UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Problema de Poincaré para folheações holomorfas em $\mathbb{P}^2$

Magali Aparecida Medeiros Dias

Orientador : Prof. Rogerio Santos Mol

Belo Horizonte, 24 de Março de 2010

Agradecimentos

A Deus.

À minha família pelo apoio.

Ao meu companheiro Ildeu pela cumplicidade, compreensão e incentivo.

Ao meu orientador pela preciosa colaboração e profissionalismo.

A todos aqueles que me incentivaram de alguma forma.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar dois resultados que dizem respeito ao Problema de Poincaré em folheações holomorfas. Seja uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ e uma curva algébrica S invariante por $\mathcal{F}$. O problema considerado na dissertação é a relação entre o grau de uma folheação $\mathcal{F}$ e o grau da curva S, com equação reduzida. Uma questão que surge naturalmente é: podemos cotar o grau de S em termos do grau de $\mathcal{F}$? De fato, não é possível em geral, como mostraremos mais adiante.

Contudo, se colocarmos condições sobre a curva S, podemos cotar o grau da curva S em termos do grau da folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$. O Teorema que estabelece essa cota será demonstrado em detalhes neste trabalho com base no artigo de Dominique Cerveau e Alcides Lins Neto, intitulado *Holomorphic foliations in* $\mathbb{CP}(2)$ *having a invariant algebraic curve.*

Uma outra perspectiva analisada foi a colocação de restrições sobre as singularidades de $\mathcal{F}$ em S e não mais sobre a curva S, como podemos ver no teorema enunciado no artigo de M.M. Carnicer, intitulado *The Poincaré problem in the non-dicritical case*, sendo dada uma demonstração mais completa neste trabalho.

O trabalho se divide em 6 capítulos. O Capítulo 1 contém resultados e conceitos que caracterizam as Folheações Holomorfas. O Capítulo 2 trata de resultados concernentes à propriedade de Divisão Relativa, e seus desdobramentos serão explicitados no Capítulo 3. No Capítulo 4 encontramos a demonstração do Teorema apresentado no trabalho de Cerveau & Lins Neto. O Capítulo 5 descreve aplicações do referido teorema para as folheações de Poincaré. E, por fim, no Capítulo 6 temos a demonstração do teorema enunciado no artigo de Carnicer.

Capítulo 1

Folheações Holomorfas

Neste capítulo, vamos introduzir alguns fatos básicos sobre as folheações holomorfas. Em seguida, daremos uma demonstração para a proposição que nos fornece uma expressão para o gênero topológico de uma curva. Ao final, usaremos esse resultado para provar o teorema que relaciona o grau de uma folheação e o grau de uma curva.

Definição 1.1. Uma *folheação holomorfa* $\mathcal{F}$ não singular de dimensão k em uma variedade complexa M de dimensão $n \geq 2$ é definida por:

a) uma família $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de abertos em M;

b) biholomorfismos $\phi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$ para cada $\alpha \in A$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem;

c) se $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos que $\phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$ é um mapa da forma

$$(z, w) \to \phi_{\alpha\beta}(z, w) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z, w),$$

onde $\phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w)) \in \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$.

Considerando a parte b) da definição, temos uma decomposição de U_α em variedades de dimensão k da forma $\phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \omega_0)$, onde $\omega_0 \in \mathbb{D}^{n-k}$, denominadas *placas*. Se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$ são placas, obtemos pela parte b) da definição as seguintes relações nas interseções dos abertos U_α: ou $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$ ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$. Se existem placas $P_1, ..., P_n$, com $p \in P_1$ e $q \in P_n$, tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., n-1$, então temos a relação de equivalência $p \sim q$. A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é denominada *folha*.

Temos as seguintes observações:

I) Toda folheação de dimensão um é induzida localmente por um campo de vetores holomorfo. Seja M uma variedade complexa de dimensão n e seja X um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em M. Consideremos $Sing(X) = \{p \in M; X(p) = 0\}$, o conjunto singular de X. O Teorema do Fluxo Tubular (ver [LS]) implica que X gera uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão um no aberto $N = M \setminus Sing(X)$. Além disso, as folhas de $\mathcal{F}$ são as trajetórias de X em N. De fato, o Teorema do Fluxo Tubular pode ser enunciado da seguinte forma: para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe aberto $U \subset M$ em $p \in M$ e um sistema de coordenadas holomorfo $(\phi = (z_1, ...z_n), U)$, onde $\phi : U \to \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{(n-1)}$ e no qual $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$. Como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial $\frac{dz}{dt} = X(z)$ e $X_{|U} = \frac{\partial}{\partial z_1}$, vemos que as trajetórias de X em U são da forma $\phi^{-1}(A \times \omega)$ com $\omega \in B$. Assim, do Teorema do Fluxo Tubular e da definição acima, obtemos uma folheação de dimensão um, cujas folhas são trajetórias de X.

II) Toda folheação de codimensão um é induzida localmente por uma 1-forma holomorfa integrável. Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma não identicamente nula em M. Seja $Sing(\omega) = \{p \in M; \omega_p(v) = 0\}$, conjunto singular de ω. Temos que ω induz uma distribuição de hiperplanos Ω, definido por $\Omega_p = ker(\omega_p) = \{v \in T_pM; \omega_p(v) = 0\}$, com $p \in M \setminus Sing(\omega)$. O Teorema de Frobenius (ver [LS]) afirma que uma 1-forma holomorfa é integrável se e somente se $\omega \wedge d\omega = 0$. Isso significa que existe uma folheação de codimensão um em $M \setminus Sing(\omega)$ cujo espaço tangente à folha em p é dado por $ker(\omega_p)$. Note que em dimensão 2 toda forma ω é integrável.

Definição 1.2. Uma *folheação holomorfa singular* de dimensão k, onde $1 \leq k \leq n-1$, em uma variedade complexa M é uma folheação de dimensão k em $M \setminus Sing(\mathcal{F})$, onde $Sing(\mathcal{F})$ é um conjunto analítico de codimensão pelo menos dois. Os pontos de $Sing(\mathcal{F})$ são denominados pontos singulares de $\mathcal{F}$. Os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de pontos regulares.

Definição 1.3. Sejam $\mathcal{F}$ folheação na variedade complexa M, induzida por uma 1-forma integrável ω e $f \in \mathcal{O}(M)$ uma função holomorfa não constante. O subconjunto analítico $S = \{f = 0\} \subset M$ de codimensão um e não vazio é *invariante* por $\mathcal{F}$, se cada componente conexa de $S \backslash Sing(\mathcal{F})$ está contida em uma folha de $\mathcal{F}$. Localmente, temos que o germe de curva $\{f = 0\}$ é *invariante* por $\mathcal{F}$ se, e somente se, existe um germe de 2-forma holomorfa θ tal que $\omega \wedge df = f\theta$.

Definição 1.4. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão um. Uma *separatriz* de $\mathcal{F}$ em $p \in Sing(\mathcal{F})$ é um germe de curva analítica invariante por $\mathcal{F}$ e passando por p.

Agora vamos discutir alguns fatos básicos sobre folheções de dimensão um no plano complexo projetivo $\mathbb{P}^2$. Seja $n \geq 0$ um inteiro e denote por x, y, z as coordenadas homogêneas do plano projetivo complexo. Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão um em $\mathbb{P}^2$ é definida, em coordenadas homogêneas, por uma 1-forma

$$\widetilde{\omega} = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz,$$

onde A, B, C são polinômios homogêneos de grau $n + 1$ que satisfazem a identidade de Euler $xA + yB + zC = 0$. Suponhamos que A, B e C não têm fatores em comum. O conjunto singular de $\mathcal{F}$, $Sing(\mathcal{F})$, corresponde aos zeros em comum de A, B e C e satisfaz $\mathrm{codim}(Sing(\mathcal{F})) \geq 2$. Seja U_z o conjunto aberto de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ definido por $z \neq 0$ e seja ω a desomogeinização de $\tilde{\omega}$ com relação a z. Restringindo a folheação de $\mathbb{P}^2$ definida por $\tilde{\omega}$ a U_z, obtemos uma folheação de $\mathbb{C}^2$ definida por ω. Reciprocamente, se $\pi_z : U_z \to \mathbb{C}^2$, é um mapa dado por $\pi_z[x : y : z] = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, então $\tilde{\omega} = z^k \pi_z^*(\omega)$, onde k é escolhido de forma a eliminar os pólos de $\pi_z^*(\omega)$.

Neste trabalho iremos considerar uma folheação homolorfa $\mathcal{F}$ em $\mathbb{C}^2$ descrita de modo equivalente, da seguinte forma:

a) Um campo vetorial $\mathbf{v} = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$ que representa $\mathcal{F}$ no sistema de coordenadas afins $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$, sendo que o conjunto de todas as singularidades de $\mathcal{F}$ é dado por $P = Q = 0$. Ou a 1-forma dual desse campo, dada por $\widetilde{\omega} = P(X, Y)dY - Q(X, Y)dX$;

b) Tomemos $\widetilde{\omega}$ como em a) com $\max(\mathrm{grau}(P), \mathrm{grau}(Q)) = n$. Seja $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2$. Façamos $\pi^*\widetilde{\omega}$, ou seja $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$, e obtemos $\pi^*\widetilde{\omega} = z^{-k}\omega$ onde ω é holomorfo e k é escolhido de forma que ω não seja divisível por z. Vale lembrar que ω satisfaz a condição de integrabilidade, $\omega \wedge d\omega = 0$, pois está em uma variedade de dimensão dois.

Seja um sistema de coordenadas afins, por meio do qual escrevemos $\mathcal{F}$ como as soluções de $P(X,Y)dY - Q(X,Y)dX = 0$. Seja L uma reta em $\mathbb{P}^2$ que não seja invariante por $\mathcal{F}$. Dado $p \in L$, dizemos que p é ponto de tangência de L e $\mathcal{F}$, se obedecidas uma das duas condições:

i) $p \in Sing(\mathcal{F})$;

ii) $p \notin Sing(\mathcal{F})$ e os espaços tangentes de L e de $\mathcal{F}$ em p coincidem.

Definição 1.5. Sejam $\mathcal{F}$ folheação de dimensão um em uma variedade complexa M e $p \in \mathcal{F}$. A *multiplicidade algébrica* de $\mathcal{F}$ em p é a multiplicidade em p de algum campo holomorfo que induz $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de p. Denotamos a *multiplicidade algébrica* de $\mathcal{F}$ em p por $m_p(\mathcal{F})$.

Agora, seja a folheação $\mathcal{F}$ representada pela 1-forma $\omega = P(X,Y)dY - Q(X,Y)dX$. Seja a curva L parametrizada como $\varphi(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, sendo $p = \varphi(0)$. Fazendo $X = a_0 + at, Y = y_0 + bt$ e substituindo na equação que determina ω obtemos

$$r_l(t) = bP(\varphi(t)) - aQ(\varphi(t)).$$

Note que p é ponto de tangência de L e $\mathcal{F}$ se, e somente se, 0 é raiz de $r_l(t)$. Se $\widetilde{\phi} = (x_0 + a\widetilde{\phi}_1(t), y_0 + b\widetilde{\phi}_1(t))$ é outra parametrização com $\widetilde{\phi}_1'(0) \neq 0$ então,

$$\widetilde{r}_l = \widetilde{\phi}_1'(t)[bP(\widetilde{\phi}(t)) - aQ(\widetilde{\phi}(t))].$$

Assim, a *multiplicidade da tangência* de $\mathcal{F}$ com L, denotada por $\#(\mathcal{F}, L) = \sum_{p\in L} \#(\mathcal{F}, L, p)$, onde $\#(\mathcal{F}, L, p)$ é a multiplicidade de $\mathcal{F}$ com L em $p \in L$, é definida como a multiplicidade de 0 como raiz de r_l e não depende da parametrização de L.

Lema 1.1. *Valem as seguintes afirmações:*

(a) A definição de grau de $\mathcal{F}$ como $\#(\mathcal{F}, L)$, não depende de L, sendo L reta projetiva não invariante por $\mathcal{F}$.

(b) Suponha que $\mathcal{F}$ seja expressa em um sistema de coordenadas afins por $P(X,Y)dY - Q(X,Y)dX = 0$, onde $d = \max(\mathrm{grau}(P), \mathrm{grau}(Q))$. Então, $\mathrm{grau}(\mathcal{F}) = d$ ou $\mathrm{grau}(\mathcal{F}) = d-1$. Se P_d e Q_d são partes homogêneas de grau d, respectivamente, de P e Q, então, são equivalentes:

(i) grau$(\mathcal{F}) = d$*;*

(ii) $yP_d(x,y) - xQ_d(x,y) \not\equiv 0$*;*

(iii) A reta no infinito não é invariante por $\mathcal{F}$*.*

Demonstração. Vamos demonstrar primeiro a parte *(ii)* $\Longleftrightarrow$ *(iii)* em *(b)* do lema. Em $P(X,Y)dY - Q(X,Y)dX$, façamos a seguinte mudança de variáveis: $X = \frac{1}{W}$ e $Y = \frac{Z}{W}$, onde $W = 0$ representa a reta no infinito L_∞. Então, obtemos

$$P\left(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}\right)\frac{WdZ - ZdW}{W^2} - Q\left(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}\right)\frac{dW}{W^2} = 0. \tag{1.1}$$

Seja $d = \max(\text{grau}(P), \text{grau}(Q))$. Multiplicando $P\left(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}\right)$ e $Q\left(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}\right)$ por W^d temos que

$$\begin{cases} W^d P\left(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}\right) = \widetilde{P}(Z,W) \\ W^d Q(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}) = \widetilde{Q}(Z,W) \end{cases}.$$

Substituindo as relações acima em (1.1), obtemos

$$W^{-d-2}(\widetilde{P}(Z,W)WdZ - (Z\widetilde{P}(Z,W) - \widetilde{Q}(Z,W))dW) = 0.$$

Para eliminar o pólo, multiplicamos a equação acima por W^{d+2}, resultando em

$$W\widetilde{P}(Z,W)dZ - (Z\widetilde{P}(Z,W) - \widetilde{Q}(Z,W))dW = 0. \tag{1.2}$$

Seja $R_0(Z) = ZP_d(1,Z) - Q_d(1,Z)$. Podemos escrever

$$Z\widetilde{P}(Z,W) - \widetilde{Q}(Z,W) = R_0(Z) + R_1(Z)W + ... + R_dW^d. \tag{1.3}$$

Tomemos

$$f(X,Y) = YP_d(X,Y) - XQ_d(X,Y).$$

Vamos considerar dois casos: $f \equiv 0$ e $f \not\equiv 0$.

Primeiro caso. Se $f \equiv 0$, temos que $YP_d(X,Y) - XQ_d(X,Y) = 0$. Dividindo essa equação por X^{d+1} resulta em

$$\frac{Y}{X}P_d\left(1, \frac{Y}{X}\right) - Q_d\left(1, \frac{Y}{X}\right) \equiv 0.$$

Fazendo $X = \frac{1}{W}$ e $Y = \frac{Z}{W}$, então obtemos da equação anterior

$$ZP_d(1, Z) - Q_d(1, Z) \equiv 0,$$

ou seja, $R_0(Z) \equiv 0$. Assim, de (1.2), podemos escrever

$$Z\widetilde{P}(Z, W) - \widetilde{Q}(Z, W) \equiv WR(Z, W), \tag{1.4}$$

onde $R(Z, W)$ é um polinômio. Substituindo a expressão (1.4) em (1.2), temos

$$W(\widetilde{P}(Z, W)dZ - R(Z, W)dW) = 0.$$

Ao dividirmos essa expressão por W, obtemos $\widetilde{P}(Z, W)dZ - R(Z, W)dW = 0$. Observe que W não é fator de $\widetilde{P}(Z, W)$, pois $ZP_d(1, Z) \equiv Q_d(1, Z) \neq 0$ e $d = \max(\mathrm{grau}(P), \mathrm{grau}(Q))$. Isso implica que $W = 0$ não é uma solução algébrica de $\mathcal{F}$, ou seja, L_∞ não é $\mathcal{F}$ invariante.

Segundo caso. Se $f \not\equiv 0$, W não é fator de $Z\widetilde{P}(Z, W) - \widetilde{Q}(Z, W)$. De fato, como $f \not\equiv 0$,

$$R_0(Z) = ZP_d(1, Z) - Q_d(1, Z) \not\equiv 0,$$

ou seja, $Z\widetilde{P}(Z, W) - \widetilde{Q}(Z, W) = R_0(Z) + WR(Z, W)$. Portanto, o fator W na primeira parcela de (1.2) não pode ser cancelado. Isso implica que W é uma solução algébrica de $\mathcal{F}$. Provamos *(ii)* $\Longleftrightarrow$ *(iii)* em *(b)*.

Quanto à parte *(a)*, suponha L não invariante por $\mathcal{F}$. Fazendo mudança de variáveis podemos supor que $L \cap \mathbb{C}^2 = (Y = 0)$. Nesse caso, os pontos de tangência de $\mathcal{F}$ e L serão dados pela equação $r_l(t) = -Q(t, 0)$. Então,

$$\#(\mathcal{F}, L) = \mathrm{grau}(Q(t, 0)) + \#(\mathcal{F}, L; L \cap L_\infty). \tag{1.5}$$

Se mudarmos as coordenadas, fazendo $X = \frac{1}{W}$ e $Y = \frac{Z}{W}$, a parametrização de L passará a ser $0 = Y = \frac{Z}{W}$ e $X = \frac{1}{W} = t$, resultando, respectivamente, em $Z = 0$ e $W = \frac{1}{t} = s$. Para $L \cap L_\infty$ teremos que

$$L \cap L_\infty = Z = W = 0.$$

Vamos analisar dois casos, lembrando que $f = YP_d(X, Y) - XQ_d(X, Y)$.

Primeiro caso. $f \not\equiv 0$. Como a parametrização de L é dada por $Z = 0$ e $W = s$, temos que a igualdade $W^d Q(\frac{1}{W}, \frac{Z}{W}) = \widetilde{Q}(Z, W)$ pode ser reescrita como

$$s^d Q(\frac{1}{s}, 0) = \widetilde{Q}(0, s). \tag{1.6}$$

Então, $\#(\mathcal{F}, L; L \cap L_\infty)$ é a multiplicidade de $s = 0$, como raiz de $\widetilde{r}_l(s)$, sendo $\widetilde{r}_l(s) = \widetilde{Q}(0, s) = s^d Q(\frac{1}{s}, 0)$. Assim, a multiplicidade de $s = 0$ como raiz de $\widetilde{r}_l$ é $d - \text{grau}(Q)$. Concluímos que $\#(\mathcal{F}, L) = d + \text{grau}(Q) - \text{grau}(Q) = d$, por (1.5).

Segundo caso. $f \equiv 0$. Como vimos na demonstração da parte $(ii) \iff (iii)$ em *(b)*, $\mathcal{F}$ é induzida por $\widetilde{P}(Z, W)dZ - R(Z, W)dW = 0$. Considerando que a parametrização de L é dada por $Z = 0$ e $W = s$, concluímos que $\#(\mathcal{F}, L; L \cap L_\infty)$ é a multiplicidade de $s = 0$ como raiz de $R(0, s)$. De (1.4) temos que

$$-\widetilde{Q}(0, s) = sR(0, s),$$

ou seja,

$$-s^{-1}\widetilde{Q}(0, s) = R(0, s).$$

De (1.6) temos que $-s^{-1}\widetilde{Q}(0, s) = -s^{d-1}Q(\frac{1}{s}, 0)$ e daí concluímos que

$$R(0, s) = -s^{d-1}Q(\frac{1}{s}, 0).$$

Portanto, temos que a multiplicidade de $s = 0$ é $d - 1 - \text{grau}(Q)$. Logo $\#(\mathcal{F}, L) = d - 1$ por (1.5). Provamos a parte a e $(i) \Rightarrow (ii)$ em *(b)*. **C.Q.D.**

Um dos problemas que iremos considerar é a relação entre o grau de uma curva algébrica S invariante pela folheação $\mathcal{F}$ e o grau de $\mathcal{F}$. Uma questão que surge naturalmente é: podemos cotar o grau de S em termos do grau de $\mathcal{F}$? Não é possível em geral, como mostra o exemplo do campo vetorial em $\mathbb{C}^2$

$$\mathbf{v} = pX\frac{\partial}{\partial X} + qY\frac{\partial}{\partial Y},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$. $\mathbf{v}$ tem como forma dual

$$\omega = -qYdX + pXdY$$

e $f = Y^p - X^q = 0$ como separatriz. De fato, ao calcularmos df temos que

$$df = pY^{p-1}dY - qX^{q-1}dX.$$

Multiplicando a expressão anterior por Y obtemos

$$Ydf = pY^p dY - qX^{q-1}YdX. \tag{1.7}$$

Como $f = Y^p - X^q = 0$, a expressão em (1.7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Ydf &= p(f + X^q)dY - qX^{q-1}YdX \\ &= X^{q-1}(pXdY - qYdX) + pfdY \\ &= X^{q-1}\omega + pfdY. \end{aligned}$$

Então $\omega \wedge Ydf = \omega \wedge (X^{q-1}\omega + pfdY)$ e como $\omega = -qYdX + pXdY$ temos $\omega \wedge df = -fpq(dX \wedge dY)$. Concluímos que f é separatriz de ω. Note que $\mathcal{F}$ tem grau um e S pode ter grau arbitrariamente alto.

Passemos agora para mais algumas definições antes de enunciarmos um resultado interessante.

Definição 1.6. *Seja $\mathcal{O}_n$ o anel de funções holomorfas definidos em uma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^n$ e seja $I(v_1, ..., v_n)$ o ideal gerado pelas componentes de um campo $\mathbf{v}$ em $p \in \mathbb{C}^n$. Então, o número de Milnor μ do campo $\mathbf{v}$ em p é dado por*

$$\mu = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{I(v_1, ..., v_n)}.$$

O número de Milnor tem as seguintes propriedades(ver [SoMo]):

i) $\mu = 0$ se e somente se p não é ponto singular do campo $\mathbf{v}$;

ii) $0 \leq \mu \leq \infty \Leftrightarrow p$ é uma singularidade isolada do campo $\mathbf{v}$.

iii) $\mu = 1 \Leftrightarrow det\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i(p)}{\partial \mathbf{v}_j}\right)_{1\leq i,j \leq n} \neq 0$.

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n e S uma curva algébrica irredutível em $\mathbb{P}^2$ de grau m. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz. Para cada singularidade p de $\mathcal{F}$ tal que $p \in S$, e cada ramo local B de S passando por p, é associado o conceito de multiplicidade de $\mathcal{F}$ em B. Esse conceito será dado a seguir.

Definição 1.7. Seja um campo vetorial $\mathbf{v} = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$ que representa $\mathcal{F}$ em uma vizinhança B de p e uma parametrização de Puiseaux de B (ver [LS]), dada por $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^2, \varphi(0) = 0$, onde $\mathbb{D}$ é o disco centrado em $0 \in \mathbb{C}$. Definimos a multiplicidade de $\mathcal{F}$ em B, $i(\mathcal{F}, B)$ como a ordem de $\varphi_*(\mathbf{v})$ em $0 \in \mathbb{D}$.

É possível provar que a multiplicidade $i(\mathcal{F}, B)$ não depende da representação local de $\mathcal{F}$ e além disso, é topologicamente invariante (ver [CLS]).

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{F}$ folheação de grau n induzida pelo campo vetorial $\mathbf{v} = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$. Seja S uma curva irredutível em $\mathbb{P}^2$ de grau m. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz. Então, temos $2 - 2g(S) = \sum_B i(\mathcal{F}, B) - m(n-1)$ onde $g(S)$ é o gênero topológico de S e a soma é dada sobre todos os ramos locais de S, passando por singularidades de $\mathcal{F}$ em S.*

Demonstração. Seja um sistema de coordenadas afim no qual $\mathbf{v} = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$, representa $\mathcal{F}$ e S corta a linha no infinito, L_∞, transversalmente. $\mathbf{v}$ restrita a S é um campo meromorfo, tendo pólos em $S \cap L_\infty$ de ordem $n-1$. Seja $\pi : \widetilde{S} \to S$ uma resolução de S dada por explosões em pontos singulares de S. Assim, $\widetilde{S}$ é lisa e, portanto, $2 - 2g(S) = \chi(\widetilde{S})$, onde o segundo membro da equação é a característica de Euler de $\widetilde{S}$. Por sua vez, $\pi^*(\mathbf{v}_{|S}) = \widetilde{\mathbf{v}}$ é um campo vetorial meromorfo em $\widetilde{S}$. Por definição, para cada ramo passando por p, obtemos um ponto singular $p(B)$ de $\widetilde{\mathbf{v}}$ de ordem $i(\mathcal{F}, B)$. Então, cada pólo em $\widetilde{\mathbf{v}}$ tem ordem $n-1$. Esses pólos são em número de m pelo Teorema de Bezóut. Usando a Fórmula de Poincaré-Hopf, tendo o cuidado de considerar a contribuição dos pólos do campo, obtemos

$$2 - 2g(S) = \sum_B i(\mathcal{F}, B) - m(n-1).$$

C.Q.D.

Seja S uma curva em $\mathbb{P}^2$ dada por uma equação polinomial homogênea reduzida $f = 0$ e de grau m. Dizemos que uma singularidade p de S é do tipo nodal ou cruzamento normal se em uma vizinhança de p, após mudança de coordenada analítica, S é definida pela equação local $f = xy$ em p. O resultado a seguir nos dá uma cota para o grau de S em termos do grau de $\mathcal{F}$, no caso de curva irredutível com singularidades nodais.

Teorema 1.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação e seja S uma curva irredutível em $\mathbb{P}^2$, cujas singularidades são do tipo nodal. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz, tal que todos os pontos singulares de $\mathcal{F}$ em S tenham multiplicidade um. Então, $m \leq n+2$, onde m é o grau de S e n é o grau de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Já que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ em S tem multiplicidade um e S é uma curva nodal, temos que $i(\mathcal{F}, B) = 1$, para todos os ramos locais B de S que passam por pontos singulares de $\mathcal{F}$ em S. Seja k o número de pontos nodais de S. Para cada ponto nodal teremos dois ramos locais de S e, portanto, a contribuição dos pontos nodais é precisamente $2k$. Usando a fórmula da proposição anterior obtemos

$$2 - 2g(S) = 2k + l - m(n-1), \tag{1.8}$$

onde $l = \sum_B i(\mathcal{F}, B) - 2k \geq 0$ é a contribuição das singularidades de $\mathcal{F}$ sobre S que não estão em pontos nodais de S. Por outro lado, como S tem apenas k singularidades nodais, $g(S) = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - k$ (ver [GH]). Substituindo em $2 - 2g(S)$ temos

$$2 - 2\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2} - k\right) = -m^2 + 3m + 2k.$$

Então, da igualdade acima e de (1.8), encontramos

$$2k + l - m(n-1) = -m^2 + 3m + 2k$$

e assim $0 \leq l = m(n+2-m)$ o que implica que $m \leq n+2$, como queríamos provar. **C.Q.D.**

Capítulo 2

Propriedade de Divisão Relativa

Neste capítulo, vamos apresentar conceitos e resultados sobre a Propriedade de Divisão Relativa. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau n, dada em coordenadas homogêneas, por $\omega = 0$, onde $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Seja S uma curva em $\mathbb{P}^2$ determinada pela equação homogênea $f = 0$. Suponhamos que f seja reduzida e que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz.

Definição 2.1. Dizemos que ω tem a propriedade de divisão relativa (PRD) no ponto p com relação a f, se existem germes $g_p \in \mathcal{O}_p$ e $\mu_p \in \Lambda_p^1$ tais que $\omega_p = g_p df + f\mu_p$. Dizemos que ω tem PRD localmente com relação a f se ω tem a propriedade de divisão relativa em todos os pontos de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Se $\omega = gdf + f\mu$, com g polinômio homogêneo e μ 1-forma polinomial, então ω tem PRD global.

Proposição 2.1. *Se ω tem PRD localmente com relação a f, então tem PRD global.*

Demonstração. Como ω tem PRD local, seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ por polidiscos tais que

$$\omega_{|U_\alpha} = g_\alpha df + f\mu_\alpha,$$

onde $g_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ e $\mu_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha)$. Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos

$$g_\alpha df + f\mu_\alpha - g_\beta df - f\mu_\beta = 0$$

e portanto,

$$(g_\alpha - g_\beta)df = f(\mu_\beta - \mu_\alpha). \tag{2.1}$$

Como f é reduzida, da expressão anterior concluímos que f divide $(g_\alpha - g_\beta)$. Isso implica que

$$(g_\alpha - g_\beta) = h_{\alpha\beta} f, \tag{2.2}$$

para alguma função holomorfa $h_{\alpha\beta}$ definida em $U_\alpha \cap U_\beta$. Como

$$0 = g_\alpha - g_\beta + g_\beta - g_\gamma + g_\gamma - g_\alpha,$$

então, de (2.2) temos

$$0 = g_\alpha - g_\beta + g_\beta - g_\gamma + g_\gamma - g_\alpha = (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha}) f$$

e logo

$$h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0.$$

Então $h_{\alpha\beta}$ satisfaz a condição de cociclo aditivo em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Pelo Teorema de Cartan (ver [Ca]), $h_{\alpha\beta}$ pode ser escrito como $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$, onde $h_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Substituindo essa igualdade na expressão (2.2) obtemos

$$(g_\alpha - g_\beta) = (h_\beta - h_\alpha) f$$

e daí

$$g_\alpha + h_\alpha f = g_\beta + h_\beta f.$$

Definimos g em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, uma função holomorfa global, por

$$g_{|U_\alpha} = g_\alpha + h_\alpha f. \tag{2.3}$$

Pelo Teorema de extensão de Hartogs (ver [Sha]), g pode ser estendida a $\mathbb{C}^3$. Por outro lado, substituindo a expressão (2.2) na igualdade (2.1), obtemos

$$h_{\alpha\beta} df = \mu_\beta - \mu_\alpha.$$

Como $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$, então

$$(h_\beta - h_\alpha) df = \mu_\beta - \mu_\alpha$$

de onde

$$\mu_\alpha - h_\alpha df = \mu_\beta - h_\beta df$$

em $U_\alpha \cap U_\beta$. Assim, podemos definir uma 1-forma holomorfa μ em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ como

$$\mu_{|U_\alpha} = \mu_\alpha - h_\alpha df. \tag{2.4}$$

Podemos, ainda, estender μ a $\mathbb{C}^3$ como consequência do Teorema de Hartogs e assim, de (2.1), (2.3) e (2.4), podemos escrever

$$\omega = gdf + f\mu.$$

Como f e ω são homogêneos, podemos supor g e μ homogêneos, eliminando os monômios de graus não compatíveis de g e μ. **C.Q.D.**

Lema 2.1. *Sejam ω forma polinomial homogênea em $\mathbb{C}^n$ e E campo radial. Se $i_E(\omega) = 0$, então $i_E(d\omega) = (k+1)\omega$, onde k é o grau de ω.*

Demonstração. Suponhamos que $\omega = pdx_1$, onde p é homogêneo de grau k. Então, $i_E(\omega) = px_1$. Tomando a diferencial da equação anterior, temos

$$d(i_E(\omega)) = x_1 \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right) + pdx_i. \tag{2.5}$$

Como $d\omega = \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1$, obtemos

$$i_E(d\omega) = \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} x_i \right) dx_1 - \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right) x_1.$$

Da fórmula de Euler temos

$$i_E(d\omega) = kpdx_1 - \left(\sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i \right) x_1. \tag{2.6}$$

De (2.5) e de (2.6) segue que $i_E(d\omega) + d(i_E(\omega)) = (k+1)pdx_1$. Como $\omega = pdx_1$ e $i_E(\omega) = 0$, temos da expressão anterior

$$i_E(d\omega) = (k+1)\omega.$$

Como para cada monômio de ω temos $i_E(\omega) = 0$, então, por linearidade,$i_E(d\omega) = (k+1)\omega$ para $\omega \in \mathbb{C}^n$. **C.Q.D.**

Lema 2.2. *Seja* $\theta = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdx \wedge dz$ *2-forma em* $U \subset \mathbb{C}^2$ *tal que* $i_v(\theta) = 0$ *para alguma campo holomorfo não singular* v. *Então* $\theta = li_v(\Omega)$ *para algum* $l \in \mathcal{O}(U)$ *e* $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Demonstração. Seja $v = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}$. Como $i_v(\theta) = 0$ e $\theta = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdx \wedge dz$, então

$$(-Av_2 - Cv_3)dx + (Av_1 - Bv_3)dy + (Bv_2 + Cv_1)dz = 0. \tag{2.7}$$

Agora, já que $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$, então

$$i_v(\Omega) = v_1dy \wedge dz - v_2dx \wedge dz + v_3dx \wedge dy. \tag{2.8}$$

De (2.7), podemos definir l como

$$l = \frac{A}{v_3} = \frac{-C}{v_2} = \frac{B}{v_1}.$$

Substituindo essas relações em (2.8), temos que $\theta = li_v(\Omega)$. **C.Q.D.**

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau n determinada por $\omega = 0$, onde $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Seja $\mathcal{I}(\omega) = (P, Q, R)$ o ideal gerado pelas componentes de ω. Suponhamos que o conjunto de singularidades de ω tenha codimensão 2.

Proposição 2.2. *Seja* g *um polinômio homogêneo em* $\mathbb{C}^3$ *com a seguinte propriedade: para cada* $p \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ *o germe* g_p *pertence ao ideal local* $\mathcal{I}(w)_p \subset \mathcal{O}_p$ *gerado por* (P_p, Q_p, R_p). *Então,* $g \in \mathcal{I}(w)$, *isto é, existem* A, B, C *polinômios homogêneos tais que* $g = AP + BQ + CR$.

Demonstração. Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, uma cobertura de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ por abertos, tais que para cada $\alpha \in A$ temos

$$g_{|U_\alpha} = A_\alpha P + B_\alpha Q + C_\alpha R,$$

onde $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$. Definamos a 2-forma

$$\mu_\alpha = A_\alpha dy \wedge dz + B_\alpha dz \wedge dx + C_\alpha dx \wedge dy.$$

Então,

$$\omega \wedge \mu_\alpha = (Pdx + Qdy + Rdz) \wedge (A_\alpha dy \wedge dz + B_\alpha dz \wedge dx + C_\alpha dx \wedge dy)$$

e daí temos

$$\omega \wedge \mu_\alpha = PA_\alpha dx \wedge dy \wedge dz + QB_\alpha dx \wedge dy \wedge dz + RC_\alpha dx \wedge dy \wedge dz = g_{|U_\alpha}\Omega,$$

onde $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Seja

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_\alpha - \mu_\beta$$

em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Calculando $\omega \wedge \mu_{\alpha\beta}$ obtemos

$$\omega \wedge \mu_{\alpha\beta} = \omega \wedge \mu_\alpha - \omega \wedge \mu_\beta = g_{|U_\alpha}\Omega - g_{|U_\beta}\Omega = 0$$

em $U_\alpha \cap U_\beta$. Assim

$$0 = i_E(\omega \wedge \mu_{\alpha\beta}) = i_E(\omega) \wedge \mu_{\alpha\beta} - \omega \wedge i_E(\mu_{\alpha\beta}), \tag{2.9}$$

onde $E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ é o campo radial. Como $i_E(\omega) = 0$, da expressão (2.9) temos

$$\omega \wedge i_E(\mu_{\alpha\beta}) = 0. \tag{2.10}$$

Já que o conjunto singular de ω tem codimensão 2, pelo Lema de Divisão de De Rham (ver [Sa]), podemos escrever $i_E(\mu_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta}\omega$ onde $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Note que $h_{\alpha\beta}$ satisfaz a condição de cociclo aditivo. Como $\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\gamma} + \mu_{\gamma\alpha} = 0$, então

$$0 = i_E(\mu_{\alpha\beta}) + i_E(\mu_{\beta\gamma}) + i_E(\mu_{\gamma\alpha}) = (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha})\omega,$$

o que implica em

$$(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha}) = 0$$

para $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Substituindo em $i_E(\mu_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta}\omega$ a igualdade $\frac{i_E(d\omega)}{k+1} = \omega$ provada no Lema 2.1, temos

$$i_E(\mu_{\alpha\beta}) = \frac{h_{\alpha\beta}}{k+1}(i_E(d\omega))$$

e assim $i_E(\mu_{\alpha\beta} - \frac{h_{\alpha\beta}}{k+1}d\omega) = 0$, isto é,

$$i_E(\mu_{\alpha\beta} - \widetilde{h}_{\alpha\beta}d\omega) = 0,$$

onde $\widetilde{h}_{\alpha\beta} = \frac{h_{\alpha\beta}}{k+1}$. Como E não tem singularidades em $U_\alpha \cap U_\beta$ e do Lema (2.2), então

$$\mu_{\alpha\beta} - \widetilde{h}_{\alpha\beta} d\omega = l_{\alpha\beta} i_E(\Omega),$$

ou seja,

$$\mu_{\alpha\beta} = \widetilde{h}_{\alpha\beta} d\omega + l_{\alpha\beta} i_E(\Omega), \tag{2.11}$$

onde $l_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\forall\ U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$. Como $\mu_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$ satisfazem a condição de cociclo, então $l_{\alpha\beta}$ também satisfaz a mesma condição. Logo, pelo Teorema de Cartan, temos que $\widetilde{h}_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$ e $l_{\alpha\beta} = l_\beta - l_\alpha$. Em (2.11) isso implica que

$$\mu_\alpha - \mu_\beta = (h_\beta - h_\alpha) d\omega + (l_\beta - l_\alpha) i_E(\Omega)$$

e logo

$$\mu_\alpha + h_\alpha d\omega + l_\alpha i_E(\Omega) = \mu_\beta + h_\beta d\omega + l_\beta i_E \Omega.$$

Assim, podemos definir uma 2-forma holomorfa μ em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ como

$$\mu_{|U_\alpha} = \mu_\alpha + h_\alpha d\omega + l_\alpha i_E(\Omega)$$

e portanto, em cada U_α,

$$\omega \wedge \mu = \omega \wedge \mu_\alpha + \omega \wedge h_\alpha d\omega + \omega \wedge l_\alpha i_E(\Omega). \tag{2.12}$$

Note que $\omega \wedge i_E(\Omega) = 0$. De fato, $\omega \wedge \Omega = 0$ e daí

$$0 = i_E(\omega \wedge \Omega) = i_E(\omega) \wedge \Omega + \omega \wedge i_E(\Omega).$$

Como $i_E(\omega) = 0$, da equação anterior concluímos que $\omega \wedge i_E(\Omega) = 0$. Assim, da expressão (2.12), posto que $\omega \wedge d\omega = 0$ e $\omega \wedge i_E(\Omega) = 0$, obtemos

$$\omega \wedge \mu = \omega \wedge \mu_\alpha = g\Omega.$$

Podemos supor que μ é homogêneo uma vez que ω, g e Ω são homogêneos. Isso é suficiente para garantir que $g \in \mathcal{I}(\omega)$ **C.Q.D.**

No teorema a seguir, conseguimos cotar o grau de uma folheação $\mathcal{F}$ em relação a uma separatriz S lisa. Para curvas irredutíveis, já havia a quota $m \leq n+2$. Essa cota, para curvas lisas, é melhor. Assim, nessas condições, o problema de Poincaré é respondido positivamente.

Teorema 2.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n dada, em coordenadas homogêneas, por uma 1-forma polinomial ω. Seja S uma curva lisa em $\mathbb{P}^2$ definida em coordenadas homogêneas por um polinômio irredutível f de grau m. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha S como uma separatriz. Então, ω tem PRD com relação a f e $m \leq n+1$. Se $m = n+1$, então $\mathcal{F}$ coincide com uma folheação dada por curvas de uma função racional do tipo $\frac{f}{g^m}$ onde o grau de g é um. Em particular, podemos escolher um sistema de coordenadas afins $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ tal que $\mathcal{F}_{|\mathbb{C}^2}$ é dada por curvas de nível de um polinômio.*

Demonstração. Como f é separatriz lisa de ω, então, ω tem PRD local com relação a f. Pela proposição 2.1, ω tem PRD global em relação a f, ou seja,

$$\omega = gdf + f\mu. \tag{2.13}$$

Note que $i_E(\omega) = 0$ implica que $\mu \neq 0$. De fato, supondo que $\mu = 0$, então $\omega = gdf$, por (2.13). Como $i_E(\omega) = 0$, concluiríamos que

$$i_E(\omega) = i_E(gdf) \neq 0,$$

o que é absurdo, pois $i_E(df) = mf$, visto que f é homogêneo. Comparando os graus em (2.13), então $m \leq n+1$. Se $m = n+1$, obtemos de (2.13) que o grau de g é um e o grau de μ é zero. Assim, como $i_E(\omega) = 0$ obtemos de (2.13)

$$0 = i_E(\omega) = i_E(gdf + \mu f) = i_E(gdf) + i_E(\mu f).$$

Como $i_E(df) = mf \neq 0$, a expressão $i_E(gdf) + i_E(\mu f) = 0$ nos dá $gmf + fi_E(\mu) = 0$. De onde concluímos que

$$i_E(\mu) = -mg. \tag{2.14}$$

Façamos

$$\mu = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz,$$

onde α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$, pois grau$(\mu) = 0$. E então, por (2.14)

$$i_E(\mu) = \alpha x + \beta y + \gamma z = -mg.$$

Tomando a diferencial da expressão acima obtemos

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -mdg$$

o que implica em $\mu = -mdg$. Por (2.13), concluímos que

$$\omega = gdf - mfdg. \tag{2.15}$$

Observe que

$$d\left(\frac{f}{g^m}\right) = \frac{g^m df - mfg^{m-1}dg}{(g^m)^2} = \frac{g^{m-1}(gdf - mfdg)}{g^{2m}}.$$

Então, substituindo a expressão (2.15) na equação acima, temos $d\left(\frac{f}{g^m}\right) = g^{-m-1}\omega$, ou seja, $\omega = g^{m+1}d(\frac{f}{g^m})$. Daí, a folheação coincide com a folheação dada pelas curvas de nível de $\frac{f}{g^m}$. Se tomarmos um sistema de coordenadas afins $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$, tal que $g = 0$ é a linha no infinito, então chegamos na última afirmação do enunciado. **C.Q.D.**

Proposição 2.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n dada por uma 1-forma ω. Suponhamos que todas as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, ou seja, ambos os autovalores da parte linear do campo que gera $\mathcal{F}$ não são nulos. Seja g um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}^3$ que se anula no conjunto singular de ω. Então $g \in \mathcal{I}(\omega)$.*

Demonstração. Como as singularidades de $\mathcal{F}$ são não degeneradas, então, se o germe g se anula em uma sigularidade p, ele está no anel local gerado pelos componentes de ω. Da proposição 2.2 concluímos que, $g \in \mathcal{I}(\omega)$. **C.Q.D**

Capítulo 3

Aplicações para PRD

Neste capítulo, vamos apresentar algumas aplicações para a propriedade local de divisão relativa. Seja f um germe de curva analítica em $0 \in \mathbb{C}^2$, definida pela equação $f = 0$. Vamos denotar por $\Lambda_0(f)$ o conjunto de germes de 1-formas analíticas em $0 \in \mathbb{C}^2$ tendo f como separatriz. Então, $\omega \in \Lambda_0(f)$ se, e somente se, $\omega \wedge df = f\theta$, onde θ é um germe de uma 2-forma. Note que $\Lambda_0(f)$ é um $\mathcal{O}_2$-módulo. Por sua vez, denotamos por $\Lambda_1(f)$ o conjunto dos germes de 1-formas analíticas em $0 \in \mathbb{C}^2$ que tem PRD localmente com relação a f. Observe que $\Lambda_1(f)$ é um submódulo de $\Lambda_0(f)$. De fato, seja $\omega \in \Lambda_1(f)$, isto é,

$$\omega = gdf + \mu f, \tag{3.1}$$

onde μ é um germe de 1-forma e g é germe de curva. Fazendo, em ambos os lados de (3.1), o produto interior com df, obtemos

$$\omega \wedge df = gdf \wedge df + \mu f \wedge df = f\mu \wedge df.$$

Daí concluímos que $f = 0$ é invariante por $\omega \in \Lambda_1(f)$. Assim $\Lambda_1(f)$ é um subconjunto de $\Lambda_0(f)$. Resta mostrar que $\Lambda_1(f)$ é fechado sobre a multiplicação de elementos de $\mathcal{O}_2$. Seja $h \in \mathcal{O}_2$. Ao multiplicarmos a expressão em (3.1) por h, teremos que

$$h\omega = hgdf + h\mu f.$$

Assim, $h\omega$ tem PRD com relação a f.

Proposição 3.1. $\dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\Lambda_0(f)}{\Lambda_1(f)} \leq \infty$. (Ver [Ce])

Se f é quasihomogênea, ou seja, $f \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$, onde $\mathcal{I}(f_x, f_y)$ é o ideal jacobiano de f, é possível encontrar um sistema de coordenadas (x, y) em uma vizinhança de 0 e uma 1-forma $\omega_0 = -kxdy + lydx$, onde i, l são números racionais positivos, tal que $\omega_0 \wedge df = f dx \wedge dy$. De fato, como f é quasihomogênea, $f = \sum a_{ij} x^i y^j$, $li + kj = 1 \; \forall \; k$, $j \geq 0$, onde l e k são racionais positivos. Seja ω_0 tal que

$$\omega_0 \wedge df = f dx \wedge dy. \tag{3.2}$$

Como

$$df = \sum i a_{ij} x^{i-1} y^j dx + j a_{ij} x^i y^{j-1} dy,$$

então, suponhamos que ω_0 seja da forma $\omega_0 = \alpha x dy + \beta y dx$. Substituindo essas duas expressões, respectivamente, de df e de ω_0 em (3.2), temos

$$\sum (-\alpha i a_{ij} x^i y^j + \beta_j a_{ij} x^i y^j) dx \wedge dy = f dx \wedge dy,$$

ou seja,

$$\sum (-\alpha i + \beta j) a_{ij} x^i y^j dx \wedge dy = f dx \wedge dy.$$

Tendo em vista que tomamos f quasihomogênea, isto é, $f = \sum a_{ij} x^i y^j$, deduz-se que $-\alpha = k$ e $\beta = l$. Então $\omega_0 = -kxdy + lydx$. Observe que $\omega_0 \in \Lambda_0(f)$. Além disso, todo germe de função holomorfa quasihomogêneo é, a menos de mudança analítica de coordenadas, um polinômio quasihomogêneo (ver [Sa]).

Lema 3.1. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ quasihomogênea. Se $\omega \in \Lambda_0(f)$, então existem g e h pertecentes a $\mathcal{O}_2$ tais que $\omega = gdf + h\omega_0$.*

Demonstração. Como $\omega \in \Lambda_0(f)$ e $\omega_0 \in \Lambda_0(f)$ então, $\omega \wedge df = f\theta$ e $\omega_0 \wedge df = f dxdy$. Afirmamos que

$$\omega \wedge \omega_0 = g f dx \wedge dy, \tag{3.3}$$

para alguma $g \in \mathcal{O}_2$. De fato, como $\omega \wedge df = f\theta$, onde θ é 2-forma, escrita na forma $\theta = h dx \wedge dy$ para alguma $h \in \mathcal{O}_2$. Assim,

$$\omega \wedge df - h f dx \wedge dy = 0.$$

Substituindo $\omega_0 \wedge df = fdxdy$ na expressão acima obtemos

$$\omega \wedge df - h(\omega_0 \wedge df) = 0,$$

isto é, $(\omega - h\omega_0) \wedge df = 0$. Logo, pelo Teorema de Divisão de De Rham, visto que f é reduzida, $\omega - h\omega_0 = gdf$ para alguma $g \in \mathcal{O}_2$. **C.Q.D**

Lema 3.2. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ quasihomogênea. Temos que $h \in \mathcal{O}_2$ é tal que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$ se, e somente se, $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$.*

Demonstração. Começamos por provar a afirmação a seguir.
Afirmação. Seja $h \in \mathcal{O}_2$. $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$ se, e somente se, existe 1-forma μ tal que $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$. De fato, se $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$, então podemos escrever $h = \alpha f_x + \beta f_y$ para α, $\beta \in \mathcal{O}_2$. Daí,

$$hdx \wedge dy = (\alpha f_x + \beta f_y)dx \wedge dy = -\alpha dy \wedge f_x dx + \beta dx \wedge f_y dy = \mu \wedge df,$$

para $\mu = \beta dx - \alpha dy$ e $df = f_x dx + f_y dy$. Reciprocamente, se $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$, onde $\mu = \beta dx - \alpha dy$ e $df = f_x dx + f_y dy$, temos

$$\mu \wedge df = (\beta dx - \alpha dy) \wedge (f_x dx + f_y dy) = (\alpha f_x + \beta f_y)dx \wedge dy.$$

Como $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$, obtemos que $h = \alpha f_x + \beta f_y$, isto é, $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$. Isso prova a afirmação.

Agora suponhamos que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$. Então, temos

$$h\omega_0 = gdf + f\mu. \tag{3.4}$$

Multiplicando a igualdade $\omega_0 \wedge df = fdx \wedge dy$ por h obtemos,

$$hfdx \wedge dy = h\omega_0 \wedge df. \tag{3.5}$$

Substituindo em (3.5) a expressão dada em (3.4), temos

$$h\omega_0 \wedge df = (gdf + \mu f) \wedge df = \mu f \wedge df.$$

Então, pela expressão anterior e por (3.5), temos $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$, o que implica que $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$, pela afirmação provada anteriormente. Reciprocamente, se $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$, então $hdx \wedge dy = \mu \wedge df$, usando a afirmação. Multiplicando a equação anterior por f, temos $fhdx \wedge dy = f\mu \wedge df$. Substituindo, nessa equação, a igualdade em (3.5), obtemos

$$h\omega_0 \wedge df = f\mu \wedge df,$$

ou seja,

$$(h\omega_0 - f\mu) \wedge df = 0.$$

Tendo em vista que f é reduzida, concluímos que $h\omega_0 - f\mu = gdf$ para alguma $g \in \mathcal{O}_2$. **C.Q.D.**

Proposição 3.2. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ quasihomogênea. Então*

$$\Lambda_0(f) = \Lambda_1(f) \oplus \mathbb{C}f_1\omega_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}f_\mu\omega_0,$$

onde $f_1, ..., f_\mu$ é uma base de $\frac{\mathcal{O}_2}{\mathcal{I}(f_x, f_y)}$.

Demonstração. Se $\omega \in \Lambda_0(f)$, pelo lema 3.1 temos que $\omega = gdf + h\omega_0$, onde $g \in \mathcal{O}_2$. O resultado segue observando que $gdf \in \Lambda_1(f)$. **C.Q.D.**

Corolário 3.1. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ quasihomogênea. Então, $\mathcal{I}(f_x, f_y).\Lambda_0 \subset \Lambda_1$. Em particular, se f tem apenas duas componentes lisas transversais, então $\mathcal{M}.\Lambda_0 \subset \Lambda_1$, onde $\mathcal{M}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_2$.*

Lema 3.3. *Seja ω um germe de 1-forma e seja $f = 0$ a equação local reduzida da curva S em $p = (0,0)$ que tenha dois ramos transversais e lisos em p. Suponhamos que ω tenha $f = 0$ como separatriz. Então ω tem PRD com relação a f se, e somente se, $d\omega(0) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que ω tenha PRD com relação a f. Então, podemos escrever

$$\omega = gdf + f\mu.$$

Tomando a diferencial da equação anterior, temos

$$d\omega = dg \wedge df + df \wedge \mu + fd\mu. \tag{3.6}$$

Como $p = (0,0)$ é ponto nodal, então $f(0) = 0$ e $df(0) = 0$. Assim, da expressão (3.6) segue que $d\omega(0) = 0$.

Reciprocamente, como $\omega \in \Lambda_0(f)$, do lema 3.1 temos

$$\omega = gdf + h\omega_0. \tag{3.7}$$

Tomando a diferencial da expressão (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega &= dg \wedge df + dh \wedge \omega_0 + hd\omega_0 \\ &= dg \wedge df + dh \wedge (-kxdy + lydx) + h(kdx \wedge dy + ldx \wedge dy.) \end{aligned}$$

Como $p = (0,0)$ é ponto nodal e estamos supondo $d\omega(0) = 0$, da equação acima segue que $d\omega(0) = h(0)(kdx \wedge dy + ldx \wedge dy) = 0$. Isso implica que $h(0) = 0$, de onde concluímos que $h \in \mathcal{I}(f_x, f_y)$. Do lema 3.2, temos que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$. Portanto, pela expressão (3.7), $\omega \in \Lambda_1(f)$. **C.Q.D.**

Capítulo 4

O Problema de Poincaré: curva com singularidades nodais

Neste capítulo trataremos de resultados que relacionam o grau de uma folheação e o grau de uma curva com singularidades nodais. Vamos, também, introduzir o conceito de folheação logarítmica.

Sejam M uma variedade complexa de dimensão maior ou igual a dois e $f_1, ..., f_r$ funções holomorfas não identicamente nulas sobre M. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_r$ números complexos não nulos. A 1-forma meromorfa $\theta = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ é chamada de forma logarítmica. Ela é fechada e, portanto, integrável. A folheação $\mathcal{F}$ induzida por θ é chamada de folheação logarítmica associada a θ.

Teorema 4.1. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau n e S curva algébrica de grau m definida pela equação homogênea reduzida $f = 0$, cujas singularidades são do tipo cruzamento normal. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha S como separatriz. Então,* $\mathrm{grau}(S) \leq \mathrm{grau}(\mathcal{F}) + 2$*, ou seja, $m \leq n + 2$. Além disso, se $m = n + 2$, então f é redutível e $\mathcal{F}$ é do tipo logarítmica, isto é, dada por uma forma racional fechada $\Sigma \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$, onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e f_i é polinômio homogêneo.*

Demonstração. Seja ω uma 1-forma integrável em $\mathbb{C}^3$ que representa $\mathcal{F}$. Como S é uma separatriz de $\mathcal{F}$ e f é reduzida, temos que

$$\omega \wedge df = f\theta. \tag{4.1}$$

Definamos $\mu = \theta - d\omega$, onde μ é homogêneo de grau n. Assim, podemos escrever $\theta = \mu + d\omega$. Substituindo essa expressão em (4.1), obtemos

$$\omega \wedge df + fd\omega = f\mu. \tag{4.2}$$

Afirmação: se p é uma singularidade de f, então $\mu(p) = 0$.

De fato, seja (x, y, z) um sistema de coordenadas local em $\mathbb{C}^3$, tal que $f = xy$. Então, substituindo a equação $f = xy$ na expressão (4.1), temos

$$w \wedge (xdy + ydx) = xy\theta.$$

Fazendo $\omega = adx + bdy + cdz$ e substituindo na expressão anterior, obtemos

$$axdx \wedge dy + bydy \wedge dx + c(xdz \wedge dy + ydz \wedge dx) = xy\theta,$$

de onde concluímos que $a = y\alpha$, $b = x\beta$, $c = xy\lambda$, onde α, β, λ são funções holomorfas. Então,

$$\omega = \alpha ydx + \beta xdy + xy\lambda dz. \tag{4.3}$$

Da expressão (4.3) e como $f = xy$, o primeiro membro da igualdade em (4.2) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}&\omega \wedge df + fd\omega = (\alpha ydx + \beta xdy + xy\lambda dz) \wedge (ydx + xdy) + \\ &\quad xy(\alpha dy \wedge dx + yd\alpha \wedge dx + \beta dx \wedge dy + xd\beta \wedge dy + y\lambda dx \wedge dz + x\lambda dy \wedge dz + xyd\lambda \wedge dz),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\omega \wedge df + fd\omega = xy^2\lambda dz \wedge dx + x^2y\lambda dz \wedge dy + \\ &\quad xy\beta dx \wedge dy + x^2yd\beta \wedge dy + xy^2\lambda dx \wedge dz + x^2y\lambda dydz + x^2y^2d\lambda \wedge dz,\end{aligned}$$

sendo o 2-jato do segundo membro da expressão acima igual a zero. Isso implica que $f\mu$, em (4.2), começará no terceiro jato e logo, μ se anula em $x = y = 0$. Isso demonstra a afirmação.

Para provar o teorema, vamos considerar dois casos, sendo o primeiro caso $\mu \equiv 0$ e o segundo caso $\mu \not\equiv 0$.

Primeiro caso: $\mu \equiv 0$. Observe que isso implica em (4.2) que

$$\omega \wedge df + fd\omega = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\omega}{f} = \frac{\omega \wedge df - fd\omega}{f^2} = 0.$$

Nesse caso, se $f = f_1.....f_k$ é a decomposição de f em fatores irredutíveis, então, existem números $\lambda_i, ..., \lambda_k$ tais que (ver [CM])

$$\frac{\omega}{f} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}. \tag{4.4}$$

Em (4.4), contraindo pelo campo radial E, obtemos

$$i_E(\omega) = i_E(f \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}) = f \sum_{j=1}^{k} \lambda_j d_j \frac{df_j}{f_j},$$

onde d_j é o grau de f_j. Como $i_E(\omega) = 0$ então, da equação acima, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j d_j = 0$. Assim, $k \geq 2$. De (4.4) temos que grau(ω) − grau$(f) = -1$ e daí, os coeficientes de ω têm grau $m - 1$. Portanto, grau$(\mathcal{F}) = m - 2$.

Segundo caso: $\mu \not\equiv 0$. Neste caso, seja g uma componente não nula de μ. Seja $V = \{h;$ h polinômio homogêneo de grau n tal que h se anula no conjunto singular de $f\}$. Observe que $V \neq \emptyset$, pois $g \in V$, já que μ se anula no conjunto singular de f, como foi provado na afirmação anterior. Seja $h \in V \setminus \{0\}$. Como h se anula no conjunto singular de f, então $h \in \mathcal{I}(x, y)$, onde (x, y) são coordenadas locais em um ponto $p \in Sing(S)$. Localmente em $p \in Sing(S)$, S é dada por $f(x, y) = (xy = 0)$. Então, como f é quasihomogênea, temos pelo Lema 3.2 que $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$, onde $\omega_0 = -kxdy + lydx$, k e l números racionais positivos. Como $h\omega_0 \in \Lambda_1(f)$ e do Lema 3.1, $h\omega$ tem PRD local. Assim, da Proposição 2.1, concluímos que $h\omega$ tem PRD global. Logo, podemos escrever

$$h\omega = adf + f\eta, \tag{4.5}$$

onde a é homogêneo, cujo grau $\widetilde{d}$ pode ser calculado comparando os graus na expressão acima, ou seja,

$$n + (n + 1) = (m - 1) + \widetilde{d},$$

o que nos dá $2n + 2 - m = \widetilde{d}$. Suponhamos que possamos escrever $h\omega$ de outra forma, isto é,

$$h\omega = a_1 df + f\eta_1,$$

onde a_1 é homogêneo e $a \neq a_1$. Subtraindo essa expressão de (4.5) obtemos

$$(a - a_1)df = f(\eta_1 - \eta).$$

Mas como f é reduzida, f divide $(a - a_1)$. Então, já que grau$(f) = m$ e grau$(a) = 2n + 2 - m$, temos

$$m \leq 2n + 2 - m$$

o que implica que $m \leq n + 1$. Nessa situação, portanto, o teorema está provado.

Podemos, então, supor que a é unicamente determinado por h e, assim, a correspondência $h \mapsto a$ está bem definida, sendo um mapa linear de V no espaço dos polinômios de grau $2n + 2 - m$. Vamos denotar esse mapa por $a(h)$. Podemos, também, supor que $a(h)$ é injetivo. De fato, se o mapa não fosse injetivo, para algum $h_1 \in V$, com $h_1 \neq h$, poderíamos escrever

$$h_1\omega = adf + f\eta_1.$$

Subtraindo a expressão anterior de (4.5), obteríamos

$$(h - h_1)\omega = f(\eta - \eta_1),$$

o que implicaria que f divide $h - h_1$, pois a codimensão de $Sing(\omega)$ é igual a 2. Assim, f dividiria um polinômio de grau n. Logo, teríamos $m \leq n$ e o resultado estaria provado.

Agora, queremos provar que $m \leq n + 2$, ou seja, $n \leq 2n + 2 - m$. Suponhamos por contradição que $n > 2n + 2 - m$. Afirmamos que para qualquer $h \in V$ o polinômio $a = a(h)$, se anula no conjunto singular de f. De fato, de (4.5) temos

$$h\omega - adf - f\eta = 0.$$

Tomamos um sistema de coordenadas local em uma vizinhança de um ponto singular de f, que supomos ser $p = 0$, tal que ω possa ser escrito como em (4.3), $f = xy$ e $df = xdy + ydx$, e da equação acima obtemos

$$h(\alpha ydx + \beta xdy + xy\lambda dz) - a(xdy + ydx) - xy\eta = 0.$$

O primeiro jato do lado esquerdo da expressão anterior pode ser escrito como $-a(0)(xdy + ydx) = 0$, de onde concluímos que $a(0) = 0$.

Seja V_1 o espaço dos polinômios homogêneos de grau $2n + 2 - m$ que se anulam no conjunto singular de f. O mapa $a : V \mapsto V_1$ é injetivo. Mas isso não é possível, pois se A é um polinômio de grau $m - n - 2 > 0$, podemos construir um mapa injetivo $i_A : V_1 \to V$ com $i_A(h_1) = Ah_1$. Logo, a dimensão de V seria igual a dimensão de V_1 e o mapa i_A seria um isomorfismo. Isso é falso, pois não é possível que todos os elementos em V sejam divisíveis por um mesmo polinômio não constante A.

Agora, suponhamos que $m = n + 2$. Vamos demonstrar que ω é do tipo logarítmica, por indução no grau $k = n + 1$ de ω. Se ω tem grau 1, então a folheação tem grau zero. Trata-se, portanto, da folheação radial, ou seja, após uma mudança linear de coordenadas ω é expressa como $\omega = -ydx + xdy$. Portanto, ω é logarítmica, pois ω pode ser escrita como $\omega = d\left(\frac{x}{y}\right)$. Suponhamos verdadeira a afirmação para todo $k \leq k_0 - 1$, onde $k_0 \geq 2$. Vamos provar para $k = k_0$. Por hipótese, como $m = n + 2$ e $k = n + 1$ temos que $n + 1 = k_0 = m - 1$. Então, $2n + 2 - 2m + 2 = 0$, de onde obtemos

$$2n + 2 - m = m - 2 = n.$$

Isso implica que $V_1 = V$, por definição de V. Assim, vamos supor que o mapa $a : V \to V_1$ é bem definido e injetivo. Como estamos tratando de espaço vetorial complexo, podemos assumir que a tem autovetores. Seja h um autovetor de a associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos escrever

$$hw = \lambda hdf + f\eta.$$

Se h_1 é um fator irredutível de h, então h_1 divide f ou η. Depois de cancelar todos os fatores irredutíveis na igualdade anterior, obtemos

$$\omega = \lambda df + f_1\eta_1, \tag{4.6}$$

onde f_1 divide f. Note que f_1 não é constante. De fato, como grau$(h) = n$ e, por hipótese $m = n + 2$, então $n \leq n + 2 = m$, onde m é o grau de f. Isso implica que grau de η_1 é menor que o grau de ω. Façamos $f = f_1 f_2$. Contraindo ambos os termos da expressão (4.6) pelo campo radial temos

$$i_E(\omega) = i_E(\lambda df) + i_E(f_1\eta_1).$$

Como $i_E(\omega) = 0$ e da identidade de Euler, a expressão acima se reduz a

$$\lambda mf + f_1 i_E(\eta_1) = 0,$$

o que implica em

$$i_E(\eta_1) = -\lambda m f_2. \tag{4.7}$$

Denotaremos por m_1 o grau de f_1, m_2 o grau de f_2 e k_1 o grau de η_1. Concluímos que k_1 é igual a $m_2 - 1$, pois da expressão (4.6), temos que $m_1 + k_1 = n + 1$ e, somando um em ambos os lados dessa igualdade, resulta em

$$1 + m_1 + k_1 = n + 2 = m = m_1 + m_2, \tag{4.8}$$

Logo, $k_1 = m_2 - 1$.

Seja L_E a derivada de Lie na direção do campo E. Queremos provar que $L_E\eta_1 = (k_1 + 1)\eta_1$. Calculando a derivada de Lie em ambos os lados da expressão (4.6) obtemos

$$L_E(\omega) = L_E(\lambda df) + L_E(f_1\eta_1)$$

e portanto,

$$i_E(d\omega) + d(i_E(\omega)) = i_E(\lambda d^2 f) + d(i_E \lambda df) + L_E(f_1\eta_1).$$

Como $i_E\omega = 0$ e $d^2 f = 0$, segue que

$$i_E(d\omega) - \lambda m df = L_E(f_1\eta_1). \tag{4.9}$$

Como ω é integrável, de grau $n+1$, e $i_E(\omega) = 0$, pelo Lema 2.1, vale $i_E(d\omega) = (n+2)\omega$. Substituindo essa expressão em (4.9) e lembrando que $n + 2 = m$, obtemos

$$(n + 2)(\omega - \lambda df) = L_E(f_1\eta_1). \tag{4.10}$$

Calculando $L_E(f_1\eta_1)$ temos

$$\begin{aligned} L_E(f_1\eta_1) &= i_E(df_1 \wedge \eta_1 + f_1 d\eta_1) + d(i_E(f_1\eta_1)) \\ &= (m_1 f_1\eta_1 - df_1 \wedge i_E(\eta_1) + f_1 i_E(d\eta_1) + d(f_1 i_E(\eta_1)) \\ &= (m_1 f_1\eta_1 - df_1 \wedge i_E(\eta_1) + f_1 i_E(d\eta_1) + (df_1 \wedge i_E(\eta_1) + f_1 d i_E(\eta_1)) \\ &= m_1 f_1\eta_1 + f_1(i_E(d\eta_1) + d i_E(\eta_1)) \\ &= m_1 f_1\eta_1 + f_1(L_E\eta_1). \end{aligned}$$

Na expressão (4.10), usando a relação em (4.6) e a igualdade $L_E(f_1\eta_1) = m_1 f_1\eta_1 + f_1(L_E\eta_1)$ temos

$$(n+2)f_1\eta_1 = m_1 f_1\eta_1 + f_1 L_E\eta_1,$$

de onde

$$(n+2-m_1)\eta_1 = L_E\eta_1. \tag{4.11}$$

De (4.8), $(n+2-m_1) = k_1+1$ e portanto, em (4.11), $(k_1+1)\eta_1 = L_E\eta_1$, como queríamos provar.

Além disso, temos que

$$L_E\eta_1 = i_E(d\eta_1) + d i_E(\eta_1).$$

Então, de (4.7) obtemos

$$L_E\eta_1 = i_E(d\eta_1) - \lambda m df_2.$$

Agora, definamos ω_1 tal que $i_E(d\eta_1) = (k_1+1)w_1$, onde $\mathrm{grau}(w_1) = k_1 = \mathrm{grau}(\eta_1)$ e onde $k_1 < k$. Substituindo essa relação na expressão acima e lembrando que $(k_1+1)\eta_1 = L_E\eta_1$ temos

$$(k_1+1)\eta_1 = (k_1+1)\omega_1 - \lambda m df_2.$$

Usando o fato que $k_1 + 1 = m_2$ na equação acima, obtemos

$$m_2\eta_1 = m_2 w_1 - \lambda m df_2,$$

ou seja, $\eta_1 = w_1 - \lambda\frac{m}{m_2}df_2$. Substituindo em (4.6), resulta em

$$\omega = \lambda df + f_1\omega_1 - \lambda\frac{m}{m_2}f_1 df_2.$$

Lembrando que $m = m_1 + m_2$ e que $f_1 f_2 = f$ temos

$$\omega = f_1\omega_1 + \lambda d(f_1 f_2) - \lambda\frac{m_1}{m_2} f_1 df_2 - \lambda\frac{m_2}{m_2} f_1 df_2,$$

de onde encontramos

$$\omega = f_1\omega_1 + \frac{\lambda}{m_2}(m_2 f_2 df_1 - m_1 f_1 df_2).$$

De $i_E(\omega) = 0$ segue que $f_1(i_E(\omega_1)) = -i_E(\frac{\lambda}{m_2}(m_2 f_2 df_1 - m_1 f_1 df_2))$. Como

$$i_E(m_2 f_2 df_1 - m_1 f_1 df_2) = (m_2 f_2 m_1 f_1 - m_1 f_1 m_2 f_2) = 0,$$

então $i_E(\omega_1) = 0$. Como f_2 é separatriz de ω e de df, da igualdade (4.6) temos que f_2 é separatriz de η_1. Lembrando que $\omega_1 = \eta_1 + \lambda\frac{m}{m_2} df_2$, então f_2 é separatriz de ω_1. Além disso, da equação que define ω_1, resulta que grau$(f_2) =$ grau$(\mathcal{F}_{\omega_1}) + 2$, ou seja, $m_2 =$ grau$(\omega_1) + 1$, de onde $m_2 = k_1 + 1$. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução em f_2 e ω_1 para obter que $\omega_1 = f_2 \Sigma\lambda_j \frac{dh_j}{h_j}$, onde $h_1, ..., h_r$ são componentes de f_2. Portanto, η_1 é logarítmica e assim, ω é logarítmica pela equação (4.6). **C.Q.D.**

A partir de agora, vamos considerar o caso onde f é irredutível de grau m, admitindo apenas singularidades nodais. Vamos estimar o grau das folheações que têm f como separatriz e que não satisfazem PRD com relação a f. Essas estimativas serão em termos do número de pontos nodais de f e, assintoticamente, são melhores que a anterior ($m \leq n + 1$). Consideremos, como primeiro caso, a situação em que f tem apenas um ponto nodal.

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n. Seja f irredutível de grau m, com apenas uma singularidade nodal. Suponhamos que $\mathcal{F}$ tenha f como separatriz, e que não tenha PRD com relação a f. Então, $m \leq \frac{n}{2} + 2$. Além disso, essa é a melhor estimativa.*

Demonstração. Tomemos ω uma 1-forma homogênea de grau $n+1$ em $\mathbb{C}^3$ que represente $\mathcal{F}$. Seja f separatriz de $\mathcal{F}$. Vamos supor que o ponto nodal de f é $(0 : 0 : 1)$, fazendo mudança de coordenadas lineares. Considere as funções lineares x e y. Afirmamos que as 1-formas $x\omega$ e $y\omega$, satisfazem PRD com relação a f. De fato, $x \in \mathcal{I}(x, y)$, onde (x, y) são coordenadas locais em 0. Então, pelo Lema 3.2 temos que $x\omega_0$, onde $\omega_0 = -kxdy + lydx$, com k e l números racionais positivos, tem PRD local. Do Lema 3.1, $x\omega$ tem PRD local e usando a Proposição 2.1, concluímos que $x\omega$ tem PRD global. O mesmo vale para $y\omega$. Então, podemos escrever

$$x\omega = g_1 df + f\mu_1. \tag{4.12}$$

$$y\omega = g_2 df + f\mu_2. \tag{4.13}$$

Comparando os graus em (4.12) segue que $n+2 = m-1+\mathrm{grau}(g_1)$, ou seja, $\mathrm{grau}(g_1) = n-m+3$. A equação (4.12) nos leva a concluir que se $g_1 \equiv 0$, então x divide μ_1, pois f é irredutível. Assim,

$$x\omega = xf\widetilde{\mu_1},$$

onde $x\widetilde{\mu_1} = \mu_1$, o que implica que ω tem PRD com relação a f, absurdo. Portanto, $g_1 \not\equiv 0$. Com argumento similar podemos supor $g_2 \not\equiv 0$. Multiplicando (4.12) e (4.13), respectivamente por x e y e, depois, subtraindo uma equação de outra, obtemos

$$(xg_2 - yg_1)df = f(y\mu_1 - x\mu_2).$$

Da expressão acima observamos que ou $xg_2 - yg_1 \equiv 0$ ou, como f é irredutível, f divide $xg_2 - yg_1$. Visto que $\mathrm{grau}(g_1) = n-m+3$, segue que $\mathrm{grau}(yg_1) = n-m+4$. Se $xg_2 - yg_1 = 0$, temos que x divide g_1 e divide μ_1 e então, por (4.12), ω tem PRD com relação a f, absurdo. Se $xg_2 - yg_1 \not\equiv 0$, então f divide $xg_2 - yg_1$. Como $\mathrm{grau}(xg_2 - yg_1) = n-m+4$, temos $m \leq n-m+4$, isto é, $m \leq \frac{n}{2}+2$, o que prova a primeira afirmativa do teorema.

Com o objetivo de mostrar que a cota apresentada é rígida, vamos construir um exemplo explícito, tendo grau $n = 2m-4$. Considerando coordenadas afins em $\mathbb{C}^2$, podemos construir f cuja única singularidade é um ponto nodal em $(0,0)$ e podemos escolher um sistema de coordenadas tal que

$$f = X^2 - Y^2 + ... = X^2(1+\alpha) - Y^2(1+\beta),$$

onde α, β são polinômios tais que $\mathrm{grau}(1+\alpha) = \mathrm{grau}(1+\beta) = m-2$. Seja $\mathcal{F}$ folheação em $\mathbb{P}^2$ dada por curvas de níveis da função meromorfa $\frac{X^2(1+\alpha)}{Y^2(1+\beta)} = \frac{f_1}{f_2}$. Essa folheação pode ser representada pela 1-forma

$$\omega_1 = XY(1+\alpha)(1+\beta)\left(2\frac{dX}{X} - 2\frac{dY}{Y} + \frac{d\alpha}{1+\alpha} - \frac{d\beta}{1+\beta}\right) = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{XY}. \tag{4.14}$$

Seja ω_0 a 1-forma homogênea em $\mathbb{C}^3$ obtida pela homogeinização de ω_1. De (4.14), grau$(\omega_0) \leq 2m-3$ e portanto, o grau de $\mathcal{F}$ é menor ou igual a $2m-4$. Por outro lado, afirmamos que ω_0 não satisfaz PRD com relação a f. De fato, se isso fosse verdade, teríamos em coordenadas afins que $\omega_1 = gdf + f\mu$ e daí $d\omega_1(0,0) = 0$, pois $(0,0)$ é ponto nodal de f. Porém, calculando $d\omega_1(0,0)$, constatamos que $d\omega_1(0,0) = -4dx \wedge dy$. Então, pelo que já foi provado no teorema, grau$(\mathcal{F}) \geq 2m-4$. Como já havíamos provado que o grau de $\mathcal{F}$ é menor ou igual a $2m-4$, concluímos que o grau de $\mathcal{F}$ é igual a $2m-4$. **C.Q.D.**

Corolário 4.1. *Seja f irredutível de grau m e ω_0 homegeinização de ω_1 dada no teorema anterior. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n, representada, em coordenadas homogêneas, por ω que tenha f como separatriz. Então, ou $m-1 \leq n < 2m-4$ e ω tem PRD com relação a f, ou $n \geq 2m-4$ e há um polinômio homogênio h de grau $n-2m+4$ tal que $\omega - h\omega_0$ tem PRD com relação a f. Além disso, se p é um ponto nodal de f, então $h(p) = 0$ se, e somente se, ω tem PRD com relação a f.*

Comentário: Se denotarmos $\Lambda_0(f,n) = \{\omega$; grau de ω igual a $n+1$, $i_E\omega = 0$ e $\omega \wedge df = f\theta\}$ e $\Lambda_1(f,n) = \{\omega \in \Lambda_0(f,n)$; ω tem PRD com relação a $f\}$, então o corolário acima implica que

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = \begin{cases} 0 \text{ se } n < 2m-4 \\ 1 \text{ se } n \geq 2m-4 \end{cases}$$

Observação: Seja $f = 0$ uma curva com um ponto nodal. Vamos fazer uma deformação de f, com $f_0 = f$ e tal que f_t é lisa para $t \neq 0$. Seja ω uma 1-forma, tendo $f = 0$ como separatriz. Se ω tem PRD com relação a f, então é possível deformar ω em uma família de 1-formas ω_t tal que $\omega_0 = \omega$ e ω_t tem $f_t = 0$ como separatriz. Basta fazer $\omega_f = gdf_t + f_t\mu$, se $\omega = gdf + f\mu$. Por outro lado, se ω não tem PRD com relação a f, então isso não é possível. Com efeito, se f_t é lisa, então ω_t tem PRD com relação a f_t, pelo Teorema 2.1.

Agora, considere o caso onde $f = 0$ tem $k \geq 2$ pontos nodais em posição geral, isto é, se $k > 2$, existem k retas distintas $L_1, ..., L_k$ tais que $\forall j \in \{1, ..., k\}$, todos os pontos nodais de f estão contidos em $\bigcup_{i \neq j} L_i$.

Teorema 4.3. *Na situação acima, se $\mathcal{F}$ é folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau n, tendo $f = 0$ como separatriz, então ou $\mathcal{F}$ tem PRD com relação a f e $m \leq n+1$ ou:*

1) Se $k \geq 3$, então $2m \leq n+k+2$;

2)Se $k \leq 2$, então $2m \leq n+k+3$.

Demonstração. Seja ω uma 1-forma homogênea de grau $n+1$ que representa $\mathcal{F}$. Suponhamos que ω não tenha PRD com relação a f. Vamos considerar primeiro o caso $k \geq 3$. Sejam $L_1, ..., L_k$, as retas tais que para todo $j \in \{1, ..., k\}$, os pontos nodais de f estão contidos em $\{\frac{L_1...L_k}{L_j}\} = 0$. Seja $\widetilde{L_j} = \frac{L_1...L_k}{L_j}$. Observe que $\widetilde{L_j}$ se anula em cada ponto nodal. Então, pelo Lema 3.2, $\widetilde{L_j}\omega$ tem PRD local e da Proposição 2.1, tem PRD global, isto é,

$$\widetilde{L_j}\omega = h_j df + f\mu_j L_j \forall j \in \{1, ..., k\}. \tag{4.15}$$

Agora multiplique (4.15) por L_j e obtemos

$$L_1....L_k\omega = L_j h_j df + L_j f \mu_j.$$

Seja $i \neq j$. Repetindo a mesma conta para L_i e subtraindo as equações obtidas, obtemos

$$(L_i h_i - L_j h_j)df = f(L_j\mu_j - L_i\mu_i).$$

Temos dois casos a considerar: ou $L_i h_i - L_j h_j \equiv 0$, $\forall i, j$, com i, $j \neq 0$ ou $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$ para algum $i \neq j$. No primeiro caso, L_i divide h_j, $\forall i \neq j$. Logo, considerando a equação (4.15), concluímos que ω tem PRD com relação a f, absurdo. No segundo caso, temos que f divide $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$, pois f não divide df. Comparando os graus em (4.15) temos que $(n+1)+k-1 = \text{grau}(h_j)+(m-1)$, isto é, $\text{grau}(h_j) = n+k-m+1$ e então, $\text{grau}(L_i h_i - L_j h_j) = n+k-m+2$. Assim, como f divide $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$, segue que

$$m \leq n - m + k + 2,$$

de onde temos que $2m \leq n+k+2$. Agora, para $k \leq 2$, note que os pontos nodais estão em uma mesma reta. Vamos tratar separadamente de dois casos: $k = 1$ e $k = 2$.

Primeiro Caso. $k = 1$. Nesse caso, todos os pontos nodais pertencem a uma mesma reta L. Fixemos o ponto $p \notin L$ e seja L_1, a reta unindo p ao ponto nodal de f. Observe que

$$L\omega = hdf + f\mu \tag{4.16}$$

$$(4.17) \qquad L_1\omega = h_1 df + f\mu_1.$$

Comparando os graus da equação (4.16), o grau de h resulta em $n+2 = \text{grau}(h)+(m-1)$, isto é, $\text{grau}(h) = n+3-m$. Subtraindo a equação (4.16) de (4.17) obtemos

$$(Lh - L_1h_1)df = f(L\mu - L_1\mu_1).$$

Agora, note que ou $Lh - L_1h_1 \equiv 0$, implicando que ω tem PRD com relação a f, o que é absurdo; ou então, temos que f divide $Lh - L_1h_1 \not\equiv 0$, ou seja,

$$m \leq n - m + 3 + 1 = n - m + 4$$

o que implica em $2m \leq n+4$.

Segundo Caso. $k = 2$. Nesse caso, seja L a reta que contém pontos nodais de f. Tomemos o ponto $p \notin L$ e sejam L_1, L_2, as retas unindo p aos pontos nodais de f. Observe que L e L_1L_2 se anulam em cada ponto nodal. Então,

$$(4.18) \qquad L\omega = hdf + f\mu$$

$$(4.19) \qquad L_1L_2\omega = h_1 df + f\mu_1.$$

A comparação de graus na equação (4.18) resulta em $n+2 = \text{grau}(h)+(m-1)$, ou seja, $\text{grau}(h) = n+3-m$. Subtraindo a equação (4.18) de (4.19) obtemos

$$(Lh - L_1L_2h_1)df = f(L\mu - L_1L_2\mu_1).$$

Agora, observe que ou $Lh_1 - L_1L_2h \equiv 0$, implicando que ω tem PRD com relação a f, o que é absurdo; ou então, temos que f divide $Lh_1 - L_1L_2h \not\equiv 0$, isto é,

$$m \leq n - m + 3 + 2 = n - m + 5$$

o que implica em $2m \leq n+5$. **C.Q.D.**

Observação: Denote por k' o número mínimo de retas L_1, ..., $L_{k'}$, tal que para todo $j \in \{1, ..., k'\}$ todos os pontos nodais de f estão contidos em $\frac{L_1 \ldots L_{k'}}{L_j} = 0$. Com o mesmo argumento da demonstração do teorema anterior, é possível provar que se $\mathcal{F}$ não tem

PRD com relação a f, então $2m \leq n + k' + 2$. Com efeito, sejam $L_1, ..., L_{k'}$, as retas tais que para todo $j \in \{1, ..., k'\}$, os pontos nodais de f estão contidos em $\{\frac{L_1...L_{k'}}{L_j}\} = 0$. Seja $\widetilde{L_j} = \frac{L_1...L_{k'}}{L_j}$. Note que $\widetilde{L_j}$ se anula em cada ponto nodal. Então, pelo Lema 3.2, $\widetilde{L_j}\omega$ tem PRD local e da Proposição 2.1, tem PRD global, isto é,

$$\widetilde{L_j}\omega = h_j df + f\mu_j L_j \forall j \in \{1, ..., k'\}. \tag{4.20}$$

Agora, multiplique (4.20) por L_j e obtemos

$$L_1....L_{k'}\omega = L_j h_j df + L_j f \mu_j.$$

Seja $i \neq j$. Repetindo a mesma conta para L_i e subtraindo as equações obtidas, temos

$$(L_i h_i - L_j h_j)df = f(L_j \mu_j - L_i \mu_i).$$

Temos dois casos a considerar: ou $L_i h_i - L_j h_j \equiv 0 \ \forall i, j$, com i, $j \neq 0$ ou $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$ para algum $i \neq j$. No primeiro caso, L_i divide h_j, $\forall i \neq j$. Logo, considerando a equação (4.20), concluímos que ω tem PRD com relação a f, absurdo. No segundo caso, temos que f divide $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$, pois f não divide df. Comparando os graus em (4.20) temos que $(n+1) + k' - 1 = \text{grau}(h_j) + (m-1)$, isto é, $\text{grau}(h_j) = n + k' - m + 1$ e então, $\text{grau}(L_i h_i - L_j h_j) = n + k' - m + 2$. Assim, como f divide $L_i h_i - L_j h_j \not\equiv 0$, segue que

$$m \leq n - m + k' + 2,$$

de onde temos que $2m \leq n + k' + 2$.

Agora, vamos considerar o caso onde $f = 0$ tem $k \geq 2$ pontos nodais e o grau da folheação é $n \geq 2m - 4$. Construiremos k 1-formas ω_1, ...,ω_k de grau $n + 1 = 2m - 3$ com a seguinte propriedade: se $p_1, ..., p_k$ são pontos nodais de $\{f = 0\}$, então $d\omega_j(p_i) = 0$ se $i \neq j$, e $d\omega_j(p_j) \neq 0$.

Lembre-se que as formas ω_i são extremos da inequação $n \geq 2m - 4$, pois essas formas têm grau $n+1 = 2m-3$ o que implica em $n = 2m+4$. Vamos construir ω_1 em coordenadas afins. Seja (X, Y) um sistema de coordenadas afins com as seguintes propriedades:

(i) $p_1 = (0, 0)$ é singularidade nodal;

(ii) $p_2, ..., p_k$ não estão contidos na reta do infinito;

(iii) para todo $j \geq 2$, $p_j \notin \{X = 0\}$ e $p_j \notin \{Y = 0\}$

(iv) o segundo jato de f em $(0,0)$ é $X^2 - Y^2$. Isso é possível pois $(0,0)$ é ponto onde duas retas se cruzam, por ser ponto nodal. Podemos escrever $f(X,Y) = X^2 - Y^2 + X^2\alpha - Y^2\beta = X^2(1+\alpha) - Y^2(1+\beta)$ onde máximo do grau de $(1+\alpha)$ e $(1+\beta)$ é igual a $m-2$, pois grau de $f = m$.

Podemos supor que:

(v) $(1+\alpha)(p_j) \neq 0$ para todo $j \in \{2, ..., k\}$. De fato, observe que grau de $f \geq 4$, pois $k \geq 2$. Além disso,

$$f = X^2(1+\alpha) - Y^2(1+\beta) = X^2(1+\alpha+\lambda Y^2) - Y^2(1+\beta+\lambda X^2). \tag{4.21}$$

Podemos escolher $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(1+\alpha+\lambda Y^2)(p_j) \neq 0$ para todo $j \in \{2, ..., k\}$, porque $Y^2(p_j) \neq 0$ para todo j, pela propriedade (iii). De (4.21) segue que

$$Y^2(1+\beta) = -X^2(1+\alpha+\lambda Y^2) + Y^2(1+\beta+\lambda X^2) - X^2(1+\alpha)$$

e então, $Y^2(1+\beta) \neq 0$. Vamos considerar $\widetilde{\omega}_1$ dado por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_1 &= XY(1+\alpha)(1+\beta)\left(2\frac{dX}{X} - 2\frac{dY}{Y} + \frac{d\alpha}{1+\alpha} - \frac{d\beta}{1+\beta}\right) \\
&= 2Y(1+\alpha)(1+\beta)dX - 2x(1+\alpha)(1+\beta)dY + XY(1+\beta)d\alpha - XY(1+\alpha)d\beta
\end{aligned}$$

Calculando $d\widetilde{\omega}_1(0,0)$ obtemos $-4dX \wedge dY$. Pela propriedade (ii), concluímos que $\widetilde{\omega}(p_j) = 0$ para $j \geq 2$. Vamos fixar $j \in \{2, ..., k\}$ e fazer $f = f_1 - f_2$, onde $f_1 = X^2(1+\alpha)$ e $f_2 = y^2(1+\beta)$. Observe que $\widetilde{\omega}_1$ pode ser escrita como

$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{Y^2(1+\beta)^2}{X} d\left(\frac{f_1}{f_2}\right).$$

Isso implica em

$$d\widetilde{\omega}_1 = dg \wedge d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) + d^2\left(\frac{f_1}{f_2}\right).$$

Como $d^2(\frac{f_1}{f_2}) = 0$, então

$$d\widetilde{\omega}_1 = dg \wedge d\left(\frac{f_1}{f_2}\right).$$

Agora observe que $g(p_j) \neq 0$ e $f_2(p) \neq 0$ por causa das propriedades (iii) e (v). Isso implica que

$$d\widetilde{\omega}_1(p_j) = dg(p_j) \wedge \frac{(f_2(p_j)df_1(p_j) - f_1(p_j)df_2(p_j))}{f_2(p_j)^2}.$$

Como $f = f_1 - f_2$ e $f(p_j) = 0$ temos que $f_1(p_j) = f_2(p_j) \neq 0$. Além disso, $df_1(p_j) = df_2(p_j)$, já que $df(p_j) = 0$, pois p_j é ponto nodal. Logo, $d\widetilde{\omega}_1(p_j) = 0$. O grau de $\widetilde{\omega}_1$ é menor ou igual $2m-3$, pois um dos termos de maior grau, $2x(1+\alpha)(1+\beta)$, tem grau $2m-3$.

Teorema 4.4. *Se $n \geq 2m-4$, então, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = k$, onde k é o número de pontos nodais de f.*

Demonstração. Seja $\omega_1, ..., \omega_k$ como na construção anterior. Fixe $n \geq 2m-4$ e considere os polinômios homogêneos $h_1, ..., h_k$ de grau $n-2m+4$ tais que $h_j(p_j) = 1$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$. Observe que para $i \neq j$,

$$d(h_j\omega_j)(p_i) = dh_j(p_i)\omega_j(p_i) + h_j(p_i)d\omega_j(p_i) = 0.$$

Por sua vez, para todo $j \in \{1, ..., k\}$,

$$d(h_j\omega_j)(p_j) = dhj(p_j)\omega_j(p_j) + h_j(p_j)d\omega_j(p_j) = d\omega_j(p_j) \neq 0.$$

Afirmação: Para qualquer 1-forma pertecente a $\Lambda_0(f,n)$, existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\omega - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(h_j\omega_j) \in \Lambda_1(f,n). \tag{4.22}$$

De fato, sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tal que $d(\omega)(p_j) = \lambda_j d\omega_j(p_j)$. Então, tomando a diferencial da expressão (4.22) obtemos

$$d\omega(p_j) - \sum_{j=1}^{k} d(h_j\omega_j)(p_j) = d\omega(p_j) - \lambda_j d(\omega_j)(p_j) = 0.$$

Do Lema 3.3, concluímos que $\omega - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(h_j\omega_j) \in \Lambda_1(f,n)$, provando a afirmação. Isso implica que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} \leq k$. Como para $i \neq j$, $d(h_j\omega_j)(p_i) = 0$ e, para todo $j \in \{1, ..., k\}$, $d(h_j\omega_j)(p_j) \neq 0$, temos que $h_1\omega_1, ..., h_j\omega_j$ são linearmente independentes e formam uma base para $\frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)}$. Logo $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\Lambda_0(f,n)}{\Lambda_1(f,n)} = k$. **C.Q.D.**

Capítulo 5

Folheações com singularidades do tipo Poincaré

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em $\mathbb{P}^2$, definida em coordenadas afins $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo polinomial $v = P\frac{\partial}{\partial X} + Q\frac{\partial}{\partial Y}$. Seja p um ponto singular de $\mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é do tipo Poincaré em p, se a parte linear de v possui dois autovalores não nulos cujo quociente é um número real não negativo. Se $\mathcal{F}$ é do tipo Poincaré em p, então existem uma separatriz lisa ou duas separatrizes locais, transversais e lisas em p (ver [SoMo]). Em coordenadas homogêneas, denotemos por $\Lambda_n^1(\mathbb{P}^2)$, o espaço linear das folheações de grau n definido como

$\Lambda_n^1(\mathbb{P}^2) = \{\omega = Adx + Bdy + Cdz, A, B, C$ homogêneas de grau n, que obedecem a condição de Euler, isto é, $xa + yB + zC = 0\}$.

Denotemos por $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{P}_n(\Lambda_n^1(\mathbb{P}^2)$, o espaço das folheações de grau n, cujas singularidades são do tipo Poincaré. $\mathcal{P}_n$ é um aberto real de Zariski no espaço projetivo. Seja $\mathcal{P}_n^0 \subset \mathcal{P}_n$, o subconjunto de $\mathcal{P}_n$ cujos elementos são as folheações que têm uma separatriz algébrica.

Teorema 5.1. *Se $n \leq 2$, então $\mathcal{P}_n^0$ é um subconjunto algébrico próprio de $\mathcal{P}_n$, isto é, existem polinômios homogêneos $P_1, ..., P_m$ definidos em $\Lambda_n^1(\mathbb{P}^2)$ tais que $\mathcal{P}_n^0 = \mathcal{P}_n \cap \{\mathcal{F}$ definida por ω tal que $P_1(\omega) = ... = P_m(\omega) = 0\}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_n$ definida por ω, tendo S como separatriz irredutível dada pela equação $f = 0$. Então, temos que

$$\omega \wedge df = f\theta, \tag{5.1}$$

onde θ é uma 2-forma. Tendo em vista que as singularidades de $\mathcal{F}$ são do tipo Poincaré, concluímos que ou S é uma curva lisa (não tem singularidades) ou é uma curva nodal. De fato, se p é uma singularidade de S, então $p \in Sing(\mathcal{F})$. Como p é uma singularidade de Poincaré, concluímos que p admite no máximo duas separatrizes transversais e logo, p é singularidade nodal de S. Como conseqüência, temos que $m = \text{grau}(df) \leq n+2$. De (5.1), observe que o grau de θ é $(n+1)+(m-1)-m = n$. Denote por $\sum(m,n)$, o conjunto dado por $\{(\omega, f, \theta); \omega \wedge df = f\theta, \text{grau}(\omega) = n+1, \text{grau}(f) = m, \text{grau}(\theta) = n\}$. O conjunto $\sum(m,n)$ é uma interseção de quádricas em $\mathbb{C}^M$, para algum M, pois $\omega \wedge df$ tem grau dois nos coeficientes de ω, f e θ. Daí, $\mathcal{P}_n^0 = \mathcal{P}_n \cap \mathbb{P}(pr_1(\sum(m,n)))$, onde pr_1 é a primeira projeção de $(\omega, f, \theta) \to (\omega)$. Isso implica que $\mathcal{P}_n^0$ é um subconjunto algébrico de $\mathcal{P}_n$. Ele será próprio, devido o Teorema de Jouanolou que será enunciado e provado a seguir. **C.Q.D**

Jouanolou provou que para $n \geq 2$ a folheação dada por $\omega_n = (x^n - y^{n-1})dx - (1 - xy^n)dy$ não tem separatriz (ver [J]). Abaixo, será dada uma prova curta desse resultado.

Teorema 5.2. *Para $n \geq 2$ existe um elemento em $\mathcal{P}_n$ sem separatriz.*

Demonstração. Suponhamos que ω_n represente $\mathcal{F}_n$. Afirmamos que a quantidade de singularidades de $\mathcal{F}_n$ é $N = n^2+n+1$. De fato, sabendo que $\omega_n = (x^n - y^{n-1})dx - (1 - xy^n)dy$ temos que as singularidades são dadas pela solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^n - y^{n+1} = 0 \\ 1 - xy^n = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema obtemos $x = \frac{1}{y^n}$. Substituindo essa expressão na primeira equação do sistema segue que

$$\left(\frac{1}{y^n}\right)^n - y^{n+1} = 0,$$

ou seja, $1 - y^{n+1}y^{n2} = 0$. Daí, temos que $y^{n^2+n+1} = 1$ e então, $y = e^{2\pi i \frac{k}{N}}$, onde $N = n^2 + n + 1$. Definimos $\lambda = exp(\frac{2i\pi}{N})$ e considere o mapa períodico linear

$$\sigma(x,y) = (\lambda x, \lambda^{n+1}y).$$

Observe que $\sigma^*\omega_n = \lambda^{n+1}\omega_n$, de onde a folheação $\mathcal{F}_n$ é equinvariante sobre a ação de σ. Assim, as singularidades de $\mathcal{F}_n$ são dadas pelas iterações de $\sigma(1,1)$, definidas por $\sigma^i(1,1)$, onde $i = 0, ..., N-1$. Afirmamos que $\mathcal{F}_n$ é de Poincaré. De fato, as singularidades de $\mathcal{F}$ são as soluções de $xy^n = 1$ e $y^{n+1} = x^n$, isto é, os pontos $p_1, ..., p_N$, onde $N = n^2 + n + 1$, $p_j = (x_j, y_j)$ com $x_j = y_j^{-n}$ e $y_j = exp(\frac{2\pi i j}{N})$. A matriz Jacobiana do campo $(1 - xy^n)\frac{\partial}{\partial x} + (x^n - y^{n+1})\frac{\partial}{\partial y}$ no ponto $p_j = (x_j, y_j)$ é dada por

$$J_j = \begin{bmatrix} -y_j^n & -nx_jy_j^{n-1} \\ nx_j^{n-1} & -(n+1)y_j^n \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de J_j, são $\lambda_j^1 = y^n\left(\frac{-(n+2)+\sqrt{3}ni}{2}\right)$ e $\lambda_j^2 = y^n\left(\frac{-(n+2)-\sqrt{3}ni}{2}\right)$. Portanto, os autovalores são não nulos e sua razão não pertence a $\mathbb{R}^+$.

Suponhamos que $\mathcal{F}_n$ tenha uma separatriz. Seja S_0 essa separatriz e definamos

$$S = \bigcup_{i=0}^{N} \sigma^i(S_0).$$

Sabemos que as singularidades de S são nodais, pois as singularidades de $\mathcal{F}_n$ são de Poincaré, e portanto grau$(S) \leq n+2$. Se S tem um ponto nodal, esse ponto é uma singularidade de $\mathcal{F}_n$. Pela equinvariância, S tem n^2+n+1 pontos nodais, o que é impossível para uma curva de grau menor que $n+2$, a não ser que $n = 1$. A fórmula de Plücker (ver [GH]) nos dá

$$d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa,$$

onde d é o grau da curva, d^* é o grau da curva dual, $\delta \geq 0$ é a quantidade de nós e $\kappa \geq 0$ é o número de cúspides. Aplicando à curva S, temos que $d \leq n+2$, $\delta = n^2+n+1$, $\kappa = 0$, e assim,

$$d^* \leq (n+2)(n+1) - 2(n^2+n+1) = -n^2+n,$$

isto é, $d^* \leq -n^2 - 2 < 0$, se $n > 1$, absurdo. Então, S é uma curva lisa e, portanto, irredutível. Da Proposição 2.3 temos que $m \leq n+1$ e que vale o PRD global, isto é,

$$\widetilde{\omega}_{n+1} = adf + f\eta,$$

onde $\widetilde{\omega}_{n+1}$ e f definem, respectivamente, equações homogêneas para $\mathcal{F}_n$ e S. Como $m \leq n+1$, por comparação de graus, temos a não constante de grau $(n+1)-(n-1) = n+2-m > 0$. Pela equinvariância, S passa por todas as singularidades de $\mathcal{F}$. Concluímos, assim, que todas as singularidades de $\mathcal{F}_n$ estão em S e são dadas por $a = f = 0$. Como $m \leq n+1$ e pelo Teorema de Bezout's temos

$$n^2 + n + 1 \leq m(\text{grau}(a)) = m(n+2-m) \leq (n+1)(n+2-m)$$

e daí obtemos que $1 \leq (2-m)(n+1)$. Então, $m = 1$ e todas as singularidades estão em uma reta, o que é um absurdo. **C.Q.D.**

Teorema 5.3. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação e S uma separatriz de $\mathcal{F}$. Suponha que $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_n^0$ e todas as singularidades de $\mathcal{F}$ estão contidas na separatriz S. Então, $\mathcal{F}$ tem grau um.*

Demonstração. Suponhamos que a folheação $\mathcal{F}$ seja representada pela forma ω_{n+1}. Seja $f = 0$ a equação homogênea que define a separatriz S de $\mathcal{F}$ e suponhamos que S tenha grau m. Como as singularidades são de Poincaré, por hipótese, concluímos que $m \leq n+2$. Se todas as singularidade de $\mathcal{F}$ estão em S, isto é $Sing(\omega_{n+1}) \subset \{f = 0\}$, então $f \in \mathcal{I}(\omega_{n+1})$ pelo lema de Noether (ver [LS]). Conseqüentemente, $n+1 \leq m$. Considerando que $m \leq n+2$ então,

$$n+1 \leq m \leq n+2.$$

Se $m = n+2$, então pelo Teorema 4.1, ω_{n+1} é do tipo logarítmica, isto é,

$$\omega_{n+1} = f \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i},$$

onde $\sum \lambda_i m_i = 0$, $f = f_1 ... f_p$ e $m_i = \text{grau}(f_i)$. Note que $\omega_{n+1} = 0$ pode ser escrito como

$$\omega_{n+1} = \sum \lambda_i f_1 ... \hat{f}_i ... f_p df_i.$$

Assim, se $\omega_{n+1}(p) = 0$ e algum $f_j = 0$, então, ou $df_j = 0$, ou $f_i(p) = 0$ para algum $i \neq j$, ou seja, as singularidades de ω em S são também singularidades de S. A recíproca também é verdadeira. Observe que, nesse caso, as singularidades de $\mathcal{F}$ em S são todas singularidades de S. Aplicando a fórmula de Plücker (ver [GH]) à curva S temos que $d = n + 2$ e que $\delta = n^2 + n + 1$ e assim,

$$d^* + 2(n^2 + n + 1) + 3\kappa = (n + 2)(n + 1).$$

Como $d^* \geq 0$ e $\kappa = 0$, temos

$$n^2 + n + 1 \leq \frac{(n + 2)(n + 1)}{2},$$

o que é possível apenas para $n = 1$.

Agora, se $f \in \mathcal{I}(\omega_{n+1})$ é de grau $n + 1$, então $f = \alpha A + \beta B + \gamma C$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ e $\omega_{n+1} = Adx + Bdy + Cdz$. Assim, existe uma 2-forma η_0, com coeficientes constantes, tal que

$$\omega_{n+1} \wedge \eta_0 = f dx \wedge dy \wedge dz. \tag{5.2}$$

Como $f = \alpha A + \beta B + \gamma C$, a expressão em (5.2) nos dá $\eta_0 = \alpha dy \wedge dz + \beta dz \wedge dx + \gamma dx \wedge dy$. Por mudança de coordenadas, podemos supor que $\eta_0 = dy \wedge dz$. Então, (5.2) implica que $A = f$ e portanto, $A = 0$ é separatriz de ω_{n+1}. Então $i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\omega) = A$ sobre $A = 0$ e daí $i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\omega) = 0$, ou seja, $\frac{\partial}{\partial x}$ é tangente a ω sobre $A = 0$. Assim, $\frac{\partial}{\partial x}$ é tangente a $A = 0$, pois A é ω-invariante. Como $dA = A_x dx + A_y dy + A_z dz$, então, $i_{\frac{\partial}{\partial x}}(dA) = A_x = 0$ sobre $A = 0$. Segue que A divide A_x o que implica que $A_x = 0$ e, assim, temos que $A = A(y, z)$, ou seja, A não depende de x. Portanto, $A = 0$ consiste de planos passando pelo eixo x. Mas como as singularidades são do tipo Poincaré, há no máximo dois planos em $A = 0$, de onde concluímos que $n + 1 \leq 2$, ou seja $n = 1$. **C.Q.D.**

Capítulo 6

O Problema de Poincaré para o caso não dicrítico

Neste capítulo vamos tratar dos conceitos de explosão, de singularidade dicrítica e não dicrítica e discutir o problema de Poincaré no contexto dessas definições. Vamos introduzir a noção de processo de explosão. Iniciaremos definindo a explosão em $\mathbb{C}^2$. Tomemos duas cópias de $\mathbb{C}^2$ que vamos denotar por U e V, com coordenadas (x, t) e (v, y). Seja o biholomorfismo $U \setminus \{t = 0\} \mapsto V \setminus \{v = 0\}$ dado por $(x, t) \to (\frac{1}{t}, tx)$. Ao identificarmos os pontos de $U \setminus \{t = 0\}$ e $V \setminus \{v = 0\}$, através do biholomorfismo acima, construímos uma superfície complexa $\widetilde{\mathbb{C}}^2$. Seja $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ a aplicação definida por

$$\begin{cases} \pi(x, t) = (x, tx) \text{ em } U \\ \pi(v, y) = (vy, y) \text{ em V} \end{cases}.$$

A aplicação π está bem definida, pois em $U \cap V$ temos $y = tx$ e $x = vy$. Além disso, tem as seguintes propriedades:

i) $\pi^{-1}(0, 0) = \{(0, t) \in U\} \cup \{(v, 0) \in V\}$. Se fizermos a identificação definida no biholomorfismo acima, obtemos a reta projetiva que denotaremos por P.

ii) $\pi \mid_{\widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus P}: \widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus P \to \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ é biholomorfismo.

Tal aplicação é denominada de explosão de $(0, 0)$ em $\mathbb{C}^2$. A definição de explosão em um ponto p em uma superfície complexa M pode ser feita com a construção que descreveremos a seguir. Definamos $\varphi : \widetilde{U} \setminus \{p\} \to U \setminus \{0\}$, uma carta local de p, onde

$\widetilde{U} \subset M$ é uma vizinhança de $p \in M$ e $U \subset \mathbb{C}^2$ é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$. Colamos $\pi^{-1}(0,0)$ com M, usando o biholomorfismo $\phi : \widetilde{U} \setminus \{p\} \to U \setminus \{0\}$ e produzimos uma superfície complexa $\widetilde{M}$. Temos uma aplicação holomorfa $\pi : \widetilde{M} \to M$, tal que $\pi^{-1}(p)$ é uma reta projetiva e $\pi \mid_{\widetilde{M}\setminus\pi^{-1}(p)}: \widetilde{M} \setminus \pi^{-1}(p) \to M \setminus \{p\}$ é biholomorfismo.

Seja uma folheação $\mathcal{F}$ na superfície complexa M, representada por uma 1-forma $\omega = P(x,y)dy - Q(x,y)dx$. O desenvolvimento em série de Taylor de ω em torno de 0 pode ser escrito como $\omega = \sum_{j=k}^{\infty}(P_j(x,y)dy - Q_j(x,y)dx)$, onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos de grau j, com $P_k \neq 0$ ou $Q_k \neq 0$. Consideremos $\pi : \widetilde{M} \to M$, uma explosão em p, singularidade de $\mathcal{F}$. Nas coordenadas (x,t), a explosão pode ser escrita na forma $\pi(x,t) = (x, xt)$. Fazendo $\pi^*\omega(x,t)$ temos

$$\begin{aligned}
\pi * \omega(x,t) &= \sum_{j=k}^{\infty}(P_j(x,xt)d(xt) - Q_j(x,xt)dx) \\
&= x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k}[(tP_j(1,t) - Q_j(1,t)dx) + xP_j(1,t)dt.]
\end{aligned}$$

Dividindo a equação acima por x^k obtemos

$$x^{-k}\pi^*\omega(x,t) = (tP_k(1,t) - Q_k(1,t)dx + xg_1dx + xP_k(1,t)dt + xg_2dt), \tag{6.1}$$

onde g_1 e g_2 são formas holomorfas. Por sua vez, nas coordenadas (v,y), temos $\pi(v,y) = (vy, y)$ e fazendo $\pi^*\omega(vy,y)$ obtemos

$$\pi^*\omega(v,y) = \sum_{j=k}^{\infty}(P_j(vy,y)dy - Q_j(vy,y)d(vy)$$

Assim, da equação anterior temos

$$\pi^*\omega(v,y) = y^k \sum_{j=k} y^{j-k}[(P_j(v,1) - vQ_j(v,1))dy - yQ_j(v,1)dv.]$$

Ao dividirmos a equação por y^k, obtemos

$$y^{-k}\pi^*\omega(v,y) = P_k(v,1) - vQ_k(v,1))dy + yf_1dy - yQ_k(v,1)dv + yf_2dv, \tag{6.2}$$

onde f_1 e f_2 são formas holomorfas. Fazendo $R(x,y) = yP_k - xQ_k$, temos dois casos a considerar:

i) $R(x, y) = 0$. Nesse caso, a explosão é dita *dicrítica.* Temos que (6.1) e (6.2) podem ser divididas, respectivamente, por x e y. Observe que a reta projetiva não é invariante. Note que se $P_k(1, t) \neq 0$ e $Q_k(v, 1) \neq 0$ as folhas de $\mathcal{F}$ são transversais, respectivamente, aos divisores $x = 0$ e $y = 0$. Cada folha transversal dá origem a uma separatriz local de $\mathcal{F}$. Portanto, uma singularidade dicrítica tem infinitas separatrizes.

ii) $R(x, y) \neq 0$. Nesse caso, a explosão é dita *não dicrítica.* Temos que (6.1) e (6.2) não podem ser simplificadas e, assim, a reta projetiva é invariante. De fato em (6.1) e (6.2), respectivamente, os divisores $x = 0$ e $y = 0$ são invariantes pela transformada estrita de $\mathcal{F}$. Observe que as singularidades de $\mathcal{F}$ são em número finito, correspondendo às raízes de $R(1, t)$ e, possivelmente, mais a origem do sistema de coordenadas (x, y).

A folheação em $\widetilde{M}$ induzida por $x^{-(k+1)}\omega$ no caso dicrítico ou $x^{-k}\omega$ no caso não dicrítico é chamada de transformada estrita de $\mathcal{F}$ e denotada por $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Seja $\mathcal{F}$ folheação na variedade complexa M e seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ a explosão de M, com centro em $p \in Sing(\mathcal{F})$ e $\widetilde{\mathcal{F}}$ a transformada estrita de $\mathcal{F}$ por π. A explosão é chamada de não dicrítica se o divisor $E = \pi^{-1}(p)$ é invariante por $\mathcal{F}$. Se o divisor E é não invariante por $\mathcal{F}$, temos que a explosão é dicrítica. Note que uma singularidade é dicrítica se tem infinitas separatrizes passando por ela, e uma explosão é dicrítica se o divisor não for invariante pela folheação.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação induzida por um campo de vetores v. Observe que a singularidades do campo de vetores são singularidades de $\mathcal{F}$. Dada uma singularidade $p \in \mathcal{F}$, tal que $Dv(p) \neq 0$, sejam λ_1 e λ_2 autovalores de $Dv(p)$.

Definição 6.1. Dizemos que uma singularidade $p \in \mathcal{F}$ é reduzida se ocorre uma das alternativas:

i) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$;

ii) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$.

Se a singularidade p de $\mathcal{F}$ atende a i) então ela é dita não degenerada. Já no caso de ii), dizemos que a singularidade é uma sela-nó.

Considere uma seqüência finita de explosões em p, isto é, $\pi = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1$. Temos que π_1 é a explosão em p e π_k é a explosão para algum ponto em $(\pi_{k-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, onde $k = 2, ...n$. Observe que $\pi^{-1}(p)$ é uma união n de retas projetivas, cada uma delas associada a uma das explosões, com cruzamentos normais. Cada um desses cruzamentos é chamado de *esquina*. Se S é um germe de curva analítica passando por p, a transformada estrita de S é dada por $\pi^*(S) = \pi^{-1}\overline{(S \setminus \{0\})}$. Podemos iterar os transformados estritos associados a cada explosão e definir $\pi^*(S) = \pi_n^*...\pi_1^*(S)$.

Seja M uma variedade complexa e tomemos $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa em M. Dada p uma singularidade de $\mathcal{F}$ existem explosões

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} M_1 \xrightarrow{\pi_1} M_0 = M, \tag{6.3}$$

onde $i = 1, ..., n$ e π_i é o blowup de M_{i-1} com centro em p_{i-1}, tal que $p_0 = p$. Denotamos por $\mathcal{F}_i$, onde $i = 1, ..., n-1$, a transformada estrita de $\mathcal{F}_{i-1}$ por π_i, tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ e $p_i \in Sing(\mathcal{F})$.

O Teorema de Seidenberg (ver [Sei]), que será enunciado a seguir, afirma que se p é uma singularidade isolada de uma folheação $\mathcal{F}$, então, após uma sequência de explosões, é possível obter uma folheação que coincide com $\mathcal{F}$ fora do divisor de π cujas singularidades são todas simples. Esse processo é denominado de *resolução* da singularidade da folheação.

Teorema 6.1. *(Teorema de Seidenberg) Toda singularidade isolada de folheação holomorfa em uma superfície complexa admite uma resolução.*

Uma singularidade p é dicrítica se ocorre alguma explosão dicrítica em uma resolução. Isso equivale a existir infinitas separatrizes passando por p. Caso contrário, a singularidade é dita não dicrítica. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação no plano projetivo $\mathbb{P}^2$. Seja S uma curva algébrica e suponhamos que ela seja invariante por $\mathcal{F}$. Tomemos $Sing(\mathcal{F})$ o conjunto singular da folheação $\mathcal{F}$. A proposta desta seção é responder se é possível cotar o grau da curva S em termos do grau de $\mathcal{F}$, agora, colocando restrições sobre as singularidades de $\mathcal{F}$ em S e não mais sobre a curva S. Observe que para o caso dicrítico, não é possível estabelecer essa cota. Com efeito, se tomarmos as curvas dadas por $\frac{x^p}{y^q} = c$, com grau igual a $\max(p, q)$, ao tomarmos a diferencial temos

$$\frac{px^{p-1}y^q dx - qy^{q-1}x^p dy}{y^{2q}} = 0.$$

Concluímos que essas curvas são invariantes pelas folheações definidas por formas de grau um dadas por

$$\omega_p = pydx - qxdy,$$

para p e $q \in \mathbb{Z}$ com $p, q \geq 0$ e $\frac{p}{q} \neq 1$.

Tomemos uma dessingularização de $\mathcal{F}$ em p dada pela sequência de explosões em S,

$$S_n \xrightarrow{\pi_n} S_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} ... \xrightarrow{\pi_2} S_1 \xrightarrow{\pi_1} S_0 = S$$

Seja $E_i = \pi_i^{-1}(p_{i-1}) \subset S_i$ para $i = 1, ..., n$. A folheação $\mathcal{F}$ é não dicrítica se todos os pontos singulares são não dicríticos. Em coordenadas $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$ suponhamos que o campo $v = a\frac{\partial}{\partial X} + b\frac{\partial}{\partial Y}$ represente $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de $p \in Sing(\mathcal{F})$. Vamos denotar por $\nu_p(\mathcal{F})$ o mínimo de $(\nu_p(a), \nu_p(b))$ onde $\nu_p(a)$ é a ordem da singularidade p em a. Seja B um ramo da separatriz S, tal que $p \in B$. Consideremos uma parametrização de Puiseaux de B em p dada por $\varphi : D \to S$, $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$. Vamos denotar por $\mu_p(\mathcal{F}, B)$ a ordem de $\varphi^*(v)$ em 0.

Lema 6.1. *Valem as seguintes expressões:*

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \nu_o(a(\varphi_x(t), \varphi_y(t))) - \nu_o(\varphi_x(t)) + 1 \ \textit{se} \ \varphi_x(t) \neq 0 \\ \nu_o(b(\varphi_x(t), \varphi_y(t))) - \nu_o(\varphi_y(t)) + 1 \ \textit{se} \ \varphi_y(t) \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, façamos $\alpha(t) = \varphi^*(v)$ e considere $\varphi(t) = (\varphi_x(t), \varphi_y(t))$. Então $d\varphi \circ \alpha = v(\varphi(t))$, de onde obtemos

$$(\varphi_x'(t), \varphi_y'(t)(\alpha(t)) = (a(\varphi(t)), b(\varphi(t))).$$

Isso implica em

$$\alpha(t) = \frac{a(\varphi(t))}{\varphi_x'(t)} = \frac{(b(\varphi(t))}{\varphi_y'(t)}. \tag{6.4}$$

Vamos supor $\varphi_y'(t) \neq 0$. Denotamos por $\nu_{\alpha(t)}$ a multiplicidade de $\alpha(t)$. De (6.4) podemos afirmar que

$$\nu_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = \nu_{\alpha(t)}(b(\varphi(t))) - \nu_{\alpha(t)}(\varphi_y'(t)).$$

Lembrando que $\nu_{\alpha(t)}(\varphi'_y(t)) = \nu_0(\varphi_y(t)) - 1$, obtemos da equação anterior

$$\nu_{\alpha(t)}(\alpha(t)) = \nu_{\alpha(t)}(b(\varphi(t))) - \nu_{\alpha(t)}(\varphi_y(t)) + 1.$$

C.Q.D.

Considere $\mathcal{F}$ folheação em uma variedade complexa M. Agora seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ a explosão na variedade complexa M com centro em $p \in Sing(\mathcal{F})$, $\widetilde{B}$ a transformada estrita de B por π, $\widetilde{\mathcal{F}}$ a transformada estrita de $\mathcal{F}$ por π e $\widetilde{p}$ o ponto dado por $\pi^{-1}(p) \cap B$. Então, (ver [F])

$$\text{(6.5)} \qquad \mu_{\widetilde{p}}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}) = \begin{cases} \mu_p(\mathcal{F}, B) + \nu_p(\mathcal{F})\dot{\nu}_p(B) \text{ se } \pi \text{ é dicrítico} \\ \mu_p(\mathcal{F}, B) + (\nu_p(\mathcal{F}) - 1)\dot{\nu}_p(B) \text{ se } \pi \text{ é não dicrítico.} \end{cases}$$

Para enunciarmos e demonstrarmos o próximo lema, vamos introduzir algumas definições relacionadas ao cálculo de multiplicidades algébricas em uma reta projetiva ou em uma dada folheação no processo de explosão.

Definição 6.2. Sejam $\mathcal{F}$ folheação e $p \in Sing(\mathcal{F})$ singularidade não dicrítica. O peso $\rho(P)$ em uma reta projetiva P que aparece no processo de dessingularização com centro em p é definido como:

i) $\rho(P) = 1$, se p aparece imediatamente após a primeira explosão com centro $0 \in \mathbb{C}^2$.

ii) $\rho(P)$, a soma dos pesos das retas projetivas que se encontram em uma singularidade que sofreu uma explosão para originar P.

É possível demonstrar que $\rho(P)$ coincide com a multiplicidade algébrica de uma curva irredutível, cuja dessingularização é transversal a P (ver [CLS]).

Definição 6.3. Seja $\mu_p(\mathcal{F}, P)$ a multiplicidade de $\mathcal{F}$ em p ao longo de P. Vamos definir, após a dessingularização, $\varphi(p, P)$ como

$$\varphi(p, P) = \begin{cases} \mu_p(\mathcal{F}, P) \text{ se } p \in P \text{ não for uma esquina} \\ \mu_p(\mathcal{F}, P) - 1 \text{ se } p \in P \text{ for uma esquina.} \end{cases}$$

Definição 6.4. Um campo vetorial v com singularidade $0 \in \mathbb{C}^2$ é dita curva generalizada, se não aparecem singularidades do tipo sela nó em sua dessingularização.

Lema 6.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação local em $p \in \mathbb{C}^2$, onde p é singularidade não dicrítica. Seja C o conjunto das separatrizes de $\mathcal{F}$ em p. Então*

$$m_p(C) \leq m_p(\mathcal{F}) + 1,$$

onde m_p denota a multiplicidade algébrica.

Demonstração. A demonstração é feita a partir de resultados encontrados em [CLS]. Do teorema 1 em [CLS], temos

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{p \in \widetilde{P}} \rho(P)\varphi(p, P). \tag{6.6}$$

Agora, se $f = 0$ é equação local reduzida de C e $\mathcal{F}_f$ é a folheação induzida por $df = 0$, temos

$$m_p(\mathcal{F}_f) + 1 = m_p(df) + 1 = m_p(C). \tag{6.7}$$

Ao decompor a soma em (6.6) em duas parcelas obtemos

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{p \in S_1} \rho(P)\varphi(p, P) + \sum_{p \in S_2} \rho(P)\varphi(p, P), \tag{6.8}$$

onde S_1 corresponde a todas as singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}$, dessingularização de $\mathcal{F}$, em $\widetilde{P}$ que possuem duas separatrizes (ou seja, os pontos de S_1 são aqueles onde passam os transformados estritos dos ramos de C juntamente com as esquinas de $\widetilde{P}$) e S_2 corresponde às demais singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}$ em $\widetilde{P}$. Considerando que a folheação $\mathcal{F}_f$ é curva generalizada e, como a sequência de explosões que dessingulariza $\mathcal{F}$ também dessingulariza o conjunto de separatrizes C, pelo Teorema 2 em [CLS], essa mesma sequência de explosões dessingulariza $\mathcal{F}_f$. Denote por $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ o transformado estrito de $\mathcal{F}_f$. As singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ são exatamente os pontos de S_1. Assim, aplicando o Teorema 1 em [CLS] novamente para $\mathcal{F}_f$ obtemos

$$m_p(C) = m_p(\mathcal{F}_f) + 1 = \sum_{p \in S_1} \rho(P)\varphi(p, P).$$

O resultado segue de (6.8) observando que $\varphi(p, P) = 1$ para as singularidades de $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ e, além disso, $\sum_{p \in S_2} \rho(P)\varphi(p, P) \geq 0$. **C.Q.D.**

Lema 6.3. *Sejam C uma curva analítica de grau m e $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ tal que C: $\{f=0\}$ em coordenadas afins. Suponhamos que L_∞ seja transversal a C. Denote por $\mathcal{G}$ a folheação definida pela forma df em uma vizinhança de p. Se $p \in C \cap L_\infty$, dado um ramo B de C em p, então $\mu_p(\mathcal{G}, B) = 1$.*

Demonstração. Façamos $f(X,Y) = c$ em $\mathbb{C}^2$, sabendo que $df = 0$ induz $\mathcal{G}$. Ao procedermos a mudanças de coordenadas, $X = \frac{x}{z}$ e $Y = \frac{y}{z}$ e a homogeinização de $f(X,Y) = c$ obtemos

$$z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = F(x,y,z) = z^m c$$

onde m é o grau de f. Agora, nas coordenadas (U,V), com $V = \frac{1}{y}$ e $U = \frac{x}{y}$, temos que $L_\infty = \{U = 0\}$. Suponhamos que $p = (0,0)$ nas coordenadas (U,V). As curvas de nível de $\mathcal{G}$ são da forma $f(X,Y) = c$. Em coordenadas homogêneas são dadas por

$$F(x,y,z) = z^m c.$$

Nas coordenadas (U,V) temos que as curvas de $\mathcal{G}$ são da forma $g(U,V) = cV^m$, onde $g(U,V) = F(\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y})$. Então, L_∞ corresponde a $z = 0$, ou seja, $V = 0$. Como C é transversal a L_∞ em p, $\frac{\partial g}{\partial U}(0,0) \neq 0$. Fazendo a mudança analítica de coordenadas locais definida por

$$(\widetilde{U}, \widetilde{V}) = (g(U,V), V),$$

onde $L_\infty : \widetilde{V} = 0$ e $C : \widetilde{U} = 0$, e como $g(U,V) = cV^m$, as curvas integrais de $\mathcal{G}$ são dadas por $\widetilde{U} = c\widetilde{V}^m$. Isso implica que $\mathcal{G}$ é induzida por $\frac{\widetilde{U}}{\widetilde{V}^m} = c$. Tomando a diferencial da expressão anterior obtemos

$$d\left(\frac{\widetilde{U}}{\widetilde{V}^m}\right) = \frac{\widetilde{V}^m d\widetilde{U} - \widetilde{U} m \widetilde{V}^{m-1} d\widetilde{V}}{(\widetilde{V}^m)^2} = 0.$$

Ao cancelarmos os pólos temos

$$\widetilde{V} d\widetilde{U} - m\widetilde{U} d\widetilde{V} = 0.$$

Dessa expressão segue que $\mu_p(\mathcal{G}, B) = 1$. **C.Q.D.**

Lema 6.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação e $p \in \mathcal{F}$ singularidade não dicrítica. Seja C uma curva analítica que passa por p, não invariante por $\mathcal{F}$, e $f = 0$ a equação reduzida para C em p. Denote por $\mathcal{G}$ a folheação definida pela forma df em uma vizinhança de p. Dado um ramo B de C em p, então*

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) \geq \mu_p(\mathcal{G}, B).$$

Demonstração. Tomemos uma sequência de explosões em $p \in \mathcal{F}$ que denominaremos π, tal que $\pi = \pi_n \circ ... \circ \pi_1$ onde $\pi_1 : M_1 \to M_0 = M$ e $\pi_n : M_n \to M_{n-1}$. Denotamos $B = B_0$ e B_i a transformada estrita de B_{i-1}, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_i = \pi_i^*(\mathcal{F}_{i-1})$, e fazemos $p_0 = p$ e $p_i = E_i \cap B_i$ onde $i = 1, ..., n-1$. Além disso, B_n é não singular e transversal a E_n, com B_n e E_n invariantes por $\mathcal{F}_n$. Vamos denotar por C_i a transformada estrita de C_{i-1} por π_i e $\mathcal{G}_i$ a transformada estrita de $\mathcal{G}$ por π_i, com $C_0 = C$ e $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. Como B_n e E_n são invariantes por $\mathcal{F}_n$, concluímos que $p_n = E_n \cap B_n$ é ponto singular de $\mathcal{F}_n$. Além disso, $p_n = E_n \cap B_n$ é singularidade reduzida de $\mathcal{G}_n$, pois $\mathcal{G}$ não tem singularidades do tipo sela-nó, devido ao fato de se tratar de curva generalizada e possuir duas separatrizes lisas transversais pelo Lema 1 em [CLS].

Temos, portanto

$$\mu_{p_n}(\mathcal{F}, B) \geq \mu_{p_n}(\mathcal{G}_n, B_n) = 1.$$

Usando (6.5), resta demonstrar que $\nu_{p_i}(\mathcal{F}_i) \geq \nu_{p_i}(\mathcal{G}_i)$ para $i = 1, ..., n-1$. Denotamos por $e(i)$ o número de componentes irredutíveis de $E_i = (\pi_1 \circ ... \circ \pi_i^{-1})(p)$, passando por p_i, para $i = 1, ..., n$. Note que $e(1) = 1$, $e(n) = 1$ e $e(i) = 1$ ou 2, para $i = 2, ..., n-1$. Como C_i e E_i são invariantes por $\mathcal{F}_i$, temos

$$\nu_{p_i}(G_i) = \nu_{p_i}(C_i) + e(i) - 1.$$

Do lema 6.2, concluímos que

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) \geq \mu_p(\mathcal{G}, B).$$

C.Q.D.

Teorema 6.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ e seja C uma curva algébrica em $\mathbb{P}^2$. Suponhamos que C seja invariante por $\mathcal{F}$ e que as singularidades de $\mathcal{F}$ em C são não dicríticas. Então,*

$$\text{grau}(C) \leq \text{grau}(\mathcal{F}) + 2$$

Demonstração. Tomemos um sistema de coordenadas afins $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$ tal que C e a reta no infinito L_∞ sejam transversais. Seja $f = 0$ a equação reduzida de C. Vamos denotar por $\mathcal{G}$ a folheação induzida por df. Como base no lema 6.3, segue que nos pontos $p_1, ..., p_n \in C \cap L_\infty$, vale $\mu_{pi}(\mathcal{G}, C) = 1$. Agora, consideremos $q \in C$, tal que $q \neq p_i$, e B um ramo de C em p. Pelo Lema 6.4, temos que

$$\mu_q(\mathcal{F}, B) \geq \mu_q(\mathcal{G}, B). \tag{6.9}$$

Sejam $C_1, ..., C_t$, componentes irredutíveis de C e consideremos que grau$(f) = m$ e grau$(\mathcal{F}) = n$. Da proposição 1.1 podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{t} \chi(C_j) + m(n-1) = \sum_{p \in C} \left(\sum_{B \in C_p} \mu_p(\mathcal{F}, B) \right),$$

onde C_p denota o germe de C no ponto p. Usando (6.9) segue que

$$\sum_{j=1}^{t} \chi(C_j) + m(n-1) \geq \sum_{p \in C} \left(\sum_{B \in C_p} \mu_p(\mathcal{G}, B) \right) - m.$$

Note que grau de $\mathcal{G}$ é $m - 1$ e daí

$$\sum_{p \in C} \left(\sum_{B \in C_p} \mu_p(\mathcal{G}, B) \right) - m = \sum_{j=1}^{t} \chi(C_j) + m(m-2) - m.$$

Isso nos dá $m(n-1) \geq m(m-3)$. Como $m > 0$, concluímos que $m \leq n + 2$, como queríamos demonstrar. **C.Q.D.**

Referências

[Ca] Cartan, Henri *Sur le permier problème de Cousin*, C.R. Acad. Sci., Paris 207, 558-560 (1938).

[Car] Carnicer, Manuel *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 2, 289-294.

[Ce] Cerveau, D. & Lins Neto, A. *Holomorphic foliations in* $C\mathrm{P}(2)$ *having an invariant algebraic curve*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), no. 4, 883-903.

[CLS] Camacho, César & Lins Neto, Alcides & Sad, Paulo *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Differential Geometry 20(1984) no. 1, 143–174.

[CM] Cerveau, D. & Maittei, J. F. *Formes intégrables holomorphes singulières*, Asterisque, 97. Société Mathématique de France, Paris, 1982. 193 pp.

[F] De La Fuente, J. G. *Divisor of a foliation on a separatrix, the degree of the separatrix*, preprint, Universidad de Valladolid, Spain, 1990.

[GH] Griffiths, Phillip & Harris, Joseph *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. xii+813 pp.

[J] Jouanolou, J. P. Équations of Pfaff Algébriques, Lecture Notes in Math, 708, Springer, Berlin, 1979. v+255 pp.

[LS] Lins Neto, Alcides & Scárdua, Bruno. A. *Folheações Algébricas Complexas*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[Li] Lins Neto, Alcides *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*, Holomorphic dynamics (Mexico, 1986), 192-232, Lecture Notes in Math., 1345, Springer, Berlin, 1988.

[Sa] Saíto, Kyoji. *On a generalization of the De-Rham Lemma*, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), no. 2, vii, 165–170. Saito, Kyoji.

[Sei] Seidenberg, A. *Reduction of singularities of the differential equation Ady=Bdx*, Amer. J. Math. 90(1968), 248-269.

[Sha] Shabat, B. V. *Introduction to Complex Analysis - Part II Functions of Several Variables*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. x+371 pp.

[SoMo] Soares, Márcio. G. & Mol, Rogério. S. *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA, Rio de Janeiro, 2001, viii+197 pp.