

*Universidade de São Paulo*  
*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas*  
*Departamento de Astronomia*

Alan Jorge Alves do Carmo

# **Dinâmica Secular dos Sistemas de Planetas Múltiplos**

**Sistemas próximos a ressonância 3:1**

São Paulo  
Setembro de 2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Alan Jorge Alves do Carmo

# Dinâmica Secular dos Sistemas de Planetas Múltiplos

Sistemas próximos a ressonância 3:1

Tese/Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientador(a): Prof.<sup>(a)</sup> Dr.<sup>(a)</sup> Tatiana A. Michtchenko

São Paulo

Setembro de 2010



*Dedico esta dissertação à minha família e a meus amigos.*



# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e irmão pelo apoio incondicional, carinho e por estarem sempre presentes positivamente em minha vida. À minha tia Janete, minhas avós Marinalva e Maria de Lourdes, meu avô José Alcides, tios, tias e a todos os primos e primas pelo incentivo e ajuda.

À minha orientadora e professora Tatiana A. Michtchenko pelo apoio, orientação, ensinamentos, paciência e confiança desde o interesse pelo mestrado até a conclusão desta dissertação. Aos professores Boczko, Ramachrisna e Silvia pelas valiosas aulas durante estes dois anos. Ao professor Sylvio Ferraz-Mello pelos elucidantes ensinamentos que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

Ao meu sempre professor de física, Ivan Santos, por ter aberto a porta para este fascinante caminho que a física e astronomia direcionam.

Aos colegas de sala: Monica, Rodolfo e Eraldo, pelas incontáveis ajudas em programação, latex, momentos de descontração e amizade. Aos amigos do grupo de Astronomia Dinâmica: Adrian Rodriguez Colucci, Gleidson Gomes da Silva, Eduardo Andrade Inês, Marcos Tadeu dos Santos, pela amizade e todas as contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos do IAG: Alessandro, Ana, Douglas, Felipe Oliveira e Vinicius(ambos). Aos técnicos, funcionários e professores do IAG que fazem deste Instituto um lugar confortável para convivência, estudo e trabalho.

Aos amigos da graduação sem o apoio dos quais eu não estaria aqui.

Aos amigos da *The Order of the Stick*, pela amizade, ajuda e terem feito me sentir menos distante de casa.

Em especial aos amigos Alice, Bruno, Diego, Gabriela, Juliana, Lorena, Lucas, Luiza, Milena, Nadhine, Naishe, Ralph, Rodrigo, Romulo, Tássia, Thiago e Victor, por todos os



anos de amizade e por estarem sempre próximos, mesmo distantes nestes dois anos.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro sob o projeto: . Gostaria de agradecer ao SBT, à produtora *Casablanca Content* pela oportunidade e ao Sr. Abravanel pelo prêmio em dinheiro, que foi de grande ajuda para o progresso deste trabalho.

E a todos que contribuíram direta, indiretamente e/ou por ação do caos, para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Um dos meus anseios  
De chegar ao infinito  
É a esperança de que,  
Ao menos lá,  
As paralelas se encontrem.”*

D. Helder Câmara(1909-1999).

*“Imagination wil often carry us to worlds that never were. But without it we go nowhere.”*

Carl Sagan(1934-1996).

*“(….)But it ain't about how hard ya hit. It's about how hard you can get it and keep moving forward. How much you can take and keep moving forward. That's how winning is done! ”*

Rocky Balboa



# Resumo

Este trabalho tem como objetivo a modelagem dinâmica e caracterização de sistemas de planetas múltiplos. Restringimo-nos mais especificamente aos sistemas próximos à ressonância de movimentos médios 3:1. Estudamos os sistemas Saturno-Urano, 55 Cnc b-c e HD 60532 b-c.

Inicialmente construímos o Hamiltoniano para um sistema nestas condições através da expansão da função perturbadora que se escreve em termos de coeficientes de Laplace. Introduzimos a definição de um parâmetro de proximidade com a ressonância  $\delta$  descrito primeiramente em Tittlemore e Wisdom (1988). Desenvolvemos programas computacionais que determinassem os termos importantes que compõem a série. Também construímos o integradores numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem e aplicamos o Radau 15(Everhart (1985)).

A partir do Hamiltoniano construído, primeiramente estudamos o modelo secular e suas soluções especiais e espaço de fase, observando as soluções possíveis em função da Energia. Para o Hamiltoniano Completo, que contém a parte secular e ressonante, fizemos a construção do plano representativo através das curvas de nível. Observamos os diferentes regimes de movimento possíveis através da variação do valor de  $\delta$ .

Concluimos com a construção dos planos paramétricos para classificar os sistemas estudados como estando em regime puramente secular, quasi-ressonante ou ressonante. Comparamos os resultados aos obtidos através da integração das equações do movimento dos sistemas utilizando-nos do integrador Radau 15.



# Abstract

The aim of this work is the dynamical modelling and characterization of multiple-planetary systems. We apply our model to the known systems near the 3:1 mean-motion resonance. The systems studied are Saturn-Uranus, 55 Cnc b-c and HD 60532 b-c.

First we construct the averaged Hamiltonian which contains the secular and resonante parts. We introduce the parameter  $\delta$  which provides us a measurement of proximity to resonance, first described at Tittlemore e Wisdom (1988). We develop computational programs which derives the important terms of the series. We construct in addition, the 4th degree Runge-Kutta numerical integrator and utilized the RA 15 (Everhart, 1985).

Using the Hamiltonian obtained, we study the secular model and its especial solutions and phase space, detecting the possible solutions as a function of the energy. We introduce the representative plane of the initial conditions and then plot the energy levels to the total Hamiltonian. We analyse the possible different dynamical regimes through the  $\delta$  parameter variation.

We concluded our work by constructing the parametric plane in order to classify the planetary systems under study, as being on the secular, quasi-resonant or resonant regime of motion. We compared the results obtained to those of the integration of exact equations of motion using the Radau 15 integrator.



## Lista de Figuras

1.1	Histograma da representação dos pares planetários descobertos, em função do semi-eixo maior e excentricidade . . . . .	20
2.1	Posição Genérica de Dois Corpos em Relação a um Referencial Inercial. . .	24
2.2	Plano da Órbita e Plano Fundamental de Referência . . . . .	27
2.3	Plano da Órbita com Anomalias e Outros Elementos Orbitais . . . . .	29
3.1	Curvas de nível dos regimes dinâmicos para sistemas dinâmicos próximos a uma ressonância 3:1 . . . . .	59
4.1	Trajetória da Órbita Obtida pela Transformação entre Coordenadas Retangulares e Elementos Orbitais. . . . .	67
5.1	Família ACR simétrico para a razão de massas do sistema 55Cnc b-c . . .	77
5.2	Família ACR simétrico para a razão de massas do sistema Saturno-Urano .	80
5.3	Família ACR simétrico para a razão de massas do sistema HD60532 b-c . .	82
6.1	Gráfico das Curvas Características do Hamiltoniano secular em função das excentricidades. . . . .	85
6.2	Plano de fase para o planeta interno do sistema 55 Cnc b-c das excentricidade em função do seno e cosseno de $\Delta\varpi$ . . . . .	88
6.3	Curvas de nível do Sistema 55 Cnc b-c para três diferentes valores de $\delta$ em função do ângulo $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	92
6.4	Curvas de nível do Sistema 55 Cnc b-c com três valores de $\delta$ diferentes, em função dos ângulos $2\sigma_1$ e $2\sigma_2$ . . . . .	95



6.5	Excentricidades e razão dos movimentos médios obtidos pela integração utilizando o Radau 15 . . . . .	96
6.6	Ângulos ressonantes e $\Delta\varpi$ obtidos por integração utilizando o Radau 15 .	97
6.7	Plano Paramétrico para o sistema 55 Cnc b-c . . . . .	98
7.1	Gráfico das soluções periódicas para o Hamiltoniano Secular do sistema Saturno-Urano. . . . .	103
7.2	Plano de fase das excentricidades em função do seno e cosseno do ângulo $\Delta\varpi$ .	105
7.3	Curvas de nível da energia em função das excentricidades em função dos ângulos $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	108
7.4	Gráfico das curvas de nível das energia em função dos ângulos $2\sigma_1$ e $2\sigma_2$ . .	110
7.5	Excentricidades e razão dos movimentos médios obtidos pela integração utilizando o Radau 15 . . . . .	112
7.6	Ângulos ressonantes e $\Delta\varpi$ obtidos por integração utilizando o Radau 15 .	113
7.7	Plano Paramétrico para o sistema Saturno-Urano . . . . .	114
8.1	Gráfico das Curvas Características do Hamiltoniano secular em função das excentricidades para o sistema HD 60532 b-c. . . . .	119
8.2	Plano de fase para o planeta interno do sistema HD60532 b-c das excentricidade em função do seno e cosseno de $\Delta\varpi$ . . . . .	121
8.3	Curvas de nível do Sistema HD60532 b-c para três valores de $\delta$ escritas em função dos ângulos $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	124
8.4	Curvas de Nível do Sistema HD60532 b-c para três valores de $\delta$ escritas em função dos ângulos $2\sigma_1$ e $2\sigma_2$ . . . . .	127
8.5	Excentricidades e razão dos movimentos médios obtidos pela integração utilizando o Radau 15 . . . . .	129
8.6	Ângulos ressonantes e $\Delta\varpi$ obtidos por integração utilizando o Radau 15 .	130
8.7	Plano Paramétrico para o sistema HD 60532 b-c . . . . .	131

## Lista de Tabelas

5.1	Elementos Orbitais dos planetas do sistema 55 Cnc com $P_e = 2.817$ . . . .	76
5.2	Elementos Orbitais dos planetas do sistema 55 Cnc com $e_e = 0$ e $P_e = 0.74$ dias. . . . .	77
5.3	Elementos Orbitais para o Sistema Saturno-Urano . . . . .	79
5.4	Elementos Orbitais para os planetas dos sistema HD 60532, com $I = 90^\circ$ .	81
5.5	Elementos Orbitais para os planetas do sistema HD 60532, com $I = 20^\circ$ . .	82
6.1	Constantes do Hamiltoniano do sistema 55 Cnc b-c próximos a ressonância 3:1 . . . . .	84
7.1	Constantes do Hamiltoniano do sistema Saturno-Urano próximo à ressonância 3:1. . . . .	102
8.1	Constantes do Hamiltoniano para o sistema HD 60532 b-c próximo à res- sonância 3:1. . . . .	118



# Sumário

1. <i>Introdução</i> . . . . .	19
2. <i>Conceitos Básicos</i> . . . . .	23
2.1 Problema de Dois Corpos . . . . .	23
2.2 Órbita no Espaço . . . . .	25
2.3 Transformação entre Coordenadas . . . . .	30
2.3.1 Transformação de Coordenadas Retangulares para Elementos Orbitais	31
2.3.2 Transformação de Elementos Orbitais para Coordenadas Retangulares	33
2.4 A Função Perturbadora . . . . .	35
3. <i>Modelagem dos sistemas quasi-ressonantes</i> . . . . .	41
3.1 Construção do Hamiltoniano para sistemas próximos a ressonância 3:1 . . .	42
3.2 Introdução do Parâmetro de Proximidade com a Ressonância . . . . .	51
3.3 Movimento Secular dos Sistemas Planetários . . . . .	52
3.4 Curvas de Nível . . . . .	55
3.5 Construção do Plano Paramétrico . . . . .	60
4. <i>Ferramentas Utilizadas</i> . . . . .	65
4.1 Conversor entre Coordenadas Retangulares e Elementos Orbitais . . . . .	65
4.2 Gerador de Coeficientes de Laplace . . . . .	67
4.3 Integradores Numéricos . . . . .	69
4.3.1 Runge-Kutta de 4ª Ordem . . . . .	69
4.3.2 Integrador RADAU 15 . . . . .	70

4.4	Modelagens e sua implementação . . . . .	71
5.	<i>Sistemas Planetários Próximos à Ressonância 3:1</i> . . . . .	73
5.1	O Sistema 55 Cnc b-c . . . . .	74
5.2	O Sistema Saturno-Urano . . . . .	78
5.3	O Sistema HD 60532 b-c . . . . .	80
6.	<i>Aplicações ao Sistema 55 Cnc b-c</i> . . . . .	83
6.1	Estudo do Domínio Secular do Sistema . . . . .	84
6.2	Curvas de Nível em Função das Excentricidades . . . . .	89
6.3	Construção do Plano Paramétrico . . . . .	95
7.	<i>Aplicações ao Sistema Saturno-Urano</i> . . . . .	101
7.1	Estudo do Domínio Secular do Sistema . . . . .	101
7.2	Curvas de Nível em Função das Excentricidades . . . . .	106
7.3	Construção do Plano Paramétrico . . . . .	110
8.	<i>Aplicações ao Sistema HD 60532 b-c</i> . . . . .	117
8.1	Estudo do Domínio Secular do Sistema . . . . .	118
8.2	Curvas de Nível em Função das Excentricidades . . . . .	122
8.3	Construção do Plano Paramétrico . . . . .	128
9.	<i>Conclusões</i> . . . . .	133
9.1	Principais Resultados . . . . .	133
9.1.1	55 Cnc b-c . . . . .	134
9.1.2	Saturno-Urano . . . . .	134
9.1.3	HD 60532 b-c . . . . .	134
9.2	Questões não Resolvidas e Perspectivas Futuras . . . . .	135
	<i>Referências</i> . . . . .	137

## Introdução

A descoberta de um planeta em torno da estrela da Sequência Principal, 51 Pegasi (Mayor e Queloz, 1995) foi um marco importante na história da Astronomia Moderna. Até a presente data foram confirmados mais de 400 planetas fora do Sistema Solar, conhecidos como exoplanetas. A informação sobre novas descobertas tem fluxo contínuo e tem como a fonte as publicações em revistas periódicas e o World Wide Web. Existem vários catálogos desses sistemas, um deles é continuamente atualizado em sítio (<http://www.obspm.fr/encycl/encycl.html>).

Uma parte dos planetas descobertos está localizada em sistemas de planetas múltiplos. Uma amostra de 43 sistemas de planetas múltiplos é atualmente conhecida. Em contraste com o Sistema Solar, o número dos planetas em exossistemas é geralmente baixo, sendo apenas dois ou três. Acredita-se que isso se deve às limitações das técnicas observacionais, principalmente aquela chamada Velocidade Radial. Essa técnica consiste em medidas precisas do efeito Doppler na luz de emissão de uma estrela, provocado por variação da velocidade da estrela originada por interação com um invisível planeta. Porém, os métodos observacionais são aperfeiçoados rapidamente, permitindo a detecção de sistemas planetários parecidos com o nosso sistema. O sistema 55 Cnc com cinco planetas que orbitam a estrela central, é um exemplo.

Com a constante descoberta de mais sistemas de planetas, nosso Sistema Solar acaba por se configurar como sendo atípico em relação aos outros sistemas que por ventura vem sendo descobertos. Diante disso, é de grande importância a classificação e caracterização de tais sistemas, a partir da obtenção e estudo dos parâmetros físicos que determinam suas propriedades físicas e dinâmicas. Um recente estudo com os mais recentes sistemas

exoplanetários foi feito pelo grupo de Dinâmica Orbital (ver dissertação de Victor Hugo da Cunha Oliveira (2010)), e é mostrado na figura 1.1.

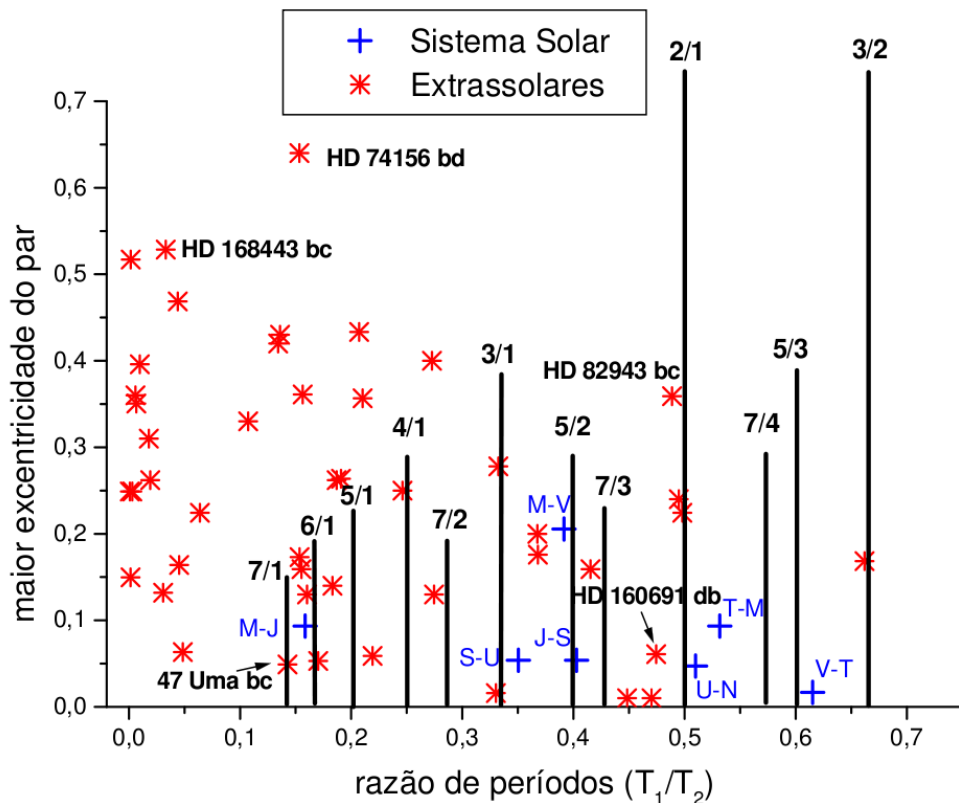


Figura 1.1: Distribuição dos pares planetários descobertos em função do semi-eixo maior e excentricidade. O eixo-y corresponde ao valor de maior excentricidade entre os planetas do sistema e o eixo-x corresponde à razão dos períodos, decorrente da razão dos semi-eixos, próximo à ressonância. As linhas verticais mostram a posição nominal da ressonância de movimentos médios dos pares dos planetas consecutivos.

A figura mostra os atuais sistemas planetários representados através dos pares dos planetas consecutivos. A razão dos seus períodos orbitais que foi escolhida para apresentação devido ao fato de possuir uma relação intrínseca com a razão dos semi-eixos dos planetas, sendo este um dos parâmetros de maior importância para estudo dos sistemas dinâmicos. Igualmente à excentricidade, que compõe parâmetro do eixo y do gráfico, na forma da maior excentricidade do sistema. Os picos que aparecem acompanhados de uma razão entre múltiplos é determinado pelo inverso do valor da ressonância.

Conforme uma proposta inicial elaborada no grupo de Dinâmica do IAG, os sistemas planetários podem ser divididos em três classes. A Classe I inclui os sistemas envolvidos

em principais ressonâncias de movimentos médios. As estrelas vermelhas na figura 1.1 localizadas muito próximo a uma das linhas verticais representam os membros dessa classe. Esta classe possui uma subclasse com sistemas de excentricidades baixas que não estão em ressonância, mas muito próximos a uma. Os planetas gigantes do Sistema Solar (cruzes azuis) pertencem a essa subclasse dinâmica.

A Classe II descreve os sistemas dos planetas com forte interação secular. Na Figura 1, os membros dessa classe estão apresentados pelas estrelas vermelhas posicionadas entre as linhas verticais, que representam a posição das principais ressonâncias de movimentos médios. Finalmente, a Classe III inclui os sistemas chamados hierárquicos, que estão suficientemente distantes para produzir interações mútuas fracas. Uma população grande dessa classe pode ser observada na parte esquerda da Figura 1, longe das ressonâncias de movimentos médios.

Conforme o nosso trabalho foi se desenvolvendo, acabamos por focar o regime de sistemas planetários que encontram-se em região próxima à ressonante. Enfocamos os sistemas que encontram-se próximos à ressonância 3:1 por ser, depois dos sistemas de primeira ordem da ressonância na forma 2:1, o mais abundante em relação à quantidade de sistemas descobertos próximos a ela. Outro motivo que levou-nos ao estudo é o fato de um dos sistemas mais interessantes, 55 Cnc ter um par de planetas próximos à ressonância de movimentos médios 3:1. Este sistema é composto por cinco planetas, o sistema com mais planetas descobertos até o momento, além de possui o planeta de menor período orbital conhecido, de 0.74 dias, conforme Dawson e Fabrycky (2010). Os outros sistemas que estudaremos em nosso trabalho tratam-se de dois planetas de nosso próprio Sistema Solar: Saturno e Urano, que conforme a figura 1.1 encontram-se relativamente próxima a uma ressonância de movimentos médios na forma 3:1. O terceiro sistema é o sistema HD 60532 b-c, sendo este um sistema exoplanetário de apenas dois planetas descobertos há pouco mais de dois anos por Desort et al. (2008), e que possui todas as características, segundo Laskar e Correia (2009), necessárias para se situarem dentro de uma ressonância de movimentos médios na forma 3:1.

Pretendemos estudar a dinâmica dos sistemas inicialmente observando suas características de longo período, observando a partir da construção do Hamiltoniano para o sistema através da função perturbadora. Posteriormente iremos observar a classificação



geral dos sistemas e uma análise mais geral de suas características principais, através das curvas de nível e planos de fase com a introdução de um parâmetro que determina a sua proximidade com a ressonância, e das soluções especiais para o Hamiltoniano secular dos sistemas. Nosso trabalho organizar-se-á da seguinte forma:

No Capítulo 2 mostraremos os conceitos básicos para o entendimento do problema físico que envolve a interação gravitacional entre os sistemas, que basicamente será descrito como o problema de três corpos sob o formalismo Hamiltoniano, envolvendo a expansão em série infinita a partir da determinação da função perturbadora do sistema. No capítulo 3 descrevemos as modelagens dinâmicas que utilizamos para analisar o comportamento dinâmico dos sistemas estudados neste trabalho. Construímos o Hamiltoniano para o problema através da expansão em elementos orbitais, e utilizando o formalismos Hamiltoniano com transformações canônicas para reduzir os graus de liberdade do sistema para até um grau de liberdade para o caso do Hamiltoniano Secular, e dois graus de liberdade para o Hamiltoniano Total. No Capítulo 4 descreveremos as ferramentas utilizadas no trabalho, que se compõem principalmente da implementação de programas computacionais para tratamento dos dados obtidos. No Capítulo 5 descrevemos os sistemas planetários estudados e explicitamos quais os dados utilizados para cada um deles. Em sequência nos Capítulos 6,7 e 8 aplicamos toda a teoria estudada nos capítulos anteriores, com a aplicação das ferramentas e desenvolvimento teórico a partir dos dados já possuídos para caracterizar e analisar as principais características seculares e classificação dinâmica dos sistemas a partir das modelagens desenvolvidas. Concluimos os resultados do nosso trabalho no capítulo 9 e encerramo-lo com as perspectivas futuras que o trabalho pode vir a proporcionar.

## Conceitos Básicos

Este capítulo tem como objetivo introduzir de maneira concisa os principais fundamentos teóricos clássicos utilizados em todo o decorrer do trabalho. Focaremos o estudo em direção do problema de vários corpos, em especial envolvendo a interação gravitacional entre dois planetas de massa comparável, com uma órbita em torno de uma estrela de massa muito maior que as dos dois planetas. O capítulo inicia-se com um breve estudo do problema de dois corpos, a fim de determinarmos as principais coordenadas e sistemas de referências utilizados. Em seguida, estendemos o estudo para o problema de três corpos, especificamente para as condições observadas no nosso trabalho, através da expansão da função perturbadora.

### 2.1 *Problema de Dois Corpos*

A interação principal ao se determinar a dinâmica de sistemas planetários é a interação gravitacional. Apesar de ser uma das forças fundamentais mais fracas existentes, os parâmetros que as caracterizam, a massa principalmente, são de valores bastante expressivos, sendo portanto um dos parâmetros mais importantes na caracterização da interação entre os planetas.

Consideramos então, dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  interagindo gravitacionalmente um com o outro. Os corpos encontram-se a uma distância  $\mathbf{r}$  um do outro. Denotaremos por  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  as distâncias do corpo 1 e do corpo 2 respectivamente a um referencial inercial.

Na formulação Newtoniana, as equações do movimento para ambos corpos se escrevem

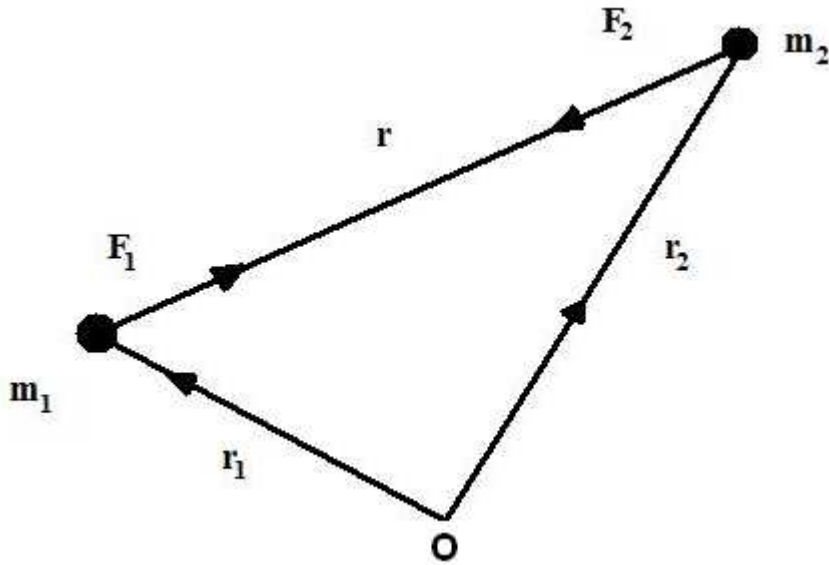


Figura 2.1: Posição de dois corpos interagindo gravitacionalmente em relação a um referencial inercial.

como:

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}}{r^3}, \quad (2.1a)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = -\frac{Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}}{r^3}. \quad (2.1b)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional universal, de valor  $G = 6.67260 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ .

Somando ambas as equações, chegamos a :

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (2.2)$$

Podemos então, integrando (2.2) duas vezes, obter as equações para o centro de massa do sistema. Como:

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{at} + \mathbf{b}. \quad (2.3)$$

Logo chegamos a:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{at} + \mathbf{b}}{m_1 + m_2}, \quad (2.4)$$

e, escrevendo a posição do corpo 2 em relação ao corpo 1, podemos chegar à equação:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (2.5)$$

que é a equação do movimento relativo ao centro de massa, com  $\mu = G(m_1 + m_2)$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Para resolver essa equação necessitamos diminuir os graus de liberdade do sistema, e uma maneira de fazê-lo é descobrindo constantes do movimento que criem vínculos nas equações.

Como a força atuante nos corpos é uma força central, e portanto tem como direção a reta que liga ambos os corpos, o movimento causado por esta força ocorre em um mesmo plano para ambos os corpos. Saimos então das coordenadas retangulares para coordenadas polares  $r, \theta$ . Utilizando a definição de momento angular:  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}$ . Uma vez que a única interação do sistema é a força gravitacional, não há forças dissipativas envolvidas, apenas conservativa. O que implica ser o momento angular total do sistema constante.

Considerando a origem como tendo a posição do corpo de massa  $m_1$ , chegamos a:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\dot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) \right] \theta. \quad (2.6)$$

Podemos ver também que:

$$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.7)$$

o que nos leva à segunda lei de Kepler, que diz que dois corpos ligados gravitacionalmente, varrem áreas iguais em tempos iguais, ao se calcular a área entre os dois corpos e o tempo percorrido pelo mesmo. Encontramos dessa forma que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}h. \quad (2.8)$$

## 2.2 Órbita no Espaço

A partir das equações geradas iremos então determinar novas maneiras de se definir a posição e deslocamento dos corpos ligados gravitacionalmente. Tanto através das suas coordenadas retangulares, como da definição de novas variáveis, conhecidas como elementos orbitais, que definirão a forma e posição da órbita de dois corpos ligados gravitacionalmente.

De (2.5) e (2.6), podemos escrever a equação diferencial do movimento de forma escalar, tomando a forma:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (2.9)$$

e utilizando a equação (2.7) e diferenciando  $r$  em relação ao tempo, utilizando a transformação  $r = \frac{1}{u}$ , chegamos à solução:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}. \quad (2.10)$$

onde  $p = \frac{h^2}{\mu}$ . Esta equação corresponde à equação de uma secção cônica em coordenadas polares, onde define-se  $e$  como sendo a excentricidade,  $\varpi$  é uma fase que é uma constante de integração, assim como  $e$ . Dependendo do tipo da secção cônica, podemos definir uma nova variável para os elementos orbitais, o semi-eixo maior  $a$ . Para uma elipse, por exemplo, temos:  $p = a(1 - e^2)$ . Um elemento importante da cônica é a reta dos nodos, que é definida como a reta que intersecta o plano de referência com o plano da órbita (figura 2.2). No caso em que consideramos um planeta em torno de uma estrela, teremos uma órbita elíptica, onde identificamos a fase  $\omega$  como sendo o argumento do pericentro e  $\theta$  a posição angular do corpo em relação à estrela, que, no caso, ocupa um dos focos da elipse.

A partir da equação (2.10), podemos começar a definir os elementos orbitais que determinarão a posição da órbita no espaço, e a posição do planeta nesta órbita. Vale salientar que o argumento do pericentro é um ângulo definido para o problema de dois corpos com movimento elíptico. No caso em que o plano de referência não é coincidente com o plano da órbita, utiliza-se o ângulo chamado de longitude do pericentro. Tal ângulo, neste caso, tem a forma de uma *dogleg* (perna de cachorro), por ter uma quebra no momento em que muda do plano da referência para o plano da órbita.

Quando o momento angular não é ortogonal ao plano de referência, o plano da órbita intersecta-se em uma reta chamada de linha dos nodos, como já citamos acima. O ângulo formado entre o plano da órbita e o plano de referência é chamado inclinação da órbita, e denotado pela letra  $I$ . Durante o movimento do corpo ao longo de sua órbita, o mesmo cruza o plano de referência em dois pontos. Um com sentido crescente no eixo  $z$ , e o segundo com sentido decrescente em relação ao eixo  $z$ . O primeiro corresponde a outro ângulo importante do problema,  $\omega$ , chamado de longitude do nodo ascendente  $\Omega$ .

Até o momento temos cinco elementos orbitais, que, no caso do problema de dois corpos, são constantes de movimento. O sexto elemento orbitais tem caráter cinemático e é definido pelo instante de tempo em que o planeta ou corpo passa pelo pericentro de sua

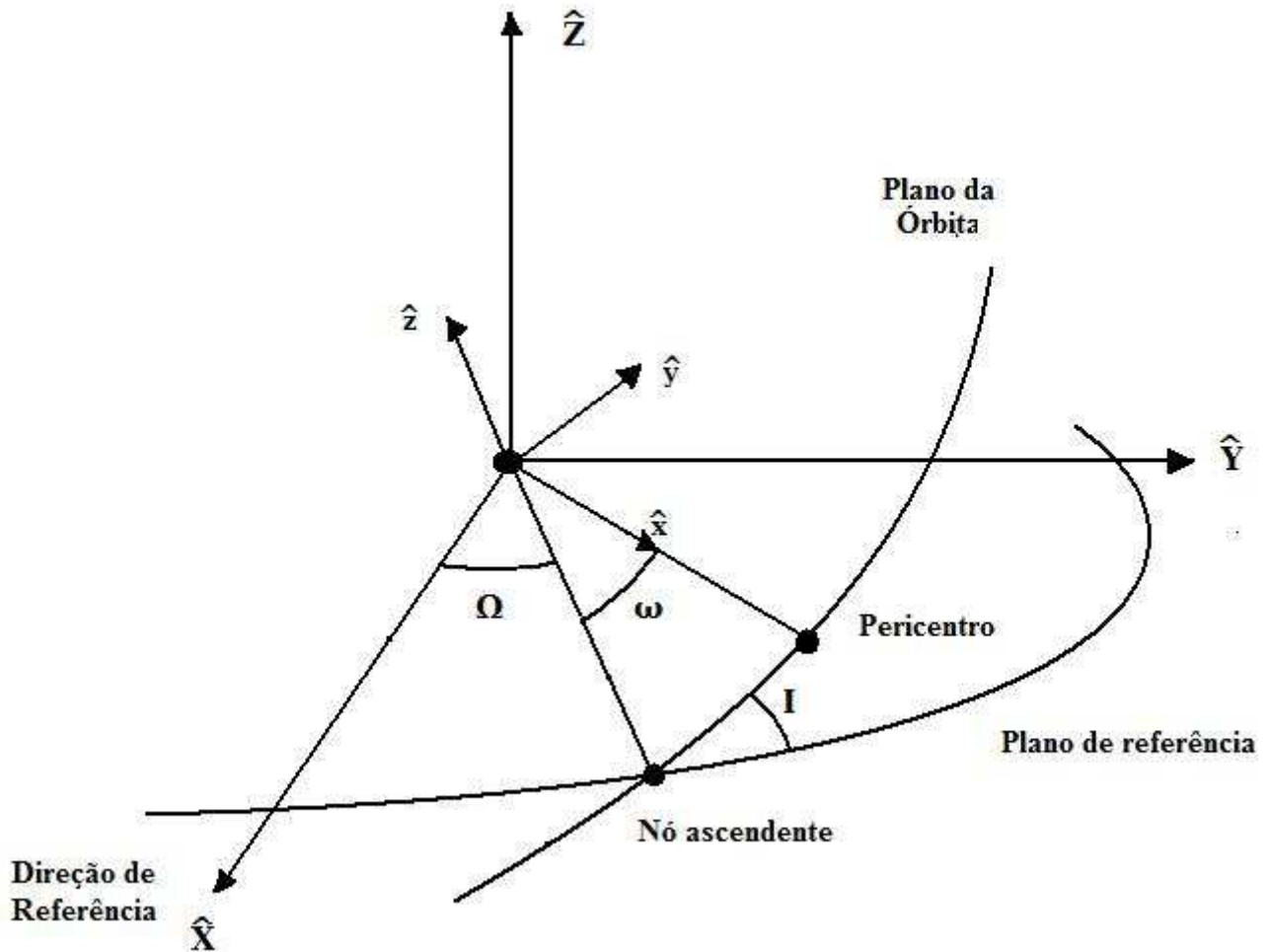


Figura 2.2: Planos da órbita e fundamental de referência e a relação entre alguns dos ângulos dos elementos orbitais. Observamos a inclinação  $I$ , o argumento do pericentro  $\omega$  e a longitude do nó ascendente  $\Omega$ .

órbita.

Para o problema de dois corpos, tais elementos podem ser obtidos em termos da posição e velocidade inicial do corpo. Onde as primeiras cinco constantes podem ser calculadas explicitamente.

Visualizamos os elementos orbitais na órbita de um planeta na figura 2.2. Para determinar a posição do corpo na órbita, precisamos introduzir outras variáveis. A primeira delas é a anomalia verdadeira, que é introduzida a partir da definição  $f = \theta - \omega$  que determina a posição na órbita e tem periodicidade de  $2\pi$ . De modo que a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.11)$$

Com a definição da Anomalia Excêntrica  $E$  que veremos adiante, em adição à equação 2.11, chega-se a:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}. \quad (2.12)$$

Que corresponde à terceira lei de Kepler do movimento planetário.

Logo em seguida, determinamos o movimento médio  $n$  do corpo, que é uma espécie de velocidade angular média do corpo em questão, definido da forma:

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.13)$$

A partir desta equação, podemos escrever também que:

$$\mu = n^2 a^3 \quad \text{e} \quad h = na^2 \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \quad (2.14)$$

No caso do problema de dois corpos, o valor do movimento médio  $n$  é constante. Uma vez definido o movimento médio de um corpo, definimos a anomalia média do mesmo como sendo:

$$M = n(t - \tau), \quad (2.15)$$

onde  $\tau$  é o instante de tempo em que o corpo passa pelo argumento do pericentro. A anomalia média não possui uma representação geométrica. Entretanto, a ela pode ser associada a um ângulo o qual possui interpretação geométrica. Para isso, consideramos um círculo de raio  $a$  igual valor do semi-eixo maior da órbita do corpo, circunscrito à órbita elíptica do corpo em questão. Definimos  $E$ , a anomalia excêntrica, como sendo o ângulo formado entre o semi-eixo maior da elipse da órbita e o raio do círculo circunscrito, que parte do centro da elipse até tocar o círculo para uma anomalia verdadeira  $f$  (figura 2.3).

Utilizando as definições acima, encontramos o valor de  $E$  explícito de acordo com a equação

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.16)$$

Desenvolvendo essa equação em função da anomalia verdadeira e excentricidade, chegamos a:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.17)$$

Para localizarmos um corpo em sua órbita em qualquer instante de tempo  $t$ , precisamos encontrar uma relação entre  $M$  e  $E$ . Utilizando-se algumas relações entre a velocidade do

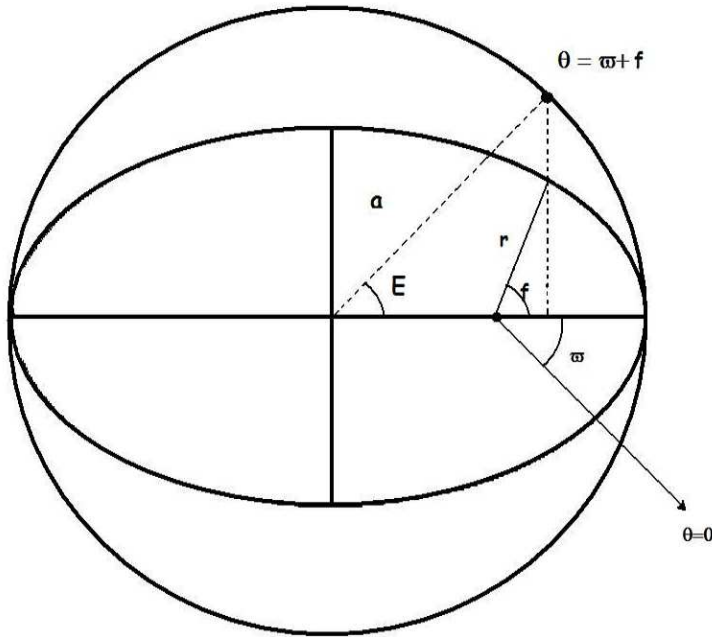


Figura 2.3: Plano da órbita elíptica circunscrita. Observamos a definição na anomalia verdadeira e excêntrica.

corpo e a anomalia verdadeira e suas derivadas, chegamos finalmente a:

$$M = E - e \sin E, \quad (2.18)$$

que é chamada Equação de Kepler, e sua solução é importante para a determinação da posição de um corpo em um instante exato. A equação é transcendental para  $E$ , sendo impossível obter uma solução analítica para a mesma.

Introduzimos então um novo ângulo, chamado de longitude média, e definido por:

$$\lambda = M + \varpi, \quad (2.19)$$

onde  $\lambda$  não tem uma representação geométrica para os casos em que a órbita não seja circular, e é linear no tempo.

Há várias formas numéricas para encontrar uma solução para a equação transcendental em (2.18). Entre os métodos que se destacam, encontram-se os de Newton-Rhapson, Danby (1988) e Hagihara (1970). Pode-se também utilizar métodos iterativos, da forma:

$$E_{i+1} = M + e \sin E_i. \quad (2.20)$$

Atribuindo-se a  $E_0$  um valor igual a  $M$ , e então, calculando-se os valores de ordem  $i$



mais altos iterativamente, com uma condição de parada, que determinaria o valor de  $E$ , quando, para um  $i = n$ , tivermos  $E_n \approx E_{n-1}$ .

### 2.3 Transformação entre Coordenadas

Durante nosso trabalho, vamos precisar fazer uma transformação entre elementos orbitais e coordenadas retangulares. Os elementos orbitais permitem-nos uma análise do problema mais fácil do que seria através das coordenadas retangulares. Porém, sendo as equações de Newton mais simples de construir, embora de difícil solução analítica, muitas vezes faz-se necessário fazer a transposição para as coordenadas retangulares, a fim de realizar alguma operação, como no caso, ao integrar as equações de movimento.

Nesta seção, apresentamos como se obter os elementos orbitais ou as coordenadas retangulares, uma através da outra. Para isto, utilizamos alguns resultados já obtidos na seção anterior.

Como já detalhamos anteriormente, os elementos orbitais são seis: excentricidade ( $e$ ), semi-eixo maior ( $a$ ), argumento do pericentro ( $\omega$ ), inclinação ( $I$ ), longitude do nó ascendente ( $\Omega$ ) e a anomalia verdadeira ( $M$ ). Já definimos a maioria dos elementos descritos acima. Quando estamos observando a órbita no espaço, o argumento do pericentro tem uma definição diferente do que para o caso planar. Neste caso, o argumento do pericentro é o ângulo medido sobre a órbita a partir do nodo ascendente até o pericentro da órbita. O nodo ascendente é o ponto no qual o plano da órbita intersecta o plano fundamental da referência. Considerando-se uma direção de referência no plano fundamental da referência, normalmente determinada pelo eixo  $\hat{\mathbf{X}}$  das coordenadas retangulares. Determinamos, então, a longitude do pericentro, previamente explicada, e tendo como definição:

$$\varpi = \Omega + \omega. \quad (2.21)$$

Para fazermos a transformação de um tipo de coordenada para o outro, precisamos então, fazer a transformação do plano da órbita para o plano de referência. E, escrevendo tais coordenadas em função dos elementos orbitais, encontramos relações que determinam tal transformação.

### 2.3.1 Transformação de Coordenadas Retangulares para Elementos Orbitais

Para realizar esta operação (ver figura 2.2, fazemos a rotações dos eixos, de modo a obter uma coordenada em função da outra. A relação entre coordenadas polares e retangulares no plano da órbita é:

$$x = r \cos f, \quad y = r \sin f, \quad z = 0. \quad (2.22)$$

Para termos os dois conjunto de eixos coincidentes, precisamos realizar as rotações conhecidas como rotações de Euler, que correspondem a: Primeiramente uma rotação em torno de  $z$  de um ângulo  $\omega$ , para que assim o eixo  $x$  coincida com o plano  $X - Y$ . Logo em seguida, uma rotação de um ângulo  $I$ , em torno de  $x$ , assim o eixo  $y$  também coincide com o plano  $X - Y$ . E finalmente uma rotação em torno de  $z$ , novamente, de um ângulo  $\Omega$  até que os eixos  $x$  e  $y$  coincidam com os eixos  $X$  e  $Y$ .

Visto como uma aplicação de transformação de espaços vetoriais, podemos fazer tal rotações na forma de matrizes. Dessa forma, as rotações que descrevemos acima correspondem, respectivamente à:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

De modo que, a transformação de um plano no outro equivale à equação:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

E escrevendo  $x$  e  $y$  como função da anomalia verdadeira, como em (2.22), chegamos a:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I \\ \sin(\omega + f) \sin I \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Iremos então, fazer a correspondência das coordenadas retangulares do plano  $(X, Y, Z)$  e as velocidades  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$  para os elementos orbitais  $a, e, I, \Omega, \omega$  e  $f$ .

Escrevendo então o momento angular total, sabendo que:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad (2.26)$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2. \quad (2.27)$$

De modo que, escrevemos o momento angular como:

$$\mathbf{h} = \left( Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, Z\dot{X} - X\dot{Z}, X\dot{Y} - Y\dot{X} \right) \quad (2.28)$$

E chegamos, então a:

$$h \sin I \sin \Omega = \pm h_x, \quad (2.29)$$

$$h \sin I \cos \Omega = \mp h_y, \quad (2.30)$$

$$h \cos I = h_z. \quad (2.31)$$

Os sinais superiores ocorrem quando temos  $h_z > 0$  e os inferiores quando  $h_z < 0$ . Os elementos orbitais em função das coordenadas retangulares, são escritas como:

$$a = \left( \frac{2}{R} - \frac{V^2}{G(m_1 + m_2)} \right)^{-1}. \quad (2.32)$$

Onde utilizamos o fato de que  $v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$ , que advém das equações (2.26) e (2.27).

Para a excentricidade, a partir de (2.14) e (2.32), encontramos:

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{Ga(m_1 + m_2)}}. \quad (2.33)$$

Para encontrarmos a inclinação  $I$  basta utilizarmos a equação (2.31), de modo que temos:

$$I = \cos^{-1} \frac{h_z}{h}. \quad (2.34)$$

E utilizando as expressões (2.29) e (2.30), chegamos a:

$$\sin \Omega = \frac{\pm h_x}{h \sin I}, \quad (2.35)$$

$$\cos \Omega = \frac{\mp h_y}{h \sin I}. \quad (2.36)$$

Cujo sinal se determina a partir do sinal de  $h_z$  como previamente detalhado.

Das matrizes de rotação que construímos em (2.25), encontramos:

$$\sin(\omega + f) = \frac{Z}{R \sin I}, \quad (2.37)$$

$$\cos(\omega + f) = \sec \Omega \left( \frac{X}{R} + \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I \right). \quad (2.38)$$

Para encontrar  $\omega$  e  $f$  separadamente, encontramos primeiramente  $f$ , a partir de:

$$\sin f = \frac{a(1 - e^2)}{he} \dot{R}, \quad (2.39)$$

$$\cos f = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1 - e^2)}{R} - 1 \right). \quad (2.40)$$

Uma vez encontrado o valor de  $f$ , basta introduzi-lo em (2.37) e (2.38), e encontrar o valor de  $\omega$ .

Finalizamos nossa transformação, ao encontrar o tempo de passagem pelo pericentro, através de (2.14) e  $r = a(1 - e \cos E)$ :

$$\tau = t - \frac{E - e \sin E}{\sqrt{Ga^{-3}(m_1 + m_2)}}. \quad (2.41)$$

Para encontrar os valores para  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $f$ , uma vez que realizamos cálculo numérico para encontrá-los, determinar o quadrante o qual se encontra, uma vez que as funções seno e cosseno são ímpar e par. Para isso, basta observar os valores positivos e negativos do cosseno e seno de cada ângulo, e assim, é possível determinar o valor do ângulo exato para cada um.

### 2.3.2 Transformação de Elementos Orbitais para Coordenadas Retangulares

Para o problema de dois corpos, o movimento dos mesmos ocorre em um plano fixo, que corresponde ao plano no qual a reta que liga os dois corpos, e através do qual ocorre a interação gravitacional, ocorre. Para fazer a volta para as coordenadas, valemo-nos principalmente da matriz (2.25). Uma vez que, no movimento sobre tal plano, temos a equação de uma elipse, sabemos que a mesma obedece à seguinte equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (2.42)$$

Para encontrar o valor de  $E$ , precisamos fazer encontrar a solução da Equação de Kepler (2.18), obtendo  $E = E(M)$ . E da figura 2.3, podemos dizer que:

$$x = a \cos E \quad \text{e} \quad y = b^2 \sin^2 E. \quad (2.43)$$

De onde chegamos a:

$$x = a(1 - e \cos E), \quad (2.44)$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (2.45)$$

Desta relação, e de acordo com a matriz (2.25), onde fazemos a transformação trigonométrica de  $\cos(2\theta)$  e  $\sin(2\theta)$  podemos dizer que:

$$\begin{aligned} X &= x(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I) - y(\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I) \\ &+ z \sin \Omega \sin I, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} Y &= x(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I) - y(\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I) \\ &+ -z \cos \Omega \sin I, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$Z = x \sin \omega \sin I + y \cos \omega \sin I + z \cos I. \quad (2.48)$$

Já para encontrar as velocidades, usamos as equações (2.22), que, ao ser derivada, gera-nos:

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \sin E, \quad (2.49)$$

$$\dot{y} = -\frac{na^2 \sqrt{1 - e^2} \cos E}{r}, \quad (2.50)$$

$$\dot{z} = 0. \quad (2.51)$$

E usando a mesma matriz de rotação previamente utilizada, chegamos às velocidades em coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x}(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I) - \dot{y}(\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I) \\ &+ \dot{z} \sin \Omega \sin I, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \dot{x}(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I) - \dot{y}(\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I), \\ &+ -\dot{z} \cos \Omega \sin I, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\dot{Z} = \dot{x} \sin \omega \sin I + \dot{y} \cos \omega \sin I + \dot{z} \cos I. \quad (2.54)$$

Notamos que nas equações (2.49) e (2.50) temos a dependência em  $E$  que foi definida como a Anomalia Excêntrica, anteriormente. Existem várias maneiras de se obter o valor

da anomalia excêntrica: Na seção 2.2 citamos algumas das maneiras de se calculá-la. No nosso trabalho, utilizamos o método iterativo já mencionado, e que será detalhado melhor na seção 4.1

## 2.4 A Função Perturbadora

Na seção anterior estudamos o problema que envolvia dois corpos ligados gravitacionalmente. Uma vez que nosso trabalho envolve o estudo de um par de planetas próximo à ressonância de segunda ordem, na forma 3:1, precisamos estudar o problema que envolve três corpos interagindo gravitacionalmente. A interação gravitacional tem o mesmo formato, porém, teremos agora uma segunda componente para força que atua sobre cada corpo, devido ao 3º corpo presente no problema. Comparativamente ao problema de dois corpos, a principal diferença em termos matemáticos é a não existência de uma solução analítica exata para o problema. O problema de três corpos já foi estudado por diversos cientistas, entre eles, alguns dos que deram significante desenvolvimento ao problema foram: Laplace, Jacobi, Le Verrier, Hamilton, Poincaré, Birkhoff, e mais recentemente Brouwer (Brouwer e Clemence, 1961), Chebotarev (Chebotarev, 1967), entre outros. Uma vez que agora temos três corpos envolvidos, o problema deixa de ser planar, sendo necessário a adição de outros ângulos, e referenciais mais apurados, a fim de determinar a posição espacial dos três corpos. O problema de três corpos pode ser simplificado dependendo-se das massas e inclinações dos planetas a um plano de referência.

Ao introduzirmos um terceiro corpo no problema, e tendo um corpo 'central' com massa muito maior que os outros dois, a aceleração causada pelo corpo central aos outros dois será afetada pela aceleração que tais corpos produzem no primeiro, central. Essas acelerações adicionais em relação ao corpo primário, de massa maior, pode ser obtida ao se analisar o gradiente do potencial perturbador, também chamado de *função perturbadora*.

Considerando o sistema definido acima, podemos escrever o mesmo em coordenadas retangulares em relação a um referencial arbitrário com origem em  $O$ . Considerando o corpo primário como uma estrela e os secundários como planetas, podemos denotar as posições vetoriais dos planetas em relação à estrela da seguinte forma:

$$|\mathbf{r}_{i,j}| = (x_{i,j}^2 + y_{i,j}^2 + z_{i,j}^2)^{1/2}. \quad (2.55)$$

E a posição vetorial relativa entre o corpo  $i$  e  $j$  pode ser escrita então:

$$|r_{ij}| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}. \quad (2.56)$$

Onde as coordenadas 1 e 2 correspondem aos planetas interno e externo respectivamente. Consideraremos as massas para cada as estrelas e os planetas como sendo  $M$ ,  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente. E as posições vetoriais de cada corpo em relação ao referencial inercial sendo:  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ . No referencial inercial, podemos então escrever a interação gravitacional para cada corpo, através das leis de Newton da seguinte forma:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = GMm_1\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + GMm_2\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}, \quad (2.57)$$

$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 = Gm_1m_2\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|r_2 - r_1|^3} - GMm_1\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}, \quad (2.58)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = Gm_1m_2\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|r_1 - r_2|^3} - GMm_2\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}. \quad (2.59)$$

Escrevendo agora as acelerações dos planetas relativo à aceleração da estrela, temos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{R}}_1 - \ddot{\mathbf{R}}, \quad (2.60)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}. \quad (2.61)$$

Então, substituindo as expressões para  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  em (2.57) a (2.62), temos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + G(M + m_1)\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = Gm_2\left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|r_2 - r_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}\right), \quad (2.62)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + G(M + m_2)\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} = Gm_1\left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|r_1 - r_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\right). \quad (2.63)$$

Analisando a expressão acima, notamos que podemos escrevê-la na forma de gradientes de funções escalares, e se assim o fizermos, teremos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_1(U_1 + R_1) = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \quad (2.64)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \nabla_2(U_2 + R_2) = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \quad (2.65)$$

Onde temos:

$$U_1 = G\frac{M + m_1}{r_1} \quad \text{e} \quad U_2 = G\frac{M + m_2}{r_2}. \quad (2.66)$$

$$R_1 = G \frac{m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^3}, \quad (2.67)$$

$$R_2 = G \frac{m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^3}. \quad (2.68)$$

Os termos da equação (2.66) são conhecidos como termos Keplerianos e são correspondentes aos potenciais para o caso do problema de dois corpos. O operador  $\nabla$  tem o índice 1 ou 2 de acordo com o corpo o qual ele está associado. Já as equações (2.67) e (2.68) correspondem aos termos do potencial que tem origem na perturbação causada pelos planetas. O primeiro termo do lado direito das equações (2.67) e (2.68) são os chamados *termos diretos* e os segundos os *indiretos*. Os termos indiretos não aparecem se o centro de massa do sistema é a origem dos sistemas coordenados. Como consideramos o planeta 1 interno ao planeta 2, ou seja  $r_1 < r_2$  sempre, podemos escrever a equação do movimento do planeta interno como nas equações (2.62) e (2.63). E a partir das mesmas, podemos reescrever o potencial perturbador para o planeta 1 e 2 como:

$$R_1 = \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \mu_2 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2}, \quad (2.69)$$

$$R_2 = \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mu_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1}, \quad (2.70)$$

onde  $\mu_i = G(M + m_i)$ . Podemos estudar as funções perturbadoras acima escritas de diversas formas, expandido-a de várias maneiras. Dentre as formas mais utilizadas temos a expansão em polinômios de Legendre, a expansão em elementos orbitais. Neste trabalho iremos nos ater a expansão em elementos orbitais.

A expansão em Elementos Orbitais para o problema de 3 corpos foi feita inicialmente na metade do século XVIII por Pierce, em 1849, que fez uma expansão até a sexta ordem em excentricidades e inclinações mútuas. Posteriormente, Le Verrier, em 1855, fez a expansão até a sétima ordem, que foi corrigida e ampliada até a 8ª ordem por Boquet (1889). Detalharemos o método de expansão abaixo, que segue a sequência dada em Murray e Dermott (2001). Dado o alto grau de complexidade dessas funções, fazemos uma separação entre a parte direta e indireta do Hamiltoniano expandido.

Definindo portanto:

$$R_D = \frac{a_2}{|r_2 - r_1|}. \quad (2.71)$$



Podemos escrever as equações (2.69) e (2.70) como:

$$R_1 = \frac{\mu_2}{a_2} R_D + \frac{\mu_2}{a_2} \alpha R_E, \quad (2.72)$$

$$R_2 = \frac{\mu_1}{a_2} R_D + \frac{\mu_1}{a_2 \alpha^2} R_I, \quad (2.73)$$

onde definimos  $a_1$  e  $a_2$  como sendo o semi-eixo maior do planeta interno e externo e  $\alpha$  como sendo a razão dos semi-eixos da forma:

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2}. \quad (2.74)$$

As expressões  $R_E$  e  $R_I$  correspondem aos termos indiretos provenientes da função perturbadora e são respectivamente devido ao planeta externo e interno. Para podermos então escrever  $R_D$  de forma a fornecer a parte direta de  $R_1$  ou  $R_2$ . Iremos então, realizar uma expansão de  $R_D$ . Essa expansão queremos que seja tal que  $R_1$  e  $R_2$  possua apenas como termos seus elementos orbitais. Isso implica que precisamos de uma expansão da parte direta de  $R_D$ , e das partes indiretas  $R_E$  e  $R_I$ .

A partir da expressão (2.56), utilizando a lei dos cossenos, podemos escrever:

$$|r_2 - r_1|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \psi. \quad (2.75)$$

Ou de outra forma, podemos escrever:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{R_D}{a_2} = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \psi]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

onde  $\Delta = |r_2 - r_1|$  é a separação entre os dois corpos de massas comparáveis. E  $\psi$  é o ângulo de abertura entre os dois raios-vetores. Uma vez que  $r_1 \cdot r_2 = r_1 r_2 \cos \psi$ , podemos escrever:

$$\cos \psi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}. \quad (2.77)$$

E a partir da matriz (2.25) podemos escrever:

$$\frac{x_i}{r_i} = \cos \Omega_i \cos (\omega_i + f_i) - \sin \Omega_i \sin (\omega_i + f_i) \cos I_i, \quad (2.78)$$

$$\frac{y_i}{r_i} = \sin \Omega_i \cos (\omega_i + f_i) + \cos \Omega_i \sin (\omega_i + f_i) \cos I_i, \quad (2.79)$$

$$\frac{z_i}{r_i} = \sin (\omega_i + f_i) \sin I_i. \quad (2.80)$$

Podemos expandir as expressões acima, em função das anomalias verdadeiras  $M_1$  e  $M_2$ , e então, podemos expandir a equação (2.76) em uma série de Taylor em função de  $\psi$ , de modo que encontramos:

$$\frac{1}{\Delta} = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos\psi - \cos(\theta_1 - \theta_2))]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.81)$$

Onde definimos:  $\theta_i = \varpi_i + f_i$ , sendo  $\theta_i$  a longitude verdadeira dos planetas com índice  $i$ .

Simplificando a equação (2.81), ao definir:

$$\frac{1}{\Delta_0} = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.82)$$

onde usamos,

$$\rho_0 = [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.83)$$

para definir uma série de Taylor em  $\rho_0$ , de modo a termos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} = \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left( \frac{1}{2} r_1 r_2 \cos\psi - \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)^i \times \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}. \quad (2.84)$$

Expandindo então em série de Taylor em função de  $\rho_0$ , utilizando os operadores definidos como:

$$D_{m,n} = a_1^m a_2^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \quad \text{e com:} \quad (2.85)$$

$$\epsilon_1 = \frac{r_1}{a_1} - 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = \frac{r_2}{a_2} - 1, \quad (2.86)$$

chegamos a:

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = a_2^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos[j(\theta_1 - \theta_2)], \quad (2.87)$$

onde  $b_s^{(j)}$  são os coeficientes de Laplace, cada um podendo ser expresso como uma série convergente em  $\alpha$  para todo  $\alpha < 1$ .

A série para os coeficientes de Laplace é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) &= \frac{s(s+1) \dots (s+j-1)}{1.2.3 \dots j} \alpha^j \\ &\times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1.2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Quando temos  $j = 0$ , o termo:

$$\frac{s(s+1) \dots (s+j-1)}{1.2.3 \dots j} \alpha^j = 1. \quad (2.89)$$

A série é sempre convergente para  $\alpha < 1$ . A expressão obtida em (2.87) pode ser generalizada, de forma que obtemos:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon_1^k \epsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta_1 - \theta_2), \quad (2.90)$$

que leva finalmente a:

$$R_D = \sum_{i=0}^{\infty} = \frac{2i!}{(i!)^2} \left( \frac{1}{2} \frac{r_1 r_2}{a_1 a_2} \psi \right)^i \frac{1}{2} a_1^i a_2^{i+1} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon_1^k \epsilon_2^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos [j(\theta_1 - \theta_2)], \quad (2.91)$$

onde  $A_{i,j,m,n}$  corresponde a um conjunto de funções tais que:

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left( a_2^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a_1^m a_2^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a_1^m \partial a_2^n} \left( a_2^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right). \quad (2.92)$$

Uma vez obtida  $R_D$ , podemos expandí-la em várias ordens de potência. As expansões que devem ser feitas a partir da função cosseno, são realizadas em termos da anomalia verdadeira  $f$  e da anomalia média  $M$ , e com limite de ordem na excentricidade e inclinação. Le Verrier em 1855 publicou em volumes do *Annals of the Paris Observatory* uma expansão de até sétima ordem, que foi posteriormente corrigida em volumes posteriores, e por Murray (1985). Podemos encontrar em Murray e Dermott (2001) e Brouwer e Clemence (1961) mais detalhes acerca do assunto.

Em nosso trabalho utilizamos uma expansão em 2ª ordem obtida a partir de Murray e Dermott (2001), para escrever os termos da expansão correspondente aos termos seculares e ressonantes do Hamiltoniano escrito para um sistema exoplanetário de massas comparáveis entre si e muito menores que a massa da estrela que orbitam.

Uma vez que geramos a série infinita para a parte direta da função perturbadora, para gerarmos para os termos indiretos, é bem mais simples, uma vez que utilizamos a mesma expansão em  $\cos \Psi$ .

No capítulo seguinte descrevemos como obtemos o Hamiltoniano para o nosso problema, e como modelamos o mesmo a fim de obtermos informações importantes da sua dinâmica, utilizando a teoria vista neste capítulo.

## Modelagem dos sistemas quasi-ressonantes

Neste capítulo iremos descrever quais os principais conjecturas que formarão o modelo empregado para estudar a dinâmica de um problema de três corpos, mais especificamente a dinâmica de dois planetas, de massas comparáveis os quais estão próximos à ressonância de movimentos médios 3:1.

Os sistemas aos quais os métodos serão aplicados serão : Saturno-Urano e Sol, o sistema 55 Cnc b-c e sua respectiva estrela e o sistema HD60532 b-c. Estando este último imerso na ressonância 3:1 completamente (Laskar e Correia, 2009).

A resolução para sistemas desse tipo é bastante complexa e não é obtida de forma analítica. Iremos neste capítulo desenvolver algumas técnicas que ajudem-nos a entender o problema observando como se comportam suas variáveis em diferentes regimes, ao avaliarmos o problema de modo a observarmos os termos de longo-período, ou as soluções próximos aos pontos de equilíbrio dos mesmos.

Introduzimos um modelo que descreve o problema supracitado através da teoria de Hamilton-Jacobi, escrevendo seu Hamiltoniano, que, devido ao fator de utilizarmos a função perturbadora, gerará uma série infinita de termos. Discutiremos portanto, como devemos escolher os termos de maior importância, e quais as consequências de tais escolhas. Em seguida, descreveremos como analisar com os dados gerados pelo Hamiltoniano construído, através da construção de gráficos. Observando a solução próxima a seus pontos de estabilidade e suas soluções especiais, no caso, periódicas. Iremos observar como varia a energia do sistema para várias excentricidades, construindo as curvas de nível dos sistemas, e observaremos com a definição de um parâmetro que descreve a proximidade do sistema a uma ressonância, como determinar em que regime dinâmico o sistema se encontra.

As modelagens utilizadas nesta dissertação foram utilizadas em outros trabalhos, como exemplo, Callegari et al. (2004), Callegari et al. (2006) ou Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a).

### 3.1 Construção do Hamiltoniano para sistemas próximos a ressonância 3:1

Resolveremos o problema utilizando o formalismo Hamiltoniano. O Hamiltoniano de um problema de três corpos interagindo gravitacionalmente é:

$$H = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\mathbf{p}_i^2}{m'_i} - \frac{\mu_i m'_i}{\mathbf{r}_i} \right) - \frac{Gm_1 m_2}{\Delta} + \frac{\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{M}, \quad (3.1)$$

que já se encontra escrito no referencial heliocêntrico e nas coordenadas de Poincaré. E onde temos:  $m_1$  e  $m_2$  são as massas do planeta interno e externo em unidades de massas solares,  $m'_1$  e  $m'_2$  as massas reduzidas que são  $m'_i = \frac{m_i M}{(M + m_i)}$ . A variável  $\mathbf{r}_i$  é a distância do corpo a estrela central do sistema,  $G$  é a constante gravitacional,  $\mu_i = G(M + m_i)$ ,  $\Delta = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  e  $\mathbf{p}_i = \frac{d\rho_i}{dt}$  é o momento conjugado relativo ao centro de gravidade do sistema de três corpos. Os índices 1 e 2 correspondem respectivamente ao planeta interno e o externo. Analisando o Hamiltoniano (3.1), é de conhecimento que os dois primeiros termos são responsáveis pelo movimento kepleriano de cada planeta, e o terceiro termo corresponde ao de interação entre os dois planetas.

Uma vez que o estudo do problema com este Hamiltoniano se mostra bastante difícil do ponto de vista da resolução do mesmo através de suas equações de movimento; sendo possível sua resolução apenas numericamente, reescrevemos o Hamiltoniano nas variáveis elípticas de Poincaré, para tentarmos analisarmos o mesmo de forma a simplificar o problema. As coordenadas e momentos conjugados nas variáveis elípticas de Poincaré são:

$$\lambda_i = \text{longitude média}, \quad L_i = m'_i \sqrt{\mu_i a_i}, \quad (3.2)$$

$$-\varpi_i = \text{longitude do pericentro}, \quad L_i - G_i = L_i \left( 1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right), \quad (3.3)$$

$$-\Omega_i = \text{Longitude do nodo ascendente}, \quad G_i - H_i = L_i \sqrt{1 - e_i^2} \times (1 - \cos I_i) \quad (3.4)$$

onde:  $a_i$ ,  $e_i$  e  $i_i$  são respectivamente os semi-eixos maiores, excentricidades e inclinações dos planetas. Reescrevemos então o hamiltoniano nas novas coordenadas, e encontramos:

$$H = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 m_i^3}{2L_i^2} - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \times R(L_i, L_i - G_i, G_i - H_i, \lambda_i, \varpi_i, \Omega_i), \quad (3.5)$$

em que  $R$  é chamada de *função perturbadora*, e a soma corresponde integralmente aos termos que descrevem o movimento kepleriano dos planetas.

As transformações canônicas que utilizamos neste trabalho vem a simplificar o problema, ao termos a diminuição dos graus de liberdade utilizando-se o formalismo de Hamilton-Jacobi, cuja idéia é fazer com que as transformações sejam tais que os momentos conjugados às variáveis sejam constante. Quando fazemos a transformação presente nas equações (3.2) a eqreftrans3, estamos diminuindo os graus de liberdade do sistema ao considerarmos que resolveremos o problema plano, ou seja  $I = 0$ .

Para construirmos o Hamiltoniano para o nosso problema, iremos considerar uma série de fatores que determinarão quais são os termos importantes para o mesmo. E quais são os coeficientes de Laplace e suas combinações que formarão as constantes que teremos no nosso problema. A equação (3.5) é formada por uma série infinita, conforme vimos no capítulo 1. Podemos escrever a função perturbadora como uma soma de três funções, na forma:

$$R = R_D + R_E + R_I, \quad (3.6)$$

em que  $R_D$  é a parte direta, conforme vimos no final do Capítulo 2 (2.91).  $R_I$  é a parte indireta causada pelo perturbador externo, cujo termo da função perturbadora tem a forma:

$$R_E = - \left( \frac{r_1}{a_1} \right) \left( \frac{a_2^2}{r_2} \right) \cos \Psi, \quad (3.7)$$

e  $R_I$  é também devido à parte indireta da função perturbadora, neste caso, devido ao perturbador interno. E se escreve da seguinte forma:

$$R_I = - \left( \frac{r_2}{a_2} \right) \left( \frac{a_1^2}{r_1} \right) \cos \Psi. \quad (3.8)$$

Para determinar nossos Hamiltoniano, utilizamos o princípio da média, onde assumimos que todos os termos de curto período não são importantes, uma vez que feita uma média sobre os mesmos em um intervalo muito maior que o período orbital do planeta em questão, obteremos um valor nulo.

Uma vez que as séries são escritas em função de  $\alpha$ , que é a razão dos semi-eixos dos planetas, é fundamental que as órbitas não se cruzem, para que assim, tenhamos sempre uma série convergente em todos os seus termos. A condição que tem de ser obedecida é a seguinte:

$$a_1(1 + e_1) = a_2(1 - e_2), \quad (3.9)$$

O que significa que o valor da distância do planeta interno no apocentro não deve ser maior que o valor da distância do planeta externo no seu pericentro. Para os três sistemas estudados, tal valor confere.

Vale salientar que, uma vez que podemos escrever a função perturbadora de forma geral como

$$R = \mu_2 \sum S \cos \phi, \quad (3.10)$$

onde S é uma função dos semi-eixos maiores, excentricidade e inclinações, da definição de longitude de pericentro, a forma geral do argumento de  $\phi$  pode ser escrita como:

$$\phi = j_1\lambda_2 + j_2\lambda_1 + j_3\varpi_2 + j_4\varpi_1 + j_5\Omega_2 + j_6\Omega_1 \quad (3.11)$$

Chamando o coeficiente de cada variável como  $j$ , percebemos que:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0, \quad (3.12)$$

que é a regra conhecida como regra de D'Alembert. Esta regra não se aplica a qualquer escolha dos ângulos. Precisamos utilizar ângulos que determinem uma direção fixa, ou seja, longitudes, ao invés de anomalias(médias, verdadeiras, ...). Como ângulos mais utilizados temos o conjunto formado por:  $\varpi_1, \varpi_2, \Omega_1, \Omega_2, \lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

Na expressão (3.10) chamamos 'S' da "força" individual de um termo, e iremos utilizar este parâmetro para escolher termos mais importantes em relação à proximidade da ressonância do problema.

Para determinar quais os termos para  $R$ , seguimos as orientações abaixo, como vistas em Murray e Dermott (2001):

1. Decidir quais as combinações de ângulo  $\phi$  é aplicada ao problema.
2. Determinar a ordem 'N' do argumento. Que é igual à soma dos valores absolutos dos coeficientes das variáveis  $\lambda_i$ .

3. A partir dos termos de ordem apropriada na expansão em  $R_D$ , determinar o valor de  $j$  que concorde com o argumento desejado  $\phi$ .
4. Calcular a combinação dos coeficientes de Laplace para o dado valor de  $j$  para determinar explicitamente a forma do termo de interesse.
5. Decidir se há uma perturbação interna ou externa, e a partir daí fazer uso das expressões que determinam sua série.

Precisamos também classificar os diferentes tipos de termos presentes no Hamiltoniano. Uma vez que todo termo em cosseno possui argumentos dependentes de  $\varpi_1, \varpi_2, \Omega_1, \Omega_2, \lambda_1 e \lambda_2$ , que se combinam linearmente. Caracaterizaremos os termos de acordo com suas propriedades dinâmicas.

Sabemos, para o caso não-perturbado, que os únicos elementos que variam são as longitudes médias dos planetas considerados. Todos os outros elementos permanecem constantes. O mesmo não ocorre para o caso perturbado, onde a longitude média ainda varia bastante durante o intervalo de um período. Os outros elementos, porém, variam lentamente em uma escala de tempo de vários períodos. Os termos que variam lentamente, os quais observamos uma variação considerável em uma escala de tempo muito alta, chamamos de termos seculares ou de longo período. Por este igual motivo, aos termos que dependem das longitudes, podemos chamar de termos de curto período. Há também os termos ressonantes, que se caracterizam devido aos argumentos do cosseno estarem escritos quando os movimentos médios dos planetas são próximos a um valor múltiplo inteiro, cuja diferença é muito pequena e uma vez na equação dos movimentos para o caso perturbado, gera termos bastante expressivos na mesma, chamados de pequenos divisores (Ferraz-Mello, 2007). Tal relação pode ser escrita da forma:

$$j_2 n_2 - j_1 n_1 \approx 0, \quad (3.13)$$

onde  $j_i$  são valores inteiros, e  $n_i$  são os movimentos médios dos corpos. Se consideramos os semi-eixos maiores dos planetas, podemos escrever uma relação para os termos ressonantes da seguinte forma:

$$a_1 \approx \left( \frac{|j_1|}{|j_2|} \right)^{\frac{2}{3}} a_2. \quad (3.14)$$



Definiremos então a função perturbadora para o nosso problema da seguinte forma:

$$R = R_{sec} + R_{res}, \quad (3.15)$$

onde os termos do lado direito da equação correspondem respectivamente à parte secular e à ressonante do Hamiltoniano. Os coeficientes para os termos da expansão da função perturbadora são escritos como combinação de coeficientes de Laplace, conforme visto no Capítulo 2. Esses coeficientes são conhecidos como coeficientes de Le Verrier. Através de Murray e Dermott (2001), determinamos a série infinita e os termos gerais que a compõem. Observando a forma geral de  $R_D$ , que determinará a parte perturbadora do nosso Hamiltoniano, e sabendo-se que a parte secular do Hamiltoniano é aquela que não possui dependência das longitudes médias, encontramos os coeficientes para os termos seculares, que estão dispostos na parte secular do Hamiltoniano abaixo:

$$R_{sec} = c_1 + c_2 (e_1^2 + e_2^2) + c_0 s_i^2 + c_4 e_1 e_2 \cos(\varpi_2 - \varpi_1), \quad (3.16)$$

onde os  $c'_i$ s são:

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{2} \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha), \\ c_1 &= \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha), \\ c_2 &= \frac{1}{8} [2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{1}{2}}^{(0)}, \\ c_4 &= \frac{1}{4} [2 - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{1}{2}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A notação acima, é escrita dessa forma para uma futura organização dos termos utilizados, como veremos mais adiante. A variável  $s_i = \sin\left(\frac{I_i}{2}\right)$ , e  $I$  é a inclinação da órbita do corpo especificado em relação a um plano referencial. Para nosso trabalho, trataremos do caso planar. Então, fazendo  $I = 0$ , não utilizaremos o coeficiente  $c_0$ . Logo, a parte de longo período do Hamiltoniano do nosso problema pode ser escrito:

$$R_{sec} = c_1 + c_2 (e_1)^2 + c_3 (e_2)^2 + c_4 (e_1 e_2) \cos(\varpi_2 - \varpi_1), \quad (3.18)$$

Para determinar os termos ressonantes, é preciso observar os termos que obedecem às condições (3.13) ou (3.14). Cujos argumentos no cosseno, serão da forma:

$$k\lambda_s - l\lambda_j - m\varpi_s - n\varpi_j. \quad (3.19)$$

Porém, uma vez que temos uma série infinita, sempre existirão números inteiros tais que a condição de ressonância seja satisfeita. Porém, os termos de maior "força" para o nosso caso, será determinado pelos que obedecem à condição da ressonância 3:1. Uma vez que vamos trabalhar especificamente com o sistema ressonante 3:1, nos interessa apenas os termos em que temos  $k = 3$  e  $l = 1$ . Para estes valores, os termos serão mais "fortes", de acordo com a função  $S$  vista em (3.10). Mais detalhes podem ser vistos em Murray e Dermott (2001).

Baseado no trabalho de Tittlemore e Wisdom (1988), Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a) e Callegari et al. (2004), determinamos os coeficientes que estão escritos na forma de Le Verrier (Le Verrier, 1855). Apesar de termos problemas com ordem de ressonância diferente nos dois casos, a parte secular da função perturbadora será a mesma tanto para os sistemas de ordem de ressonância 3, como para o nosso caso, que corresponde a uma ressonância de 2ª ordem. Para escrever a parte ressonante da função perturbadora do sistema 3:1 descobrimos quem eram os coeficientes que são combinações dos coeficientes de Laplace, chamados coeficientes de Le Verrier (Le Verrier, 1855), para o sistema 3:1, observando os termos diretos da expansão em coeficientes de Laplace encontrada em (Murray e Dermott, 2001).

Uma vez que estamos tratando nosso problema como sendo planar e médio, os termos dependentes das inclinações deverão ser descartados pois dependem das inclinações dos corpos. Em adição a estes termos, os termos cujos argumentos do cosseno não são escritos em seus ângulos de longitude média como tendo a proporção 3:1 da ressonância, serão também excluídos, pois não terão influência expressiva no problema, já que não geram mínimos com valor próximo a zero. Então, os possíveis argumentos para os termos em cosseno da parte ressonante da função perturbadora são os seguintes:

$$\begin{aligned} 3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1 - \varpi_2, \\ 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1, \\ 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Logo, observando a função perturbadora direta e indireta, que podemos encontrar em Brouwer e Clemence (1961) ou em Murray e Dermott (2001), os coeficientes restantes para os termos cujo argumento são os definidos em (3.20) serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \frac{e_1^2}{2} [21 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(3)} \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1), \\
& \frac{e_1^2 e_2^2}{2} \frac{e_2^2}{2} [-20 - 10\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(2)} \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_2 - \varpi_1), \\
& \frac{1}{4} \frac{e_2^2}{2} \left( [17 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(3)} - \frac{27}{8} \alpha \right) \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_2).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Onde os  $b_i^{(j)}$  são os coeficientes de Laplace que tem como forma geral a descrita no capítulo 1 (equação(2.88)). os  $D'$ s correspondem às derivadas em função de  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é a razão dos semi-eixos na forma:  $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ . O termo que aparece em  $c_7$ ,  $-\frac{27}{8}\alpha$  é proveniente da parte indireta da função perturbadora. Para calcular os coeficientes de Laplace em questão e posteriormente os Coeficientes de Le Verrier, utilizamos o programa descrito no capítulo 4. De posse de tais informações, a parte ressonante do nosso Hamiltoniano se escreve:

$$R_{res} = c_5 e_1^2 \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1) + c_6 e_2^2 \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1 - \varpi_2) + c_7 e_1 e_2 \cos(3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_2), \tag{3.22}$$

onde  $c_5$ ,  $c_6$  e  $c_7$  podem ser identificados respectivamente de (3.21) e se escrevem:

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{1}{8} [21 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(3)}, \\
c_6 &= \frac{1}{4} [-20 - 10\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(2)}, \\
c_7 &= \frac{1}{4} [17 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(1)} - \frac{27}{8} \alpha.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Para estudar as propriedades de longo-período dos sistemas, para todos os cálculos acima consideramos  $\alpha$  como estando na ressonância exata. Para tal, tomamos o valor mais recente calculado para o semi-eixo maior do planeta interno, e calculamos o valor do semi-eixo maior do planeta externo em função da razão dos períodos da ressonância 3:1 através da condição de ressonância vista em (3.14) Para os três casos, uma vez que as massas dos planetas são muito menores que a massa das estrelas (da ordem de  $10^3 \sim 10^4 \times$  menores), podemos considerar que:

$$\alpha = \left( \frac{3}{1} \right)^{-2/3} \approx 0.480749857. \tag{3.24}$$

Seguindo os artigos Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a), Callegari et al. (2004) ou Callegari

et al. (2006) realizamos uma nova transformação canônica nas variáveis, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1, & & J_1 &= L_1 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \\
 \lambda_2, & & J_2 &= L_2 - \frac{3}{2}(I_1 + I_2), \\
 \sigma_1 = \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \varpi_1, & & I_1 &= L_1 - G_1, \\
 \sigma_2 = \frac{3}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \varpi_2, & & I_2 &= L_2 - G_2,
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são os ângulos ressonantes e  $I_1, I_2$  os momentos conjugados à longitude do pericentro e do nodo, respectivamente. A escolha para os ângulos ressonantes implica em algumas consequências na hora de construirmos o plano de fase da energia em função das excentricidades, como veremos posteriormente. Tal escolha, segundo Lemaitre (1984) faz com que o plano de fase tenha uma modulação ocasionada pelo fato de termos usado o ângulo que corresponde a  $1/i$  do valor do ângulo ressonante (equações (3.20)). Pois, usamos o ângulo  $\sigma$  na forma:

$$\sigma_1 = \frac{p+q}{q}\lambda_2 - \frac{p}{q}\lambda_1 - \varpi_1, \tag{3.26}$$

$$\sigma_2 = \frac{p+q}{q}\lambda_2 - \frac{p}{q}\lambda_1 - \varpi_2 \tag{3.27}$$

Esta notação é a mesma introduzida e utilizada em Poincaré (1902) e Schubart (1966), e o resultado é que como as equações (3.26) e (3.27) definem  $\sigma$  módulo  $2\pi p/q$ , produzimos  $i$  vezes o plano de fase no nosso diagrama.

Escrevendo Hamiltoniano com essas novas variáveis, verificamos que o mesmo não depende das variáveis  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ou seja, as variáveis  $J_1$  e  $J_2$  são constantes do movimento. Assumindo agora a hipótese de que  $I_1 \approx J_i(\frac{e_i^2}{2})$  expandimos o Hamiltoniano uma série de potências, sabendo-se que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \\
 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{1+x} \right] &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Escrevendo o Hamiltoniano (3.5) em função de (3.18) e (3.21), e fazendo a aproximação (3.28), levando em conta apenas os dois primeiros termos da série, pois após os 2<sup>os</sup> termos

da série, os termos ficam muito menores que os 2 primeiros. Temos, então:

$$\begin{aligned}
H &= 2A(I_1 + I_2) + 4B(I_1 + I_2)^2 + 2CI_1 + 2DI_2 + 2E\sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 - \sigma_2) \\
&+ 2F_1 I_1 \cos(2\sigma_1) + 2F_2 I_2 \cos(2\sigma_2) + 2F_3 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 + \sigma_2).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Os coeficientes que aparecem no Hamiltoniano acima são:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{M_1}{2J_1^3} + \frac{3}{2} \frac{M_2}{2J_2^3}, & B &= -\frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{M_1}{J_1^4}, \\
C &= -c_2 \frac{M_3}{J_1 J_2^2} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_1}{J_2^3}, & D &= -c_3 \frac{M_3}{J_2^3} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_3}{J_2^3}, \\
E &= -c_4 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}}, & F_1 &= -\frac{1}{2} c_5 \frac{M_3}{J_2^3 J_1}, \\
F_2 &= -\frac{1}{2} c_6 \frac{M_3}{J_2^3}, & F_3 &= \frac{1}{2} c_7 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

E onde:  $M_1 = \mu_1^2 m_1^3$ ,  $M_2 = \mu_2^2 m_2^3$  e  $M_3 = \frac{m_1 M_2}{M}$ .

O cálculo dos coeficientes A, B, C,... são feitos considerando-se  $J_1$  e  $J_2$  constantes com os valores dos semi-eixos dos planetas como estando exatamente na ressonância, e com a excentricidade igual a zero da mesma forma para ambos. Calculamos os coeficientes para cada um dos sistemas estudados. Os valores encontram-se destacados nos capítulos de aplicação a cada sistema específico. O fato de usarmos estas condições para calcular as constantes vem do fato de que, com o sistema próximo à ressonância, as constantes praticamente não variarão, com exceção de A.

Esperamos que o valor de  $B$  seja bem maior que o valor das outras constantes. Porém, esse aspecto é explicado pelo fato do mesmo ser multiplicado por termos de 4º grau de potência de excentricidade, que são bastante pequenos.

A expansão que realizamos em (3.28), é uma expansão feita em termos de  $I_1$  e  $I_2$ , e estamos considerando uma aproximação linear, ou seja, apenas os termos de primeira ordem da expansão. Estes termos, conforme a hipótese de que  $I_i = J_i \left(\frac{e_i^2}{2}\right)$ , pressupõe termos quadráticos nas excentricidades.

A transformação canônica utilizada em (3.29), faz com que tenhamos uma diminuição ainda maior para os graus de liberdade, ao fazermos a exclusão dos termos de curto período do Hamiltoniano e o caso planar.

### 3.2 Introdução do Parâmetro de Proximidade com a Ressonância

Precisamos estudar a região próxima à ressonância, e para isso fazemos uso de um parâmetro  $\delta$  de proximidade com a ressonância. Este parâmetro foi primeiramente introduzido em Tittlemore e Wisdom (1988). O parâmetro demonstra a proximidade com a ressonância encontrando em função dos coeficientes em (3.30); uma combinação linear em que consigamos escrever a relação de ressonância dos movimentos médios. Uma vez que estamos tratando do caso 3:1, temos que a relação entre os movimentos médios na ressonância será:  $3n_2 - n_1 \cong 0$ .

Este valor de  $\delta$  pode ser também atribuído ao se analisar os ângulos ressonantes do problema, que são os três mostrados na equação (3.20). Se analisamos as constantes A, C e D presente no Hamiltoniano (3.29), notamos que:  $4A \approx 3\lambda_2 - \lambda_1$ ,  $\varpi_1 \approx 2C$  e  $\varpi_2 \approx 2D$ . Ou seja, quando estamos próximos a ressonância, o valor de  $\delta$  irá se aproximar de zero, uma vez que na ressonância de movimentos médios, o fator  $3n_2 - n_1 \approx 0$ . Como temos três ângulos ressonantes, escolhemos entre um deles para determinar o valor de  $\delta$  que utilizaremos.

Os três ângulos ressonantes, de acordo com os coeficientes do Hamiltoniano nos dão como possibilidade os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}\delta &= 4A + 2C + 2D, \\ \delta &= 4A + 4C, \\ \delta &= 4A + 4D.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Os valores de  $\delta$  calculados acima são bastante próximos. Escolhemos o  $\delta = 4A + 2C + 2D$  porque a uma primeira aproximação pode ser escrito como  $3n_1 - n_2 - \varpi_1 - \varpi_2$ , e este termo tem o maior coeficiente constante  $F_3$ , sendo, portanto, mais influente no Hamiltoniano.

Uma vez que o Hamiltoniano depende fortemente dos semi-eixos devido ao coeficiente A, iremos introduzir o  $\delta$  a partir de A, para que assim não haja mais tal dependência. Fazendo tal substituição, o Hamiltoniano fica:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}(\delta - 2C - 2D)(I_1 + I_2) + 4B(I_1 + I_2)^2 + 2CI_1 + 2DI_2 + 2E\sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &+ 2F_1 I_1 \cos(2\sigma_1) + 2F_2 I_2 \cos(2\sigma_2) + 2F_3 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\tag{3.32}$$

Com o Hamiltoniano escrito desta forma, diminuimos o número de parâmetros livres do problema, deixando apenas  $\delta$  e  $H$ .

Para uma posterior análise, foi também necessário escrever o Hamiltoniano em coordenadas não-singulares. Pela sua definição:

$$x_i = \sqrt{2I_i} \cos(\sigma_i), \quad y_i = \sqrt{2I_i} \sin(\sigma_i). \quad (3.33)$$

Substituindo em (3.32), temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4} (\delta - 2C - 2D) (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + B (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2 + C (x_1^2 + y_1^2) \\ &+ D (x_2^2 + y_2^2) + E (x_1 x_2 + y_1 y_2) + F_1 (x_1^2 - y_1^2) + F_2 (x_2^2 - y_2^2) \\ &+ F_3 (x_1 x_2 - y_1 y_2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

De posse do Hamiltoniano recém construído, iremos estudar o domínio secular dos sistemas.

### 3.3 Movimento Secular dos Sistemas Planetários

Para estudar o domínio secular dos sistemas planetários deste trabalho, iremos inicialmente retirar do Hamiltoniano os termos ressonantes, que possuem argumentos em cosseno envolvendo os ângulos ressonantes. Com este novo Hamiltoniano, queremos observar as soluções especiais do mesmo. Porém, escrito apenas sem a parte ressonante encontramos problemas para encontrar soluções analíticas ao integrar as equações dos movimentos.

Então, fazemos uma nova transformação canônica, que permite-nos obter uma relação entre as novas variáveis, simplificando assim, as equações diferenciais do problema.

A transformação canônica realizada foi:

$$\begin{aligned} \Delta\varpi &= \sigma_1 - \sigma_2, & K_1 &= I_1, \\ \phi &= \sigma_2, & K_2 &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde a variável  $K_2$  é chamada déficit do momento angular do sistema. E escrevemos um novo Hamiltoniano nessas variáveis, obtendo:

$$H_{sec} = \frac{1}{2} (\delta - 2C - 2D) K_2 + 4BK_2^2 + 2CK_1 + 2D(K_2 - K_1) + 2E\sqrt{K_1(K_2 - K_1)} \cos(\Delta\varpi). \quad (3.36)$$

O Hamiltoniano escrito deste modo possui apenas um grau de liberdade. O fato de termos retirado os termos ressonantes, somado ao fato de considerarmos o problema planar médio, reduzem-o a esta forma. A partir deste Hamiltoniano, queremos encontrar as soluções para as variáveis no Hamiltoniano. Encontraremos as equações de Hamilton-Jacobi para este sistema, que são:

$$\dot{K}_1 = -\frac{\partial H_{sec}}{\partial \Delta\varpi} = 2E\sqrt{K_1(K_2 - K_1)} \sin \Delta\varpi, \quad (3.37)$$

$$\dot{\Delta\varpi} = \frac{\partial H_{sec}}{\partial K_1} = 2(C - D) + \frac{E(K_2 - 2K_1)}{\sqrt{K_1(K_2 - K_1)}} \cos \Delta\varpi. \quad (3.38)$$

Uma vez que o Hamiltoniano não depende de  $\phi$  ela é ignorável, e portanto:

$$\dot{K}_2 = -\frac{\partial H_{sec}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.39)$$

$$K_2 = \text{constante}. \quad (3.40)$$

Resta-nos, portanto, resolver:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_{sec}}{\partial K_2} = \frac{1}{2}(\delta - 2C + D) + 8BK_2 + \frac{EK_1}{\sqrt{K_1(K_2 - K_1)}} \cos \Delta\varpi. \quad (3.41)$$

Com a equação acima, iremos encontrar as soluções periódicas. Uma solução periódica é estacionária. E sabemos que para que um movimento seja estacionário, suas coordenadas não-cíclicas ou ignoráveis devem ser constantes. Desse modo, teremos que:  $K_1 = cte$ , ou seja,  $\dot{K}_1 = 0$ . O mesmo vale para  $\Delta\varpi$ . Para um dado  $H_{sec}$  podemos facilmente integrar as equações (3.37) e (3.38), pois podemos encontrar  $K_2$ , que é uma constante do movimento. As equações de movimento obedecem:

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= 0, & \dot{\Delta\varpi} &= 0, \\ K_2 &= cte, & \phi &= \nu_\phi t + cte. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A primeira coisa que podemos ver é que, os valores do ângulo secular  $\Delta\varpi$  deve ser  $\Delta\varpi = 0$  ou  $\pi$ . Definimos respectivamente cada uma dessas soluções respectivamente como Modo I e Modo II. Podemos também tirar uma relação entre  $K_1$  e  $K_2$  a partir da primeira parte



da equação(3.41), de modo que podemos escrever o Hamiltoniano em função de uma das duas variáveis apenas. Vale a pena notar que as soluções acima são válidas apenas quando não temos singularidades. Observando as equações de movimento (3.38) e (3.41), vemos que ocorrem singularidades se temos:  $K_1 = 0$  ou  $K_1 = K_2$ .

Queremos observar como se comportam as soluções periódicas em relação aos valores de energia. Então, encontraremos a relação entre  $K_1$  e  $K_2$ , a partir da equação (3.42). Para encontrar as soluções, escrevemos  $K_1$  em função de  $K_2$  e vice-versa. Pois queremos escrever a energia em função das excentricidades dos dois planetas individualmente. Resolvendo, obtemos:

$$K_1 = \frac{\Delta}{2} \left[ \alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \right], \quad (3.43)$$

$$K_2 = \frac{K_1}{2} \left[ \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \right], \quad (3.44)$$

onde:  $\alpha = \lambda^2 + 4$ ,  $\lambda = 2 \left( \frac{D - C}{E} \right)$  e  $\Delta = L_2 \left( 1 - \sqrt{1 - e_2^2} \right)$ .

Escrevemos então, o Hamiltoniano em função das excentricidades  $e_1$  e  $e_2$ , para os três sistemas estudados. E assim poderemos analisar como as soluções do Hamiltoniano dependem das excentricidades e verificar os modos de movimento para os sistemas dinâmicos que pretendemos estudar. Nos capítulos seguintes fazemos os gráficos (figuras 6.1, 7.1 e 8.1) para cada sistema estudado.

Notamos que para valores do Hamiltoniano  $H_{sec}$  abaixo de zero, teremos apenas duas soluções, enquanto que para valores positivos, teremos quatro soluções possíveis. Se analisarmos os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , percebemos que os mesmos mudam de sinal ao passar pelo valor das excentricidades que corresponde ao máximo das parábolas quartenárias que são solução deste problema. A escolha do valor de  $\delta$  foi feita a fim de podermos observar o regime secular e as regiões ressonantes para valores altos de  $\delta$  se comparado aos valores necessários para o sistema encontrar-se imerso na ressonância totalmente. Estudamos as soluções para o Hamiltoniano Secular a partir da construção do plano de fase das excentricidades e da variável  $\Delta\varpi$ . A partir das soluções para  $K_1$  e  $\Delta\varpi$  definidas em (3.42), integramos as equações de movimento mostradas em (3.37) e (3.38) através do método de Runge-Kutta, que será explicado no capítulo seguinte. Variamos as condições iniciais para  $K_1$ , e as condições iniciais para  $\Delta\varpi$  eram basicamente dadas pelos valores 0 ou  $\pi$ . Uma vez

encontradas as soluções, montamos o plano de fase de  $e_i \cos \Delta\varpi$  e  $e_i \sin \Delta\varpi$ . Escolhemos o gráfico desta forma pois podemos observar de modo mais intuitivo se ocorrem librações ou circulações das excentricidades em torno de um determinado ângulo.

As equações de movimento não dependem de  $\delta$ , e, para a integração, consideramos uma energia constante obtida a partir de  $K_2$  que é uma constante do movimento chamada de Deficit do Momento angular como visto em Michtchenko e Malhotra (2004). Define-se também o momento angular total como sendo  $AM = L_1 + L_2 - K_2$ .

Para o cálculo dos planos de fase descritos acima, determinamos portanto, um valor fixo para  $K_2$ , que implica em um momento angular constante. O tempo de integração para cada um dos sistemas também é diferente uma vez que os períodos de cada um são bastante díspares.

Para determinar os valores das condições iniciais, uma vez que queríamos observar todas as características do plano de fase, variamos o valor das excentricidades durante todo o intervalo relevante para o nosso estudo, e a partir do mesmo determinamos o valor inicial de  $K_1$ . Já para  $\Delta\varpi$ , iniciamos com o valor de 0 ou  $\pi$  para que assim pudessemos observar o maior valor absoluto possível positivo e negativo, dentro das excentricidades utilizadas. Quando temos os valores de  $e_1$  ou  $e_2$  negativos, estamos tratando do modo II das soluções periódicas já descrita.

### 3.4 Curvas de Nível

A fim de analisar de outra forma a dinâmica do problema, observando os possíveis regimes de movimento possível para uma grade de condições iniciais diferentes, construímos as curvas de nível do Hamiltoniano para sistemas próximos à ressonância 3:1 e o aplicamos para os mesmos três sistemas que vem sendo estudado neste trabalho. Construiremos os gráficos para as curvas de nível do Hamiltoniano total para cada sistema (3.35), Porém, faz-se também necessário utilizar o Hamiltoniano Secular (3.36) para encontrar os pontos de equilíbrio que serão utilizados para construção do plano paramétrico que veremos na seção 3.5. O Hamiltoniano Secular será obtido ao retornarmos das variáveis  $K_1$  e  $\Delta\varpi$  para as variáveis  $x_i, y_1$ , que pode-se observar no Hamiltoniano (3.35). Para isso, basta excluir da equação os termos que possuem termos ressonantes. De modo que temos, no fim das contas:

$$\begin{aligned}
H_{sec} &= \frac{1}{4}(\delta - 2C - 2D)(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + B(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2 + C(x_1^2 + y_1^2) \\
&+ D(x_2^2 + y_2^2) + E(x_1x_2 + y_1y_2).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Para este Hamiltoniano, nas variáveis  $x_i$  e  $y_i$  temos quatro parâmetros livres. Utilizamos a mesma condição que utilizamos na seção passada:

$$\begin{aligned}
x_i &= \sqrt{2I_i} \cos \sigma_i, \\
y_i &= \sqrt{2I_i} \sin \sigma_i,
\end{aligned}$$

que são chamadas variáveis não-singulares. Uma vez que as condições iniciais sempre implicam  $\Delta\varpi = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , usamos esse fato para diminuir o espaço de apresença das curvas de nível. Como relataremos um pouco mais abaixo, de acordo com os ângulos em torno dos quais nossas variáveis oscilam, implica que teremos apenas um Hamiltoniano dependente de  $y$ , pois todos os termos em cosseno terão valor zero.

Para variar os valores de  $x$ , fazemos variar os valores da excentricidade dentro de um intervalo, de acordo com os valores atuais de excentricidade dos planetas desses sistemas. Variamos cada excentricidade independentemente. É importante frisar que nosso Hamiltoniano utiliza os ângulos  $\sigma$ . Que são escritos da forma  $\sigma_1 = \frac{3\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1}{2} - \varpi_1$  e  $\sigma_2 = \frac{3\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1}{2} - \varpi_2$ . O fato de usarmos estes ângulos faz com que tenhamos uma reprodução de duas vezes o plano de fas no gráfico que corresponde às curvas de nível dos sistemas. Pois os ângulos ressonantes são escritos como o dobro do ângulo que utiliza-se acima. A transformação canônica em (3.26) é a responsável para que isto aconteça. Para analisarmos o plano das curvas de nível, portanto, iremos utilizar duas definições diferentes de ângulos. Os ângulos  $\sigma$  previamente descritos, e os ângulos  $2\sigma_i$ .

A informação sobre os ângulos críticos ou ressonantes está embutida no sinal de  $e_1$  e  $e_2$ . Para os ângulos  $\sigma_i$ , teremos que, quando:  $e_i < 0$ ,  $\sigma_i = 90^\circ$ ,  $\sigma_2 = -90^\circ$ . Para os ângulos  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$ , essa condição será tal que quando  $e_i < 0$ ,  $2\sigma_i = 180^\circ$ . E quando  $e_i > 0$  temos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2 = 0$ . Isto implica basicamente que o Hamiltoniano (3.35) se escreverá unicamente nas variáveis  $y$ .

Para analisar os diferentes regimes dinâmicos dos sistemas, construímos curvas de nível para diferentes valores de  $\delta$  que é nosso parâmetro de proximidade com a ressonância

(Tittmore e Wisdom, 1988). Com a variação do valor de  $\delta$  tivemos a intenção de observar as bifurcações dos pontos fixos existentes no sistema. Pontos fixos tais que observamos através das curvas de nível da energia que geramos. Exploramos os valores de  $\delta$  a três ordens de grandeza, a fim de observar as bifurcações que a sua variação geram nos pontos fixos. De acordo com (Lemaitre, 1984), para sistemas com ressonâncias de segunda ordem, esperamos observar três tipos de domínio: A zona de ressonância, uma zona externa e outra interna à ressonância. Com esses gráficos podemos observar também a bifurcação que ocorre de acordo com a variação de  $\delta$  e observar para que valores de  $\delta$  teremos o aparecimento de um centro, e diminuição das zonas de ressonância interna.

No nosso trabalho iremos também, a partir destas curvas de nível, determinar os valores de energia para os pontos fixos que delimitarão essas zonas, e então determinar as regiões de ressonância, de longo período e de quasi-ressonância, e observar em que regiões encontram-se exatamente os sistemas estudados.

As curvas de nível nos serão importantes porque a partir delas podemos estimar a dinâmica do sistema, caracterizando as diferentes regiões que se observam em gráficos deste tipo.

Sabemos por exemplo, que regiões onde ocorrem visualmente um cruzamento de trajetórias costumam envolver pontos fixos conhecidos como pontos de sela. Tais pontos estão associados à separatrizes de diferentes regimes dinâmicos.

Um ponto de mínimo de energia normalmente está relacionado a centros, e consequentemente, trajetórias circulares que normalmente envolvem librações ou circulações. Para o problema estudado, os pontos fixos mais comumente encontrados são portanto pontos de sela e centros.

Dependendo da localização do sistema no gráfico, podemos dizer se o mesmo encontra-se no regime ressonante de movimento, quasi-ressonante ou secular. A curva de menor valor, corresponde ao valor mínimo de energia, que no caso, corresponde ao ponto fixo caracterizado por ser um centro, de acordo com Strogatz (2000).

Variamos o valor de  $\delta$  em três ordens de grandeza pra cada um dos sistemas estudados, a fim de observar as bifurcações que ocorrem com relação ao tipo de ponto fixo encontrado para cada um deles. Notamos na figura 3.1, que para valores de  $\delta$  muito baixos, teremos não haverá a existência de uma região ressonante (painéis 'A' e 'B'). À medida que aumentamos

o valor de  $\delta$  ocorre o aparecimento da região ressonante, restrito a excentricidades bastante baixas: Dois centros de ressonância com energia máxima, e um ponto de sela na origem. Se aumentarmos ainda mais o valor de  $\delta$  observaremos o aumento da região ressonante (painéis 'C' e 'D'), e enfim, para altos valores do parâmetro observamos o nascimento da região interna à ressonância que ocorre devido à bifurcação do ponto de sela em um centro e dois pontos de sela (painéis 'E' e 'F'). O aumento da região interna à ressonância é proporcional a  $\delta$ . Com o aumento do centro, a região de ressonância que estava limitada a excentricidades muito baixas, passa a abranger uma área maior, como se pode averiguar na figura 3.1.

Faremos o uso o ângulo  $2\sigma$  e  $\sigma$  para observar as curvas de nível, de modo que temos sempre o plano de fase "duplicado", exibindo duas regiões de ressonância e um centro para o valor  $\sigma$ , e apenas uma região de ressonância para  $2\sigma$ . As duas regiões de ressonância ocorrem devido à uma reprodução de  $i$  vezes o plano de fase causada pelo ângulo utilizado. A partir dos gráficos podemos também, definir, baseado nos valores de excentricidade observados, as três zonas de regime de movimentos possíveis. A zona externa à região em que temos os dois lóbulos de máximo de energia, circundados pela separatriz definida pelo ponto de sela, é a zona externa à ressonância. E a região delimitada interiormente pela separatriz é a região interna à ressonância.

Podemos, uma vez que fizemos a análise das curvas de energia para o ângulo  $\sigma$  fazê-lo para o ângulo  $2\sigma$ . Onde esperamos que não ocorra mais a reprodução do plano de fase de  $i \times$  causada pelo primeiro ângulo. Uma vez que o ângulo tem metade do valor anterior, podemos, fazendo tal mudança, observar como ficam os gráficos deste modo. Esperamos que o valor de máximo localize-se ao lado negativo do eixo  $y$ , uma vez que devemos ter uma libração do ângulo ressonante a  $270^\circ$ .

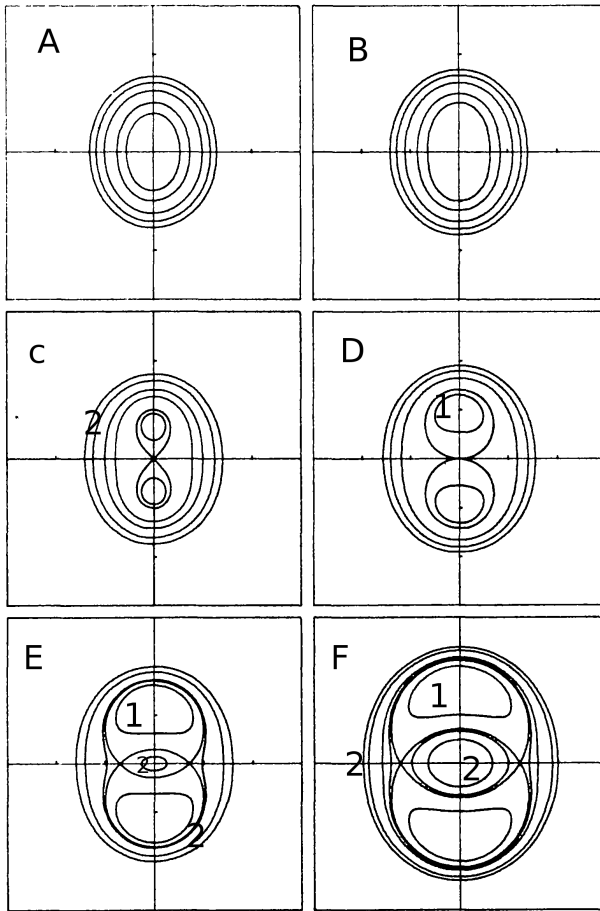


Figura 3.1: Curvas de nível do Hamiltoniano possíveis para um sistema que encontre-se em ressonância 3:1. Observaremos as diferentes regiões acima ao variarmos o valor de  $\delta$ , conforme a descrição na seção seguinte. Podemos identificar as regiões internas ou externas à ressonância após a bifurcação do ponto de sela, em centro (Lemaitre, 1984).

Esperamos através da construção destas curvas para vários valores de  $\delta$  observar os diferentes regimes dinâmicos que surgem e como se mantêm através da variação do mesmo.

Esperamos observar os regimes observados na figura 3.1, conforme varie o valor do nosso parâmetro. A partir de tais valores em dependência de  $\delta$  poderemos definir em que situações os sistemas encontrar-se-ão em cada uma das regiões, a saber: Ressonante, quasi-ressonante ou secular, para cada tipo de plano de energia observado, e sabendo-se suas excentricidades e energia.

### 3.5 Construção do Plano Paramétrico

Uma vez de posse das curvas de energia para o sistema, podemos determinar visualmente em que condições tem-se cada regime dinâmico. Porém, o estudo através das curvas de nível exige que construamos vários gráficos e, a partir dos mesmos identifiquemos para que valores de excentricidade e  $\delta$  o sistema encontrar-se-á em regime ressonante, quasi-ressonante ou secular.

Construimos então, a fim de determinar de modo mais prático, um gráfico que contém os valores de energia em função do  $\delta$ , o parâmetro de proximidade com a ressonância.

Para isso, precisamos inicialmente definir a quais regiões no plano de níveis de energia corresponde a cada um dos regimes dinâmicos característicos dos sistemas planetários.

Baseando-se na figura 3.1 da seção anterior, sabemos que:

Dentro da região definida pelo número 1 corresponde à região ressonante, onde o sistema encontra-se dentro da ressonância. A região 2 corresponde à região fora da ressonância, caracteristicamente secular. Porém, quando possuímos um plano em que há a ocorrência de um centro na origem, definimos que, para valores de energia entre os valores correspondentes ao mínimo e o valor de energia que define a separatriz, o sistema encontrar-se-á em regime quasi-ressonante. Para energias abaixo da energia do mínimo, diremos que o sistema encontra-se em regime puramente secular, ou seja, no regime o qual o sistema possui variações em seus parâmetros que variam somente a intervalos de tempo muito maior que o valor de seu período orbital.

Para determinar os valores de energia numericamente, precisamos, a partir do hamiltoniano dependente das variáveis não-singulares, conforme visto em (3.35), e transcrito abaixo,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{4} (\delta - 2C - 2D) (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + B (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)^2 + C (x_1^2 + y_1^2) \\
 &+ D (x_2^2 + y_2^2) + E (x_1 x_2 + y_1 y_2) + F_1 (x_1^2 - y_1^2) + F_2 (x_2^2 - y_2^2) \\
 &+ F_3 (x_1 x_2 - y_1 y_2),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

definir como obter os valores da energia exatamente. Quando as librações ressonantes ocorrem em  $90^\circ$ , sabemos que todos os valores de  $x$  serão *zero*. Isto porque da definição

de  $x$  e  $y$  em (3.33),  $x$  depende explicitamente do cosseno de  $\sigma$ , que em  $90^\circ$  tem valor igual a zero. Logo, nosso Hamiltoniano pode ser reduzido a:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{4}(\delta - 2C - 2D)(y_1^2 + y_2^2) + B(y_1^2 + y_2^2)^2 + Cy_1^2 \\
 &+ Dy_2^2 + Ey_1y_2 - F_1y_1^2 - F_2y_2^2 - F_3y_1y_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

Então, uma vez que  $B, C, D, \dots$  são constantes, temos uma função de duas variáveis,  $x$  e  $y$ . Sabemos de Strogatz (2000), que um centro normalmente está associado a um mínimo, local ou não. Logo, podemos determinar a energia do centro, que sabemos neste caso estar na origem, ou seja, quando as excentricidades possuem valor igual a zero. Logo, para tais valores, teremos a energia do mínimo como sendo igual a zero.

Os máximos da função Hamiltoniano correspondem ao estado de maior energia, que, neste caso, corresponde aos centros associados com a ressonância do sistema. Uma vez que estamos escrevendo o Hamiltoniano em função de  $\sigma$ , observaremos o gráfico com duas regiões ressonantes, que ocorrem devido à escolha do ângulo. Determinamo-os numericamente igualmente ao mínimo.

Já para definir o valor da energia na separatriz que divide o regime ressonante do regime secular interno ou externo (cabendo o interno à região quasi-ressonante uma vez que é limitado em energia pelo valor de energia do mínimo local da função Hamiltoniano; que é o centro). A curva separatriz da função Hamiltoniano está associada ao seu ponto de sela, em função de  $y_1$  e  $y_2$ , como os pontos de sela observados na figura 3.1. Então, utilizamos a teoria de cálculo diferencial para encontrar os pontos de sela a partir das diferenciais segunda e primeira do Hamiltoniano em função de  $y_1$  e  $y_2$ .

As diferenciais do Hamiltoniano podem então ser escritas como:



$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = \frac{1}{2} (\delta - 2C - 2D) y_1 + 4B (y_1^2 + y_2^2) y_1 + 2C y_1 + E y_2 - 2F_1 y_1 - F_3 y_2 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{1}{2} (\delta - 2C - 2D) y_2 + 4B (y_1^2 + y_2^2) y_2 + 2D y_2 + E y_1 - 2F_2 y_2 - F_3 y_1 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1} = 8B y_1 y_2 + E - F_3, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1}, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} = \frac{1}{2} (\delta - 2C - 2D) + 4B (y_1^2 + y_2^2) + 8B y_1^2 + 2C - 2F_1, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2} (\delta - 2C - 2D) + 4B (y_1^2 + y_2^2) + 2D - 2F_2. \quad (3.53)$$

E a partir de Guidorizzi (2001), sabemos ser a condição para existência de um ponto de sela para uma função de duas variáveis, as seguintes descritas:

$$K(y_1, y_2) < 0.0, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0 \quad \text{e} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = 0. \quad (3.56)$$

Onde  $K$  é chamado *Hessiano* de  $f$ , e é definido por:

$$K = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_1 y_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 y_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2} \end{vmatrix}. \quad (3.57)$$

Para obter tais valores numericamente, explicitamos as derivadas no nosso programa, e utilizamos um otimizador para encontrar os valores tais que temos pontos crítico. Ou seja, que satisfaça as condições (3.55) e (3.56). O otimizador tomou os valores para  $x$  e  $y$  tais que as derivadas primeiras fossem as menores possíveis, dentro da condição (3.54) satisfeita.

Os valores de energia estudados, em vista da nossa escolha de unidade trabalhadas, implica valores muito pequenos para as energias, o que dificultaria a visualização da localização de um sistema planetário em seu regime dinâmico. Para resolver este problema, ao invés de construirmos o gráfico com a energia do máximo, mínimo e do ponto de sela, fazemos a dedução do valor da energia do ponto de sela para o Hamiltoniano Secular para cada

---

energia em cada  $\delta$ . Assim, ampliamos a visualização do gráfico e facilitamos a observação do mesmo. Uma vez com os planos paramétricos de  $H \times \delta$  construídos, iremos verificar se a posição dos sistemas equivale à situação geral em que se classificam os sistemas.

Todos os métodos descritos acima serão aplicados aos sistemas planetários estudados, que são: Saturno-Urano, 55 Cnc b-c e HD 60532 b-c. No capítulo seguinte iremos descrever algumas das ferramentas as quais foram necessárias desenvolver para a aplicação de toda a teoria já descrita neste capítulo e nos anteriores.



## Ferramentas Utilizadas

Neste capítulo faremos uma breve descrição dos programas computacionais desenvolvidos durante todo o projeto. Todos os programas foram escritos em linguagem de programação C, e foram utilizados a fim de analisar e entender os dados dos problemas em questão. O cálculo numérico, embora seja passível de erros em comparação com a resolução analítica, é bastante utilizado principalmente pelos resultados práticos, e por sua aplicabilidade em problemas que não possuam solução analítica exata, como é o caso do problema de N corpos, com  $n > 2$ .

### *4.1 Conversor entre Coordenadas Retangulares e Elementos Orbitais*

Em geral, as coordenadas mais frequentemente encontradas na literatura para tratar de sistemas planetários e dinâmica orbital são os elementos orbitais. Conforme já vimos no capítulo 1, eles são seis, e podemos obter as coordenadas em função de coordenadas retangulares, ou mesmo coordenadas esféricas ou cilíndricas. Implementamos em um programa as transformações dadas entre (2.32) e (2.41), para as transformações feitas das coordenadas retangulares para os elementos orbitais, e as transformações dadas entre (2.46) e (2.48) e entre (2.52) e (2.54) para gerar as transformações a partir dos elementos orbitais para as coordenadas retangulares.

Todo o código foi escrito em C. Testamos com alguns conjuntos de coordenadas seus resultados. Testamos o programa que levava as coordenadas retangulares para orbitais.

Utilizando os seguintes dados:

$$\begin{aligned}
 x &= -3.443016, \\
 y &= 0.787732, \\
 z &= -1.151037, \\
 v_x &= 0.859169, \\
 v_y &= 3.551274, \\
 v_z &= -0.139595
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

chegamos aos seguintes elementos orbitais:

Anomalia Média:  $M = 0.0$ , Anomalia Excêntrica:  $E = 0$ , Excentricidade:  $e = 0.175704$ , Semi-Eixo Maior:  $a = 4.506637$ , Inclinação:  $I = 2.824090$  e Longitude do Nó ascendente  $\Omega = 1.216899$ .

Fizemos a transformação inversa também. Utilizando-nos dos elementos orbitais, obter as coordenadas retangulares em um instante. Utilizando os seguintes dados, por exemplo:

$$M = 0.0, E = 0.0, e = 0.175704, a = 4.506637, \tag{4.2}$$

$$I = 2.824090, \Omega = 1.216899, \omega = 4.589786. \tag{4.3}$$

chegamos às seguintes coordenadas retangulares:

$$\begin{aligned}
 x &= -3.443020, y = 0.787709, z = -1.151038, \\
 v_x &= 0.859148, v_y = 3.551280, v_z = -0.139602.
 \end{aligned}$$

Para incrementar a transformação de elementos orbitais em coordenadas retangulares e vice-versa, fizemos também a sua propagação em um certo intervalo de tempo, ao invés de gerar apenas para um dado instante. Obtivemos, usando os dados acima:

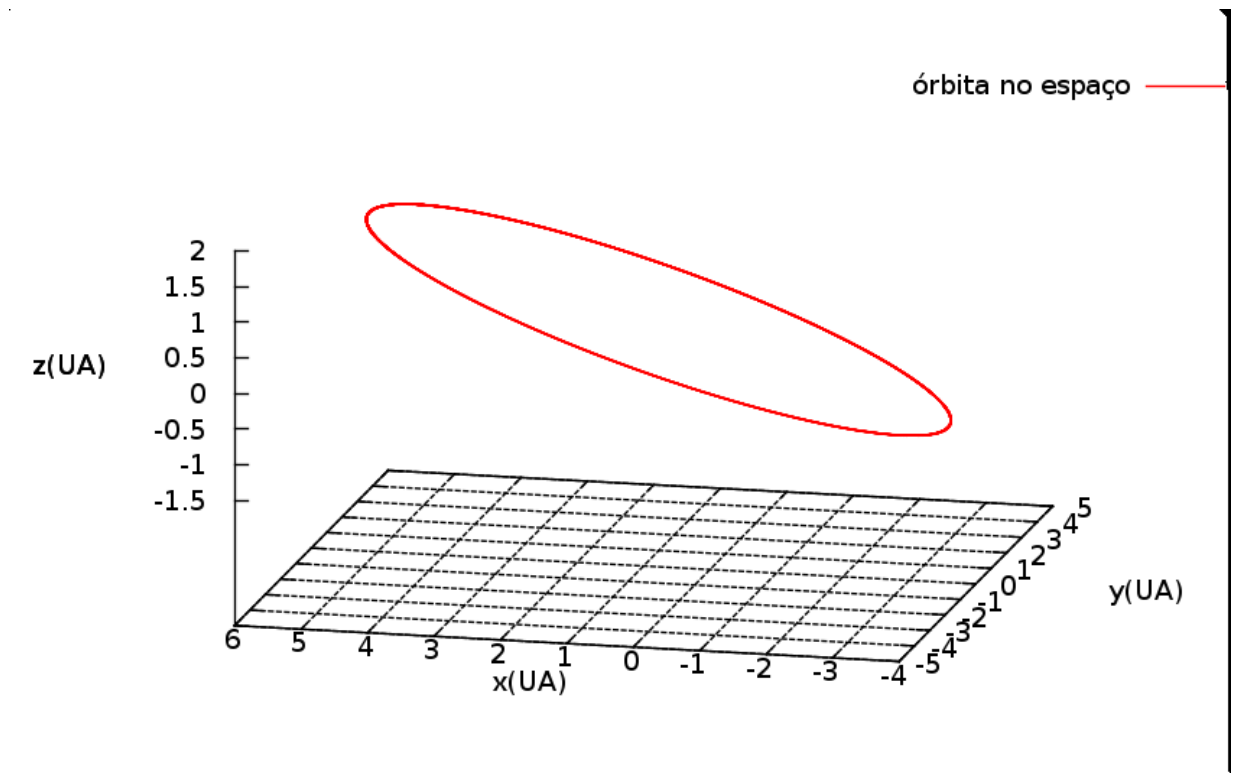


Figura 4.1: Trajetória obtida ao fazer a transformação de coordenadas retangulares para elementos orbitais, e variando o tempo de modo a explorar toda a variação dos elementos orbitais ao longo de sua órbita.

## 4.2 Gerador de Coeficientes de Laplace

Construímos um programa que fornece as ferramentas necessárias para saber os coeficientes de Le Verrier. Precisamos consultar o apêndice contido em Murray e Dermott (2001), para descobrir os termos que compõem os coeficientes de Laplace.

Tais coeficientes são escritos como uma combinação de coeficientes de Laplace, cujo algoritmo que os gera encontra-se na equação (2.88). Uma função que gera os coeficientes de Laplace, foi construída. A série está escrita em função da variável  $\alpha$  que corresponde à razão dos semi-eixos maior dos planetas.

A forma de um coeficiente de Laplace é a que já consta na equação (2.88) Porém, para todos os coeficientes de Laplace que calculamos, tínhamos  $s = 1/2$ . De modo que fixamo-lo assim, no programa.

No algoritmo, uma vez que temos uma série infinita, tivemos que considerar uma condição de truncamento. A condição considerada foi a que, quando dois termos con-

secutivos tivessem diferença menor que  $10^{-10}$ , a série seria truncada. As combinações dos coeficientes de Laplace que formam os coeficientes de Le Verrier incluem derivadas primeiras e segundas. Então foi necessário também integrar ao programa, uma função que calculasse derivadas primeiras e segundas. Resolvemos para esse intuito, separar em duas funções computacionais diferentes, de modo que as mesmas fossem dependentes entre si.

Para construir as derivadas, utilizamos a definição de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4.4)$$

E testamos para vários  $h$ 's a fim de observar a continuidade e suavidade das derivadas. Terminamos por escolher  $h=0.01$ . Para o cálculo das derivadas segundas, calculamos, pela própria definição de derivada, a derivada de uma derivada. Então, temos:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (4.5)$$

onde  $h$  é considerado o mesmo para ambas as derivadas. E com valor  $h = 0.01$  de modo a coincidir com o valor da função derivada primeira.

De posse das ferramentas para cálculos dos coeficientes de Le Verrier: derivadas e gerador de coeficientes de Laplace, pudemos gerar os coeficientes referentes ao nosso trabalho em questão. Para fazê-lo, entramos com uma linha de comando onde escrevemos a equação dos coeficientes de Le Verrier de acordo com os termos que desejamos, utilizando as definições das funções derivadas aplicadas nos termos corretamente, e dos coeficientes de Laplace específicos.

Uma vez que a série é infinita, para  $\alpha < 1$ , mas próximo a ele, a sua convergência ainda é satisfeita, conforme visto na seção 1.5.1. Porém, precisaríamos de uma quantidade de termos da série muito maior, a fim de que a condição de truncamento do nosso programa fosse satisfeita. O que torna o programa ou bastante lento, ou pouco preciso, dependendo da condição utilizada. Em nosso programa utilizamos uma condição de quebra de  $1 \times 10^{-10}$ . Ou seja, quando a diferença entre termos consecutivos da série tiver valor que este, o programa dará por terminado o valor para o coeficiente de Laplace.

### 4.3 Integradores Numéricos

O uso de métodos de integração numéricos para a solução de sistemas de equações diferenciais é bastante importante, e tem se tornado cada vez mais utilizado à medida que aumenta a complexidade das equações estudadas. Um dos métodos mais amplamente utilizados corresponde ao método de Runge-Kutta, que pode ser adaptado e desenvolvido para ordens cada vez maiores, gerando erros menores, quanto maior for a sua ordem. Os dois integradores utilizados em nosso trabalho são métodos baseados no de Runge-Kutta, porém de ordens diferentes.

#### 4.3.1 Runge-Kutta de 4ª Ordem

O método de integração numérica de Runge-Kutta foi desenvolvido em meados de 1900 por dois matemáticos alemães: C. Runge e M.W. Kutta.

O algoritmo do método encontra-se abaixo:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (4.6)$$

onde:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (4.7)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \quad (4.8)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \quad (4.9)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (4.10)$$

O método é puramente iterativo. Os termos de ordem  $n + 1$  são determinados a partir dos termos de ordem  $n$ , e o incremento se dá pelo fator  $h$ , que observamos nas equações, e que corresponde ao tamanho do intervalo temporal utilizado. A curvatura utilizada para medir-se o próximo valor da iteração é uma média ponderada das inclinações da seguinte forma:

1.  $k_1$  é a inclinação no começo do intervalo.
2.  $k_2$  é a inclinação na metade do intervalo, utilizando o valor de  $k_1$  para determinar o valor de  $y$  no ponto  $t_n + \frac{h}{2}$ .



3.  $k_3$  é a inclinação na metade do intervalo, mas agora utilizando-se  $k_2$  para determinar o valor de  $y$ .
4.  $k_4$  é a inclinação no final do intervalo, utilizando-se  $k_3$  para determinar o valor de  $y$  neste ponto.

O método é considerado de 4ª ordem porque os erros por passo tem ordem de  $h^5$ , enquanto o erro total acumulado tem ordem  $h^4$ .

Utilizamos o método do Runge-Kutta de 4ª ordem principalmente para a integração dos sistemas sem os termos ressonantes. O passo de integração utilizado variou de sistema para sistema de acordo com suas características e com que regime estamos querendo observar. Para notar os efeitos de longo-período por exemplo, utilizamos um passo maior, com valor maior que alguns períodos orbitais. Enquanto para efeitos ressonantes e quasi-ressonantes utilizamos passos menores, no mínimo 10 vezes menor que o valor do período orbital.

#### 4.3.2 Integrador RADAU 15

O método de integração numérica RADAU 15 (ou RA15) é baseado no método de Runge-Kutta, mas de ordem bastante maior, de 15ª ordem de espaçamento variável. O método é importante para a integração dos sistemas planetários principalmente no que diz respeito ao tempo de integração. Uma vez que as mudanças no comportamento dinâmico de tais sistemas ocorrem a longo períodos de tempo; bilhões de anos. A implementação do mesmo foi feita em linguagem FORTRAN em Everhart (1985), e posteriormente traduzido para linguagem C, por Goździewski e Maciejewski (1995).

Para fazer a integração dos sistemas no corpo do programa, além das coordenadas iniciais, do tempo de integração e passo, é necessário também inserir alguns parâmetros que dizem respeito ao funcionamento e entendimento dos tipos de equações utilizadas. Os parâmetros definem a ordem das equações diferenciais utilizadas (**nclass**), a quantidade de equações a ser integradas, o tempo total de integração; definido como a diferença de duas variáveis que correspondem ao instante final e inicial.

Também define-se dois parâmetros que dizem respeito à ordem da integração utilizada. Para um deles (**ss**) é dado um determinado valor em vista de economizar o tempo de execução do programa, e diz respeito à ordem de grandeza  $10^{-ll}$  do erro associado à integração. Se por exemplo, fazemos uma integração em que um erro menor do que  $10^{-10}$  é

desprezível o suficiente para nosso problema, denotamos tal valor a este parâmetro, e ao invés de seguir-se os cálculos até a 15ª ordem, o programa trunca na 10ª ordem.

O outro parâmetro diz respeito a quando queremos *forçar* a ordem do nosso integrador. Para isso, quando o valor do parâmetro (II) for menor do que zero, o valor o qual determinarmos para  $xl$  será o valor utilizado para a ordem de integração utilizado.

No nosso trabalho, uma vez que utilizamos com mais frequência os elementos orbitais do sistema, para se fazer a integração, uma vez que o RA15 utiliza-se das coordenadas posição e velocidade(ou seja, da primeira derivada das funções) como condições iniciais, foi preciso utilizar da transformação entre coordenadas tanto antes; para fornecer as condições iniciais, como depois da integração; para se obter a solução do problema em termo dos elementos orbitais.

#### 4.4 Modelagens e sua implementação

Todas as modelagens descritas no capítulo anterior foram feitas numericamente, e em linguagem de programação C. Para a maior parte das modelagens especificamos qual o integrador foi utilizado. E é importante salientar que a maioria dos sistemas se comportou de maneira satisfatória para o método de integração de Runge-Kutta e 4ª ordem. Foi-se realizada a integração, em alguns casos, das duas formas, a fim de se verificar sua procedência.

No capítulo seguinte discutiremos os sistemas estudados no trabalho, e suas principais características.



## Sistemas Planetários Próximos à Ressonância 3:1

Neste capítulo definiremos os sistemas planetários utilizados em nosso trabalho. Todos os três sistemas obedecem as condições de termos dois planetas com massa comparável e ambas são muito menores em relação à um terceiro corpo, correspondente à estrela em torno da qual os planetas orbitam. De acordo com a literatura, todos os corpos encontram-se próximos ou no interior de uma ressonância de 2ª ordem na forma 3:1. Queremos com nosso trabalho determinar em que regime de movimento encontram-se nossos sistemas, através de um modelo dinâmico, observando suas soluções periódicas.

Os sistemas que estudamos correspondem a um no nosso próprio sistema solar, e outros dois compostos de exoplanetas. São eles: Saturno-Urano-Sol, 55 Cnc b-c e HD60532 b-c. Apesar de Saturno e Urano já terem sido descobertos e estudados há mais dois séculos, é importante estudá-lo nesse aspecto, uma vez que, estando no interior do nosso sistema solar, os seus parâmetros orbitais são melhor determinados do que os exoplanetas.

55 Cnc b-c, por sua vez, é um sistema que faz parte de um sistema composto por cinco planetas. E cuja confirmação encontra-se em ressonância ou não passou por várias mudanças devido à adição de novos planetas, e da modificação de outros parâmetros, o mais recente deles, o período do seu planeta mais interno.

HD 60532 é o sistema exoplanetário mais recentemente descoberto dentre os três estudados. Todos os estudos a respeito da dinâmica do mesmo apontam para uma ressonância de movimentos médios envolvendo o movimento destes dos planetas. A presença de caos de maneira pouco efetiva e sua estabilidade são importantes para compararmos suas características com os sistemas anteriores.

Estes sistemas se inserem no que se determina ACR simétrico (Apsidal Corotation

Resonance), ou seja, que as soluções periódicas para os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , adquiram valores 0.0 ou  $\pi$ . Em Ferraz-Mello et al. (1993) e Beaugé et al. (2003), viu-se que a configuração de ACR que os ângulos ressonantes oscilam em torno de um ângulo de equilíbrio, e nossos sistemas enquadram-se neste caso. Beaugé et al. (2003) também mostrou que o ACR não depende dos valores dos semi-eixo independentemente, mas apenas da razão entre eles. Integramos numericamente também neste capítulo, e usando o integrador RA 15 cada um dos sistemas estudados, e fizemos o gráfico que mostra a famílias para o ACR simétrico (Michtchenko et al., 2006) com a razão entre as massas do nossos sistemas, observamos os valores de excentricidade para os quais o sistema se encontra em sua solução simétrica, a partir do método geométrico utilizado em Beaugé et al. (2003) e Michtchenko et al. (2006), e da integração das equações do movimento para o hamiltoniano total utilizando-se o integrador ra15, desenvolvido em Everhart (1985).

### 5.1 O Sistema 55 Cnc b-c

Este par de planetas pertence a um sistema de um total de cinco planetas que orbitam em torno da estrela 55 Cancrì, localizada na direção da constelação de Câncer, um sistema binário que encontra-se a 41 anos-luz do nosso sistema solar. A estrela 55 Cnc em torno da qual encontra-se o sistema planetário estudado tem massa  $0.94 \pm 0.05M_{\odot}$  (Fischer et al., 2008). Sua estrela companheira, 55 Cnc B é uma estrela anã M de 13<sup>a</sup> magnitude, que encontra-se a 1000 U A da primeira, estando portanto, longe o suficiente para que não haja interferência na dinâmica do problema que estudamos.

A massa da estrela 55 Cnc foi medida a partir do método de Yale, combinando as medidas feitas da temperatura efetiva, luminosidade e metalicidade com os modelos existentes de propriedades do interior estelar.

O sistema 55 Cnc foi a primeira estrela a ter sido descoberta tendo cinco planetas em órbita ao seu redor. O primeiro planeta foi descoberto em 1997 por Butler et al. (1997), e estando bastante próximo a estrela, com período de apenas 14.65 dias, com uma massa de  $0.038M_J$  e distância à estrela de  $0.115UA$ . A descoberta foi feita através de análises com observações de efeito Doppler, com observações realizadas entre 1989 e 1996. Alguns anos depois foram descobertos dois novos planeta, desta vez um estando bastante distante; a uma distância de  $5.77UA$ , que é o planeta *d* do sistema. O outro

planeta com uma distância de  $0.240 \pm 4.5UA$  da estrela, e com período de 44.3 dias, foram descobertos igualmente através de medições do efeito Dopler (Marcy et al., 2002), através de mais de 140 observações realizadas entre 1989 e 2002. Logo após sua descoberta, e uma vez que os períodos dos planetas *b* e *c* são múltiplos na razão 3:1, foi-se sugerido se não estariam em ressonância. No trabalho de Marcy et al. (2002) foi constatado que os ângulos ressonantes não encontravam-se librando. O que sugeriria que poderiam estar em ressonância no passado, e evoluíram para um estado próximo a ressonância. Porém, outros estudos, como por exemplo Ji et al. (2003), Zhou et al. (2004), sugerem que a libração dos ângulos ressonante ocorria.

Foi-se sugerido, posteriormente a existência de um quarto planeta, com período de 2.8 dias. Porém, a existência de um sinal com período de 260 dias fez-se crer que aquele poderia ser apenas um *alias* deste. Em 2005, Wisdom apresentou um trabalho (Wisdom, 2005) onde mostrou várias razões pelas quais o sinal com este período seria apenas um *alias* do sinal de 260 dias de período. Mostrou que o sinal de período de 2.8 dias estava ligado ao de 44 dias, mas que não havia razão para que houvesse um *alias* causado por um sinal de 3 dias. Além da não existência de um pico em  $1/3$  dias na janela do espectro analisado, para qualquer um dos conjunto de dados obtidos.

Em 2008, Fischer (Fischer et al., 2008) confirmou a existência do planeta com sinal de 2.8 dias e a descoberta de um quinto planeta, o 55 Cnc f, que encontra-se a uma distância um pouco maior do par b-c a  $0.781 \pm 0.007UA$  que corresponde ao sinal de 260 dias de período. Estes novos resultados geraram a mudança da determinação dos vários elementos orbitais dos planetas mais próximos. A excentricidade do planeta c que havia sido estimada bastante alta, da ordem de 0.4, caiu bastante em vista da estabilidade do sistema, configurando-se numa órbita de baixa excentricidade. Com isto, o par apesar de ter períodos múltiplos da ordem da ressonância de movimentos médios 3:1, não mais foi considerado pertencente a tal ressonância corroborando o fato de não haver a libração dos ângulos ressonantes, apenas a circulação (Fischer et al., 2008). É interessante notar também que o planetas pertencentes ao sistema 55 Cnc não possui órbitas que se cruzam.

Recentemente, astrônomos do *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics* divulgaram um trabalho no qual constantou-se que o período do planeta mais interno do sistema 55 Cnc tem período menor que o anteriormente calculado (Dawson e Fabrycky, 2010), sendo

este de 0.737 dias. Sendo portanto, o exoplaneta de menor período orbital registrado até o momento. O erro deveu-se à confusão da frequência do planeta com uma das *alias* de sua frequência, medidas através do método de velocidade radial aplicado à estrela do sistema.

Planeta	Período(dias)	$e$	$\omega$	$K (ms^{-1})$	$M \sin I$	$a (UA)$
b	14.65162	0.014	131.94	71.32	0.824	0.115
c	44.3446	0.086	77.9	10.18	0.169	0.240
d	5218	0.025	181.3	46.85	3.835	5.77
e	2.81705	0.07	248.9	5.07	0.034	0.038
f	260.00	0.2	181.1	4.879	0.144	0.781

*Tabela 5.1* - Elementos Orbitais para os planetas do sistema 55 Cnc obtido de Fischer et al. (2008), nestes dados ainda consta o fato do período do planeta  $e$  ser 2.81705. A ordem dos planetas na tabela obedece a ordem de descoberta dos planetas. A ordem segundo a proximidade com a estrela seria: e-b-c-f-d. Todos os ângulos estão em unidades de grau.

Uma das consequências do período do planeta  $e$  ser de 0.737 dias é o fato de sua órbita provavelmente ser circular, pois  $e_e = 0$  devido ao forte efeito de maré que atua da estrela sobre o planeta. A proximidade com a estrela possibilita ainda, observá-lo através do método de trânsito, a fim de melhor determinar seus parâmetros físicos. Esta mudança não afeta visivelmente o nosso problema dado o fato de a um período menor, o planeta 55 Cnc  $e$  encontra-se portanto, mais interno e próximo à sua estrela, e portanto, mais distante dos planetas 55 Cnc b e c que são os planetas do sistema que estudamos. Os novos parâmetros orbitais para o sistema 55 Cnc, comparados com os antigos podem ser encontrados em Dawson e Fabrycky (2010) e foram obtidos a partir dos parâmetros obtidos em Fischer et al. (2008). Na tabela 5.1 reproduzimos os dados obtidos por Fischer et al. (2008) e os novos parâmetros orbitais, cuja fonte são Dawson e Fabrycky (2010) encontram-se na tabela 5.1.

Planeta	Período(dias)	$e$	$\omega$	$K (ms^{-1})$	$M \sin I$	$a (UA)$
b	14.6515811	0.0124	147.17	71.43	0.8253	0.11488
c	44.3417	0.063	99.23	10.32	0.1724	90.515
d	5214.54	0.02910	189.14	46.74	3.834	5.776
e	0.736540	0.000	0.0	6.12	0.025810	0.01564
f	260.05	0.136	180.21	5.03	0.1508	0.7816

Tabela 5.2 - Elementos Orbitais para os planetas do sistema 55 Cnc obtido de Dawson e Fabrycky (2010). Os dados foram obtidos utilizando-se o período do planeta e inicial sendo  $P_e = 0.74$  e excentricidade  $e_e = 0.0$ . Notamos que os valores dos parâmetros para os outros planetas não mudam drasticamente. Todos os ângulos estão em unidades de grau

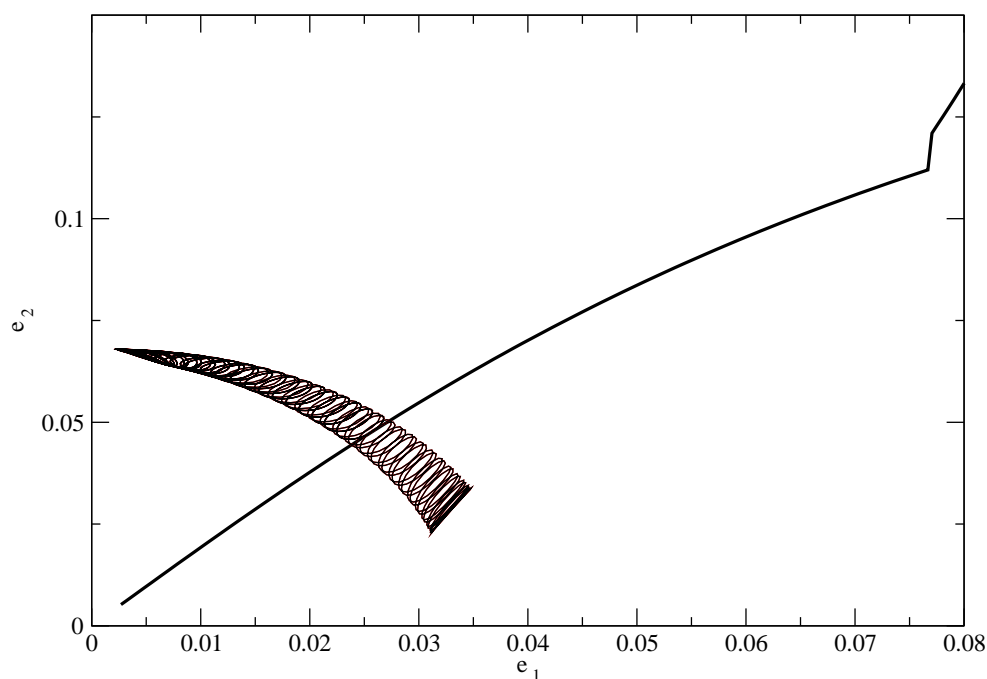


Figura 5.1: Família de ACR simétrico para a razão de massas do sistema 55Cnc b-c. A curva que cruza em sentido descendente da esquerda para a direita corresponde aos valores de excentricidade obtidos pela integração das equações de movimento totais do sistema 55 Cnc b-c utilizando-se o método RA 15. A outra curva corresponde à solução para o ACR do sistema. .

Utilizando o integrador RA15, já detalhado no capítulo anterior, integramos as equações de movimento do problema de três corpos envolvendo o sistema 55 Cnc b-c, e colocamos num gráfico conjunto com a solução simétrica do ACR para um sistema com razão de



massas iguais à deste sistema.

Observamos no gráfico os pontos em que a curva é cruzada correspondem aos valores de excentricidade  $e_1 \approx 0.028$  e  $e_2 \approx 0.046$ .

## 5.2 O Sistema Saturno-Urano

Saturno e Urano são planetas pertencentes ao nosso Sistema Solar, bastante conhecidos e estudados. Ambos são considerados gigantes gasosos com massa aproximada de 5.6846 e 8.6810 Kgs e figuram a uma distância de 9.54UA e 19.19 respectivamente, do sol. Saturno é detentor de 62 satélites conhecidos até o momento, entre os quais se destaca Titã, sua maior lua, que compõe mais de 90% da massa que orbita-o, já incluindo os anéis. Urano por sua vez, possui 26 luas descobertas até o momento, e possui também anel, sugeridos em 1789 por Wiliam Herschel e depois confirmados em 1977 por James L. Elliot, Edward W. Dunham, and Douglas J. Mink utilizando o *Kuiper Airborne Observatory*.

Com períodos orbitais de 29.4571 e 84.3233 anos, Saturno e Urano, embora tenham períodos próximos da razão 3:1, Tal valor de razão sugere que sua configuração encontra-se fora da ressonância 3:1. O objetivo ao estudar ambos os planetas sob a configuração da ressonância 3:1 servirá para classificarmos o quão distante desta ressonância se encontram os planetas. Uma vez que seus dados são melhores determinados do que os dos exoplanetas, estudá-lo pode nos dar base para um aprofundamento em sistemas que se encontram no seu regime de movimento, e entender a influência que a ressonância 3:1 teria sobre o sistema, uma vez que o caos observado nos planetas jovianos ocorre devido à sobreposição das ressonâncias que ocorrem entre Júpiter, Saturno e Urano (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001b). Sabe-se que Urano sofre influência de três ressonâncias de movimentos médios, que correspondem a uma ressonância 7U:1J, 3U:1S e 2N:1U. Onde 'U' corresponde a Urano, 'J' a Júpiter e 'S' a Saturno. É também sabido que Urano e Júpiter possuem seus argumentos de pericentro defasados em 180°, que corresponde a um envolvimento em modo II de movimento secular, como pode ser visto em Michtchenko e Ferraz-Mello (2001b). Abaixo encontra-se uma tabela 5.2 com os dados utilizados no nosso trabalho.

Planeta	a(UA)	$e$	$I$ (graus)	$\varpi$ (graus)	$\Omega$ (graus)	$L$ (graus)
Saturno	9.54149	0.05550	2.49424	92.86136	113.63998	50.07571
Urano	19.18797	0.04685	0.77298	172.43404	73.96250	314.20276

Tabela 5.3 - Elementos Orbitais para os planetas Saturno e Urano. Dados extraídos de [http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx\\_pos\\_planets.pdf](http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf)

Neste trabalho estudamos a dinâmica de Saturno-Urano ao fazermos a integração do planeta de três corpos, composto apenas por Saturno, Urano e o Sol. Embora saibamos que a influência de Jupiter e Netuno interfere bastante na dinâmica destes dois planetas, principalmente pela sobreposição de ressonâncias que ocorrem entre eles, esperamos, uma vez que focamos o regime secular e quasi-ressonante da dinâmica de ambos, que tais perturbações não influenciem o suficiente para termos uma mudança drástica do comportamento de ambos. Como forma de análise de tal dinâmica, resolvemos o problema de três corpos para os supracitados, a fim de observar o comportamento dos ângulos dos elementos orbitais, assim como seu semi-eixo maior e excentricidade, e assim confirmarmos que o sistema continua estável dadas essas condições.

Integramos as equações de movimento, ao escrevermos as mesmas nas equações de Newton utilizando-se o método do RA15, Com o gráfico obtido utilizando-se o método geométrico visto em Beaugé et al. (2003) e Michtchenko et al. (2006), temos:

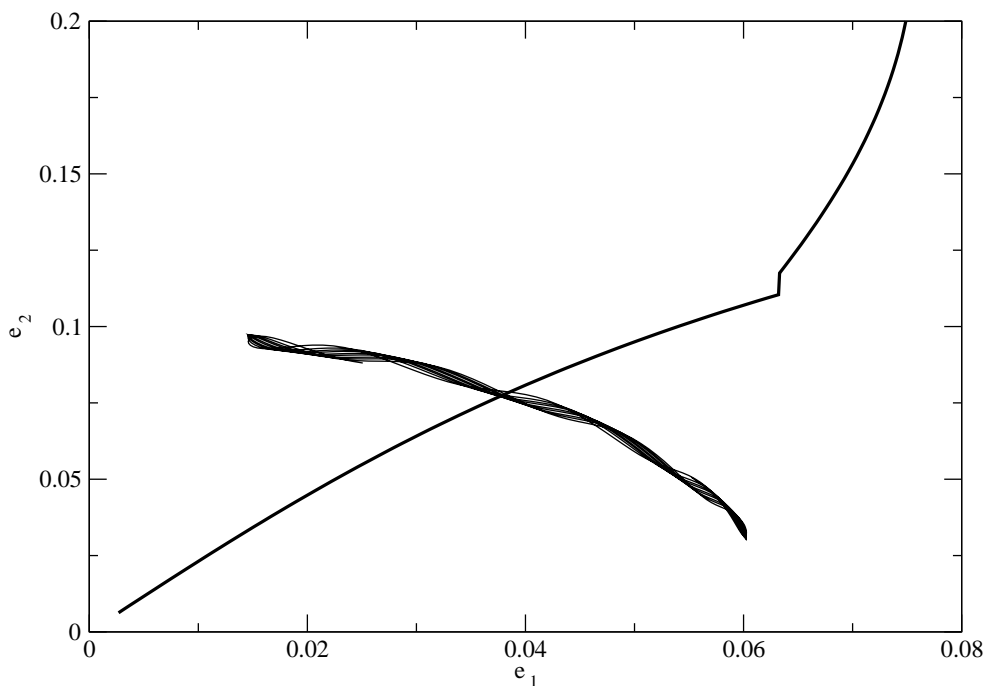


Figura 5.2: Família de ACR simétrico para a razão de massas do sistema Saturno-Urano. A curva que cruza da esquerda para a direita em sentido descendente corresponde aos valores de excentricidade obtidos através da integração completa das equações de movimento utilizando-se o integrador RA 15. A outra curva corresponde à solução para o ACR..

O gráfico mostra em que ponto há o cruzamento da solução simétrica do ACR, com os valores de excentricidade obtidas ao se integrar o problema utilizando o método do RA15. Observamos que as curvas se cruzam aproximadamente no ponto  $e_1 \approx 0.045$  e  $e_2 \approx 0.075$ .

### 5.3 O Sistema HD 60532 b-c

A estrela HD 60532 está localizada na direção da constelação de Puppis e encontra-se a 25.7 pc do nosso Sol. Possui massa de  $1.44M_{\odot}$  e é uma estrela de tipo F.

Em órbita em torno da estrela, foram descobertos dois planetas através do método de velocidade radial (Desort et al., 2008). Os dois planetas encontrados são estáveis e encontram-se em ressonância de movimentos médios de ordem 3. Tais planetas foram descobertos utilizando-se o método de fotometria, em setembro de 2008, em La Silla Observatory, utilizando-se o espectrógrafo HARPS durante o período 2006-2008. De acordo com as medidas realizadas por (Desort et al., 2008), a incerteza nos valores dos semi-eixos maiores para os planetas b e c não permitiam a confirmação de se o sistema exoplanetário

encontrava-se de fato em uma ressonância de movimentos médios, uma vez que para ressonância é necessário que haja a libração dos ângulos ressonantes, e tal incerteza não daria certeza a respeito de haver de fato a libração. Desort et al. (2008) fez a integração do problema de três corpos para o sistema utilizando-se  $\Omega_c - \Omega_b = 50^\circ$  (diferença da longitude dos nodos), gerou-se uma oscilação de longo-período de 70 anos, e uma oscilação rápida de período 1 2 anos tanto para os semi-eixos maiores e as excentricidades. Com pequena variação de amplitude para a oscilação de curto-período. A ressonância dos planetas orbitantes de HD 60532 foi confirmada mais recentemente no artigo de Laskar e Correia (Laskar e Correia, 2009). Neste trabalho, para determinar a estabilidade do sistema, foi-se considerada a inclinação em relação ao plano do céu como um parâmetro livre. Laskar coloca como valor mais provável para a inclinação em relação ao plano do céu  $20^\circ$ . Uma vez que os elementos orbitais são diferentes para cada variação inicial utilizada, restringimos no nosso trabalho os parâmetros utilizados por Laskar neste trabalho para a integração e resolução do caso periódico, além da determinação dos planos de energia do problema. Abaixo detalhamos os valores dos parâmetros orbitais para o caso planar e o caso em que temos  $I = 20^\circ$ , onde  $I$  é a inclinação em relação ao plano do céu, ambos retirados de Laskar e Correia (2009):

Planeta	Período(dias)	$e$	$\omega$	$K (ms^{-1})$	$M (M_{jup})$	$a (UA)$
b	$201.46 \pm 0.13$	$0.279 \pm 0.006$	$352.15 \pm 1.08$	$29.63 \pm 0.32$	1.0484	0.7597
c	$605.28 \pm 2.12$	$0.027 \pm 0.007$	$136.81 \pm 16.34$	$46.80 \pm 0.40$	2.4866	1.5822
rms	4.380					
$\sqrt{\chi^2}$	4.407					

Tabela 5.4 - Elementos Orbitais para os planetas do sistema HD60532 para o caso em que considera-se a inclinação em relação ao plano do céu como sendo  $90^\circ$ .

Planeta	Período(dias)	$e$	$\omega$	$K (ms^{-1})$	$M (M_{jup})$	$a (UA)$
b	$201.83 \pm 0.14$	$0.278 \pm 0.006$	$352.83 \pm 1.05$	$30.34 \pm 0.32$	3.1548	0.7606
c	$607.06 \pm 2.07$	$0.038 \pm 0.008$	$119.49 \pm 9.14$	$47.84 \pm 0.44$	7.4634	1.5854
rms	4.342					
$\sqrt{\chi^2}$	4.369					

Tabela 5.5 - Elementos Orbitais para os planetas do sistema HD60532 para o caso em que supõe-se a inclinação em relação ao plano do céu com valor de  $20^\circ$ .

Em nosso trabalho utilizamos principalmente os parâmetros de HD60532 com inclinação de  $20^\circ$ , e sempre consideramos o caso planar para o estudo do mesmo. integramos o sistema utilizando o integrador RA15, e, construímos o gráfico das famílias para um ACR simétrico com razão de massas iguais ao do sistema HD60532, e obtivemos:

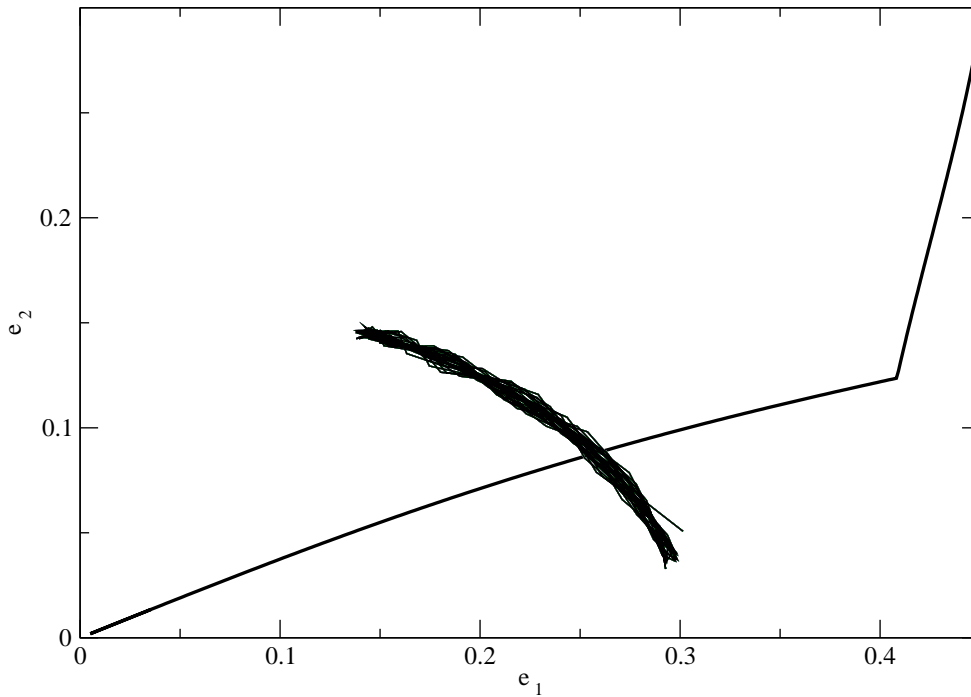


Figura 5.3: Família de ACR simétrico para a razão de massas do sistema HD 60532 b-c. A curva da que cruza superiormente da esquerda para a direita em sentido descendente corresponde às excentricidades obtidas ao se integrar o sistema com o integrador RA15.

Observamos que a solução em que temos a solução para o ACR ocorre com as excentricidades  $e_1 \approx 0.27$  e  $e_2 \approx 0.09$ .

## Aplicações ao Sistema 55 Cnc b-c

A partir deste capítulo faremos a aplicação de toda a teoria descrita nos capítulos anteriores aos sistemas planetários existentes que encontram-se próximos à ressonância 3:1. Tais sistemas foram descritos no capítulo anterior. Neste capítulo trataremos do sistema 55 Cnc b-c. Espera-se que o sistema encontre-se no interior da região quasi-ressonante.

Utilizando os dados do sistema 55 Cnc b-c, já visto no capítulo anterior da tabela 5.1, podemos determinar então os coeficientes que compõem Hamiltoniano do sistema, para o seu dado valor de  $\delta$ . Utilizamos as massas conhecidas dos sistemas, as excentricidades tendo valor igual a zero, e os semi-eixos calculados tais que o sistema estivesse dentro da ressonância. Os valores de semi-eixo utilizados foram portanto:

$$a_1 = 0.115, \tag{6.1}$$

$$a_2 = 0.241. \tag{6.2}$$

Os coeficientes do Hamiltoniano encontrados foram os que se encontram na tabela 6.1:

Tabela 6.1 - Constantes do Hamiltoniano do sistema 55 Cnc b-c próximos a ressonância 3:1

coeficientes	55 Cnc b-c
A	-0.35638
B	-97913
C	0.0620238
D	0.0451183
E	0.0154259
$F_1$	-0.0307706
$F_2$	0.18922
$F_3$	0.149326

Com estes valores podemos agora seguir o estudo do sistema observando suas soluções periódicas e seus planos de fase como já mencionado no Capítulo 2, a fim de verificar seu comportamento de longo-período. Calculamos o valor do Déficit do Momento Angular  $K_2$  e  $\delta$  para o sistema, e obtivemos:  $K_2 = 1.0104 \times 10^{-6}$  e  $\delta = 0.673061$ .

### 6.1 Estudo do Domínio Secular do Sistema

Nesta seção analisaremos as características correspondentes ao domínio secular dinâmico do sistema 55 Cnc b-c. Seguimos o passo-a-passo descrito no capítulo 3, e construímos os gráficos para as soluções periódicas do Hamiltoniano apenas com os termos seculares. Tais valores são importantes para determinação de certos valores de energia que serão utilizados como parâmetros para determinar os regimes de movimento entre ressonante, quasi-ressonante ou de longo-período. Para encontrar as soluções periódicas para o Hamiltoniano contendo apenas os termos de longo-período, desconsiderando os termos ressonantes, seguindo o método visto no Capítulo 2, utilizamos um valor de  $\delta = 1.0$  com  $K_2$  constante e igual a  $5.0 \times 10^{-7}$ . Os resultados estão na figura 6.1

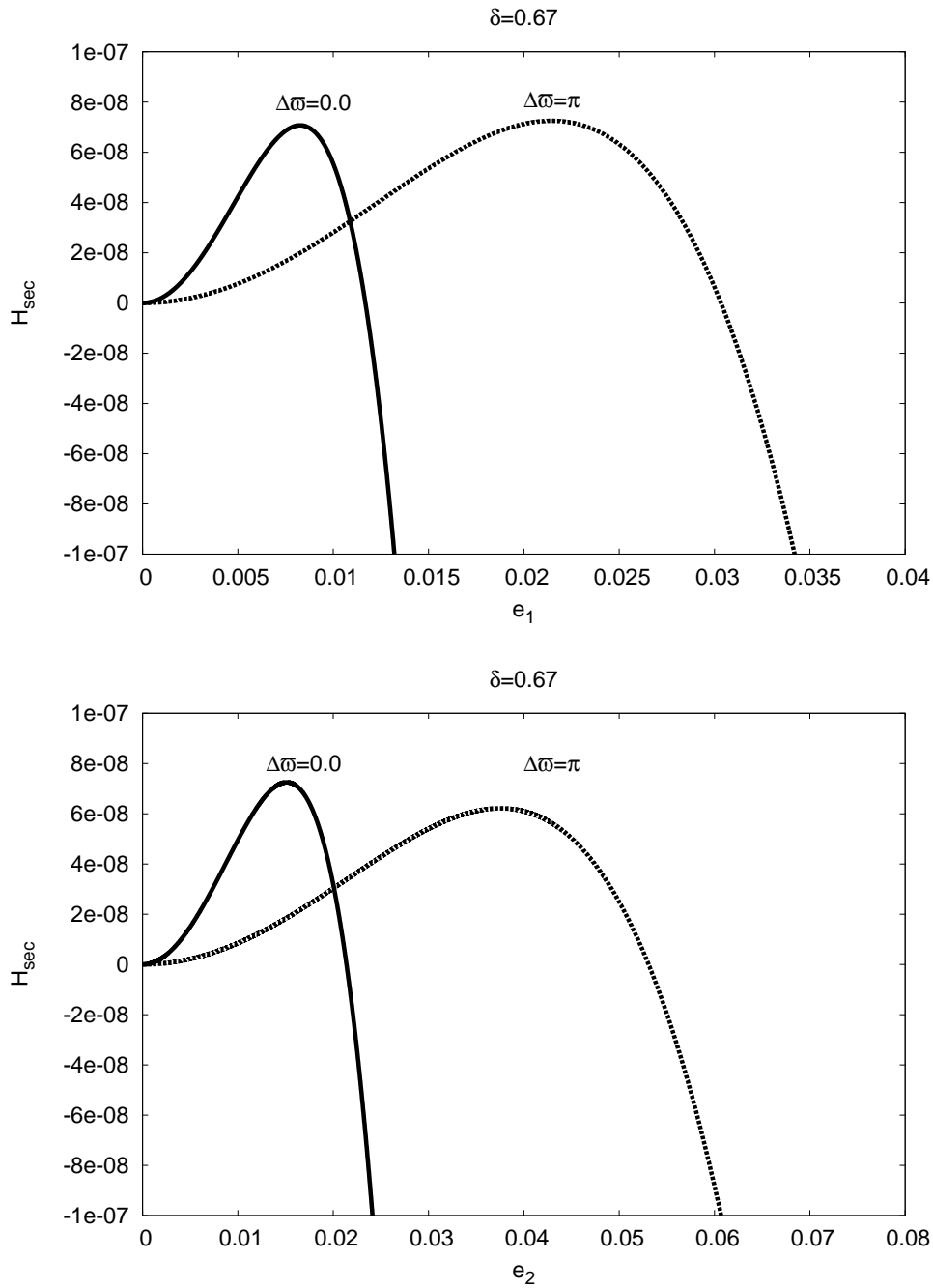


Figura 6.1: Gráfico das curvas características do Hamiltoniano secular em função das excentricidades para o sistema Cnc 55 b-c. No gráfico superior temos a curva em função da excentricidade do planeta interno do sistema em questão. Inferiormente, em função da excentricidade do planeta externo. Notamos que nos dois casos, temos duas soluções periódicas acima de zero, para cada um dos modos. Para valores negativos de  $H_{sec}$ , há apenas uma solução periódica para cada modo. As soluções são parábolas quartenárias. Os pontos máximos de cada curva são as soluções de equilíbrio do Hamiltoniano com termos de longo-período. Os valores de  $\delta$  utilizados encontram-se acima de cada gráfico. E usamos  $K_2 = 5 \times 10^{-7}$ .

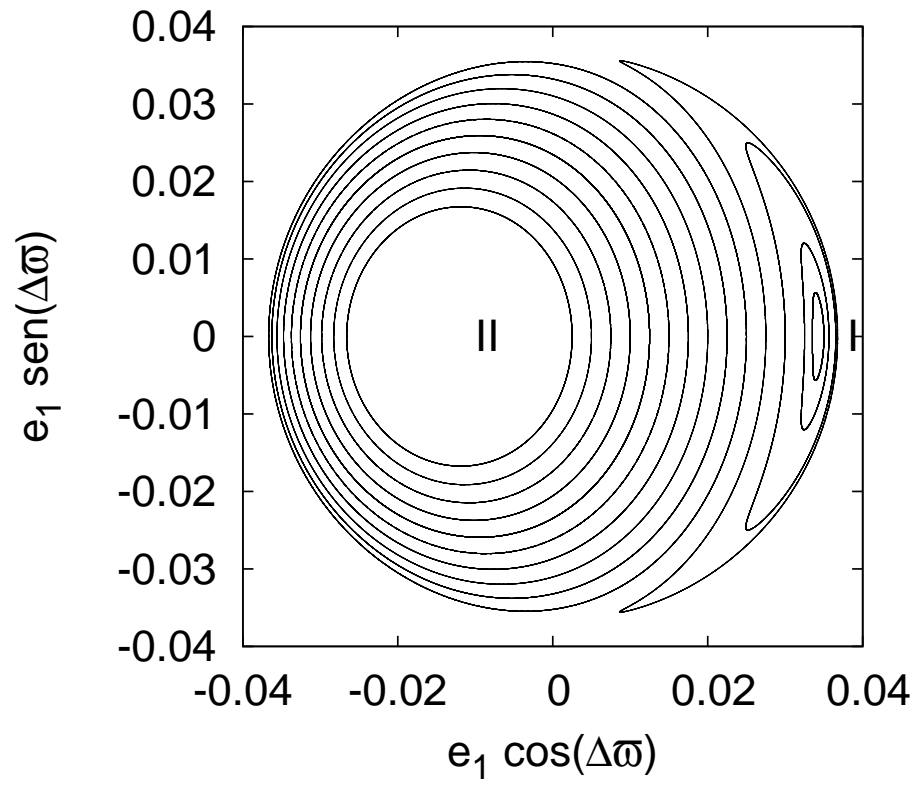


Notamos que para valores do Hamiltoniano  $H_{sec}$  abaixo de zero, teremos apenas duas soluções, enquanto que para valores positivos, teremos quatro soluções possíveis. Se analisarmos os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e  $\Delta\varpi$ , percebemos que os mesmos mudam de sinal ao passar pelo valor das excentricidades que corresponde ao máximo das parábolas quartenárias que são solução deste problema. Os pontos de máximo localizados nos gráficos correspondem às soluções estáveis do problema, onde o ponto marcado por  $\Delta\varpi = 0.0$  corresponde ao Modo I. E o ponto marcado por  $\Delta\varpi = \pi$  corresponde ao Modo II das soluções.

Para entender como se comporta o sistema no regime de longo-período, precisamos obter as equações de movimento do mesmo. Para isso realizamos uma integração, feita utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com um passo de integração de 0.005 ano

Esperando observar as soluções do modo I e II de outra forma, estudamos as soluções para o Hamiltoniano Secular a partir da construção do plano de fase das excentricidades e da variável  $\Delta\varpi$ . Variamos as condições iniciais para  $K_1$ , e as condições iniciais para  $\Delta\varpi$  eram basicamente dadas pelos valores 0 ou  $\pi$ . Uma vez encontradas as soluções, montamos o plano de fase de  $e_i \cos \Delta\varpi$  e  $e_i \sin \Delta\varpi$ .

As equações de movimento  $K_1$  e  $\Delta\varpi$  não dependem de  $\delta$ , e, para a integração, consideramos um valor constante do Déficit do Momento Angular  $K_2$ , e variamos as excentricidades, para observamos o plano gerado.



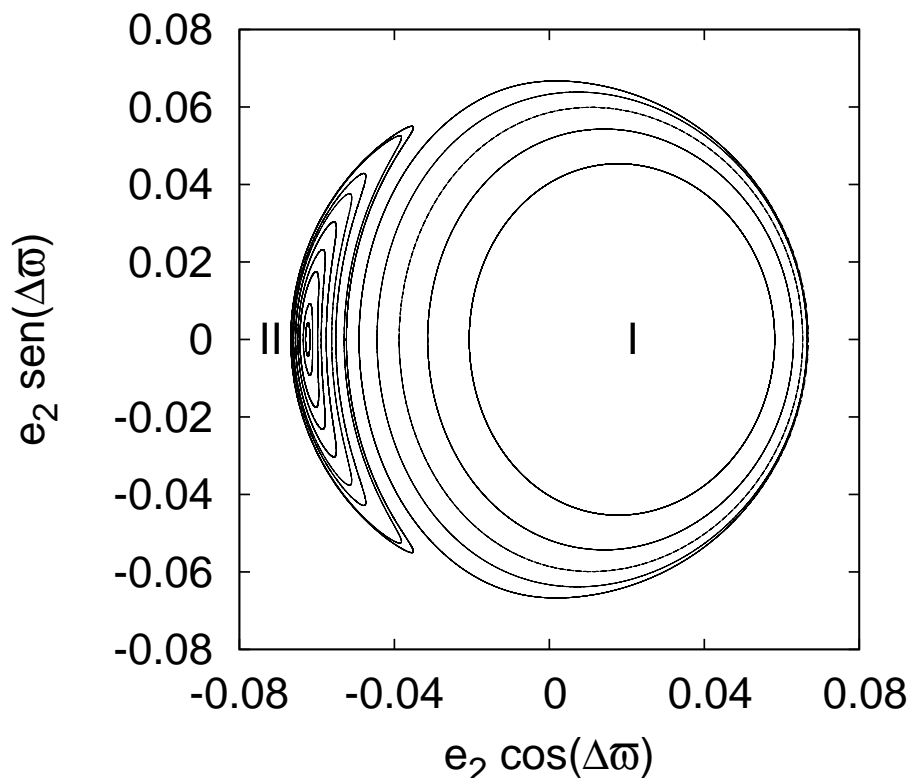


Figura 6.2: Plano de fase do sistema secular. Utilizamos o Hamiltoniano contendo apenas os termos de longo período e excluindo-se os termos ressonantes. A integração do problema foi feita utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Observamos a existência de duas regiões principais em torno do qual as trajetórias oscilam ou circulam. Os pontos fixos e as trajetórias em torno dos mesmos definem os Modos I e II de movimento, que são soluções estáveis periódicas para o problema. O gráfico superior e inferior correspondem respectivamente aos planetas interno e externo com condições iniciais para  $\Delta\varpi = 0.0$  e  $\pi$ .

Observando os gráficos, vemos claramente dois pontos fixos que correspondem aos Modos I e II, que encontram-se destacados nos próprios gráficos. Utilizamos a mesma condição inicial para os dois gráficos. O valor da constante  $K_2$  utilizado foi escolhido considerando-se o cálculo da mesma próximo ao valor calculado caso a excentricidade em questão dos planetas fosse zero. O valor de  $K_2$  escolhido foi de:  $5.0 \times 10^{-7}$ .

Analisando as trajetórias em torno dos pontos fixos, notamos que ocorre a dominância pelo planeta interno no modo II das soluções periódicas. Enquanto que para o planeta externo prevalece o modo I das soluções periódicas.

Observamos claramente que há a oscilação em torno dos ângulos  $0$  e  $180^\circ$ . Quando

o sistema encontra-se no interior do Modo I, notamos que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$  e, neste caso, as linhas de apses dos dois planetas estão alinhadas, e portanto, os planetas encontram-se mais próximos entre si quando ambos estão no pericentro. E as excentricidades oscilam em torno das excentricidades das soluções periódicas do Modo I. No caso em que  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$ , as linhas de apses estão anti-alinhadas, os planetas se aproximam mais quando o planeta interno encontra-se no seu afélio e o externo no periélio. As excentricidades, neste caso, oscilam em torno das excentricidades para a solução periódica do Modo II.

De acordo com Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a), chegamos também a mesma conclusão em relação à oscilação de longo período das excentricidades ocorrer em fases opostas para ambos os planetas. Uma vez que  $K_2 = I_1 + I_2 = cte$ . Ou seja, quando a excentricidade do planeta interno é máxima, a do externo é mínima. E isso ocorre quando possuímos os valores de  $\Delta\varpi = 0$  ou  $\Delta\varpi = \pi$ . Quando aquela é satisfeita, temos a excentricidade do planeta 'b' interno máxima, e a do externo, 'c' mínima. Para esta, o oposto acontece.

Uma vez que estudamos o regime secular do nosso problema, iremos passar agora a estudar o Hamiltoniano completo, construindo os gráficos das curvas de nível a fim de determinar os regimes dinâmicos seus pontos fixos, e então, obter em que regime o sistema 55 Cnc b-c se encontra de fato.

## 6.2 Curvas de Nivel em Função das Excentricidades

Construímos as curvas de nível para o sistema 55 Cnc b-c, variando o valor de  $\delta$  a fim de observar as bifurcações que ocorrem com os pontos fixos. Podemos determinar com tais gráficos para quais valores de  $\delta$  teremos quais regimes dinâmicos predominantes. Para o sistema 55 Cnc b-c, variamos o valor de  $\delta$  no intervalo que vai de  $1 \times 10^{-2} < \delta < 9 \times 10^0$ . Abaixo do valor mínimo, não observamos mudanças consideráveis na forma das curvas de nível. Assim como, para valores acima do valor máximo, apenas observamos o alargamento das regiões para excentricidades mais altas.

Iremos construir as curvas de nível atentando para os diferentes valores de  $\delta$  que implicam em bifurcações dos pontos fixos. Escolhemos apenas alguns determinados valores para mostrar os diferentes tipos trajetórias observadas através das curvas de nível.

Podemos construir os gráficos correspondentes às curvas de nível acordo com o ângulo

utilizado. Construiremos o gráfico utilizando o ângulo  $2\sigma$ , assim como o ângulo  $\sigma$ . Este último corresponde à metade do primeiro, e por isso observamos uma reprodução dupla na forma do gráfico para o primeiro.

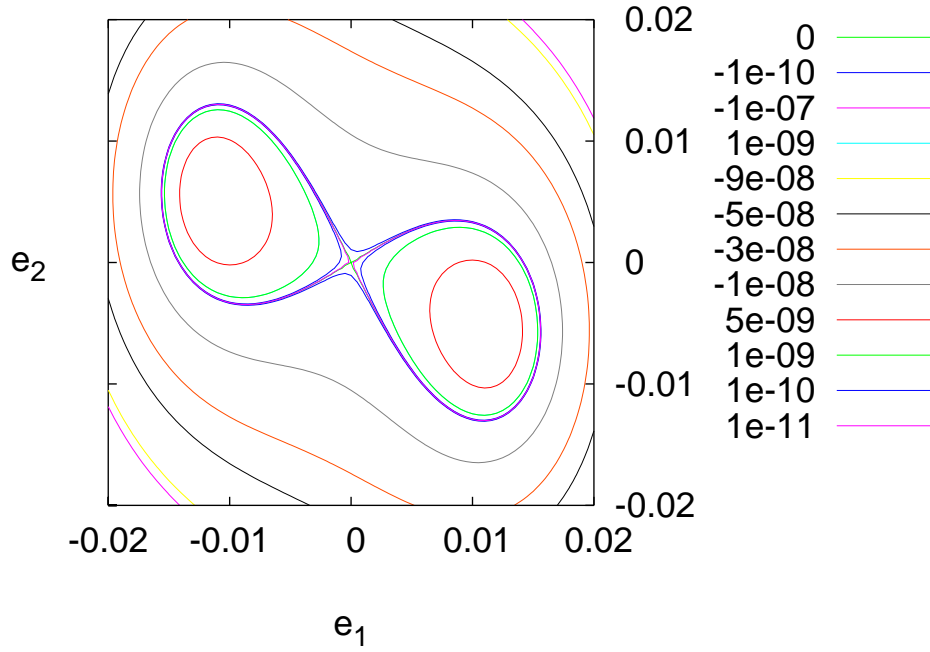
Os valores de excentricidade negativos e positivos estão relacionados com o sinal positivo e negativo que aparece devido ao argumento do seno. Para  $\sigma$  temos que quando  $e_1 < 0$  ou  $e_2 < 0$  menores que zero,  $\sigma_1 = 90^\circ$  e  $\sigma_2 < 0$ . Assim como, quando  $e_i > 0$  e  $e_2 > 0$ ,  $\sigma_1 = 0$  e  $\sigma_2 = 0$ . Tornando  $\Delta\varpi = 0$  ou  $180^\circ$ .

Quando utilizamos o ângulo  $2\sigma$ , a modulação deixa de existir, e portanto teremos, quando  $e_1 < 0$ ,  $2\sigma_1 = 180^\circ$ ,  $e_2 < 0$ ,  $2\sigma_2 = 180$ , e quando ambos forem positivos  $2\sigma_1 = 2\sigma_2 = 0^\circ$ .

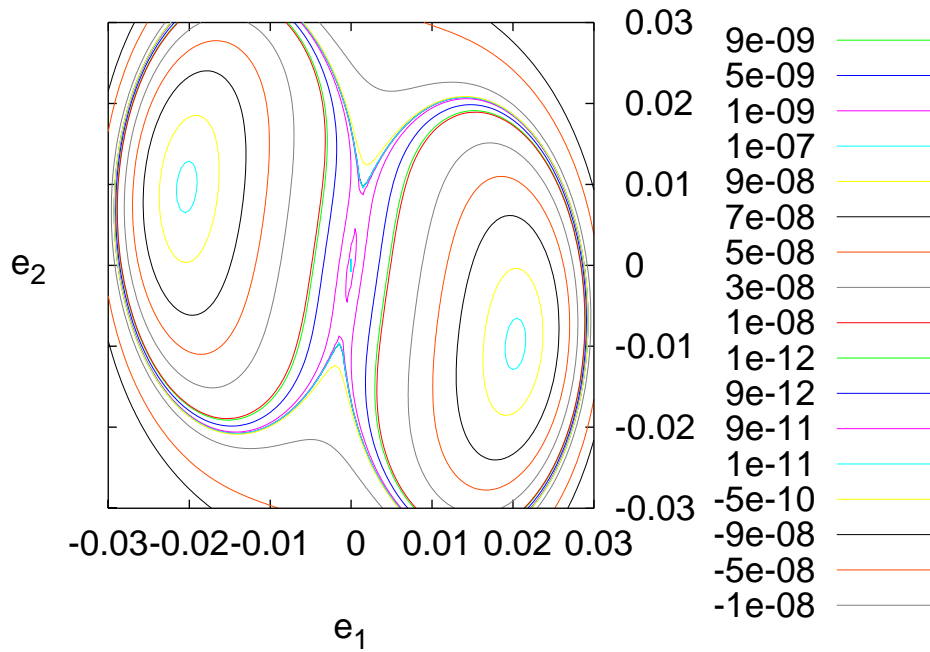
Esta relação gera uma modulação para o ângulo  $\sigma$ , que acaba mostrando a repetição das regiões dinâmicas no plano das curvas de nível.

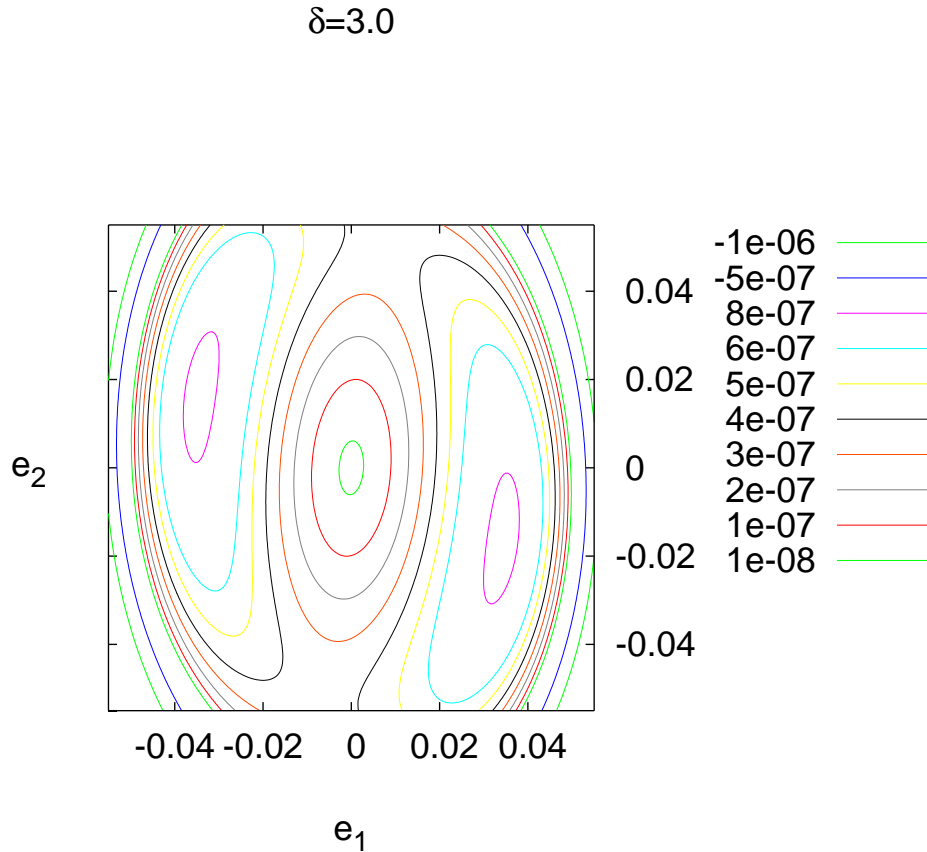
Na figura 6.2 mostramos as curvas de nível utilizando-se os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

$$\delta=1 \times 10^{-1}$$



$$\delta=9 \times 10^{-1}$$





*Figura 6.3:* Curvas de nível da energia do sistema exoplanetário 55 Cnc b-c, para três diferentes valores de delta. Podemos observar os diferentes regimes de movimento de acordo com o valor de delta. Observamos a bifurcação de um ponto de sela na origem em pontos de sela e um centro na origem, aparecendo um regime quasi-ressonante.

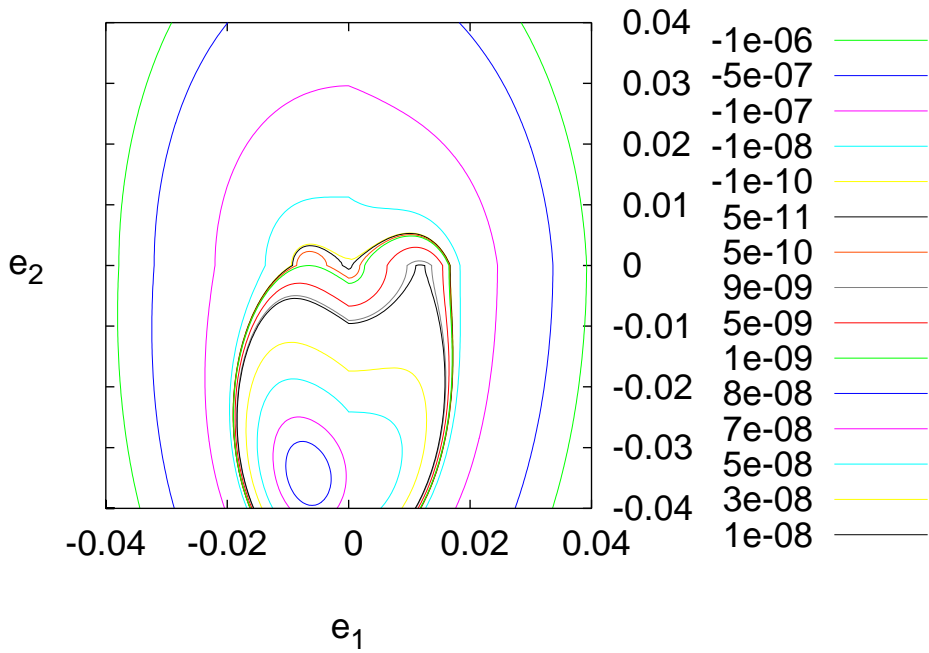
Com um valor de  $\delta$  muito pequeno, observamos que a região ressonante é bastante pequena, limitada a pequenas excetricidades e não há a existência de uma região interna a mesma. Com o aumento do valor do parâmetro, começamos a ver o aparecimento da formação de um centro onde antes tínhamos um ponto de sela. Tal centro começa a aparecer para um valor próximo a  $\delta \approx 9 \times 10^{-1}$ .

Aumentando ainda mais, a região ressonante começa a se mover para valores de excentricidade maior, e notamos que a região interna a ressonância torna-se cada vez maior.

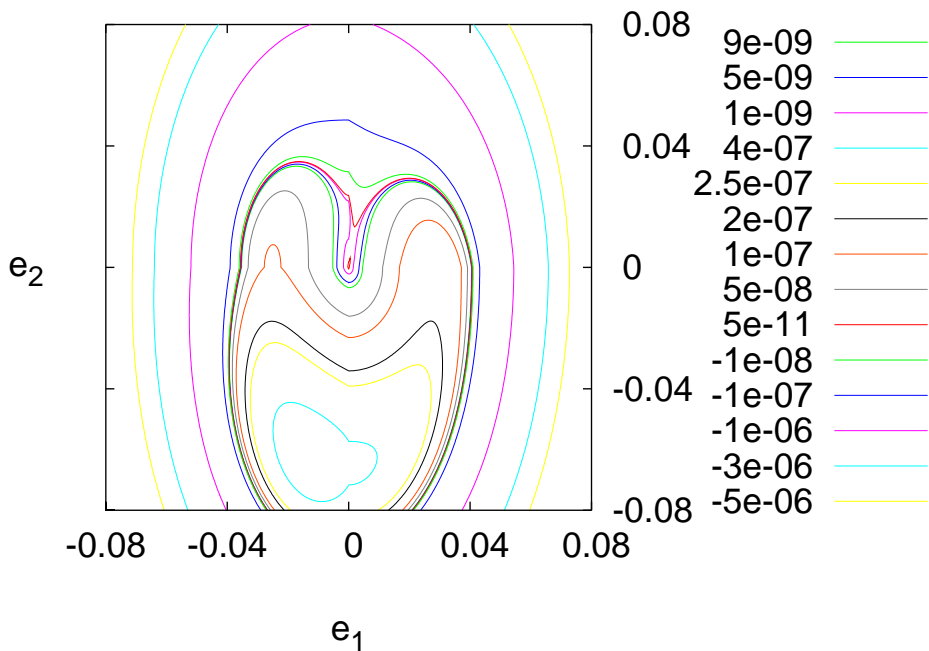
Trocando a construção do gráfico agora em função dos ângulos  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$ , esperamos, que o mesmo perca sua dupla reprodução, e vejamos apenas uma região ressonante, localizada no terceiro quadrante, pois corresponderia ao aos ângulos  $\sigma_1 = \pm 90^\circ$  e  $\sigma_2 = \mp 90^\circ$ , daqui segue:  $\Delta\varpi = \pm 180^\circ$ .



$$\delta = 2 \times 10^{-1}$$



$$\delta = 9 \times 10^{-1}$$



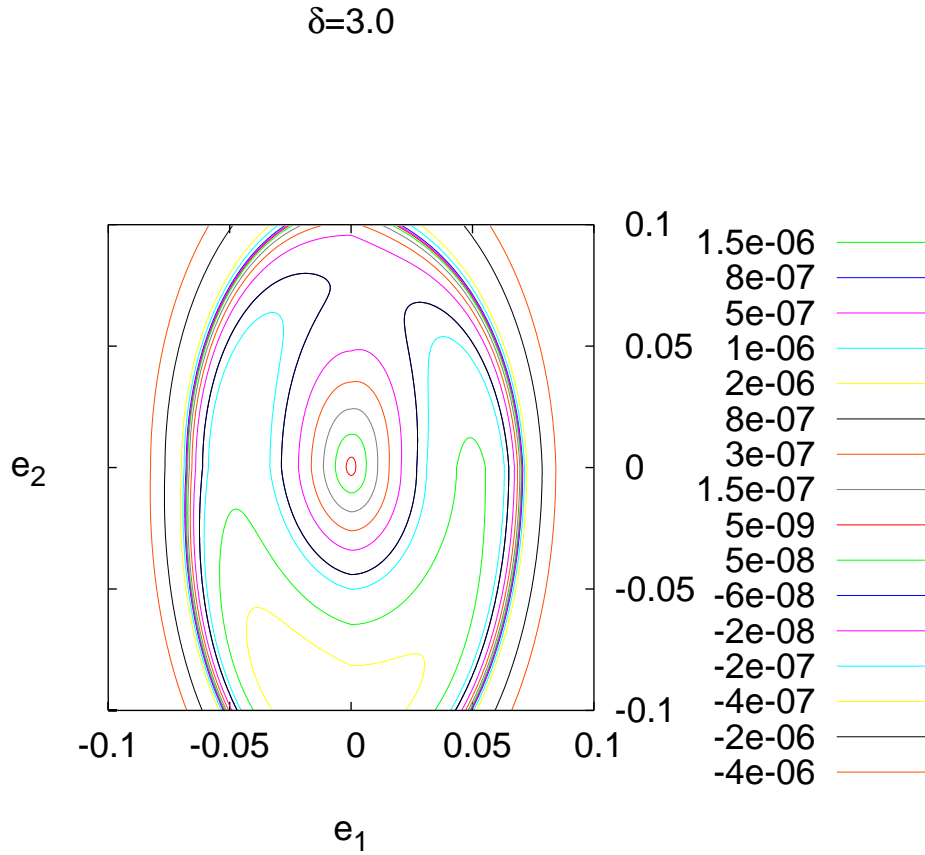


Figura 6.4: Curvas de nível do sistema exoplanetário 55 Cnc b-c, para três diferentes valores de  $\delta$ . Podemos observar os diferentes regimes de movimento de acordo com o valor  $\delta$ , observando a bifurcação de um ponto de sela em um centro e outro ponto de sela.

De maneira análoga ao gráfico anterior, vemos a bifurcação ocorrer e o surgimento do centro e a definição da região ressonante à medida que aumentamos o valor de  $\delta$ .

### 6.3 Construção do Plano Paramétrico

Nesta seção utilizamos os procedimentos descritos na seção 3.5, e construímos o plano ao variarmos o valor de  $\delta$  para as energias do sistema. Antes, porém, fizemos a integração

utilizando o Ra15 Everhart (1985), para avaliarmos nosso resultado baseando-nos nos resultados obtidos da integração. Construímos os gráficos referentes às excentricidades, razão dos movimentos médios, ângulos ressonantes e ângulo  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$  e  $\Delta\varpi$ . Os sistemas foram integrados por pouco mais que um período do ângulo secular, e em seguida os termos devido as interações de curto período retiradas ao utilizarmos de um filtro passa-baixa.

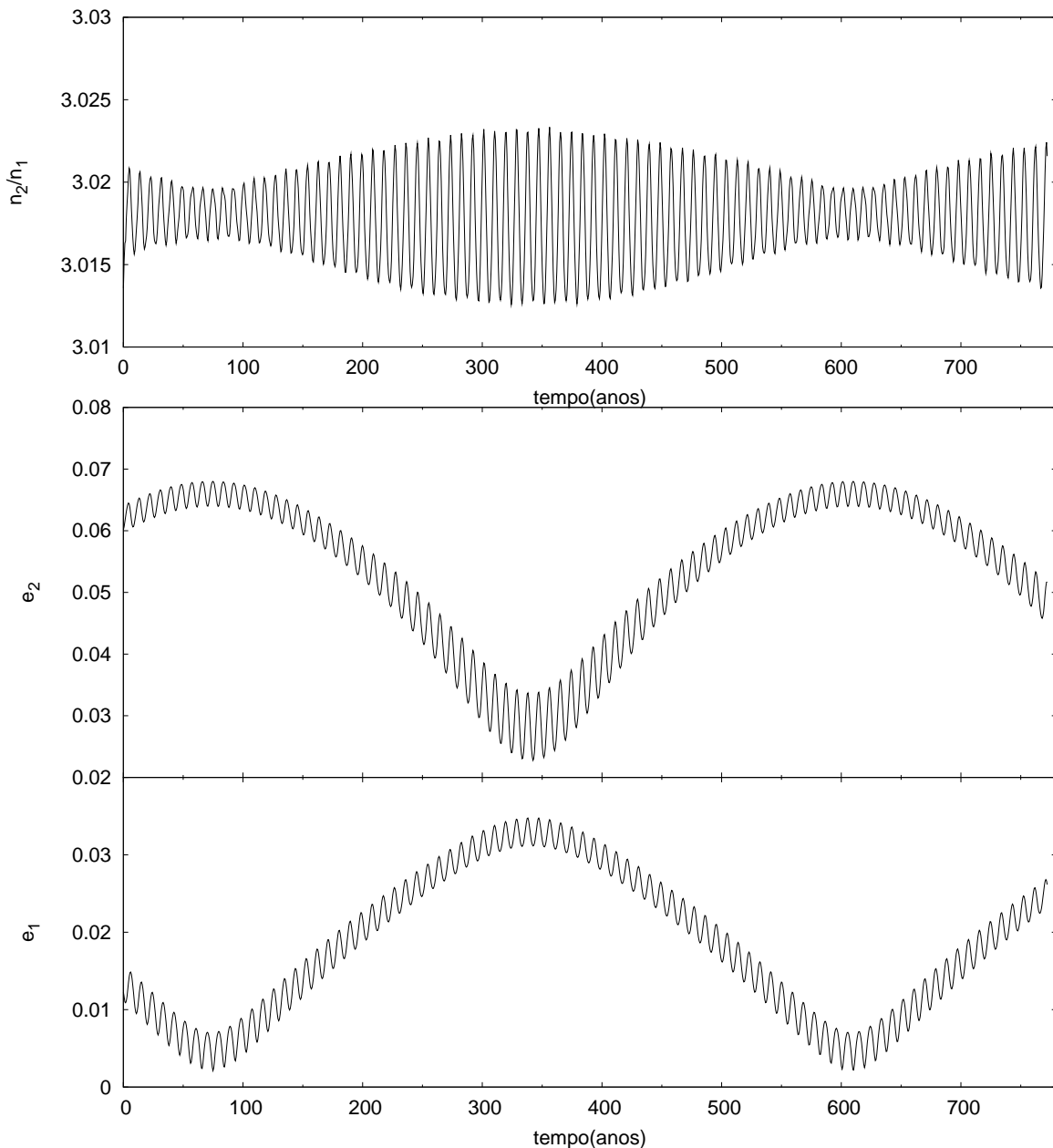


Figura 6.5: Excentricidades e razão dos movimentos médios em função do tempo obtidas através da integração numérica utilizando-se o Radau 15. Além de longo período dominante, associado am movimento secular, notamos a oscilação mais rápida, sugerindo a influência da ressonância 3:1.

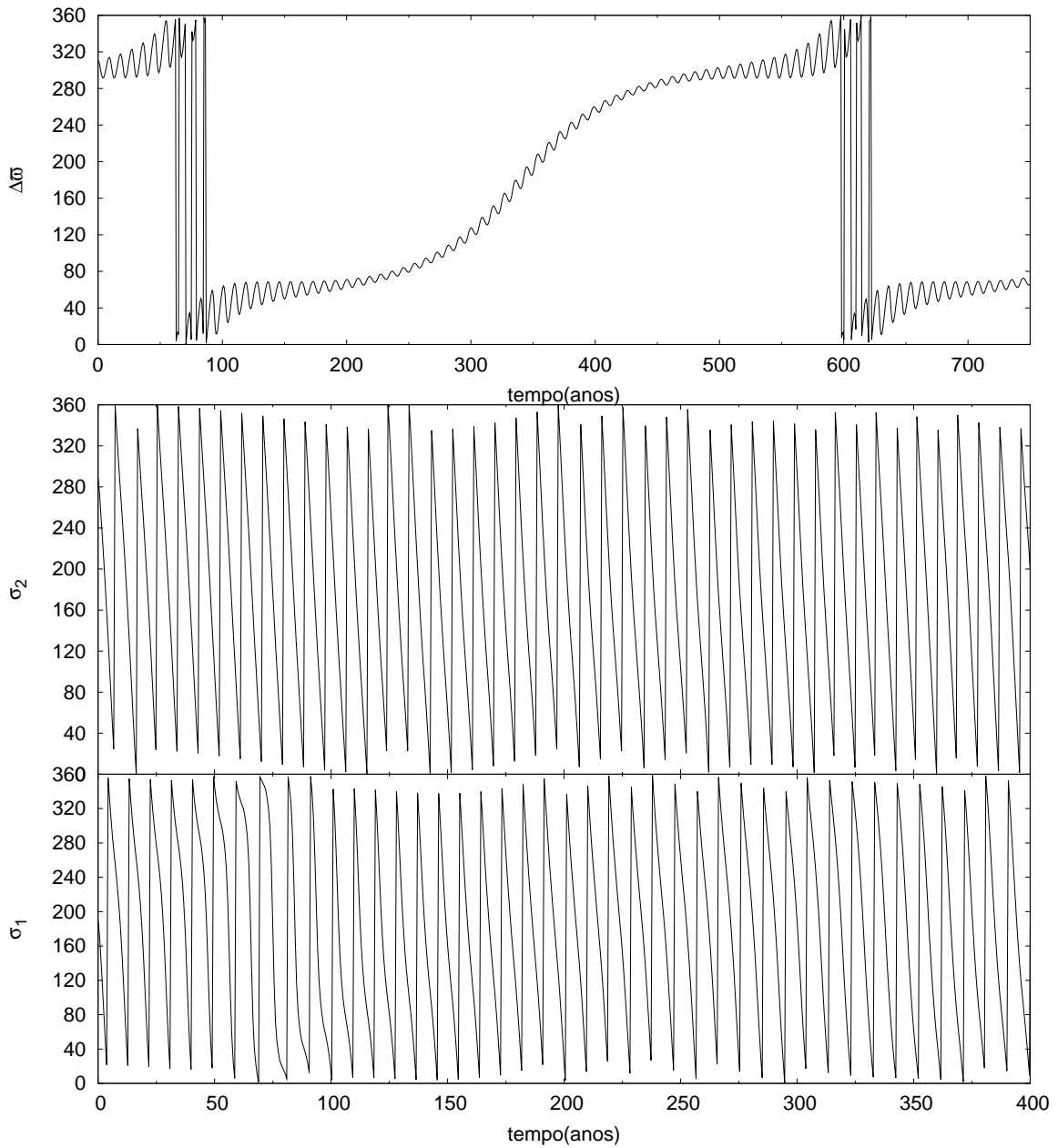


Figura 6.6: Na figura acima temos, de cima para baixo, o ângulo  $\Delta\varpi$ , o ângulo ressonante  $\sigma_2$  e  $\sigma_2$  obtidos pelas integração numérica utilizando-se o Radau 15. Observamos que o ângulo  $\sigma$  circula, e o ângulo  $\Delta\varpi$  também.

Analisando os gráficos das figuras 6.5 e 6.6, notamos que o sistema 55 Cnc b-c não encontra-se na ressonância de movimentos médios 3:1, pois observamos que os ângulos ressonantes circulam durante todo o intervalo de ângulos. Porém, o mesmo encontra-se próximo à ressonância, pois podemos notar que os períodos de circulação dos ângulos  $\sigma_1$  e

$\sigma_2$  podem ser observados na variação de  $n_1/n_2$  e nas excentricidades.

Seguimos então e construímos a curva paramétrica da energia do sistema em função do parâmetros de proximidade com a ressonância  $\delta$ . Os dados utilizados seguem os descritos no capítulo 5, e o gráfico realizado já com a inclusão do valor atual de energia do sistema 55 Cnc b-c e seu valor de  $\delta$  foi o seguinte:

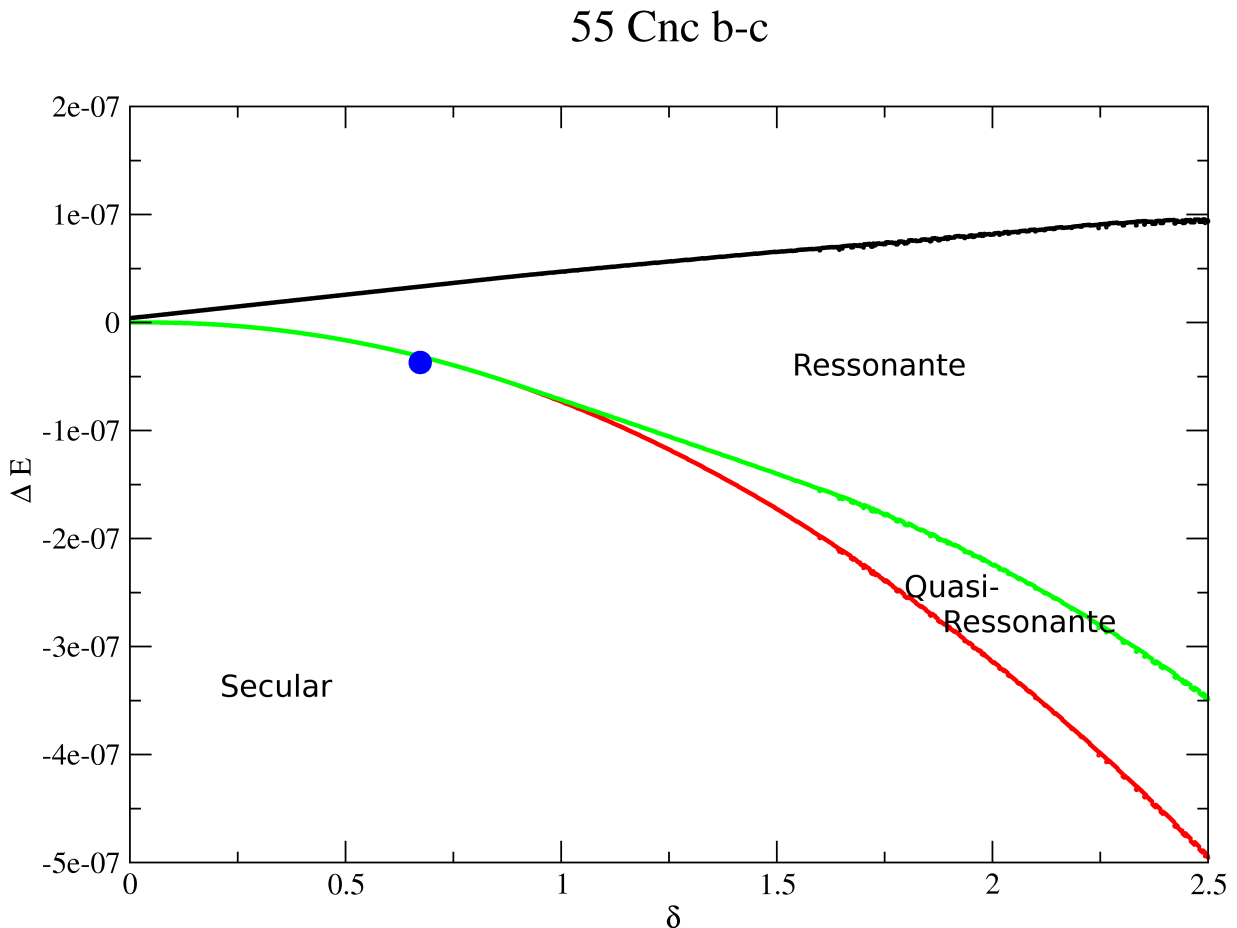


Figura 6.7: Plano paramétrico para o sistemas 55 Cnc b-c. O sistema encontra-se imerso dentro da região secular, apesar de estar muito próximo à região ressonante. O valor de  $\delta$  e  $\Delta E$  obtidos para o sistema foram de 0.6731 e  $-5.59561^{-9}$  respectivamente.

Analisando o gráfico, notamos claramente que o sistema encontra-se muito próximo à região ressonante. Porém, com um valor de  $\delta$  baixo o suficiente para que o ponto de sela que corresponde à separatriz da parte ressonante e secular ainda não seja grande o suficiente para ter bifurcado em um centro e dois pontos de sela. O fato de não podermos caracterizá-lo como pertencente à região quasi-ressonante pode implicar numa falta de cobertura do

---

modelo para o que podemos definir como uma região quasi-ressonante quando não ocorre o aparecimento de um centro nas curvas de nível do sistema em questão.



## Aplicações ao Sistema Saturno-Urano

Neste capítulo trataremos do sistema multiplanetário Saturno-Urano, que encontra-se no nosso próprio Sistema Solar. Esperamos, entretanto, que o mesmo encontre-se em uma região mais próxima da secular, uma vez que a razão dos períodos para o sistema encontra-se abaixo de 2.9.

Com os dados possuídos e mostrados no capítulo 4 (tabela 5.2, obtemos os coeficientes  $A, B, C, \dots$  que compõem nosso Hamiltoniano. Os valores são calculados utilizando-se as excentricidades dos planetas como sendo zero. E seus semi-eixos maiores calculados como se o par de planetas estivesse na ressonância exata. Abaixo exibimos a Tabela 7.1 com todos os valores dos coeficientes calculados. Os valores dos semi-eixos maiores utilizados, escritos em unidades de unidades astronômicas foram:

$$a_1 = 9.58290720, \tag{7.1}$$

$$a_2 = 19.933250245. \tag{7.2}$$

Onde o primeiro corresponde a Saturno, e o segundo a Urano.

Depois que possuímos estes dados, seguindo a teoria descrita no Capítulo 2, iremos analisar a dinâmica do sistema, levando primeiramente em consideração apenas o Hamiltoniano sem os termos ressonantes.

### 7.1 *Estudo do Domínio Secular do Sistema*

Construiremos os gráficos correspondentes às soluções periódicas discutidas no capítulo 2. Para encontrar estas soluções foi realizada uma integração utilizando o método de



Tabela 7.1 - Constantes do Hamiltoniano do sistema Saturno-Urano próximo à ressonância 3:1.

coeficientes	Saturno-Urano
A	$-6.41054 \times 10^{-06}$
B	$-52.2322$
C	$2.96278 \times 10^{-05}$
D	$1.95856 \times 10^{-05}$
E	$7.27737 \times 10^{-06}$
$F_1$	$-1.20635 \times 10^{-05}$
$F_2$	$9.76747 \times 10^{-05}$
$F_3$	$6.34942 \times 10^{-05}$

Runge-Kutta de 4ª ordem, com um passo de integração de 10 anos, uma vez que os efeitos de longo-período aparecem apenas para escalas de tempo mais altas que as do período de translação dos planetas. Utilizamos um valor de  $\delta = 0.02$  com  $K_2 = 8 \times 10^{-6}$  fixo que servem de constantes ao problema. Abaixo observamos os gráficos referentes a tais soluções:

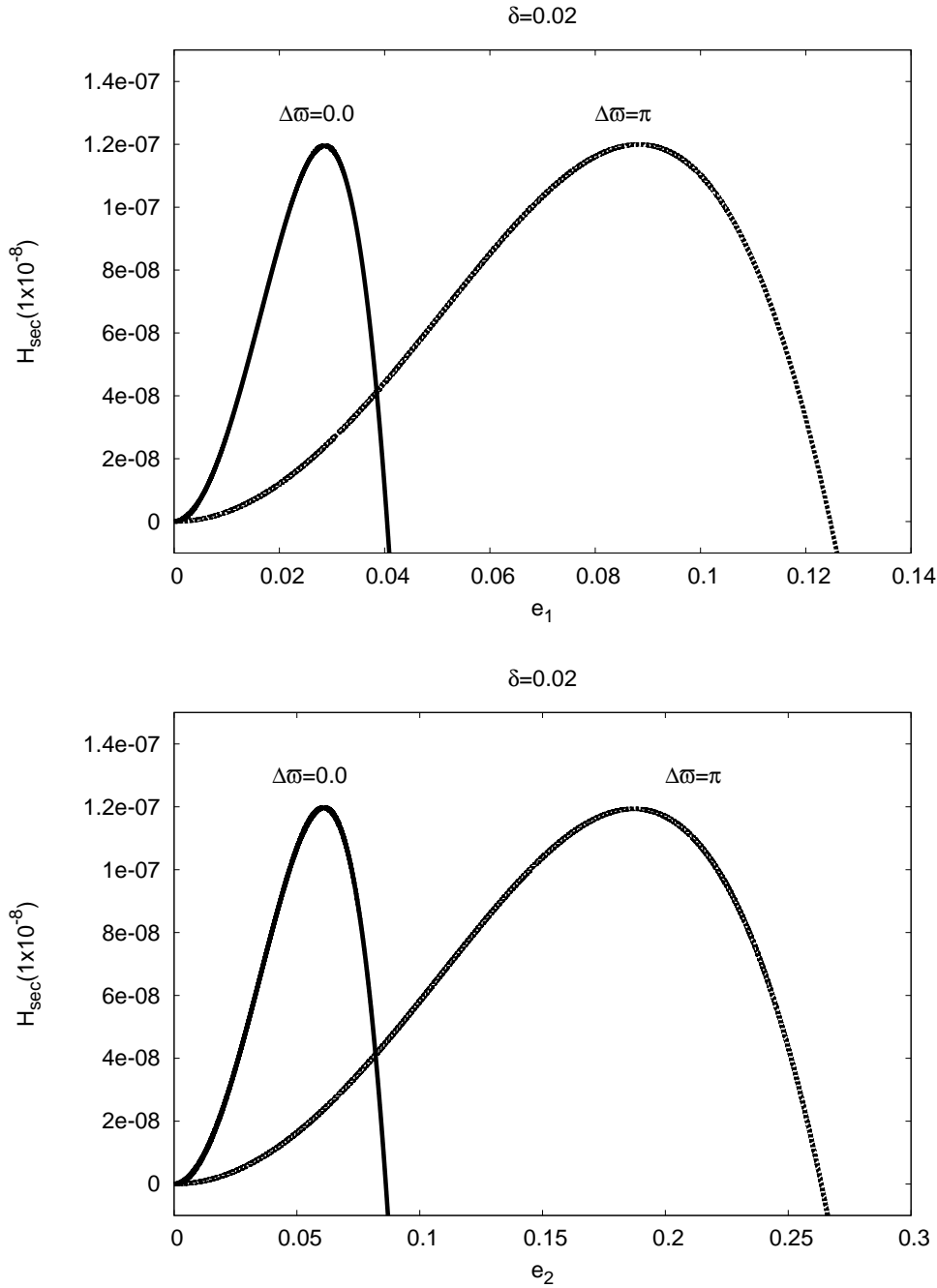
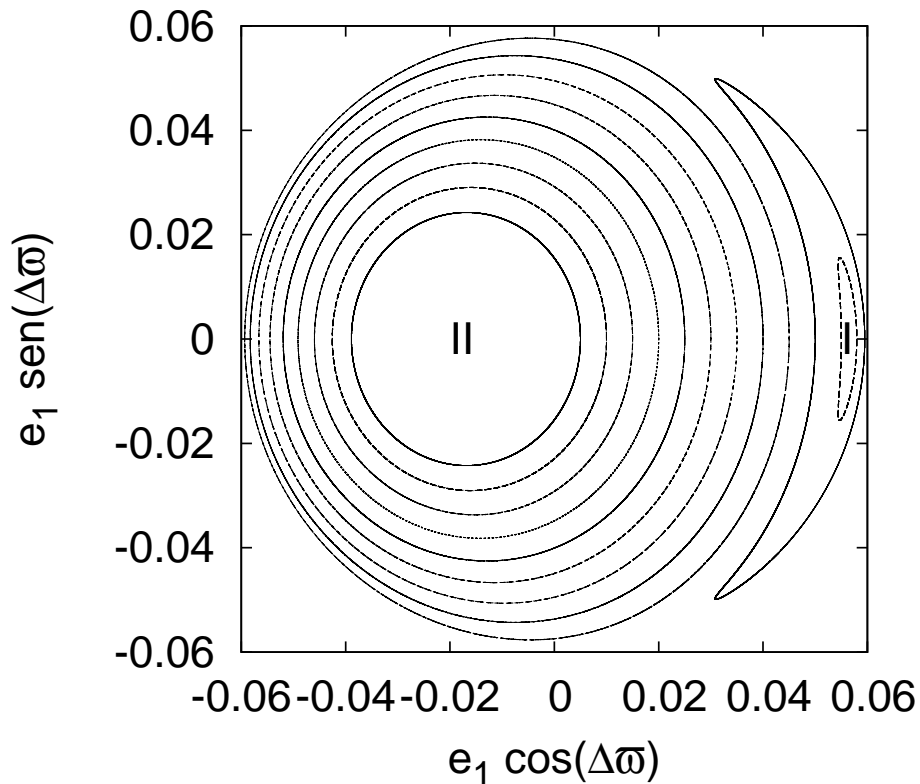


Figura 7.1: Gráfico das Curvas Características do Hamiltoniano secular em função das excentricidades, para o sistema Saturno-Urano. No gráfico superior temos a curva em função da excentricidade de Saturno. E abaixo, em função da excentricidade de Urano. Notamos que nos dois casos, temos um par de solução acima de zero, para cada um dos Modos. Para valores negativos de  $H_{sec}$ , há apenas uma solução para cada modo. As soluções são parábolas quartenárias. Os pontos máximos de cada curva são as soluções de equilíbrio do Hamiltoniano com termos de longo-período. Os valores de  $\delta$  utilizados encontram-se acima de cada gráfico, e usamos  $K_2 = 8 \times 10^{-6}$ , em unidades de massa solar, unidades astronômicas e ano.

Analisando o gráfico percebemos que para valores de  $H_{sec}$  maiores que zero, teremos dois pares de solução possíveis para as excentricidade de Saturno e Urano. Para valores abaixo de zero, possui-se apenas um par de soluções. Os pontos marcados por  $\Delta\varpi = 0.0$  e  $\Delta\varpi = \pi$  são os pontos de estabilidade do problema, e o último corresponde ao Modo II da solução enquanto o primeiro ao Modo I.

De outro modo, podemos agora analisar as soluções do modo I e II construindo o plano de fase da excentricidade dos planetas em função do seno e cosseno do ângulo  $\Delta\varpi$  (figura 7.1). Variando as condições iniciais para  $\Delta\varpi$  apenas com os valores 0.0 ou  $\pi$ , e as condições iniciais para  $K_1$  sendo variadas linearmente a fim de varrer os diferentes movimentos esperados para o problema. As equações de movimento para  $\Delta\varpi$  e  $K_1$  não dependem explicitamente do valor de  $\delta$ .



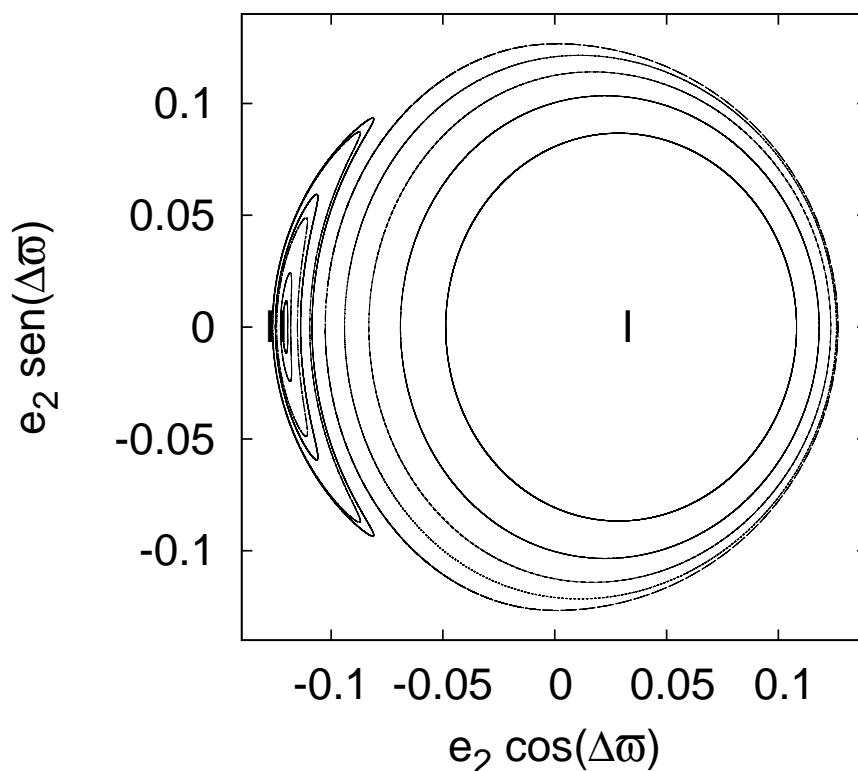


Figura 7.2: Plano de fase das excentricidades em função do seno e cosseno do ângulo  $\Delta\varpi$  para Saturno-Urano. O gráfico superior corresponde a Saturno, com condição inicial para  $\Delta\varpi = 0.0$ . Abaixo deste, temos a excentricidade de Urano, utilizando-se uma condição inicial de  $\Delta\varpi = \pi$ .

Do gráfico, vemos que Saturno é dominado pelo modo II das soluções periódicas. Enquanto que para Urano prevalece o modo I das soluções periódicas. Observamos também que os valores das excentricidades para os planetas ocorrem em fases opostas. Ou seja, quando o planeta interno encontra-se com a excentricidade mais alta, o planeta externo encontra-se com o seu menor valor de excentricidade.

Observamos claramente que há a oscilação em torno dos ângulos  $0$  e  $180^\circ$ . Quando o sistema encontra-se no interior do Modo I, notamos que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$  e, neste caso, as linhas de apses dos dois planetas estão alinhadas, e portanto, os planetas encontram-se mais próximos entre si quando ambos estão no pericentro. E as excentricidades oscilam em torno das excentricidades das soluções periódicas do Modo I. No caso em que  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$ , as linhas de apses estão anti-alinhadas, os

planetas se aproximam mais quando o planeta interno encontra-se no seu afélio e o externo no periélio. As excentricidades, neste caso, oscilam em torno das excentricidades para a solução periódica do Modo II.

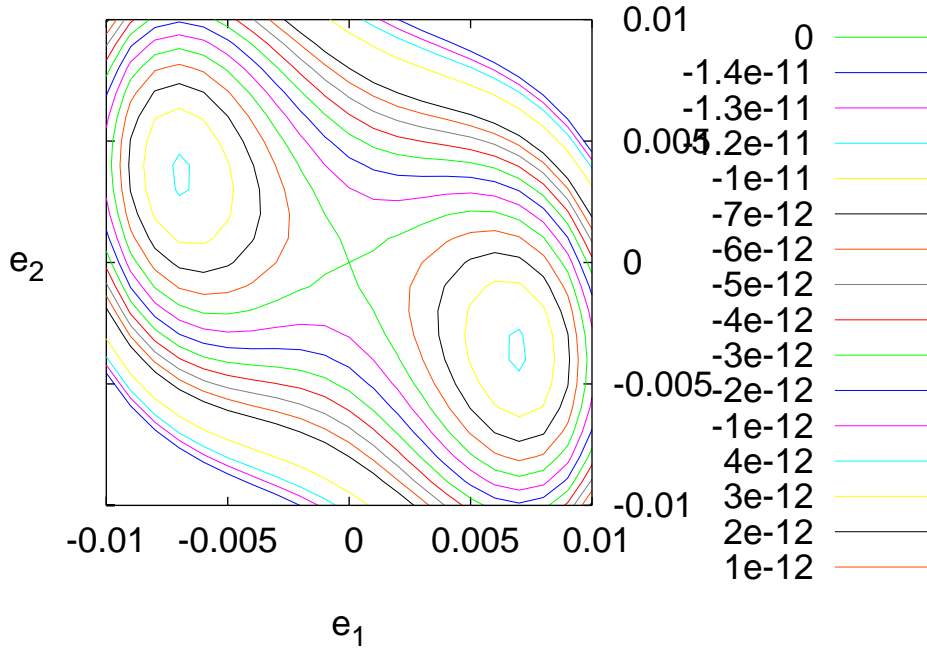
De acordo com Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a), chegamos também a mesma conclusão em relação à oscilação de longo período das excentricidades ocorrer em fases opostas para ambos os planetas. Uma vez que  $K_2 = I_1 + I_2 = cte$ . Ou seja, quando a excentricidade do planeta interno é máxima, a do externo é mínima. E isso ocorre quando possuímos os valores de  $\Delta\varpi = 0$  ou  $\Delta\varpi = \pi$ . Quando aquela é satisfeita, temos a excentricidade do planeta 'b' interno máxima, e a do externo, 'c' mínima. Para esta, o oposto acontece.

Uma vez que já investigamos algumas propriedades dinâmicas para o regime de longo-período, iremos agora trabalhar com o Hamiltoniano completo, incluindo os termos ressonantes, e analisaremos as curvas de nível de energia. E a partir de tais curvas, e com os dados obtidos com o estudo do regime de longo período, iremos determinar o quão próximo o sistema encontra-se da ressonância.

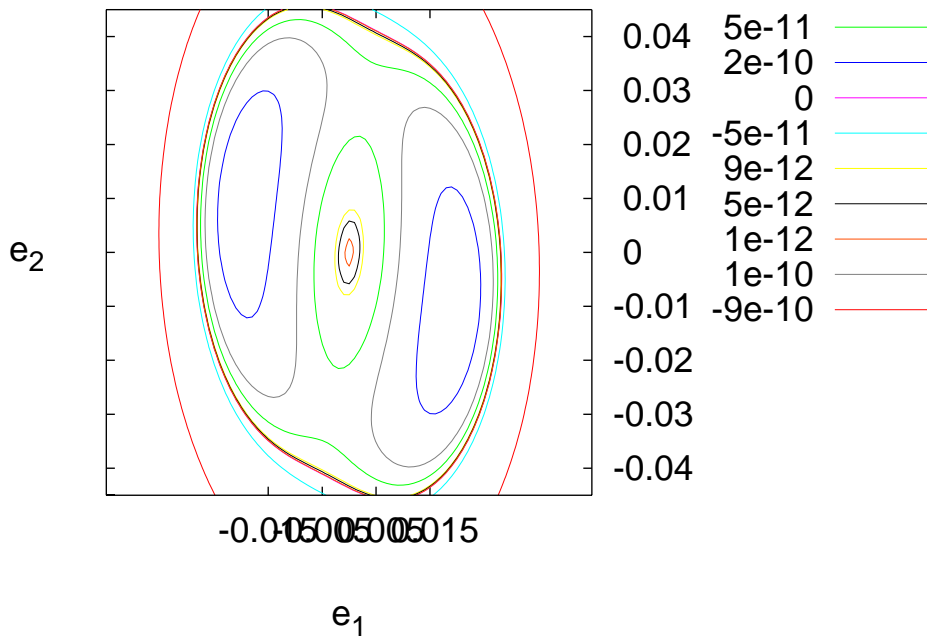
## 7.2 Curvas de Nível em Função das Excentricidades

Conforme já discutido, construiremos as curvas de energia para o sistema Saturno-Urano, utilizando-se as excentricidades de ambos como parâmetros livre. Variamos também o valor do parâmetro de proximidade com a ressonância  $\delta$  de forma que queremos observar as bifurcações que ocorrem nos pontos fixos do Hamiltoniano total, para assim analisar os diferentes regimes dinâmicos que aparecem, e como se comportam ao longo da variação de  $\delta$ . Os resultados são apresentados nas figuras 7.3 e 7.4.

$$\delta = 7 \times 10^{-5}$$



$$\delta = 9 \times 10^{-4}$$



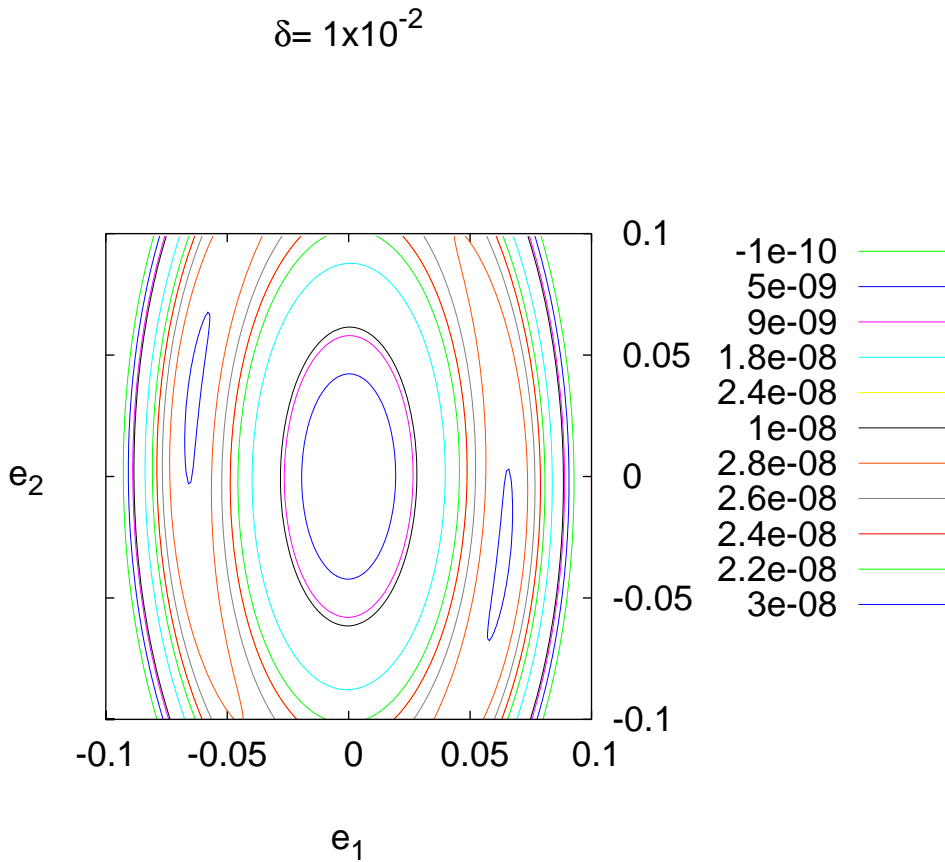
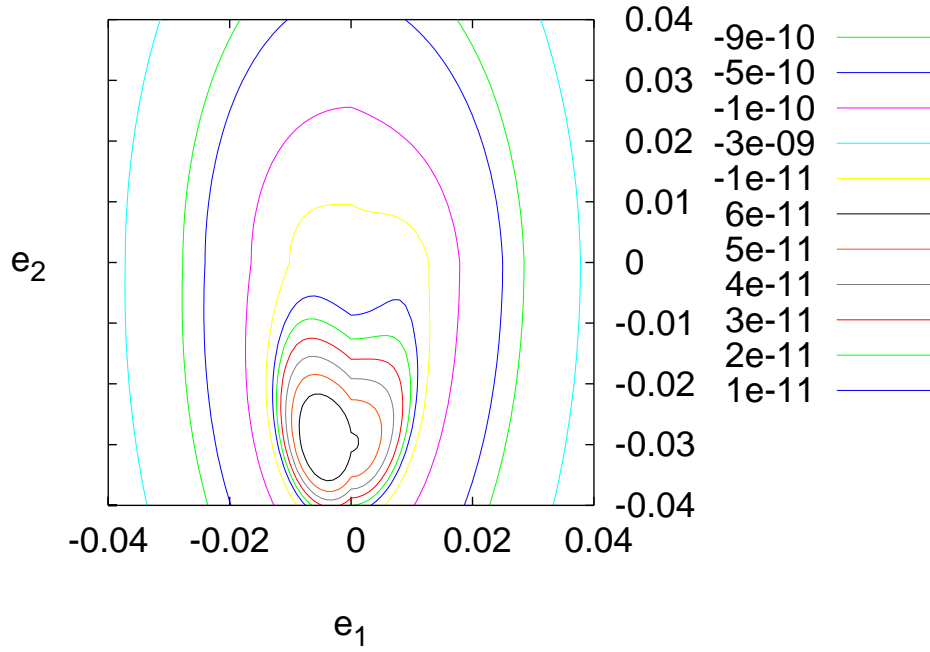


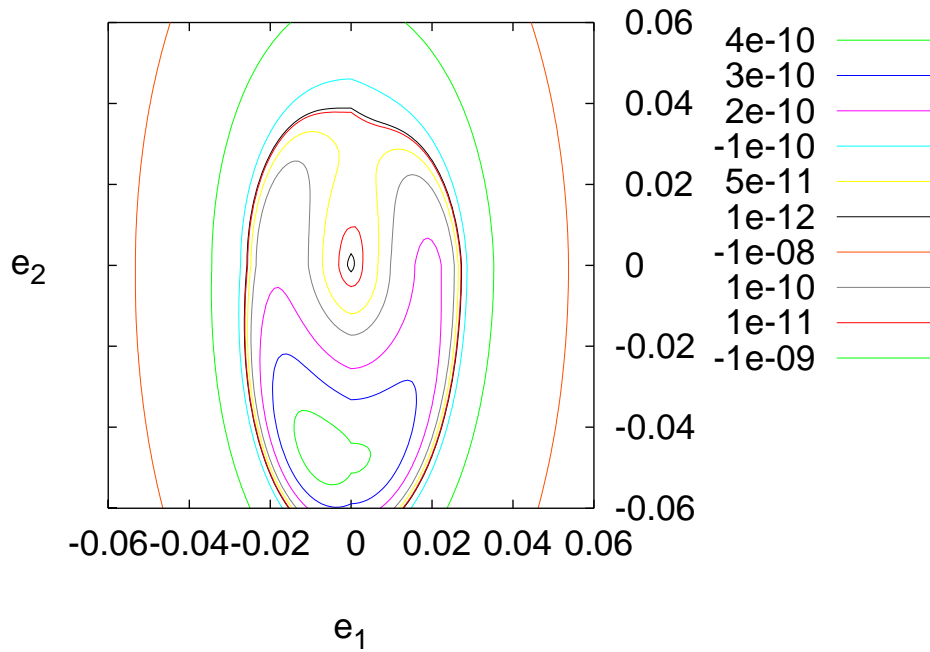
Figura 7.3: Curvas de nível construídas para três valores de  $\delta$  que mostram os diferentes regimes dinâmicos do sistema. Estamos utilizando os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  para a construção da mesma.

Variamos o valor de  $\delta$  e mostramos os principais retratos de fase com as curvas de energia em função das excentricidades dos dois planetas. Notamos que para valores muito pequenos de  $\delta$ , a região ressonante se limita a valores muito pequenos de excentricidade. Quando aumentamos o valor do parâmetro de proximidade com a ressonância, vemos o ponto fixo que antes era um ponto de sela, bifurcar em um centro e dois pontos de sela, que geram uma região interna a ressonância. Quanto mais aumentamos o valor para  $\delta$  vemos a região interna à ressonância aumentar e a região ressonante se afastar dos valores de baixa excentricidade. O valor para o qual notamos o aparecimento do centro, ocorre entre  $4 \sim \times 10^4$ .

$$\delta = 8 \times 10^{-5}$$



$$\delta = 7 \times 10^{-4}$$





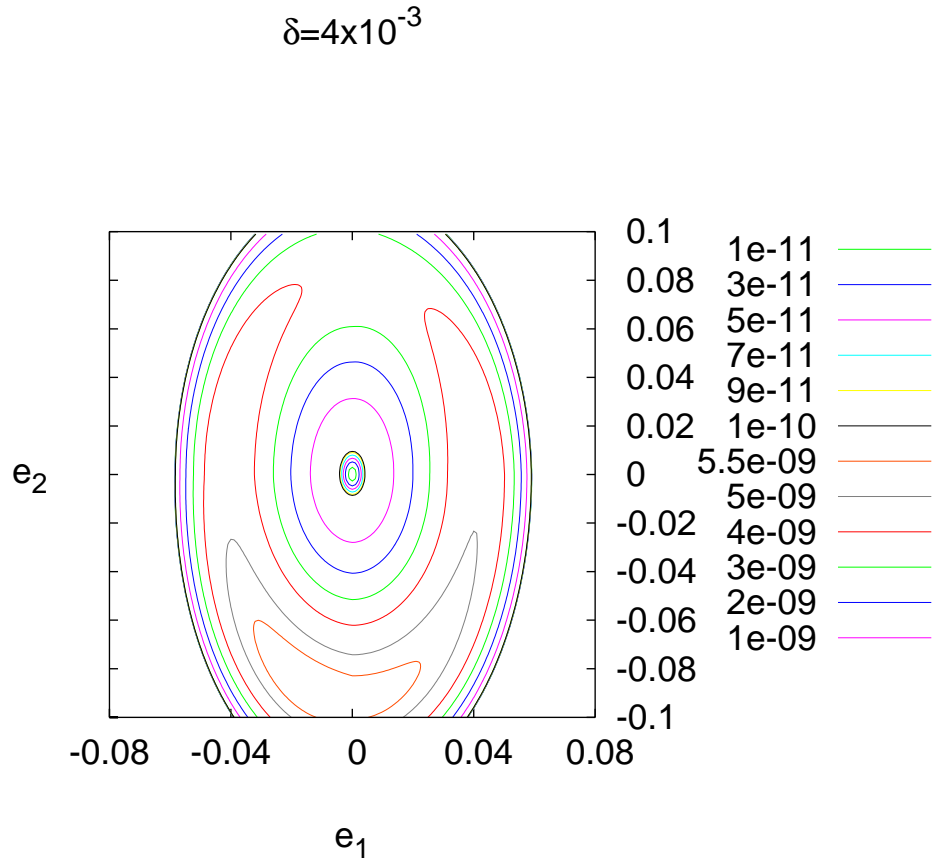


Figura 7.4: Gráfico dos níveis de energia ao variarmos o valor de  $\delta$  para o ângulo  $\sigma$ . Observamos o regime em que ocorre o aparecimento de um centro com ponto de sela bifurcado de um ponto de sela.

Com o ângulo  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$ , notamos analogamente o mesmo efeito que ocorre no problema utilizando-se do ângulo  $\sigma$  (ver figura 7.4).

### 7.3 Construção do Plano Paramétrico

Nesta seção seguimos os passos descritos na seção 3.5, e, variando o valor de  $H$ , a energia do sistema, em função de  $\delta$ , parâmetro de proximidade com a ressonância, construímos o gráfico, encontrando e delimitando as regiões ressonante, quasi-ressonante e secular. Antes porém, fizemos a integração das equações de movimento newtonianas para o sistema, a fim de observar se possui características ressonantes ou seculares, ao analisar os ângulos e os parâmetros orbitais. Exporemos as curvas em função do tempo obtidas para a ex-

---

centricidades, ângulos ressonantes, razão dos movimentos médios e ângulo  $\Delta\varpi$  nas figuras 7.2 e 7.3. Todos os gráficos foram filtrados por um filtro passa-baixa, retirando todos os termos de alta frequência, pois interessa-nos observar apenas os aspectos de longo-período do sistema. Utilizamos um tempo total de integração correspondente a um período do ângulo  $\Delta\varpi$ . As figuras abaixo mostram os resultados obtidos:

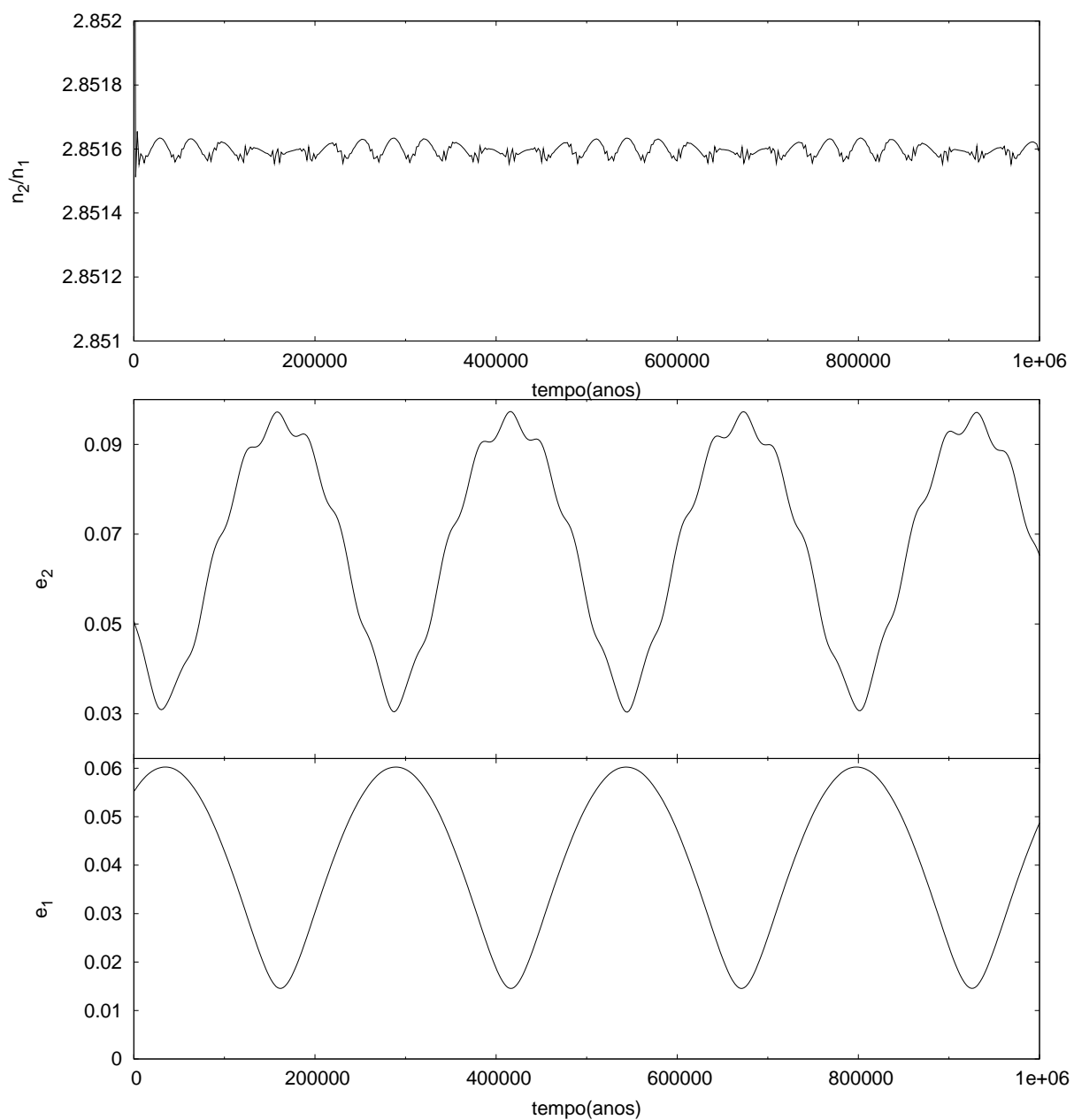
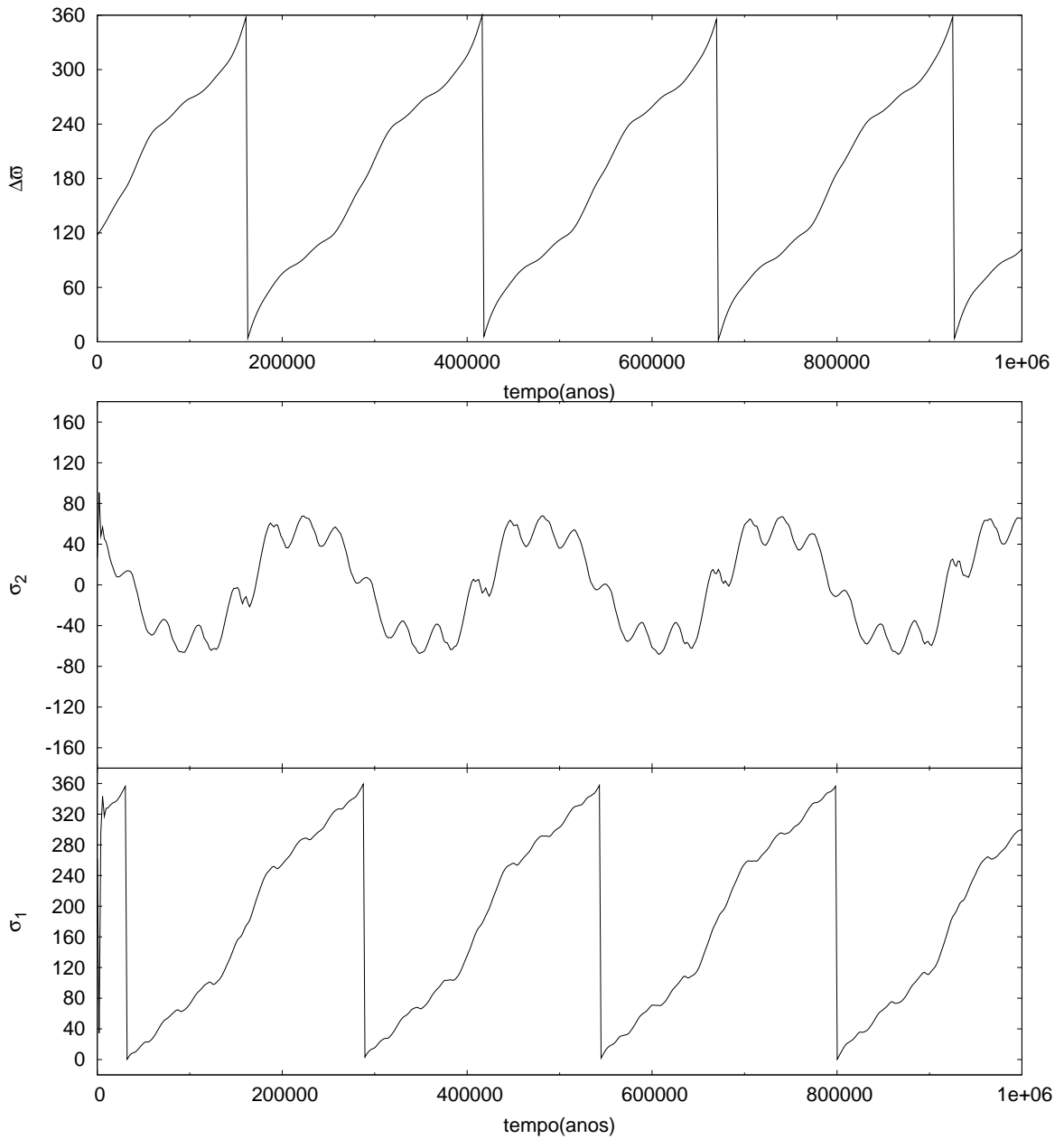


Figura 7.5: Excentricidades e razão dos movimentos médios em função do tempo obtidas através da integração numérica utilizando-se o Radau 15. Notamos a oscilação das excentricidades quase à mesma frequência para os dois planetas. Notamos que a variação da razão dos movimentos médios é praticamente constante, e encontra-se abaixo do valor necessário para o sistema encontrar-se no interior da ressonância.



*Figura 7.6:* Na figura acima temos, de cima para baixo, o ângulo  $\Delta\varpi$ , o ângulo ressonante  $\sigma_2$  e  $\sigma_2$  obtidos pelas integração numérica utilizando-se o Radau 15. Percebemos que os ângulos  $\sigma_1$  e  $\Delta\varpi$  circulam por todos os ângulos. E o ângulo  $\sigma_2$  oscila em torno de zero.

Esperava-se que o sistema Saturno-Urano se encontrasse praticamente em regime secular. A oscilação da razão dos movimentos médios para o sistema encontra-se abaixo da razão 3:1, o que o colocaria fora da ressonância. Porém, notamos que o ângulo  $\sigma_2$  oscila em torno de  $0^\circ$ . Por outro lado, o centro estável da ressonância 3:1, ou ACR, e está em

$2\sigma_2 = 180^\circ$  e  $\Delta\varpi = 180^\circ$ . O que significa a oscilação do ângulo  $\sigma_2$  em torno de zero. É uma questão para futuros estudos.

Utilizamos os dados que constam no Capítulo 5, e variando as excentricidades entre  $-0.1$  e  $0.1$  (onde os valores negativos correspondem à definição dada anteriormente, de acordo com o modo o qual o sistema se encontra), o gráfico construído, com a posição atual de Saturno-Urano encontra-se na figura 7.3.

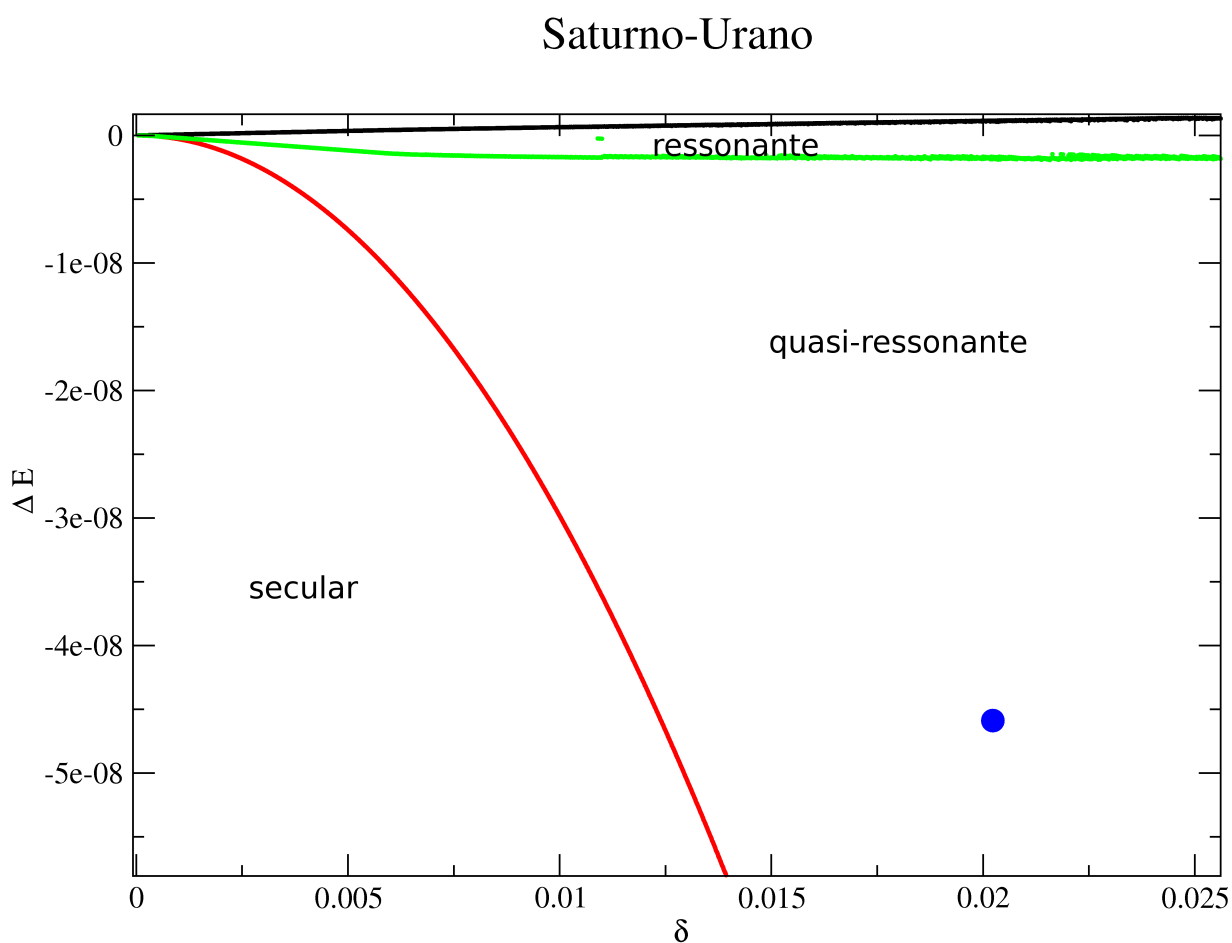


Figura 7.7: Plano paramétrico para o sistema Saturno-Urano. O sistema encontra-se imerso dentro da região quasi-ressonante. Com seus valores de  $\delta = 0.02023$  e  $H = 2.022 \times 10^{-8}$  devidamente subtraído do valor da energia da separatriz para o mesmo delta, do hamiltoniano secular.

Observamos o gráfico, notamos que o sistema não encontra-se na região secular. Porém, notamos que a região quasi-ressonante é muito pequena se comparada com as duas outras regiões. E os valores de excentricidade de Saturno-Urano são bastante pequenos, se

comparados à outros sistemas, o que colocaria o mesmo longe de uma região ressonante estável.



## Aplicações ao Sistema HD 60532 b-c

Neste capítulo, assim como nos anteriores, faremos aplicação da teoria e modelagem ao sistema HD60532 b-c. Tal sistema encontra-se, de acordo com a literatura, no interior de uma ressonância de movimentos médios. Definimos os coeficientes que compõem o Hamiltoniano, de acordo com os dados vistos na tabela 5.3. Vale salientar que, como temos dois conjuntos de dados para o sistema, estamos fazendo todos os cálculos considerando-se os dados obtidos com a inclinação em relação ao plano do céu como tendo valor  $20^\circ$  conforme visto no capítulo 5.

Para calcularmos seus valores, consideramos os semi-eixos maiores calculados como se os mesmos estivessem exatamente na ressonância, as excentricidades igual a zero e as massas conhecidas do sistema. Os valores de semi-eixo maior utilizados foram:

$$a_1 = 0.7606, \tag{8.1}$$

$$a_2 = 1.5776. \tag{8.2}$$



Tabela 8.1 - Constantes do Hamiltoniano para o sistema HD 60532 b-c próximo à ressonância 3:1.

coeficientes	HD 60532 b-c
A	-0.0048084
B	-101.307
C	-0.00260004
D	0.00818809
E	0.0096057
$F_1$	-0.0642066
$F_2$	0.0348594
$F_3$	0.0921066

Com estes dados podemos dar continuidade e estudar o Hamiltoniano do problema, considerando inicialmente apenas o mesmo sem os termos ressonantes para analisar seu comportamento de longo-período.

### 8.1 Estudo do Domínio Secular do Sistema

Para obter as soluções periódicas do Hamiltoniano contendo apenas os termos de longo-período, fazemos uma integração através do método de runge-kutta de 4<sup>a</sup> ordem, utilizamos o valor  $K_2 = 8.28 \times 10^{-4}$ , com um  $\delta = 1.33$  constantes ao problema. Os resultados estão na figura 8.1

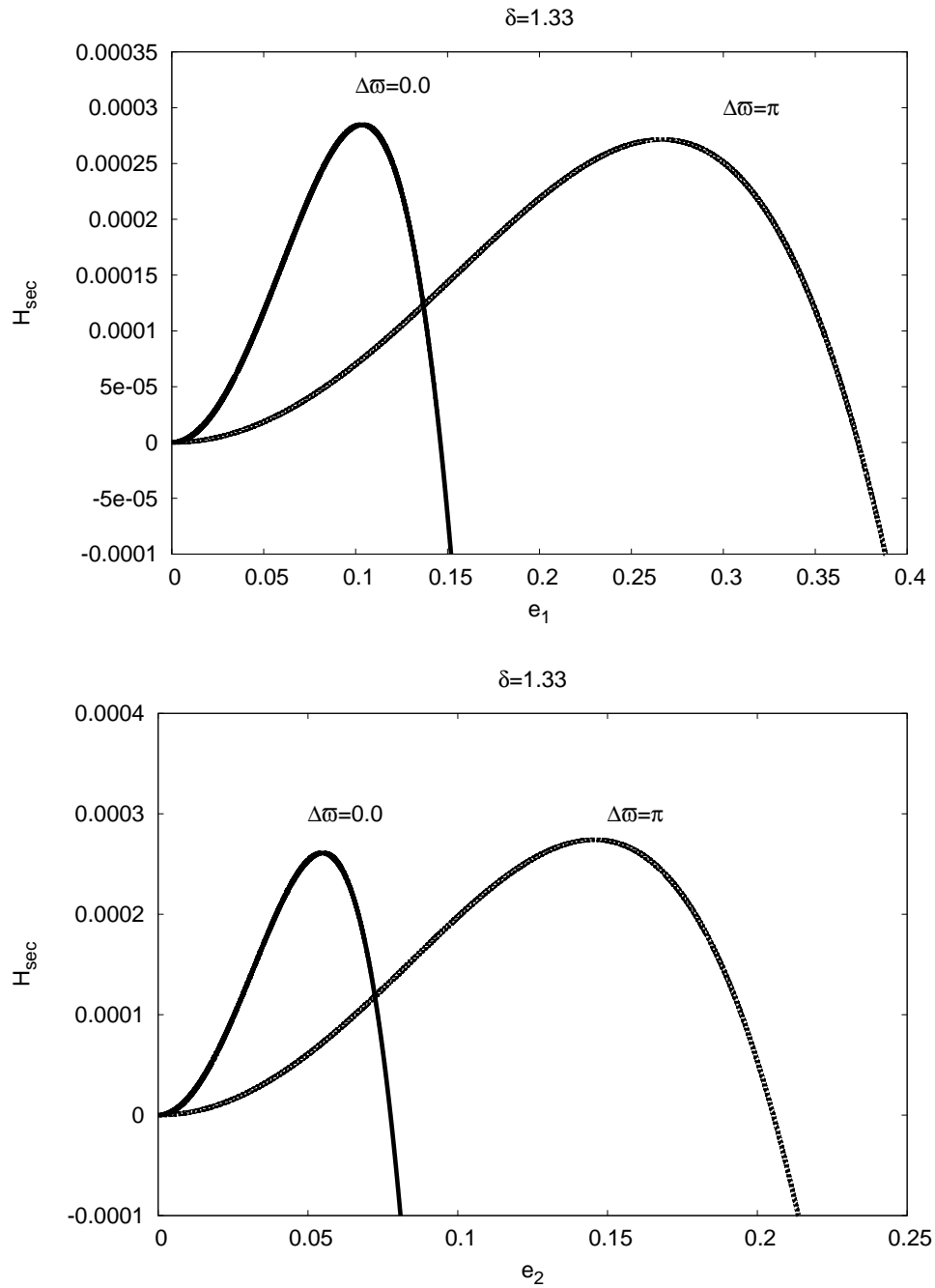
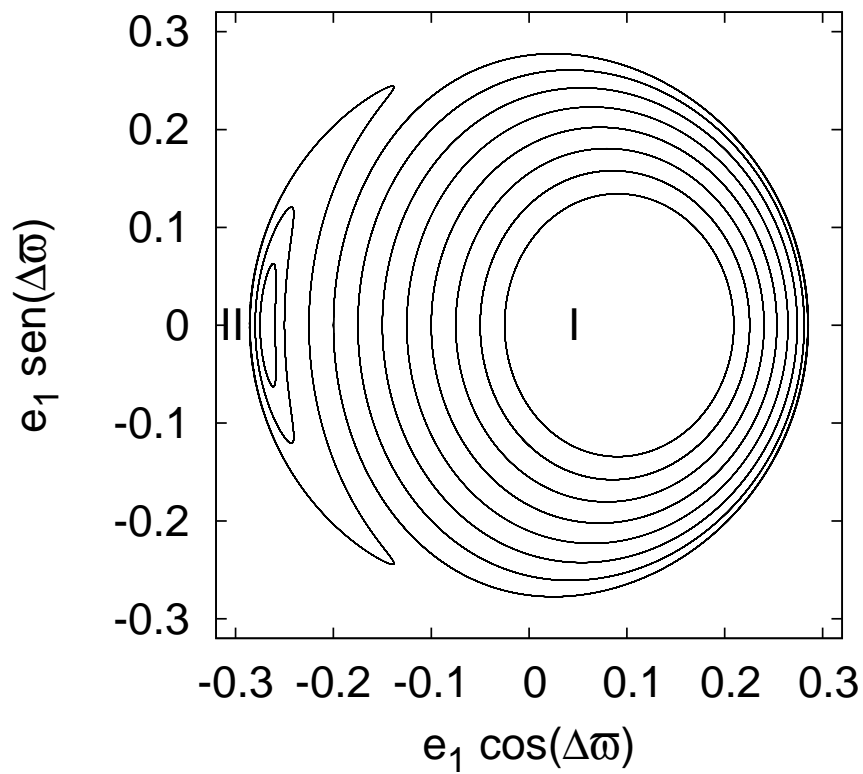


Figura 8.1: Gráfico das curvas características do Hamiltoniano secular em função das excentricidades para o sistema HD6053 2b-c. No gráfico superior temos a curva em função da excentricidade do planeta interno do sistema em questão. No gráfico inferior, em função da excentricidade do planeta externo. Os gráficos possuem as mesmas características dos obtidos para os outros sistemas estudados. Para ambos os gráficos consideramos  $K_2 = 8.28 \times 10^{-4}$ . O valor de  $\delta$  utilizado encontra-se acima do gráfico.

Percebemos os dois pares de soluções possíveis para uma energia acima de zero, assim como nos casos anteriores. Diferentemente para os sistemas anteriores, o Modo I e Modo II, os valores máximos da solução, aparecem com uma diferença bastante visível, mostrando ser o modo I com valor mais alto que o modo II.

Para gerar os planos de fase das excentricidades em função do cosseno e seno do ângulo  $\Delta\varpi$ , integramos as equações de movimento para as variáveis  $K_1$  e  $\Delta\varpi$ . Utilizamos como condições iniciais para  $\Delta\varpi$  os valores 0 e  $\pi$ . Definimos um valor para  $\delta$  e  $K_2$  conforme já mencionado, para calcular as curvas.



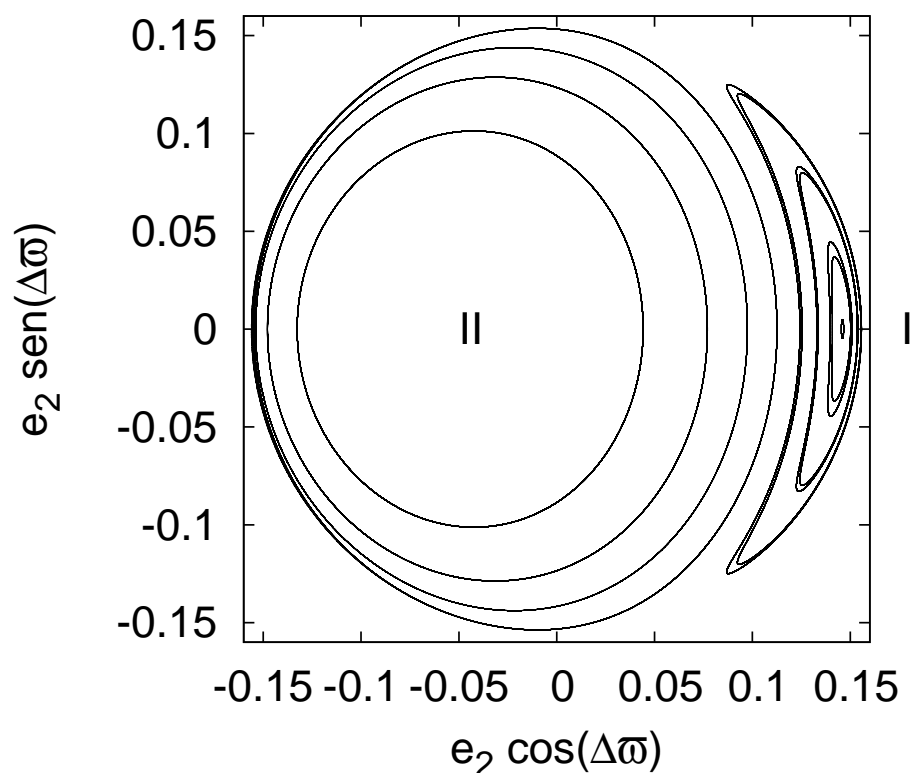


Figura 8.2: Plano de fase das excentricidades em função do cosseno e seno de  $\Delta\varpi$ . Utilizamos o Hamiltoniano contendo apenas os termos de longo período e excluindo-se os termos ressonantes. A integração do problema é feita utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Observamos a existência de duas regiões principais em torno do qual as trajetórias libram ou circulam. Os pontos fixos e as trajetórias em torno dos mesmos definem os modos I e II de movimento, que são soluções estáveis periódicas para o problema. O gráfico superior foi feito utilizando-se uma condição inicial de  $\Delta\varpi = \pi$ , e corresponde à excentricidade do planeta interno. O gráfico inferior foi construído com uma condição inicial para  $\Delta\varpi = 0.0$  e nele visualiza-se as excentricidades do planeta externo.

Observamos claramente que há a oscilação em torno dos ângulos  $0$  e  $180^\circ$ . Quando o sistema encontra-se no interior do Modo I, notamos que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$  e, neste caso, as linhas de apses dos dois planetas estão alinhadas, e portanto, os planetas encontram-se mais próximos entre si quando ambos estão no pericentro. E as excentricidades oscilam em torno das excentricidades das soluções periódicas do Modo I. No caso em que  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$ , as linhas de apses estão anti-alinhadas, os planetas se aproximam mais quando o planeta interno encontra-se no seu afélio e o externo

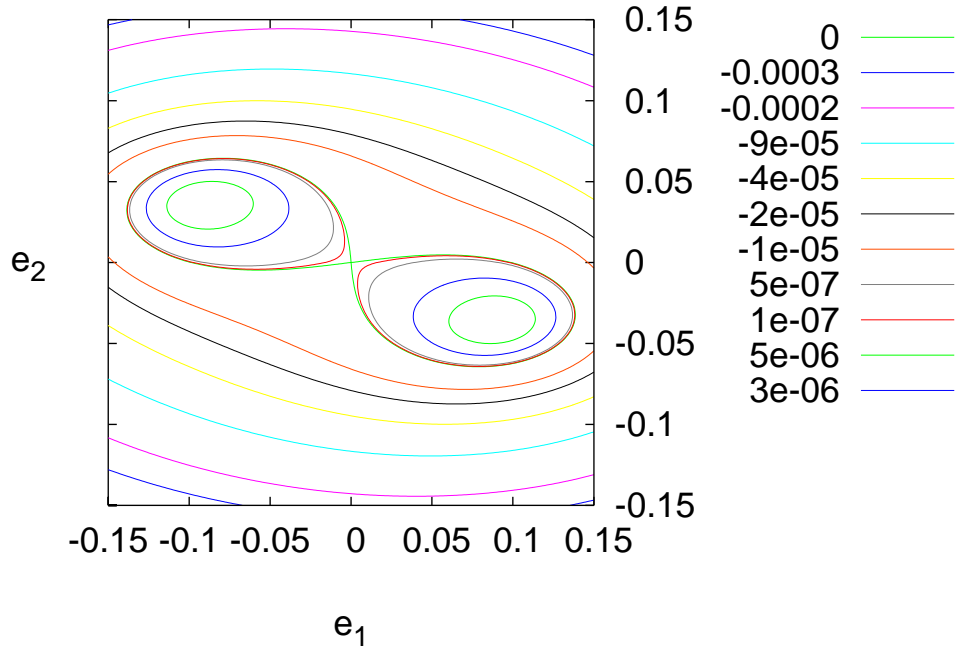
no periélio. As excentricidades, neste caso, oscilam em torno das excentricidades para a solução periódica do Modo II.

Observando os gráficos acima, percebemos os tipos de movimento encontrados para os sistemas 55 Cnc b-c e Saturno-Urano. Porém, diferentemente dos dois, para HD60532-b, o planeta interno e externo terão uma predominância dos modos de movimento inversas às observadas para os outros dois sistemas. O planeta 'b' interno tem predominantemente sua solução no modo II, enquanto que o planeta externo 'c' tem seu plano de fase dominado pelo modo I. Isso ocorre devido ao fato da razão das massas  $m_2/m_1 > 1$ , enquanto que para os outros dois a razão é menor do que 1.

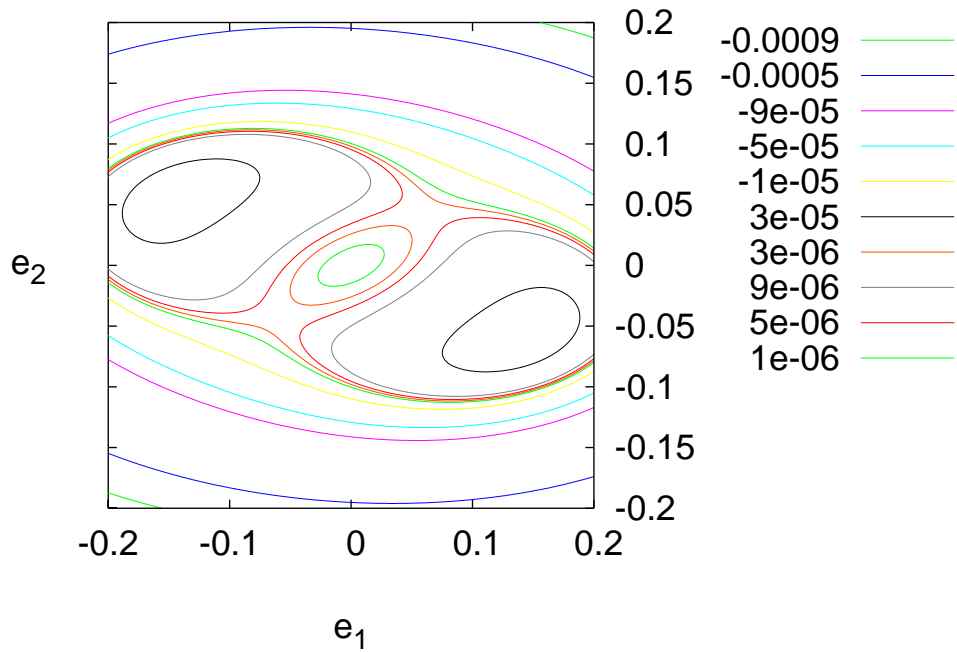
## 8.2 *Curvas de Nível em Função das Excentricidades*

Construímos as curvas de nível da energia para o sistema utilizando-se as excentricidades como parâmetros livres, para vários valores do coeficientes de proximidade da ressonância  $\delta$ . Esperamos observar as bifurcações que ocorrem para os pontos fixos ao variarmos seu valor. Como fizemos vários gráficos, escolhemos apenas alguns para os quais os valores de  $\delta$  exibem as trajetórias das curvas de nível antes e depois de termos o aparecimento de um centro. É importante ressaltar que faremos a demonstração das curvas de nível de duas formas. Na primeira em função dos ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  (figura 8.3), e em seguida em função dos ângulos  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$  (figura 8.4).

$$\delta = 1 \times 10^{-1}$$



$$\delta = 4 \times 10^{-1}$$



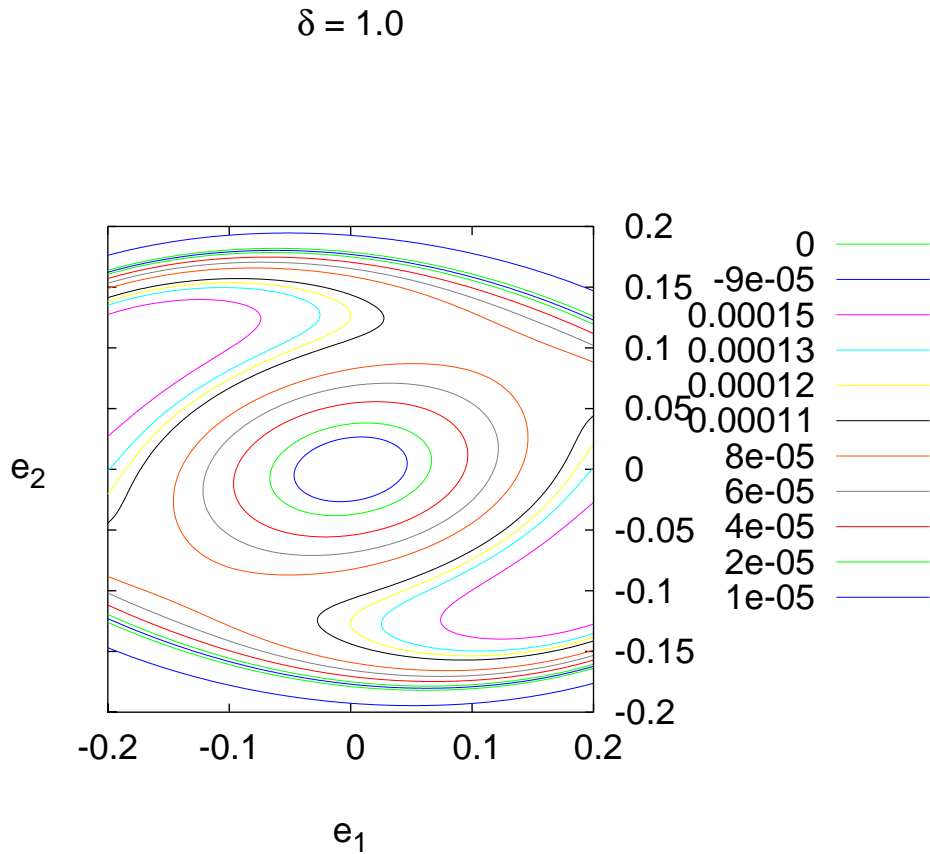


Figura 8.3: Curvas de nível do sistema exoplanetário HD60532 b-c, com três diferentes valores de delta. Podemos observar os diferentes regimes de movimento de acordo com o valor de delta. Estamos utilizando o ângulo  $\sigma_2$ .

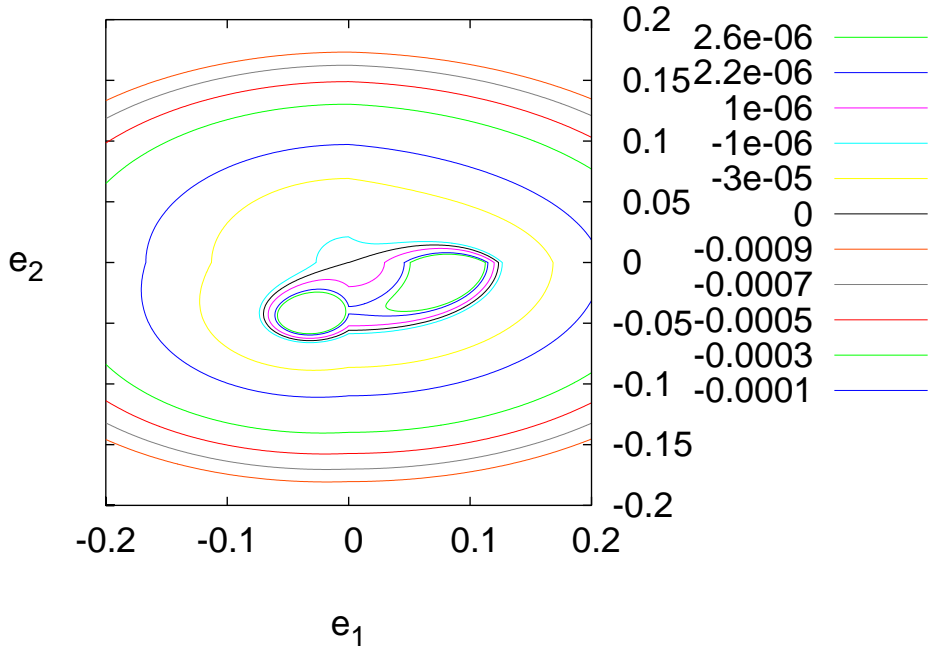
Para valores baixos de  $\delta$  observamos uma região ressonante bastante pequena próximas a pequenos valores de excentricidade. À medida que o valor de  $\delta$  é aumentado, vemos o aparecimento de uma região interna a ressonância, que ocorre para valores intermediários de energia, abaixo do valor de máximo que corresponde aos centros da região de ressonância. A região de centro compreende um mínimo local de energia, como podemos verificar. Os pontos de sela, que compreende a separatriz entre a região interna a ressonância e a propriamente dita, são pontos em que a variação das coordenadas é positiva

---

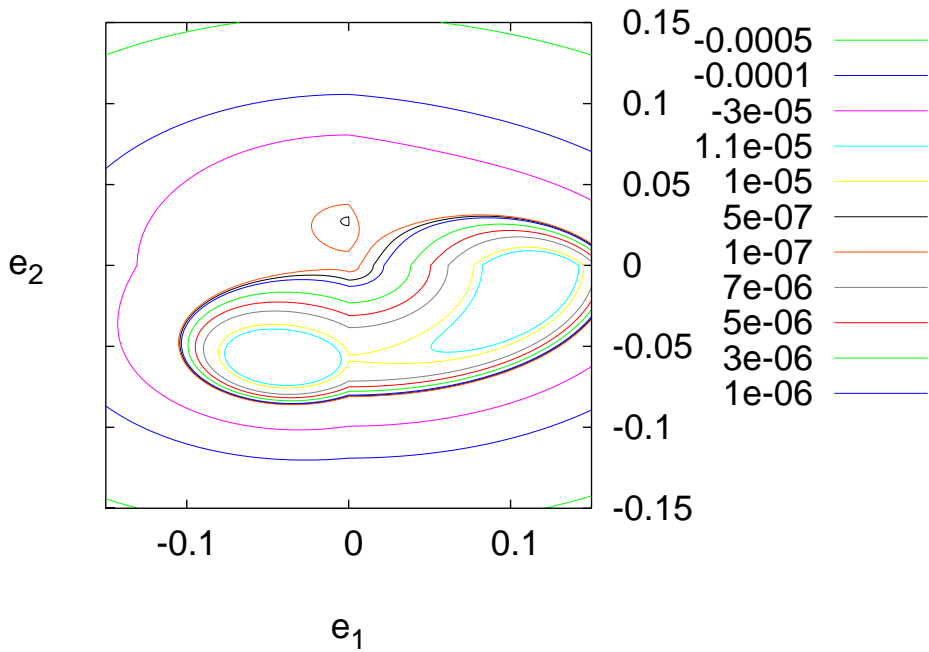
em um sentido e negativa no outro. Conseguimos perceber em torno de que ângulos ocorre a libração da igual forma, apenas atentando em que posição no gráfico encontram-se os pontos máximos devido ao centro ressonante. O valor de  $\delta$  para o qual começamos a notar o aparecimento de um centro, ocorre aproximadamente em  $\delta \approx 3 \times 10^{-1}$ .

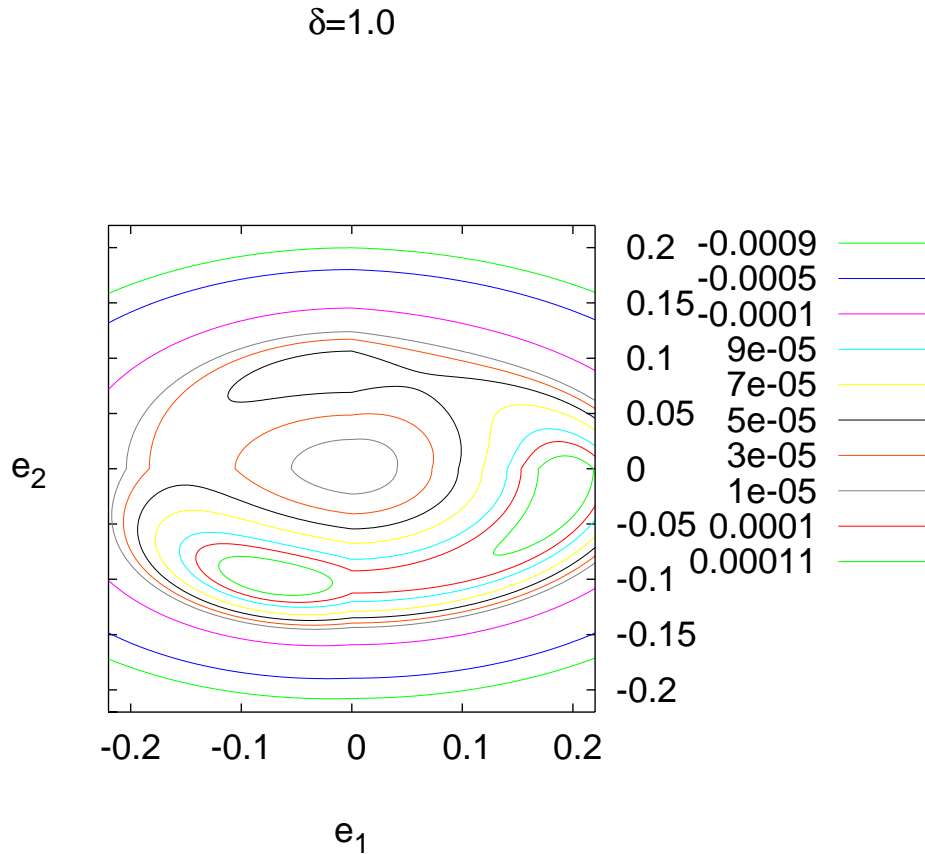


$$\delta = 1 \times 10^{-2}$$



$$\delta = 2 \times 10^{-1}$$





*Figura 8.4:* Curvas de nível do sistema exoplanetário HD60532 b-c, para três valores diferentes de  $\delta$  em função de  $2\sigma_1$  e  $2\sigma_2$ . Podemos observar os diferentes regimes de movimento de acordo com o valor de delta. Utilizamos o ângulo  $\sigma$  neste caso, e notamos para valores altos de  $\delta$  o aparecimento de uma região interna à ressonância, com o aparecimento do centro.

Notamos que, quando mudamos para o ângulo  $\sigma$ , observamos o aparecimento de vários pequenos centros, que ocorrem devido ao fato do sistema estar em ressonância. Variamos o valor de delta, e percebemos que o aparecimento das regiões ocorre pra quanto maior for o  $\delta$  do mesmo. Para valores extremamente baixos, percebemos apenas uma região de ressonância para valores muito pequenos de excentricidade. Com o aumento do valor de  $\delta$

ocorre o aparecimento de um centro, que acaba sendo incorporado à região de ressonância, formando três regimes de ressonância interna.

### 8.3 *Construção do Plano Paramétrico*

Nesta seção utilizamos os procedimentos descritos em 3.5, e construímos o plano ao variarmos o valor de  $\delta$  para as energias do sistema. Antes fazemos a integração das equações de movimentos completas para o sistema, utilizando-se o método Radau 15, já mencionado posteriormente. Observaremos os gráficos obtidos para as excentricidades, ângulos ressonantes, ângulo da diferença das longitudes de pericentro e razão dos movimentos médios. Esperamos comparar os resultados da integração aos resultados obtidos com a implementação da curva paramétrica que construímos em seguida, localizando a posição do sistema no mesmo. Todas as curvas listadas das figuras 8.3 e 8.3 passaram pela filtragem de um filtro passa-baixa para retirar a influência nas curvas dos termos de curto-período.

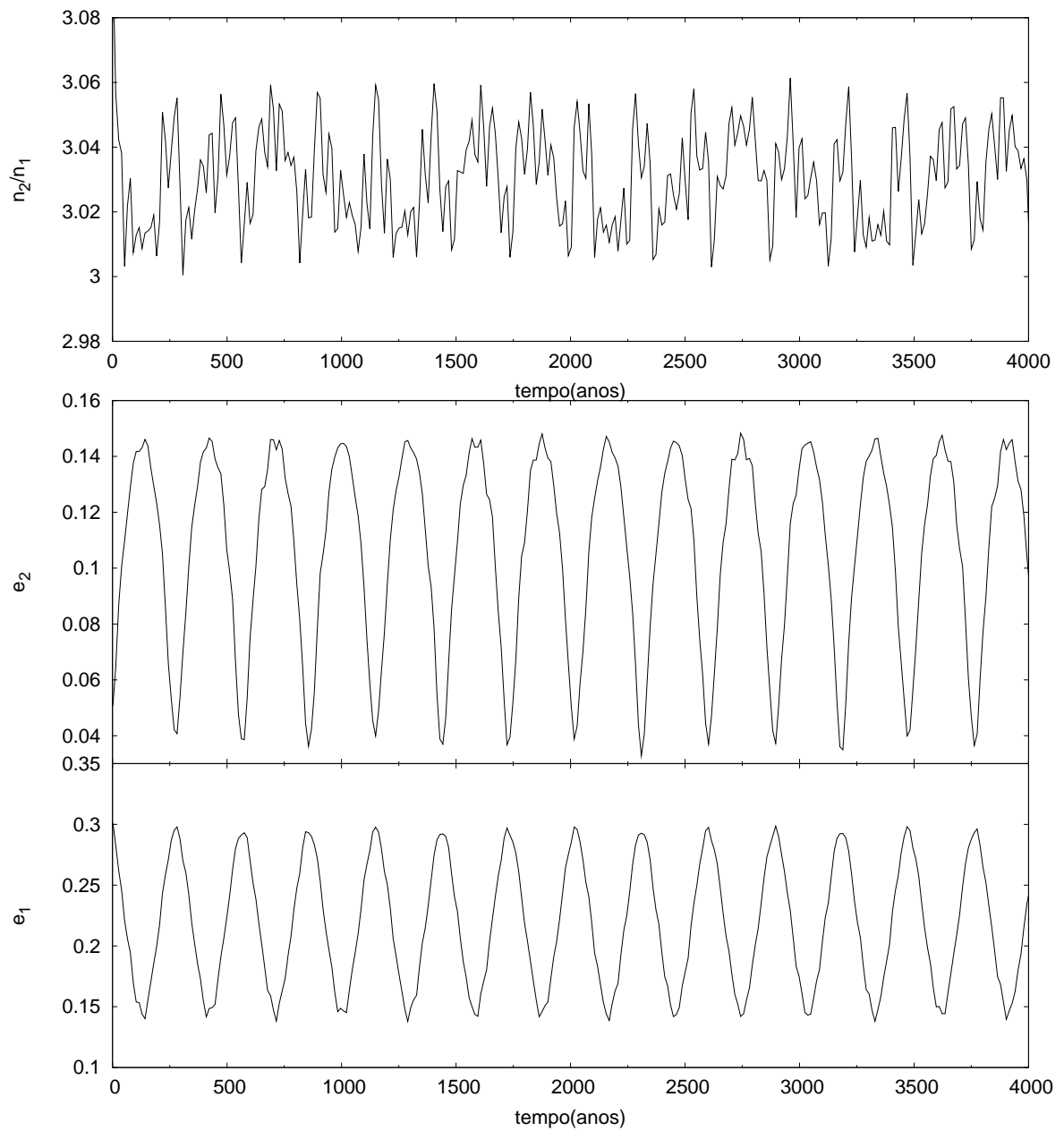


Figura 8.5: Excentricidades e razão dos movimentos médios em função do tempo obtidas através da integração numérica utilizando-se o Radau 15. Notamos a oscilação das excentricidades quase à mesma frequência para os dois planetas.

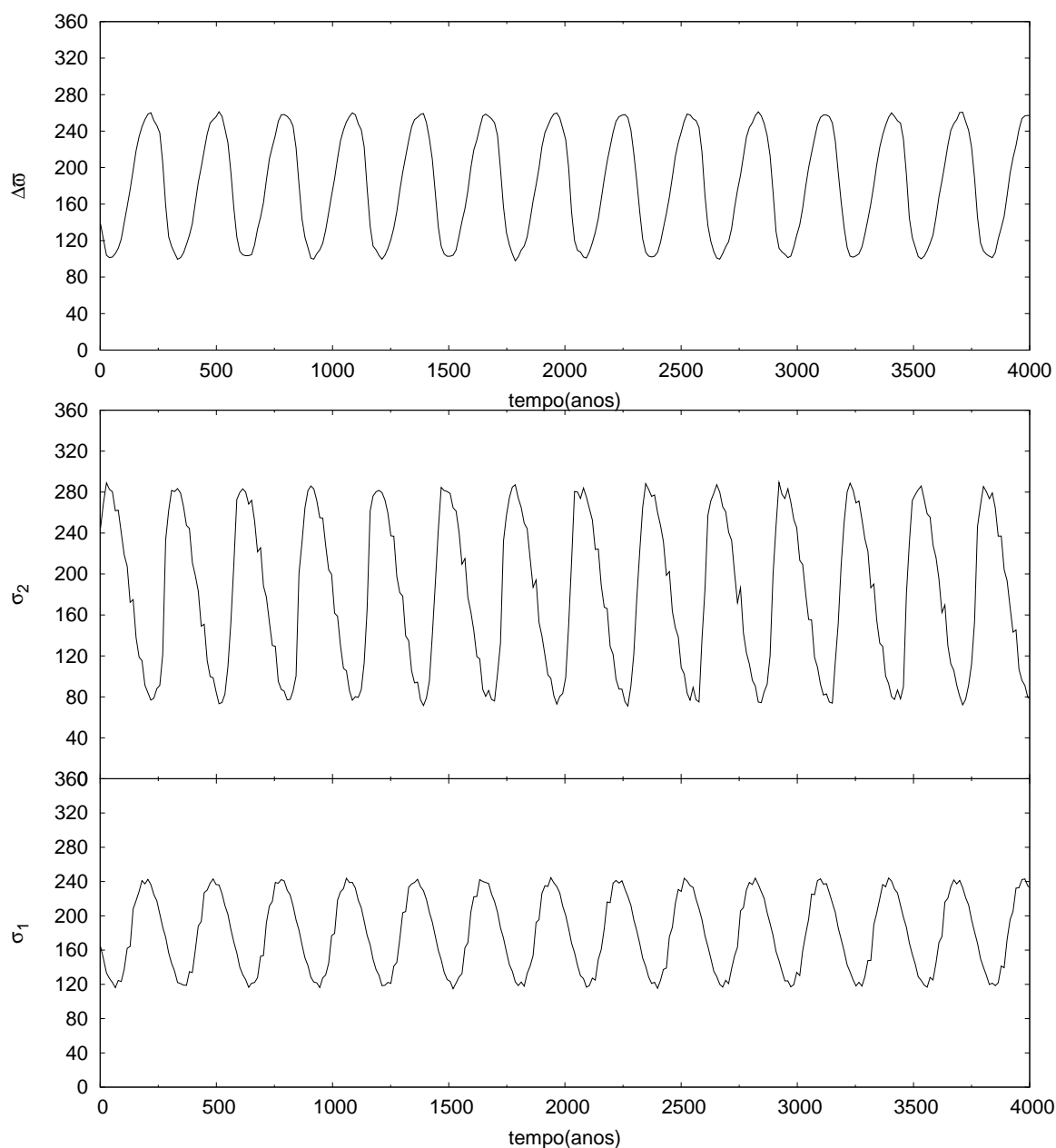


Figura 8.6: Variação temporal dos ângulos  $\Delta\varpi$ , o ângulo ressonante  $\sigma_2$  e  $\sigma_1$  obtidos pelas integração numérica utilizando-se o Radau 15. Observamos que todos os ângulos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\Delta\varpi$  oscilam em torno de  $180^\circ$ . O que o insere dentro da ressonância de movimentos médios 3:1, com ACR em  $(\pi, \pi)$ .

Analisando os gráficos acima, vemos que o sistema HD60532 situa-se no interior da ressonância de movimentos médios 3:1 devido ao fato dos ângulos ressonantes, assim como o ângulo  $\Delta\varpi$  librarem em torno do ângulo de  $180^\circ$ . Notamos também a alta amplitude da libração para o ângulo  $\sigma_2$  que chega a ser de  $100^\circ$ . Com estes resultados em mão,

implementamos então o gráfico referente à curva paramétrica, que corresponde à energia do sistema em função do parâmetro  $\delta$  de proximidade com a ressonância já estudado. Os dados utilizados seguem os descritos no capítulo 5, e encontramos o gráfico observando na figura 8.3

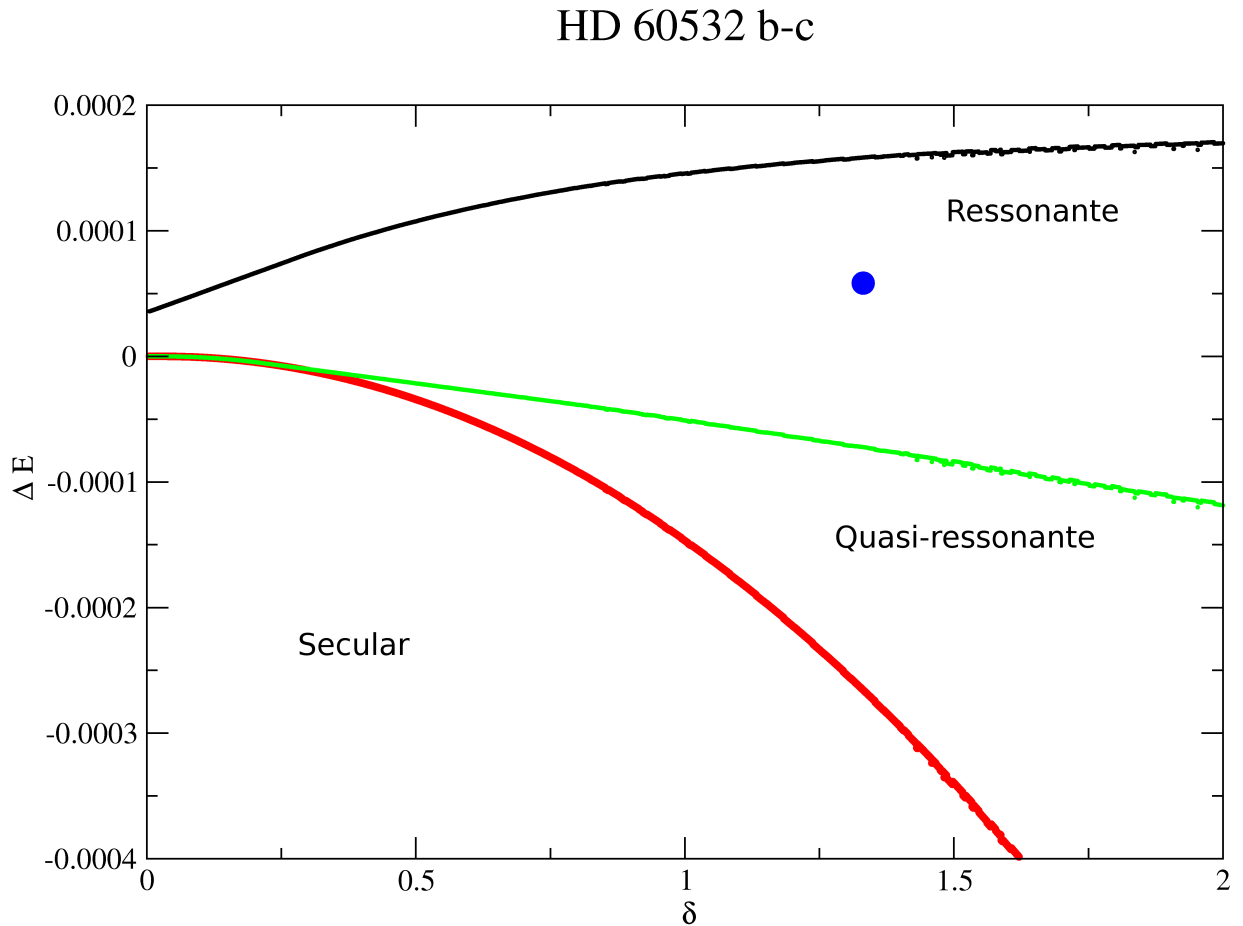


Figura 8.7: Curva Paramétrica para o sistemas HD60532 b-c. O sistema encontra-se imerso dentro da região ressonante. O valor  $\Delta E$  corresponde ao valor da energia calculado menos a energia da separatriz para o Hamiltoniano Secular.

Observando o gráfico acima, podemos confirmar claramente que o sistema encontra-se imerso na ressonância. Foram utilizados os dados obtidos em Laskar e Correia (2009) que se encontram na tabela 5.3. Notamos também o quão larga é a região ressonante para o sistema se em comparação com o sistema Saturno-Urano. O que implica em uma maior estabilidade do mesmo, que seria tema de estudos futuros. Os resultados obtidos através

da integração utilizando o Radau 15, conferem então com a construção da nossa curva paramétrica.

## Conclusões

Neste capítulo formalizamos os resultados obtidos e os interpretamos, e em seguida observamos as perspectivas futuras do trabalho.

Focamos nosso trabalho principalmente no estudo da dinâmica secular dos sistemas estudados. Mais especificamente em sistemas próximos à ressonância 3:1. Fizemos a modelagem dos sistemas construindo primeiramente o Hamiltoniano planar médio dos mesmos através da expansão em elementos orbitais da função perturbadora, omitindo os termos de curto período, analisando os termos seculares e ressonantes, ambos de primeira ordem, observamos suas soluções especiais e fizemos o estudo das condições iniciais e os tipos de movimento, construindo as curvas de energia. Por fim, implementamos o plano paramétrico comparando-os às integrações numéricas dos sistemas para avaliar em que regime dinâmico os sistemas se encontram; Se secular, quasi-ressonante ou ressonante.

### 9.1 Principais Resultados

O resultado inicial, ao se analisar as soluções especiais para o Hamiltoniano contendo apenas seus termos seculares, constituiu-se do fato de apresentarem os mesmos tipos de solução, com os valores de  $\Delta\varpi = 0$  ou  $\pi$ , para um movimento estacionário. Com dois pares de solução para um  $H_{sec} > 0$  e apenas um par para  $H_{sec} < 0$ . Isto se deve pelo fato de observamos as soluções gerais para suas equações de movimento, que são as mesmas para os três sistemas, dado que encontram-se próximos à ressonância 3:1.

Os resultados obtidos para cada sistema separadamente encontram-se divididos em suas respectivas seções, a seguir:



### 9.1.1 55 Cnc b-c

Com a modelagem aplicada ao sistema 55 Cnc b-c, chegamos às seguintes conclusões:

1. Conforme visto no capítulo 6, o domínio do movimento para o planeta interno ocorre no Modo II de movimento, enquanto que para o planeta externo, ocorre no Modo I.
2. As construções das curvas de nível são eficazes no que implica a observação dos regimes dinâmicos para cada valor de  $\delta$ .
3. O sistema possui valor  $\delta = 0.6731$  e  $\Delta E = -5.59561^{-9}$ , o que o configura na região secular, bastante próxima à ressonante, conforme a figura 6.7. Isso concorda com as integrações que fizemos, onde não observamos a libração de nenhum dos ângulos ressonantes. E também explica porque a determinação se estão ou não em ressonância 3:1 vem mudando conforme as correções de suas configurações iniciais citepji2003,(Fischer et al., 2008).

### 9.1.2 Saturno-Urano

Os resultados obtidos para o sistema Saturno-Urano foram:

1. O domínio do movimento para Saturno ocorreu no Modo II de movimento, e para Urano no Modo I, da mesma maneira que o sistema 55 Cnc b-c.
2. A construção das curvas de nível do Hamiltoniano são bastante eficazes no que diz respeito a observar como se comportam os regimes dinâmicos utilizando o parâmetro de proximidade com a ressonância  $\delta$ .
3. Com a construção do plano paramétrico, encontramos que os valores  $\delta = 0.02023$  e  $\Delta E = 2.022 \times 10^{-8}$ . O que o coloca na posição quasi-ressonante. Comparando com as integrações obtidas, notamos que o sistema possui um dos seus ângulos ressonantes oscilando em torno de zero. Um estudo mais profundo se faz necessário para classificar o sistema.

### 9.1.3 HD 60532 b-c

Os principais resultados para o sistema HD 60532 b-c foram:

1. O domínio do movimento para o planeta interno ocorre no Modo I de movimento, enquanto que para o planeta externo ocorre par ao Modo II, diferentemente dos dois sistemas estudados. Isto ocorre devido à razão entre as massas de HD 60532 b-c satisfazer a condição  $m_2/m_1 > 1$ , enquanto os outros sistemas satisfazem  $m_1/m_2 < 1$ .
2. A construção das curvas de nível mostrou-se eficaz para entender quais os regimes possíveis para um determinado valor de  $\delta$ , e entender como os regimes bifurcam com sua variação.
3. Com a construção do plano paramétrico do sistema, encontramos os valores  $\delta = 1.33133$  e  $\Delta E = 5.8283e - 5$ . O que o coloca no interior da região ressonante. O que é confirmado com as integrações que fizemos utilizando o integrador Radau 15.

## 9.2 Questões não Resolvidas e Perspectivas Futuras

A descoberta de um ângulo oscilante para o sistema Saturno-Urano, foi algo não esperado. Uma vez que a razão dos períodos entre os dois figura abaixo de 3, (oscila em torno de 2.85), um estudo mais aprofundado do mesmo faz-se necessário. A sua classificação como quasi-ressonante, segundo a construção do plano paramétrico é outra evidência que fez-nos questionar sua classificação.

A posição de 55 Cnc b-c como estando na região secular, e não quasi-ressonante, foi outro resultado que surpreendeu-nos, pois esperava-se, devido a razão dos seus períodos figurar em torno de 3.017, que observássemos o mesmo em regime quasi-ressonante. Porém, de acordo com nosso plano paramétrico, obsevamo-lo próximo à região ressonante, contudo, com um valor de  $\delta$  abaixo do valor mínimo para o qual a região é definida. Isto pode se dar devido à limitação da definição da região quasi-ressonante, apenas para valores de  $\delta$  nos quais observamos na curva de nível a existência de um mínimo.

Podemos aprofundar o trabalho em maneira a estudar se uma definição para uma região quasi-ressonante é possível para valores de  $\delta$  pequenos o suficiente para que não haja a bifurcação do ponto-de-sela em centro e ponto-de-sela, conforma observamos na construção das curvas de nível.



## Referências Bibliográficas

- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apes Alignment and Asymmetric Stationary Solutions, *ApJ*, 2003, vol. 593, p. 1124
- Boquet F., Developpement de la fonction perturbatrice : calcul des termes DU huitie ME ordre, *Annales de l'Observatoire de Paris*, 1889, vol. 19, p. B1+
- Brouwer D., Clemence G. M., *Methods of celestial mechanics*, 1961
- Butler R. P., Marcy G. W., Williams E., Hauser H., Shirts P., Three New "51 Pegasi-Type" Planets, *ApJ*, 1997, vol. 474, p. L115+
- Callegari N., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Dynamics of Two Planets in the 3/2 Mean-motion Resonance: Application to the Planetary System of the Pulsar PSR B1257+12, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, vol. 94, p. 381
- Callegari Jr. N., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, vol. 89, p. 201
- Chebotaiev G. A., *Analytical and numerical methods of celestial mechanichs*, 1967
- Danby J. M. A., *Fundamentals of celestial mechanics*, 1988
- Dawson R. I., Fabrycky D. C., Radial velocity planets de-aliased. A new, short period for Super-Earth 55 Cnc e, *ArXiv e-prints*, 2010

- Desort M., Lagrange A., Galland F., Beust H., Udry S., Mayor M., Lo Curto G., Extrasolar planets and brown dwarfs around A-F type stars. V. A planetary system found with HARPS around the F6IV-V star HD 60532, *A&A*, 2008, vol. 491, p. 883
- Everhart E., An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985,, p.185 , 1985, p. 185
- Ferraz-Mello S., ed., 2007 *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library*
- Ferraz-Mello S., Tsuchida M., Klafke J. C., On symmetrical planetary corotations, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1993, vol. 55, p. 25
- Fischer D. A., Marcy G. W., Butler R. P., Vogt S. S., Laughlin G., Henry G. W., Abouav D., Peek K. M. G., Wright J. T., Johnson J. A., McCarthy C., Isaacson H., Five Planets Orbiting 55 Cancri, *ApJ*, 2008, vol. 675, p. 790
- Goździewski K., Maciejewski A. J., The Taylor Series Method for the Problem of the Rotational Motion of a Rigid Satellite, *Ap&SS*, 1995, vol. 232, p. 167
- Guidorizzi H. L., *Um Curso de Cálculo, Volume 2* 5a. edn. LTC Rio de Janeiro, 2001
- Hagihara Y., *Celestial mechanics. Vol.1: Dynamical principles and transformation theory*, 1970
- Ji J., Kinoshita H., Liu L., Li G., Could the 55 Cancri Planetary System Really Be in the 3:1 Mean Motion Resonance?, *ApJ*, 2003, vol. 585, p. L139
- Laskar J., Correia A. C. M., HD 60532, a planetary system in a 3:1 mean motion resonance, *A&A*, 2009, vol. 496, p. L5
- Le Verrier U., *Recherches astronomiques: Chapitre IV. - Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes.*, *Annales de l'Observatoire de Paris*, 1855, vol. 1, p. 258

- Lemaitre A., High-order resonances in the restricted three-body problem, *Celestial Mechanics*, 1984, vol. 32, p. 109
- Marcy G. W., Butler R. P., Fischer D. A., Laughlin G., Vogt S. S., Henry G. W., Pourbaix D., A Planet at 5 AU around 55 Cancri, *ApJ*, 2002, vol. 581, p. 1375
- Mayor M., Queloz D., A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 1995, vol. 378, p. 355
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, vol. 94, p. 411
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, *Icarus*, 2001a, vol. 149, p. 357
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets, *AJ*, 2001b, vol. 122, p. 474
- Michtchenko T. A., Malhotra R., Secular dynamics of the three-body problem: application to the  $\nu$  Andromedae planetary system, *Icarus*, 2004, vol. 168, p. 237
- Murray A., Dermott B., *Solar System Dynamics*. Edicao. Cidade: Cambridge University Press, 2001, 100 p.
- Murray C. D., A note on Le Verrier's expansion of the disturbing function, *Celestial Mechanics*, 1985, vol. 36, p. 163
- Poincaré H., *Revue des publications astronomiques. Sur les planètes du type d'hécube*, *Bulletin Astronomique, Serie I*, 1902, vol. 19, p. 289
- Schubart J., Special cases of the restricted problem of three bodies. In *The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems*, vol. 25 of IAU Symposium, 1966, p. 187
- Strogatz S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000

Tittemore W. C., Wisdom J., Tidal evolution of the Uranian satellites. I - Passage of Ariel and Umbriel through the 5:3 mean-motion commensurability, *Icarus*, 1988, vol. 74, p. 172

Victor Hugo da Cunha Oliveira V., *Caracterização dos Sistemas Múltiplos de Planetas Extrassolares*, São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010, Dissertação de Mestrado, 192 p.

Wisdom J., A Neptune-sized Planet in the  $\rho^1$  Cancri System. In *Bulletin of the American Astronomical Society* , vol. 37 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, 2005, p. 525

Zhou L. Y., Lehto H. J., Zheng J. Q., The 3:1 Resonance in the 55 Cancri. In *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems* , vol. 316 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 2004, p. 155

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)