutura é realizada com base na hipótese de Rayleigh, em que  $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$ . Essa relação pode ser re-escrita da seguinte maneira:

$$\xi = 0.5 \left( \frac{a}{\omega} + b\omega \right) \quad (3.1)$$

Os coeficientes  $a$  e  $b$  na eq. (3.1) podem ser obtidos pela fixação de dois pares  $(\omega_m, \xi_m)$  e  $(\omega_n, \xi_n)$  associados a dois modos quaisquer. Em geral, a taxa de amortecimento dada por (3.1) em função da frequência pode apresentar três comportamentos distintos: (i) A taxa de amortecimento é proporcional à massa ( $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ); (ii) A taxa de amortecimento é proporcional à rigidez ( $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ); (iii) A taxa de amortecimento é proporcional à massa e a rigidez ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ). A Fig. 3.2 ilustra essas três situações.

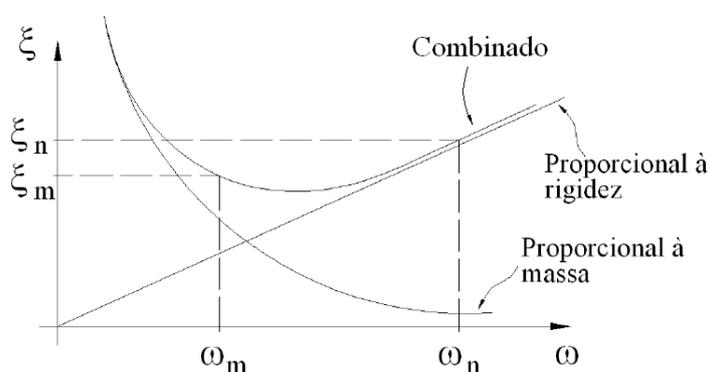


Fig. 3.2 – Relação entre amortecimento e frequência (Amortecimento de Rayleigh).

No caso de estruturas existentes, a obtenção desses pares  $(\omega, \xi)$  se dá por meio do emprego de técnicas de identificação estrutural, podendo ser obtidos quantos pares forem necessários para as análises. No caso em que mais de dois modos são de interesse na investigação, os coeficientes  $a$  e  $b$  podem ser estimados posteriormente, tendo em vista a minimização do erro cometido pela aproximação de uma curva ajustada, com o auxílio do método dos mínimos quadrados [43].

No presente trabalho, como será visto no Capítulo 4, o comportamento do amortecimento dos sistemas estruturais analisados será sempre estimado como proporcional à massa, conforme sugerido em [17].

Como já mencionado no capítulo anterior, o método dos elementos finitos demanda uma boa discretização do modelo. As malhas utilizadas são em geral consideráveis, da ordem de milhares de graus de liberdade, conduzindo a um elevado custo de memória para o armazenamento das matrizes de rigidez, massa e

amortecimento. A fim de reduzir este custo, as matrizes foram armazenadas em perfil *skyline*, técnica bastante empregada na análise estrutural. Nesta estratégia, a matriz é armazenada em um vetor e as posições dos coeficientes da diagonal principal são guardados em um vetor denominado de *jdiag*. No caso, esse vetor é compartilhado pelas matrizes de rigidez, massa e amortecimento.

A colocação dos sistemas de absorção no modelo numérico da estrutura introduz novas linhas e colunas nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Isso já foi abordado pela formulação numérica apresentada no capítulo anterior. Sob o ponto de vista de implementação, ressalta-se que a introdução dos absorvedores, que é efetuada no módulo DIN\_1, aumenta os vetores com os termos destas matrizes e conseqüentemente, adiciona novas posições no vetor *jdiag*.

### 3.3 Resolução do problema de autovalor

Como já foi comentando no capítulo anterior, tendo em vista que o número de autovalores necessários para análise,  $k$ , é muito menor que o número total de graus de liberdade  $n$  dos modelos numéricos utilizados, a estratégia adotada para a solução de um problema de autovalor generalizado, tal como expresso pelas eqs. (2.2) e (2.37), consiste na projeção do problema para um subespaço  $\mathbf{S}$  com dimensão  $k$ .

De um modo geral, a resolução de um problema desta natureza se dá por um procedimento de Rayleigh-Ritz, dado pelo algoritmo a seguir:

**Algoritmo 1** Pseudocódigo do método de Rayleigh-Ritz para  $Ax = \lambda x$  [18]

- 1: Calcule uma matriz ortonormal  $V$  cujas colunas gerem o subespaço  $\mathbf{S}$  de dimensão  $k$
- 2: Calcule a projeção de ordem  $k \times k$  de  $A$  em  $\mathbf{S}$ :  $V^T A V$
- 3: Resolva  $T y = \theta y$
- 4:  $\theta = \lambda$  e  $x = V y$

O grande desafio associado ao procedimento de Rayleigh-Ritz reside na obtenção de uma base de Ritz  $V$  que gere o subespaço  $\mathbf{S}$  de interesse. Baseado neste processo, com o objetivo de resolver o problema da eq. (2.2), BATHE [44] desenvolveu uma técnica conhecida como Iteração por Subespaços, bastante difundida para a análise estrutural. Esta técnica, em resumo, consiste no seguinte procedimento: a partir de um conjunto de  $p$  vetores de partida, que formam uma base do subespaço  $\mathbf{S}_0$ , inicia-se um

ciclo iterativo do algoritmo 1, que se encerra quando os  $p$  vetores convergem para uma base  $S_\infty$ . Adicionalmente, uma checagem da seqüência de “Sturm” confirma que todos os auto-vetores obtidos estão associados aos modos mais baixos.

As rotinas em linguagem Fortran que resolvem o problema de autovalor do módulo DIN\_0 utilizando a técnica de Iteração por Subespaços foram extraídas do sistema utilizado por FARIA [48], e são praticamente cópias das rotinas apresentadas em [44]. Ressalta-se que essas rotinas se utilizam do armazenamento em perfil *skyline*, sendo o “ $p$ ” adotado correspondente ao  $\min.(2k; k+8)$ . Adicionalmente, comenta-se que a rotina que resolve o problema de autovalor reduzido equivalente ao do passo “3” do algoritmo 1 obtido para cada passo  $i$  do ciclo iterativo do processo utiliza o Método de Jacobi [44].

Apesar de estas rotinas serem extremamente eficientes na resolução do problema da eq. (2.2), elas não são aplicáveis para a resolução do problema de autovalor expresso pela eq. (2.37), cuja solução fornece autovalores e auto-vetores complexos. Em termos práticos, a princípio nada impede que a técnica de Iteração por Subespaços seja condicionada ao problema da eq. (2.37), entretanto uma adaptação desta natureza demandaria um estudo mais aprofundado desta técnica. O Método de Jacobi, por exemplo, necessitaria ser substituído por outro método visto que ele só é aplicável para matrizes simétricas positivo-definidas, situação em que pode ser demonstrado que os autovalores e auto-vetores são sempre reais [46].

Em virtude disso, para resolver um problema do tipo (2.37), MAGLUTA [17] adotou a estratégia de condensação da estrutura utilizando uma técnica de sub-estruturação associada ao cálculo do problema de autovalor com dimensão reduzida com rotinas baseadas na técnica QZ implementadas por MOLER e STEWART [50]. Essa estratégia foi necessária visto que o conjunto de rotinas da QZ calcula todos os autovalores e, conseqüentemente, o custo computacional envolvido ficaria muito elevado, sem uma redução da dimensão do problema. Ainda que os parâmetros modais obtidos com essa estratégia tenham apresentado boa acurácia em seu trabalho, MAGLUTA [17] aponta que a obtenção dos esforços nos elementos utilizando este procedimento fica prejudicada pela condensação da estrutura.

Uma alternativa à estratégia proposta por MAGLUTA [17] consiste na utilização de métodos baseados no subespaço de Krylov, que é dado por:

$$\{ v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{k-1}v_1 \} \quad (3.2)$$

onde  $v_1$  é um vetor inicial não-nulo.

A idéia fundamental consiste em obter uma base ortogonal  $V$  escrita no subespaço de Krylov de tal maneira que a projeção do problema original neste subespaço de dimensão  $k$  conduza ao problema reduzido do tipo do algoritmo 1. Os principais métodos associados ao subespaço de Krylov são os métodos de Lanczos e de Arnoldi. Utilizando uma projeção ortogonal (aproximação de Galerkin), na qual o subespaço de ponderação é igual ao subespaço de aproximação  $S$ , é possível demonstrar que os métodos de Lanczos e Arnoldi são idênticos, com a diferença que a projeção da matriz  $A$  em  $S$  conduz a uma matriz tri-diagonal para Lanczos e a uma matriz superior de Hessenberg, em Arnoldi. Igualmente, é possível demonstrar que para  $A$  simétrica, a matriz superior de Hessenberg recai numa matriz tri-diagonal.

A partir desta característica, AINSWORTH JR. [18] desenvolveu em sua Tese de Doutorado uma ferramenta numérica capaz de resolver qualquer problema de autovalor generalizado através de um conjunto de rotinas implementadas em linguagem Fortran, denominadas por EIGENP, baseadas no método de Lanczos/Arnoldi com Reinício Implícito. Esse conjunto de rotinas foi incorporado ao módulo DIN\_1 para a solução do problema de autovalor da eq. (2.37) através de algumas modificações.

O algoritmo de fatoração de Arnoldi é descrito a seguir:

**Algoritmo 2** Pseudocódigo da fatoração de Arnoldi em  $k$  passos se  $k_0 = 0$ , senão estende a fatoração em mais  $j$  passos (problema generalizado) [18].

- 1: Entrada:  $A, B, V_{k_0} = [v_1, v_2, \dots, v_{k_0}]$ ,  $H_{k_0}, f_{k_0}$
- 2:  $k = k_0 + j$
- 3: Se ( $k_0 = 0$ ) então
- 4: Gera o vetor de partida  $v_1$ , tal que  $\|v_1\| = 1$
- 5:  $w_1 = B^{-1}Av_1$ ;  $H_1 = v_1^T w_1$ ;
- 6:  $f_1 = w_1 - H_1 v_1$ ;
- 7:  $k_0 = k_0 + 1$ ;
- 8: Fim se
- 9: Loop  $i = k_0, \dots, k - 1$ :
- 10:  $\beta_i = \|f_i\|$
- 11:  $v_{i+1} = \frac{f_i}{\beta_i}$ ;  $V_{i+1} = [V_i, v_{i+1}]$
- 12:  $w_{i+1} = B^{-1}Av_{i+1}$
- 13:  $\hat{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \beta_i e_i^T \end{bmatrix}$
- 14:  $h = V_{i+1}^T w_{i+1}$
- 15:  $H_i = \begin{bmatrix} \hat{H}_i & h \end{bmatrix}$
- 16:  $f_{i+1} = w_{i+1} - V_{i+1}h$
- 17: Processo de Re-ortogonalização.
- 18: Fim loop
- 19:  $k_0 = k$

A re-ortogonalização mencionada no passo “17” do algoritmo 2 se faz necessária em virtude da característica intrínseca ao processo de perda de ortogonalidade da base  $V$  gerada. Na ferramenta implementada em [18], essa re-ortogonalização é realizada através do Processo de Gram-Schmidt.

A partir da fatoração de Arnoldi obtêm-se a matriz  $H$  (matriz superior de Hessenberg), que equivale à matriz do problema de autovalor projetado no subespaço. O problema de autovalor reduzido, por conseguinte, é resolvido através da decomposição QR. À fatoração de Arnoldi, no caso, é associada a uma transformação espectral, com a finalidade de se obter o subespaço associado à faixa espectral de interesse [18]. No presente trabalho, a faixa espectral de interesse corresponde à que possui as frequências mais baixas. Além disso, como em princípio não é conhecido o número de ciclos do

algoritmo 2 necessários para a convergência da fatoraçoão Arnoldi/Lanczos, com a finalidade de melhorar o desempenho do método, a fatoraçoão é reiniciada com um vetor de partida pré-condicionado, utilizando uma estratégia de reinício implícito desenvolvida por SORENSEN [51], que dá origem ao Método de Arnoldi/Lanczos com Reinício Implícito.

O Algoritmo 2 mostra que uma fatoraçoão do tipo Arnoldi/Lanczos é realizada através de operaçoões básicas de álgebra linear. Isso permite que o programa seja adaptável a diferentes formatos de armazenamento das matrizes  $A$  e  $B$  do problema de autovalor na dimensão original. Como já mencionado no item anterior, a estratégia utilizada no presente trabalho consiste no armazenamento em perfil *skyline* das matrizes de rigidez, massa e de amortecimento do sistema estrutural adicionado dos sistemas absorvedores, que conseqüentemente, formam as matrizes do espaço de estados  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da eq. (2.37). Sendo assim, a adequaçoão do conjunto do EIGENP ao problema foi realizada através da adoçoão de uma estrutura de dados que considera que as matrizes são formadas por blocos equivalentes às matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  (ver o arranjo das matrizes na eq. (2.36)), armazenados no formato *skyline*. Igualmente o produto *matvec*, que efetua o produto matriz-vetor, foi adaptado para essa estrutura de dados.

Adicionalmente, ressalta-se que o sistema desenvolvido em [18] foi implementado para computaçoão paralela utilizando nas operaçoões matemáticas, as bibliotecas *BLAS* (“Basic Linear Álgebra Subprograms”) e *LAPACK* (“Linear Algebra PACKage”). A adaptaçoão desse sistema para o funcionamento em um *PC* foi realizada mediante a desativaçoão das chamadas em *MPI* (do inglês “Message Passing Interface”) do conjunto EIGENP no módulo *DIN\_1*, tal como a pré-compilaçoão das rotinas que compõem estas bibliotecas.

## **4 APLICAÇÃO**

Neste capítulo serão apresentadas as aplicações dos conceitos e das ferramentas numéricas descritos nos capítulos anteriores para o estudo do comportamento estrutural sob o efeito da adição de um ou mais absorsores.

O primeiro item deste capítulo consiste no desenvolvimento de uma metodologia para o projeto de um ou mais absorsores que contemple o fato destes dispositivos estarem posicionados em qualquer local da estrutura. Esse estudo foi conduzido numa viga metálica variando-se a configuração da instalação desses dispositivos, tal como os parâmetros de calibração dos absorsores com o intuito de se avaliar os níveis de redução máximos obtidos e outros aspectos práticos que regem a opção por um ou mais sistemas absorsores.

O segundo item trata da investigação do comportamento estrutural para a situação em que um ou mais absorsores estão calibrados para reduzir as vibrações de um determinado modo sendo que a estrutura possui outros modos de vibração cujas frequências naturais estão próximas deste modo em análise. Esse estudo foi conduzido numa laje variando-se a relação entre largura e comprimento de maneira a avaliar a influência dos modos adjacentes na calibração dos sistemas de absorção, bem como verificar as possíveis diferenças nas respostas obtidas pelas duas formulações desenvolvidas neste trabalho.

### **4.1 Aplicação 1: Análise de uma Viga Bi-apoiada**

Conforme mencionado anteriormente, neste item será apresentado o desenvolvimento de uma metodologia para o projeto otimizado de um ou mais absorsores. Para tal, foi escolhida uma estrutura de ensaio, montada no LADEPIS (Laboratório de Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais) da COPPE, que já serviu de objeto de estudo para muitos trabalhos, dentre os quais o de MAGLUTA [17]. Esta estrutura é ilustrada na Fig. 4.1 e consiste numa viga de aço de seção reta de 3" x 5/16", bi-apoiada, com vão livre de aproximadamente 1.5 m.

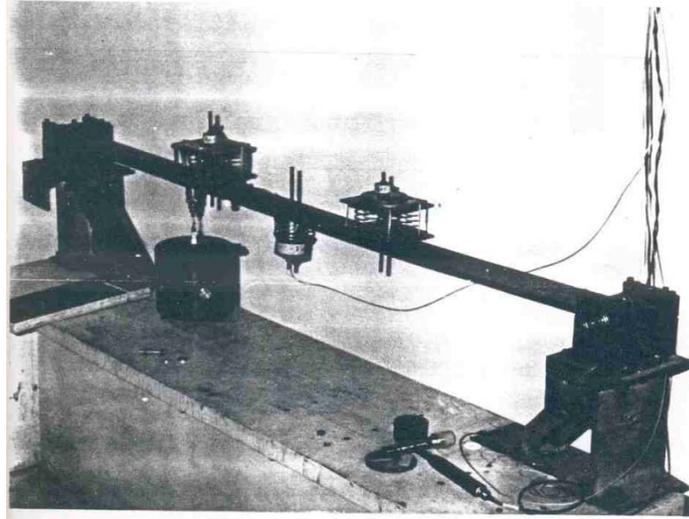


Fig. 4.1 – Vista geral da estrutura em estudo com três absorsores instalados [17].

Para o cálculo das frequências naturais e formas modais expresso pela eq. (2.2), esta estrutura foi modelada em elementos finitos utilizando 16 elementos de pórtico espacial com o auxílio do módulo DIN\_0 descrito no Capítulo 3. Nesta análise foram calculados os três primeiros modos de vibração desta estrutura.

Com o intuito de se avaliar a acurácia das respostas obtidas, estes valores numéricos são confrontados na Tabela 4.1 com os valores teóricos para uma viga bi-apoiada expressos em [43]:

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \quad (4.1)$$

onde:

- $\omega_n$  é a frequência natural angular do modo  $n$ ;
- $E$  é o módulo de elasticidade;
- $I$  é o momento de inércia;
- $\bar{m}$  é a massa linear, que corresponde ao produto da massa específica pela área da seção transversal;
- $L$  é o comprimento da viga.

Tabela 4.1 – Comparação entre as frequências naturais teóricas e as obtidas no modelo numérico da estrutura original.

Modo de vibração	Frequências naturais (Hz)		
	Teórico	Numérico	Erro Relativo (%)
1°	8.4486	8.4486	-
2°	33.7943	33.7934	0.0027
3°	76.0371	76.0327	0.0058

Observa-se pela Tabela 4.1 que a diferença entre os valores teóricos e os obtidos numericamente são praticamente imperceptíveis, demonstrando que o módulo DIN\_0 está funcionando corretamente e que a discretização proposta é suficiente para descrever o comportamento dinâmico desta viga.

A massa modal associada a estes modos pode ser estimada como sendo, segundo a teoria clássica [43], igual à metade de sua massa total. Neste caso, o valor obtido é aproximadamente igual a 3.5 kg. Ressalta-se que valor semelhante a este também foi obtido na análise numérica realizada.

Nesta etapa do trabalho será dado enfoque à redução das vibrações associadas ao primeiro modo de vibração da estrutura, cuja forma modal normalizada em relação à massa modal é ilustrada na Fig. 4.2. Sob o ponto de vista prático a escolha deste modo é bastante coerente, pois em estruturas flexíveis, é muito comum que o espectro das ações possua energia na faixa de frequência em que se encontra a primeira frequência natural da estrutura.

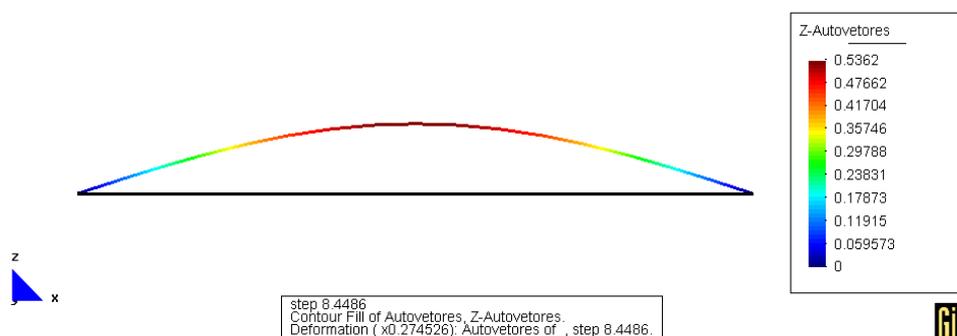


Fig. 4.2 – Forma modal do 1º modo de vibração da viga, normalizada em relação à massa modal.

Para compatibilizar os resultados numéricos com os experimentais obtidos em [17] para a viga simples (frequência natural associada ao 1º modo de vibração da viga em 8.23 Hz) foi realizado o ajuste da frequência natural do primeiro modo. Para este ajuste foi necessário reduzir a rigidez à flexão,  $EI$ , adotada inicialmente em 5 %. Ressalta-se que desvios desta ordem são normais quando se trabalha com dados reais, uma vez que existe uma série de incertezas na modelagem tais como: a espessura correta da viga ao longo de seu comprimento, o módulo de elasticidade, etc. Experimentalmente a taxa de amortecimento associada ao primeiro modo foi estimada em 0.68 % [17]. Assumindo que o comportamento da estrutura original pode ser representado pela hipótese de Rayleigh e que esta é proporcional somente à massa (isto é,  $b = 0$ , vide eq. (3.1)), é possível obter o parâmetro  $a$  e a matriz de amortecimento da estrutura.

Com o objetivo de verificar as formulações desenvolvidas, foi simulada a instalação de um absorvedor no meio do vão, que corresponde ao ventre do modo, local onde a coordenada modal para o primeiro modo é máxima, tal como ilustrado na Fig. 4.2. Conforme proposto em [17], o absorvedor foi calibrado com a frequência natural de 8.1 Hz e coeficiente de amortecimento de 2.0 N.s/m. Neste trabalho esse sistema absorvedor será designado de sistema S1.

A Tabela 4.2 mostra um quadro comparativo entre algumas respostas obtidas em [17] e as do presente trabalho obtidas analiticamente e numericamente. O efeito da inclusão do sistema S1 nas formas modais está representado pelas coordenadas modais desse sistema absorvedor, que estão normalizadas em relação às coordenadas modais do ventre do modo, no caso o meio do vão livre, e estão apresentadas na Tabela 4.2 utilizando notação polar (módulo x fase).

Tabela 4.2 – Quadro comparativo dos parâmetros modais da estrutura controlada.

Modo		Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortec. (%)	Coordenadas Modais (S1)
1.a	Experimental [17]	6.54	1.91	-
	Numérico [17]	6.76	1.72	-
	Analítico	6.77	1.73	3.31 $\angle$ -4.14°
	Numérico	6.77	1.74	3.31 $\angle$ -4.14°
1.b	Experimental [17]	9.94	2.76	-
	Numérico [17]	9.83	3.10	-
	Analítico	9.84	3.08	2.11 $\angle$ 186.08°
	Numérico	9.83	3.06	2.11 $\angle$ 186.02°

Os resultados apontados pela Tabela 4.2 mostram que as respostas obtidas para as frequências naturais e taxas de amortecimento apresentam boa acurácia com relação às obtidas em [17]. Isso significa que ambas as formulações apresentadas neste trabalho, a analítica e a numérica, estão funcionando adequadamente.

Outro ponto interessante se refere às coordenadas modais obtidas. A forma modal da estrutura em ambos os modos 1.a e 1.b é bem semelhante à forma modal da estrutura original ilustrada na Fig. 4.2. A diferença se dá exatamente com relação à fase entre a estrutura e o absorvedor. No modo 1.a o absorvedor está em fase com a estrutura ao passo que no modo 1.b o absorvedor se move em sentido contrário. A introdução da constante de amortecimento do absorvedor S1 gera uma pequena defasagem nessa relação entre os deslocamentos do absorvedor e a estrutura, como mostra a Tabela 4.2.

A Fig. 4.3 apresenta a FRF estimada no meio do vão da estrutura original e com o absorvedor S1. Pode-se observar nesta figura a boa eficiência obtida ao se utilizar o sistema de absorção.

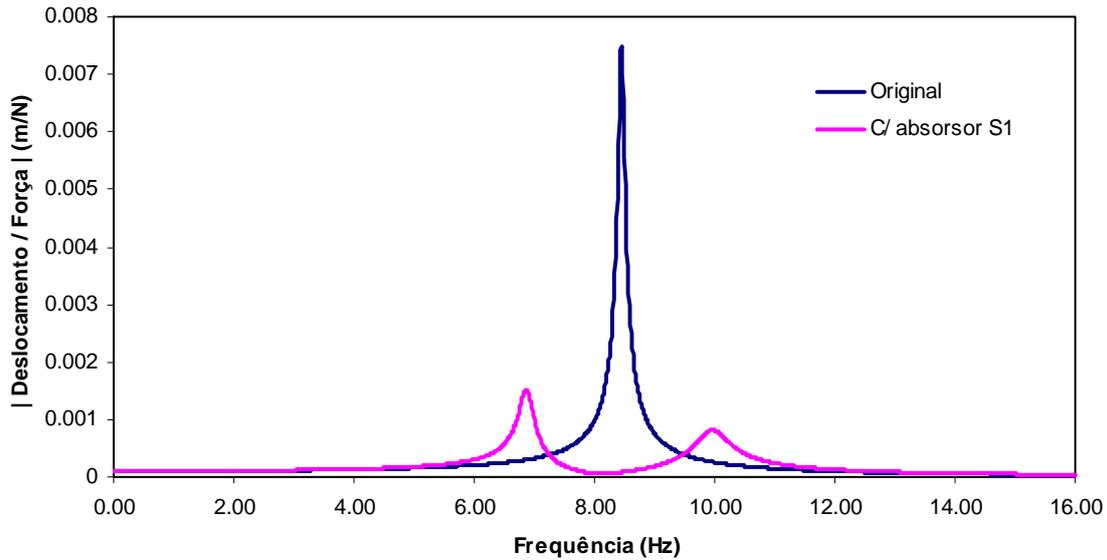


Fig. 4.3 – FRF da estrutura original e da estrutura com o absorSOR S1 instalado.

A eficiência alcançada com a utilização do sistema de absorção pode ser quantificada através de uma expressão que considera a relação entre o maior pico do módulo da FRF original e com absorSOR:

$$\text{Redução (\%)} = \left( 1 - \frac{A_{c/abs}}{A_{orig}} \right) \times 100 \quad (4.2)$$

Aplicando essa expressão na FRF ilustrada na Fig. 4.3, a redução decorrente da instalação do absorSOR S1 pode ser estimada neste caso em 80 %, a qual é bastante significativa. De uma maneira geral, a adoção de maiores massas para os absorsores implicam em maiores níveis de reduções desde que os mesmos sejam devidamente calibrados. MAGLUTA [17] aponta em seu trabalho que, a partir de uma relação de massa  $\mu$  entre a massa do absorSOR e massa modal da estrutura de aproximadamente 0.20, a adição de massa não acarreta em grandes ganhos de eficiência. Na presente análise a relação de massa utilizada encontra-se na faixa de 0.14. Isso significa que a busca por uma eficiência maior deste dispositivo não pode partir pelo caminho do acréscimo de massa. Sendo assim, o acréscimo de eficiência deve ser alcançado por meio de uma busca pela calibração ótima do sistema de absorção ou alternativamente, pela adoção de múltiplos absorsores como será visto mais adiante. Mesmo porque a utilização de relações de massas elevadas tem um forte limitante prático, principalmente para estruturas que não foram projetadas considerando esta sobrecarga.

Uma vez que a massa do absorvor é tomada como fixa, a calibração deste dispositivo se dá pela escolha da rigidez  $k_a$  e do coeficiente de amortecimento  $c_a$  que conduzam às melhores respostas estruturais. Esses dois parâmetros são encontrados comumente na literatura, de forma indireta, através da relação  $\alpha$  entre a frequência natural do absorvor e da estrutura e da taxa de amortecimento  $\xi_a$  do absorvor. No caso do absorvor S1 adotado em [17], cuja resposta da estrutura já foi ilustrada na Fig. 4.3, esses parâmetros podem ser estimados em  $\alpha \cong 0.96$  e  $\xi_a \cong 4.0\%$ . As Fig. 4.4 (a-b) esboçam um estudo paramétrico realizado para essa viga onde é mostrado o comportamento do módulo da FRF da estrutura adicionada do absorvor S1 variando-se um destes dois parâmetros por vez.

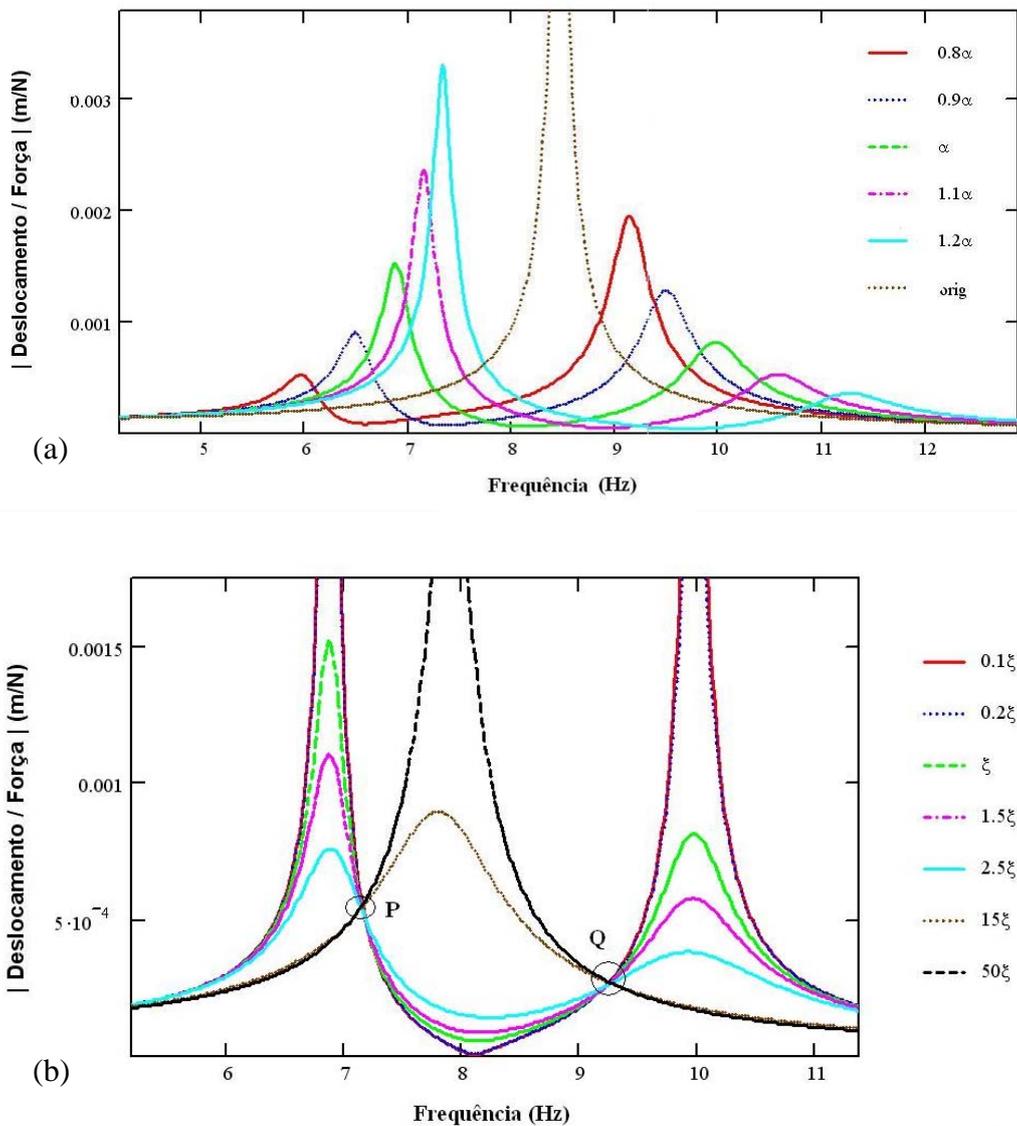


Fig. 4.4 – FRF do sistema estrutura + absorvor S1 variando-se  $\alpha$  (a) e  $\xi_a$  (b).

Analisando a Fig. 4.4.a, é possível notar que para valores de  $\alpha$  menores que o adotado preliminarmente, o valor máximo das respostas se dá no 2º pico da FRF, referente ao modo 1.b. À medida que o valor desse parâmetro aumenta, percebe-se que a amplitude da FRF para esse modo 1.b diminui ao passo que o 1º pico, associado ao modo 1.a aumenta, passando este então a possuir a amplitude máxima da resposta. Isso mostra que a influência do parâmetro  $\alpha$  na calibração do absorvedor se dá no balanceamento da Função de Transferência. Já a variação do parâmetro  $\xi_a$  ilustrada na Fig. 4.4.b indica que o efeito deste na calibração do absorvedor se dá através da uniformização das amplitudes das respostas. À medida que esse parâmetro cresce a amplitude da “anti-frequência”, vale compreendido entre os dois picos [17], sobe ao passo que a amplitude desses picos cai.

Portanto, a calibração do absorvedor consiste na manipulação destes dois parâmetros de tal forma que os níveis de redução, dados pela expressão (4.2) sejam maximizados. No caso, o  $\alpha$  a ser obtido, que está relacionado com a calibração da rigidez da mola do absorvedor, corresponde àquele que conduza a uma FRF a mais balanceada possível, isso é, cujos dois picos sejam aproximadamente de mesma magnitude. Da mesma maneira o  $\xi_a$ , associado com a calibração da constante de amortecimento, corresponde àquele que acarrete numa uniformização desta FRF. Sendo assim é possível afirmar, pelo que foi discutido e pelo disposto nas Fig. 4.4 (a-b), que na calibração deste sistema de absorção, os parâmetros ótimos encontram-se nos intervalos  $0.9\alpha < \alpha_{ot} < 1.0\alpha$  e  $2.5\xi_a < \xi_{ot} < 15\xi_a$ .

A estimativa dos parâmetros ótimos pode-se dar então por meio de buscas numéricas ou analíticas. Voltando à análise da Fig. 4.4.b é possível constatar que a variação de  $\xi_a$  não afeta a resposta da FRF em dois pontos, designados P e Q. Isso indica que os dois parâmetros  $\alpha$  e  $\xi_a$  podem ser trabalhados separadamente. DEN HARTOG [22] partindo dessa premissa demonstrou analiticamente que a calibração ótima do absorvedor é obtida seguindo a seguinte estratégia: o  $\alpha$  ótimo é atingido quando do atendimento da condição de que as magnitudes da FRF nos pontos P e Q sejam iguais, o que gera uma FRF perfeitamente balanceada. Em seguida obtêm-se o  $\xi_a$  ótimo pelo atendimento de que a variação dessas magnitudes na frequência seja igual a zero.

Desse modo, a FRF obtida utilizando um absorvedor calibrado através das expressões de Den Hartog fornece uma boa estimativa da redução máxima possível. Essas expressões podem ser escritas em função de uma dada relação de massa  $\mu_{ef}$  entre o absorvedor e a massa efetiva da estrutura:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mu_{ef}}$$

$$\xi_a = \sqrt{\frac{3\mu_{ef}}{8(1 + \mu_{ef})}}$$
(4.3)

A massa efetiva da estrutura corresponde à massa modal equivalente para o ponto em que está situado o absorvedor, dada por  $m_p / \phi^2$ , onde  $\phi$  é a coordenada modal do ponto [25].

A Fig. 4.5 ilustra a FRF obtida utilizando as expressões de Den Hartog para um absorvedor de 0.5 kg ( $\mu = 0.14$ ) primeiramente situado no meio do vão e depois a um quarto do vão, sendo apresentadas estas respostas ao lado das produzidas pela calibração preliminar.

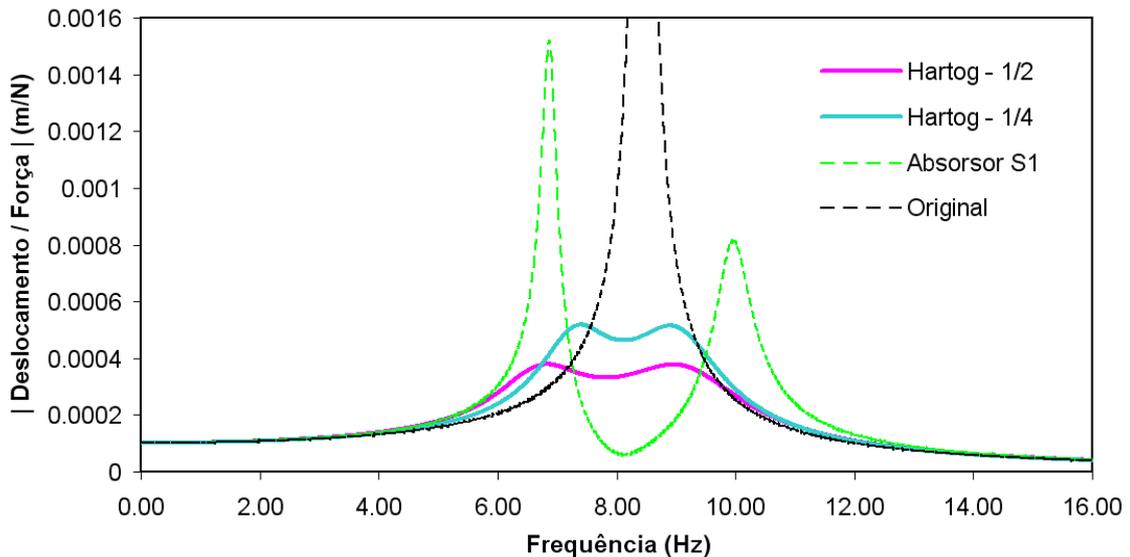


Fig. 4.5 – Resposta ótima da FRF da estrutura utilizando Den Hartog.

Observa-se pela Fig. 4.5 que as respostas estimadas pelas expressões de Den Hartog apresentam níveis de redução bem superiores aos obtidos utilizando a calibração preliminar, para as duas posições testadas. A redução para o caso do absorvedor situado no

meio do vão pode ser estimada em 95 % enquanto que para o caso do absorvedor situado a um quarto do vão essa redução pode ser estimada em aproximadamente 93 % em contraposição aos 80 % estimados para o absorvedor adotado inicialmente.

De fato, como a taxa de amortecimento dessa estrutura é muito baixa (valor estimado de 0.68 % [17]), o modelo analítico dessa viga adicionada de um absorvedor se torna muito próximo do modelo clássico investigado por Den Hartog, onde o sistema principal não possui amortecimento, conduzindo desta maneira às reduções máximas para esta estrutura e aos parâmetros ótimos para este absorvedor. Pode-se demonstrar que para valores de taxa de amortecimento superiores aos estimados para esta viga, os pontos P e Q ilustrados não estão bem definidos e, por conseguinte, a estratégia adotada por Den Hartog que permitiu a obtenção das expressões (4.3) difere da calibração ótima. Neste caso é necessária uma busca numérica para obter esses parâmetros ótimos.

É possível concluir também que a colocação do absorvedor fora do ventre do modo acarreta numa perda inevitável de eficiência. Entretanto, esta perda pode ser menos significativa, desde que seja considerado no projeto deste dispositivo que a calibração ótima depende do ponto de instalação do mesmo.

Embora a adoção de um absorvedor tenha sido bastante eficiente na redução dos picos da FRF, a taxa de amortecimento necessária para o absorvedor é extremamente elevada, na faixa de 22 % (para o caso do absorvedor a um meio do vão) a 16% (absorvedor situado um quarto do vão), tornando-se muito difícil de ser alcançada na prática. Além disso, incertezas quanto à aferição da frequência natural da estrutura e quanto à calibração dos absorvedores ao longo do tempo podem comprometer a eficiência destes dispositivos. Esta última pode ser contornada por uma manutenção preventiva do sistema absorvedor. Já a incerteza quanto à aferição da frequência natural é inerente ao comportamento estrutural visto que as ações, que em geral não são determinísticas, como por exemplo, de cargas de multidão, interagem com a estrutura, afetando suas características modais [4].

Uma alternativa seria a adoção de mais de um absorvedor atuando sobre a estrutura. A idéia consiste em distribuir a massa total do absorvedor em vários com massas menores, sendo cada qual calibrado para trabalhar numa determinada frequência. Como será visto mais adiante, isso proporciona maior confiabilidade ao sistema de absorção, além do que como as massas são menores, as forças dos absorvedores sobre a estrutura e por consequência, as tensões locais, também o são.

Uma nova variável que surge neste caso é o “espalhamento” em frequência dos absorsores. Essa variável pode, de um modo geral, ser representada por um parâmetro adimensional  $\beta$ , designado simplesmente por “largura de banda normalizada” [28], dado pela relação da diferença entre a maior e a menor frequência desses absorsores pelo valor médio das frequências desses sistemas. No caso em que  $n$  sistemas absorsores são instalados, distribuídos uniformemente numa faixa de frequência,  $\beta = (\alpha_n - \alpha_1) / \alpha_{médio}$  e a frequência de calibração de um  $j$ -ésimo absorsores qualquer deste conjunto é obtida pela seguinte expressão:

$$\alpha_j = \alpha_{médio} \left[ 1 + \left( j - \frac{n+1}{2} \right) \frac{\beta}{n-1} \right] \quad (4.4)$$

Sendo assim, considere então que o absorsores S1 instalado no meio do vão fosse substituído por um conjunto de dois ou três sistemas absorsores, designados respectivamente por S2 e S3, com a mesma relação de massa para todos os sistemas totalizando a mesma relação de massa em S1,  $\mu \cong 0.14$ , com  $\alpha_{médio} \cong 0.96$  tal como as taxas de amortecimento destes sistemas fossem mantidas as mesmas do absorsores preliminar, ou seja,  $\xi_a \cong 4.0\%$ . Arbitrando  $\beta = 0.20$  para esses dois conjuntos, são obtidos para os parâmetros  $\alpha$  dos sistemas absorsores em S2 e S3, respectivamente: S2.a ( $\alpha \cong 0.86$ ) e S2.b ( $\alpha \cong 1.06$ ); S3.a ( $\alpha \cong 0.86$ ), S3.b ( $\alpha \cong 0.96$ ) e S3.c ( $\alpha \cong 1.06$ ). Por conseguinte, têm-se assim definidas as calibrações dos dois conjuntos.

As ferramentas desenvolvidas neste trabalho já foram testadas para as respostas obtidas em termos dos parâmetros modais do sistema na situação em que um absorsores é adicionado à estrutura demonstrando o bom funcionamento das duas formulações implementadas. Com o intuito de avaliar se o mesmo vale para a situação em que múltiplos absorsores estão adicionados, foi realizado um teste no qual foram instalados os dois sistemas de absorção do conjunto S2 sendo o primeiro absorsores, S2.a, localizado no meio do vão e o segundo, S2.b, situado a um quarto do vão da viga. A Tabela 4.3 mostra a correlação dos parâmetros modais obtidos pelas duas formulações desenvolvidas. As coordenadas modais dos absorsores estão, como na verificação anterior, normalizadas em relação às coordenadas modais do ventre do modo.

Tabela 4.3 – Parâmetros modais, correlação formulação analítica x numérica para a estrutura com o sistema S2.

Modo		Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortec. (%)	Coordenadas Modais	
				S2.a	S2.b
1.a	Analítico	6.75	2.58	6.76 $\angle$ -7.41°	1.65 $\angle$ -0.68°
	Numérico	6.75	2.58	6.74 $\angle$ -7.38°	1.65 $\angle$ -0.62°
1.b	Analítico	8.32	3.14	3.36 $\angle$ 187.09°	5.35 $\angle$ -4.44°
	Numérico	8.30	3.13	3.41 $\angle$ 187.15°	5.49 $\angle$ -4.25°
1.c	Analítico	9.81	3.12	1.24 $\angle$ 185.80°	3.38 $\angle$ 188.50°
	Numérico	9.80	3.08	1.25 $\angle$ 185.89°	3.32 $\angle$ 188.37°

A boa correlação entre os valores numéricos e os analíticos da Tabela 4.3 comprova mais uma vez a boa performance das ferramentas desenvolvidas. Em especial, esses parâmetros modais encontrados atestam que o modelo analítico proposto neste trabalho pode ser utilizado para o projeto de múltiplos absorsores instalados em quaisquer pontos desde que a estrutura possua frequências naturais bem espaçadas. Desta forma, as próximas análises neste item podem ser conduzidas apenas com a formulação analítica.

As coordenadas modais dos absorsores S2.a e S2.b mostram que a adição de dois absorsores funciona de maneira semelhante a situação de um sistema com um absorsores: no modo 1.a, os dois absorsores acompanham o deslocamento da estrutura; no modo 1.b, o absorsores S2.b acompanha o movimento da estrutura ao passo que o absorsores S2.a se move em sentido contrário; por fim no modo 1.c ambos os absorsores se movem em sentido contrário ao movimento da estrutura. Além disso, a boa correlação entre as coordenadas desses sistemas obtidas pelas duas formulações mostra que a introdução do sistema de absorção na viga não altera as formas modais dos modos gerados em relação à forma do modo original.

O próximo passo da análise foi a simulação da instalação dos dois conjuntos de sistemas de absorção S2 e S3 já definidos anteriormente com todos os dispositivos situados no meio do vão da viga. A Fig. 4.6 apresenta a FRF da viga com esses dois conjuntos, juntamente com as respostas obtidas para o sistema S1 e a estrutura original.

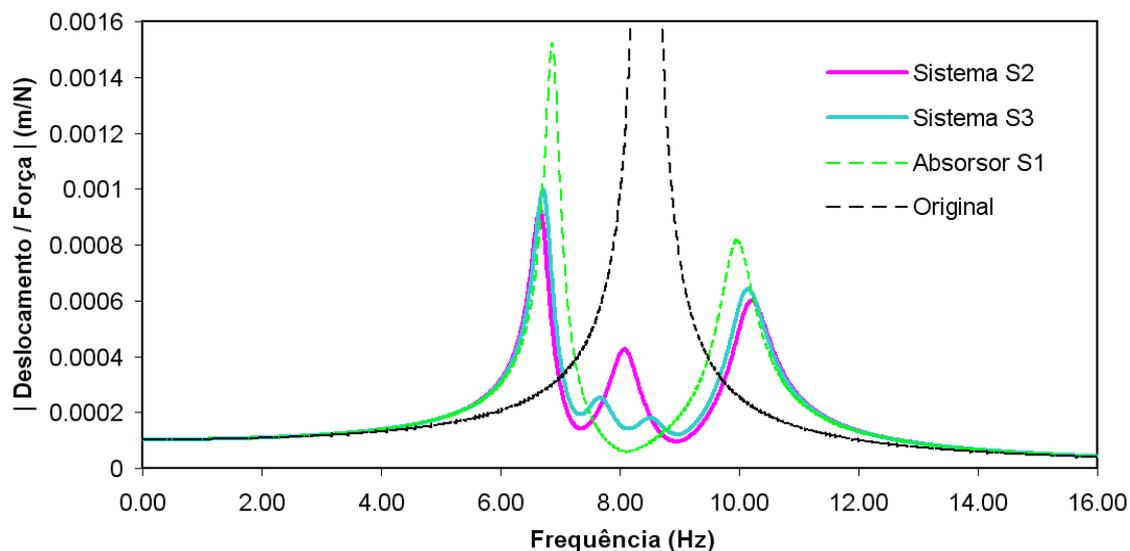


Fig. 4.6 – FRF da estrutura adicionado de 2 ou 3 absorsores derivados do absorvor preliminar.

Como pode ser observado na Fig. 4.6, a instalação de cada sistema de absorção implica no aumento de um modo de vibração em torno da frequência natural da estrutura original e, as “anti-frequências” correspondem às frequências nas quais a calibração dos absorsores foi realizada. Como o  $\beta$  arbitrado é igual para esses dois casos, pode-se observar que as “anti-frequências” dos extremos coincidem.

De um modo geral, a calibração de um sistema de redução com  $n$  absorsores de massas iguais pode ser realizada então através do ajuste de três parâmetros fundamentais:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\xi_a$ . Para um melhor entendimento da influência de cada um destes parâmetros no comportamento estrutural apresentam-se nas Fig. 4.7 (a-c) os resultados obtidos com o estudo paramétrico realizado da viga com o conjunto de sistemas S3 situados no meio do vão.

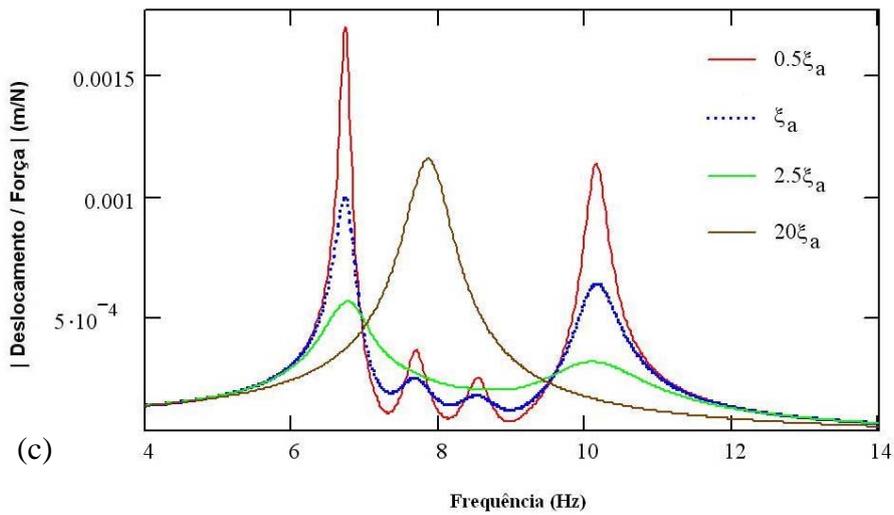
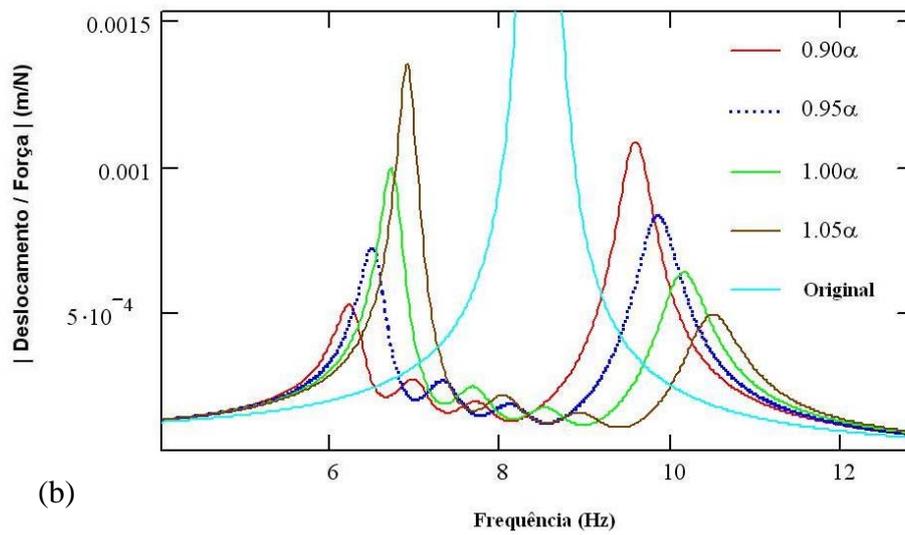
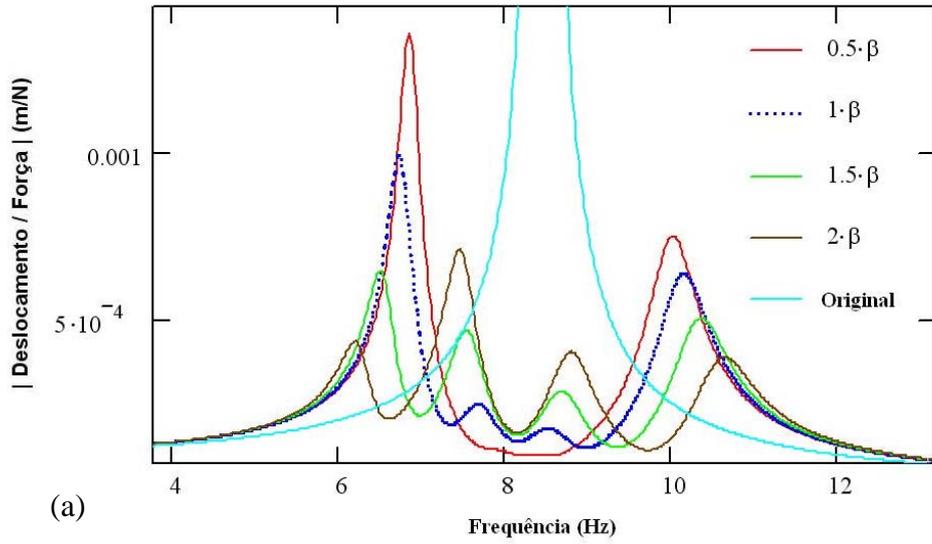


Fig. 4.7 – FRF do sistema estrutura + S3 variando-se  $\beta$  (a)  $\alpha$  (b) e  $\xi_a$  (c).

A Fig. 4.7.a mostra que à medida que o parâmetro  $\beta$  aumenta há um “alargamento” da banda de frequências entre o primeiro e o último pico, e que as amplitudes máximas tendem a se deslocar dos picos das extremidades para os centrais. Isso significa que a influência do parâmetro  $\beta$  na FRF se dá no sentido de uniformizar as amplitudes dos picos. Observa-se nas Fig. 4.7 (b) e (c) as quais apresentam, respectivamente, os resultados associados às variações dos parâmetros  $\alpha$  e  $\xi_a$ , um comportamento bastante similar ao apresentado para um sistema com um único absorvedor, isto é, o parâmetro  $\alpha$  afeta a simetria entre os picos, ao passo que  $\xi_a$  influencia a magnitudes dos picos e os vales da FRF.

Apesar de esse estudo paramétrico servir para apontar a influência de cada um dos parâmetros, e de se observar na Fig. 4.7.c a existência dos pontos P e Q tal como na Fig. 4.4.b, não existem modelos teóricos para a obtenção dos parâmetros ótimos conforme apresentado para um único dispositivo. Assim sendo, a calibração ótima para múltiplos absorvedores só pode ser obtida numericamente, ou alternativamente, por técnicas variacionais como as utilizadas por IGUSA e XU [31].

Embora expressões analíticas com as de Den Hartog não existam para múltiplos absorvedores, as expressões obtidas por JANGID [34] por meio de ajustes de curvas oriundas de buscas numéricas para um modelo clássico como o investigado por Den Hartog, onde o sistema principal não possui amortecimento, fornecem uma boa estimativa da calibração ótima para múltiplos absorvedores. Essas expressões podem ser encontradas no ANEXO B. As premissas adotadas nesta formulação são semelhantes às adotadas para os conjuntos de absorvedores S2 e S3 do estudo preliminar. A calibração dos sistemas de absorção consiste na distribuição uniforme das frequências dos absorvedores podendo ser escrita em função dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\xi_a$  com a diferença que, de modo a se tirar vantagem da fabricação homogênea das molas, seguindo a proposta de XU e IGUSA [28], a rigidez é tomada como fixa variando-se a massa destes dispositivos.

Sendo assim, as expressões de Jangid podem ser encaradas como uma generalização das expressões de Den Hartog para um sistema com múltiplos absorvedores instalados. Entretanto, essas expressões foram encontradas para a situação em que todos os absorvedores estão situados no mesmo ponto. Por questões de disponibilidade do espaço físico necessário o sistema de absorção nem sempre pode ficar concentrado num

mesmo local da estrutura. A idéia no presente trabalho consiste em distribuir esses sistemas absorsores ao longo da estrutura. Apesar de ser esperada uma perda de eficiência, visto que parte dos absorsores acaba ficando distante do ventre do modo, essa medida apresenta vantagens práticas de instalação que podem prevalecer na escolha do sistema de absorção a ser adotado.

Como as expressões de Jangid não são aplicáveis para essa situação, para a obtenção da calibração ótima de um conjunto de sistemas de absorção distribuídos na estrutura, foi implementado um procedimento de otimização acoplado à formulação analítica. A estratégia adotada foi a aplicação de um procedimento que contemplasse a minimização dos máximos do módulo da FRF da estrutura e ao mesmo tempo considerasse a minimização das diferenças entre os picos e vales da FRF, de modo que a mesma ficasse o mais “balanceada” possível. Desse modo, tem-se um problema de Otimização Multi-objetivo, em que se busca a melhor solução atendendo a dois ou mais objetivos em geral conflitantes, demandando a utilização de ferramentas mais sofisticadas que as disponíveis pelo pacote do MathCad [52], como por exemplo, a técnica de otimização “Goal Programming” utilizada por MAGLUTA [17].

No presente estudo, este problema foi contornado através da adoção de uma Função Alvo que considerasse os dois objetivos ponderados por pesos. Em síntese, o problema em questão consiste na minimização de uma Função Alvo dada pela seguinte equação:

$$F(Y) = P_1 \text{Max}|H(\omega)| + P_2 \sum_{i=1}^n |A_i - \bar{A}| \quad (4.5)$$

onde,  $A_i$  é o  $i$ -ésimo pico ou vale da FRF,  $\bar{A}$  a média dos picos e vales, e  $P_1$  e  $P_2$  pesos adotados para ponderar a importância dada a cada um dos objetivos dentro da Função Alvo.

Obtêm-se como resultado da minimização da Função Alvo as variáveis de decisão  $Y$ , que fornecem os parâmetros ótimos dos absorsores. Foram escolhidas como variáveis de decisão, as relações entre a frequência natural de cada absorsor e a frequência natural da estrutura,  $\alpha_i$ , e a taxa de amortecimento dos absorsores,  $\xi_a$ . Para delimitar as faixas em que serão realizadas as buscas pelos parâmetros ótimos, foram impostas as seguintes restrições:

$$\begin{aligned}
\xi_{\text{inf}} &\leq \xi_a \leq \xi_{\text{sup}} \\
\alpha_{\text{inf}} &\leq \alpha_1 \leq \alpha_{\text{sup}} \\
&\vdots \\
\alpha_{\text{inf}} &\leq \alpha_n \leq \alpha_{\text{sup}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde, os índices representam limites superiores e inferiores dentro dos quais espera-se que os parâmetros possam variar. Tem-se assim expressa a estratégia adotada para a obtenção dos parâmetros ótimos,  $\xi_{ot}$  e  $\alpha_{ot}$ .

Portanto, a estratégia adotada difere da utilizada no estudo paramétrico, tal como da proposta por XU e IGUSA [28] e utilizada por JANGID [34] onde a calibração do sistema de absorção se dá pela obtenção dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\xi_a$  já apresentados. Uma consequência direta disto é que o número de variáveis de decisão depende do número de absorvedores. A escolha por essa estratégia em detrimento da abordada anteriormente é justificada pelo fato de que, como os absorvedores estão posicionados em locais distintos, a calibração dos absorvedores distribuídos uniformemente na frequência e, portanto, a utilização do parâmetro  $\beta$ , não garante uma FRF balanceada.

Como a distribuição das frequências dos absorvedores não segue um padrão, para que a solução ótima não tendesse sempre para massa total concentrada no absorvedor situado na coordenada de maior amplitude modal da estrutura, as massas dos absorvedores são fixadas, estando distribuídas uniformemente nesses dispositivos.

Com o intuito de avaliar o desempenho desse procedimento de otimização, a calibração de um sistema com apenas um absorvedor instalado na estrutura foi testada. Após a manipulação dos pesos, foram obtidos com boa acurácia os mesmos parâmetros  $\alpha$  e  $\xi_a$  expressos nas fórmulas de Den Hartog. Isso prova que o procedimento implementado funciona. Entretanto, tendo em vista problemas de convergência, a busca pelos parâmetros ótimos pode se tornar bastante trabalhosa visto que o processo exige uma varredura dos pesos da Função Alvo que conduzam às soluções ótimas.

Como a base do procedimento de otimização reside na minimização do máximo do módulo da FRF da estrutura, este procedimento pode ser chamado simplesmente de *MinMax*. A fim de verificar a eficiência desta metodologia, foi realizada uma análise buscando os parâmetros ótimos para dois, três e cinco absorvedores todos instalados no ventre do modo, isto é, no meio do vão. As FRF's associadas a estes resultados são

apresentadas na Fig. 4.8 comparadas com as obtidas utilizando-se os parâmetros de Jangid. Adicionalmente, nesta figura também é apresentada a resposta obtida para um único sistema calibrado utilizando a formulação de Den Hartog.

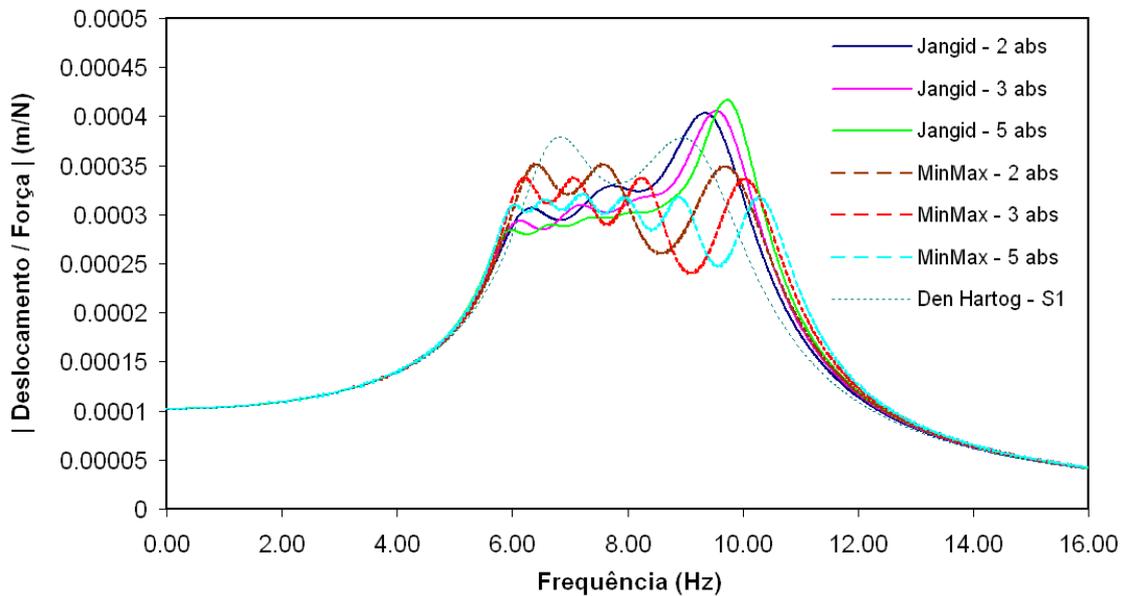


Fig. 4.8 – Resposta ótima da FRF da estrutura utilizando Jangid e *MinMax*.

Pode-se observar na Fig. 4.8 através das respostas obtidas em termos das FRF's que os níveis de redução adotando-se múltiplos absorsores ao invés de apenas um, desde que devidamente calibrados, encontram-se na mesma faixa dos apresentados para o caso de um absorsores. As reduções obtidas aplicando as expressões de Jangid podem ser estimadas em aproximadamente 94.5 % para as três situações analisadas (dois, três ou cinco absorsores instalados) ao passo que as reduções obtidas empregando o procedimento *MinMax* podem ser estimadas em 95.3, 95.5 e 95.7 %, respectivamente.

Estes resultados demonstram que o procedimento proposto apresenta uma boa consistência em relação ao de Jangid, e as diferenças apresentadas pelos dois métodos podem ser devidas ao fato de a estratégia de otimização adotada por Jangid diferir da apresentada neste trabalho. O estudo de Jangid foi dirigido para estruturas sob excitação de base, tendo como objetivo a minimização do FAD (“Fator de Amplificação Dinâmica”) dos deslocamentos. Além disso, os absorsores são distribuídos de maneira uniforme ao longo de uma faixa de frequência, variando-se a massa e fixando-se a rigidez dos absorsores. No procedimento *MinMax*, as massas são, conforme já mencionado, iguais e o programa possui liberdade quanto à distribuição em frequência

dos absorsores. A Fig. 4.9 ilustra a comparação da distribuição dos parâmetros  $\alpha$  obtidos com as duas metodologias.

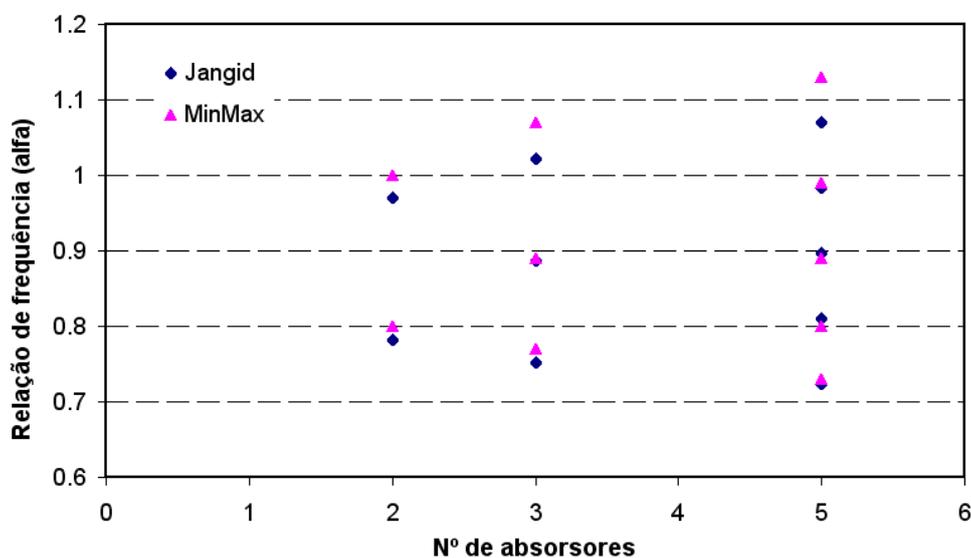


Fig. 4.9 – Distribuição na frequência dos absorsores.

Percebe-se pelas reduções obtidas pelo procedimento *MinMax* que a adoção de um número maior de absorsores acarreta numa ligeira melhora da eficiência, porém pouco representativa. O grande ganho da opção por vários absorsores pode ser avaliado, por exemplo, em termos das menores taxas de amortecimento necessárias na calibração ótima. As taxas de amortecimento obtidas pela formulação de Jangid para as análises realizadas são na ordem de 14.6, 11.6 e 9.0% para dois, três ou cinco absorsores instalados, respectivamente, ao passo que as obtidas pela busca numérica são um pouco inferiores, 12.4%, 9.0 e 7.0%, respectivamente. Porém, estas taxas são bem inferiores que a estimada para o caso de apenas um absorsor, 22 %.

Estes resultados demonstram que a adoção de mais de um absorsor parece ser uma solução bastante atraente, haja vista sua eficiência no que concerne aos níveis de redução obtidos e as menores taxas de amortecimento necessárias para a calibração ótima destes dispositivos. Além destas vantagens, ainda se pode salientar o fato das massas serem bem inferiores individualmente, o que traz grande facilidade prática para sua instalação.

Apesar das conclusões acerca das vantagens da adoção de múltiplos absorsores ao invés de um absorsor possuindo a mesma massa total, esta medida demanda mais espaço físico para a instalação desses dispositivos. Desse modo, a locação de todos os

absorvedores no ventre do modo, local que conduz aos maiores níveis de reduções, torna-se muitas vezes inviável em termos práticos. Uma alternativa para contornar esta limitação, seria a distribuição dos absorvedores ao longo da estrutura. Para a avaliação desta medida, foram realizadas as análises de dois, três e cinco absorvedores, como já exemplificadas anteriormente, distribuídos na viga agora da seguinte maneira:

- Dois absorvedores: um situado no meio do vão e outro absorvedor situado a um quarto do vão;
- Três absorvedores: um no meio do vão, um a um quarto do vão e outro a três quartos do vão;
- Cinco absorvedores: um no meio do vão, um a um quarto do vão, um a três quartos do vão, um a três oitavos e outro a cinco oitavos do vão livre.

Nesta situação, como os absorvedores estão situados em posições distintas, uma avaliação preliminar utilizando as expressões de Jangid perde o sentido uma vez que essas expressões foram obtidas para a situação em que todos os absorvedores estão situados na mesma posição. O procedimento *MinMax* desenvolvido, aliado à formulação analítica apresentada, permite a obtenção da calibração ótima para absorvedores situados em posições distintas. Uma variável a mais que surge agora é a distribuição em frequência dos absorvedores em função de suas posições na estrutura. Se esta variável não for devidamente considerada no processo de otimização, a resposta pode convergir para um mínimo local.

É razoável se afirmar que a distribuição em frequência dos absorvedores que conduz à solução ótima segue um padrão em função de sua posição na estrutura. Pode ser, por exemplo, que os absorvedores posicionados nas menores coordenadas modais da estrutura devam ser calibrados de modo a possuírem as frequências mais altas. Esta situação, foi chamada neste trabalho de caso A. Outra situação palpável de ocorrer, é o inverso, ou seja, os absorvedores mais próximos do ventre modal correspondem aos de calibração mais alta em frequência. Esta situação foi denominada caso B. Realizando-se a análise destas duas situações, obtêm-se as soluções ótimas para dois, três ou cinco absorvedores instalados nas posições já mencionadas. As FRF's obtidas destas análises são apresentadas na Fig. 4.10 correlacionadas com a FRF de um único absorvedor (S1) instalado no meio do vão calibrado com Den Hartog.

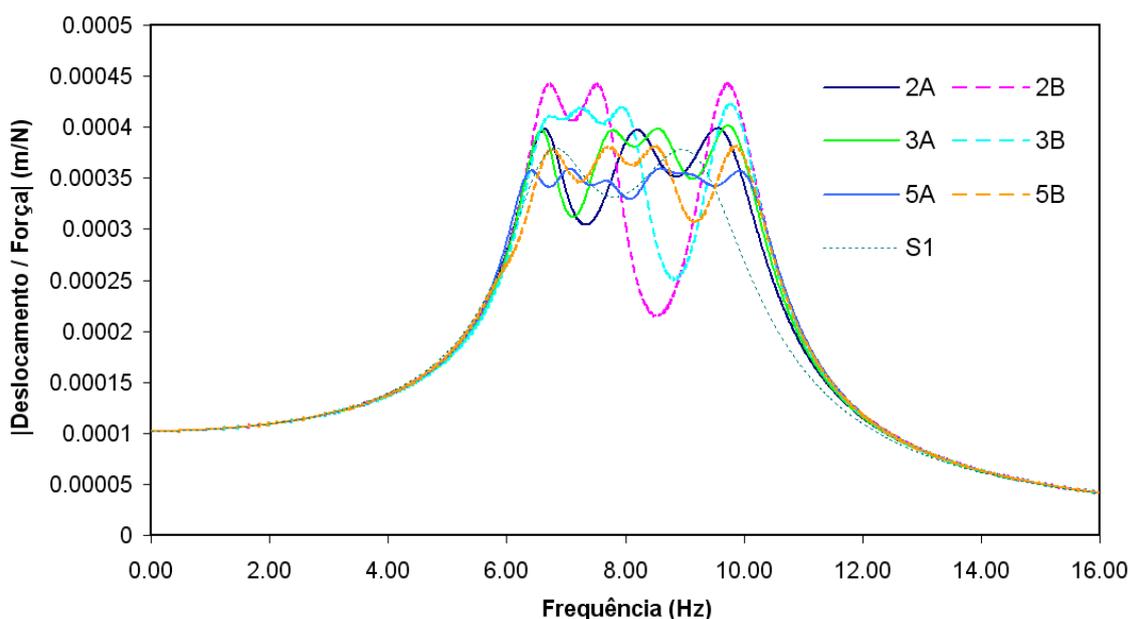


Fig. 4.10 – FRF da estrutura adicionada de 2, 3 ou 5 absorsores calibrados pelo procedimento *MinMax* para as situações A e B.

Através da Fig. 4.10 é possível concluir que, de um modo geral, a colocação dos absorsores de maneira distribuída na estrutura pode resultar em valores próximos dos níveis de reduções apresentados para o caso em que um sistema de absorção é instalado no ventre do modo. Além disso, as reduções obtidas para ambas situações estudadas A e B encontram-se na faixa de 94 a 95 %, o que demonstra através da correlação dos gráficos das Fig. 4.8 e Fig. 4.10 que a instalação de múltiplos absorsores fora do ventre por uma questão de limitação física, não implica numa perda representativa de eficiência. Os valores encontrados para as taxas de amortecimento dos absorsores também se situam na faixa dos valores obtidos anteriormente para o caso dos absorsores no ventre do modo: 10.8, 8.0 e 7.2 % para a situação A e 8.7, 7.9 e 7.8 % na situação B para dois, três e cinco absorsores instalados, respectivamente. Ainda que ambas as situações tenham apresentado boas reduções, analisando a Fig. 4.10 é possível constatar que na situação A, a FRF encontra-se mais balanceada. Isso se deve ao fato dos absorsores encontrarem-se melhor distribuídos que na situação B. Sendo assim, pode-se induzir que a calibração ótima apresentada na configuração A possui maior robustez que a calibração da configuração B e, portanto, é a estratégia mais recomendável no projeto dos absorsores.

Como era previsto, a calibração ótima dos absorsores neste caso é diferente da calibração para a configuração em que todos os absorsores estão concentrados no ventre. A Fig. 4.11 apresenta a distribuição em frequência dos absorsores para as duas configurações abordadas neste trabalho, absorsores concentrados no ventre e distribuídos ao longo da estrutura, normalizada em relação à frequência natural da estrutura.

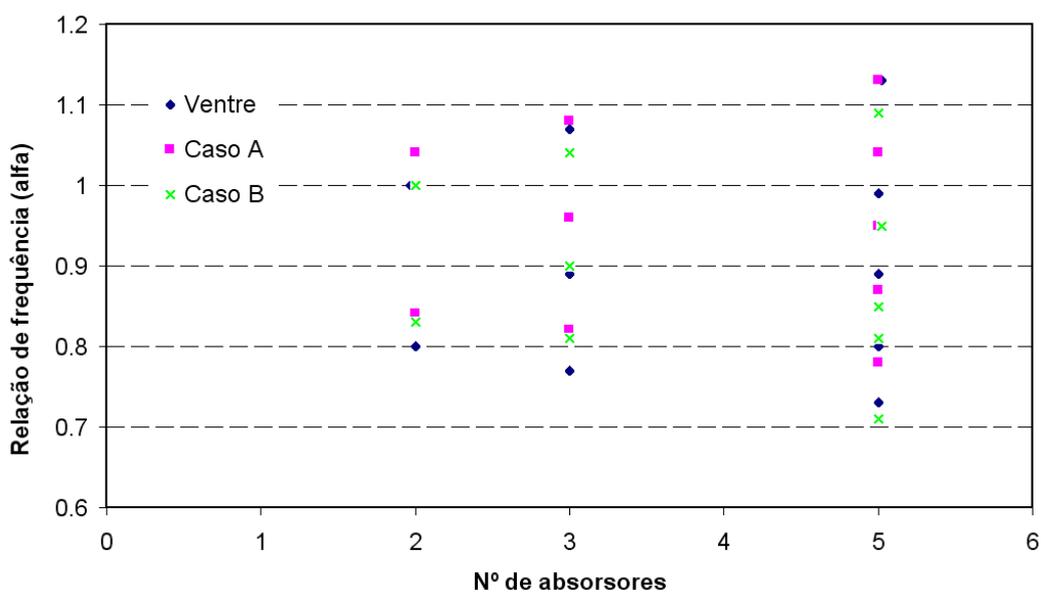


Fig. 4.11 – Distribuição na frequência dos absorsores para três situações distintas.

Comparando os valores apresentados na Fig. 4.11, é possível observar que a largura de banda de distribuição dos absorsores na frequência, para a configuração em que os absorsores estão distribuídos na estrutura, situações A e B, é menor que a largura de banda da configuração em que todos os sistemas estão concentrados no ventre. Também é possível se constatar que a situação A conduz à calibração mais balanceada dentre as três, visto que os absorsores estão espaçados de maneira mais uniforme. Igualmente, nesta situação A, a calibração média dos absorsores, ou seja, a média das relações de frequência dos absorsores é ligeiramente maior que nas demais situações. Isto pode ser explicado pelo fato de que a relação de massa efetiva é alterada uma vez que os absorsores estão posicionados em pontos distintos da estrutura.

As Fig. 4.12.a e Fig. 4.12.b apresentam, respectivamente, a redução e taxa de amortecimento obtidas com o número de absorsores ao longo da estrutura. Estes resultados são comparados com a situação em que apenas um absorsores é instalado. Cabe ressaltar que a situação “fora do ventre” apresentada nestes gráficos para fora do ventre

equivale ao caso A para 2, 3 e 5 absorsores ao passo que para um absorsores esta situação equivale a uma absorsores instalado a um quarto do vão.

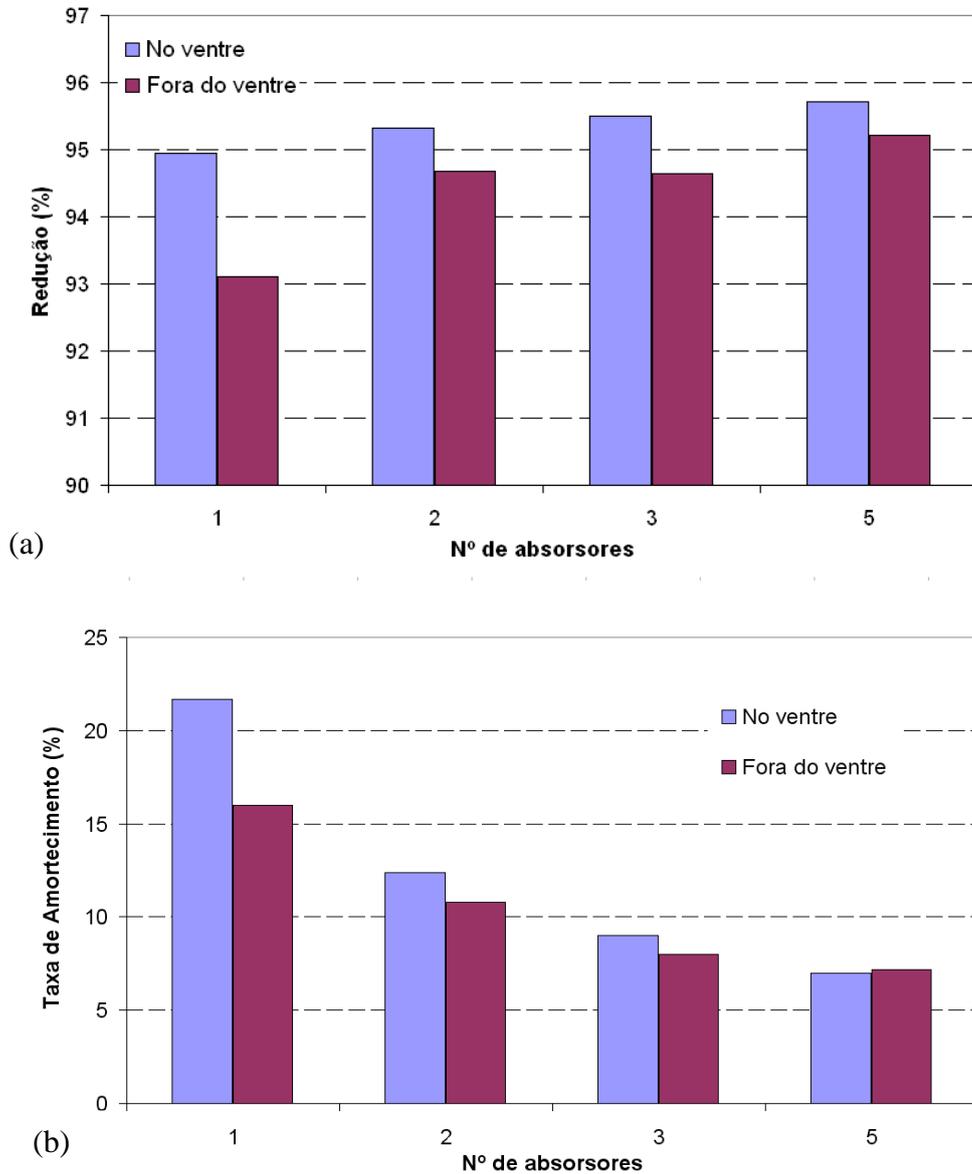


Fig. 4.12 – Comparação das reduções (a) e taxas de amortecimento (b) ótimas para múltiplos absorsores instalados no ventre do modo e distribuídos ao longo da estrutura.

Observa-se na Fig. 4.12.a que, ao se deslocar um único absorsores para fora do ventre existe uma grande perda de eficiência, porém ao se distribuir em vários absorsores este fato acaba não sendo tão relevante. Adicionalmente também pode ser observado nesta figura que à medida que é utilizado um número maior de absorsores, a eficiência geral tende a aumentar e a diferença entre estar ou não no ventre tende a cair. Outra vantagem que se pode verificar (vide Fig. 4.12.b) é que os valores necessários para as taxas de

amortecimentos apresentam um decréscimo bastante elevado à medida que é utilizado um maior número de absorsores. Estes resultados demonstram claramente a eficiência que pode ser alcançada com a utilização de vários absorsores.

## **4.2 Aplicação 2: Análise de uma Laje**

O estudo desenvolvido para uma viga utilizando-se múltiplos absorsores, calibrados de tal forma a reduzir os deslocamentos associados a um modo isolado, demonstrou que a formulação analítica apresenta uma boa correlação com a modelagem mais completa, isto é, por elementos finitos. Sendo assim, pode-se afirmar que essa formulação é mais atrativa, visto o menor custo computacional envolvido. Entretanto, esta formulação analítica do problema possui limitações. Isso se deve ao fato desta formulação partir da hipótese simplificadora de que os modos de vibração da estrutura podem ser desacoplados *a priori*, desconsiderando o efeito da interação entre os modos de vibração. Esta hipótese em geral é válida, desde que a frequência natural do modo a ser controlado esteja suficientemente espaçada das demais frequências naturais da estrutura. Conforme já mencionado, na medida em que o grau de complexidade de uma estrutura aumenta, esta premissa torna-se cada vez menos realista.

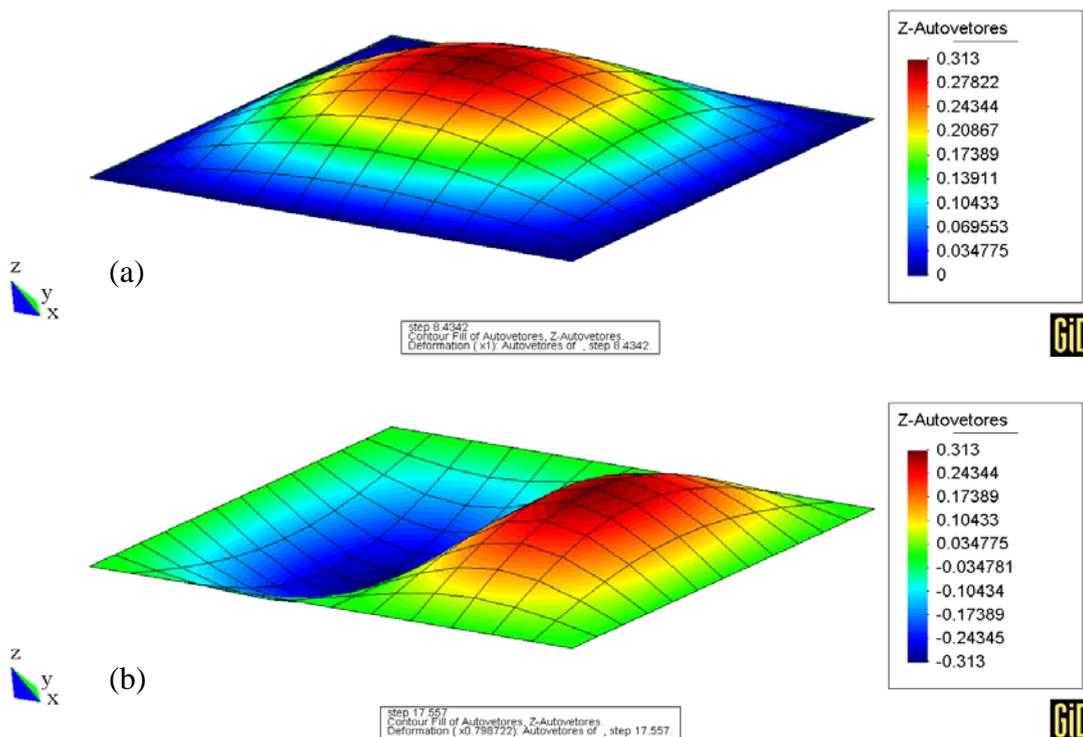
Com o objetivo de avaliar o comportamento de um sistema estrutural adicionado de múltiplos absorsores no caso em que duas ou mais frequências naturais da estrutura apresentem entre si pequenas diferenças, foi realizada a análise de uma laje a qual é apresentada neste item. Esta análise além de buscar avaliar a utilização de múltiplos sistemas de absorção para a redução dos níveis de vibração, também busca verificar a acurácia da formulação analítica comparando-se suas respostas com as obtidas pela formulação mais completa realizada através de elementos finitos.

Para esta análise foi considerada inicialmente uma placa de alumínio retangular de dimensões 2.0 m x 1.5 m com 5 mm de espessura e apoiada nos seus quatro bordos. De fato, uma placa apresentando estas características foi montada no LADEPIS e uma vista geral desta estrutura é mostrada na Fig. 4.13.



Fig. 4.13 – Vista geral da estrutura de ensaio da placa de alumínio do LADEPIS.

Essa estrutura foi modelada por elementos finitos utilizando 144 elementos de casca, sendo sua malha gerada pelo programa GID. A resolução da eq. (2.2) utilizando o módulo DIN\_0 do programa desenvolvido fornece as frequências naturais e os modos de vibração normalizados em relação à massa. As Fig. 4.14 (a-c) ilustram os três primeiros modos obtidos, sendo estes normalizados em relação à massa modal, que neste caso é estimada em 10.2 kg para todos os modos, valor equivalente a um quarto da massa total, tal como prevê a teoria clássica [43].



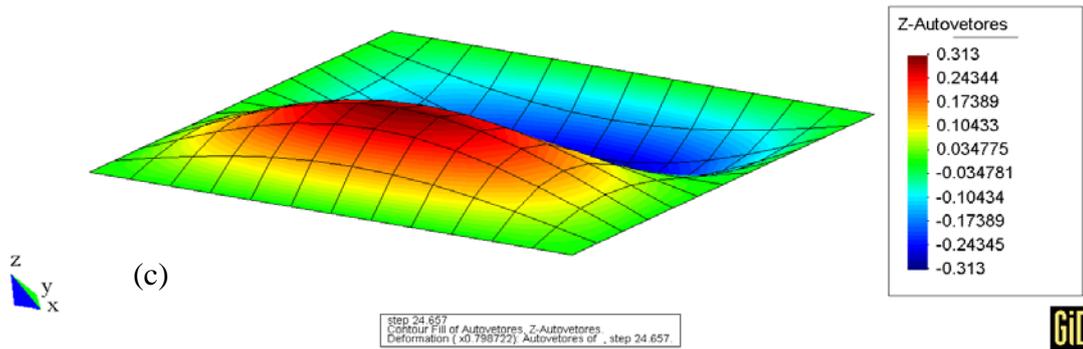


Fig. 4.14 – Modos de vibração da placa (a) 1º modo; (b) 2º modo; (c) 3º modo.

Para que todos os modos de interesse sejam detectados na FRF é necessário que o ponto escolhido para análise possua as suas coordenadas modais não-nulas. Sendo assim, para que se leve em consideração na análise os três primeiros modos de vibração da placa, foi escolhido como ponto de referência um ponto localizado a um quarto do vão livre nas duas direções da placa, i. é, localizado a 0.5 e 0.375 metros de um dos vértices da placa. Desse modo, para as análises que se seguirão a FRF da estrutura será sempre relacionada a este ponto P1.

Arbitrando em 1.0 % a taxa de amortecimento para o primeiro modo de vibração e adotando por hipótese o amortecimento de Rayleigh com  $b = 0$ , através da eq. (2.11) tem-se definida a FRF da estrutura original. Para efeito de comparação, a Fig. 4.15 apresenta o módulo da FRF desta placa no ponto P1 comparada com o módulo da FRF da viga analisada no item anterior estimada em um ponto situado a um quarto do vão com a amplitude normalizada em relação à amplitude do 1º pico da FRF da placa.

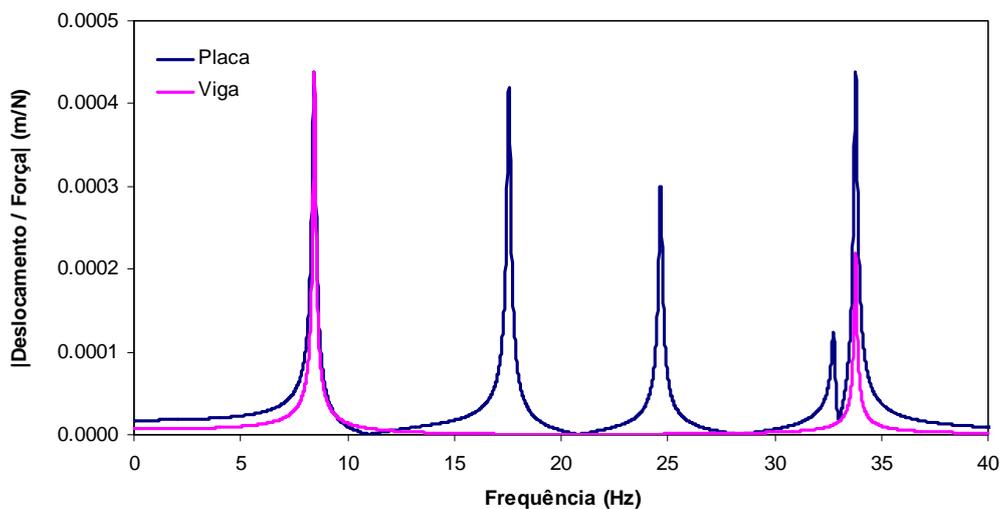


Fig. 4.15 – FRF da placa comparada a FRF normalizada da viga.

Observa-se na Fig. 4.15 que os picos referentes aos três primeiros modos da placa estão razoavelmente espaçados de seus modos adjacentes, diferentemente do que ocorre para o quarto e quinto modo. Entretanto, na faixa analisada de 0 - 40 Hz, ainda que esses modos estejam claramente espaçados, a concentração dos modos é bem maior que no caso da viga analisada no item anterior. Sendo assim, é razoável imaginar que, para uma situação em que existem múltiplos absorsores espalhados na estrutura com a finalidade de reduzir as respostas do segundo modo, por exemplo, a calibração ótima dos absorsores pode ser afetada pelos modos adjacentes, no caso o primeiro e o terceiro modo.

Com o intuito de avaliar esta situação, foram realizadas as seguintes análises: T1 - foi adicionado à estrutura um absorvedor de 0.25 kg num ponto P1 (vide Fig. 4.16) sendo o mesmo calibrado de modo a minimizar as respostas do segundo modo; T2 - foram instalados quatro absorsores espalhados uniformemente na estrutura, localizados nos pontos P1-4 (vide Fig. 4.16), totalizando a mesma massa de 0.25 kg, e também calibrados de tal forma a minimizar as respostas do segundo modo. O arranjo da instalação desses absorsores na placa está apresentado pelo desenho esquemático da Fig. 4.16.

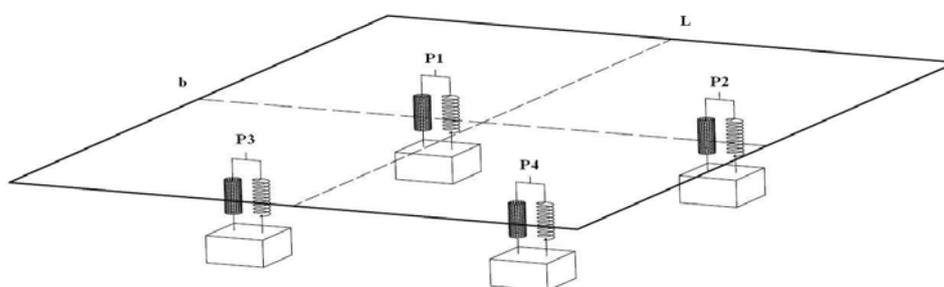
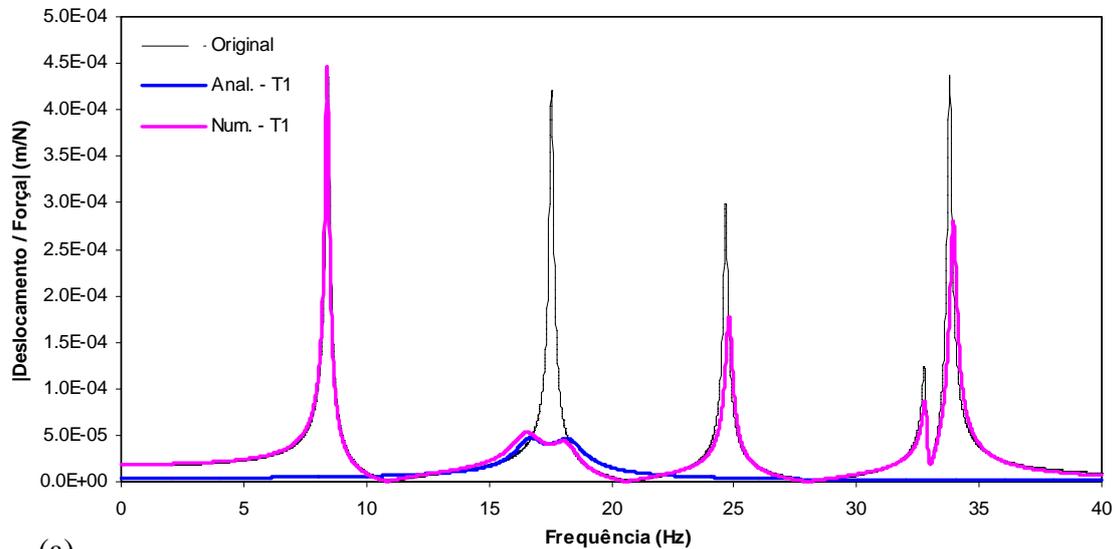


Fig. 4.16 – Arranjo da distribuição dos absorsores na placa.

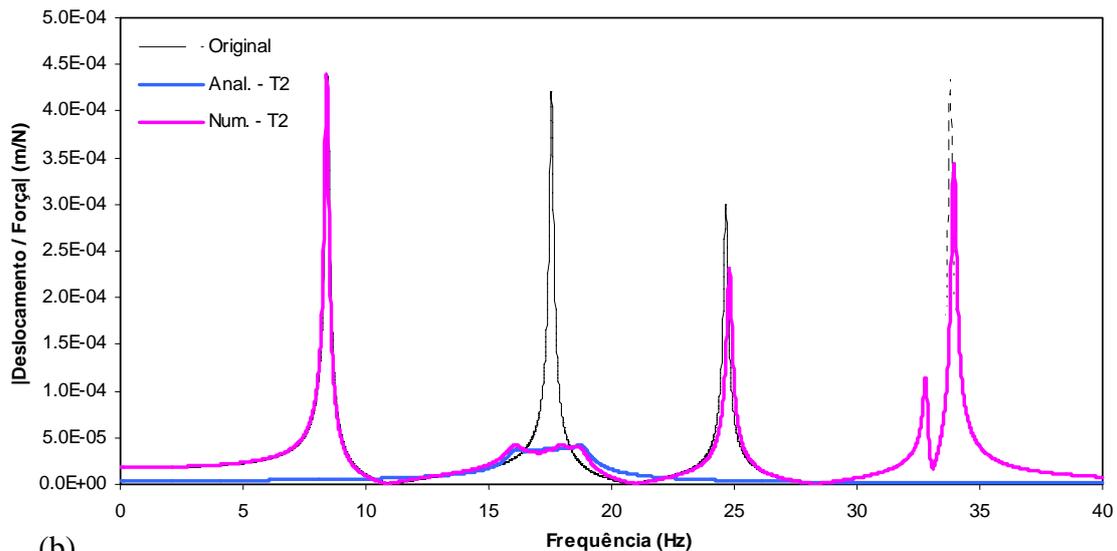
Observando a Fig. 4.16 e analisando as Fig. 4.14 (a-c) se pode constatar que os módulos das coordenadas modais da estrutura nas posições escolhidas para a instalação dos absorsores, P1-4, são iguais para a estrutura original em cada um dos três modos analisados. Estes pontos para análise foram escolhidos para permitir que se houver interferência entre os modos esta fique clara nas análises que serão apresentadas.

As calibrações ótimas dos absorsores podem ser estimadas preliminarmente pelas expressões de Den Hartog e Jangid para T1 e T2, respectivamente. A Fig. 4.17 ilustra as respostas estimadas pelo modelo analítico da estrutura condensada em 1 GL

confrontando estas respostas com obtidas pela formulação numérica (módulo DIN\_1 do programa). Ressalta-se que as massas dos sistemas absorsores em T2 apresentam seus valores decrescentes de P1 para P4.



(a)



(b)

Fig. 4.17 – FRF's da placa 2 m x 1.5 m para T1 (a) e T2 (b), confrontando modelo analítico x formulação numérica.

Observa-se pela Fig. 4.17 que, conforme era esperado, a proximidade dos modos afeta as respostas a FRF da estrutura como um todo. Comparando as respostas numéricas obtidas para T1 e T2 com as suas respectivas respostas analíticas, é possível constatar que a FRF da estrutura na faixa da frequência do 2º modo, é ligeiramente afetada pela interação com os demais modos da estrutura. Esses gráficos mostram

também que a instalação de sistemas de absorção calibrados para reduzir as vibrações associadas ao 2º modo da estrutura acaba também por afetar os demais modos.

Estes resultados demonstram que a metodologia analítica desenvolvida neste trabalho, e aplicada no item anterior para o projeto de múltiplos sistemas absorvedores com sucesso, não pode ser utilizada em uma estrutura que possua modos de vibração com frequências próximas.

Neste caso, para a obtenção da calibração ótima seria necessário um procedimento de otimização tal como apresentado no item anterior acoplado à formulação numérica desenvolvida em linguagem Fortran, de tal forma a minimizar as amplitudes de vários modos simultaneamente. Isso por consequência demandaria a utilização de ferramentas mais sofisticadas como a técnica “Goal Programming” utilizada por MAGLUTA [17] ou até mesmo uma busca utilizando algoritmos genéticos. Ainda que essas implementações não tenham sido efetuadas neste trabalho, mais algumas análises serão apresentadas, conduzidas somente com a formulação por elementos finitos.

Considerando agora que as dimensões desta placa sejam modificadas para 2.0 m x 1.8 m, a relação entre comprimento e largura da placa fica 10/9 ao invés de 4/3 e por consequência, conforme prevê a Teoria de Placas [53], a frequência do terceiro modo da estrutura se aproxima ainda mais da frequência natural do segundo modo. Isso pode ser ilustrado na Fig. 4.18, onde se tem a FRF da placa de alumínio para ambas as situações. O amortecimento utilizado para a placa 2 m x 1.8 m é equivalente (isto é, possui os mesmos coeficientes) ao arbitrado inicialmente para a placa 2 m x 1.5 m.

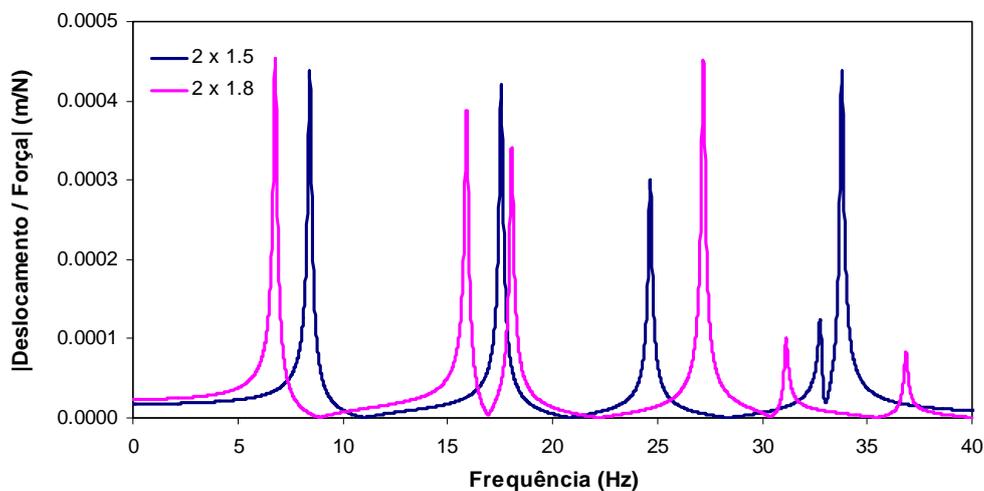


Fig. 4.18 – FRF da placa variando-se a relação largura/comprimento (b/L).

Procedendo-se da mesma maneira tal como foi feito para a placa 2 m x 1.5 m, ou seja, realizando as análises T1 e T2 e calibrando os absorsores aplicando a mesma metodologia empregada anteriormente, obtêm-se as respostas da estrutura em termos de sua FRF, ilustradas na Fig. 4.19. Como a massa modal da placa 2 m x 1.8 m é estimada em 12.2 kg, para a manutenção da relação de massa em  $\mu \cong 0.025$ , a massa total dos sistemas de absorção foi ajustada para 0.3 kg.

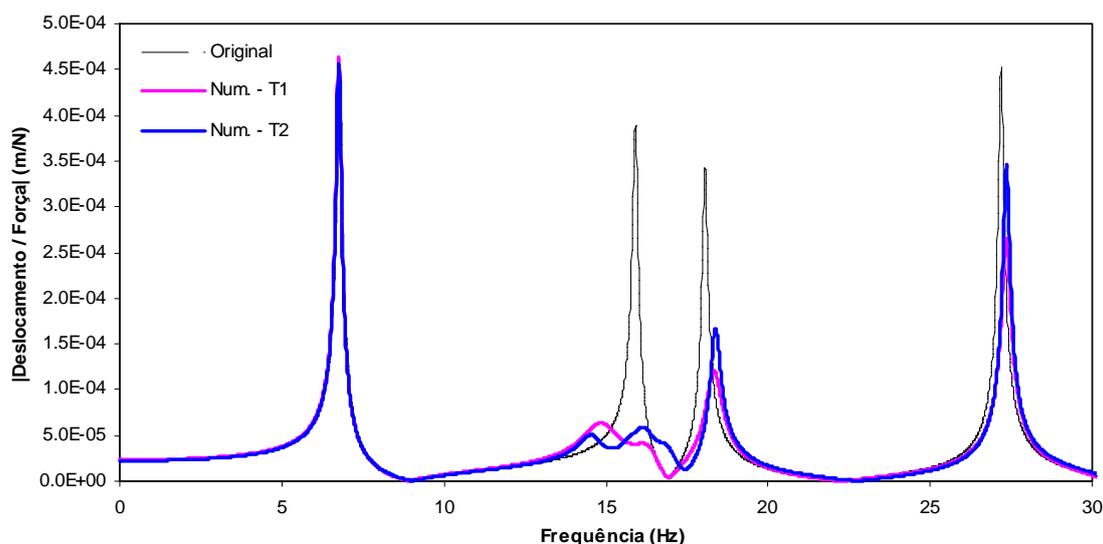


Fig. 4.19 – FRF da placa 2 m x 1.8 m para T1 e T2,  $\mu \cong 0.025$ .

Observando as respostas obtidas para T1 e T2 na placa de 2.0 m x 1.8 m ilustradas na Fig. 4.19, é possível constatar a forte interação entre o 2º e o 3º modo da estrutura. Comparando essas respostas com as respostas obtidas para a placa 2.0 m x 1.5 m ilustradas na Fig. 4.17, fica claro que quanto mais próxima a frequência natural do 3º modo for da do 2º modo, maior é a redução provocada pelos sistemas absorsores sobre o 3º modo. Adicionalmente também é possível observar que o 4º modo sofre efeitos dos absorsores. Além disso, a Fig. 4.19 mostra que a redução das amplitudes no 3º e 4º modo são maiores para a situação T1. Uma possível explicação para isso seria o fato da calibração do absorsor em T1 possuir uma taxa de amortecimento (na faixa dos 7.0%) bem maior que a obtida na calibração dos quatro absorsores em T2 (na faixa dos 3.0%).

O comportamento apresentado anteriormente segue o mesmo padrão para outras relações de massa. A Fig. 4.20 mostra as respostas obtidas seguindo a mesma metodologia para T1 e T2 utilizando na relação de massa  $\mu \cong 0.082$ , cuja massa equivale à da placa adicionada de um conjunto de sistemas totalizando 1.0 kg.

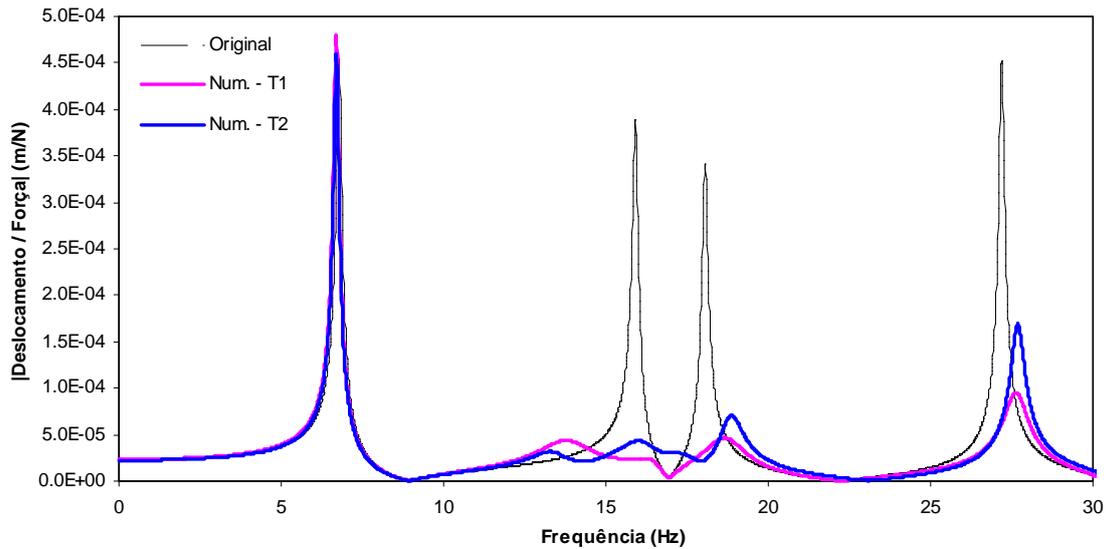


Fig. 4.20 – FRF da placa 2 m x 1.8 m para T1 e T2,  $\mu \cong 0.082$ .

Correlacionado os gráficos das Fig. 4.19 e Fig. 4.20, pode-se observar que a adoção de maiores massas ocasiona em maiores níveis de redução não só para o 2º modo como para os modos adjacentes (3º e 4º) também. Além disso, também é possível observar para a situação T2 uma tendência de formação de um patamar na faixa que compreende o 2º e o 3º modos. Uma possível explicação para isto seria o fato de que à medida que a relação de massa aumenta maior é a largura da banda de frequência na qual os absorvedores atuam e, conseqüentemente, maior é a interação entre os modos na faixa compreendida entre o 2º e o 3º modos. Desta forma, pode-se concluir que o projeto para este tipo de situação deve ser realizado através de uma análise global na qual todos os modos de vibração sejam levados em consideração e que os sistemas sejam otimizados para atuar em uma faixa de frequência que pode conter alguns modos de vibração.

## 5 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões do estudo desenvolvido neste trabalho e alguns comentários adicionais quanto a sugestões de trabalhos futuros seguindo essa mesma linha de pesquisa.

Foram desenvolvidas neste trabalho metodologias visando o projeto de múltiplos absorsores. Para a análise de uma estrutura adicionada de sistemas de absorção em que os modos de vibração da estrutura original estão bem espaçados na frequência, foi proposta uma formulação do problema no domínio da frequência que parte de um modelo analítico da estrutura condensada em 1 GL e que considera que os sistemas absorsores possam estar posicionados em quaisquer pontos da estrutura. Foi acoplada a esta formulação um procedimento de otimização com o intuito de minimizar as respostas estruturais em termos de sua FRF. Em contraposição a essa formulação, foi desenvolvida a partir da implementação de um sistema computacional em linguagem Fortran uma formulação numérica baseada num modelo da estrutura em elementos finitos que permite a análise de estruturas com frequências naturais próximas entre si. A essa ferramenta numérica desenvolvida foi integrado um conjunto de rotinas implementadas por AINSWORTH JR. [18], baseadas no Método de Arnoldi com Reinício Implícito, que permite a resolução do problema de autovalor complexo derivado da introdução dos sistemas de absorção no modelo numérico da estrutura. Correlações realizadas ao longo do trabalho comprovaram a acurácia das formulações analítica e numérica desenvolvidas.

A partir da análise de uma viga bi-apoiada adicionada de 1, 2, 3 ou 5 absorsores para reduzir as amplitudes da faixa do espectro do 1º modo de vibração foi verificado que os níveis de redução estimados pela adoção de múltiplos absorsores em comparação à adoção de apenas um absorsores com a mesma massa total encontram-se na mesma faixa, com uma ligeira melhora de eficiência para o caso em que múltiplos absorsores são adicionados e que as taxas de amortecimento necessárias para a construção dos absorsores são substancialmente inferiores a de um único sistema.

Igualmente foi constatado que o deslocamento de parte dos dispositivos para fora do ventre modal, local que conduz às maiores reduções, não implica necessariamente numa perda representativa de eficiência, tal como as taxas de amortecimento ótimas

apresentam uma leve diminuição de seus valores quando comparadas com a situação em que todos os sistemas absorvedores estão concentrados no ventre do modo. Estas características aliadas ao fato de que as menores massas isoladas dos sistemas absorvedores provocam menores níveis de solicitações e conseqüentemente geram menores níveis de tensões locais na estrutura, indicam que, de um modo geral, o projeto de múltiplos sistemas de absorção considerando uma distribuição espacial e em freqüência destes sistemas na estrutura parece corresponder a uma solução bastante interessante por conferir tanto eficiência quanto maior praticidade/viabilidade no que concerne à construção e instalação destes dispositivos.

Com o objetivo de investigar as ferramentas desenvolvidas, bem como o comportamento de sistemas em estruturas que possuam freqüências naturais pouco espaçadas, foi realizado um estudo de uma laje adicionada de múltiplos absorvedores. Neste estudo foi também variada a relação entre largura e comprimento da laje a fim de verificar as mudanças de comportamento. Constatou-se que a metodologia desenvolvida a partir da formulação analítica neste caso não é capaz de reproduzir adequadamente o comportamento do sistema estrutural adicionado de um ou mais absorvedores. Como conseqüência, concluiu-se que o projeto de sistemas de absorção acoplados à estrutura neste caso deve ser conduzido por meio de uma metodologia baseada na formulação numérica desenvolvida que contemple a análise global da estrutura e que a otimização das respostas seja feita para uma faixa de freqüência que pode conter vários modos de vibração, os quais são excitados pelos carregamentos atuantes. Isto se deve ao fato de que, para estas estruturas, os sistemas de absorção acabam por atuarem em vários modos simultaneamente, sendo, portanto, necessário que o projeto seja realizado levando em consideração esta característica.

Conseqüentemente, o presente trabalho não esgota este assunto. Dentre as sugestões de trabalhos futuros, elencam-se as seguintes propostas:

- Investigação experimental do efeito de múltiplos sistemas absorvedores em que os mesmos estão distribuídos espacialmente na estrutura de ensaio com o intuito de validar experimentalmente as formulações desenvolvidas neste trabalho tal como o estudo experimental da influência da proximidade entre os modos;

- Estudo de sensibilidade da eficiência de múltiplos absorsores. Pelo fato desses sistemas serem distribuídos na frequência, é possível que o efeito de um pequeno erro construtivo e/ou de instalação de um destes dispositivos, que gere uma divergência com relação a sua calibração original de projeto, possa ser compensado pelos demais sistemas de modo que a eficiência do conjunto não seja substancialmente comprometida. Essa análise poderia ser realizada através de simulações, nos quais seriam introduzidos desvios nos parâmetros de calibração (rigidez, massa e/ou amortecimento) dos absorsores;
- Análise da parcela transiente do comportamento dinâmico de estruturas para o caso em que múltiplos sistemas absorsores estão instalados. Seria interessante, inclusive, a investigação da eficiência desses sistemas distribuídos ao longo de pontes e passarelas sob a ação de cargas móveis, de tal maneira, que os absorsores fossem acionados à medida que a carga avança na estrutura;
- Acoplar as rotinas de otimização na ferramenta numérica desenvolvida neste trabalho, a fim de permitir que a otimização seja realizada simultaneamente para vários modos de vibração da estrutura. Estes procedimentos de otimização devem ser multi-objetivos, tais como as rotinas “Goal Programming”, ou algoritmos baseados em estratégias evolucionárias como os algoritmos genéticos. Nestes sistemas seria interessante que o projeto pudesse ser desenvolvido, minimizando simultaneamente os deslocamentos e as acelerações da estrutura de maneira a atender tanto o estado limite último, como o de utilização. Adicionalmente, a própria robustez dos sistemas poderia ser contemplada como um dos objetivos a serem atingidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CONNOR, J. J., *Introduction to structural motion control*. 1 ed., Prentice Hall, 2002.
- [2] ALLEN, D.E., “Building Vibrations from Human Activities”, *Concrete International: Design and Construction*, v. 12, n. 6, pp.66-73, 1990.
- [3] BACHMANN, H., “Case Studies of Structures with Man-Induced Vibrations”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 118, n. 3, pp. 631 – 647, March, 1992.
- [4] FAISCA, R. G., *Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humanas*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [5] VARELA, W. D., *Modelo Teórico-Experimental para Análise de Vibrações Induzidas por Pessoas Caminhando sobre Lajes de Edifícios*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [6] CEB, *Vibration Problems in Structures*. Bulletin d’Information n. 209, Comité Européen du Béton, Zurich, 1991.
- [7] DALLARD, P. *et al.*, “The London Millennium Footbridge”. *The Structural Engineer*, v. 79, n. 22 (Nov), pp. 17-33, 2001.
- [8] BBC NEWS, publicado em 13 de Junho. Disponível em: <http://news.bbc.co.uk/1/hi/world/americas/784927.stm>, 2000.
- [9] NEW SCIENTIST MAGAZINE, publicado em 19 de Dezembro. Disponível em: <http://newscientist.com/news/news.jsp?id=ns9999269>, 2000.
- [10] BATTISTA, R. C., ROITMAN, N., *Análise Dinâmica Estrutural do Estádio do Maracanã*. Relatório Técnico COPPETEC ET-159425, COPPE/UFRJ, 1990.
- [11] BATTISTA, R. C., PFEIL, M. S., *Passive Damping of Vortex-Induced Oscillations of Rio-Niterói Bridge*. In: *Proceedings of Smart Structures and materials*, v. 2445, pp. 252-263, San Diego, California, USA, 1995.
- [12] LENZEN, K. H., “Vibration of Steel Joist – Concrete Slabs Floors”. *Engineering Journal of American Institute of Steel Construction*, v. 3, n. 3, pp. 133 – 136, 1966.

- [13] BATTISTA, R. C., *Notas de Aula da disciplina – Redução e Controle de Vibrações*. COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, 1993.
- [14] WARBURTON, G. B., AYORINDE, E. O., “Optimum absorbers parameters for simple systems”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 8, pp. 197–217, 1980.
- [15] ABE, M., IGUSA, T., “Tuned mass dampers for structures with closely spaced natural frequencies”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; v. 24, pp. 247–261, 1995.
- [16] AYORINDE, E. O., WARBURTON, G. B., “Minimizing structural vibrations with absorbers”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; v. 8, pp. 219–236, 1980.
- [17] MAGLUTA, C., *Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibrações Estruturais*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [18] AINSWORTH JR., G., O., *Implementação em Paralelo do Método de Arnoldi/Lanczos com Reinício Implícito*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.
- [19] FRAHM, H., *Device of Damping Vibration of Bodies*, United States n. 989.958, 1911.
- [20] RANA, R., SOONG, TT., “Parametric study and simplified design of tuned mass dampers”. *Engineering Structures*; v. 20, n. 3, pp. 193–204, 1998.
- [21] ORMONDROYD, J., DEN HARTOG, J. P., “The theory of dynamic vibration absorber”. *Transactions of American Society of Mechanical Engineers*, v. 50, n. 7, pp. 9-22, 1928.
- [22] DEN HARTOG, J. P., *Mechanical Vibrations*. 2nd ed., McGraw-Hill Co., New York, 1940.
- [23] BISHOP, R. E. D., WELBOURN, D. B., “The problem of the dynamic vibration absorber”. *Engineering*, London, p. 174 and 769, 1952.
- [24] SNOWDOWN, J. C., “Steady state behavior of the dynamic problem”. *Journal of the Acoustic Society of America*, v. 31, n. 8, pp. 1096-1103, 1960.

- [25] WARBURTON, G. B., “Optimum absorbers parameters for various combination of response and excitation parameters”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; v. 10, pp. 381–401, 1982.
- [26] THOMPSON, A. G., “Optimum damping and tuning of a dynamic vibration absorber applied to a force excited and damped primary system”. *Journal of Sound and Vibration*, v. 77, pp. 403-415, 1981.
- [27] TSAI, H. C., LIN, G. C., “Optimum tuned mass damper for minimizing steady-state response of supported excited and damped systems”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp. 957-973, 1993.
- [28] XU, K., IGUSA, T., “Dynamic characteristics of multiple substructures with closely spaced frequencies”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 21, pp. 1059–70, 1992.
- [28] YAMAGUCHI, H., HARNPORNCHAI, N., “Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, n. 1, pp. 51–62, 1993.
- [30] ABE, M., FUJINO, Y., “Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 23, n. 8, pp. 813–35, 1994.
- [31] IGUSA, T., XU, K., “Vibration control using multiple tuned mass dampers”. *Journal of Sound and Vibration*, v. 175, n. 4, pp. 491–503, 1994.
- [32] KAREEM, A., KLINE, S., “Performance of multiple mass dampers under random loading”. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v. 121, n. 2, pp. 348–361, 1995.
- [33] JANGID, R. S., DATTA T. K., “Performance of multiple tuned mass dampers for torsionally coupled system”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 26, pp. 307–17, 1997.
- [34] JANGID, R. S., “Optimum multiple tuned mass dampers for base-excited undamped system”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 28, n. 9, pp. 1041–1049, 1999.

- [35] GU, M., CHEN, S. R., CHANG, C. C., “Parametric study on multiple tuned mass dampers for buffeting control of Yangpu Bridge”. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 89, pp. 987–1000, 2001.
- [36] HOANG, N., WARNITCHAI, P., “Design of multiple tuned mass dampers by using a numerical optimizer”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 34, pp. 125-144, 2005.
- [37] LI H., NI X., “Optimization of non-uniformly distributed multiple tuned mass damper”. *Journal of Sound and Vibration*, v. 208, pp. 80–97, 2007.
- [38] CARNEIRO, R. B., *Controle de vibrações em edifícios altos utilizando amortecedor de massa sintonizado múltiplos*. Dissertação de M. Sc., Universidade de Brasília. Brasília, DF, Brasil, 2004.
- [39] ÁVILA, S. M., GONÇALVES, P.B., “Optimal configuration of composite multiple mass dampers in tall buildings”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering*, v. 31, n. 1, pp. 75–87, 2009.
- [40] NEWLAND, D. E., *Vibration of the London Millenium Footbridge*. Universidade de Cambridge, 2003.
- [41] BATTISTA, R. C., PFEIL, M. S., “Múltiplos atenuadores dinâmicos sincronizados para controle das oscilações induzidas pelo vento na Ponte Rio-Niterói”, *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, ASAE, v. 2, n. 1, 2005.
- [42] CONTROLLATO, *Monitoração e Controle de Vibrações em Estruturas*. Disponível em: <<http://www.controllato.com.br/>>. Acesso em: 09 set. 2010.
- [43] CLOUGH, R. W., PENZIEN J., *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York, USA, 1996.
- [44] BATHE, K., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, 1<sup>st</sup> ed., USA, Prentice-Hall Inc., 1982.
- [45] MEIROVITCH, L., *Analytical Methods in Vibrations*. Prentice Hall, 1967.
- [46] SAAD, Y., *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. 1<sup>st</sup> ed., John Wiley & Sons Inc., New York, NY, 1992.

- [47] MACHADO, F. J. D., *Análise e Controle Passivo das Vibrações de Placas Retangulares*. Dissertação de M. Sc., Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [48] FARIA, M. T., *Redução de Vibrações Induzidas por Pessoas em Lajes de Grandes Vãos*. Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.
- [49] RIBEIRO, F. L. B., LANDAU, “Formulação não-linear geométrica para análise de cascas usando elementos finitos tridimensionais degenerados”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 7, n. 3, pp. 301-320, 1991.
- [50] MOLER, C. B., STEWART, G., W., “An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 10, pp. 241-256.
- [51] SORENSEN, D. C., “Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi Method”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 13, n. 1, pp. 357-385, 1992.
- [52] MATHCAD, *User’s Guide with Reference Manual*, v. 2001i, 2001.
- [53] TIMOSHENKO, S., WOIONOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*. 2<sup>nd</sup> ed., New York, McGraw-Hill, 1959.

## ANEXO A.

### Verificação do funcionamento do sistema desenvolvido

Apresenta-se seguir a verificação do funcionamento do sistema computacional desenvolvido para a situação na qual a estrutura original modelada encontra-se sob solicitações axiais. A Fig. A.1 representa esquematicamente uma placa com carregamentos de compressão em dois de seus bordos. Em especial, é checado o funcionamento dos módulos EST\_0 e KG\_0, responsáveis pelo cômputo do efeito das forças normais na estrutura.

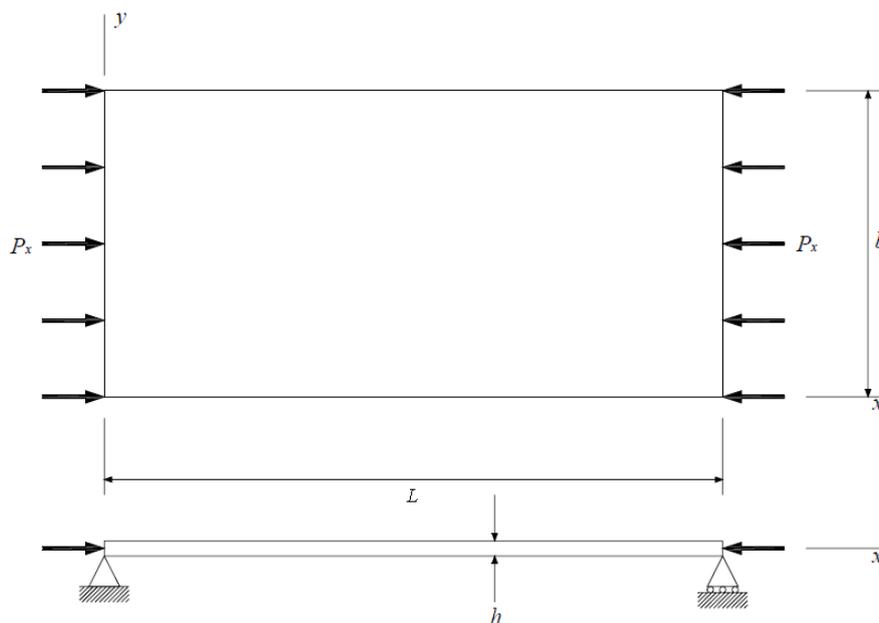


Fig. A.1 – Placa submetida à compressão no plano [47].

Como já comentado no Capítulo 3, estes módulos foram implementados com a finalidade de se investigar a adoção de carregamentos axiais, como por exemplo, a protensão, como uma medida de redução dos níveis de vibrações em estruturas, na medida em que as cargas axiais modificam as características modais da estrutura. MACHADO [47] mostra em seu trabalho que para a situação em que uma placa é submetida a solicitações axiais centradas em seu plano médio (vide Fig. A.1), com o aumento do carregamento de compressão, o quadrado da frequência natural decresce de forma linear até atingir o valor nulo quando o carregamento se iguala à carga crítica da estrutura.

Sendo assim, foi realizado um estudo paramétrico similar ao realizado em [47] do efeito dos carregamentos de compressão nas frequências naturais da placa de alumínio do LADEPIS, modelada neste trabalho em elementos finitos, conforme já descrito no item 4.2. Para tanto, considere inicialmente que essa placa simplesmente apoiada nos seus quatro bordos seja submetida a uma carga axial de compressão  $p_x$  uniformemente distribuída de 1.0 N/m em um de seus bordos de 1.5 m, no qual os deslocamentos horizontais sejam liberados (vide Fig. A.1). Calculando-se as tensões e montando a matriz geométrica  $\mathbf{K}_G$  da placa com o auxílio dos módulos EST\_0 e KG\_0, pode-se obter a carga crítica  $N_{cr}$  da estrutura através da seguinte equação [17]:

$$\mathbf{K} \phi = \lambda_G \mathbf{K}_G \phi \quad (\text{A.1})$$

onde,  $\lambda_G$  é a razão entre o carregamento crítico e o carregamento de compressão arbitrado inicialmente e  $\phi$  é o modo de flambagem associado.

A eq. (A.1) corresponde a um problema de autovalor similar ao da eq. (2.2). Sendo assim, a resolução deste problema pode ser obtida utilizando o módulo DIN\_0 substituindo a matriz de massa da estrutura pela matriz geométrica. Procedendo-se à resolução da eq. (A.1) com este módulo, obtém-se que  $N_{cr} \cong 15.17$  kN/m. Correlacionando este valor com o estimado utilizando a formulação da Teoria de Placas [53] na qual se obtém que  $N_{cr} \cong 15.50$  kN/m, conclui-se que essa metodologia para a aferição da carga crítica apresenta boa acurácia.

Igualmente, a frequência natural do primeiro modo de vibração da placa pode ser estimada pela teoria clássica [53] em 8.45 Hz, e conseqüentemente, utilizando como premissa a constatação de MACHADO [47], a expressão que correlaciona a frequência natural da estrutura com o carregamento axial é dada por:

$$\omega^2 = 2817.5187 - 0.1818 \cdot p_x \quad (\text{A.2})$$

Da mesma maneira, a frequência natural da estrutura pode ser estimada pelo sistema desenvolvido pela resolução do problema de autovalor clássico de vibrações da eq. (2.2) fazendo,  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_G$ , onde  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez elástica da estrutura. Adotando-se  $p_x = 0, 0.2 \dots 0.95 N_{cr}$ , com o auxílio do módulo DIN\_0 são obtidos os pontos que definem a relação entre a frequência natural da placa e o carregamento axial

no modelo em elementos finitos. A Fig. A.2 mostra a correlação entre os valores obtidos numericamente e os estimados utilizando a relação (A.2).

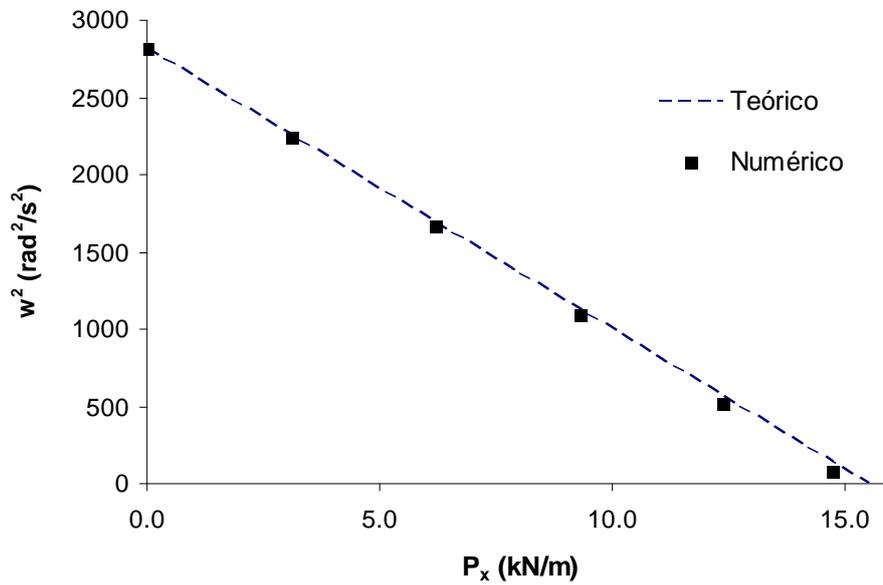


Fig. A.2 – Correlação teórica x numérica do efeito de carregamento axial nas frequências naturais da placa LADEPIS.

A Fig. A.2 mostra a boa correlação entre os valores obtidos por ambas as metodologias comprovando a acurácia do sistema computacional desenvolvido como um todo.

## ANEXO B.

### Expressões de Jangid

Como já mencionado no Capítulo 4, JANGID [34] obteve através de ajustes de curvas oriundas de buscas numéricas, expressões que fornecem os parâmetros ótimos para múltiplos absorsores agregados a um sistema principal de 1 GL (sistema massa-mola). Esse estudo foi conduzido para o caso em que a sollicitação é uma excitação de base, variando-se a relação de massa na faixa em que  $\mu \leq 0.1$ , bem como o número de absorsores, na faixa em que  $n \leq 31$ .

Distribuindo-se uniformemente estes dispositivos no domínio da frequência, para uma dada relação de massa efetiva  $\mu_{ef}$ , os parâmetros ótimos para múltiplos absorsores adicionados numa estrutura podem ser obtidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \xi_a &= \sqrt{\frac{3\mu_{ef}}{8(1+\mu_{ef})(1-0.5\mu_{ef})}} + (a_1 + a_2\sqrt{\mu_{ef}} + a_3\mu_{ef})\sqrt{\mu_{ef}} \left\{ a_4 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + a_5 \left( \frac{1}{n} - 1 \right) + a_6 (\sqrt{n} - 1) \right\} \\
 \beta &= (a_1 + a_2\sqrt{\mu_{ef}} + a_3\mu_{ef})\sqrt{\mu_{ef}} \left\{ a_4 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) + a_5 (n - 1) + \right. \\
 &\quad \left. + a_6 (\sqrt{n} - 1) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{B.1} \\
 \alpha_{m\u00e9dio} &= \frac{\sqrt{1-0.5\mu_{ef}}}{1+\mu_{ef}} + (a_1 + a_2\sqrt{\mu_{ef}} + a_3\mu_{ef})\sqrt{\mu_{ef}} \left\{ a_4 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) + a_5 (n - 1) + \right. \\
 &\quad \left. + a_6 (\sqrt{n} - 1) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 R &= \sqrt{\frac{2}{\mu}} (1 + \mu_{ef}) + (a_1 + a_2\sqrt{\mu_{ef}} + a_3\mu_{ef})\sqrt{\mu_{ef}} \left\{ a_4 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right) + a_5 \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ a_6 \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} - 1 \right) \Bigg\}$$

onde, os coeficientes destas expressões são dadas pela Tabela B.1.

Adicionalmente, o parâmetro  $R$  corresponde a um estimador da amplitude do deslocamento do sistema principal dado pelo Fator de Amplificação Dinâmica (FAD) em relação à amplitude da aceleração de base.

Tabela B.1 – Valores dos coeficientes nas expressões explícitas de Jangid para os parâmetros ótimos dos absorsores.

Coeficientes	Valores Correspondentes			
	$\xi_a$	$\beta$	$\alpha_{médio}$	$R$
$a_1$	0.5474	0.42113	-0.00241	0.2985
$a_2$	0.1038	0.04479	0.72152	-0.0078
$a_3$	-0.4522	-0.38909	-0.43970	0.2355
$a_4$	0.7604	-0.73518	-0.66385	-0.0442
$a_5$	0.3916	-0.11866	-0.01138	0.6265
$a_6$	0.0403	4.86139	0.99522	0.4789

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)