Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matématica

Dissertação de Mestrado

O Método da Média
para equações diferenciais não autônomas

Eduardo Carlos Cabrera Zúñiga

Orientadoras:

Sônia Pinto de Carvalho e Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva

Belo Horizonte

Fevereiro 2010

O Método da Média
para equações diferenciais não autônomas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por **Eduardo Carlos Cabrera Zúñiga.**

Belo Horizonte, 23 de Fevereiro de 2010.

Profs. **Sônia Pinto de Carvalho e Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva.** *Orientadoras*

Banca examinadora:

Prof. Antônio Augusto Gaspar Ruas.
Prof. César de Souza Eschenazi.
Prof. Sônia Pinto de Carvalho.
Prof. Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas, **ICEX**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Ao Deus.

À minha família,

em especial a minha irmã Nora,

e minhas mães Olinda, Nora, Haydee e Rebeca.

Agradecimentos

Às minhas orientadoras Sônia e Sylvie, por acreditar em mim e especialmente pelo apoio e orientação nos momentos mais complicados e por compartilhar a alegria a cada avance.

Aos prezados professores Alberto, Adrian, Aniura, Carlos, César, Gaspar, Viktor, Loretta, Emilio e Sergio.

Aos queridos funcionários Andréa e Valdney.

Aos meus amigos das moradias I e II, em especial ao Juscelino, Gladston, Ezio, Jose, Mirlene, Morgana, Traquis, Alexandra, Vivian e Mariane.

Aos colegas da pós-graduação, em especial ao Heleno e ao Reginaldo Braz.

À Narjara, por dar felicidade e amor ao meu coração.

À Nora, minha irmã e melhor amiga, muito obrigado pelo carinho, apoio, compreensão e por torcer incondicionalmente por mim.

Conjetura:

Se sempre plantarmos o melhor da vida,

recolheremos ainda na dor,

alegria, afeito e vida verdadeira.

E. C. Z.

Resumo

Baseados nos trabalhos *Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family*, de Mark Levi e Qiran Ren, e *Geometry and physics of averaging with applications*, de Mark Levi, apresentamos o método da média. Com este, é possível estudar equações diferenciais ordinárias não-autônomas e periódicas no tempo, via equações autonômas a menos de um erro que pode ser controlado segundo uma precisâo desejada.

Seguindo as ideias de Mark Levi e Qiran Ren em *Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family*, usamos o método da média para demonstrar que uma vibração normal e periódica de uma superfície induz em uma massa pontual que se movimenta livremente sobre ela uma aceleração tangencial à superfície que é proporcional à curvatura da curva normal a esta.

Abstract

Based on the papers *Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family*, by Mark Levi and Qiran Ren, and *Geometry and physics of averaging with applications*, by Mark Levi, we present the averaging method. This allow to study time periodic non-autonomus ordinay differential equations using autonomous differential equations with errors that can be controled at given precision.

Following the ideas of Mark Levi and Qiran Ren in *Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family*, we use the averaging method to prove that a normal and periodic vibration of a surface induces on a mass moving freely on it, a tangencial acceleration to the surface. This acceleration is proportional to the curvature of the normal curve.

Sumário

Introdução

O enfoque central deste trabalho é o estudo de equações diferenciais ordinárias não-autônomas, periódicas no tempo. Seu conteúdo está baseado nos trabalhos *Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family*, de Mark Levi e Qiran Rei, [5] e *Geometry and physics of averaging with applications*, de Mark Levi, [6].

No capítulo 1, expomos o método da média. Ele nos fornece mudanças de coordenadas que transformam equações da forma

$$Z' = \delta F(Z,\tau)$$

onde $Z \in \mathbb{R}^6$, $\tau \in \mathbb{R}$, δ é um parâmetro fixo, $F : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ é limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas, periódica de período T em τ e com média $\overline{F}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T F(z,\tau)\,d\tau$ em equações da forma

$$z_k' = \delta\overline{F}(z_k) + \delta^2\overline{F_1}(z_k) + ... + \delta^k\overline{F_{k-1}}(z_k) + O\left(\delta^{k+1}\right).$$

Essa transformação nos permite estudar o sistema original como um sistema autônomo mais um erro que pode ser controlado segundo uma precisão desejada. Além disso, as soluções da nova equação e as soluções da mesma equação desprezando-se os termos $O\left(\delta^{k+1}\right)$ estão próximas num tempo finito, desde que as respectivas condições iniciais satisfaçam condições de proximidade que estabeleceremos no corpo do trabalho.

Na seção 2.1, aplicamos o método do capítulo 1 ao sistema

$$\begin{aligned} X' &= \delta Y \\ Y' &= \delta\left[g(X,Y) + A(\tau) f(X)\right] \end{aligned}$$

para transformá-lo num sistema autônomo a menos de um erro.

Na seção 2.2, abordamos o problema tratado no artigo *Geodesics on Vibrating Surfaces and Curvature of the Normal Family*, de Mark Levi e Qiran Ren, [5]. Consideramos uma superfície vibrando periodicamente e uma massa pontual livre na superfície. A vibração da superfície gera uma aceleração na massa na direção normal à superfície. Nosso objetivo é entender porque essa aceleração normal pode produzir trajetórias não normais.

Obtemos a superfície vibrante considerando uma função $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com $\nabla\varphi \neq 0$, tal que φ é limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas e uma função real s que é C^2, limitada, periódica de período ε, de média nula, tal que $s(0) = 0$ e cuja imagem está contida no conjunto de valores regulares de φ. A equação $\varphi(x) = s(t)$ define a superfície vibrante tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ ela é uma superfície diferenciável.

Aplicamos os resultados da seção 2.1 à equação diferencial que descreve o movimento de uma massa pontual na superfície vibrante e a equação obtida revela que de fato há uma aceleração tangente à superfície, além da aceleração normal produzida pela geometria da superfície (no texto faremos uma comparação com o caso estático onde as trajetórias são as geodésicas).

A interpretação geométrica do problema é enriquecida observando-se que a vibração produz uma família de curvas normais à família de superfícies e que a aceleração tangencial é proporcional à curvatura, k, da curva nomal à superfície no ponto considerado, apontando no sentido oposto à concavidade da curva normal.

Capítulo 1

O método da média para EDO´S

Consideremos o sistema

$$Z' = \delta F\left(Z\left(\tau\right), \tau\right) \tag{1.1}$$

onde δ é um parâmetro fixado com $0 < \delta < 1$ e $F : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$, com $(Z, \tau) \mapsto F(Z, \tau)$ uma função de período 1 em τ, limitada, C^∞, com derivadas de todas as ordens limitadas. Estas condições garantem, pelo teorema de Picard, soluções únicas para cada condição inicial dada (veja [1]).

Neste capítulo mostraremos que podemos aplicar sucessivas mudanças de coordenadas no sistema (1.1) para obter um novo sistema médio.

1.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos resultados básicos que permitem transformar o sistema (1.1) num sistema chamado sistema médio.

Definição 1.1. *A média em τ de uma aplicação $F : (\Omega \subset \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ contínua e periódica em τ, de período T, é denotada por $\overline{F}(z)$ e é dada por*

$$\overline{F}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T F(z, \tau)\, d\tau$$

Lema 1.1. *Seja $F : (\Omega \subset \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, contínua, limitada, periódica em τ, Lipschitz em z, com constante de Lipschitz igual a K, e $\overline{F}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T F(z, \tau)\, d\tau$ sua média temporal. Então $\overline{F}$ também é Lipschitz em z, com a mesma constante K.*

Demonstração. Se K é a constante de Lipschitz de F, em relação à variável z, temos que $|F(z_1,\sigma) - F(z_2,\sigma)| \leqslant K|z_1 - z_2|$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{F}(z_1) - \overline{F}(z_2)\right| &= \left|\frac{1}{T}\int_0^T F(z_1,\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{T}\int_0^T F(z_2,\sigma)\,d\sigma\right| \\
&= \frac{1}{T}\left|\int_0^T [F(z_1,\sigma) - F(z_2,\sigma)]\,d\sigma\right| \\
&\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \max_{0\leqslant\sigma\leqslant T}|F(z_1,\sigma) - F(z_2,\sigma)|\,d\sigma \\
&\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T K|z_1 - z_2|\,d\sigma = K|z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

□

Lema 1.2. *Se $F : (\Omega \subset \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é limitada, periódica em τ, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas, então $\overline{F}(z)$ é C^∞ e tem derivadas de todas as ordens limitadas.*

Demonstração. Como F é C^∞, pela regra de Leibniz, temos que $D^n\overline{F}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T \partial_z^n F(z,\tau)\,d\tau$, ou seja, $\overline{F}$ tem derivadas de todas as ordens. Além disso, como F tem derivadas limitadas, qualquer $\frac{1}{T}\int_0^T \partial_z^n F(z,\tau)\,d\tau$ também é limitada, o que prova que $\overline{F}(z)$ tem derivadas limitadas. □

Lema 1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica, com período T, tal que $\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma)\,d\sigma = 0$ (f tem média nula) e seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que a aplicação $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $E(z,\tau) = f(\tau)\,G(z)$ satisfaz as hipóteses do lema 1.2. Então, existe $\tau_0 \in [0,T]$ tal que*

$$\int_0^\tau E(z,\sigma)\,d\sigma - \overline{E}(z) = \left[\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma\right] G(z)$$

onde $\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma$ tem média, $\overline{\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma}$, nula.

Demonstração. É suficiente provar o lema para $\tau \in [0,T]$ pois $\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma$ é uma função periódica de período T. Isto segue do seguinte fato:
Se considerarmos $\int_\tau^{\tau+T} f(\sigma)\,d\sigma$, temos que $\frac{d}{d\tau}\int_\tau^{\tau+T} f(\sigma)\,d\sigma = f(\tau+T)\,.\frac{d(\tau+T)}{d\tau} - f(\tau) = 0$, isto é, $\int_\tau^{\tau+T} f(\sigma)\,d\sigma = \int_0^T f(\sigma)\,d\sigma = 0$. Assim, $\int_0^{\tau+T} f(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma + \int_\tau^{\tau+T} f(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma + 0 = \int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma$.
Como $\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma$ é contínua em $[0,T]$, pelo teorema do valor médio para integrais, existe $\tau_0 \in [0,T]$, tal que $\int_0^{\tau_0} f(\sigma)\,d\sigma = \overline{\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma}$.

Assim,

$\int_0^\tau E(z,\sigma)\,d\sigma - \overline{E}(z) = \left[\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma\right] G(z) - \left[\overline{\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma}\right] G(z) = \left[\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma\right] G(z).$

Resta mostrar que $\overline{\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma} = 0$. Notemos que $\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma - \int_0^{\tau_0} f(\sigma)\,d\sigma = \int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma - \overline{\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma}$. Logo $\overline{\int_{\tau_0}^\tau f(\sigma)\,d\sigma} = \overline{\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma - \overline{\int_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma}} = 0$. □

Lema 1.4. *Sejam $F : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$, uma função limitada, de período 1 na última variável, C^∞, com derivadas de todas as ordens limitadas e h_1 definida por*

$$h_1(z,\tau) = \int_0^\tau \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma - \overline{\int_0^\tau \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma} \tag{1.2}$$

Então, a função h_1 é periódica de período 1 em τ, limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas e $\overline{h_1}(z) = 0$.

Demonstração. Se definirmos $G(z,\tau)$ por $G(z,\tau) = \int_0^\tau \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma$, então $G(z,\tau)$ é periódica de período 1 em τ, pois

$$\begin{aligned}
G(z,\tau+1) &= \int_0^{\tau+1} \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma \\
&= \int_0^{\tau} \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma + \int_\tau^{\tau+1} \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma \\
&= G(z,\tau) + \int_0^1 \left(F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right) d\sigma = G(z,\tau) + \int_0^1 F(z,\sigma)\,d\sigma - \int_0^1 \overline{F}(z)\,d\sigma \\
&= G(z,\tau) + \overline{F}(z) - \overline{F}(z) = G(z,\tau).
\end{aligned}$$

Observamos que a média de G, denotada por $\overline{G}(z) = \int_0^1 G(z,\tau)\,d\tau$ é uma aplicação que só depende de z.

Portanto, $h_1(z,\tau) = G(z,\tau) - \overline{G}(z)$ está bem definida e é periódica de período 1 em τ.

h_1 tem média nula, pois $\overline{h_1}(z) = \int_0^1 h_1(z,\tau)\,d\tau = \overline{G}(z) - \overline{G}(z) = 0$.

Para mostrar que h_1 é limitada, observamos primeiro que

$$\begin{aligned}
|G(z,\tau)| &\leqslant \int_0^1 \max_{0\leqslant\tau\leqslant1} \left|F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right| d\tau \leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant1} \left|F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right| \\
\left|\overline{G}(z)\right| &\leqslant \max_{0\leqslant\tau\leqslant1} \left|F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right| \\
|h_1(z,\tau)| &\leqslant |G(z,\tau)| + \left|\overline{G}(z)\right| \leqslant 2 \max_{0\leqslant\tau\leqslant T} \left|F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right|
\end{aligned}$$

Portanto, $G(z,\tau)$, $\overline{G}(z)$ e h_1 são limitadas, porque F e $\overline{F}$ são limitadas.

Resta mostrar que h_1 é C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas.

Para mostrar que as derivadas de h_1 são limitadas, observamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se
$\partial_z^k \overline{F}(z) = D^{(k)}\overline{F}(z) = \int_0^1 \partial_z^k F(z,\sigma)\, d\sigma = \overline{\partial_z^k F}(z)$ é contínua (Leibniz) e limitada. Então,
$\partial_z^k G(z,\tau) = \int_0^\tau \partial_z^k \left[F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right] d\sigma = \int_0^\tau \left[\partial_z^k F(z,\sigma) - \overline{\partial_z^k F}(z)\right] d\sigma$ é limitada e contínua e
$\partial_z^k \overline{G}(z) = D^{(k)}\overline{G}(z) = \int_0^1 \partial_z^k \int_0^\tau \left[F(z,\sigma) - \overline{F}(z)\right] d\sigma d\tau = \overline{\partial_z^k G}(z)$ também é limitada e contínua.

$\partial_\tau^k \overline{G}(z) = 0.$
$\partial_\tau G(z,\tau) = F(z,\tau) - \overline{F}(z)$ é limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas.
Segue-se que $\partial_\tau^k G(z,\tau)$ é limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas.

$\partial_\tau^k h_1(z,\tau) = \partial_\tau^{k-1}\left[F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right]$ é limitada e contínua.
$\partial_z^k h_1(z,\tau) = \int_0^\tau \left[\partial_z^k F(z,\sigma) - \overline{\partial_z^k F}(z)\right] d\sigma - \overline{\partial_z^k G}(z)$ é limitada e contínua.

Para $k = 1$, temos que $\partial_z h_1(z,\tau)$ e $\partial_\tau h_1(z,\tau)$ são limitadas e contínuas, logo h_1 é C^1. Além disso, $|Dh_1| \leqslant |\partial_z h_1| + |\partial_\tau h_1|$, ou seja, Dh_1 é limitada.

Para $k = 2$, provar que h_1 é C^2, é o mesmo que provar que Dh_1 é C^1. Então, sabendo que $\partial_z^2 h_1(z,\tau)$, $\partial_\tau^2 h_1(z,\tau)$ e $\partial_z\partial_\tau h_1(z,\tau) = \partial_\tau\partial_z h_1(z,\tau) = \partial_z\left[F(z,\tau) - \overline{F}(z)\right]$ são limitadas e contínuas, derivando a igualdade $Dh_1(z,\tau).(\_,\_) = \partial_z h_1(z,\tau).(\_) + \partial_\tau h_1(z,\tau).(\_)$, temos que as derivadas parciais de Dh_1 são limitadas e contínuas. Os mesmos argumentos usados para o caso $k = 1$, mostram que h_1 é C^2. $D^{(2)}h_1$ é limitada, pois as derivadas parciais de Dh_1 são limitadas.

Para demonstrar que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $D^{(k)}h_1$ é limitada e contínua, basta aplicar recursivamente o mesmo processo realizado nos dois casos anteriores, pois as derivadas parciais de $D^{(k-1)}h_1$ são limitadas e contínuas. $\square$

Lema 1.5. *Sejam h_1 como no lema 1.4 e $H_1 : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$ definida por*

$$(Z, \tau) = H_1(z, \tau) = (z + \delta h_1(z, \tau), \tau). \tag{1.3}$$

Se $0 < \delta < \frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}$, então H_1 é uma mudança de coordenadas.

Demonstração. A derivada de H_1

$$DH_1(z, \tau) = \begin{bmatrix} I_{6\times6} + \delta\partial_z h_1 & \delta\partial_\tau h_1 \\ 0_{1\times6} & 1 \end{bmatrix}_{7\times7}$$

é inversível para todo $(z, \tau) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$, se o determinante da matriz $I_{6\times6} + \delta\partial_z h_1(z, \tau)$ é não nulo. Assim, se $\delta < \frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}$, existe $[I_{6\times6} + \delta\partial_z h_1(z, \tau)]^{-1}$ e, pelo Teorema da Função Inversa, H_1 é um difeomorfismo local C^∞.

Para provar que H_1 é um difeomorfismo global provaremos, inicialmente, que H_1 é um homeomorfismo global. Pondo $H_1 = (z, \tau) + \delta(h_1(z, \tau), 0)$ só precisamos analisar os pontos do domínio de H_1 onde podemos perder a injetividade, ou seja, pontos do domínio tais que $H_1(z_a, \tau_a) = H_1(z_b, \tau_b)$, isto é, $\tau_a = \tau_b$. Isso implica que só precisamos analisar nos pontos que têm z, a primeira variável, diferente. Como o intervalo $[0, 1]$ é compacto e h_1 é periódica em τ, então para todo $\tau \in \mathbb{R}$, existe $\tau_M \in [0, 1]$, tal que

$$\begin{aligned} |\delta(h_1(z_b, \tau), 0) - \delta(h_1(z_a, \tau), 0)| &\leqslant |\delta h_1(z_b, \tau_M) - \delta h_1(z_a, \tau_M)| \\ &\leqslant \delta \sup|\partial_z h_1| \, |(z_a, \tau) - (z_b, \tau)|. \end{aligned}$$

Portanto, se $0 < \delta \sup|\partial_z h_1| < 1$, $\delta(h_1(z, \tau), 0)$ será contração e, pelo Teorema da Perturbação da Identidade [3], H_1 será um homeomorfismo global. Assim, temos que se $0 < \delta < \frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}$, então H_1 é um difeomorfismo global, ou seja, uma mudança de coordenadas. □

Definição 1.2. *Dizemos que uma aplicação $G(z, \tau, \delta)$ é da ordem δ^i, e denotamos $G(z, \tau, \delta) = O(\delta^i)$, $\delta > 0$, $i \geqslant 0$, se existem constantes δ^* e $M > 0$ tais que, para todo (z, τ) no domínio da aplicação e para cada $0 < \delta \leqslant \delta^*$, $|G(z, \tau, \delta)| \leqslant M\delta^i$.*

1.2 Primeira mudança de coordenadas

Nesta seção e nas que se seguem aplicaremos os resultados da seção 1.1 a sistemas da forma $Z' = \delta F(Z(\tau), \tau)$, onde $Z' = \frac{dZ}{d\tau}$.

Proposição 1.1. *Sejam* $h_1 : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ *a função obtida no lema 1.4 e* $H_1 : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$ *a mudança de coordenadas obtida no lema 1.5. Nessas coordenadas, o sistema* $Z' = \delta F(Z, \tau)$ *se transforma na equação*

$$z_1' = \delta \overline{F}(z_1) + \delta^2 F_1(z_1, \tau) + O\left(\delta^3\right) \tag{1.4}$$

onde $F_1(z_1, \tau) = \left[\partial_z F(z_1, \tau) .h_1(z_1, \tau) - \partial_z h_1(z_1, \tau) \overline{F}(z_1)\right]$ *é limitada, periódica em* τ, C^∞ *com derivadas de todas as ordens limitadas, e é Lipschitz.*

Demonstração. Usando a mudança de coordenadas H_1 na equação diferencial $Z' = \delta F(Z, \tau)$, temos

$$\frac{d}{d\tau}\left[z_1 + \delta h_1(z_1, \tau)\right] = \delta F(z_1 + \delta h_1(z_1, \tau), \tau),$$

de onde

$$\begin{aligned} \left[I + \delta \partial_z h_1(z_1, \tau)\right] z_1' &= \delta F(z_1 + \delta h_1(z_1, \tau), \tau) - \delta \partial_\tau h_1(z_1, \tau) \\ z_1' &= \left[I + \delta \partial_z h_1(z_1, \tau)\right]^{-1} \left[\delta F(z_1 + \delta h_1(z_1, \tau), \tau) - \delta \partial_\tau h_1(z_1, \tau)\right], \end{aligned}$$

onde

$$\left[I + \delta \partial_z h_1(z_1, \tau)\right]^{-1} = \left[I - \delta \partial_z h_1(z_1, \tau) + \left(\delta \partial_z h_1(z_1, \tau)\right)^2 - \left(\delta \partial_z h_1(z_1, \tau)\right)^3 + ...\right].$$

Usando o desenvolvimento de Taylor para $F(z_1 + \delta h_1(z_1, \tau), \tau)$, temos

$$\left[\delta F(z_1 + \delta h_1(z_1, \tau), \tau) - \delta \partial_\tau h_1(z_1, \tau)\right] = \left[\delta \overline{F}(z_1) + \delta^2 \partial_z F(z_1, \tau) .h_1(z_1, \tau) + \ ...\right].$$

Portanto,

$$z_1' = \delta \overline{F}(z_1) + O\left(\delta^2\right). \tag{1.5}$$

Mais especificamente,

$$z_1' = \delta \overline{F}(z_1) + \delta^2 F_1(z_1, \tau) + O\left(\delta^3\right), \tag{1.6}$$

onde $F_1(z_1, \tau) = \left[\partial_z F(z_1, \tau) .h_1(z_1, \tau) - \partial_z h_1(z_1, \tau) \overline{F}(z_1)\right]$.

Pelas condições de diferenciabilidade de F, $\overline{F}$ e h_1, temos que F_1 é limitada, periódica de período 1 em τ, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas. Como a desigualdade do valor médio se cumpre nos domínios convexos e a derivada é limitada, teremos que F_1 é Lipschitz em relação a z_1. □

1.3 Segunda mudança de coordenadas

Podemos repetir o procedimento da seção anterior para obter, através de uma nova mudança de coordenadas, outra equação equivalente à original em que F_1 seja substituído por $\overline{F_1}$.

As funções h_2 e H_2 definidas por

$$h_2(z,\tau) = \int_0^\tau \left(F_1(z,\sigma) - \overline{F_1}(z)\right) d\sigma - \overline{\int_0^\tau \left(F_1(z,\sigma) - \overline{F_1}(z)\right) d\sigma} \tag{1.7}$$

e

$$H_2(z_2,\tau) = \left(z_2 + \delta^2 h_2(z_2,\tau), \tau\right) = (z_1,\tau), \tag{1.8}$$

têm as mesmas propriedades das funções obtidas nos lemas 1.4 e 1.5, quando $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}; \frac{1}{\sqrt{\sup|\partial_z h_2|}}\right\}$.

Lema 1.6. *Consideremos a mudança de coordenadas $(z_1,\tau) = H_2(z_2,\tau)$. Nessas coordenadas, a equação $z_1' = \delta\overline{F}(z_1) + \delta^2 F_1(z_1,\tau) + O(\delta^3)$ se transforma na equação*

$$z_2' = \delta\overline{F}(z_2) + \delta^2\overline{F_1}(z_2) + \delta^3 F_2(z_2,\tau) + O\left(\delta^4\right), \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \textit{onde } F_2(z_2,\tau) \quad = \quad & \partial_z^2 F(z_2,\tau).\left[h_1(z_2,\tau), h_1(z_2,\tau)\right] - \partial_z h_1(z_2,\tau)\,\partial_z F(z_2,\tau).h_1(z_2,\tau) \\ & + \left(\partial_z h_1(z_2,\tau)\right)^2 \overline{F}(z_2) + D\overline{F}(z_2)\, h_2(z_2,\tau) - \partial_z h_2(z_2,\tau)\,\overline{F}(z_2) \end{aligned}$$

é limitada, periódica de período 1 em τ, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas, e é Lipschitz.

Demonstração. A prova de que $\overline{F_1}$ é C^∞ com derivadas limitadas é análoga à prova do lema 1.2. Aplicando a mudança de coordenadas H_2 na equação (1.4), temos que

$$\frac{d}{d\tau}\left[z_2 + \delta^2 h_2(z_2,\tau)\right] = \delta\overline{F}\left(z_2 + \delta^2 h_2(z_2,\tau)\right) + \delta^2 F_1\left(z_2 + \delta^2 h_2(z_2,\tau),\tau\right) + O\left(\delta^3\right)$$

$$z_2' + \delta^2\partial_z h_2(z_2,\tau)\, z_2' = \delta\overline{F}(z_2) + \delta^2 F_1(z_2,\tau) - \delta^2\partial_\tau h_2(z_2,\tau) + O\left(\delta^3\right).$$

Dessa maneira,

$$z_2' + \delta^2\partial_z h_2(z_2,\tau)\, z_2' = \delta\overline{F}(z_2) + \delta^2\overline{F_1}(z_2) + O\left(\delta^3\right). \tag{1.10}$$

Procedendo como na primeira mudança de coordenadas, invertemos a matriz

$[I+\delta^2\partial_z h_2(z_2,\tau)]$ para δ suficientemente pequeno, obtendo

$$\begin{aligned}
z_2' &= \left[I-\delta^2\partial_z h_2(z_2,\tau)+O\left(\delta^4\right)\right]\left[\delta\overline{F}(z_2)+\delta^2\overline{F_1}(z_2)+O\left(\delta^3\right)\right] \\
&= \delta\overline{F}(z_2)+\delta^2\overline{F_1}(z_2)+O\left(\delta^3\right)-\delta^3\partial_z h_2(z_2,\tau)\,\overline{F}(z_2)-\delta^4\partial_z h_2(z_2,\tau)\,\overline{F_1}(z_2)+O\left(\delta^5\right) \\
&= \delta\overline{F}(z_2)+\delta^2\overline{F_1}(z_2)+\delta^3 F_2(z_2,\tau)+O\left(\delta^4\right) \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

onde, se considerarmos as partes do processo em que aparecem somente termos δ^3, temos que

$$\begin{aligned}
F_2(z_2,\tau) &= \partial_z^2 F(z_2,\tau).\left[h_1(z_2,\tau),h_1(z_2,\tau)\right]-\partial_z h_1(z_2,\tau)\,\partial_z F(z_2,\tau).h_1(z_2,\tau) \\
&\quad +\left(\partial_z h_1(z_2,\tau)\right)^2\overline{F}(z_2)+D\overline{F}(z_2)\,h_2(z_2,\tau)-\partial_z h_2(z_2,\tau)\,\overline{F}(z_2).
\end{aligned}$$

Pelas condições de diferenciabilidade de F, $\overline{F}$, h_1 e h_2, temos que F_2 é limitada, periódica de período 1 em τ, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas, e é Lipschitz. □

1.4 Mudanças sucessivas até ordem k

Fazendo sucessivas mudanças de coordenadas, podemos mostrar que é possível transformar a equação

$$Z'=\delta F(Z,\tau) \text{ em}$$

$$z_k'=\delta\overline{F}(z_k)+\delta^2\overline{F_1}(z_k)+...+\delta^k\overline{F_{k-1}}(z_k)+O\left(\delta^{k+1}\right). \qquad (1.12)$$

Para cada i, de $i=1$ até k, a mudança de coordenadas é dada por

$$H_i(z_i,\tau)=(z_{i-1},\tau)=\left(z_i+\delta^i h_i(z_i,\tau),\tau\right),$$

onde $h_i(z_i,\tau)=\int_0^\tau\left[F_{i-1}(z_i,\sigma)-\overline{F_{i-1}}(z_i)\right]d\sigma-\overline{\int_0^\tau\left[F_{i-1}(z_i,\sigma)-\overline{F_{i-1}}(z_i)\right]d\sigma}$.

Podemos mostrar, como o fizemos anteriormente, que:

Cada $\overline{F_{i-1}}(z)$ é C^∞, tem derivadas limitadas e portanto é Lipschitz.

Cada h_i é limitada, tem período 1 em τ, C^∞ com derivadas limitadas e tem média nula em τ.

Se $0<\delta<\delta_i=\min\limits_{1\leq j\leq i}\left\{\frac{1}{\sqrt[i]{\sup|\partial_z h_j|}}\right\}$, então H_i é uma mudança de coordenadas.

Para cada i, encontramos um novo sistema equivalente ao inicial, e repetimos o processo até obtermos

$$z_k' = \delta\overline{F}\left(z_k\right) + \delta^2\overline{F_1}\left(z_k\right) + ... + \delta^k\overline{F_{k-1}}\left(z_k\right) + O\left(\delta^{k+1}\right).$$

As mudanças serão compostas em uma única mudança, considerando que $0 < \delta < \delta^*$ onde $\delta^* = \min\limits_{1\leq j\leq k}\left\{\frac{1}{\sqrt[j]{\sup|\partial_z h_j|}}\right\}$.
A partir de agora, denominaremos a equação (1.12) de sistema médio.

Para facilitar os cálculos, usamos

Lema 1.7. *Seja $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^6$ em cada mudança de coordenadas H_i, com*

$$z_{i-1} = z_i + \delta^i h_i\left(z_i, \tau\right),$$

$1 \leqslant i \leqslant k$, onde k é o número de mudanças feitas. Então z_i', x_i' e y_i' são da ordem δ.

Demonstração. Das hipóteses consideradas e das equações equivalentes achadas nas proposições 1.1 e 1.6, temos que z_1' e z_2' são da ordem δ. Recursivamente, se z_{i-1}' é da ordem δ ao efetuar k mudanças, então cada z_i' será da ordem δ, pois

$$z_{i-1}' = z_i' + \delta^i\partial_z h_i\left(z_i, \tau\right) z_i' + \delta^i\partial_\tau h_i\left(z_i, \tau\right)$$

$$\begin{aligned}
\left[I + \delta^i\partial_z h_i\left(z_i, \tau\right)\right] z_i' &= O\left(\delta\right) - \delta^i\partial_\tau h_i\left(z_i, \tau\right) \\
z_i' &= \left[I + \delta^i\partial_z h_i\left(z_i, \tau\right)\right]^{-1}\left[O\left(\delta\right) - \delta^i\partial_\tau h_i\left(z_i, \tau\right)\right].
\end{aligned}$$

Levando em conta a restrição já mencionada para inverter a matriz em cada mudança, temos que

$$z_i' = \left[I + O\left(\delta^i\right)\right]\left[O\left(\delta\right) - \delta^i\partial_\tau h_i\left(z_i, \tau\right)\right].$$

Portanto, z_i' é da ordem δ e, em consequência, x_i' e y_i' também são da ordem δ. □

Para comparar a diferença das soluções entre o sistema médio e seu correspondente sistema médio truncado, isto é, o sistema médio sem os termos $O\left(\delta^{k+1}\right)$, temos o seguinte resultado

Teorema 1.1. *Sejam z_k e ξ_k, respectivamente, soluções das equações*

$$\begin{aligned}
z_k' &= \delta\overline{F}\left(z_k\right) + \delta^2\overline{F_1}\left(z_k\right) + ... + \delta^k\overline{F_{k-1}}\left(z_k\right) + O\left(\delta^{k+1}\right) && (1.13) \\
\xi_k' &= \delta\overline{F}\left(\xi_k\right) + \delta^2\overline{F_1}\left(\xi_k\right) + ... + \delta^k\overline{F_{k-1}}\left(\xi_k\right) && (1.14)
\end{aligned}$$

tais que $|z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| \leqslant O(\delta^k)$, $0 < \delta < \delta^* = \min\limits_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{1}{\sqrt[j]{\sup|\partial_z h_j|}} \right\}$, *onde* $\overline{F}$ *e cada* $\overline{F_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *são Lipschitz. Então, existe* $K_k > 0$ *tal que*

$$|z_k(\tau) - \xi_k(\tau)| \leqslant O(\delta^k) \ \textit{para}\ 0 \leqslant \tau - \tau_0 \leqslant \frac{1}{\delta K_k}.$$

Demonstração. Primeiro, já que $\overline{F}$ e cada $\overline{F_i}$ têm constantes de Lipschitz, podemos considerar $\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}$ como uma aplicação com constante de Lipschitz $K_k = K_0 + (\delta^*) K_1 + ... + (\delta^*)^{k-1} K_{k-1}$, pois

$$\begin{aligned}
& \left| \left[\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right](z_k) - \left[\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right](\xi_k) \right| \\
\leqslant\ & \left|\overline{F}(z_k) - \overline{F}(\xi_k)\right| + \delta\left|\overline{F_1}(z_k) - \overline{F_1}(\xi_k)\right| + ... + \delta^{k-1}\left|F_{k-1}(z_k) - F_{k-1}(\xi_k)\right| \\
=\ & K_0|z_k - \xi_k| + \delta K_1|z_k - \xi_k| + ... + \delta^{k-1}K_{k-1}|z_k - \xi_k| \\
\leqslant\ & \left[K_0 + (\delta^*) K_1 + ... + (\delta^*)^{k-1} K_{k-1}\right]|z_k - \xi_k|.
\end{aligned}$$

Assim, a existência e unicidade de soluções da equação média truncada (1.14) está assegurada.

Escrevemos o resto, que é da ordem δ^{k+1}, como $\delta^{k+1}R_k(z_k, \tau; \delta)$, onde $|R_k| \leqslant M_k$

$$z_k' - \xi_k' = \delta\left[\left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(z_k) - \left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(\xi_k)\right] + \delta^{k+1}R_k(z_k, \tau; \delta).$$

Integrando desde τ_0 até τ, obtemos

$$\begin{aligned}
& z_k(\tau) - \xi_k(\tau) = z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0) \\
& + \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\delta\left[\left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(z_k) - \left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(\xi_k)\right]\right) d\sigma \\
& + \int_{\tau_0}^{\tau} \delta^{k+1}R_k(z_k, \sigma; \delta)\, d\sigma
\end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned}
& |z_k(\tau) - \xi_k(\tau)| \leqslant |z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| \\
& + \left|\int_{\tau_0}^{\tau} \left(\delta\left[\left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(z_k) - \left(\overline{F} + \delta\overline{F_1} + ... + \delta^{k-1}\overline{F_{k-1}}\right)(\xi_k)\right]\right) d\sigma\right| \\
& + \left|\int_{\tau_0}^{\tau} \delta^{k+1}R_k(z_k, \sigma; \delta)\, d\sigma\right|
\end{aligned}$$

e, então,

$$|z_k(\tau) - \xi_k(\tau)| \leqslant |z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| + \delta\int_{\tau_0}^{\tau} K_k|z_k(\sigma) - \xi_k(\sigma)|\, d\sigma + \delta^{k+1}M_k(\tau - \tau_0).$$

Aplicando o lema de Gronwall, temos:

$$|z_k(\tau) - \xi_k(\tau)| \leqslant \left(\frac{\delta^{k+1} M_k}{\delta K_k} + |z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| \right) e^{\delta K_k (\tau - \tau_0)} - \frac{\delta^{k+1} M_k}{\delta K_k}$$

e, portanto,

$$|z_k(\tau) - \xi_k(\tau)| \leqslant |z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| \, e^{\delta K_k (\tau - \tau_0)} + \left(\frac{\delta^k M_k}{K_k} \right) \left(e^{\delta K_k (\tau - \tau_0)} - 1 \right)$$

ou seja, desde que $|z_k(\tau_0) - \xi_k(\tau_0)| \leqslant O\left(\delta^k\right)$, nossa aproximação será da ordem δ^k, para $0 \leqslant \tau - \tau_0 \leqslant \frac{1}{\delta K_k}$. □

Observações

1. A constante de Lipschitz para $\overline{F} + \delta \overline{F_1} + ... + \delta^{k-1} \overline{F_{k-1}}$ estabelece o tempo de validade da aproximação. Se K_k for muito grande, o tempo de validade pode ser pequeno.

2. Nem sempre poderemos aplicar o processo um número ilimitado de vezes para obter uma aproximação tão perto quanto quisermos da solução do sistema equivalente, porque depois de aplicarmos o processo, $\delta^k \frac{M_k}{K_k}$ ou $e^{\delta K_k (\tau - \tau_0)} - 1$ podem tender a infinito. Dessa forma, não poderíamos definir um máximo δ^* para os δ, ou a diferença entre as soluções dos sistemas médio e médio truncado não estaria limitada.

3. Para realizar k mudanças, em vez de F ser C^∞, precisamos apenas que F seja C^k.

Capítulo 2

Aplicação do método em superfícies vibrando com o tempo

2.1 Preliminares

Nesta seção aplicaremos o método da média a sistemas do tipo

$$\begin{aligned} X' &= \delta Y \\ Y' &= \delta \left[g\left(X,Y\right) + A\left(\tau\right) f\left(X\right) \right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função C^∞, periódica de período 1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicações limitadas, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas e $\delta > 0$ um parâmetro fixo suficientemente pequeno.

Lembramos que, no sistema 2.1, $X = X\left(\tau\right)$ e $Y = Y\left(\tau\right)$.

Teorema 2.1. *Nas condições acima, o sistema (2.1) é equivalente ao sistema*

$$\begin{aligned} x' &= \delta y + O\left(\delta^5\right) \\ y' &= \delta g\left(x,y\right) + \delta \overline{A} f\left(x\right) + \frac{1}{2}\delta^3 \overline{V^2} \partial_y^2 g\left(x,y\right)\left[f\left(x\right), f\left(x\right)\right] - \delta^3 \overline{V^2} Df\left(x\right) f\left(x\right) + O\left(\delta^4\right), \end{aligned}$$

onde $\overline{A} = \int_0^1 A\left(\tau\right) d\tau$ *e* $\overline{V^2} = \int_0^1 V^2\left(\tau\right) d\tau$, *com* $V\left(\tau\right) = \int_{\tau_{0_1}}^{\tau} \left(A\left(\sigma\right) - \overline{A}\right) d\sigma$ *e* τ_{0_1} *é tal que* $\overline{V} = 0$.

Demonstração. Definimos

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6$$
$$F\left(X,Y,\tau\right) = \begin{bmatrix} Y \\ g\left(X,Y\right) + A\left(\tau\right) f\left(X\right) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

e, se considerarmos $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ e $Z' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$ em $\mathbb{R}^6$, temos que o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$Z' = \delta F\left(X, Y, \tau\right). \tag{2.3}$$

Notamos que F é periódica de período 1 em τ, limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas. Dessa forma, podemos aplicar o método da média ao sistema (2.3).

Assim, do sistema (2.1) e sabendo que $\overline{F}\left(z\right) = \int_0^1 F\left(z, \sigma\right) d\sigma$ é a média do campo F com período 1 em τ, temos (usaremos momentaneamente z, x e y no lugar de z_1, x_1, y_1)

$$\int_0^\tau \left[F\left(z,\sigma\right) - \overline{F}\left(z\right)\right] d\sigma \;\; = \;\; \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\int_0^\tau \left(A\left(\tau\right) - \overline{A}\right) d\sigma\right) f\left(x\right) \end{bmatrix}.$$

Se definirmos

$$h_1\left(z,\tau\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\int_0^\tau \left(A\left(\tau\right) - \overline{A}\right) d\sigma\right) f\left(x\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\int_0^\tau \left(A\left(\tau\right) - \overline{A}\right) d\sigma} \; f\left(x\right) \end{bmatrix},$$

pelo lema (1.3), existe real τ_{0_A} tal que

$$h_1\left(z,\tau\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ V\left(\tau\right) f\left(x\right) \end{bmatrix}, \;\; \text{onde } V\left(\tau\right) = \int_{\tau_{0_A}}^\tau \left(A\left(\tau\right) - \overline{A}\right) d\sigma \;\text{ e }\; \overline{V} = 0. \tag{2.4}$$

Para fazer a primeira mudança de variáveis, usamos o difeomorfismo $\left(Z,\tau\right) = \left(z + \delta h_1\left(z,\tau\right), \tau\right)$. Se considerarmos $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, nas novas coordenadas, Z se escreve como

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y + \delta V\left(\tau\right) f\left(x\right) \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Assim, o sistema 2.1 se transforma no sistema

$$\begin{cases} X' = x' = \delta Y = \delta\left(y + \delta V\left(\tau\right) f\left(x\right)\right) \\ Y' = y' + \delta V'\left(\tau\right) f\left(x\right) + \delta V\left(\tau\right)\left(Df\left(x\right).x'\right) = \delta g\left(x, y + \delta V\left(\tau\right) f\left(x\right)\right) + \delta A\left(\tau\right) f\left(x\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Usando a expansão de Taylor para g,

$$\begin{aligned} g\left(x, y + \delta V\left(\tau\right) f\left(x\right)\right) \;\; &= \;\; g\left(x,y\right) + \partial_y g\left(x,y\right)\left(\delta V\left(\tau\right) f\left(x\right)\right) \\ &+ \;\; \frac{1}{2}\partial_y^2 g\left(x,y\right)\left[\delta V\left(\tau\right) f\left(x\right), \delta V\left(\tau\right) f\left(x\right)\right] + O\left(\delta^3\right), \end{aligned}$$

e como $V' = A(\tau) - \overline{A}$ e $x' = \delta y + \delta^2 V(\tau) f(x)$, na segunda equação de 2.6, temos que, após a primeira mudança de coordenadas, o sistema 2.1 se transforma no sistema

$$\begin{cases} x_1' = \delta y_1 + \delta^2 V(\tau) f(x_1) \\ y_1' = \delta g(x_1, y_1) + \delta \overline{A} f(x_1) + \delta^2 V(\tau) \partial_y g(x_1, y_1)(f(x_1)) - \delta^2 V(\tau) Df(x_1) y_1 \\ \qquad + \frac{1}{2}\delta^3 V^2(\tau) \partial_y^2 g(x_1, y_1)[f(x_1), f(x_1)] - \delta^3 V^2(\tau) Df(x_1) f(x_1) + O\left(\delta^4\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

onde voltamos a usar x_1, y_1, z_1 no lugar de x, y, z.

Comparando a equação de nossa primeira mudança $z_1' = \delta \overline{F}(z_1) + \delta^2 F_1(z_1, \tau) + O(\delta^3)$ com a equação (2.7), podemos reconhecer que:

$$\overline{F}(z_1) = \begin{bmatrix} y_1 \\ g(x_1, y_1) + \overline{A} f(x_1) \end{bmatrix} \text{ e } F_1(z_1, \tau) = \begin{bmatrix} V(\tau) f(x_1) \\ V(\tau)\left[\partial_y g(x_1, y_1)(f(x_1)) - Df(x_1) y_1\right] \end{bmatrix}.$$

Pelo lema 1.5, a mudança de variáveis somente é válida se $0 < \delta < \frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}$, onde

$$\partial_z h_1(z, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ V(\tau) Df(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Para referências futuras, denominaremos a desigualdade $0 < \delta < \frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}$ de condição 1.

A média de $F_1(z, \tau)$, denotada por $\overline{F_1}$, é zero, pois a média de V é zero.
Para fazer a segunda mudança de coordenadas $H_2(z_2, \tau) = (z_2 + \delta^2 h_2(z_2, \tau), \tau)$ no sistema (2.7), momentaneamente renomeamos z_2, x_2 e y_2 por z, x e y, e temos que

$$z_1 = z + \delta^2 h_2(z, \tau). \tag{2.8}$$

Pelo lema 1.3, existe τ_{0_S} real, tal que a equação (1.7) fica

$$h_2(z, \tau) = S(\tau) \begin{bmatrix} f(x) \\ \partial_y g(x, y)(f(x)) - Df(x) y \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

com $S(\tau) = \int_{\tau_{0_S}}^{\tau} \left(V(\sigma) - \overline{V}\right) d\sigma = \int_{\tau_{0_S}}^{\tau} V(\sigma)\, d\sigma$, pois $\overline{V} = 0$ e, além disso, $\overline{S} = 0$.
Mais detalhadamente, (2.8) é:

$$\begin{cases} x_1 = x + \delta^2 S(\tau) f(x) \\ y_1 = y + \delta^2 S(\tau)\left[\partial_y g(x, y)(f(x)) - Df(x) y\right]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Assim, por um lado, derivando (2.10):

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x' + \delta^2 V(\tau) f(x) + \delta^2 S(\tau) Df(x) x' \\
y_1' &= y' + \delta^2 V(\tau) \partial_y g(x,y) (f(x)) + \delta^2 S(\tau) \partial_{xy} g(x,y) [x', f(x)] \\
&\quad + \delta^2 S(\tau) \partial_y^2 g(x,y) [y', f(x)] + \delta^2 S(\tau) \partial_y g(x,y) (Df(x)(x')) - \delta^2 V(\tau) Df(x) y \\
&\quad - \delta^2 S(\tau) D^2 f(x) [x', y] - \delta^2 S(\tau) Df(x) y'.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, com 2.7 e 2.10, temos:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \delta\left(y + \delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right) + \delta^2 V(\tau) f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right) \\
&= \delta y + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) - \delta^3 S(\tau) Df(x) y \\
&\quad + \delta^2 V(\tau)\left[f(x) + Df(x)\left(\delta^2 S(\tau) f(x)\right) + O\left(\delta^3\right)\right] \\
y_1' &= \delta g\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x), y + \delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right) \\
&\quad + \delta \overline{A} f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right) + \delta^2 V(\tau) \\
&\quad \partial_y g\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x), y + \delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right)\left(f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right)\right) \\
&\quad - \delta^2 V(\tau) Df\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right)\left(y + \delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\delta^3 V^2(\tau) \partial_y^2 g\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x), y + \delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right) \\
&\quad \left[f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right), f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right)\right] \\
&\quad - \delta^3 V^2(\tau) Df\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right) f\left(x + \delta^2 S(\tau) f(x)\right) + O\left(\delta^4\right) \\
&= \delta g(x,y) + \delta g_x(x,y)\left(\delta^2 S(\tau) f(x)\right) \\
&\quad + \delta \partial_y g(x,y)\left(\delta^2 S(\tau)[\partial_y g(x,y)(f(x)) - Df(x) y]\right) + O\left(\delta^5\right) \\
&\quad + \delta \overline{A}\left[f(x) + Df(x)\left(\delta^2 S(\tau) f(x)\right) + O\left(\delta^3\right)\right] + \delta^2 V(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) \\
&\quad - \delta^2 V(\tau) Df(x)(y) + \frac{1}{2}\delta^3 V^2(\tau) \partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] - \delta^3 V^2(\tau) Df(x) f(x) + O\left(\delta^4\right).
\end{aligned}
$$

Juntando as igualdades correspondentes a x_1' e y_1', obtemos:

$$\begin{aligned} x' &= \delta y - \delta^2 S(\tau) Df(x) x' + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) - \delta^3 S(\tau) Df(x) y \\ &\quad + \delta^4 V(\tau) S(\tau) Df(x)(f(x)) + O\left(\delta^5\right) \\ &\quad \text{e} \\ y' &= \delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) - \delta^2 S(\tau) \partial_{xy} g(x,y)[x', f(x)] - \delta^2 S(\tau) \partial_y^2 g(x,y)[y', f(x)] \\ &\quad - \delta^2 S(\tau) \partial_y g(x,y)(Df(x)(x')) + \delta^2 S(\tau) D^2 f(x)[x', y] + \delta^2 S(\tau) Df(x) y' \\ &\quad + \delta^3 S(\tau) g_x(x,y)(f(x)) + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y) \partial_y g(x,y)(f(x)) \\ &\quad - \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(Df(x) y) + \frac{1}{2} \delta^3 V^2(\tau) \partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] \\ &\quad + \delta^3 S(\tau) \overline{A} Df(x)(f(x)) - \delta^3 V^2(\tau) Df(x) f(x) + O\left(\delta^4\right). \end{aligned}$$

Da expressão de x' acima,

$$\begin{aligned} \left[I + \delta^2 S(\tau) Df(x)\right] x' &= \delta y + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) - \delta^3 S(\tau) Df(x) y \\ &\quad + \delta^4 V(\tau) S(\tau) Df(x)(f(x)) + O\left(\delta^5\right). \end{aligned}$$

Como $[I + \delta^2 S(\tau) Df(x)]^{-1} = I - \delta^2 S(\tau) Df(x) + O(\delta^4)$,

$$\begin{aligned} x' &= \left[I - \delta^2 S(\tau) Df(x) + O\left(\delta^4\right)\right] . \\ &\quad \left[\delta y + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) - \delta^3 S(\tau) Df(x) y + \delta^4 V(\tau) S(\tau) Df(x)(f(x)) + O\left(\delta^5\right)\right] \\ &= \delta y - 2\delta^3 S(\tau) Df(x) y + \delta^3 S(\tau) \partial_y g(x,y)(f(x)) + \delta^4 V(\tau) S(\tau) Df(x)(f(x)) + O\left(\delta^5\right), \end{aligned}$$

de onde $x' = \delta y + O(\delta^3)$. Além disso, considerando o lema 1.7, temos $x' = O(\delta)$, $y' = O(\delta)$ e

$$\begin{aligned} -\delta^2 S(\tau) \partial_{xy} g(x,y)[x', f(x)] &= O\left(\delta^3\right) \\ -\delta^2 S(\tau) \partial_y^2 g(x,y)[y', f(x)] &= O\left(\delta^3\right) \\ -\delta^2 S(\tau) \partial_y g(x,y)(Df(x)(x')) &= O\left(\delta^3\right) \\ \delta^2 S(\tau) D^2 f(x)[x', y] &= O\left(\delta^3\right) \\ \delta^2 S(\tau) Df(x) y' &= O\left(\delta^3\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$y' = \delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) + O\left(\delta^3\right).$$

Agora podemos substituir adequadamente, na equação de y', as aproximações de x' e y', obtendo (e escrevendo o resultado na mudança correspondente)

$$
\begin{aligned}
x_2' &= \delta y_2 - 2\delta^3 S(\tau) Df(x_2)(y_2) + \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x_2,y_2)(f(x_2)) \\
&\quad + \delta^4 V(\tau) S(\tau) Df(x_2)(f(x_2)) + O\left(\delta^5\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_2' &= \delta g(x_2,y_2) + \delta\overline{A} f(x_2) - \delta^3 S(\tau)\partial_{xy} g(x_2,y_2)[y_2, f(x_2)] \\
&\quad - \delta^3 S(\tau)\partial_y^2 g(x_2,y_2)\left[g(x_2,y_2) + \overline{A} f(x_2), f(x_2)\right] \\
&\quad - \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x_2,y_2)(Df(x_2)(y_2)) + \delta^3 S(\tau) D^2 f(x_2)[y_2,y_2] \\
&\quad + \delta^3 S(\tau) Df(x_2)\left(g(x_2,y_2) + \overline{A} f(x_2)\right) \\
&\quad + \delta^3 S(\tau) g_x(x_2,y_2)(f(x_2)) + \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x_2,y_2)\partial_y g(x_2,y_2)(f(x_2)) \\
&\quad - \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x_2,y_2)(Df(x_2) y_2) + \frac{1}{2}\delta^3 V^2(\tau)\partial_y^2 g(x_2,y_2)[f(x_2), f(x_2)] \\
&\quad + \delta^3 S(\tau)\overline{A} Df(x_2)(f(x_2)) - \delta^3 V^2(\tau) Df(x_2) f(x_2) + O\left(\delta^4\right).
\end{aligned}
$$

Além da condição 1, δ deve satisfazer a desigualdade $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{\sup|\partial_z h_2|}}$, onde

$$
\partial_z h_2(z,\tau) = S(\tau)\begin{bmatrix} Df(x) & 0 \\ \partial_{xy} g(x,y) f(x) + \partial_y g(x,y) Df(x) - D^2 f(x) y & \partial_y^2 g(x,y) f(x) - Df(x) \end{bmatrix}.
$$

Assim, tomamos $0 < \delta < \min\{\frac{1}{\sup|\partial_z h_1|}, \frac{1}{\sqrt{\sup|\partial_z h_2|}}\}$.

Fazemos a terceira mudança de coordenadas, usando o difeomorfismo $H_3 = (z_3 + \delta^3 h_3(z_3,\tau), \tau)$, para obter uma nova equação equivalente. Momentaneamente escrevemos z, x e y no lugar de z_3, x_3 e y_3 e, assim, $z_2 = z + \delta^3 h_3(z,\tau)$ e, para achar h_3, temos que

$$
F_2(z,\tau) = \begin{bmatrix} -2S(\tau) Df(x)(y) + S(\tau)\partial_y g(x,y)(f(x)) \\ \\ -S(\tau)\partial_{xy} g(x,y)[y, f(x)] - S(\tau)\partial_y^2 g(x,y)\left[g(x,y) + \overline{A} f(x), f(x)\right] \\ -S(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)(y)) + S(\tau) D^2 f(x)[y,y] \\ +S(\tau) Df(x)\left(g(x,y) + \overline{A} f(x)\right) + S(\tau)\partial_x g(x,y)(f(x)) \\ +S(\tau)\partial_y g(x,y)\partial_y g(x,y)(f(x)) - S(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x) y) \\ +\frac{1}{2} V^2(\tau)\partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] + S(\tau)\overline{A} Df(x)(f(x)) \\ -V^2(\tau) Df(x) f(x) \end{bmatrix},
$$

$$
\overline{F_2}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\overline{V^2}\,\partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] - \overline{V^2}\, Df(x) f(x) \end{bmatrix}
$$

e, já que $h_3(z,\tau) = \int_0^\tau \left(F_2(z,\sigma) - \overline{F_2}(z)\right) d\sigma - \overline{\int_0^\tau \left(F_2(z,\sigma) - \overline{F_2}(z)\right) d\sigma}$ e aplicando nos cálculos o lema 1.3, pelo qual existem τ_{0_S} e τ_{0_W} tais que podemos definir

$$U(\tau) = \int_{\tau_{0_S}}^{\tau} S(\sigma)\, d\sigma \text{ e } W(\tau) = \int_{\tau_{0_W}}^{\tau} \left(V^2(\sigma) - \overline{V^2}\right) d\sigma$$

onde $\overline{U}$ e $\overline{W}$ têm média nula, temos que $z_2 = z + \delta^3 h_3(z,\tau)$ é

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \delta^3 \begin{bmatrix} -2U(\tau) Df(x)(y) + U(\tau)\partial_y g(x,y)(f(x)) \\ \\ -U(\tau)\partial_{xy} g(x,y)[y, f(x)] - U(\tau)\partial_y^2 g(x,y)\left[g(x,y) + \overline{A} f(x), f(x)\right] \\ -U(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)(y)) + U(\tau) D^2 f(x)[y,y] \\ +U(\tau) Df(x)\left(g(x,y) + \overline{A} f(x)\right) + U(\tau) g_x(x,y)(f(x)) \\ +U(\tau)\partial_y g(x,y)\partial_y g(x,y)(f(x)) - U(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)y) \\ +\frac{1}{2} W(\tau)\partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] + U(\tau)\overline{A} Df(x)(f(x)) \\ -W(\tau) Df(x) f(x) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Derivando a igualdade de x_2:

$$\begin{aligned} x_2' &= x' - 2\delta^3 S(\tau) Df(x)(y) + \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x,y)(f(x)) - 2\delta^3 U(\tau) D^2 f(x)[x', y] \\ &\quad + \delta^3 U(\tau)\partial_{xy} g(x,y)[x', f(x)] + \delta^3 U(\tau)\partial_y^2 g(x,y)[y', f(x)] \\ &\quad - 2\delta^3 U(\tau) Df(x)(y') + \delta^3 U(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)x'). \end{aligned}$$

Derivando a igualdade de y_2:

$$\begin{aligned} y_2' &= y' - \delta^3 S(\tau)\partial_{xy} g(x,y)[y, f(x)] - \delta^3 S(\tau)\partial_y^2 g(x,y)\left[g(x,y) + \overline{A} f(x), f(x)\right] \\ &\quad - \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)(y)) + \delta^3 S(\tau) D^2 f(x)[y,y] \\ &\quad + \delta^3 S(\tau) Df(x)\left(g(x,y) + \overline{A} f(x)\right) + \delta^3 S(\tau) g_x(x,y)(f(x)) \\ &\quad + \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x,y)\partial_y g(x,y)(f(x)) - \delta^3 S(\tau)\partial_y g(x,y)(Df(x)y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta^3\left(V^2 - \overline{V^2}\right)(\tau)\partial_y^2 g(x,y)[f(x), f(x)] + \delta^3 S(\tau)\overline{A} Df(x)(f(x)) \\ &\quad - \delta^3\left(V^2 - \overline{V^2}\right)(\tau) Df(x) f(x) + O\left(\delta^4\right). \end{aligned}$$

A expressão $O(\delta^4)$ é consequência de $y' = O(\delta)$ e, portanto, as expressões com x' ou y' são da ordem δ^4.

Paralelamente à mudança, temos $x_2 = x + O(\delta^3)$ e $y_2 = y + O(\delta^3)$. Então, a expansão de Taylor na equação de y_2', na mudança anterior, se expressa nas novas variáveis como

$$\begin{aligned}
y_2' &= \delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) - \delta^3 S(\tau)\,\partial_{xy} g(x,y)\,[y, f(x)] \\
&-\delta^3 S(\tau)\,\partial_y^2 g(x,y)\left[g(x,y) + \overline{A} f(x), f(x)\right] \\
&-\delta^3 S(\tau)\,\partial_y g(x,y)\,(Df(x)(y)) + \delta^3 S(\tau)\,D^2 f(x)\,[y,y] \\
&+\delta^3 S(\tau)\,Df(x)\left(g(x,y) + \overline{A} f(x)\right) \\
&+\delta^3 S(\tau)\,g_x(x,y)\,(f(x)) + \delta^3 S(\tau)\,\partial_y g(x,y)\,\partial_y g(x,y)\,(f(x)) \\
&-\delta^3 S(\tau)\,\partial_y g(x,y)\,(Df(x)\,y) + \frac{1}{2}\delta^3 V^2(\tau)\,\partial_y^2 g(x,y)\,[f(x), f(x)] \\
&+\delta^3 S(\tau)\,\overline{A} Df(x)\,(f(x)) - \delta^3 V^2(\tau)\,Df(x)\,f(x) + O\left(\delta^4\right)
\end{aligned}$$

e a equação de x_2' fica (deixando um y_2 sem substituir):

$$\begin{aligned}
x_2' &= \delta y_2 - 2\delta^3 S(\tau)\,Df(x)\,(y) + \delta^3 S(\tau)\,\partial_y g(x,y)\,(f(x)) \\
&+\delta^4 V(\tau)\,S(\tau)\,Df(x)\,(f(x)) + O\left(\delta^5\right).
\end{aligned}$$

Igualando as equações de y_2', temos que:

$$y' = \delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) + \frac{1}{2}\delta^3 \overline{V^2}\partial_y^2 g(x,y)\,[f(x), f(x)] - \delta^3 \overline{V^2} Df(x)\,f(x) + O\left(\delta^4\right)$$

e para x_2', obtemos:

$$\begin{aligned}
x' &= \delta(y_2) + 2\delta^3 U(\tau)\,D^2 f(x)\,[x', y] - \delta^3 U(\tau)\,\partial_{xy} g(x,y)\,[x', f(x)] \\
&-\delta^3 U(\tau)\,\partial_y^2 g(x,y)\,[y', f(x)] + 2\delta^3 U(\tau)\,Df(x)\,(y') - \delta^3 U(\tau)\,\partial_y g(x,y)\,(Df(x)\,x') \\
&+\delta^4 V(\tau)\,S(\tau)\,Df(x)\,(f(x)) + O\left(\delta^5\right).
\end{aligned}$$

A fórmula de x' é muito longa, mas só precisamos usar que $x' = \delta y + O(\delta^3)$ e que $y' = \delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) + O(\delta^3)$:

$$\begin{aligned}
x' &= \delta(y_2) + 2\delta^3 U(\tau)\,D^2 f(x)\left[\delta(y) + O\left(\delta^3\right), y\right] - \delta^3 U(\tau)\,\partial_{xy} g(x,y)\left[\delta(y) + O\left(\delta^3\right), f(x)\right] \\
&-\delta^3 U(\tau)\,\partial_y^2 g(x,y)\left[\delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) + O\left(\delta^3\right), f(x)\right] \\
&+2\delta^3 U(\tau)\,Df(x)\left(\delta g(x,y) + \delta \overline{A} f(x) + O\left(\delta^3\right)\right) \\
&-\delta^3 U(\tau)\,\partial_y g(x,y)\left(Df(x)\left(\delta(y) + O\left(\delta^3\right)\right)\right) + \delta^4 V(\tau)\,S(\tau)\,Df(x)\,(f(x)) + O\left(\delta^5\right).
\end{aligned}$$

Se substituirmos y_2 pela sua expressão (ver equação 2.11), considerando que $x_3 \equiv x$ e $y_3 \equiv y$, temos que

$$\begin{aligned}
x_3' &= \delta y_3 + \Theta(x_3, y_3, \tau, \delta) + O\left(\delta^5\right) \\
y_3' &= \delta g(x_3, y_3) + \delta \overline{A} f(x_3) + \frac{1}{2}\delta^3 \overline{V^2}(\tau)\,\partial_y^2 g(x_3, y_3)\,[f(x_3), f(x_3)] \\
&-\delta^3 \overline{V^2}(\tau)\,Df(x_3)\,f(x_3) + O\left(\delta^4\right),
\end{aligned}$$

onde $\Theta(x_3, y_3, \tau, \delta)$ é tal que $\overline{\Theta(x_3, y_3, \tau, \delta)} = 0$, pois $\overline{S} = 0$ e $\overline{U} = 0$, $\overline{W} = 0$ e $\overline{VS} = 0$, já que

$$\overline{VS} = \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} (VS)(\sigma)\, d\sigma = \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} S'(\sigma) S(\sigma)\, d\sigma = \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} \frac{dS^2(\sigma)}{2d\sigma} d\sigma = \frac{S^2(\tau_0+1) - S^2(\tau_0)}{2} = 0.$$

Portanto, com a mudança H_4, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} x_4' &= \delta(y_4) + O\left(\delta^5\right) \\ y_4' &= \delta g(x_4, y_4) + \delta \overline{A} f(x_4) + \frac{1}{2}\delta^3 \overline{V^2}(\tau)\, \partial_y^2 g(x_4, y_4)\,[f(x_4), f(x_4)] \\ &\quad -\delta^3 \overline{V^2}(\tau)\, Df(x_4)\, f(x_4) + O\left(\delta^4\right). \end{aligned}$$

Lembramos que devemos considerar a restrição para δ mencionada na seção 1.4 e tomar o menor valor das condições para δ em cada mudança. $\square$

2.2 Superfícies vibrando com o tempo

Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função limitada, C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas, com $\nabla\varphi \neq 0$ e $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^2, limitada, periódica de período ε, de média nula, tal que $s(0) = 0$, cuja imagem está contida no conjunto de valores regulares de φ. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, a equação $\varphi(x) = s(t)$ define uma superfície.

Queremos descrever o movimento de uma massa pontual em uma superfície que está vibrando periodicamente com o tempo, com a condição de que não existe atrito e não atuam forças externas além da deformação da superfície em cada instante t, isto é, a única força que atua na massa está na direção da normal à superfície. Assim, se $X(t) \in \mathbb{R}^3$ é a posição da massa, temos que

$$\ddot{X} = \lambda \nabla_X \varphi$$

Como a massa está sempre na superfície, temos que $\varphi(X) = s(t)$ e, portanto,

$$\dot{s}(t) = D\varphi(X).\dot{X} = \left\langle \nabla_X \varphi, \dot{X} \right\rangle \text{ e } \left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi\left(\dot{X}\right), \dot{X} \right\rangle + \left\langle \nabla_X \varphi, \ddot{X} \right\rangle = \ddot{s}(t), \qquad (2.12)$$

onde $\mathrm{Hess}_X \varphi$ é a matriz hessiana da função φ em relação à variável X. Logo

$$\lambda = -\frac{\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi\left(\dot{X}\right), \dot{X} \right\rangle - \ddot{s}(t)}{\left|\nabla_X \varphi\right|^2}.$$

Obtemos assim a equação de movimento

$$\ddot{X} = -\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi\left(\dot{X}\right), \dot{X}\right\rangle \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2} + \ddot{s}(t) \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}. \tag{2.13}$$

Observamos que se $s(t) = s_0$ é constante, a equação acima se reduz a

$$\ddot{X} = -\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi\left(\dot{X}\right), \dot{X}\right\rangle \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}$$

que é a equação de uma geodésica na superfície $\varphi(X) = s_0$.

Para $w \in \mathbb{R}^3$, denotamos $w^\perp = w - \mathrm{proj}_{\nabla_x \varphi} w$.

Teorema 2.2. *Seja $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^2, periódica de período 1, de média nula, tal que $s(t) = \varepsilon s_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ e seja X a trajetória da massa pontual. Existe uma transformação que decompõe o movimento da massa em $X = x + \Delta$, onde $\Delta = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ e x satisfaz*

$$\ddot{x} = -\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi(\dot{x}), \dot{x}\right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{|\nabla_x \varphi|^2} - \overline{v^2}\left(\mathrm{Hess}_x \varphi\left(\frac{\nabla_x \varphi}{|\nabla_x \varphi|^2}\right)\right)^\perp + O\left(\varepsilon^{1/2}\right), \tag{2.14}$$

onde $v = \frac{\dot{s}(t)}{|\nabla_x \varphi|}$.

Demonstração. Para facilitar os cálculos, faremos uma mudança de escala no tempo, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$,

$$\dot{X} = \frac{X'}{\varepsilon} \ \text{ e } \ \ddot{X} = \frac{d}{dt}\left(\frac{X'}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}.\frac{dX'}{d\tau}.\frac{d\tau}{dt} = \frac{X''}{\varepsilon^2}, \tag{2.15}$$

onde X' indica derivada com respeito a τ. A equação (2.13) se escreve como

$$X'' = -\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi(X'), X'\right\rangle \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2} + \varepsilon s_1''(\tau) \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}.$$

Definindo $X' = \varepsilon^{1/2} Y$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} X' = \varepsilon^{1/2}\, Y \\ Y' = \varepsilon^{1/2}\left(-\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi(Y), Y\right\rangle \dfrac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2} + s_1''(\tau) \dfrac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}\right). \end{cases} \tag{2.16}$$

Observamos que, tomando-se $\delta = \varepsilon^{1/2}$, $g(X,Y) = -\left\langle \mathrm{Hess}_X \varphi(Y), Y\right\rangle \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}$, $A(\tau) = s_1''(\tau)$, $f(X) = \frac{\nabla_X \varphi}{|\nabla_X \varphi|^2}$, o sistema 2.16 satisfaz as hipóteses do teorema 2.1. Como

$$\frac{1}{2}\partial_y^2 g(x,y).\left[f(x), f(x)\right] = -\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\frac{\nabla_x \varphi}{|\nabla_x \varphi|^2}\right), \frac{\nabla_x \varphi}{|\nabla_x \varphi|^2}\right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{|\nabla_x \varphi|^2},$$

$\overline{A} = 0$, pois $\overline{s_1''(\tau)} = \overline{\varepsilon \ddot{s}(t)} = 0$ e, como

$\overline{V^2} = \overline{\left(s_1'(\tau)\right)^2} = \overline{\left(\dot{s}(t)\right)^2}$, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{aligned}
x' &= \varepsilon^{1/2} y + O\left(\varepsilon^{5/2}\right) \\
y' &= -\varepsilon^{1/2} \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(y\right), y \right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \\
&\quad -\varepsilon^{3/2} \frac{\overline{s'^2}}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi \left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right), \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right\rangle \nabla_x \varphi \\
&\quad -\varepsilon^{3/2} \frac{\overline{s'^2}}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} D\left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right) \left(\nabla_x \varphi\right) + O\left(\varepsilon^2\right),
\end{aligned}$$

de onde $y = \varepsilon^{-1/2} x' + O\left(\varepsilon^2\right)$, $x'' = \varepsilon^{1/2} y' + O\left(\varepsilon^{5/2}\right)$, e

$$\begin{aligned}
x'' &= -\varepsilon \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\varepsilon^{-1/2} x' + O\left(\varepsilon^2\right)\right), \left(\varepsilon^{-1/2} x' + O\left(\varepsilon^2\right)\right) \right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \\
&\quad -\varepsilon^{2} \frac{\overline{s'^2}}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi \left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right), \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right\rangle \nabla_x \varphi \\
&\quad -\varepsilon^{2} \frac{\overline{s'^2}}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} D\left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right) \left(\nabla_x \varphi\right) + O\left(\varepsilon^{5/2}\right).
\end{aligned}$$

Usando (2.15) para restabelecer a escala de tempo original, temos

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\dot{x}\right), \dot{x} \right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \\
&\quad -\overline{v^2} \left[\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi \left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right), \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right\rangle \nabla_x \varphi + D\left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right) \left(\nabla_x \varphi\right) \right] + O\left(\varepsilon^{1/2}\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
D\left(\left|\nabla_x \varphi\right|^2\right)(u) &= D\left(\left\langle \nabla_x \varphi, \nabla_x \varphi \right\rangle\right)(u) = 2 \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(u\right), \nabla_x \varphi \right\rangle, \\
D\left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right)(u) &= \frac{\left|\nabla_x \varphi\right|^2 \mathrm{Hess}_x \varphi\left(u\right) - D\left(\left|\nabla_x \varphi\right|^2\right)(u)\ \nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^4}
\end{aligned}$$

e

$$D\left(\frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \right)\left(\nabla_x \varphi\right) = \frac{\mathrm{Hess}_x \varphi\left(\nabla_x \varphi\right)}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} - \frac{2 \left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\nabla_x \varphi\right), \nabla_x \varphi \right\rangle\ \nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^4}.$$

Portanto, (2.17) se transforma em

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\dot{x}\right), \left(\dot{x}\right) \right\rangle \frac{\nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} \\
&\quad -\overline{v^2} \left[\frac{\mathrm{Hess}_x \varphi\left(\nabla_x \varphi\right)}{\left|\nabla_x \varphi\right|^2} - \frac{\left\langle \mathrm{Hess}_x \varphi\left(\nabla_x \varphi\right), \nabla_x \varphi \right\rangle \nabla_x \varphi}{\left|\nabla_x \varphi\right|^4} \right] + O\left(\varepsilon^{1/2}\right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

□

Definição 2.1. *Seja $r(t)$ uma curva regular em $\mathbb{R}^3$. Diremos que $r(t)$ é uma curva normal à família de superfícies $S_t = \{x \in \mathbb{R}^3, \varphi(x) = s(t)\}$, se $\varphi(r(t)) = s(t)$ e $\frac{dr}{dt}$ é paralelo ao $\nabla_{r(t)}\varphi$, para todo t em $\mathbb{R}$.*

Lema 2.1. *Sejam x solução de (2.14), t_0 tal que $\dot{s}(t_0) \neq 0$ e $x_0 = x(t_0)$, então*

$$\left(\mathrm{Hess}_{x_0}\varphi\left(\frac{\nabla_{x_0}\varphi}{\left|\nabla_{x_0}\varphi\right|^2}\right)\right)^{\perp} = k\vec{N},$$

onde k e $\vec{N}$ são, respectivamente, a curvatura e o vetor normal unitário à curva normal em x_0. ($\vec{N}$ é tangente à superfície)

Demonstração. Se parametrizarmos a curva normal pelo comprimento de arco σ, ou seja, $\frac{d}{d\sigma}r = \frac{\nabla_r\varphi}{|\nabla_r\varphi|}$, então, por definição,

$$k\vec{N} = \frac{d^2r}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\nabla_r\varphi}{|\nabla_r\varphi|}\right) = \frac{1}{|\nabla_r\varphi|^2}\left(\frac{d}{d\sigma}(\nabla_r\varphi)|\nabla_r\varphi| - \nabla_r\varphi\frac{d}{d\sigma}(|\nabla_r\varphi|)\right).$$

Como $\frac{d|\nabla\varphi|}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\langle\nabla_r\varphi, \nabla_r\varphi\rangle^{1/2} = \frac{\left\langle \mathrm{Hess}_r\varphi\left(\frac{dr}{d\sigma}\right), \nabla_r\varphi\right\rangle}{|\nabla_r\varphi|} = \frac{\langle \mathrm{Hess}_r\varphi(\nabla_r\varphi), \nabla_r\varphi\rangle}{|\nabla_r\varphi|^2}$, então

$$k\vec{N} = \frac{\mathrm{Hess}_r\varphi(\nabla_r\varphi)}{|\nabla_r\varphi|^2} - \frac{\langle \mathrm{Hess}_r\varphi(\nabla_r\varphi), \nabla_r\varphi\rangle\nabla_r\varphi}{|\nabla_r\varphi|^4}.$$

□

Portanto, quando $\dot{s}(t) \neq 0$, podemos escrever a equação (2.14) como

$$\ddot{x} = -\langle \mathrm{Hess}_x\varphi(\dot{x}), \dot{x}\rangle\frac{\nabla_x\varphi}{|\nabla_x\varphi|^2} - k\overline{v^2}\vec{N} + O\left(\varepsilon^{1/2}\right), \tag{2.19}$$

ou seja, nas novas coordenadas, fica em evidência que a aceleração instantânea da massa pontual é resultado de uma aceleração produzida pela geometria da superfície por onde ela está passando (aceleração geodésica) e de uma aceleração tangente à superfície igual a $-k\overline{v^2}\vec{N}$, a menos de um erro da ordem $\varepsilon^{1/2}$.

Referências Bibliográficas

[1] Jorge Sotomayor. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[2] Elon Lages Lima. **Curso de Análise, Volume 2**. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[3] Elon Lages Lima. **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[4] Manfredo Perdigão do Carmo. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. IMPA, Rio de Janeiro,

[5] Mark Levi and Qiran Ren. **Geodesics on vibrating surfaces and curvature of the normal family**. The Pennsylvania State University, University Park, USA, 2005.

[6] Mark Levi. **Geometry and physics of averaging with applications**. Department of Mathematics, Penn State University, University Park, USA, 1999.

[7] N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolsky. **Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations**. Hindustan Publishing corpn. India, 1961