

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas.

Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira

**PROJETO AERONÁUTICO ÓTIMO SIMULTÂNEO SOB
CARREGAMENTOS INCERTOS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:


Prof. Dr. Sérgio Frascino Muller de Almeida
Orientador

Prof. Celso Massaki Hirata
Próreitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão de Informação e Documentação

Ferreira, Ana Paula Carvalho da Silva.

Projeto Aeronáutico Ótimo Simultâneo sob Carregamentos Incertos / Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira.

São José dos Campos, 2010.

133f.

Tese de doutorado – Curso de Engenharia Mecânica e Aeronáutica. Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010. Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frascino Muller de Almeida

1. Otimização Multicritério. 2. Projeto Aeronáutico 3. Material Compósito. 4. Flambagem. 5. Frequência Natural. I. Comando-Geral de Tecnologia Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Mecânica dos Sólidos e Estruturas.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FERREIRA, Ana Paula Carvalho da Silva . **Projeto Aeronáutico Ótimo Simultâneo sob Carregamentos Incertos**. 2010. 133f Tese de doutorado em Mecânica dos Sólidos e Estruturas – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira

TÍTULO DO TRABALHO: Projeto Aeronáutico Ótimo Simultâneo sob Carregamentos Incertos

TIPO DO TRABALHO / ANO: Tese / 2010

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a sua autorização (do autor).

 Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira

Rua Major Joaquim Monteiro Patto, 115 – Chácara do Visconde

12.050-620 – Taubaté – SP - Brasil

PROJETO AERONÁUTICO ÓTIMO SIMULTÂNEO SOB CARREGAMENTOS INCERTOS

Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira

Composição da Banca Examinadora:

Prof.	Alfredo Rocha de Faria	Presidente - ITA
Prof.	Sérgio Frascino M. de Almeida	Orientador - ITA
Prof.	Maurício Vicente Donadon	ITA
Prof.	Carlos Alberto Cimini Jr.	UNICAMP
Prof.	Jonas de Carvalho	USP - EESC

ITA

Agradecimentos:

A Deus, pelas conquistas e pela força nas horas difíceis.

Ao meu marido Cláudio, pelo apoio em todos os sentidos.

Ao Prof. Frascino, pela orientação e exemplo de conduta pessoal e profissional. Pela generosidade e paciência na transmissão de conhecimento.

Ao Prof. Alfredo, por ter me recebido no programa de pós-graduação e pela orientação no primeiro ano.

Aos colegas do laboratório: Nara, Mariano, Pedro, Santiago, Sandro, Cláudio, Alex, Ana Carolina, Marcelo e Eduardo. Pela companhia, ajuda técnica e momentos de descontração.

A Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro através do processo 06/60929-0.

Resumo

Esse trabalho apresenta um procedimento de projeto para obtenção de estruturas típicas em aplicações aeronáuticas otimizadas satisfazendo simultaneamente dois critérios: carga de flambagem máxima e frequência fundamental máxima.

As estruturas projetadas estão sujeitas a carregamentos incertos ou não uniformes. Para a representação do carregamento não uniforme utiliza-se uma metodologia de extração de carregamentos auto-equilibrados a partir dos carregamentos físicos que atuam na estrutura. O carregamento auto-equilibrado é definido usando alguns pontos de controle de carga localizados nos contornos da estrutura. O carregamento auto-equilibrado é descrito usando funções lineares por parte.

A abordagem matemática do projeto envolve a solução de problemas de otimização “minimax” em dois níveis e simultâneos. Utiliza-se a estratégia minimax com o intuito de se obter o melhor projeto para a pior condição de carregamento. O processo de otimização envolve também o método de Powell e um loop externo de otimização de massa. O loop externo de otimização de massa torna possível ajustar a massa da estrutura de acordo com especificações de projeto e margens de segurança adotadas.

As variáveis de projeto da otimização são propriedades geométricas de estruturas e/ou ângulos de orientação das camadas (em estruturas de material compósito). No entanto, em otimizações que utilizam ângulos de orientação das camadas, é necessário utilizar parâmetros de laminação com o intuito de manter a convexidade do problema. Uma nova definição dos parâmetros de laminação foi adotada para aumentar a aplicabilidade do procedimento.

Abstract

This work presents a design procedure suitable to typical structures in aeronautical applications optimized to satisfy two simultaneous criteria: maximum buckling load and maximum fundamental frequency.

The designed structures are subjected to uncertain or non uniform loading. For the non uniform loading representation it is used a methodology that extracts self-equilibrated loadings from physical loadings applied to the structure. The self-equilibrated loading is defined using some loading control points placed at the structure edges. The self-equilibrated loading is described using linear functions by parts.

The mathematical approach involves the solution of bilevel and simultaneous minimax optimization problems. It is used the minimax strategy aiming at obtaining the best design for the worst loading condition. The optimization process uses Powell's method and a mass optimization external loop. The mass optimization external loop makes possible to minimize the structural mass according to design requirements and safety margins adopted.

The optimization design variables are the geometrical properties of the structures and/or the layers orientation angles (for composite structures). However, for optimizations that use the layers orientation angles, it is necessary to use the lamination parameters in order to keep the problem convexity. A novel definition for the lamination parameters was introduced to enhance the applicability of the design procedure.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
3 DESENVOLVIMENTO.....	22
3.1 Princípios de energia e elementos finitos	22
3.1.1 Relações cinemáticas.....	23
3.1.2 Elementos finitos	27
3.1.3 Elementos Finitos (software Abaqus 6.5-1)	32
3.2 Formulação do problema.....	33
3.2.1 Superfície de frequência fundamental	34
3.2.2 A superfície de estabilidade.....	37
4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	41
4.1 Método de Powell.....	43
4.2 Estratégia minimax	47
4.3 Loop externo de otimização de massa.....	50
5 CARREGAMENTO NÃO UNIFORME	54
6 PARÂMETROS DE LAMINAÇÃO	62
6.1 Processo de otimização.....	66
6.2 Sensibilidade da função objetivo com respeito aos parâmetros de laminação	71
6.3 Exemplo de aplicação do cálculo da sensibilidade.....	77
7 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	84
7.1 Pórtico.....	84
7.1.1 Minimax encontrando o critério ativo	87
7.1.2 Minimax encontrando a região ótima.....	90
7.2 Placa plana de material compósito laminado	92
7.2.1 Otimização minimax com restrição de massa	95
7.2.2 Minimax com loop externo de otimização de massa.....	99
7.3 Painel reforçado de material compósito laminado sob carregamento não uniforme....	101
7.3.1 Painel reforçado considerando $P_{ij} = 0$	103
7.3.2 Painel reforçado considerando $P_{ij} = 1$	106
7.3.3 Painel reforçado considerando $P_{ij} = 0.25$	108
7.3.4 Painel reforçado $[(0/90/45/-45)]_s$ considerando $P_{ij} = 0.25$	111
7.3.5 Painel reforçado $[(0/90)]_s$ considerando $P_{ij} = 0.25$, $\omega_0 = 60$ Hz.....	113
7.4 Placa plana de material compósito laminado com otimização de orientação angular..	115
7.5 Painel reforçado de material compósito laminado sob carregamento não uniforme com otimização de orientação angular	120
8 CONCLUSÃO.....	124
9 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	128

Lista de ilustrações

Figura 1 - Processo de otimização e complementos.....	16
Figura 2 – Elemento Lagrangiano biquadrático.....	27
Figura 3 – Carregamento distribuído em um elemento.....	31
Figura 4 – Representação das restrições adotadas no modelo do Abaqus 6.5-1.....	33
Figura 5 – Superfície de frequência fundamental.....	35
Figura 6 – Superfície de estabilidade.....	37
Figura 7 – Vetor tangente de segunda ordem.....	40
Figura 8 – Algoritmo para o método de Powell.....	46
Figura 9 – Domínio convexo dos estados de tensão inicial.....	48
Figura 10 – Estratégia de otimização com loop externo de otimização de massa.....	50
Figura 11 - Tensões resultantes de cisalhamento e compressão.....	54
Figura 12 – Discretização do carregamento.....	55
Figura 13 – Obtenção das matrizes de rigidez por parâmetros de laminação e por orientação angular [52].....	65
Figura 14 - Processo de otimização com orientação angular.....	70
Figura 15 – Placa sob carregamento compressivo.....	77
Figura 16 - Pórtico.....	84
Figura 17 – Variação da flambagem e frequência natural do pórtico ($p_{10} = p_{20} = 800$ N).....	86
Figura 18 – Variação da flambagem e frequência natural do pórtico ($p_{10} = 800$, $p_{20} = 400$ N).....	87
Figura 19 – Variação da frequência natural e flambagem para o pórtico.....	91
Figura 20 – Placa sob carregamento mecânico.....	92
Figura 21 – Placa discretizada em 64 elementos.....	93
Figura 22 – Corte AA: Representação das variáveis de projeto.....	93
Figura 23 – Laminado ótimo para flambagem como critério dominante.....	98
Figura 24 – Laminado ótimo para frequência como critério dominante.....	98
Figura 25 – Painel reforçado com as variáveis de projeto.....	102
Figura 26 – Posição dos pontos de controle de carga.....	103
Figura 27 - Carregamento autoequilibrado para caso de carga 1, $P_{ij} = 0$	104
Figura 28 – Carregamento autoequilibrado para caso de carregamento 1 e ponto de controle de carga 3, $P_{31} = 1$	106
Figura 29 – Carregamento autoequilibrado para caso de carregamento 1 e ponto de controle de carga 3, $P_{31} = 0.25$	109

Lista de tabelas

Tabela 1 – Rigidez do laminado em função das propriedades da lamina [53].....	72
Tabela 2 – Propriedades dos materiais de referência, 1 e 2.....	77
Tabela 3 – Invariantes.....	78
Tabela 4 – Elementos da matriz $[\Delta\xi]$ referentes a $\{\xi^A\}$	80
Tabela 5 - Elementos da matriz $[\Delta\xi]$ referentes a $\{\xi^D\}$	81
Tabela 6 – Função objetivo $F(\{\xi\})$ e variação da função objetivo $\Delta F(\{\xi\})$	81
Tabela 7 - Critério ativo para $\omega_0 = 13$ Hz e $p_{10} = p_{20} = 800$ N.....	88
Tabela 8 - Critério ativo para $\omega_0 = 13$ Hz e $p_{10} = 800$ N, $p_{20} = 400$ N.....	89
Tabela 9 - Critério ativo para $\omega_0 = 3$ Hz e $p_{10} = p_{20} = 800$ N.....	89
Tabela 10 - Critério ativo para $\omega_0 = 3$ Hz e $p_{10} = 800$ N, $p_{20} = 400$ N.....	89
Tabela 11 - Resultados da estratégia minimax e do método de Powell para $p_{10} = p_{20} =$ 800 N.....	91
Tabela 12 - Resultados da estratégia minimax e do método de Powell para $p_{10} = 800$ N, $p_{20} =$ 400 N.....	91
Tabela 13 – Propriedades do material T300/5208 carbono-epóxi.....	93
Tabela 14 – Casos de carregamento para placa plana.....	94
Tabela 15 – Resultados da estratégia minimax para $N_x = 2000$ e $N_{xy} = 300$ (N/m).....	96
Tabela 16 – Resultados da estratégia minimax para $N_x = 3200$ e $N_{xy} = 850$ (N/m).....	97
Tabela 17 – Resultados da estratégia de otimização para $N_x = 4500$ e $N_{xy} = 1200$ (N/m).....	99
Tabela 18 – Minimax com loop externo de otimização de massa.....	100
Tabela 19 – Casos de carregamento para painel reforçado.....	102
Tabela 20 - Resultados da otimização $P_{ij} = 0$	105
Tabela 21 - Resultados da otimização $P_{ij} = 1$	107
Tabela 22 - Resultados da otimização $P_{ij} = 0.25$	110
Tabela 23 - Resultados de otimização $[(0/90/45/-45)]_s$, $P_{ij} = 0.25$	112
Tabela 24 - Resultados da otimização $[(0/90)]_s$, $P_{ij} = 0.25$, $\omega_0 = 60$ Hz.....	114
Tabela 25 – Propriedades do material.....	115
Tabela 26 – Magnitude do carregamento e requisito de frequência mínimo.....	117
Tabela 27 – Resultados da otimização para $N_x = 1200$ (kN/m).....	118
Tabela 28 – Resultados da otimização para $N_x = 7200$ (kN/m).....	118

Tabela 29 – Resultados da otimização para $N_x = 14400$ (kN/m).....	119
Tabela 30 – Resultado comparativo para critério de parada.....	121
Tabela 31 – Otimização da orientação angular do laminado, $\omega_0 = 10$ Hz.....	122
Tabela 32 – Otimização da orientação angular do laminado, $\omega_0 = 50$ Hz.....	123

Lista de símbolos

W - trabalho

U - energia de deformação

V - trabalho das forças externas

π - funcional da energia potencial total

$\{\varepsilon\}$ - vetor de deformação

$\{\sigma\}$ - vetor de tensão

\tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} - deslocamentos nas direções x , y e z respectivamente

u , v , w - deslocamentos no plano médio nas direções x , y e z respectivamente

ψ_x , ψ_y - rotações no plano médio nas direções x e y respectivamente

$\{e\}$ - vetor de deformação do plano médio

$[Q]$ - matriz que relaciona tensão e deformação

$[A]$ - matriz de rigidez de membrana

$[B]$ - matriz de rigidez de acoplamento membrana flexão

$[D]$ - matriz de rigidez a flexão

$[A^*]$ - matriz de rigidez ao cisalhamento transversal

Φ_k - função de forma para elementos finitos

$[J(\xi, \eta)]$ - matriz jacobiana em coordenadas locais

$\{q\}$ - vetor de deslocamentos

$[K]$ - matriz de rigidez

$[K_G]$ - matriz de rigidez geométrica

$[M]$ - matriz de massa

$\{p\}$ - vetor de carregamentos

λ - carga crítica ou de flambagem

ω - frequência natural

β - parâmetro de carregamento

$\{X_P\}$ - vetor de variáveis de projeto do método de Powell

$\{S\}$ - vetor de direções de busca do método de Powell

$\{X\}$ - vetor de carregamento autoequilibrado

F_{ij} - magnitude do carregamento aplicado ao ponto de controle de carga i referente ao carregamento físico j

P_{ij} - parâmetro adimensional para representação do carregamento não uniforme

U_i - invariante

$\xi_{[1,2,3,4]}^{A,B,D}$ - parâmetros de laminação

$\{N\}$ - espaço de carregamento.

1 INTRODUÇÃO

Uma forma eficiente de se projetar estruturas é a utilização de técnicas de otimização estrutural. A formulação de um problema de otimização estrutural envolve a identificação e definição das variáveis de projeto; a identificação e definição da função objetivo e a identificação e definição de restrições.

O processo de projeto usando técnicas de otimização é mais vantajoso que o processo de projeto convencional. O processo que usa otimização leva em consideração todas as restrições simultaneamente e iterativamente melhora o projeto enquanto minimiza a função de custo. Além disso, caso os parâmetros do problema sejam alterados, o processo convencional necessita repetir todos os cálculos. No processo ótimo, novas soluções podem ser obtidas muito rapidamente uma vez que o problema já tenha sido formulado e tenha um programa computacional associado. Resumindo, técnicas de otimização oferecem ao projetista a flexibilidade de estudar projetos diferentes em um tempo relativamente curto, produzindo assim projetos melhores de forma mais eficiente [1].

O objetivo do presente trabalho é realizar a otimização de estruturas aeronáuticas obtendo simultaneamente a carga máxima de flambagem e a frequência natural máxima. O procedimento de projeto deve ser desenvolvido de forma independente do método de otimização usado e da ferramenta matemática de cálculo da função objetivo. Isso significa que o procedimento é desenvolvido tendo em mente que o projetista poderá modificar o método de otimização ou a forma de calcular a função objetivo de acordo com sua disponibilidade computacional. Isso mantém a flexibilidade e portabilidade do procedimento de projeto.

Dessa forma os métodos de otimização usados podem ser substituídos sem que o procedimento de projeto perca sua aplicabilidade. De forma análoga, as funções objetivo

podem ser calculadas analiticamente, por rotina de elementos finitos própria ou por um pacote comercial de cálculo estrutural por elementos finitos (Abaqus 6.5-1, por exemplo). A escolha de qualquer uma dessas formas de calcular a função objetivo não modifica o procedimento de projeto.

A formulação do problema de flambagem e frequência natural encontra-se descrita no capítulo 3. A descrição apresentada nesse capítulo envolve os princípios de energia, elementos finitos e a demonstração de que a flambagem e a frequência natural são funções convexas do carregamento para um determinado conjunto de variáveis de projeto geométricas. A propriedade de convexidade tem grande importância na simplificação dos problemas, porém não é válida quando as variáveis de projeto são as orientações angulares das camadas de um material compósito laminado. Nesse caso a flambagem e a frequência não serão funções convexas do carregamento para um determinado conjunto de orientações angulares como variáveis de projeto.

Um dos objetivos mais comuns em processos de otimização envolvendo materiais compósitos é obter ângulos de orientação de camadas de forma a maximizar a carga de flambagem e a frequência natural da estrutura. No entanto, o processo de otimização é dificultado pelo fato de que flambagem e frequência natural não são funções convexas dos ângulos de orientação das camadas e, por esse motivo, a função objetivo pode apresentar vários máximos locais. Para contornar esse problema, esse trabalho se baseia em um procedimento de otimização desenvolvido no trabalho de Foldager et al. [2]. Esse procedimento está descrito no capítulo 6 e envolve os parâmetros de laminação e, através deles, encontra o máximo global.

O processo de otimização envolve a estratégia minimax [3], o método de Powell [4] e um loop externo de otimização de massa. A descrição completa do processo de otimização encontra-se no capítulo 4. A estratégia minimax tem como aplicação geral minimizar a perda máxima ou maximizar o lucro mínimo. Nesse trabalho ela é usada como um procedimento de

dois níveis onde os critérios são minimizados com relação aos parâmetros de carregamento e maximizados com relação as variáveis de projeto. Isso permite obter o melhor projeto para a pior condição de carregamento.

A primeira parte da estratégia minimax, que é a minimização dos critérios com relação aos parâmetros de carregamento, compreende uma busca aleatória que usa a propriedade de convexidade da flambagem e frequência natural. Baseado nessa propriedade é possível afirmar que o mínimo da função corresponderá a um dos pontos do domínio convexo do espaço de carregamento. Isso simplifica o processo de otimização, pois reduz significativamente a quantidade necessária de avaliações da função objetivo. Sabendo que o mínimo é um dos pontos do domínio convexo não será necessário verificar todos os pontos do espaço de carregamento, mas somente aqueles de seu domínio convexo. Vale ressaltar que a estratégia minimax sofre modificações quando as variáveis de projeto são as orientações angulares das camadas de um material compósito laminado devido a não convexidade do problema. Essas modificações serão descritas no capítulo 6.

A segunda parte da estratégia minimax, que é maximização dos critérios com relação as variáveis de projeto, usa o método de Powell. O método de Powell é um método de ordem zero baseado no conceito de direções conjugadas. Esse método é bastante confiável, porém requer muitos cálculos da função objetivo. Quanto maior o número de variáveis de projeto, maior a quantidade necessária de avaliações da função objetivo. Dessa forma sua aplicação pode não ser viável em problemas onde o custo da avaliação da função objetivo é muito alto ou onde existem muitas variáveis de projeto. Deve-se notar que o procedimento de projeto aqui proposto é independente do algoritmo de otimização. O método de Powell foi selecionado por ser simples e robusto.

O *loop* externo de otimização de massa tem por objetivo a obtenção de uma estrutura que atenda as especificações de projeto e margens de segurança adotadas, mas que não seja super ou subdimensionada.

Em estruturas aeronáuticas a representação do carregamento ao qual a estrutura estará submetida é uma etapa muito importante do projeto. A representação mais comum é considerar o carregamento como fixo e uniformemente distribuído. Para carregamentos desse tipo em componentes estruturais aeronáuticos existem tabelas e diagramas na literatura [5] que são usadas nos projetos. No entanto carregamentos fixos e uniformes não são comuns em situações reais e projetos baseados nessa suposição tendem a dois extremos: serem inseguros ou superdimensionados.

Visando obter uma representação satisfatória de carregamentos não uniformemente distribuídos, esse trabalho utiliza uma metodologia desenvolvida por Conrado [6] e aprimorada por Gama [7] para extrair carregamentos autoequilibrados a partir de carregamentos físicos aplicados a estrutura. A descrição completa dessa metodologia encontra-se no capítulo 5. O desenvolvimento da metodologia baseia-se nas condições de equilíbrio e no fato de que o carregamento aplicado a uma estrutura deve ser autoequilibrado. O carregamento autoequilibrado obtido é representado por funções lineares por partes definidas em pontos de controle de carga que, por sua vez, são posicionados nos contornos da estrutura.

Outra etapa importante de um projeto estrutural é a definição do material a ser utilizado. Em estruturas aeronáuticas o alumínio vem gradualmente perdendo espaço para materiais compósitos. Uma das grandes vantagens de materiais compósitos torna-se evidente quando algumas propriedades como módulo de elasticidade e resistência por peso unitário (módulo específico e resistência específica, respectivamente) são analisadas. Os materiais compósitos apresentam maior módulo de elasticidade e resistência específica na direção da fibra, o que

significa que o peso dos componentes pode ser reduzido. Esse é um fator de grande importância em componentes móveis, especialmente em todas as formas de transporte onde reduções no peso resultam em maior eficiência e economia de energia [8].

A Figura 1 apresenta um diagrama de fluxo com as definições importantes para o processo de otimização, bem como os complementos (otimização de massa e representação de carga não uniforme) que foram usados nesse trabalho visando completar a descrição do procedimento de projeto.

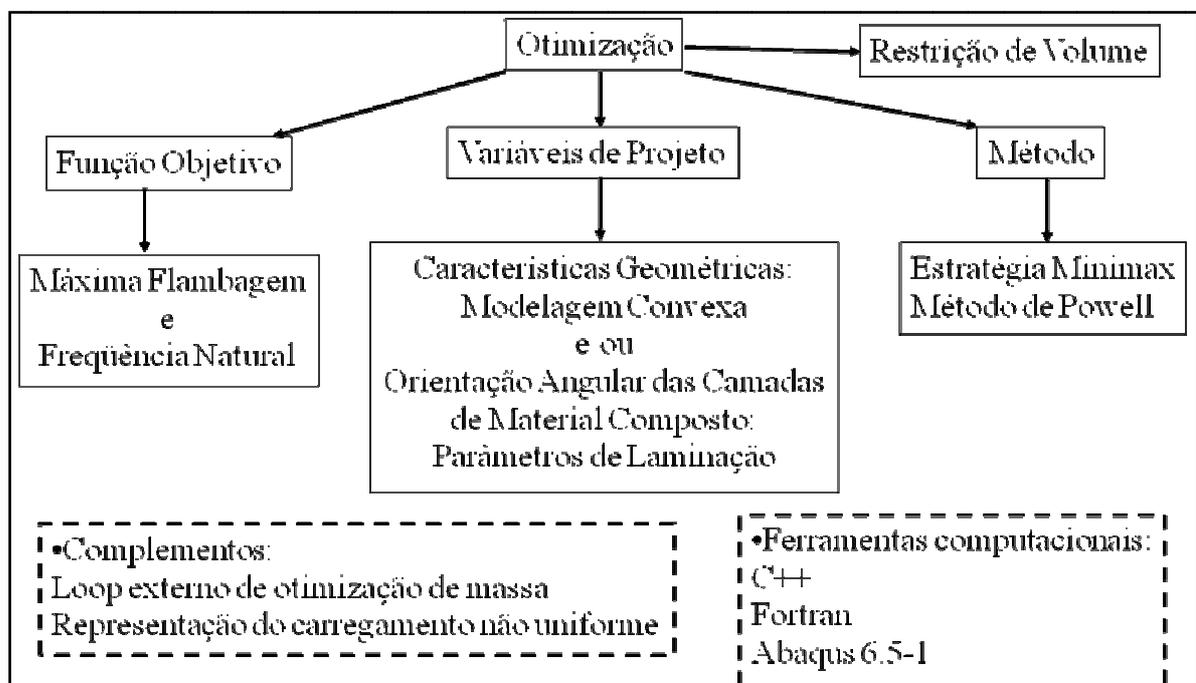


Figura 1 - Processo de otimização e complementos.

As aplicações numéricas apresentadas no capítulo 7 visam ilustrar a evolução do trabalho, bem como as aplicações dos conceitos e procedimentos descritos nos capítulos anteriores. Dessa forma são apresentados cinco exemplos de projetos otimizados. Os três primeiros compreendem um pórtico isotrópico, uma placa plana e um painel reforçado de material compósito laminado que tem como variáveis de projeto características geométricas como espessura de camadas e altura e largura de reforçadores. Os dois últimos exemplos

compreendem uma placa plana e o painel reforçado de material compósito laminado tendo como variáveis de projeto as orientações angulares das camadas. O pórtico e a placa plana das subseções 7.1 e 7.4 estão sujeitos a carregamento compressivo. A placa plana da subseção 7.2 está sob carregamento compressivo e cisalhante. O painel reforçado das subseções 7.3 e 7.5 está sob carregamento não uniforme. Todos os projetos são otimizados visando obter máxima flambagem e frequência natural.

Os capítulos 8 e 9 tratam das conclusões e sugestões para trabalhos futuros, respectivamente.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em pesquisas aeronáuticas as técnicas de otimização estrutural têm sido largamente empregadas [9, 10, 11]. Nessa área os pesquisadores estão interessados em obter principalmente: (i) carga máxima de flambagem [12, 6], (ii) máxima frequência fundamental de vibração [13], e (iii) mínima flexibilidade [14, 15].

Algumas aproximações comuns para otimização simultânea de flambagem e frequência natural consistem em usar os critérios como restrições [16], ou usar como função objetivo um somatório ponderado dos critérios [17]. Para usar tais abordagens é necessário que algumas informações prévias estejam disponíveis para que valores adequados de restrições sejam definidos. Além disso, para definir uma soma ponderada dos critérios, é necessário ter alguma noção sobre a relevância relativa de cada critério no problema de otimização.

Outra forma comum de implementar otimização multicritério é usando o conceito de ótimo de Pareto [18]. O projeto ótimo de Pareto assegura que, no mínimo, um critério será otimizado e os demais não serão prejudicados. Uma estratégia similar é a estratégia minimax [3], a qual pode ser usada para minimizar a máxima perda ou maximizar o lucro mínimo. Estendida a um procedimento de dois níveis e aplicada à otimização de flambagem e frequência natural, a estratégia minimax torna possível obter o melhor projeto para a pior condição de carregamento.

Entre as novas aproximações para otimização multicritério, os algoritmos genéticos têm obtido alguma projeção [19, 20]. Os algoritmos genéticos são baseados na teoria da evolução natural e as variáveis de projeto são a população que deve evoluir. Esses algoritmos vêm apresentando bons resultados, mas eles têm alto custo computacional.

Na maioria das pesquisas conduzidas até o momento, a distribuição de carregamento é fixa e uniforme e para esses casos existem tabelas e diagramas disponíveis na literatura [5]. No

entanto carregamentos desse tipo não representam as condições reais. Estruturas aeronáuticas estão em geral sujeitas a carregamentos incertos e não uniformes.

Algumas soluções já foram propostas para representar carregamentos de forma mais fiel à realidade, podendo-se citar as representações de natureza probabilística, que descrevem o espaço de carga através de distribuições de densidade de probabilidade onde seus elementos têm probabilidades distintas de ocorrência. Uma dificuldade associada com essa aproximação é a seleção de configurações que tem a maior probabilidade de ocorrência e qual distribuição de probabilidade é essa [21].

Uma estratégia alternativa para tratar incertezas é a modelagem convexa [22, 23] na qual não há necessidade de funções de densidade de probabilidade. As incertezas pertencem a um conjunto convexo que representa o espaço de carregamento escolhido. Essa aproximação permite usar um tratamento determinístico de incertezas e fornece ao projetista algumas propriedades extremas do sistema a ser modelado, de acordo com o conjunto convexo escolhido [24]. Nessa situação o espaço de carregamento deve ser prudentemente escolhido para englobar todos os casos possíveis de carga e levar em consideração os mecanismos de transferência de carga e possíveis características especiais, tais como pontos de concentração de tensão, reforços e furos de acesso (*cutouts*). Se espaços de carregamento maiores são considerados, o número de funções de carregamento deve ser aumentado. Isso pode tornar os procedimentos numéricos mais lentos, mas a estrutura ótima obtida será mais robusta e menos sensível de forma que, por exemplo, manobras do avião que levem a novos casos de carga ou mecanismos de transferência imprevistos, não resultem em danos [6].

O uso de carregamentos incertos e não uniformes torna o projeto mais próximo de situações reais e, conseqüentemente, mais robusto. A representação de carregamento incerto e não uniforme usada nesse trabalho é baseada nos trabalhos de Conrado [6] e Gama [7]. Neles o carregamento é definido a partir de alguns casos físicos de carregamento com a restrição de

que o carregamento aplicado à estrutura deve ser autoequilibrado. O procedimento de Conrado [6] representa carregamentos não uniformes, mas é muito conservativo de forma que o resultado ótimo obtido é capaz de suportar até carregamentos que dificilmente acontecem em situações reais. O procedimento de Gama [7] pode ser considerado uma evolução do procedimento de Conrado [6], sendo menos conservativo e mais próximo de situações reais.

A utilização de materiais compósitos em estruturas aeronáuticas é crescente. Isso se deve principalmente ao baixo peso e boas propriedades mecânicas desses materiais. Em geral as pesquisas envolvendo compósitos investigam dano, fadiga e/ou fratura [25]; impacto [26], delaminação [27]; critérios de falha [28]; entre outros assuntos. Os compósitos laminados são formados por diversas lâminas de material compósito cada uma com determinada orientação angular. As propriedades de um laminado multidirecional são funções das propriedades das lâminas e de sua seqüência de empilhamento. Sendo assim, os trabalhos de otimização envolvendo materiais compósitos usam comumente espessuras [29] e/ou orientação angular [30] das camadas como variáveis de projeto.

Um problema surge em termos de otimização de flambagem e frequência natural quando se usa os ângulos de orientação das camadas como variáveis de projeto: nesse caso, a função objetivo não será uma função convexa do carregamento para determinado conjunto de variáveis de projeto. Esse problema é contornado usando os parâmetros de laminação como variáveis de projeto, ao invés dos ângulos de orientação das camadas. Isso mantém o problema convexo e, conseqüentemente, a solução fica mais simples. Os parâmetros de laminação foram introduzidos por Tsai & Pagano [31].

O processo de otimização com parâmetros de laminação usado nesse trabalho é baseado no trabalho de Foldager et al. [2]. Nesse trabalho o processo de otimização é iniciado usando ângulos de orientação das camadas como variáveis de projeto. No entanto, o ótimo encontrado dessa forma pode ser local visto que o problema não é convexo. Uma das formas de se

verificar se o ótimo encontrado é o global é converter os ângulos ótimos encontrados em parâmetros de laminação, calcular a sensibilidade da função objetivo com relação a esses parâmetros e, usando essas informações, buscar novas orientações angulares que forneçam mesmo ou maior valor de função objetivo. Se houver, o ótimo encontrado não é o global e o processo de otimização deve ser continuado a partir desse novo ponto.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 Princípios de energia e elementos finitos

O método de elementos finitos [32, 33] tem como base os princípios de energia, os quais dizem que entre todos os possíveis campos de deslocamento de um corpo deformável, aqueles que são estados reais de equilíbrio correspondem a valores estacionários de energia potencial total.

O princípio dos trabalhos virtuais vale para qualquer material sob qualquer carregamento e diz que no equilíbrio, a variação do trabalho é nula. Ou seja:

$$\delta W = 0 \Leftrightarrow \text{equilíbrio} \quad (3.1-1)$$

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = 0 \quad (3.1-2)$$

$$\delta W_i = \delta U, \text{ energia de deformação} \quad (3.1-3)$$

$$\delta W_e = -\delta V, \text{ trabalho das forças externas} \quad (3.1-4)$$

$$\delta U - \delta V = 0 \quad (3.1-5)$$

$$\delta(U - V) = 0 \quad (3.1-6)$$

$$\delta \pi = \delta(U - V) = 0 \Leftrightarrow \text{equilíbrio} \quad (3.1-7)$$

onde π é o funcional da energia potencial total. Em análises estáticas onde não há dependência com relação ao tempo e as forças de inércia são desprezíveis, o funcional pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_A \{f\}^T \{u\} dA \quad (3.1-8)$$

onde V é o volume e A é a área do contorno da estrutura em estudo. A equação mostra que a energia potencial é dada pela energia de deformação menos o trabalho das forças externas.

O desenvolvimento das relações cinemáticas para elementos de viga encontra-se amplamente divulgado na literatura [32, 33]. Uma formulação de cálculo de flambagem de frequência natural por elementos finitos de viga foi desenvolvida utilizando C++ para a otimização de um pórtico. Os resultados são apresentados na subseção 7.1.

As relações cinemáticas apresentadas aqui são referentes a elementos de placa plana e baseadas nos trabalhos de Almeida e Hansen [34] e de Faria [35]. Uma formulação de cálculo de flambagem e frequência natural baseada nessas relações foi desenvolvida utilizando C++ para a otimização de uma placa plana. Os resultados são apresentados na seção 7.2.

Os resultados de otimização das subseções 7.3 e 7.5 utilizaram o software Abaqus 6.5-1 para o cálculo de flambagem e frequência natural por elementos finitos.

3.1.1 Relações cinemáticas

A placa considerada nesse trabalho é modelada utilizando a teoria de Reissner-Mindlin. Segundo tal teoria os deslocamentos no plano \tilde{u} e \tilde{v} variam linearmente através da espessura e o deslocamento transversal \tilde{w} é constante através da espessura, de forma que:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z) &= u(x, y) + z\psi_x \\ \tilde{v}(x, y, z) &= v(x, y) + z\psi_y \\ \tilde{w}(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.1-9)$$

onde u , v e w são os deslocamentos no plano médio nas direções x , y e z , respectivamente. ψ_x e ψ_y são as rotações nas direções x e y respectivamente.

O vetor de deformação para placas é composto por uma parcela linear e outra não linear:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^L\} + \{\varepsilon^N\} \quad (3.1-10)$$

onde os componentes lineares são dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^L &= u_{,x} + z\psi_{x,x} & \varepsilon_y^L &= v_{,y} + z\psi_{y,y} & \varepsilon_z^L &= 0 \\ \gamma_{xy}^L &= u_{,y} + v_{,x} + z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ \gamma_{xz}^L &= w_{,x} + \psi_x \\ \gamma_{yz}^L &= w_{,y} + \psi_y \end{aligned} \quad (3.1-11)$$

E os componentes não lineares são dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^N &= \frac{1}{2} \left[(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + 2z(u_{,x}\psi_{x,x} + v_{,x}\psi_{y,x}) + z^2(\psi_{x,x}^2 + \psi_{y,x}^2) \right] \\ \varepsilon_y^N &= \frac{1}{2} \left[(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) + 2z(u_{,y}\psi_{x,y} + v_{,y}\psi_{y,y}) + z^2(\psi_{x,y}^2 + \psi_{y,y}^2) \right] \\ \varepsilon_z^N &= \frac{1}{2} \left[(\psi_x^2 + \psi_y^2) \right] \\ \gamma_{xy}^N &= (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) + z(u_{,x}\psi_{x,y} + u_{,y}\psi_{x,x} + v_{,x}\psi_{y,y} + v_{,y}\psi_{y,x}) + z^2(\psi_{x,x}\psi_{x,y} + \psi_{y,x}\psi_{y,y}) \\ \gamma_{xz}^N &= (u_{,x}\psi_x + v_{,x}\psi_y) + z(\psi_x\psi_{x,x} + \psi_y\psi_{y,x}) \\ \gamma_{yz}^N &= (u_{,y}\psi_x + v_{,y}\psi_y) + z(\psi_x\psi_{x,y} + \psi_y\psi_{y,y}) \end{aligned} \quad (3.1-12)$$

As deformações em qualquer ponto da placa são funções das deformações no plano médio.

Conseqüentemente um vetor de deformação linear do plano médio $\{e\}$ e um vetor de componentes dos termos de deformação não linear $\{e_G\}$ são definidos abaixo:

$$\{e\}^T = \{u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \quad k_{xx} \quad k_{yy} \quad k_{xy} \quad w_{,x} + \psi_x \quad w_{,y} + \psi_y\} \quad (3.1-13)$$

$$\{e_G\}^T = \{u_{,x} \quad u_{,y} \quad v_{,x} \quad v_{,y} \quad w_{,x} \quad w_{,y} \quad \psi_{x,x} \quad \psi_{x,y} \quad \psi_{y,x} \quad \psi_{y,y} \quad \psi_x \quad \psi_y\} \quad (3.1-14)$$

As tensões em qualquer ponto de uma placa são dadas por:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \quad (3.1-15)$$

onde $[Q]$ é a rigidez do material em coordenadas estruturais. Dessa forma, a energia potencial total pode ser reescrita:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^L\}^T [Q] \{\varepsilon^L\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^N\} \{\sigma_0\} - \int_A \{f\}^T \{u\} dA \quad (3.1-16)$$

A solução da primeira integral dá origem a matriz de rigidez e a solução da segunda integral fornece a matriz de rigidez geométrica. $\{\sigma_0\}$ é a tensão de pré-flambagem que é obtida a partir da solução de um problema do tipo $[K]\{q\} = \{p\}$. Onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{q\}$ são os deslocamentos de pré-flambagem e $\{p\}$ é o carregamento aplicado.

Integrando a energia de deformação na espessura (com respeito a z), a energia potencial interna pode ser descrita em termos do vetor de deformações do plano médio:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{e\}^T [D] \{e\} dA + \frac{1}{2} \int_A \{e_G\}^T [D_G] \{e_G\} dA \quad (3.1-17)$$

onde $[D]$ e $[D_G]$ são as matrizes constitutivas relacionando as tensões resultantes e as deformações do plano médio. O subscrito G refere-se a energia de deformação devido ao acoplamento entre termos lineares e não lineares. Uma descrição detalhada dos cálculos para obtenção dessas matrizes encontra-se na referência [36]. Elas são definidas por:

$$[D] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [A^*] \end{bmatrix} \quad (3.1-18)$$

$$[D_G] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_x & M_{xy} & 0 & 0 & Q_x & 0 \\ N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xy} & M_y & 0 & 0 & Q_x & 0 \\ 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_x & M_{xy} & 0 & Q_y \\ 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xy} & M_y & 0 & Q_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_x & M_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_x & L_{xy} & 0 & 0 & T_x & 0 \\ M_{xy} & M_y & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{xy} & L_y & 0 & 0 & T_y & 0 \\ 0 & 0 & M_x & M_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_x & L_{xy} & 0 & T_x \\ 0 & 0 & M_{xy} & M_y & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{xy} & L_y & 0 & T_y \\ Q_x & Q_x & 0 & 0 & 0 & 0 & T_x & T_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_y & Q_y & 0 & 0 & 0 & 0 & T_x & T_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1-19)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^K \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3.1-20)$$

$$A_{ij}^* = \sum_{k=1}^K \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{ij}]_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (3.1-21)$$

$$(N_{ij}, M_{ij}, L_{ij}) = \sum_{k=1}^K \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\sigma}_{ij} (1, z, z^2) dz, \quad i, j = xx, yy, xy \quad (3.1-22)$$

$$(Q_i, T_i) = \sum_{k=1}^K \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\sigma}_{iz} (1, z) dz, \quad i = x, y \quad (3.1-23)$$

A obtenção da matriz de massa é feita através de formulação da energia cinética da placa:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \rho dv \quad (3.1-24)$$

onde ρ é a densidade,

$$T = \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{Bmatrix} dA \quad (3.1-25)$$

e

$$(m, I) = \int_{z_0}^{z_k} (1, z^2) \rho dz \quad (3.1-26)$$

3.1.2 Elementos finitos

A formulação de elementos finitos para placas planas segundo a teoria de Reissner-Mindlin encontra-se descrita na referência [37]. A formulação aqui apresentada é baseada nos trabalhos de Almeida e Hansen [34] e de Faria [35]. Para a formulação de elementos finitos foram utilizados elementos biquadráticos lagrangianos de nove nós como os da Figura 2.

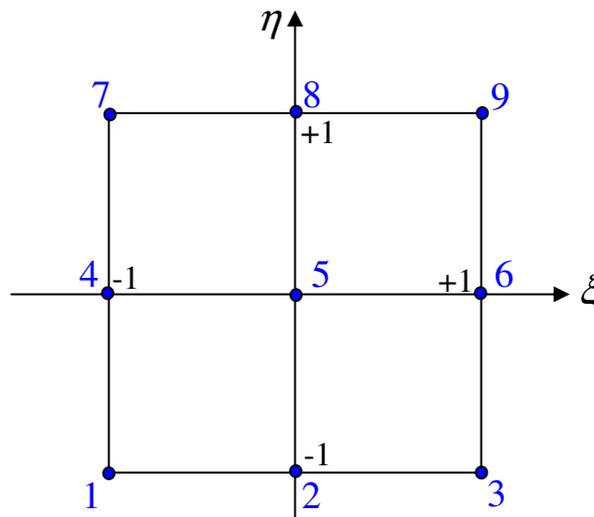


Figura 2 – Elemento Lagrangiano biquadrático.

As variáveis nodais são os deslocamentos e rotações: u , v , w , ψ_x e ψ_y . Conseqüentemente cada elemento tem um total de 45 graus de liberdade. O valor de um grau de liberdade é avaliado dentro do elemento por interpolação de seus valores nodais. Assim,

$$\alpha = \sum_{i=1}^9 \Phi_i(\xi, \eta) \alpha_i \quad (3.1-27)$$

onde α é um grau de liberdade genérico, α_i o grau de liberdade nodal e $\Phi_i(\xi, \eta)$ as funções de interpolação. Para obter Φ_i definem-se as funções $F_j(\eta)$, $j = 1, 2, 3$ como:

$$F_1(\eta) = \frac{\eta(\eta-1)}{2} \quad F_2(\eta) = 1 - \eta^2 \quad F_3(\eta) = \frac{\eta(\eta+1)}{2} \quad (3.1-28)$$

$\Phi_k(\xi, \eta)$, $k = 1, \dots, 9$, é dado então por

$$\Phi_{j+3(i-1)}(\xi, \eta) = F_i(\xi) F_j(\eta), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1-29)$$

Os deslocamentos em um ponto arbitrário dentro do domínio do e -ésimo elemento são dados por:

$$\{\alpha\} = [u \quad v \quad w \quad \psi_x \quad \psi_y]^T = [\Phi] \{q\}_e \quad (3.1-30)$$

onde $[\Phi]$ é a matriz de funções de interpolação. Matriz $[\Phi]$ tem dimensões 5×45 . O vetor $\{q\}_e$ contém as 45 variáveis nodais agrupadas da seguinte maneira:

$$\{q\}_e^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \psi_{x1} \quad \psi_{y1} \quad u_2 \quad \dots \quad \psi_{y8} \quad u_9 \quad v_9 \quad w_9 \quad \psi_{x9} \quad \psi_{y9}] \quad (3.1-31)$$

O vetor de deformações no plano médio da placa pode ser expresso como:

$$\{e\} = [B]\{q\}_e \quad (3.1-32)$$

onde $[B]$ é uma matriz 8×45 que contém derivadas das funções de interpolação Φ_i com respeito as variáveis x e y . Similarmente o vetor de componentes de deformações não lineares $\{e_G\}$ pode ser computado como:

$$\{e_G\} = [B_G]\{q\}_e \quad (3.1-33)$$

onde $[B_G]$ é uma matriz 12×45 que contém as derivadas das funções de interpolação Φ_i com respeito as variáveis x e y .

$$[B] = \begin{bmatrix} [\Phi_{,x}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Phi_{,y}] & [0] & [0] & [0] \\ [\Phi_{,y}] & [\Phi_{,x}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,x}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,y}] \\ [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,y}] & [\Phi_{,x}] \\ [0] & [0] & [\Phi_{,x}] & [\Phi] & [0] \\ [0] & [0] & [\Phi_{,y}] & [0] & [\Phi] \end{bmatrix} \quad (3.1-34)$$

$$[B_G] = \begin{bmatrix} [\Phi_{,x}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [\Phi_{,y}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Phi_{,x}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Phi_{,y}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Phi_{,x}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Phi_{,y}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,x}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,y}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,x}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\Phi_{,y}] \\ [0] & [0] & [0] & [\Phi] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\Phi] \end{bmatrix} \quad (3.1-35)$$

As matrizes de rigidez e rigidez geométrica de um elemento são definidas a partir das relações acima:

$$[K]_e = \int_A [B]^T [D][B] dA \quad (3.1-36)$$

$$dA = dx dy = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.1-37)$$

onde $|J(\xi, \eta)|$ é o determinante da matriz Jacobiana:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.1-38)$$

$$\begin{aligned} (x_{,\xi}, y_{,\xi}) &= \sum_i (x_i, y_i) \Phi_{i,\xi} \\ (x_{,\eta}, y_{,\eta}) &= \sum_i (x_i, y_i) \Phi_{i,\eta} \end{aligned} \quad (3.1-39)$$

(x_i, y_i) são coordenadas nodais. A matriz $[K]_e$ pode então ser reescrita em coordenadas locais:

$$[K]_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (3.1-40)$$

$$[K_G]_e = \int_A [B_G]^T [D_G] [B_G] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_G(\xi, \eta)]^T [D_G] [B_G(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (3.1-41)$$

A matriz de massa do elemento é dada por:

$$[M]_e = \int_A [\Phi]^T [\tau] [\Phi] dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\Phi(\xi, \eta)]^T [\tau] [\Phi(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (3.1-42)$$

onde

$$\tau = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.1-43)$$

Para formular o carregamento nodal equivalente para um carregamento distribuído considera-se o lado de um elemento com três nós como mostra a Figura 3. O carregamento distribuído é denotado por p .

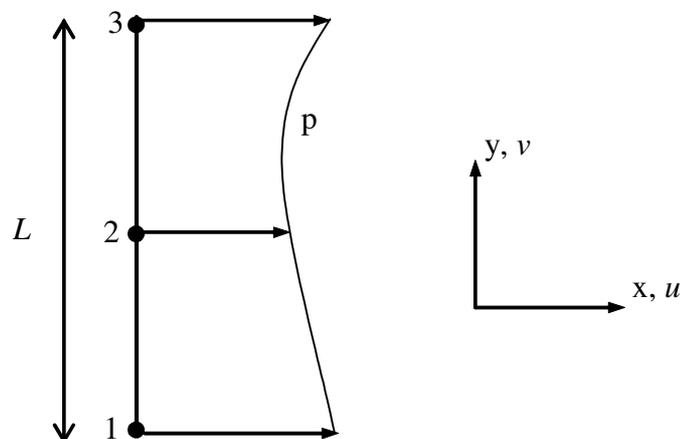


Figura 3 – Carregamento distribuído em um elemento.

Para obter o trabalho virtual δW_e de p calcula-se:

$$\begin{aligned}
 \delta W_e &= \int_{y=-L/2}^{y=L/2} p \delta u dy = \int_{y=-L/2}^{y=L/2} p(\Phi_1 \delta u_1 + \Phi_2 \delta u_2 + \Phi_3 \delta u_3) dy = \\
 &= \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} p(\Phi_1 \delta u_1 + \Phi_2 \delta u_2 + \Phi_3 \delta u_3) \frac{L}{2} d\eta = \\
 &= \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} p \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{Bmatrix} \frac{L}{2} d\eta = \\
 &= \left(\int_{\eta=-1}^{\eta=+1} p \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\eta \right) \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{Bmatrix} = \{f\}^T \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.1-44}$$

O vetor $\{f\}$ é o vetor de carregamentos nodais equivalentes. f_i é aplicado no nó i segundo a direção x . Para carregamento de cisalhamento o procedimento é o mesmo, mas os deslocamentos (v) são ao longo do eixo y .

3.1.3 Elementos Finitos (software Abaqus 6.5-1)

O Abaqus/Standard foi utilizado para calcular a flambagem e frequência natural de um painel reforçado. Como o objetivo é otimizar as propriedades geométricas ou a orientação angular das camadas desse painel, utilizou-se um programa em Fortran que realiza a otimização interagindo com o Abaqus 6.5-1. Essa abordagem torna o projeto de pesquisa mais flexível visto que o Abaqus 6.5-1 permite que estruturas mais complexas sejam modeladas e analisadas sem a necessidade de se desenvolver programas computacionais específicos para o cálculo por elementos finitos. Além disso, viabiliza aplicações práticas deste procedimento de projeto pela indústria.

Os reforçadores foram modelados com elementos de vigas lineares de dois nós. O painel utilizado na otimização foi modelado com elementos de placa lineares de quatro nós e com

integração reduzida. As arestas horizontais tiveram o deslocamento na direção z e a rotação em torno do eixo y restringida. As arestas verticais tiveram o deslocamento na direção z e a rotação em torno do eixo x restringida. Além disso, o deslocamento do centro da placa foi restringido nas direções x e y e em um ponto vizinho na direção y . A Figura 4 mostra as restrições adotadas.

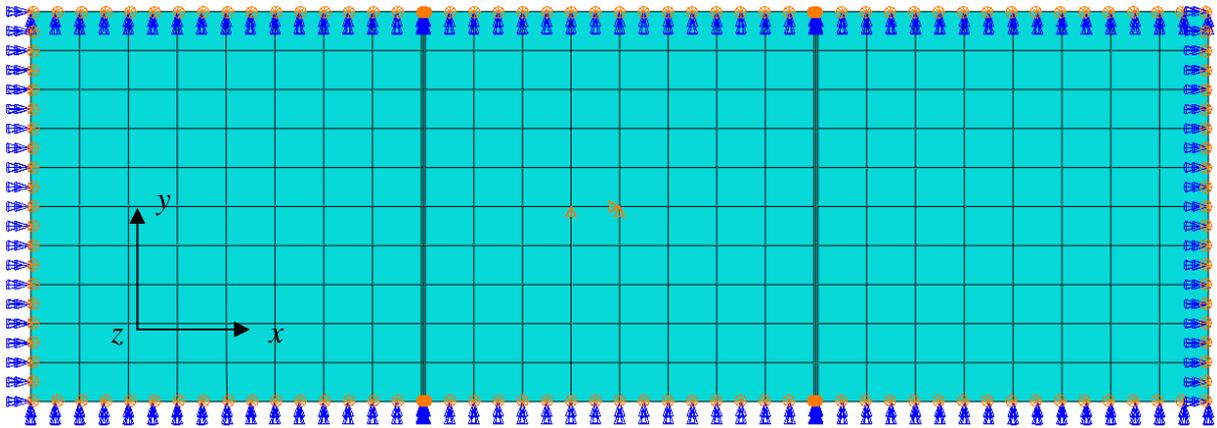


Figura 4 – Representação das restrições adotadas no modelo do Abaqus 6.5-1.

3.2 Formulação do problema

Em problemas relacionados à avaliação de cargas de flambagem, a avaliação da função objetivo é baseada em um estado de pré-flambagem e um problema de flambagem linearizado que pode ser descrito na forma matricial:

$$[K]\{q_p\} = \{p\} \quad (3.2-1)$$

$$([K] - \lambda[K_G])\{q\} = \{0\} \quad (3.2-2)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{q_p\}$ são os deslocamentos de pré-flambagem, $\{p\}$ é o vetor de carregamento, $[K_G]$ é a matriz de rigidez geométrica devido aos deslocamentos não lineares e $\{q\}$ é o modo de flambagem associado ao autovalor λ .

A modelagem de problemas relacionados a avaliação de frequência natural na presença de enrijecimento por tensão pode ser descrita na forma matricial como:

$$([K] - \lambda[K_G] - \omega^2[M])\{q\} = \{0\} \quad (3.2-3)$$

onde a matriz $[K_G]$ é linearmente dependente de um estado inicial de tensão $\{\sigma_0\}$. Conseqüentemente, se $\{\sigma_0\}$ é representada por uma combinação linear de estados de tensões iniciais individuais, a matriz $[K_G]$ também pode ser. Essa combinação linear é expressa na Eq. (3.2-4).

$$\left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] - \omega^2[M]\right)\{q\} = \{0\} \quad (3.2-4)$$

onde l é o número de estados de tensão iniciais individuais considerado e $[K_G^i]$ é associado ao estado de tensão inicial $\{\sigma_0\}$ tal que $\{\sigma_0\} = \sum_{i=1}^l \beta_i \{\sigma_0^i\}$. O parâmetro de carregamento não dimensional β_i descreve a contribuição de $\{\sigma_0^i\}$ ao problema de vibração.

As formulações apresentadas nas subseções 3.2.1 e 3.2.2 explicam a convexidade das superfícies de frequência natural e estabilidade com relação aos parâmetros de carregamento. Essas formulações foram desenvolvidas por Faria e publicadas na referência [38].

3.2.1 Superfície de frequência fundamental

A superfície de frequência fundamental é utilizada como um meio de visualizar como a menor frequência natural varia conforme o parâmetro de carregamento β_i varia. Um esboço da superfície de frequência fundamental é mostrado na Figura 5, onde ω é a frequência fundamental.

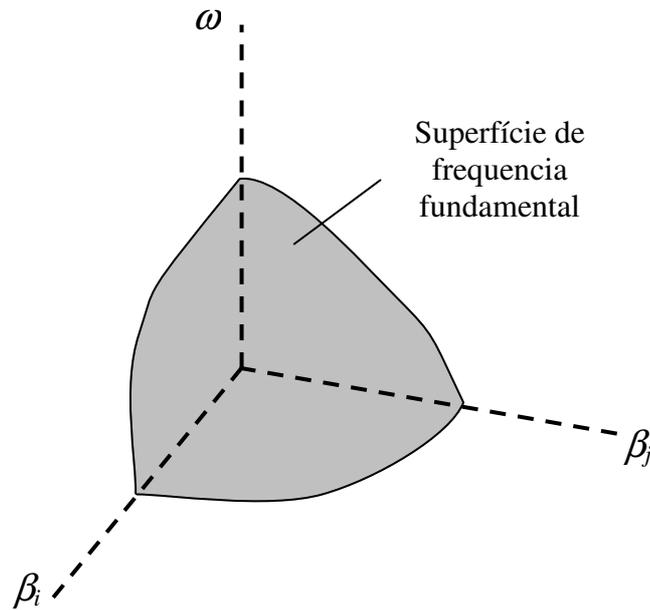


Figura 5 – Superfície de frequência fundamental.

Não se impõe restrição no do parâmetro de carregamento β_i . Além disso, dependendo do estado inicial de carregamento $\{\sigma_0^i\}$, a matriz de rigidez geométrica relacionada $[K_G^i]$ pode não ser positiva definida, embora $[K]$ e $[M]$ sejam necessariamente positivas definidas.

Para se investigar as propriedades da superfície de frequência fundamental uma análise de perturbação é conduzida. Assume-se que β_i é levemente perturbado por $\delta\beta_i$.

O problema de autovalor da Eq. (3.2-4) torna-se:

$$\left[[K] - \lambda \sum_{i=1}^l (\beta_i + \delta\beta_i) [K_G^i] - (\omega^2 + \delta\omega^2 + \delta^2\omega^2 + \dots) [M] \right] (\{q\} + \delta\{q\} + \delta^2\{q\} + \dots) = \{0\} \quad (3.2-5)$$

Subtraindo Eq. (3.2-4) da Eq. (3.2-5) as equações de primeira e segunda ordem podem ser escritas como:

$$\left(-\lambda \sum_{i=1}^l \delta\beta_i [K_G^i] - \delta\omega^2 [M] \right) \{q\} + \left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] - \omega^2 [M] \right) \delta\{q\} = \{0\} \quad (3.2-6)$$

e

$$\begin{aligned}
& -\delta^2 \omega^2 [M] \{q\} - \left(\lambda \sum_{i=1}^l \delta \beta_i [K_G^i] + \delta \omega^2 [M] \right) \delta \{q\} \\
& + \left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] - \omega^2 [M] \right) \delta^2 \{q\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{3.2-7}$$

Pré-multiplicando Eq. (3.2-6) por $\{q\}^T$ e considerando que $[K]$, $[M]$ e $[K_G^i]$ são matrizes simétricas, obtém-se:

$$\delta \omega^2 = - \frac{\lambda \{q\}^T \left(\sum_{i=1}^l \delta \beta_i [K_G^i] \right) \{q\}}{\{q\}^T [M] \{q\}} \tag{3.2-8}$$

$\{q\}^T [M] \{q\}$ é certamente positiva. No entanto, o numerador da Eq. (3.2-8) pode ser positivo ou negativo. Pré-multiplicando Eq. (3.2-7) por $\{q\}^T$, considerando que $[K]$, $[M]$ e $[K_G^i]$ são matrizes simétricas e usando Eq. (3.2-6) obtém-se:

$$\delta^2 \omega^2 = - \frac{\delta \{q\}^T \left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] - \omega^2 [M] \right) \delta \{q\}}{\{q\}^T [M] \{q\}} \tag{3.2-9}$$

O sinal de $\delta^2 \omega^2$ é governado pelo sinal do numerador da Eq. (3.2-9) pois $[M]$ é positiva definida e, conseqüentemente, $\{q\}^T [M] \{q\} > 0$. A matriz $\left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] - \omega^2 [M] \right)$ é positiva semi-definida desde que a flambagem ainda não tenha ocorrido, porque nessa situação $\left([K] - \lambda \sum_{i=1}^l \beta_i [K_G^i] \right)$ é positiva definida. Conseqüentemente, analisando a Eq. (3.2-9) é possível concluir que $\delta^2 \omega^2 \leq 0$, o que prova que a superfície da frequência fundamental é convexa. Essa propriedade é de grande importância nos procedimentos de otimização.

3.2.2 A superfície de estabilidade

Assim como a convexidade da superfície de frequência fundamental foi provada, é possível provar também que a superfície de estabilidade é convexa. Considera-se o problema de flambagem definido na Eq. (3.2-2) e define-se parâmetros de carregamento $p_i = \lambda \beta_i$ de forma que o problema de flambagem pode ser reescrito como,

$$\left([K] - \sum_{i=1}^l p_i [K_G^i] \right) \{q\} = \{0\} \quad (3.2-10)$$

Conforme o parâmetro β_i varia, p_i também varia. Esse comportamento pode ser visualizado na Figura 6 que mostra a superfície de estabilidade e outras entidades geométricas úteis.

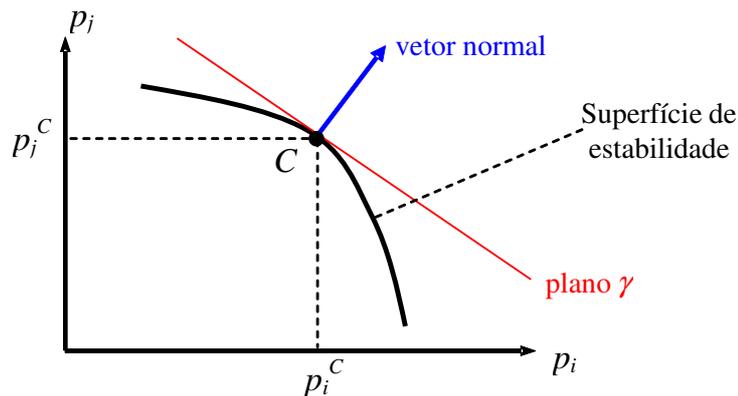


Figura 6 – Superfície de estabilidade.

No ponto C o vetor normal a superfície de estabilidade e o plano γ tangente a superfície podem ser vistos. Se os parâmetros β_i^C e β_j^C são conhecidos, então os parâmetros p_i^C e p_j^C podem ser obtidos. Conseqüentemente, para esboçar a superfície apresentada na Figura 6 é necessário variar os parâmetros β_i , avaliar o carregamento de flambagem e computar o parâmetro p_i . Esse procedimento fornece uma série de pontos que juntos compõem a superfície de estabilidade.

Considera-se agora um ponto tão próximo de C quanto possível. Esse ponto tem parâmetros $p_i^C + \delta p_i + \delta^2 p_i + \dots$ e $p_j^C + \delta p_j + \delta^2 p_j + \dots$ e seu problema de flambagem é definido por

$$\left[[K] - \sum_{i=1}^l (p_i + \delta p_i + \delta^2 p_i + \dots) [K_G^i] \right] (\{q\} + \delta \{q\} + \delta^2 \{q\} + \dots) = \{0\} \quad (3.2-11)$$

onde o sobrescrito C foi abandonado. A equação de perturbação de primeira ordem é definida por:

$$\left([K] - \sum_{i=1}^l p_i [K_G^i] \right) \delta \{q\} - \left(\sum_{i=1}^l \delta p_i [K_G^i] \right) \{q\} = \{0\} \quad (3.2-12)$$

Pré-multiplicação da Eq. (3.2-12) por $\{q\}^T$ e uso da Eq. (3.2-10) resulta na Eq. (3.2-13).

$$\{q\}^T \left(\sum_{i=1}^l \delta p_i [K_G^i] \right) \{q\} = \delta \{p\}^T \{n\} = \{0\} \quad (3.2-13)$$

onde os vetores $\{n\}$ e $\delta \{p\}$ são definidos como

$$\begin{aligned} \{n\}^T &= \{ \{q\}^T [K_G^1] \{q\} \quad \{q\}^T [K_G^2] \{q\} \quad \dots \quad \{q\}^T [K_G^l] \{q\} \} \\ \delta \{p\}^T &= \{ \delta p_1 \quad \delta p_2 \quad \dots \quad \delta p_l \} \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

Equação (3.2-13) prova que o vetor $\{n\}$ é normal a superfície de estabilidade. Considerando agora a perturbação de segunda ordem derivada da Eq. (3.2-11):

$$\left([K] - \sum_{i=1}^l p_i [K_G^i] \right) \delta^2 \{q\} - \left(\sum_{i=1}^l \delta p_i [K_G^i] \right) \delta \{q\} - \left(\sum_{i=1}^l \delta^2 p_i [K_G^i] \right) \{q\} = \{0\} \quad (3.2-15)$$

Pré-multiplicação da Eq. (3.2-15) por $\{q\}^T$ e uso da Eq. (3.2-10) resulta em

$$\{q\}^T \left(\sum_{i=1}^l \delta p_i [K_G^i] \right) \delta\{q\} + \{q\}^T \left(\sum_{i=1}^l \delta^2 p_i [K_G^i] \right) \{q\} = \{0\} \quad (3.2-16)$$

Pré-multiplicação da Eq. (3.2-12) por $\delta\{q\}^T$ e lembrando que $[K_G^i]$ são matrizes simétricas resulta na equação seguinte

$$\{q\}^T \left(\sum_{i=1}^l \delta p_i [K_G^i] \right) \delta\{q\} = \delta\{q\}^T \left([K] - \sum_{i=1}^l p_i [K_G^i] \right) \delta\{q\} \quad (3.2-17)$$

Substituindo a Eq. (3.2-17) na Eq. (3.2-16) resulta em

$$\delta\{q\}^T \left([K] - \sum_{i=1}^l p_i [K_G^i] \right) \delta\{q\} + \delta^2\{p\}^T \{n\} = \{0\} \quad (3.2-18)$$

onde

$$\delta^2\{p\}^T = \{\delta^2 p_1 \quad \delta^2 p_2 \quad \dots \quad \delta^2 p_l\} \quad (3.2-19)$$

O primeiro termo na Eq. (3.2-18) é certamente não negativo. Conseqüentemente,

$$\delta^2\{p\}^T \{n\} \leq 0 \quad (3.2-20)$$

Equação (3.2-20) mostra que o vetor de segunda ordem tangente a superfície de estabilidade, $\delta^2\{p\}$, e o vetor normal $\{n\}$ apontam em direções opostas. Isso pode ser visualizado na Figura 7. Conseqüentemente, do ponto de vista geométrico, conclui-se que a superfície de estabilidade é convexa.

A convexidade das superfícies de estabilidade e frequência fundamental é de grande importância nos procedimentos de otimização.

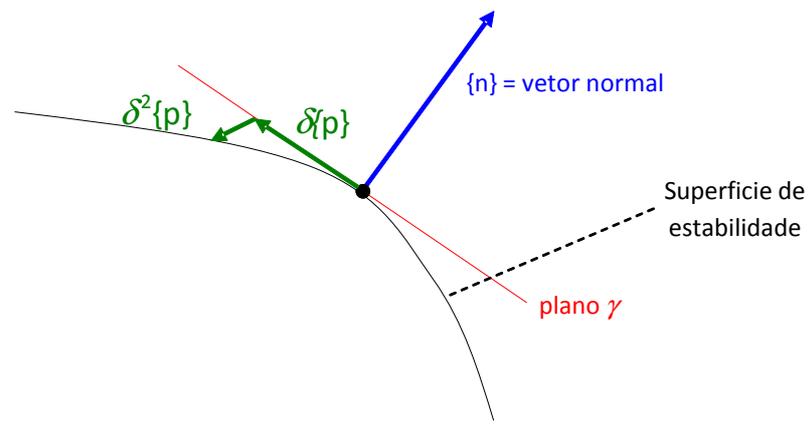


Figura 7 – Vetor tangente de segunda ordem.

4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Devido à crescente busca por redução de custo e aumento de eficiência em projetos estruturais, o conhecimento de técnicas de otimização é de grande importância para engenheiros e projetistas. É necessária uma familiarização com as técnicas disponíveis, suas características e aplicabilidade, de forma a adequar a técnica ao problema corretamente.

As técnicas de otimização podem ser baseadas em processos iterativos ou métodos heurísticos. O processo de otimização iterativo refere-se aos métodos mais tradicionais e a maioria dos algoritmos desse tipo envolve um vetor de direção de busca que é utilizado em cada iteração na atualização das variáveis do projeto.

Em Vanderplaats [4] encontra-se uma descrição das técnicas tradicionais de otimização numérica. Suas aplicações em engenharia foram popularizadas a partir de 1960 quando Schmit [39] as aplicou para projeto estrutural. Em *Elements of Structural Optimization* [40] encontra-se uma lista com algumas referências no assunto que possibilita visualizar o desenvolvimento dessa teoria a partir da década supra citada. Destaca-se entre elas as referências [41], [42], [43], [44] e acrescenta-se a elas as referências [45] e [46].

De forma geral têm-se problemas lineares ou não lineares, de uma variável ou multivariável e com ou sem restrições. Para a solução de problemas de otimização definidos por somente uma variável, as técnicas mais comumente utilizadas são a Aproximação Polinomial e o Método Seção Áurea. A Aproximação Polinomial tem baixo custo computacional, mas não há garantia de que o resultado encontrado seja, de fato, o ótimo e para funções altamente não lineares a aproximação pode não ser satisfatória. O Método Seção Áurea tem características que o tornaram bastante popular, como a capacidade de lidar com funções de custo descontínuas e ter taxa de convergência conhecida, mas o custo computacional do método pode ser alto.

Para problemas multivariáveis e sem restrições as técnicas de otimização são divididas em métodos de ordem zero, de primeira ordem e de segunda ordem. Em problemas práticos sempre há algum tipo de restrição, mesmo assim esses métodos devem ser conhecidos, pois compreendem a base para o desenvolvimento de soluções de problemas não lineares com restrições.

Os métodos de ordem zero otimizam a função objetivo selecionando aleatoriamente um grande número de pontos e avaliando a função para cada um deles. O ponto que resultar em menor (ou maior) valor da função é o ótimo. São métodos flexíveis e fáceis de programar e podem lidar com funções não convexas e descontínuas. No entanto, geralmente requerem muitas avaliações da função para atingir o ótimo. É recomendado para funções onde o custo computacional da avaliação não é alto. Entre esses métodos estão a Busca Aleatória e o Método de Powell [47].

Os métodos de primeira ordem utilizam informação de gradiente no processo de otimização. São mais eficientes que os métodos de ordem zero, mas requerem que a função objetivo seja contínua. Entre eles estão o Gradiente e Gradiente Conjugado.

Os métodos de segunda ordem são aqueles baseados em derivadas de segunda ordem. Compreendem basicamente o método de Newton e algumas variações como Levenberg-Marquardt [48] e [49].

Para problemas de otimização lineares com restrição e multivariáveis o método mais difundido é conhecido como SIMPLEX [50].

Para solução de problemas não lineares multivariáveis com restrição duas metodologias estão disponíveis. Na primeira o problema original é convertido em uma seqüência de problemas sem restrição através do uso de penalidades para as restrições. Entre as técnicas de minimização seqüencial sem restrição pode-se citar o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Na segunda metodologia a informação sobre as restrições é incorporada

diretamente no problema de otimização, e os métodos utilizados são denominados métodos diretos. Entre eles está a Programação Linear Sequencial, o Método das Direções Possíveis e métodos de Gradiente Reduzidos Generalizados.

Os métodos citados até o momento têm uma grande variedade de aplicações. No entanto, esses métodos podem encontrar dificuldades na solução de problemas com mínimos locais, descontinuidades ou domínio desconexo, por exemplo. Essa crescente complexidade dos projetos estruturais favoreceu o desenvolvimento dos chamados métodos heurísticos.

Entre os métodos heurísticos estão os Algoritmos Genéticos, Busca Tabu, Recozimento Simulado, Redes Neurais, Métodos Evolucionistas, Estratégia Minimax, Método de Pareto, entre outros.

Uma nova forma de solução de problemas complexos é combinação de métodos heurísticos entre si, ou com algum método tradicional. A proposta desse projeto é a combinação da estratégia minimax com o método de Powell para a solução de problemas de otimização multicritério.

4.1 Método de Powell

A descrição do método de Powell apresentada nesse tópico é baseada em Vanderplaats [4]. O método de Powell é um dos mais eficientes e confiáveis entre os métodos de otimização de ordem zero. Ele é baseado no conceito de direções conjugadas, onde direções $\{S\}^i$ e $\{S\}^j$ são conjugadas se:

$$\left(\{S\}^i\right)^T [H] \{S\}^j = 0 \quad (4.1-1)$$

onde $[H]$ é a matriz Hessiana, ou seja, matriz das derivadas de segunda ordem da função objetivo com relação as variáveis de projeto.

O conceito básico do método de Powell é primeiramente buscar em n direções ortogonais, $\{S\}^i$, $i = 1, n$; onde cada busca consiste em atualizar o vetor das variáveis de projeto ($\{X_p\}$) de acordo com a Eq. (4.1-2):

$$\{X_p\}^q = \{X_p\}^{q-1} + \alpha_q^* \{S\}^q \quad (4.1-2)$$

onde q é o número da iteração e α_q^* é um multiplicador escalar que determina quanto a variável de projeto será modificada na iteração.

As direções de busca não são inicialmente conjugadas, mas fornecem um ponto inicial para construção das direções conjugadas. Tendo completado n buscas unidirecionais, uma nova direção de busca é criada conectando o primeiro e último ponto de projeto. Essa direção se torna a direção de busca $n+1$.

Considerando um espaço de busca bi-dimensional, a primeira busca está na direção $\{X_p\}^1$, seguida por uma busca na direção $\{X_p\}^2$. Ao final da busca na segunda direção, a direção de busca $n+1$ $\{S\}^3$ é encontrada conectando o projeto inicial $\{X_p\}^0$ com o projeto atual $\{X_p\}^2$.

Uma interpretação alternativa é $\{S\}^3 = \alpha_1^* \{S\}^1 + \alpha_2^* \{S\}^2$, ou seja, a direção $n+1$ é o somatório de todas as direções anteriores. Buscar na direção $\{S\}^3$ leva a solução ao ponto $\{X_p\}^3$, finalizando a terceira busca ou primeira iteração do método de Powell.

É conveniente armazenar a informação de busca em uma matriz $[H]$, começando com a matriz identidade.

$$[H] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1-3)$$

As colunas de $[H]$ são vetores de busca unidirecionais $\{S\}^i$, $i = 1, n$. Após encontrar o mínimo em cada direção usando Eq. (4.1-2), substitui-se $\{S\}^i$ na matriz $[H]$ por $\alpha_i \{S\}^i$, o que fornece após n iterações:

$$[H] = \left[\alpha_1^* \{S\}^1 \quad \alpha_2^* \{S\}^2 \quad \dots \quad \alpha_n^* \{S\}^n \right] \quad (4.1-4)$$

Pode-se agora criar a direção conjugada $n+1$:

$$\{S\}^{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \{S\}^i = \text{somatorio das colunas de } [H] \quad (4.1-5)$$

Na seqüência, busca-se nessa direção para determinar o multiplicador escalar α_{n+1}^* . Cada coluna da matriz $[H]$ é deslocada para a coluna vizinha da esquerda eliminando a coluna $\alpha_1^* \{S\}^1$ e armazenando $\alpha_{n+1}^* \{S\}^{n+1}$ na coluna n . Isso fornece uma nova matriz $[H]$ contendo n direções de busca para iniciar todo o processo novamente. O algoritmo completo está representado na Figura 8.

Deve-se notar que as $n+1$ buscas unidirecionais necessárias para obter a direção conjugada são apenas uma iteração do método de Powell. Assim, assumindo que um ponto ótimo de uma função quadrática é encontrado em n ou menos direções conjugadas, na verdade o algoritmo realiza $n(n+1)$ buscas unidirecionais. Nomeando cada aplicação da Eq. (4.1-2) como uma iteração, o método de Powell irá precisar de até $n(n+1)$ iterações para obter convergência. No entanto, cada iteração requer muitas avaliações da função objetivo para encontrar α^* ótimo.

Dessa forma, pode-se concluir que o método de Powell é competitivo para problemas de otimização relativamente pequenos ou com custo computacional de avaliação da função objetivo pequeno.

Para se encontrar α^* ótimo utiliza-se alguma técnica de otimização de funções de uma variável. Nesse trabalho usa-se a Seção Áurea e Aproximação Polinomial.

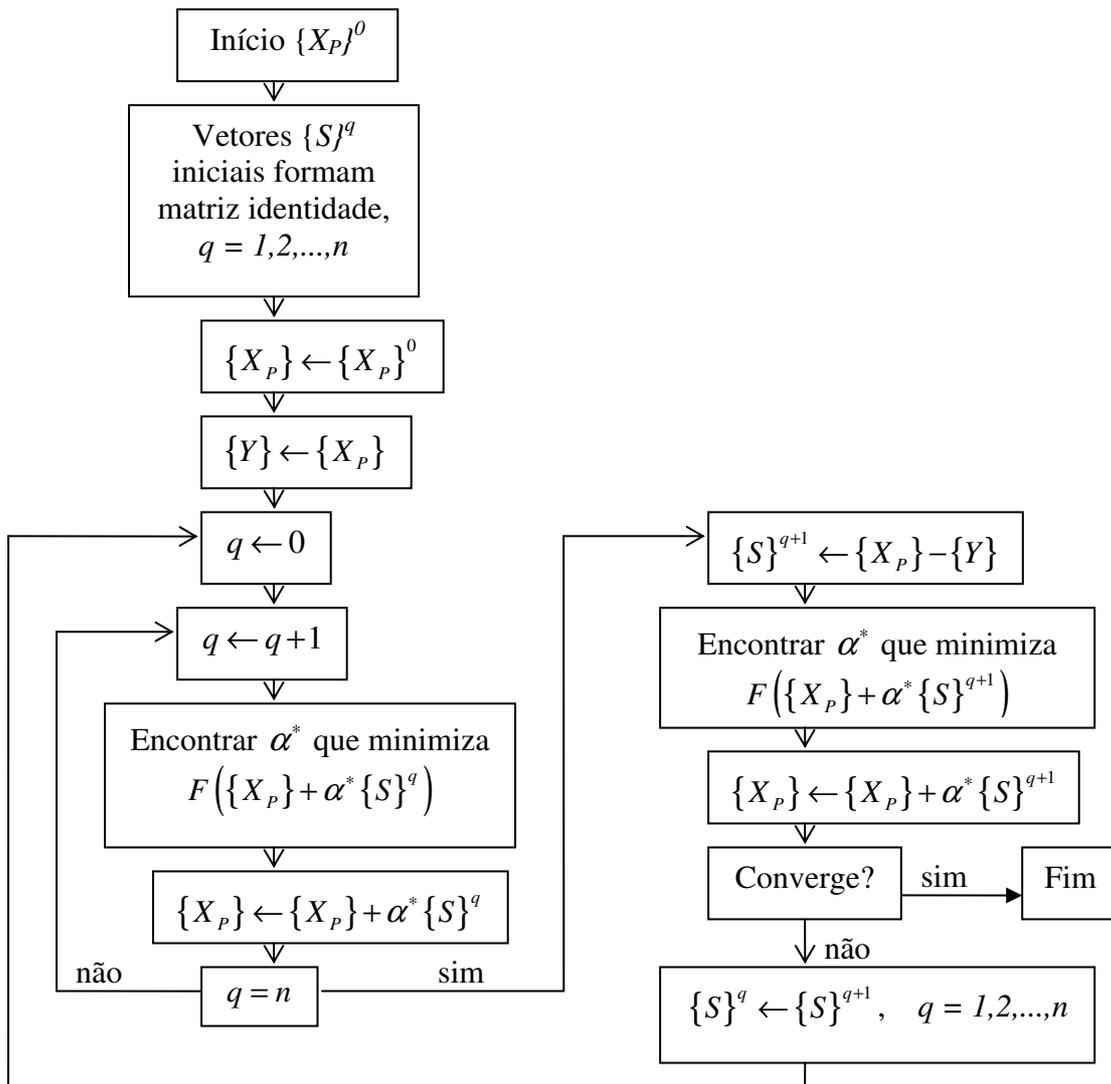


Figura 8 – Algoritmo para o método de Powell.

4.2 Estratégia minimax

Nesse trabalho a estratégia minimax [3] é usada para maximizar a frequência fundamental e carga de flambagem através da solução dos problemas de autovalor das Eqs. (3.2-4) e (3.2-10), respectivamente. As matrizes $[K]$, $[M]$ e $[K_G^i]$ dependem de um vetor de variáveis de projeto denotado por $\{h\}$. Essas variáveis de projeto podem representar uma distribuição de espessuras, orientação das fibras, localização de reforçadores, etc. Se os parâmetros de carregamento forem fixos, um projeto ótimo e sua frequência fundamental correspondente podem ser encontrados por uma forma de otimização tradicional onde o melhor $\{h\}$ é selecionado. Por outro lado, se os parâmetros de carregamento variam, o projeto ótimo para um dado $\{h\}$ pode não ser ótimo (ou até insatisfatório) para outro conjunto de variáveis de projeto $\{h\}$. Isso significa que o projeto ótimo pode ser altamente sensível a variações nos parâmetros de carregamento β_i .

Para eliminar ou atenuar o problema de sensibilidade, a forma tradicional de otimização é reformulada e os parâmetros de carregamento são envolvidos diretamente no processo de otimização. A reformulação consiste em propor um procedimento de otimização de duas etapas onde a frequência fundamental e a carga de flambagem são simultaneamente maximizadas com respeito a $\{h\}$ e minimizadas com respeito a $\{\beta\} = \{\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_i\}$.

$$\max_{\{h\}} \min_{\{\beta\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{h\}, \{\beta\}) \\ \lambda(\{h\}, \{\beta\}) \end{array} \right\} = \max_{\{h\}} \phi(\{h\}) \quad , \quad \phi(\{h\}) = \min_{\{\beta\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{h\}, \{\beta\}) \\ \lambda(\{h\}, \{\beta\}) \end{array} \right\} \quad (4.2-1)$$

A discussão sobre as propriedades das superfícies de frequência fundamental e estabilidade apresentada nas seções anteriores são muito úteis na computação da função ϕ quando se tem como variáveis de projeto as características geométricas da estrutura.

Considerando que um número de estados de tensões iniciais possa ser aplicado na estrutura, tendo cada estado de tensão individual seu próprio parâmetro de carregamento β_i . Esses estados de tensão são representados geometricamente por pontos no plano β_i, β_j da Figura. 9. Como as superfícies de frequência fundamental e estabilidade são convexas para um $\{h\}$ fixo, a minimização de $\omega(\{h\}, \{\beta\})$ e $\lambda(\{h\}, \{\beta\})$ com respeito a $\{\beta\}$ é simples porque seu mínimo está associado com um dos estados de tensão inicial da linha poligonal tracejada desenhada no plano β_i, β_j . Esses estados de tensão inicial (na linha poligonal tracejada) são chamados de domínio convexo do conjunto de todos os estados de tensão inicial. Na Figura 9, seis dos treze estados de tensão inicial constituem o domínio convexo.

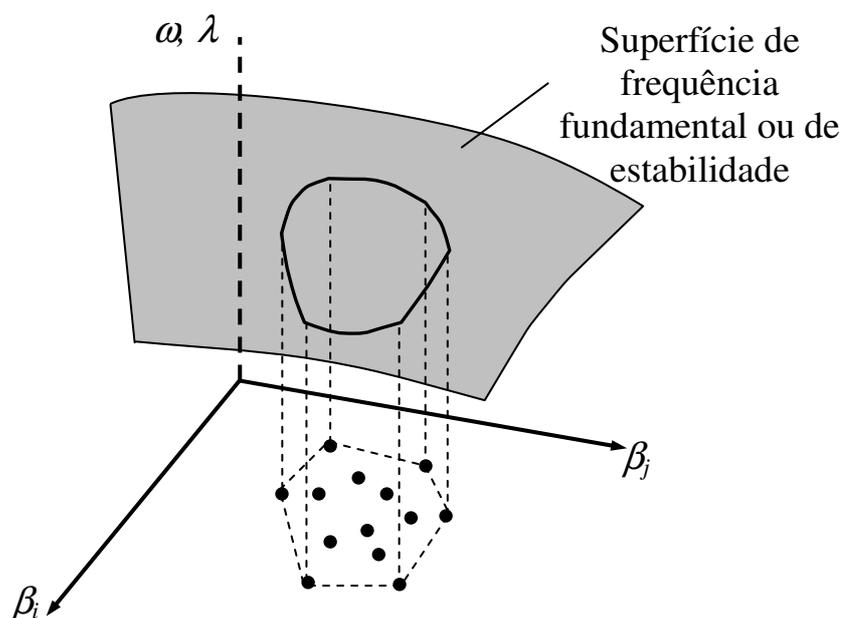


Figura 9 – Domínio convexo dos estados de tensão inicial.

Como as superfícies de frequência fundamental e estabilidade são convexas, todo estado de tensão que é dado como uma combinação convexa dos estados de tensão iniciais pertencentes ao domínio convexo leva a uma frequência fundamental ou carga de flambagem maior. Dessa

forma quando no procedimento de otimização a função ϕ é minimizada com respeito a $\{\beta\}$ para ω e λ , basta checar os pontos no domínio convexo e selecionar o pior entre eles. No entanto, quando se usa a orientação angular das camadas como variáveis de projeto as superfícies de estabilidade e frequência fundamental deixam de ser convexas, nesses casos todo o espaço de carregamento deverá ser analisado.

Na segunda etapa da estratégia minimax realiza-se a maximização da função ϕ na Eq. (4.2-1) com relação as variáveis de projeto. Essa maximização é feita com o método de Powell.

Dessa forma, a estratégia minimax é um problema de otimização em dois níveis cuja solução numérica é elaborada. No entanto, em casos onde ϕ é uma função convexa de $\{p\}$ tem-se uma considerável simplificação.

Uma dificuldade relativa ao procedimento de otimização é o fato de que a função ϕ corresponde a uma função objetivo de dois critérios. Conseqüentemente, é absolutamente necessário normalizar ω e λ para que elas possam ser diretamente comparáveis.

Uma forma prática de se fazer isso é checar entre as especificações de projeto e tentar obter valores objetivo para cargas de flambagem e frequência fundamental e usar esses valores como fatores de normalização. Matematicamente, se cargas máximas de flambagem p_1, p_2, \dots, p_l estão disponíveis nas especificações de projeto e uma frequência fundamental ω_0 também é especificada, então pode-se usar funções objetivo normalizadas $\lambda_i^* = \lambda_i / p_i$ e $\omega_i^* = \omega_i / \omega_0$.

O projeto ótimo obtido por esse procedimento é dependente dos fatores de normalização p_1, p_2, \dots, p_l e ω_0 . Por exemplo, se ω_0 é muito baixo então se espera que o critério de frequência fundamental não seja importante, pois ω_i^* será alto e provavelmente um dos critérios de flambagem λ_i^* será dominante. Conseqüentemente, é tarefa do projetista selecionar fatores de normalização adequados. Por outro lado, uma das vantagens da

estratégia presente é a capacidade de detectar discrepâncias nos fatores de normalização e melhorar automaticamente os critérios de projeto que são mais vulneráveis.

4.3 Loop externo de otimização de massa

Um *loop* externo de otimização de massa pode ser incluído no processo de otimização. Essa abordagem elimina a necessidade de se utilizar restrição de massa. Além disso, é possível adaptar a massa da estrutura para satisfazer fatores de segurança e especificações de projeto adotadas. A Figura 10 mostra um diagrama dessa estratégia de otimização. Esse diagrama descreve o processo de otimização quando se usam características geométricas como variáveis de projeto. O processo de otimização da massa pode ser feito pelo ajuste de espessuras das camadas ou pelo ajuste do número de camadas. Esse trabalho usa as duas possibilidades em exemplos distintos do capítulo 7.

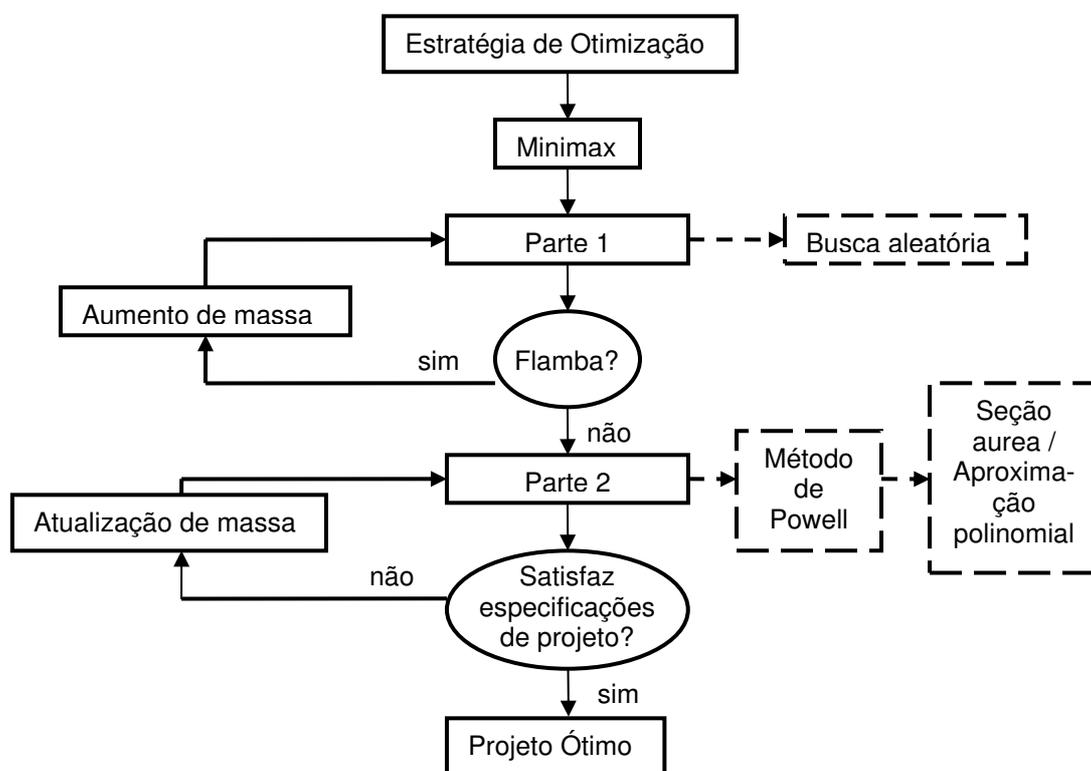


Figura 10 – Estratégia de otimização com loop externo de otimização de massa.

A Figura 10 mostra que, se a primeira parte do procedimento resulta em uma estrutura flambada, a massa é aumentada e a parte 1 é repetida até que uma estrutura não flambada seja obtida. Na primeira parte não se verifica se a estrutura está sub ou superdimensionada de acordo com margens de segurança e especificações de projeto adotadas. Essa verificação é feita na segunda parte e a massa é atualizada até que seja obtida uma estrutura com a massa mínima necessária para atender aos requisitos do projeto.

O processo de otimização envolve ainda duas condições:

(1) A estrutura não deve flambar antes que a carga de prova seja atingida; essa condição é consistente com a definição de carga de prova [51]. A carga de prova é definida como a carga limite multiplicada pelo fator de prova. Em geral, o fator de prova tem valor de 1.25, o qual é adotado nesse trabalho.

(2) A estrutura deve ter uma frequência natural mínima sob a carga limite para preservar seu desempenho sob carregamento dinâmico.

Essas condições são coerentes com os projetos atuais de painéis aeronáuticos e previnem problemas causados pela descontinuidade da função objetivo e uma predominância do critério de frequência sob o critério de flambagem, como se discute abaixo.

O *loop* externo de otimização de massa leva à obtenção de um valor de flambagem normalizado próximo de um se o valor de normalização de frequência é baixo. No entanto, durante o processo de otimização, o valor de flambagem pode ser menor que um. Quando isso ocorre o valor de frequência tende a zero à medida que a estrutura perde sua estabilidade. Esse fato causa problemas numéricos no cálculo do autovalor e representa uma descontinuidade na função objetivo. Além disso, quando os valores de flambagem são próximos de um, o processo de otimização não é multicritério porque a frequência terá sempre o menor valor e será o critério dominante. Esses problemas são evitados usando as condições descritas acima.

Deve-se enfatizar que essas condições não são usadas somente para evitar problemas numéricos. Elas são usadas porque são apropriadas para projetos estruturais aeronáuticos atuais.

Outra questão importante é como estimar um fator de correção da massa estrutural quando se faz a otimização da massa pelo ajuste da espessura da camada. Um fator de ajuste de massa não apropriado pode resultar em um processo de otimização que nunca converge. O fator de ajuste de massa usado nesse trabalho varia com a raiz cúbica da carga ótima de flambagem. A base teórica para esse fator de ajuste é que a rigidez a flexão varia com a cubo da espessura para placas planas. Esse fator não é exato, pois por exemplo, a rigidez dos reforçadores não varia da mesma forma. No entanto, trata-se de uma boa aproximação. Para casos onde a frequência é o critério dominante a variação da frequência com a espessura é linear e o fator de ajuste de massa é o próprio valor de frequência normalizada. Os dois fatores de ajuste de massa adotados não são gerais e podem não ser adequados para problemas de otimização diferentes. Os fatores de ajuste de massa devem ser determinados levando em consideração características específicas do processo de otimização e aplicados sobre a restrição de massa (ou volume) conforme a Eq. (4.3-1).

$$R_{M\text{ nova}} = \frac{R_{M\text{ final}}}{f_{AM}} \quad (4.3-1)$$

onde R_M significa restrição de massa e f_{AM} significa fator de ajuste de massa:

$$f_{AM} = \min\left(\sqrt[3]{\lambda}, \omega / \omega_0\right) \quad (4.3-2)$$

Na otimização da massa pelo ajuste do número de camadas não é possível trabalhar com margens de segurança muito pequenas, visto que é um processo discreto. No entanto, na prática, as duas formas de ajuste de massa são equivalentes visto que os valores de espessuras

encontrados quando se faz o ajuste de massa pela redução/aumento da espessura deverão ser sempre aproximados para valores comercialmente disponíveis.

5 CARREGAMENTO NÃO UNIFORME

As informações básicas para a representação do carregamento não uniforme são as tensões de compressão e cisalhamento que atuam em um painel de uma asa. Essas tensões têm sua origem na distribuição das forças verticais resultantes e nas distribuições de momento fletor e torsor na asa que, por sua vez, tem origem na distribuição de pressão na asa. A Figura 11 mostra os passos necessários para calcular as tensões compressivas e de cisalhamento em um painel de asa. Considerando que a asa está em equilíbrio estático, as distribuições de forças e momentos não dependerão da distribuição de rigidez da asa. O mesmo vale para as tensões compressivas e de cisalhamento nos painéis.

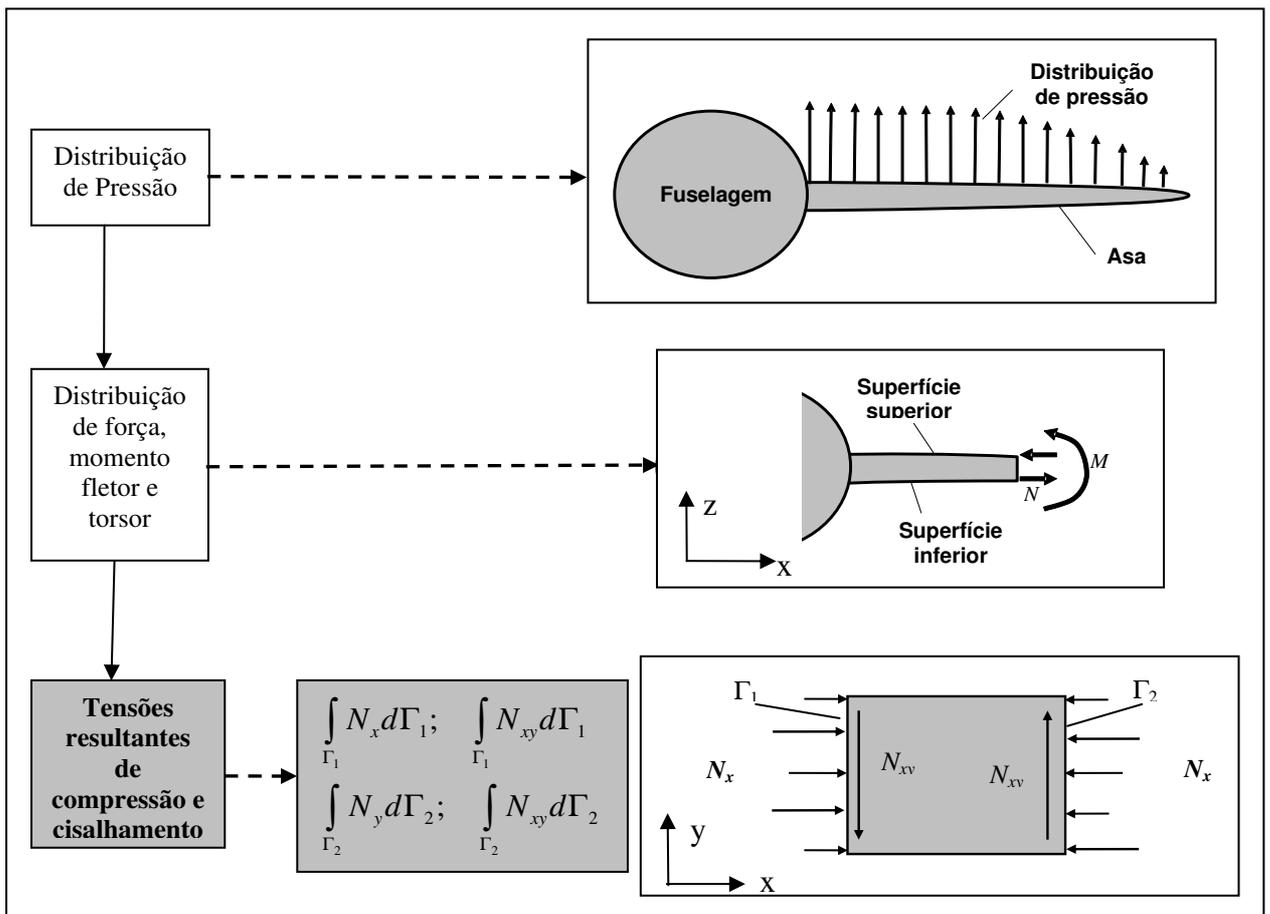


Figura 11 - Tensões resultantes de cisalhamento e compressão.

Como exemplo, pode se supor que o momento fletor em um certo ponto ao longo da asa é conhecido a partir de uma análise aerodinâmica. Considerando que a asa está em flexão pura, o carregamento correspondente a integral das tensões resultantes pode ser facilmente estimado independente da distribuição de rigidez da asa. Conseqüentemente, a magnitude de um caso de carregamento autoequilibrado pode ser determinada pela imposição de que sua integral ao longo da extremidade do painel é igual ao carregamento calculado a partir do momento fletor.

Este trabalho assume que as tensões de compressão e cisalhamento no painel são conhecidas e a formulação do carregamento não uniforme se inicia pela discretização dos carregamentos compressivos e de cisalhamento. A descrição apresentada a seguir é baseada nos trabalhos de Conrado [6] e Gama [7].

Considera-se que o envelope de carga inclui carregamentos compressivos e de cisalhamento e que eles podem ser discretizados em algumas funções lineares por partes distribuídas ao longo das extremidades da estrutura. A Figura 12 representa uma distribuição de carregamento não uniforme aplicado a uma extremidade de uma estrutura e a correspondente discretização do carregamento.

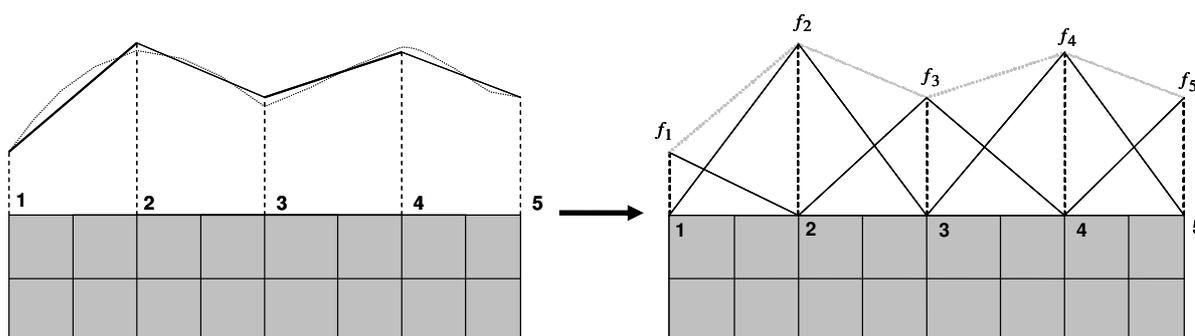


Figura 12 – Discretização do carregamento.

Os pontos 1, 2, 3, 4 e 5 são os pontos de controle de carga. O número e posição dos pontos de controle de carga é definido pelo projetista tendo como base um compromisso entre o custo

computacional e a representação física. Como regra geral para considerar os mecanismos de transferência de carga, a estrutura deve ter dois pontos de controle de carga em cada quina e um próximo a cada extremidade de reforçador. As magnitudes dos carregamentos são dadas pelos parâmetros de carregamento f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 na Figura 12.

Após definir a discretização do carregamento é necessário impor restrições para que não haja movimento de corpo rígido. A condição adotada é que a asa está em equilíbrio estático. Dessa forma, as condições de equilíbrio dadas na Eq. (5.1) devem ser satisfeitas. As magnitudes dos carregamentos são as incógnitas no sistema de equações.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{x_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{y_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{z_i} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{x_i} &= \int_{\Gamma_i} f_{x_i}(\Gamma) d\Gamma \\ F_{y_i} &= \int_{\Gamma_i} f_{y_i}(\Gamma) d\Gamma \\ M_{z_i} &= \int_{\Gamma_i} m_{z_i}(\Gamma) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pela Figura 12 percebe-se que a magnitude das forças f_i será crescente em um segmento definido pelo pontos de controle de carga $i-1$ e i (l_{i-1}) e crescente no segmento definido pelos pontos de controle de carga i e $i+1$ (l_{i+1}). Dessa forma a Eq. (5.2) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
F_{x_i} &= \int_{\Gamma_{i-1}} f_{x_i}(\Gamma) d\Gamma + \int_{\Gamma_{i+1}} f_{x_i}(\Gamma) d\Gamma \\
F_{y_i} &= \int_{\Gamma_{i-1}} f_{y_i}(\Gamma) d\Gamma + \int_{\Gamma_{i+1}} f_{y_i}(\Gamma) d\Gamma \\
M_{z_i} &= \int_{\Gamma_{i-1}} m_{z_i}(\Gamma) d\Gamma + \int_{\Gamma_{i+1}} m_{z_i}(\Gamma) d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_{x_i}(\Gamma) &= s \bar{f}_{x_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i-1} \\
f_{x_i}(\Gamma) &= (1-s) \bar{f}_{x_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i+1}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
f_{y_i}(\Gamma) &= s \bar{f}_{y_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i-1} \\
f_{y_i}(\Gamma) &= (1-s) \bar{f}_{y_i} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i+1}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
m_{z_i}(\Gamma) &= s \bar{f}_{x_i} y_i(s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} + s \bar{f}_{y_i} x_i(s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i-1} \\
m_{z_i}(\Gamma) &= (1-s) \bar{f}_{x_i} y_i(s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} + (1-s) \bar{f}_{y_i} x_i(s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} && \text{em } \Gamma_{i+1}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

O termo $\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$ representa o comprimento da curva definindo a forma da estrutura onde se está aplicando o carregamento. A integral do produto comprimento da curva por s ou $1-s$, caso o trecho seja respectivamente crescente ou decrescente, resulta na contribuição de força naquele trecho. O cálculo do momento inclui o termo de distância $x_i(s)$ ou $y_i(s)$ em relação a um ponto de referência [7].

As equações de equilíbrio podem ser escritas em termos de f_{xi} e f_{yi} para cada ponto de controle i :

$$\begin{aligned}\sum_i (I_i + J_i) f_{xi} &= 0 \\ \sum_i (K_i + L_i) f_{yi} &= 0 \\ \sum_i [-(N_i + O_i) f_{xi} + (T_i + U_i) f_{yi}] &= 0\end{aligned}\tag{5.7}$$

onde

$$K_i = I_i = \int_0^1 s \sqrt{\left(\frac{dx_{i-1}}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_{i-1}}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.8}$$

$$L_i = J_i = \int_0^1 (1-s) \sqrt{\left(\frac{dx_i}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.9}$$

$$N_i = \int_0^1 s [y_{i-1}(s)] \sqrt{\left(\frac{dx_{i-1}}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_{i-1}}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.10}$$

$$O_i = \int_0^1 (1-s) [y_i(s)] \sqrt{\left(\frac{dx_i}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.11}$$

$$T_i = \int_0^1 s [x_{i-1}(s)] \sqrt{\left(\frac{dx_{i-1}}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_{i-1}}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.12}$$

$$U_i = \int_0^1 (1-s) x_i(s) \sqrt{\left(\frac{dx_i}{ds}(s)\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{ds}(s)\right)^2} ds\tag{5.13}$$

Em notação matricial:

$$[G]\{X\} = \{0\}\tag{5.14}$$

onde $[G]$ é uma matriz $3xm$, m é duas vezes o número de pontos de controle de carga, correspondendo aos componentes x e y em cada ponto. $\{X\}$ é o vetor de magnitude do carregamento.

$$[G] = \begin{bmatrix} I_1 + J_1 & 0 & I_2 + J_2 & 0 & \cdots & I_{m/2} + J_{m/2} & 0 \\ 0 & I_1 + J_1 & 0 & I_2 + J_2 & \cdots & 0 & I_{m/2} + J_{m/2} \\ -(N_1 + O_1) & T_1 + U_1 & -(N_2 + O_2) & T_2 + U_2 & \cdots & -(N_{m/2} + O_{m/2}) & T_{m/2} + U_{m/2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\{X\}^T = [f_{x_1} \quad f_{y_1} \quad f_{x_2} \quad f_{y_2} \quad \cdots \quad f_{x_{m/2}} \quad f_{y_{m/2}}] \quad (5.16)$$

É possível perceber que o número de incógnitas é maior que o número de equações na Eq. (5.14). Conrado [6] contornou esse problema numérico minimizando o funcional da Eq. (5.17) para obter o carregamento autoequilibrado.

$$e = (\{n\}^T - \{X\}^T) (\{n\} - \{X\}) \quad (5.17)$$

$\{n\}$ é um vetor de base unitário, por exemplo, $\{n_1\}^T = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$. Nesse caso a Eq. (5.14)

é usada como uma restrição do problema e o vetor $\{X\}$ é obtido pela seguinte equação:

$$\{X\} = \left([I] - [G]^T \left([G] \quad [G]^T \right)^{-1} [G] \right) \{n\} \quad (5.18)$$

como $\{n\}$ pode ser m vetores diferentes, é possível obter m vetores $\{X\}$ de magnitude de carregamento diferentes que são casos de carregamento autoequilibrado. Para cada caso de carregamento autoequilibrado, um processo de otimização é efetuado. Esse procedimento torna o custo computacional alto e o projeto muito conservativo porque em situações práticas não ocorrem todos esses casos de carregamento. Além disso, como $\{n\}$ é um vetor de base unitário não há magnitude no vetor $\{X\}$. Dessa forma, os casos de carregamento

autoequilibrado obtidos não tem magnitude e, conseqüentemente, não representam carregamentos físicos que atuam na estrutura.

Visando tornar o projeto estrutural ótimo mais realístico, Gama [7] implementou algumas alterações no procedimento para obter carregamentos autoequilibrados de forma que eles possam ter magnitude e representar alguns casos de carregamento que definem o envelope de carregamento.

O vetor nulo é substituído pelo vetor $\{A\}_j$, o qual é nulo nas três primeiras linhas definindo as condições de equilíbrio e tem a magnitude do carregamento físico nas outras linhas. O índice j refere-se ao caso de carregamento considerado. Esse vetor torna possível obter um caso de carregamento autoequilibrado que corresponda a um caso de carregamento físico. A matriz $[G]$ na Eq. (5.14) é substituída por uma matriz $[\bar{G}]$ com mais linhas. As primeiras três linhas representam o somatório das forças e momentos, as outras linhas representam as forças na extremidade da estrutura onde o carregamento físico é aplicado.

$$[\bar{G}]\{X\} = \{A\}_j \quad (5.19)$$

Nessa nova metodologia o funcional que deve ser minimizado para solucionar a Eq. (5.19) também é modificado. A Eq. (5.19) é usada como uma restrição na minimização do funcional da Eq. (5.20).

$$e_j = \left(P_{ij} \bar{F}_{ij} \{n\}_j^T - \{X\}_j^T \right) \left(P_{ij} \bar{F}_{ij} \{n\}_j - \{X\}_j \right) \quad (5.20)$$

P_{ij} é um parâmetro adimensional definido no intervalo $[0, 1]$ e que define a porcentagem de magnitude de carregamento aplicada em cada ponto de controle de carga. O subscrito j refere-se ao caso de carregamento considerado e i refere-se ao ponto de controle de carga. Esse parâmetro P_{ij} fornece flexibilidade na representação do carregamento físico. \bar{F}_{ij} é a

magnitude da carga aplicada no ponto de controle de carga. Ela é definida a partir da carga aplicada na extremidade onde o ponto de controle de carga está localizado.

$$\bar{F}_{ij} = \frac{2 A}{\int_{i-1}^i \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds + \int_i^{i+1} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds} \quad (5.21)$$

onde A é a carga aplicada na extremidade considerada. A solução desse problema de minimização fornece o vetor $\{X\}_j$.

$$\{X\}_j = \left([I] - [\bar{G}]_j^T \left([\bar{G}]_j [\bar{G}]_j^T \right)^{-1} [\bar{G}]_j \right) P_{ij} \bar{F}_{ij} \{n\}_j + [\bar{G}]_j^T \left([\bar{G}]_j [\bar{G}]_j^T \right)^{-1} \{A\}_j \quad (5.22)$$

O vetor $\{X\}_j$ é o caso de carregamento autoequilibrado j correspondente ao caso de carregamento físico j . Dessa forma, tendo o envelope de carga de uma estrutura, é possível otimizá-la para esse envelope específico. Isso torna possível reduzir o custo computacional e obter um projeto mais eficiente.

6 PARÂMETROS DE LAMINAÇÃO

Na seção 3.1.1 foram discutidas as relações cinemáticas onde se introduziu, na Eq. (3.1-15), a matriz $[Q]$ envolvida na relação tensão-deformação. Considerando uma lâmina unidirecional fina sujeita a um estado plano de tensões, a relação tensão-deformação pode ser descrita no sistema x, y, z ou em um sistema $1, 2, 3$ arbitrário:

$$\{\sigma\}_{xyz} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\}_{xyz} \quad (6.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{sx} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{sy} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\{\sigma\}_{123} = [Q]\{\varepsilon\}_{123} \quad (6.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

As equações necessárias para realizar a mudança de coordenadas são descritas abaixo:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{xy} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{ss} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66} \\ Q_{xs} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66} \\ Q_{ys} &= mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Essas equações podem ser reescritas em função dos invariantes:

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= U_1 + U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta) \\
Q_{yy} &= U_1 - U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta) \\
Q_{xy} &= U_4 - U_3 \cos(4\theta) \\
Q_{ss} &= U_5 - U_3 \cos(4\theta) \\
Q_{xs} &= \frac{1}{2} U_2 \sin(2\theta) + U_3 \sin(4\theta) \\
Q_{ys} &= \frac{1}{2} U_2 \sin(2\theta) - U_3 \sin(4\theta)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 são os invariantes definidos na Eq. (6.7). Conforme se observa nas equações abaixo, esses parâmetros se mantêm constantes para rotações das lâminas em torno do eixo perpendicular às mesmas.

$$\begin{aligned}
U_1 &= (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \\
U_2 &= (Q_{11} - Q_{22})/2 \\
U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\
U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\
U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \\
U_6 &= (Q_{16} + Q_{26})/2
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Usando os invariantes as matrizes de rigidez à extensão no plano $[A]$, de acoplamento membrana-flexão $[B]$, de rigidez à flexão $[D]$ e de rigidez ao cisalhamento transversal $[A]^*$ das Eqs. (3.1-20) e (3.1-21) podem ser reescritas conforme Eq. (6.8).

$$\begin{aligned}
\{A\} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) [U] \{ 1 \quad \cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k \}^T \\
\{B\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) [U] \{ 1 \quad \cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k \}^T \\
\{D\} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) [U] \{ 1 \quad \cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k \}^T \\
\{A^*\} &= \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) [U^*] \{ 1 \quad \cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k \}^T
\end{aligned} \tag{6.8}$$

onde $[U]$ e $[U^*]$:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & 0 & U_3 & 0 \\ U_1 & -U_2 & 0 & U_3 & 0 \\ \frac{U_1 - U_4}{2} & 0 & 0 & -U_3 & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & -U_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & 0 & U_3 \\ 0 & 0 & \frac{U_2}{2} & 0 & -U_3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$[U^*] = \begin{bmatrix} U_5 & U_6 & 0 & 0 & 0 \\ U_5 & -U_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Os parâmetros de laminação foram introduzidos por Tsai e Pagano [31] e são definidos conforme Eq. (6.11):

$$\begin{aligned} \xi_{[1,2,3,4]}^A &= \frac{1}{t} \sum_{K=1}^N (h_k - h_{k+1}) [\cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k] \\ \xi_{[1,2,3,4]}^B &= \frac{2}{t^2} \sum_{K=1}^N (h_k^2 - h_{k+1}^2) [\cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k] \\ \xi_{[1,2,3,4]}^D &= \frac{4}{t^3} \sum_{K=1}^N (h_k^3 - h_{k+1}^3) [\cos 2\theta_k \quad \sin 2\theta_k \quad \cos 4\theta_k \quad \sin 4\theta_k] \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde t é a espessura do laminado.

No contexto de otimização o maior interesse em se utilizar esses parâmetros é manter a convexidade do problema. Essa convexidade é obtida pelo fato de que somente um conjunto de parâmetros de laminação corresponde a uma rigidez de laminado específica. Por outro lado, é possível que mais de um conjunto de orientações angulares de um laminado corresponda a uma rigidez específica e isso explica a não convexidade do problema quando se

usa orientação angular como variável de projeto. A Figura 13, extraída de Foldager [52], ilustra esse conceito.

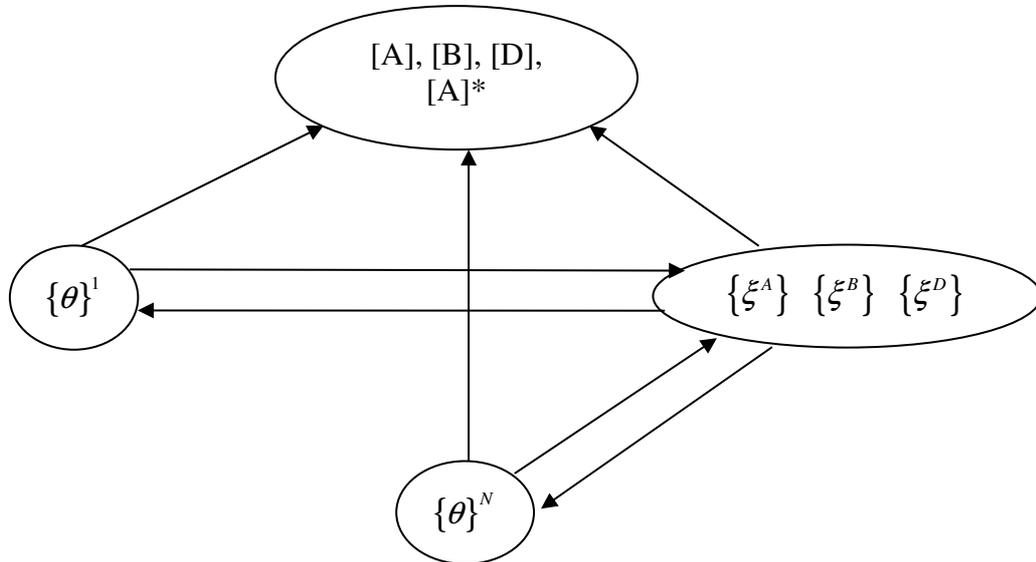


Figura 13 – Obtenção das matrizes de rigidez por parâmetros de laminação e por orientação angular [52].

Em geral os 12 parâmetros de laminação satisfazem a desigualdade $-1 \leq \xi_{[1,2,3,4]}^{A,B,D} \leq 1$ devido a normalização, mas a presença de funções trigonométricas faz com que os parâmetros de laminação não sejam mutuamente independentes. Conseqüentemente, se os parâmetros de laminação são usados como variáveis de projeto, uma região viável deve ser definida para cada um deles para assegurar que um dado conjunto de parâmetros de laminação representa um laminado realizável [52]. No entanto, as regiões viáveis ainda não foram completamente definidas para os casos que envolvem 8 ou 12 parâmetros de laminação.

Visando contornar esse problema, Foldager et al. [2] desenvolveram um procedimento de otimização que usa orientação angular em uma primeira etapa do processo de otimização que poderá levar a um máximo ou mínimo local. Em uma segunda etapa do processo de

otimização são usados os parâmetros de laminação para ajudar a encontrar o máximo ou mínimo global caso o ótimo encontrado na primeira etapa seja local.

O processo completo de otimização usado nesse trabalho é baseado no trabalho de Foldager et al. [2] está descrito na subseção 6.1.

6.1 Processo de otimização

O processo de otimização inclui a estratégia minimax, o método de Powell e a aproximação de Foldager et al. [2]. O método de Powell é usado para encontrar a orientação angular que leva ao valor máximo de flambagem e frequência. No entanto, como flambagem e frequência não são funções convexas da orientação angular, o valor máximo encontrado pode ser local. Para assegurar que o máximo obtido é o global, um processo de otimização que inclui parâmetros de laminação e a função objetivo proposta por Foldager et al. [2] é desenvolvido.

O processo de otimização pode ser resumido nos seguintes passos:

1 - Define-se um conjunto de variáveis de projeto inicial $\{\theta\}_{\text{inicial}}$. Nesse trabalho esse conjunto de variáveis de projeto inicial será sempre correspondente a um laminado quasi-isotrópico com um número de camadas que resulte em um valor de função objetivo normalizada entre 1.0 e 2.0.

2 - Usando o método de Powell encontra-se um conjunto de variáveis de projeto $\{\theta\}_{\text{ótimo}}$ que maximiza a função objetivo:

$$\max_{\{\theta\}} \min_{\{N\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{\theta\}, \{N\}) \\ \lambda(\{\theta\}, \{N\}) \end{array} \right\} = \max_{\{\theta\}} \phi(\{\theta\}) \quad , \quad \phi(\{\theta\}) = \min_{\{N\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{\theta\}, \{N\}) \\ \lambda(\{\theta\}, \{N\}) \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

onde $\{N\}$ representa o espaço de carregamento, que deverá analisado por completo visto que a função não é convexa

Nesse passo é importante lembrar que os valores de flambagem e frequência devem ser normalizados para que se possa fazer uma comparação apropriada. A forma de normalização é a mesma descrita no capítulo 4.

3 - Usando o $\{\theta\}_{\text{ótimo}}$ encontrado no passo anterior e a Eq. (6.11) calcula-se os parâmetros de laminação:

$$\{\theta\}_{\text{ótimo}} \rightarrow \{\xi\}^* \quad (6.13)$$

4 - Usando o método de Powell minimiza-se a função objetivo interna de Foldager et al. [2]:

$$\min_{\{\theta\}} f \left(\{\xi\}^*, \xi(\{\theta\}), \frac{\partial F}{\partial \{\xi\}^*} \right) \quad (6.14)$$

$$f = 4f_1(\{\xi\}^*, \xi(\{\theta\})) + f_2 \left(\{\xi\}^*, \xi(\{\theta\}), \frac{\partial F}{\partial \{\xi\}^*} \right) \quad (6.15)$$

Essa função objetivo interna considera os parâmetros de laminação correspondentes a $\{\theta\}_{\text{ótimo}}$ que são definidos por $\{\xi\}^*$, os parâmetros de laminação correspondentes ao conjunto de orientação angular atual $\xi(\{\theta\})$ e as sensibilidades dos parâmetros de laminação $\frac{\partial F}{\partial \{\xi\}^*}$.

As equações da aproximação de Foldager et al. [2] necessárias para definir a função f na Eq. (6.15) são apresentadas nas Eqs. (6.16 – 6.21).

$$f_1 = \sum_{i=1}^{NLP} \left\{ 1 - \frac{\xi_i(\theta)}{\xi_i^*} \right\}^2 \quad (6.16)$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^{NLP} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\xi_i(\theta) + b_{11} | \xi_i(\theta) \leq \xi_i^* \left| \frac{\partial OF}{\partial \xi_i^*} \leq 0 \\ a_{12}\xi_i(\theta) + b_{12} | \xi_i(\theta) > \xi_i^* \left| \frac{\partial OF}{\partial \xi_i^*} \leq 0 \\ a_{21}\xi_i(\theta) + b_{21} | \xi_i(\theta) \leq \xi_i^* \left| \frac{\partial OF}{\partial \xi_i^*} > 0 \\ a_{22}\xi_i(\theta) + b_{22} | \xi_i(\theta) > \xi_i^* \left| \frac{\partial OF}{\partial \xi_i^*} > 0 \end{array} \right. \right. \quad (6.17)$$

onde NLP é o número de parâmetros de laminação.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{0.8h_i}{\xi_i^* - 0.25h_i(1 - \xi_i^*) + 1} \\ a_{12} &= \frac{0.05h_i}{\xi_i^* - 0.25h_i(1 - \xi_i^*) - 1} \\ a_{21} &= \frac{-0.05h_i}{\xi_i^* - 0.25h_i(1 - \xi_i^*) + 1} \\ a_{22} &= \frac{-0.8h_i}{\xi_i^* - 0.25h_i(1 - \xi_i^*) - 1} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= -h_i + a_{11} \\ b_{12} &= -0.2h_i - a_{12} \\ b_{21} &= 0.2h_i + a_{21} \\ b_{22} &= h_i - a_{22} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$h_i = \frac{\partial F / \partial \xi_i^*}{\left| \partial F / \partial \xi_i^* \right|_{\max}} \quad (6.20)$$

Essa minimização da função objetivo interna de Foldager parte de um conjunto de orientação angular arbitrário e ao final do processo de otimização é encontrado um conjunto $\{\theta\}_{\text{nov}} que minimiza a função objetivo interna de Foldager. A minimização da função f_l implica na minimização da distância entre o conjunto de parâmetros de laminação dado $\{\xi\}^*$ e o $\xi(\{\theta\})$ calculado. Nesse trabalho utilizou-se uma versão alternativa da função f_l apresentada na Eq. (6.21). O objetivo dessa modificação é evitar problemas numéricos caso o valor de $\{\xi\}^*$ seja muito próximo de zero e acelerar a convergência.$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{NLP} \left\{ \frac{\xi_i^* - \xi_i(\theta)}{\max(10^{-3}, \xi_i^*)} \right\}^2 \quad (6.21)$$

A segunda função f_2 , força o processo de otimização a favorecer *layups* com um valor de função objetivo f menor. O objetivo da minimização interna é encontrar um novo conjunto de variáveis de projeto ($\{\theta\}_{new}$) que levem a um melhor ou igual valor da função objetivo. Isso tende a retirar o processo de otimização de um máximo local.

O cálculo da sensibilidade é um estágio importante do processo de otimização e será descrito separadamente na subseção 6.2.

Usando o conjunto de orientação angular resultante $\{\theta\}_{novo}$, calcula-se $F(\{\theta\}_{novo})$. Se $F(\{\theta\}_{novo}) < F(\{\theta\}_{ótimo})$ usa-se um novo conjunto de orientação angular arbitrário e minimiza-se a função objetivo interna de Foldager novamente. O número de orientações angulares arbitrárias é determinado pelo usuário levando em consideração o custo processo de otimização e a precisão de resultado desejada. Ou seja, quanto maior o número de orientações angulares arbitrárias maior é a chance de se encontrar o ótimo global com alta precisão. Esse é o mesmo conceito do critério de parada e pode-se dizer que o critério da parada do processo de otimização é definido pelo número de conjunto de orientações angulares arbitrárias usado.

Se $F(\{\theta\}_{novo}) \geq F(\{\theta\}_{ótimo})$ o processo deve retornar ao passo 1 com $\{\theta\}_{inicial} = \{\theta\}_{novo}$.

O processo é repetido até que $F(\{\theta\}_{novo}) \geq F(\{\theta\}_{ótimo})$ não seja encontrado e que o número máximo de orientações angulares arbitrárias tenha sido usado. Quando isso acontece $\{\theta\}_{ótimo}$ é o ótimo global. A Figura 14 mostra um diagrama de fluxo do processo de otimização.

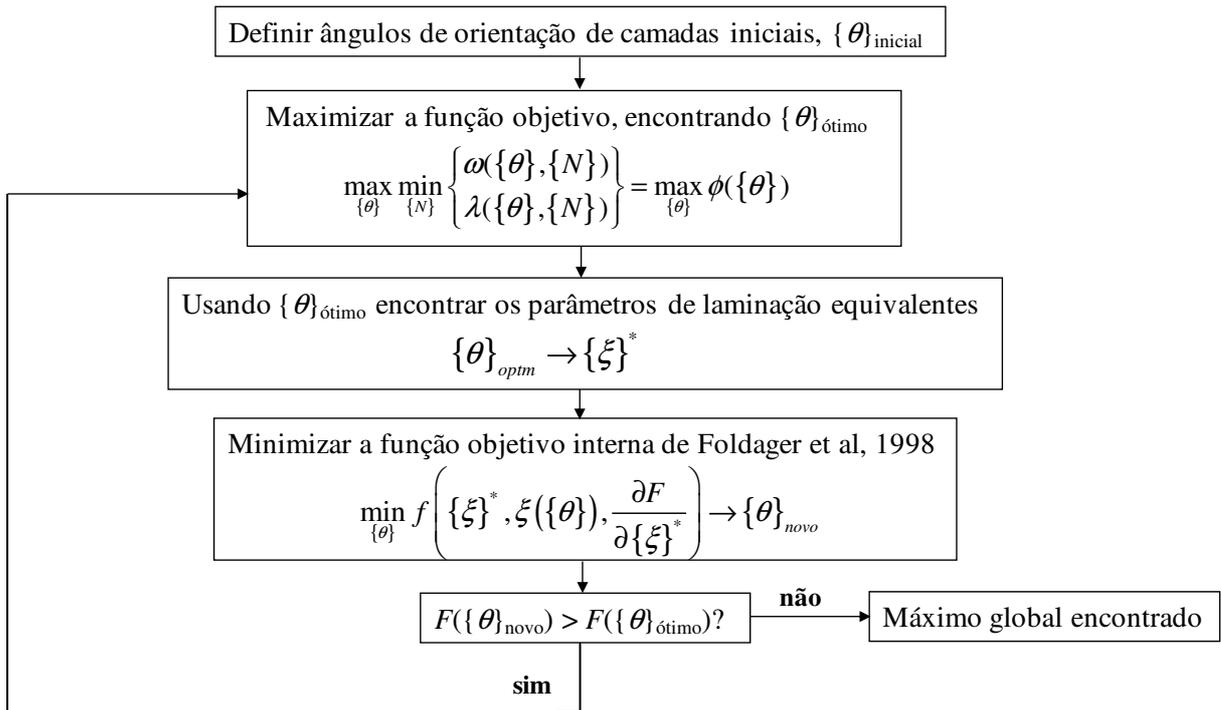


Figura 14 - Processo de otimização com orientação angular.

Se o valor da função objetivo normalizada no ótimo global for maior que 1 deve-se extrair uma camada do laminado de forma a reduzir sua massa. Para isso cria-se um novo laminado quasi-isotrópico com menos uma camada e repete-se a otimização. Se essa nova otimização resultar em outro laminado com função objetivo maior que 1, retira-se novamente outra camada e repete-se o processo. Isso é feito sucessivamente até que não se possa mais retirar camadas sem que a estrutura flambe ou não atenda aos requisitos de frequência. Como o laminado inicial tem valor de função objetivo entre 1.0 e 2.0 esse processo não terá que ser repetido muitas vezes, pois não haverá possibilidade de se extrair muitas camadas sem que a estrutura flambe ou não atenda aos requisitos de frequência. Além disso, as otimizações dos laminados podem ser feitas de forma paralela, pois são independentes.

6.2 Sensibilidade da função objetivo com respeito aos parâmetros de laminação

No trabalho de Foldager et al. [2] a sensibilidade foi desenvolvida analiticamente. No entanto nem sempre é possível obter a sensibilidade analiticamente visto que alguns problemas são muito complexos para uma abordagem analítica. Além disso, a aproximação necessita da sensibilidade da função objetivo com relação aos parâmetros de laminação, essa informação não pode ser extraída dos pacotes comerciais de elementos finitos visto que os mesmos trabalham com orientação angular e não com parâmetros de laminação.

Para solucionar esse problema foi feita uma aproximação de primeira ordem da função objetivo:

$$F(\{\xi\}) \cong F(\{\xi^*\}) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\xi^*\}} \right\}^T [\Delta\xi] \quad (6.22)$$

reagrupando os termos:

$$\left(F(\{\xi\}) - F(\{\xi^*\}) \right) [\Delta\xi]^{-1} \cong \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\xi^*\}} \right\}^T \quad (6.23)$$

Dessa forma torna-se necessário criar oito condições de perturbação para os vetores $\{\xi\}$ de forma a compor a matriz $[\Delta\xi]$. Essas oito condições de perturbação devem ser criadas de forma que a matriz seja bem condicionada e apropriada para inversão. Se essa perturbação for feita somente através de pequenas variações angulares nas camadas do laminado a chance de se obter uma matriz mal condicionada é grande, pois poderá haver menos camadas que o necessário para a obtenção de uma matriz bem condicionada e não se deseja um procedimento que requeira um número mínimo de camadas para o laminado. Além disso, para um número pequeno de camadas não haveria número suficiente de perturbações.

Dessa forma, além de se aplicar uma pequena variação angular em algumas camadas varia-se também o material de algumas camadas. Analisando a Tabela 1, retirada de Jones [53] é possível perceber que a formulação das matrizes de rigidez apresentadas na Eq. (6.8) permanece a mesma se forem criados novos materiais onde somente os invariantes U_2 e U_3 sejam modificados. A primeira coluna dessa tabela corresponde aos números 1 da Eq. (6.8). Sendo assim, se houver modificação nos elementos da primeira coluna, a Eq. (6.8) também deverá ser modificada. Como o objetivo é calcular a sensibilidade, varia-se apenas U_2 e U_3 e mantém-se a Eq. (6.8) inalterada. Se o objetivo fosse trabalhar com mais de um material no mesmo laminado, a Eq. (6.8) deveria ser adaptada.

Tabela 1 – Rigidez do laminado em função das propriedades da lamina [53].

Rigidez	$V_0(A, B, D)$	$V_1(A, B, D)$	$V_2(A, B, D)$	$V_3(A, B, D)$	$V_4(A, B, D)$
(A_{11}, B_{11}, D_{11})	U_1	U_2	0	U_3	0
(A_{22}, B_{22}, D_{22})	U_1	$-U_2$	0	U_3	0
(A_{12}, B_{12}, D_{12})	U_4	0	0	$-U_3$	0
(A_{66}, B_{66}, D_{66})	U_4	0	0	$-U_3$	0
$2(A_{16}, B_{16}, D_{16})$	0	0	$-U_2$	0	$-2U_3$
$2(A_{26}, B_{26}, D_{26})$	0	0	$-U_2$	0	$2U_3$

onde,

$$\begin{aligned}
 V_{0(A,B,D)} &= \left(t, 0, \frac{t^3}{12} \right) \\
 V_{1(A,B,D)} &= \int \cos 2\theta(1, z, z^2) dz \\
 V_{2(A,B,D)} &= \int \sin 2\theta(1, z, z^2) dz \\
 V_{3(A,B,D)} &= \int \cos 4\theta(1, z, z^2) dz \\
 V_{4(A,B,D)} &= \int \sin 4\theta(1, z, z^2) dz
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

As condições de perturbação que levaram a formação de uma matriz $[\Delta\xi]$ bem condicionada e não singular foram as seguintes:

- 1 – Usar um novo material, “material 1”, na metade das camadas mais internas do laminado;
- 2 – Usar um novo material, “material 2”, na metade das camadas mais internas do laminado;
- 3 – Usar um novo material, “material 1”, nas duas camadas mais internas do laminado e aplicar uma pequena variação no ângulo de orientação da camada;
- 4 – Usar um novo material, “material 2”, nas duas camadas mais internas do laminado e aplicar uma pequena variação nos ângulos de orientação das camadas;
- 5 – Usar um novo material, “material 1”, nas duas camadas mais externas do laminado e aplicar uma pequena variação nos ângulos de orientação das camadas;
- 6 – Usar um novo material, “material 2”, nas duas camadas mais externas do laminado e aplicar uma pequena variação nos ângulos de orientação das camadas;
- 7 – Usar uma pequena variação angular nas duas camadas mais internas do laminado;
- 8 – Usar uma pequena variação angular em duas camadas (posicionadas simetricamente) que apresentarem maior diferença de orientação angular em relação a primeira. Se essa diferença não existir, ou seja, se todas as camadas tiverem a mesma orientação, a pequena variação angular será aplicada nas duas camadas mais externas do laminado.

Os materiais 1 e 2 são criados numericamente e não necessitam de correspondentes físicos vistos que são usados somente para o cálculo da matriz $[\Delta\xi]$. Além disso, devem ser obtidos de forma que somente os invariantes U_2 e U_3 sejam diferentes do material do laminado ou material de referência. Os invariantes U_1 , U_4 e U_5 dos materiais 1 e 2 permanecem iguais aos invariantes do material de referência. Isso permite que os parâmetros de laminação sejam definidos conforme a Eq. (6.25) e que as matrizes de rigidez continuem sendo calculadas pela Eq. (6.8).

É importante ressaltar que a definição dos parâmetros de laminação conforme Eq. (6.25) e a criação de condições para a composição de uma matriz $[\Delta\xi]$ bem condicionada e inversível através da inclusão no laminado de camadas de materiais que só tenham modificação em U_2 e/ou U_3 em relação ao laminado de referência é uma contribuição desse trabalho.

$$\begin{aligned}\xi_{[1,2,3,4]}^A &= \frac{1}{t} \sum_{K=1}^N (h_k - h_{k+1}) \left[\frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \cos 2\theta_k \quad \frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \sin 2\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \cos 4\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \sin 4\theta_k \right] \\ \xi_{[1,2,3,4]}^B &= \frac{2}{t^2} \sum_{K=1}^N (h_k^2 - h_{k+1}^2) \left[\frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \cos 2\theta_k \quad \frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \sin 2\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \cos 4\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \sin 4\theta_k \right] \\ \xi_{[1,2,3,4]}^D &= \frac{4}{t^3} \sum_{K=1}^N (h_k^3 - h_{k+1}^3) \left[\frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \cos 2\theta_k \quad \frac{U_{2k}}{U_{2Ref}} \sin 2\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \cos 4\theta_k \quad \frac{U_{3k}}{U_{3Ref}} \sin 4\theta_k \right]\end{aligned}\quad (6.25)$$

Para a composição do material 1 define-se então:

$$U_1 = U_{1Ref}$$

$$U_2 \neq U_{2Ref}$$

$$U_3 = U_{3Ref} \quad (6.26)$$

$$U_4 = U_{4Ref}$$

$$U_5 = U_{5Ref}$$

Isso leva as seguintes condições:

$$\Delta Q_{xx} = -\Delta Q_{yy} \quad (6.27)$$

$$\Delta Q_{xy} = \Delta Q_{ss}$$

Provando-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= \frac{3}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{3}{8} \Delta Q_{yy} + \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} + \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0 \\
\Delta U_2 &= \frac{1}{2} \Delta Q_{xx} - \frac{1}{2} \Delta Q_{yy} = \Delta Q_{xx} \\
\Delta U_3 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} - \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} - \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0 \\
\Delta U_4 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} + \frac{3}{4} \Delta Q_{xy} - \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0 \\
\Delta U_5 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} - \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} + \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Essas condições são suficientes para obtenção das propriedades do material 1.

Para a composição do material 2 define-se a princípio:

$$U_1 = U_{1Ref}$$

$$U_2 = U_{2Ref}$$

$$U_3 \neq U_{3Ref} \tag{6.29}$$

$$U_4 = U_{4Ref}$$

$$U_5 = U_{5Ref}$$

Isso leva a seguinte condição:

$$\Delta Q_{xx} = \Delta Q_{yy} = -\Delta Q_{xy} = -\Delta Q_{ss} \tag{6.30}$$

Provando-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= \frac{3}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{3}{8} \Delta Q_{yy} + \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} + \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0 \\
\Delta U_2 &= \frac{1}{2} \Delta Q_{xx} - \frac{1}{2} \Delta Q_{yy} = 0 \\
\Delta U_3 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} - \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} - \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = \Delta Q_{xx} \\
\Delta U_4 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} + \frac{3}{4} \Delta Q_{xy} - \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0 \\
\Delta U_5 &= \frac{1}{8} \Delta Q_{xx} + \frac{1}{8} \Delta Q_{yy} - \frac{1}{4} \Delta Q_{xy} + \frac{1}{2} \Delta Q_{ss} = 0
\end{aligned} \tag{6.31}$$

No entanto, essas condições são conflitantes não existindo solução para as propriedades do material 2 descritas na Eq. (6.29). Portanto, admite-se também $U_2 \neq U_{2Ref}$ para o material 2.

Na prática obtém-se o material 1 minimizando uma função do tipo:

$$F_{m1} = \left(\frac{U_1^* - U_1}{U_1} \right)^2 + \left(\frac{U_3^* - U_3}{U_3} \right)^2 + \left(\frac{U_4^* - U_4}{U_4} \right)^2 \tag{6.32}$$

tendo como variáveis de projeto as propriedades elásticas E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12} . Quanto mais próximo de zero for a valor de F_{m1} mais precisa será a definição do material 1.

De forma análoga obtém-se o material 2 minimizando uma função do tipo:

$$F_{m2} = \left(\frac{U_1^* - U_1}{U_1} \right)^2 + \left(\frac{U_2^* - U_2}{U_2} \right)^2 + \left(\frac{U_4^* - U_4}{U_4} \right)^2 \tag{6.33}$$

Essa forma de cálculo de sensibilidade amplia a aplicabilidade da aproximação de Foldager et al. [2] em dois aspectos. Primeiro permite que se use formas não analíticas para o cálculo da função objetivo como, por exemplo, elementos finitos. Segundo surge a possibilidade de se usar mais de um material na composição da estrutura composta usada na aproximação.

6.3 Exemplo de aplicação do cálculo da sensibilidade

Para validar essa forma de obtenção das sensibilidades será apresentado um exemplo que utiliza uma placa plana composta de largura $a = 0.3$ m e altura $b = 0.24$ m, sujeita a carregamento compressivo $N_x = 10$ kN conforme a Figura 15.

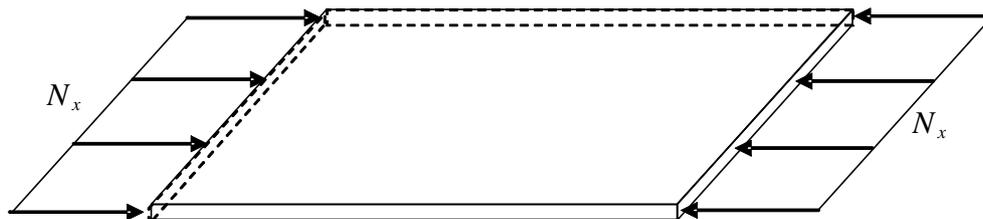


Figura 15 – Placa sob carregamento compressivo.

As propriedades do material de referência e dos materiais 1 e 2 obtidos pela minimização das funções F_{m1} e F_{m2} são descritas na Tabela 2. Os respectivos valores de invariantes estão na Tabela 3.

Tabela 2 – Propriedades dos materiais de referência, 1 e 2.

Propriedade	Mat. Ref.	Mat. 1	Mat. 2
Módulo de elasticidade longitudinal, E_1 (GPa)	207	209.07	209.07
Módulo de elasticidade transversal, E_2 (GPa)	20.7	18.4	19.43
Módulo de cisalhamento, G_{12} , G_{13} e G_{23} (GPa)	6.9	6.9	6.55
Coefficiente de Poisson, ν_{12}	0.3	0.34	0.3
Densidade, ρ (kg/m ³)	1580	1580	1580

Tabela 3 – Invariantes.

	Mat. Ref.	Mat. 1	Varição Mat. 1 (%)	Mat. 2	Varição Mat. 2 (%)
U_1	9.1180E+10	9.1180E+10	0.000%	9.1180E+10	0.000%
U_2	9.3996E+10	9.6296E+10	2.447%	9.5630E+10	1.739%
U_3	2.3704E+10	2.3705E+10	0.004%	2.4049E+10	1.455%
U_4	2.9971E+10	2.9969E+10	-0.006%	2.9971E+10	0.000%
U_5	3.0604E+10	3.0605E+10	0.003%	3.0604E+10	0.000%

A função $F(\xi)$ da Eq. (6.22) será aquela que calcula a flambagem representada na Eq. (6.34) e extraída de Jones [53]. Essa equação é válida para laminado ortotrópico simplesmente apoiado e sob carregamento compressivo.

$$\lambda = F(\xi) = \frac{\pi^2}{N_x} \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \right] \quad (6.34)$$

onde λ é a carga de flambagem. m e n são o número de comprimento de meia onda nas direções x e y , respectivamente. O menor valor de λ ocorre quando $n = 1$ e para placas com pequena relação a/b (< 2.5) a flambagem acontece em uma única meia onda na direção x . Dessa forma considera-se $m = n = 1$. D_{11} , D_{22} , D_{12} , D_{66} são termos de rigidez a flexão do laminado definidos na Eq. (6.8).

Nota-se que somente os termos de rigidez são função dos parâmetros de laminação e os demais termos são constantes. Dessa forma, a derivada da função $F(\xi)$ é facilmente obtida analiticamente:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{t^3}{12} (U_1 + U_2 \xi_1^D + U_3 \xi_3^D) \\
D_{22} &= \frac{t^3}{12} (U_1 - U_2 \xi_1^D + U_3 \xi_3^D) \\
D_{12} &= \frac{t^3}{12} (U_4 - U_3 \xi_3^D) \\
D_{66} &= \frac{t^3}{12} \left(\frac{U_1 - U_4}{2} - U_3 \xi_3^D \right) = \frac{t^3}{12} (U_5 - U_3 \xi_3^D)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Substituindo na Eq. (6.34):

$$\begin{aligned}
\lambda = F(\xi) &= \frac{\pi^2 t^3}{12 a^2 b^2 N_x} \times \\
&\left[\left(\frac{a^4 + b^4}{b^2} U_1 + 2a^2 U_4 + 4a^2 U_5 \right) + \left(\frac{b^4 - a^4}{b^2} \right) U_2 \xi_1^D + \left(b^2 - 6a^2 + \frac{a^4}{b^2} \right) U_3 \xi_3^D \right]
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Derivando:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_1^D} = \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_1^D} = \frac{\pi^2 t^3}{12 a^2 b^2 N_x} \left[\left(\frac{b^4 - a^4}{b^2} \right) U_2 \right] \tag{6.37}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_3^D} = \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_3^D} = \frac{\pi^2 t^3}{12 a^2 b^2 N_x} \left[\left(b^2 - 6a^2 + \frac{a^4}{b^2} \right) U_3 \right] \tag{6.38}$$

Conclui-se que as sensibilidades são constantes com os seguintes valores:

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_{1,2,3,4}^D} = \{-0.722086 \quad 0 \quad -0.749618 \quad 0\}^T \tag{6.39}$$

Resta verificar se a sensibilidade calculada pela aproximação de primeira ordem é satisfatória.

Para isso considera-se que o laminado em questão possui seis camadas cada uma com espessura $t = 0.15$ mm e com as seguintes orientações angulares:

$$\{\theta\} = \{60 \quad -60 \quad 45 \quad -45 \quad 30 \quad -30\}^T \tag{6.40}$$

que correspondem aos seguintes parâmetros de laminação:

$$\begin{aligned} \{\xi_{1,2,3,4}^A\} &= \{0.8327E-16 \quad 0.0 \quad -0.6667 \quad 0.0\}^T \\ \{\xi_{1,2,3,4}^D\} &= \{0.3333 \quad -0.2277 \quad -0.6296 \quad -0.09623\}^T \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para esse conjunto de orientações angulares tem-se:

$$F(\xi) = 3.422227926356051 \quad (6.42)$$

Os elementos da matriz $[\Delta\xi]$ e os vetores $F(\{\xi\})$ e $\Delta F(\{\xi\})$ tem seus valores apresentados nas Tabelas 4, 5 e 6, considerando as oito condições descritas:

Tabela 4 – Elementos da matriz $[\Delta\xi]$ referentes a $\{\xi^A\}$.

	$\Delta\xi_1^A$	$\Delta\xi_2^A$	$\Delta\xi_3^A$	$\Delta\xi_4^A$
Cond. 1	-0.4078E-02	0.4078E-02	-0.1222E-04	0.0000E+00
Cond. 2	-0.2898E-02	0.2898E-02	-0.4851E-02	0.0000E+00
Cond. 3	-0.4607E-02	0.2019E-02	0.5085E-02	-0.2826E-02
Cond. 4	-0.3999E-02	0.1007E-02	0.3949E-02	-0.4962E-02
Cond. 5	0.4607E-02	-0.2019E-02	0.5085E-02	-0.2826E-02
Cond. 6	0.3999E-02	-0.1007E-02	0.3949E-02	-0.4962E-02
Cond. 7	-0.2506E-02	-0.1476E-02	0.5088E-02	-0.2820E-02
Cond. 8	0.2506E-02	0.1476E-02	0.5088E-02	-0.2820E-02

Tabela 5 - Elementos da matriz $[\Delta\xi]$ referentes a $\{\xi^D\}$.

	$\Delta\xi_1^D$	$\Delta\xi_2^D$	$\Delta\xi_3^D$	$\Delta\xi_4^D$
Cond. 1	-0.4531E-03	0.1564E-02	-0.3903E-05	0.8819E-06
Cond. 2	-0.3220E-03	0.1111E-02	-0.1550E-02	0.3501E-03
Cond. 3	-0.1280E-03	0.5609E-04	0.1413E-03	-0.7849E-04
Cond. 4	-0.1111E-03	0.2798E-04	0.1097E-03	-0.1378E-03
Cond. 5	0.1164E-01	-0.5104E-02	0.1285E-01	-0.7143E-02
Cond. 6	0.1011E-01	-0.2547E-02	0.9983E-02	-0.1254E-01
Cond. 7	-0.6962E-04	-0.4101E-04	0.1413E-03	-0.7834E-04
Cond. 8	0.6335E-02	0.3732E-02	0.1286E-01	-0.7129E-02

Tabela 6 – Função objetivo $F(\{\xi\})$ e variação da função objetivo $\Delta F(\{\xi\})$.

	$F(\{\xi\})$	$\Delta F(\{\xi\})$
Cond. 1	3.422557	0.3301128E-03
Cond. 2	3.423622	0.1394148E-02
Cond. 3	3.422214	-0.1348725E-04
Cond. 4	3.422225	-0.2029286E-05
Cond. 5	3.404183	-0.1804424E-01
Cond. 6	3.407445	-0.1478226E-01
Cond. 7	3.422172	-0.5567538E-04
Cond. 8	3.408011	-0.1421599E-01

Invertendo a matriz $[\Delta\xi]$ e substituindo esses valores na Eq. (6.23), tem-se:

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_{1,2,3,4}^D} = \{-0.7220863 \quad -0.2485123E-11 \quad -0.7496181 \quad -0.1542766E-11\}^T \quad (6.43)$$

e conclui-se que a sensibilidade calculada pela aproximação tem resultado bastante satisfatório.

Para se calcular o valor da função por aproximação faz-se:

$$F(\{\xi\}^2) = F(\{\xi\}^1) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\xi^*\}} \right\}^T (\{\xi\}^2 - \{\xi\}^1) \quad (6.44)$$

Para isso considera-se que se deseja aproximar o valor da função para um laminado quasi-isotrópico de seis camadas:

$$\{\theta\}^2 = \{15 \quad -15 \quad 25 \quad -25 \quad 35 \quad -35\}^T \quad (6.45)$$

com os seguintes parâmetros de laminação:

$$\begin{aligned} \{\xi_{1,2,3,4}^A\}^2 &= \{0.6169 \quad 0.0 \quad -0.1466 \quad 0.0\}^T \\ \{\xi_{1,2,3,4}^D\}^2 &= \{0.4394 \quad -0.2082 \quad -0.5656 \quad -0.1954\}^T \end{aligned} \quad (6.46)$$

Substituindo nas Eqs. (6.34) e (6.44) tem-se respectivamente:

$$F(\{\xi\}^2) = 3.297614 \quad (6.47)$$

e

$$F(\{\xi\}^2)_{APROX} = 3.297614 \quad (6.48)$$

de onde conclui-se que o valor dessa função calculada pela aproximação é exato. Para funções mais complexas a aproximação poderá não apresentar tamanha exatidão e não poderá substituir o cálculo analítico ou por elementos finitos. Porém a sensibilidade será sempre

válida visto que representa somente uma indicação para a direção de minimização e não precisa ser exata.

Finalmente, deve-se ressaltar que além de servir para calcular as sensibilidades em relação aos parâmetros de laminação, o uso da nova definição dos parâmetros de laminação, Eq. (6.25), permite que mais de um material seja usado no laminado. Essa é uma vantagem significativa em relação à definição tradicional.

7 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

7.1 Pórtico

Os resultados dessa subsecção foram publicados conforme as referências [38] e [54]. A estrutura escolhida para otimização é o chamado pórtico de Lee representado na Figura 16. Seu material é o alumínio com modulo de Young de 70 GPa e densidade de massa de 2600 kg/m³. As barras do pórtico tem mesma base (b) e mesma altura (L), mas espessuras diferentes (h). O comprimento e altura são constantes e iguais a 2 m e 1 cm, respectivamente. As espessuras são as variáveis de projeto, isto é, a barra um tem espessura h_1 e a barra dois tem espessura h_2 .

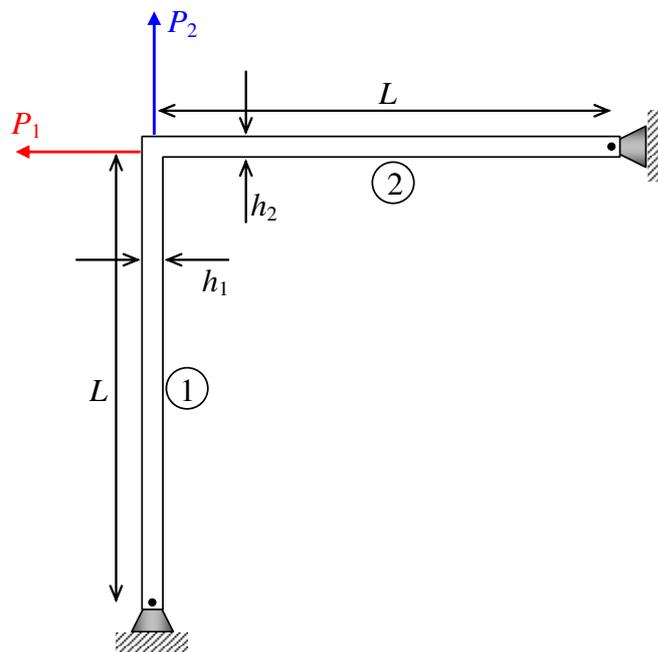


Figura 16 - Pórtico.

As forças concentradas são aplicadas como mostra a Figura 16. Forças p_1 e p_2 são definidas na Eq. (7.1-1):

$$p_1 = \beta_1 p_{10}, p_2 = \beta_2 p_{20} \quad (7.1-1)$$

onde p_{10} e p_{20} são fatores de escala que refletem a magnitude máxima esperada de cada estado de tensão inicial. Dois grupos de fatores de escala são analisados:

$$\begin{aligned} 1) p_{10} = p_{20} = 800 \text{ N} \\ 2) p_{10} = 800 \text{ N}, p_{20} = 400 \text{ N} \end{aligned} \quad (7.1-2)$$

Os parâmetros de carregamento devem ser restringidos de forma que um domínio convexo do espaço de carregamento seja identificado. Na presente simulação, a relação imposta nos parâmetros de carregamento é

$$|\beta_1| + |\beta_2| \leq 1 \quad (7.1-3)$$

Essa relação tem origem na definição de convexidade onde um conjunto μ em um espaço linear normalizado R é dito convexo se μ contém todos os elementos da forma $\alpha x + \beta y$ onde $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, \mu$ contendo x e y [55].

Como as superfícies de frequência natural e estabilidade são convexas, é suficiente avaliar λ e ω somente nos vértices da superfície. Isso fornece os seguintes casos de carregamento.

$$\begin{aligned} 1) \beta_1 = 1 \beta_2 = 0 \\ 2) \beta_1 = 0 \beta_2 = 1 \\ 3) \beta_1 = -1 \beta_2 = 0 \\ 4) \beta_1 = 0 \beta_2 = -1 \end{aligned} \quad (7.1-4)$$

Como a flambagem é associada a cargas compressivas e a frequência natural é menor quando o pórtico esta sob ação de forças compressivas, somente os casos 3 e 4 serão considerados. Isso, no entanto, não é uma verdade absoluta. Por exemplo, problemas onde os carregamentos de cisalhamento são valores positivos significativos devem ser analisados com cuidado. O

pórtico é simétrico então se espera que, para o fator de escala 1 ($p_{10} = p_{20} = 800$ N) e casos de carregamentos 1–2 e 3–4, flambagem e frequência natural comportem-se simetricamente.

Considerando que a massa total do pórtico é constante, de forma que a soma das espessuras das duas barras seja 4 cm ($h_1 + h_2 = 4$ cm), é possível visualizar a dependência da flambagem e frequência com relação a espessura. A Figura 17 mostra como a flambagem e a frequência variam com h_1 para $p_{10} = p_{20} = 800$ N e casos de carga 3–4. A Figura 18 mostra como a flambagem e a frequência variam com h_1 para $p_{10} = 800$ N, $p_{20} = 400$ N e casos de carga 3–4.

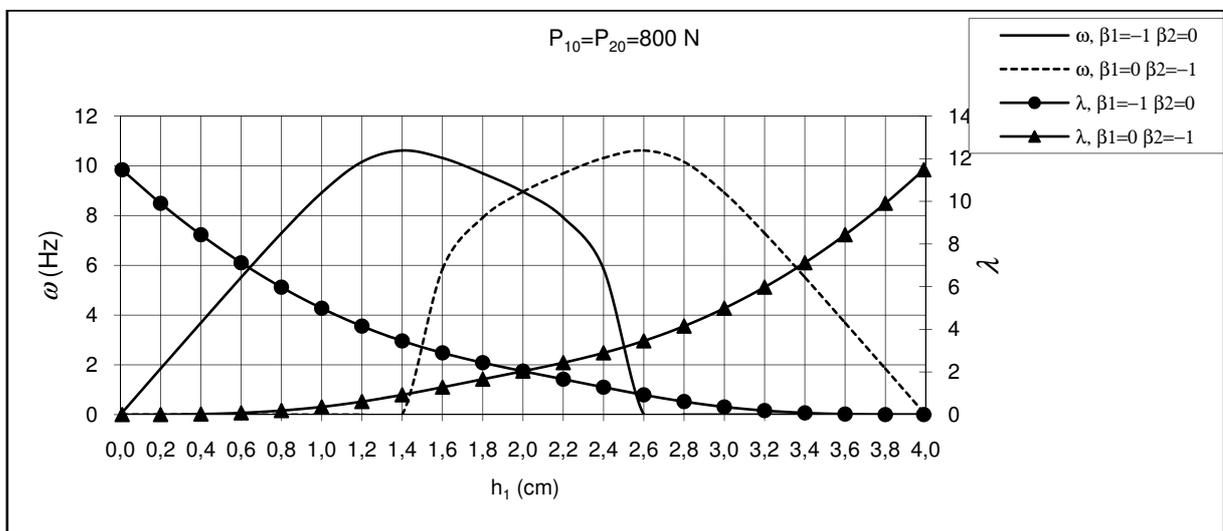


Figura 17 – Variação da flambagem e frequência natural do pórtico ($p_{10} = p_{20} = 800$ N).

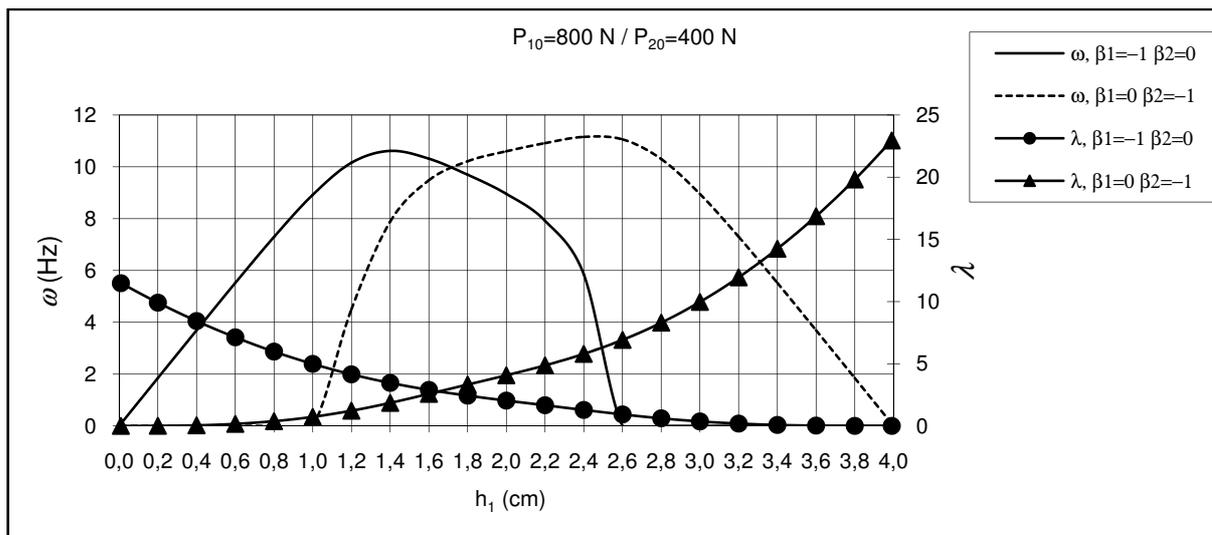


Figura 18 – Variação da flambagem e frequência natural do pórtico ($p_{10} = 800$, $p_{20} = 400$ N).

No contexto de otimização multicritério, a frequência natural e a carga de flambagem devem ser normalizadas de forma que uma comparação apropriada possa ser feita. Duas possibilidades de normalização são exploradas. A primeira normaliza somente a frequência (visto que a carga de flambagem λ como calculada aqui é adimensional) e usa como parâmetro de normalização o menor valor de frequência natural ω_0 admissível. Esse tipo de normalização resulta na definição do critério ativo. A segunda possibilidade de normalização calcula a frequência natural ótima e a carga de flambagem ótima separadamente e usa esses valores como parâmetros de normalização. Esse tipo de normalização permite a identificação de uma região onde frequência natural e flambagem estão melhores balanceadas. Essa região é denominada região ótima.

7.1.1 Minimax encontrando o critério ativo

Essa aproximação utiliza o fato de que a carga de flambagem (λ) calculada é adimensional e, conseqüentemente, somente a normalização da frequência natural é necessária e pode ser feita baseada em alguma frequência mínima admissível definida por características de projeto. A

normalização da frequência por alguma frequência mínima admissível (ω_0) torna possível identificar qual critério está ativo, ou seja, qual critério é dominante no processo de otimização. Para ilustrar essa abordagem duas frequências mínimas são usadas: $\omega_0 = 13$ Hz e $\omega_0 = 3$ Hz.

A estratégia minimax é composta de dois passos como descrito na Eq. (4.2-1). No primeiro passo valores de espessura são gerados aleatoriamente (satisfazendo a restrição de massa constante) e os valores correspondentes de flambagem e frequência são calculados. Isso resulta em dois valores de frequência e dois de flambagem para cada projeto gerado. Entre esses quatro valores, o menor é a solução de $\phi(\{h\})$ na Eq. (4.2-1).

O melhor projeto (máximo entre os mínimos) obtido no passo 1 é utilizado como ponto inicial para o método de Powell no passo 2. A função objetivo é $\phi(\{h\})$ na Eq. (4.2-1), então o método de Powell é empregado para encontrar a espessura que maximiza a flambagem e frequência. No final desse processo a espessura ótima e a correspondente carga de flambagem e frequência natural normalizada são obtidas. Os valores são mostrados na Tabela 7 são para $p_{10} = p_{20} = 800$ N. Se o mínimo entre os valores de flambagem e frequência corresponde, por exemplo, a um valor de flambagem, então pode-se dizer que a flambagem é o critério dominante. O mesmo vale para a frequência natural.

Tabela 7 - Critério ativo para $\omega_0 = 13$ Hz e $p_{10} = p_{20} = 800$ N.

ω_0 (Hz)	p_{10} (N)	p_{20} (N)	h_1 (cm)	h_2 (cm)	λ	ω / ω_0
13	800	0	2.0	2.0	2.035	0.689
	0	800			2.035	0.689

Na Tabela 7 é possível observar que o valor da frequência é o menor e, portanto, ela é o critério dominante. Além disso, observa-se que $h_1 = h_2 = 2$ cm é a melhor configuração de

espessura pois fornece o maior valor entre os mínimos. Isso pode ser confirmado pela Figura 17.

Tabela 8 - Critério ativo para $\omega_0 = 13 \text{ Hz}$ e $p_{10} = 800 \text{ N}$, $p_{20} = 400 \text{ N}$.

ω_0 (Hz)	p_{10} (N)	p_{20} (N)	h_1 (cm)	h_2 (cm)	λ	ω / ω_0
13	800	0	1.715	2.285	2.616	0.767
	0	400			3.004	0.767

Na Tabela 8 é possível observar que a frequência é o critério dominante porque tem menor valor. Além disso, observa-se que $h_1 = 1.715 \text{ cm}$ e $h_2 = 2.285 \text{ cm}$ são a melhor configuração de espessuras, pois possuem o máximo valor entre os mínimos. Isso pode ser confirmado pela Figura 18.

Tabela 9 - Critério ativo para $\omega_0 = 3 \text{ Hz}$ e $p_{10} = p_{20} = 800 \text{ N}$.

ω_0 (Hz)	p_{10} (N)	p_{20} (N)	h_1 (cm)	h_2 (cm)	λ	ω / ω_0
3	800	0	2.0	2.0	2.035	2.985
	0	800			2.035	2.985

Na Tabela 9 é possível observar que a flambagem é o critério dominante, pois tem menor valor. Além disso, observa-se que $h_1 = h_2 = 2 \text{ cm}$ é a melhor configuração de espessura pois tem valor máximo entre os mínimos. Isso pode ser confirmado na Figura 17.

Tabela 10 - Critério ativo para $\omega_0 = 3 \text{ Hz}$ e $p_{10} = 800 \text{ N}$, $p_{20} = 400 \text{ N}$.

ω_0 (Hz)	p_{10} (N)	p_{20} (N)	h_1 (cm)	h_2 (cm)	λ	ω / ω_0
3	800	800	1.652	2.348	2.765	3.389
	800	400			2.765	3.243

Na Tabela 10 é possível observar que a flambagem é o critério dominante, pois tem menor valor. Além disso, observa-se que $h_1 = 1.652$ cm e $h_2 = 2.348$ cm são a melhor configuração de espessuras, pois fornecem maior valor entre os mínimos. Isso pode ser confirmado pela Figura 18.

7.1.2 Minimax encontrando a região ótima

Essa aproximação usa a estratégia minimax para encontrar parâmetros de normalização. O procedimento se inicia aplicando a estratégia minimax nos dois critérios individualmente, isso corresponde a solucionar Eqs. (7.1-5) e (7.1-6).

$$\max_{\{h\}} \min_{\{\beta\}} \omega_0(\{h\}, \{\beta\}) = \max_{\{h\}} \phi(\{h\}) \quad , \quad \phi(\{h\}) = \min_{\{\beta\}} \omega_0(\{h\}, \{\beta\}) \quad (7.1-5)$$

$$\max_{\{h\}} \min_{\{\beta\}} \lambda_0(\{h\}, \{\beta\}) = \max_{\{h\}} \psi(\{h\}) \quad , \quad \psi(\{h\}) = \min_{\{\beta\}} \lambda_0(\{h\}, \{\beta\}) \quad (7.1-6)$$

Esses valores (ω_0 e λ_0) são usados como parâmetros de normalização no método de Powell e definem a região onde as discrepâncias entre os critérios são menores. A função objetivo é novamente $\phi(\{h\})$ na Eq. (4.2-1), mas os valores de frequência natural e flambagem encontrados em cada passo do método de Powell são normalizados por ω_0 e λ_0 , respectivamente. Assim, o método de Powell é empregado para encontrar a espessura que maximiza os valores mínimos de flambagem e frequência.

Para os fatores de escala 1 ($p_{10} = p_{20} = 800$ N), ω_0 e λ_0 são obtidos para a mesma espessura ($h_1 = 2$ cm). Conseqüentemente, não se define uma região ótima, mas um ponto ótimo. Isso foi confirmado pelo método de Powell como mostra a Tabela 11. Para os fatores de escala 2 ($p_{10} = 800$ N, $p_{20} = 400$ N), ω_0 é obtido para $h_1 = 1.716$ cm e λ_0 para $h_1 = 1.652$ cm (Figura 19). Conseqüentemente, esses dois pontos definem a região ótima e o método de Powell deve

encontrar a espessura ótima dentro dessa região. Como mostra a Tabela 12, o método de Powell encontrou como espessura ótima $h_1 = 1.675$ cm que está entre 1.652 cm e 1.716 cm, ou dentro da região ótima.

Tabela 11 - Resultados da estratégia minimax e do método de Powell para $p_{10} = p_{20} = 800$ N.

p_{10} (N)	p_{20} (N)	ω_0 (Hz)	λ_0	h_1 (cm)	h_2 (cm)
800	0	8.954	2.035	2.0000	2.0000
0	800				

Tabela 12 - Resultados da estratégia minimax e do método de Powell para $p_{10} = 800$ N, $p_{20} = 400$ N.

p_{10} (N)	p_{20} (N)	ω_0 (Hz)	λ_0	h_1 (cm)	h_2 (cm)
800	0	9.970	2.763	1.675	2.325
0	400				

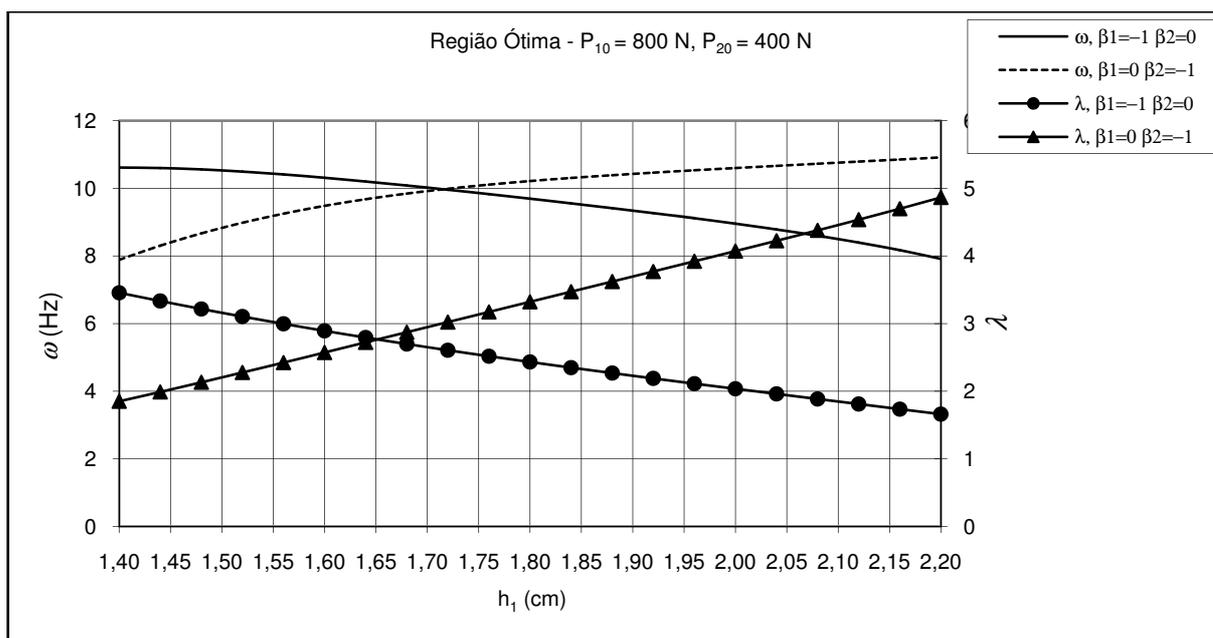


Figura 19 – Variação da frequência natural e flambagem para o pórtico.

7.2 Placa plana de material compósito laminado

Os resultados dessa subseção foram publicados conforme a referência [56]. A estrutura escolhida para otimização é a placa representada na Figura 20. É uma placa laminada quadrada com seqüência de empilhamento $[(0/90)_2]_s$. As arestas da placa têm dimensões $b = 0.36$ m e as propriedades do material são dadas na Tabela 13.

A placa é discretizada em 64 elementos finitos como mostra a Figura 21. Oito variáveis de projeto controlam a espessura das duas camadas mais externas. Espessuras t_1, t_3, t_5, t_7 são para a quarta camada e t_2, t_4, t_6, t_8 são para a terceira camada, como mostra a Figura 22. Essas espessuras correspondem a reforçadores longitudinais onde os elementos 1 a 8 e 57 a 64 tem espessuras t_7 e t_8 ; elementos 9 a 16 e 49 a 56 tem espessuras t_5 e t_6 ; elementos 17 a 24 e 41 a 48 tem espessuras t_3 e t_4 ; finalmente elementos 25 a 40 têm espessuras t_1 e t_2 . As camadas internas têm espessura constante de 0.15 mm.

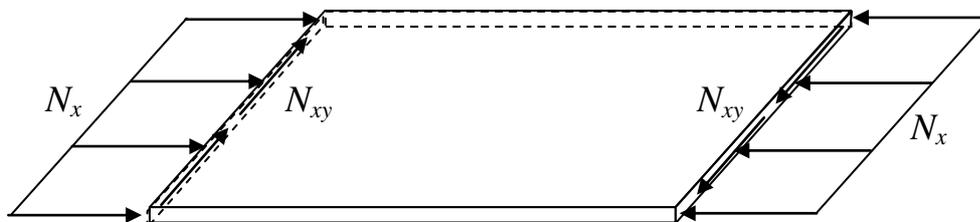


Figura 20 – Placa sob carregamento mecânico.

Tabela 13 – Propriedades do material T300/5208 carbono-epóxi.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade longitudinal, E_1 (GPa)	154.5
Módulo de elasticidade transversal, E_2 (GPa)	11.13
Módulo de cisalhamento transversal, G_{12} e G_{13} (GPa)	6.98
Módulo de cisalhamento transversal, G_{23} (GPa)	3.36
Coefficiente de Poisson, ν_{12}	0.304
Densidade, ρ (kg/m^3)	1560

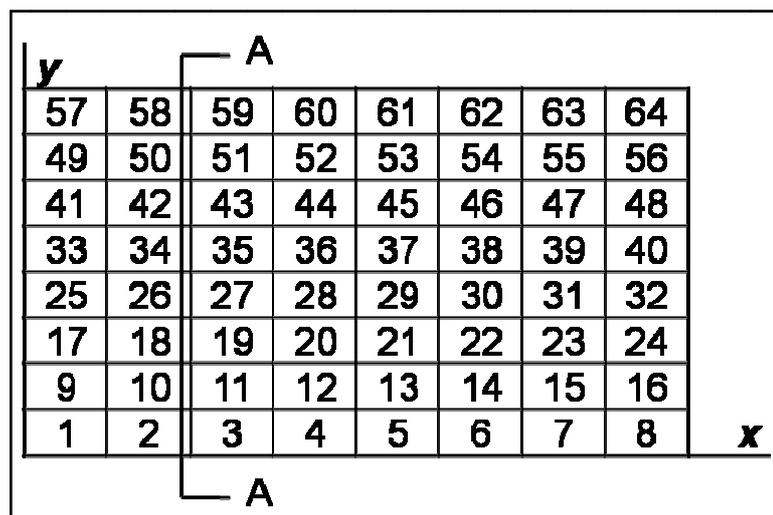


Figura 21 – Placa discretizada em 64 elementos.

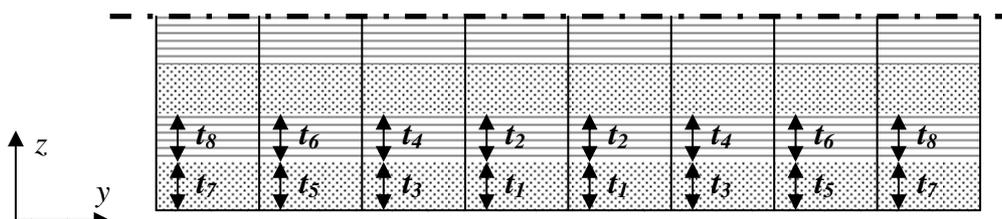


Figura 22 – Corte AA: Representação das variáveis de projeto.

Os carregamentos de compressão e cisalhamento são definidos como:

$$\begin{aligned} N_x &= \beta_1 p_x \\ N_{xy} &= \beta_2 p_{xy} \end{aligned} \quad (7.2-1)$$

onde β_1 e β_2 são parâmetros de carregamento, p_x e p_{xy} são a máxima magnitude esperada para cada tipo de carregamento individual. São analisados três grupos de carregamento:

Tabela 14 – Casos de carregamento para placa plana.

Caso de carregamento	1	2	3
p_x (N/m)	2000	3200	4500
p_{xy} (N/m)	300	850	1200

Os parâmetros de carregamento devem ser definidos de forma que o domínio do espaço de carregamento seja convexo. Para isso impõe-se a seguinte relação aos parâmetros de carregamento:

$$|\beta_1| + |\beta_2| \leq 1 \quad (7.2-2)$$

Como as superfícies de frequência natural e estabilidade são convexas, é suficiente avaliar ω e λ somente nos vértices. Isso fornece os seguintes casos de carregamento:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 0 & 3) \quad & \beta_1 = -1 \quad \beta_2 = 0 \\ 2) \quad & \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 1 & 4) \quad & \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = -1 \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

Caso 1 não causa flambagem e aumenta a frequência natural. Caso 2 leva a resultados semelhantes ao caso 4, pois o laminado é *crossply*. Conseqüentemente, somente os casos 3 e 4 precisam ser considerados no procedimento de otimização.

São analisados dois grupos de resultados. No primeiro utiliza-se uma restrição de massa de forma que $\sum_{i=1}^8 t_i = 1.2 \text{ mm}$. Esses resultados não incluem o loop externo de otimização de massa e considera os casos de carregamento 1 e 2 da Tabela 14. O segundo grupo de resultados não inclui uma restrição de massa e usa o loop externo de otimização de massa. Isso torna possível aplicar o caso de carregamento 3 onde as magnitudes da cargas são maiores. Três fatores de normalização da frequência são utilizados: $\omega_0 = 20, 40$ e 60 Hz .

7.2.1 Otimização minimax com restrição de massa

A estratégia minimax é composta de dois passos. No primeiro passo valores de espessura são gerados aleatoriamente e os valores correspondentes de flambagem e frequência normalizados são calculados. Isso resulta em dois valores de frequência e dois de flambagem. Entre esses quatro valores, o menor deles é a solução de $\phi(\{t\})$ na Eq. (4.2-1).

O melhor projeto obtido da primeira parte da estratégia minimax é o ponto inicial para o método de Powell na segunda parte. O método de Powell é usado para encontrar a espessura que maximiza os valores mínimos de flambagem e frequência natural. Ao final desse processo a espessura ótima e os valores correspondentes de flambagem e frequência normalizada são obtidos. Esses valores são mostrados nas Tabelas 15 e 16 para os grupos 1 e 2 de casos de carregamento, respectivamente. Se o mínimo entre os valores de frequência e flambagem corresponde, por exemplo, a flambagem, então ela é o critério dominante. O mesmo se aplica para frequência.

Tabela 15 – Resultados da estratégia minimax para $N_x = 2000$ e $N_{xy} = 300$ (N/m).

	$\omega_0 = 20$ (Hz)	$\omega_0 = 40$ (Hz)	$\omega_0 = 60$ (Hz)
$\sum_{i=1}^8 t_i$	1.2	1.2	1.2
$\lambda (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	2.701	2.344	2.344
$\omega/\omega_0 (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	2.801	1.653	1.102
$\lambda (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	4.940	4.529	4.529
$\omega/\omega_0 (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	3.507	1.969	1.313

A Tabela 15 mostra que para o valor de normalização de frequência $\omega_0 = 20$ Hz, o critério dominante é flambagem. Para concluir isso foi necessário observar a distribuição de espessuras porque os valores de λ e ω/ω_0 são semelhantes quando $\beta_1 = -1$ and $\beta_2 = 0$. Como a distribuição ótima de espessura quando $\omega_0 = 20$ Hz foi diferente de quando $\omega_0 = 40$ e 60 Hz (casos onde a frequência é o critério dominante), e possível concluir que flambagem é o critério dominante.

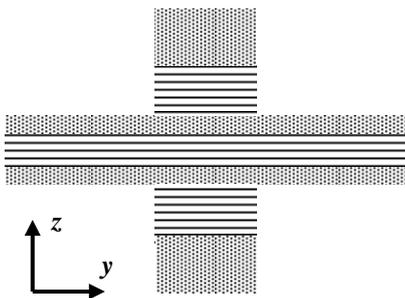
O processo de otimização fornece uma distribuição de espessuras capaz de suportar o carregamento aplicado para os valores de normalização de frequência de $\omega_0 = 20$ e 40 Hz. No entanto, quando $\omega_0 = 20$ e 40 Hz, é possível dizer que o projeto da estrutura esta superestimado e o loop externo de otimização de massa resultaria em uma redução de massa da estrutura. Para o valor de normalização de frequência de $\omega_0 = 60$ Hz a distribuição ótima de espessuras satisfaz aos requisitos com um fator de segurança de 10%.

Tabela 16 – Resultados da estratégia minimax para $N_x = 3200$ e $N_{xy} = 850$ (N/m).

	$\omega_0 = 20$ (Hz)	$\omega_0 = 40$ (Hz)	$\omega_0 = 60$ (Hz)
$\sum_{i=1}^8 t_i$	1.2	1.2	1.2
$\lambda (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	1.688	1.420	1.331
$\omega/\omega_0 (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	2.262	1.443	0.979
$\lambda (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	1.744	1.627	1.652
$\omega/\omega_0 (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	3.464	1.939	1.310

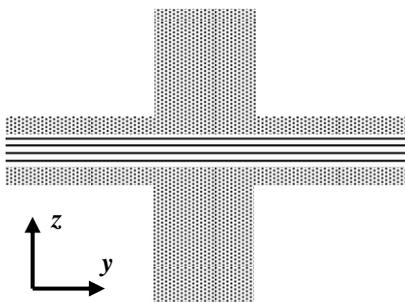
Analisando os resultados apresentados na Tabela 16 é possível concluir que quando $\omega_0 = 20$ Hz o critério dominante é flambagem. Quando $\omega_0 = 40$ Hz o critério dominante é frequência. No entanto, nesse caso, também foi necessário observar a distribuição de espessuras para se chegar a essa conclusão porque λ e ω/ω_0 são muito próximos quando $\beta_1 = -1$ e $\beta_2 = 0$. Quando $\omega_0 = 60$ Hz e $\beta_1 = -1$ e $\beta_2 = 0$, o procedimento de otimização resultou em $\omega/\omega_0 = 0.979$. Isso significa que a especificação de frequência não foi satisfeita para o carregamento considerado. Nesse caso, o loop externo de otimização de massa forneceria uma estrutura de maior massa, porém capaz de suportar o carregamento aplicado atendendo a especificação de frequência.

Os laminados ótimos para flambagem e frequência como critérios dominantes são representados nas Figuras 23 e 24 respectivamente, com um fator de escala 1:15 ao longo do eixo z.



Caso de carga 2, $\omega_0 = 20$ (Hz)	
$\lambda (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	1.688
$\omega' \omega_0 (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	2.262
$\lambda (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	1.744
$\omega' \omega_0 (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	3.464
t_1	0.520
t_2	0.463
t_3	0.041
t_4	0.028
t_5	0.022
t_6	0.041
t_7	0.042
t_8	0.042

Figura 23 – Laminado ótimo para flambagem como critério dominante.



Caso de carga 2, $\omega_0 = 60$ (Hz)	
$\lambda (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	1.331
$\omega' \omega_0 (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	0.979
$\lambda (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	1.652
$\omega' \omega_0 (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	1.310
t_1	1.044
t_2	0.013
t_3	0.040
t_4	0.003
t_5	0.002
t_6	0.057
t_7	0.020
t_8	0.021

Figura 24 – Laminado ótimo para frequência como critério dominante.

As Figuras 23 e 24 mostram que quando a flambagem é o critério dominante a massa do laminado ótimo é concentrada no centro da placa e as espessuras das laminas a 0° e 90° são aproximadamente iguais. Quando a frequência é o critério dominante a massa também é concentrada no centro a placa, mas em apenas uma lamina a 0° .

7.2.2 Minimax com loop externo de otimização de massa

A estratégia minimax com loop externo de otimização de massa foi feita para a magnitude de carregamento definida pelo caso 3 de carregamento na Tabela 14 e 20% de fator de segurança. A Tabela 17 apresenta os resultados para valores de normalização de frequência de $\omega_0 = 20, 40$ e 60 Hz.

Tabela 17 – Resultados da estratégia de otimização para $N_x = 4500$ e $N_{xy} = 1200$ (N/m).

	$\omega_0 = 20$ (Hz)	$\omega_0 = 40$ (Hz)	$\omega_0 = 60$ (Hz)
$\sum_{i=1}^8 t_i$	1.161	1.287	1.441
$\lambda (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	1.176	1.398	1.260
$\omega/\omega_0 (\beta_1=-1 \beta_2=0)$	1.378	1.131	1.082
$\lambda (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	1.213	1.438	1.630
$\omega/\omega_0 (\beta_1=0 \beta_2=-1)$	2.911	1.896	1.465

Analisando a tabela é possível concluir que quando $\omega_0 = 20$ Hz o critério dominante é flambagem. A distribuição de espessura necessária para satisfazer esse caso de carregamento, com essa especificação de frequência, corresponde a uma restrição de massa de

$\sum_{i=1}^8 t_i = 1.161$ mm. Quando $\omega_0 = 40$ e 60 Hz o critério dominante é a frequência e as massas correspondentes são $\sum_{i=1}^8 t_i = 1.287$ mm e $\sum_{i=1}^8 t_i = 1.441$ mm, respectivamente.

A estratégia minimax com loop externo de otimização de massa foi usada para otimizar a estrutura sujeita ao grupo 1 de magnitude de carregamento com $\omega_0 = 20$ Hz. O mesmo foi feito para a estrutura sujeita a magnitude de carregamento descrita pelo caso de carregamento 2 na Tabela 14 para $\omega_0 = 60$ Hz. Os resultados são apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 – Minimax com loop externo de otimização de massa.

N_x (N/m)	2000	3200
N_{xy} (N/m)	300	850
ω_0 (Hz)	20	60
$\sum_{i=1}^8 t_i$	0.780	1.259
λ ($\beta_1=-1$ $\beta_2=0$)	1.248	1.531
$\omega' \omega_0$ ($\beta_1=-1$ $\beta_2=0$)	1.176	1.018
λ ($\beta_1=0$ $\beta_2=-1$)	2.496	1.761
$\omega' \omega_0$ ($\beta_1=0$ $\beta_2=-1$)	2.624	1.332

Comparando as Tabelas 18 e 15, é possível concluir que para o caso de carregamento 1 e $\omega_0 = 20$ Hz, a estratégia minimax com loop externo de otimização de massa levou a uma redução de 35% no somatório das espessuras. No entanto, com esse novo somatório de espessuras, o critério dominante foi frequência.

Uma análise similar pode ser feita examinando Tabelas 18 e 16. Para o caso 2 de magnitude de carregamento e $\omega_0 = 60$ Hz, a estratégia minimax com loop externo de otimização de

massa levou a um somatório de espessuras 5% maior e a estrutura tornou-se capaz de suportar o carregamento aplicado e satisfazer as especificações de frequência.

As geometrias dos laminados ótimos para todos esses casos de aplicação da estratégia minimax com loop externo de otimização de massa são similares a aquelas apresentadas nas Figuras 23 e 24. Isso significa que quando a flambagem é o critério dominante a massa é concentrada no centro da placa, mas dividida em uma lamina a 0° e outra a 90° com espessura similar. Quando a frequência é o critério dominante a massa é concentrada no centro da placa em uma lamina a 0° .

7.3 Painel reforçado de material compósito laminado sob carregamento não uniforme

A estrutura escolhida para a otimização é uma placa retangular composta com dois reforçadores. O material tem suas propriedades definidas na Tabela 13 (T300/5208 carbono-epóxi). A placa tem dimensão de 0.4 m na direção y e 1.2 m na direção x . O laminado é *crossply* do tipo $[(0/90)]_s$. Os reforçadores são posicionados em $x = 0.4$ m e $x = 0.8$ m. O reforçador em $x = 0.4$ m tem como variáveis de projeto sua largura (w_1) e altura (h_1) e o reforçador em $x = 0.8$ m tem as mesmas variáveis de projeto de forma que a estrutura é simétrica antes e depois da otimização. Esses reforçadores dividem o painel em três regiões, como mostra a Figura 25. As espessuras das camadas em cada região são definidas por outras quatro variáveis de projeto. As espessuras t_1 e t_2 são para as camadas a 0° e 90° , respectivamente, das seções 1 e 3 (painel simétrico); t_3 e t_4 são para as mesmas camadas da seção 2. Conseqüentemente, há um total de seis variáveis de projeto. Como as magnitudes das variáveis de projeto referentes ao reforçador e das referentes ao painel podem ser significativamente diferentes, elas devem ser normalizadas durante o processo de otimização.

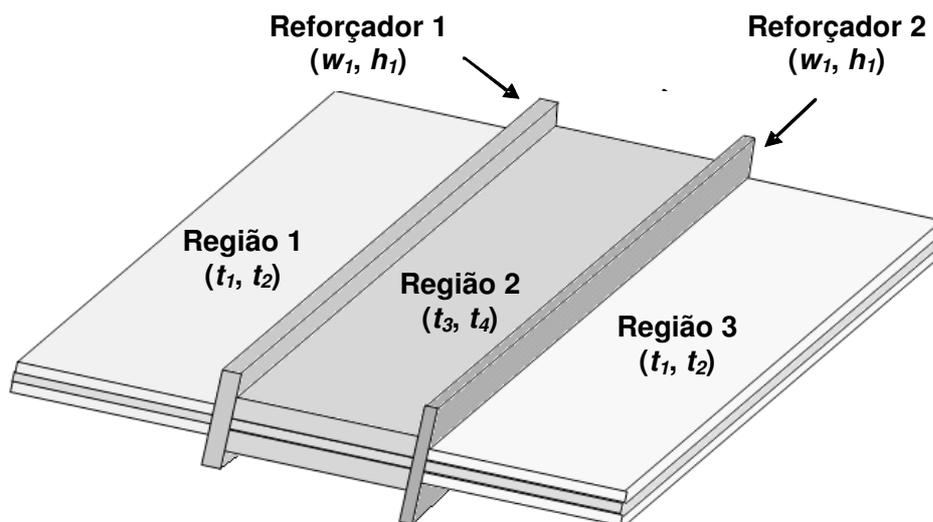


Figura 25 – Painel reforçado com as variáveis de projeto.

Tabela 19 – Casos de carregamento para painel reforçado.

Segmentos	Caso 1 compressão	Caso 2 compressão	Caso 3 cisalhamento		Caso 4 compressão	Caso 5 cisalhamento	
<i>A</i>	×		×				
<i>B</i>	×		×				
<i>C</i>	×		×				
<i>D</i>							
<i>E</i>					×	×	
<i>F</i>					×		
<i>G</i>					×		×
<i>H</i>		×		×			
Força Total (N)	3600	500	-1200	1200	2800	-880	720

O envelope de carregamento é composto de cinco casos de carregamento que são descritos na Tabela 19. Para a representação desses carregamentos utilizou-se vinte pontos de controle de carga, como mostra a Figura 26.

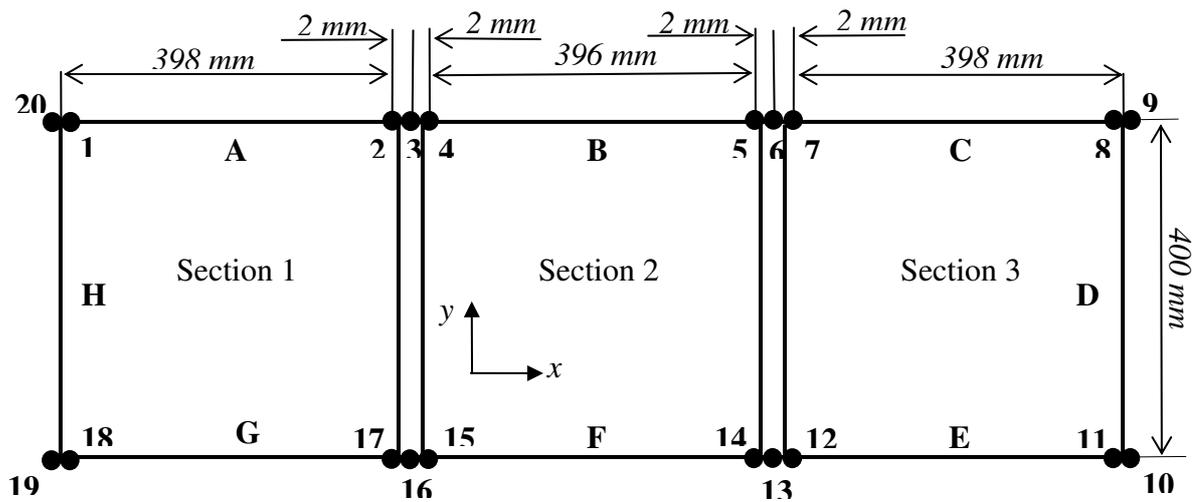


Figura 26 – Posição dos pontos de controle de carga.

O cálculo dos valores de flambagem e frequência foi feito com Abaqus 6.5-1. Foram utilizados 240 elementos de placa para o painel e 10 elementos de viga para cada reforçador. O reforçador também poderia ter sido modelado com elementos de placa, mas esse tipo de elemento poderia resultar em flambagem local. Isso poderia reduzir a carga de flambagem da estrutura de uma forma não realística. O uso de elementos de placa para a modelagem de reforçadores é mais apropriado para análises de pós-flambagem.

Essa subseção apresenta cinco exemplos de otimização do painel reforçado onde a influência da variação do parâmetro P_{ij} na representação do carregamento e o desempenho da estratégia de otimização são investigados.

7.3.1 Painel reforçado considerando $P_{ij} = 0$

Quando P_{ij} é zero a distribuição de carregamento correspondente é quase uniformemente distribuída como mostra o gráfico de Força \times Posição, Figura 27. A Tabela 20 apresenta os resultados da otimização do painel reforçado sob os casos de carregamento descritos na Tabela 19.

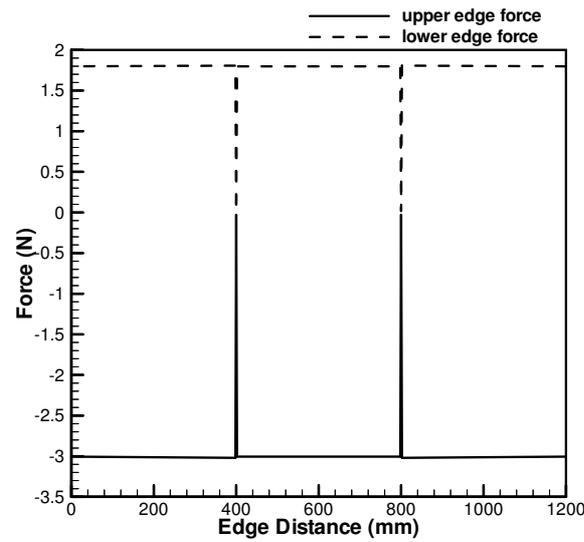


Figura 27 - Carregamento autoequilibrado para caso de carga 1, $P_{ij} = 0$.

O processo de otimização usou três grupos diferentes de variáveis de projeto iniciais visando identificar possíveis máximos locais. Isso significa que a otimização é feita para três estruturas iniciais diferentes. As estruturas iniciais 1, 2 e 3 são superdimensionadas para os casos de carregamento considerados. Elas suportam carregamentos aproximadamente cinco vezes maiores que os aplicados.

A carga de flambagem é definida por λ e a frequência normalizada por ω/ω_0 . O valor de normalização de frequência adotado foi $\omega_0 = 20$ Hz. O critério de parada usado para a otimização foi 2%, ou seja, a otimização é interrompida quando a função objetivo normalizada está no intervalo [1.00 – 1.02.]. Esse valor foi adotado para todos os exemplos de otimização dessa subseção.

Tabela 20 - Resultados da otimização $P_{ij} = 0$.

	Estrutura inicial 1		Estrutura inicial 2		Estrutura inicial 3	
	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)
t_1	0.6	0.05	0.7	0.08	0.5	0.06
t_2	0.8	0.7	0.7	0.6	0.9	0.7
t_3	0.6	0.4	0.7	0.2	0.9	0.09
t_4	0.8	0.4	0.7	0.6	0.5	0.6
w_1	4.00	4.00	3.00	1.00	2.00	1.52
h_1	60.00	12.01	80.00	17.61	70.00	11.09
Massa (kg)	2.396	1.208	2.396	1.101	2.271	1.117
λ_1	5.82	1.02	5.23	1.00	5.01	1.01
ω_1/ω_0	3.51	1.49	3.42	1.18	3.24	1.18
λ_2	20.96	3.01	20.79	2.47	20.26	2.51
ω_2/ω_0	3.53	2.37	3.44	2.08	3.27	2.08
λ_3	13.39	2.51	12.42	1.99	13.17	2.08
ω_3/ω_0	3.54	2.51	3.45	2.24	3.28	2.23
λ_4	7.48	1.31	6.73	1.29	6.43	1.30
ω_4/ω_0	3.51	1.89	3.42	1.58	3.25	1.57
λ_5	11.91	1.78	11.39	1.78	10.43	1.47
ω_5/ω_0	3.52	2.14	3.43	1.96	3.26	1.79

Analisando a Tabela 20 é possível concluir que o caso de carregamento 1 foi o crítico, levando aos menores valores de flambagem e frequência antes e depois do processo de otimização. No início do processo de otimização a frequência era o critério dominante e ao final do processo o critério dominante foi flambagem. Usando o loop externo de otimização de massa as três estruturas iniciais convergiram para variáveis de projeto que satisfazem aos requisitos do projeto e margens de segurança adotadas. A estrutura inicial 2 convergiu para o menor valor de massa e pode ser considerada o ótimo global. Nessa estrutura a camada a 0° quase desaparece nas regiões um e três e é mais fina que a camada a 90° na região 2.

7.3.2 Painel reforçado considerando $P_{ij} = 1$

Quando $P_{ij} = 1$ a distribuição resultante de carregamento para o caso de carga j é muito concentrada próxima ao ponto de controle i . Como o caso crítico de carregamento na subseção anterior foi o caso 1, essa subseção apresenta o caso de carga 1 considerando $P_{ij} = 1$ em três pontos de controle de carga diferentes posicionados na extremidade superior do painel. Dessa forma a otimização usa sete casos de carga, os três já mencionados e os casos de carga 2 a 5 considerando $P_{ij} = 0$.

O gráfico Força × Posição na Figura 28 mostra a distribuição de carregamento obtida quando se considera $P_{ij} = 1$ no ponto de controle de carga 3 que é posicionado em $x = 0.4$ m na extremidade superior. Observa-se que o carregamento tem grande concentração próximo ao ponto de controle de carga 3. Esse tipo de carregamento não é realístico em termos de projeto estrutural aeronáutico e, conseqüentemente, o projeto será muito conservativo.

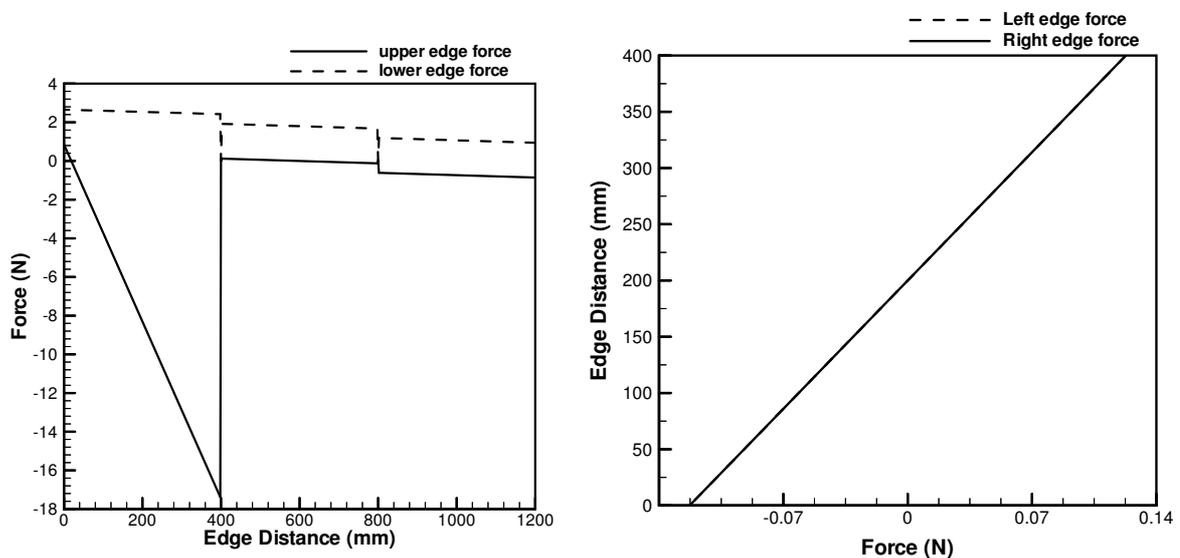


Figura 28 – Carregamento autoequilibrado para caso de carregamento 1 e ponto de controle de carga 3, $P_{31} = 1$.

A Tabela 21 mostra os resultados da otimização. Nela é possível observar que para as estruturas iniciais 1, 2 e 3 o caso crítico de carregamento foi o caso 1 (o mínimo de λ_i ou ω_i/ω_0 para as estruturas iniciais são sempre para $i = 1, 2$, ou 3 que corresponde ao caso de

carga 1). Após a otimização o caso crítico de carga continua sendo o 1. Flambagem é o critério dominante para as três estruturas, antes e depois do processo de otimização. A estrutura ótima global é a de número 3, pois apresenta menor massa. Nessa estrutura as camadas a 0° são mais finas que as camadas a 90° nas três seções.

Tabela 21 - Resultados da otimização $P_{ij} = 1$.

	Estrutura Inicial 1		Estrutura Inicial 2		Estrutura Inicial 3	
	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)
t_1	0.6	0.3	0.7	0.1	0.5	0.3
t_2	0.8	0.7	0.7	0.9	0.9	0.6
t_3	0.6	0.9	0.7	0.1	0.9	0.5
t_4	0.8	0.4	0.7	0.9	0.5	0.6
w_1	4.00	2.53	3.00	1.59	2.00	1.97
h_1	60.00	13.10	80.00	14.56	70.00	17.04
Massa (kg)	2.396	1.680	2.396	1.532	2.271	1.490
λ_1	3.10	1.00	2.80	1.04	3.25	1.01
ω_1/ω_0	3.51	1.52	3.42	1.64	3.24	1.75
λ_2	2.72	1.10	2.47	1.02	2.07	1.02
ω_2/ω_0	3.51	1.75	3.42	1.71	3.24	1.97
λ_3	3.24	1.22	2.91	1.19	3.48	1.16
ω_3/ω_0	3.51	2.00	3.42	1.92	3.24	2.07
λ_4	20.96	8.02	20.79	6.34	20.26	7.25
ω_4/ω_0	3.53	2.79	3.44	3.05	3.27	3.17
λ_5	13.39	5.05	12.42	5.13	13.17	4.70
ω_5/ω_0	3.54	2.80	3.45	3.15	3.28	3.26
λ_6	7.48	2.95	6.73	3.08	6.43	2.85
ω_6/ω_0	3.51	2.43	3.42	2.82	3.25	2.95
λ_7	11.91	6.03	11.39	3.74	10.43	4.65
ω_7/ω_0	3.52	2.76	3.43	2.97	3.26	3.14

7.3.3 Pannel reforçado considerando $P_{ij} = 0.25$

Nessa subseção a otimização considera 32 casos de carregamento autoequilibrados que são obtidos quando se considera $P_{ij} = 0.25$ para casos de carregamento 1 a 5 nos respectivos pontos de controle de carga. O caso de carregamento 1 é compressão na extremidade superior com oito pontos de controle de carga. Fazendo $P_{ij} = 0.25$ em cada um, tem-se oito casos de carregamento autoequilibrado. O caso de carregamento 2 é compressão na extremidade direita com dois pontos de controle de carga fornecendo dois outros casos de carregamento autoequilibrado. O caso de carregamento 3 é definido em duas extremidades que tem um total de dez pontos de controle de carga levando a outros dez casos de carregamento autoequilibrado. O caso de carregamento 4 é aplicado em uma extremidade com oito pontos de controle de carga e corresponde a oito casos de carregamento autoequilibrados. Finalmente, o caso de carga 5 é definido em segmentos que envolvem quatro pontos de controle de carga, levando a outros quatro casos de carregamento autoequilibrados.

A Figura 29 mostra o gráfico de Força \times Posição quando P_{31} é igual a 0.25 para o caso de carga 1. Observa-se que a concentração de carregamento na extremidade superior da seção 1 é menor que a concentração que acontece quando se considera P_{ij} igual a 1. A representação é semelhante a um carregamento não uniforme e poderia representar cargas reais de projeto.

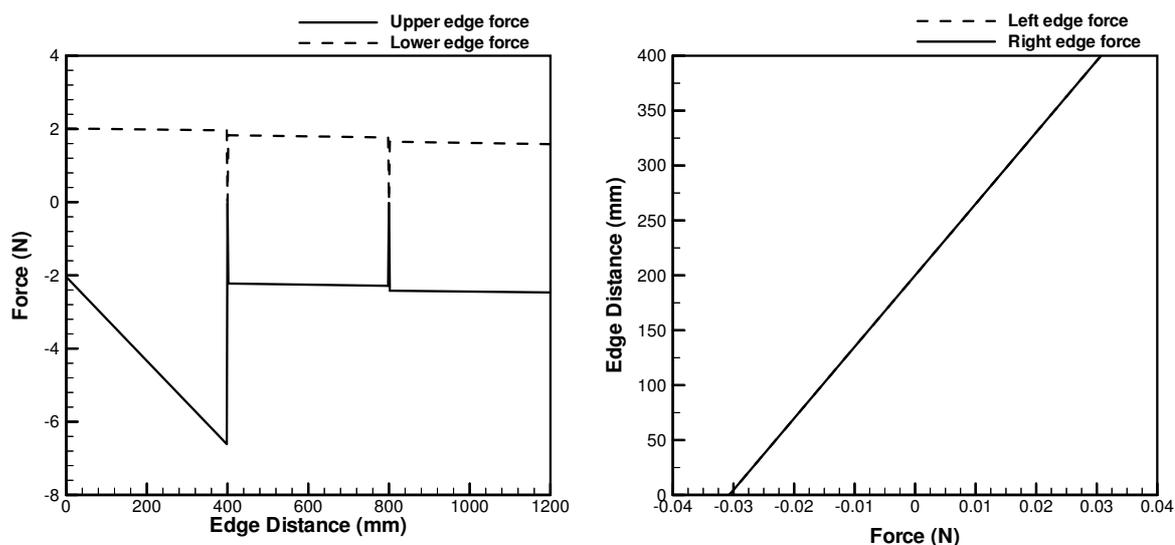


Figura 29 – Carregamento autoequilibrado para caso de carregamento 1 e ponto de controle de carga 3, $P_{3I} = 0.25$.

A Tabela 22 mostra os resultados da otimização. Analisando essa tabela é possível concluir que para as estruturas iniciais 1 e 2 os casos críticos de carregamento foram o 1 e o 4 (o mínimo de λ_i ou ω_i/ω_0 para essas estruturas iniciais são sempre para $i = 1$ a 8 que corresponde ao caso de carga 1 ou para $i = 21$ a 28 que corresponde ao caso de carga 4). Para a estrutura inicial 3 o caso de carga crítico foi o 1. Após a otimização o caso de carga crítico foi o 1 para as três estruturas otimizadas. No início do processo de otimização frequência era o critério dominante para as três estruturas e ao final do processo a flambagem se tornou o critério dominante. A estrutura ótima global é a 1 com menor massa entre as demais. Nessa estrutura as camadas a 0° são mais finas que as camadas a 90° para as três seções.

Tabela 22 Resultados da otimização $P_{ij} = 0.25$.

	Estrutura Inicial 1		Estrutura Inicial 2		Estrutura Inicial 3	
	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)
t_1	0.6	0.1	0.7	0.2	0.5	0.3
t_2	0.8	0.7	0.7	0.6	0.9	0.5
t_3	0.6	0.2	0.7	0.01	0.9	0.6
t_4	0.8	0.6	0.7	0.8	0.5	0.3
w_1	4.00	2.25	3.00	2.04	2.00	4.00
h_1	60.00	10.06	80.00	12.07	70.00	12.88
Massa (kg)	2.396	1.22	2.396	1.23	2.271	1.307
λ_1	5.38	1.11	4.86	1.20	5.44	1.06
ω_1/ω_0	3.51	1.44	3.42	1.63	3.24	1.65
λ_2	5.16	1.02	4.66	1.09	5.05	1.01
ω_2/ω_0	3.51	1.27	3.42	1.50	3.24	1.54
λ_3	6.30	1.17	5.66	1.42	5.36	1.33
ω_3/ω_0	3.51	1.46	3.42	1.90	3.24	2.06
λ_4	2.82	1.01	4.35	1.00	3.79	1.02
ω_4/ω_0	3.51	1.24	3.42	1.40	3.24	1.74
λ_5	4.82	1.01	4.35	1.00	3.79	1.02
ω_5/ω_0	3.51	1.24	3.42	1.40	3.24	1.74
λ_6	6.30	1.17	5.66	1.42	5.36	1.33
ω_6/ω_0	3.51	1.46	3.42	1.90	3.24	2.06
λ_7	5.16	1.02	4.66	1.09	5.05	1.01
ω_7/ω_0	3.51	1.27	3.42	1.50	3.24	1.54
λ_8	5.38	1.11	4.86	1.20	5.44	1.06
ω_8/ω_0	3.51	1.46	3.42	1.63	3.24	1.65
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_{21}	6.91	1.43	6.25	1.54	6.99	1.36
ω_{21}/ω_0	3.51	1.78	3.42	1.94	3.25	2.04
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_{28}	6.91	1.43	6.25	1.54	6.99	1.36
ω_{28}/ω_0	3.51	1.78	3.42	1.94	3.25	2.04
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
λ_{32}	11.80	2.35	11.28	1.37	10.33	2.74
ω_{32}/ω_0	3.52	2.27	3.43	2.15	3.26	2.54

7.3.4 Painel reforçado [(0/90/45/-45)_s] considerando $P_{ij} = 0.25$

Como os casos de carregamento definidos na Tabela 19 incluem dois casos de cisalhamento, otimizou-se também uma estrutura incluindo camadas orientadas a $\pm 45^\circ$. Essa otimização foi feita somente para $P_{ij} = 0.25$ porque esse é o parâmetro de laminação que fornece uma representação de carregamento mais realística entre os valores de P_{ij} testados.

Os resultados são apresentados na Tabela 23. A variável de projeto t_5 representa a espessura para todas as camadas orientadas a $\pm 45^\circ$. Com a inclusão das quatro camadas orientadas a $\pm 45^\circ$ as estruturas iniciais ficaram significativamente mais pesadas. No entanto, ao final do processo de otimização as estruturas ótimas apresentaram massa semelhante a das estruturas ótimas com laminado do tipo [(0/90)_s]. Isso indica que a otimização é eficiente em encontrar a massa mínima necessária para suportar o carregamento aplicado.

A inclusão de camadas a $\pm 45^\circ$ é certamente benéfica para casos de carga de cisalhamento. No entanto, para o exemplo particular apresentado aqui, devido a existência de carregamento compressivo, não se pode perceber tal benefício.

Para as estruturas iniciais 1 e 3 os casos de carga crítica foram o 1 e o 4 (o mínimo de λ_i ou ω_i/ω_0 para essas estruturas iniciais são sempre para $i = 1$ a 8 que corresponde ao caso de carga 1 ou para $i = 21$ a 28 que corresponde ao caso de carga 4). Para a estrutura inicial 2 os casos de carga críticos foram casos 1, 4 e 5 (o mínimo de λ_i ou ω_i/ω_0 para essa estrutura inicial é sempre para $i = 1$ a 8 que corresponde ao caso de carga 1 ou para $i = 21$ a 28 que corresponde ao caso de carga 4 ou $i = 29$ a 32 que corresponde ao caso de carga 5). Após a otimização, o caso crítico de carga é o caso 1 para as três estruturas otimizadas. No início do processo de otimização frequência foi o critério dominante para as três estruturas iniciais e, ao final do processo de otimização, a flambagem se tornou o critério dominante. A estrutura ótima global é a 2 com a menor massa. Exceto pela camada a 0° na seção 2, todas as camadas tem a mesma espessura na estrutura ótima.

Tabela 23 - Resultados de otimização [(0/90/45/-45)_s, $P_{ij} = 0.25$.

	Estrutura Inicial 1		Estrutura Inicial 2		Estrutura Inicial 3	
	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)	Inicial (mm)	Ótimo (mm)
t_1	0.6	0.01	0.7	0.2	0.5	0.2
t_2	0.8	0.01	0.7	0.2	0.9	0.01
t_3	0.6	0.01	0.7	0.1	0.9	0.01
t_4	0.8	0.01	0.7	0.2	0.5	0.2
t_5	0.5	0.4	0.5	0.2	0.5	0.3
w_1	4.00	4.00	3.00	4.00	2.00	4.00
h_1	60.00	11.22	80.00	11.80	70.00	11.36
Massa (kg)	3.89	1.283	3.89	1.203	3.77	1.268
λ_1	30.48	1.27	29.65	1.10	30.69	1.20
ω_1/ω_0	4.23	1.93	4.15	1.63	3.97	1.92
λ_2	29.22	1.21	28.27	1.05	29.07	1.14
ω_2/ω_0	4.23	1.90	4.15	1.56	3.97	1.87
λ_3	34.37	1.28	32.75	1.31	31.03	1.50
ω_3/ω_0	4.23	1.98	4.15	1.94	3.97	2.15
λ_4	26.67	1.00	25.64	1.00	23.25	1.26
ω_4/ω_0	4.23	1.64	4.15	1.53	3.97	2.07
λ_5	26.66	1.02	25.62	1.00	23.25	1.26
ω_5/ω_0	4.23	1.66	4.15	1.54	3.97	2.07
λ_6	34.31	1.18	32.69	1.28	31.19	1.24
ω_6/ω_0	4.23	1.85	4.15	1.90	3.97	1.97
λ_7	28.90	1.01	27.98	1.01	28.90	1.00
ω_7/ω_0	4.23	1.55	4.15	1.47	3.97	1.59
λ_8	30.04	1.06	29.22	1.06	30.36	1.06
ω_8/ω_0	4.23	1.64	4.15	1.55	3.97	1.68
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
λ_{21}	39.18	1.63	38.11	1.42	39.46	1.55
ω_{21}/ω_0	4.23	2.21	4.15	1.99	3.97	2.21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
λ_{28}	38.63	1.37	37.57	1.36	39.04	1.36
ω_{28}/ω_0	4.23	2.04	4.15	1.94	3.97	2.08
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
λ_{32}	53.27	1.90	51.91	2.00	49.08	2.18
ω_{32}/ω_0	4.24	2.50	4.15	2.31	3.98	2.64

7.3.5 Painei reforçado [(0/90)]_s considerando $P_{ij} = 0.25$, $\omega_0 = 60$ Hz

Analisando a Tabela 22 é possível observar que o resultado ótimo para a estrutura inicial 1 tem uma frequência normalizada mínima de 1.24. Conseqüentemente, se o requisito de frequência mínima for modificado para 60 Hz (ao invés de 20 Hz) o critério dominante seria a frequência e a massa deveria ser aumentada. Para confirmar essa observação fez-se uma otimização usando $\omega_0 = 60$ Hz, $P_{ij} = 0.25$ e a estrutura inicial 1. Os resultados são apresentados na Tabela 24.

Mais importante que confirmar o que se esperava, esses resultados mostram a importância da otimização multicritério. Nesse caso, se a otimização fosse feita sem considerar a frequência a estrutura não iria satisfazer os requisitos de frequência.

Tabela 24 - Resultados da otimização $[(0/90)]_s$, $P_{ij} = 0.25$, $\omega_0 = 60$ Hz.

	Estrutura Inicial 1	
	Inicial (mm)	Ótimo (mm)
t_1	0.6	0.4
t_2	0.8	0.6
t_3	0.6	0.8
t_4	0.8	0.3
w_1	4.00	4.00
h_1	60.00	14.92
Massa (kg)	2.396	1.622
λ_1	5.38	2.28
ω_1/ω_0	1.17	1.02
λ_2	5.16	2.13
ω_2/ω_0	1.17	1.01
λ_3	6.30	2.54
ω_3/ω_0	1.17	1.06
λ_4	4.82	1.79
ω_4/ω_0	1.17	1.01
λ_5	4.82	1.79
ω_5/ω_0	1.17	1.01
λ_6	6.30	2.54
ω_6/ω_0	1.17	1.06
λ_7	5.16	2.13
ω_7/ω_0	1.17	1.01
λ_8	5.38	2.28
ω_8/ω_0	1.17	1.02
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{21}	6.91	2.94
ω_{21}/ω_0	1.17	1.06
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{28}	6.91	2.94
ω_{28}/ω_0	1.17	1.06
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{32}	11.80	5.14
ω_{32}/ω_0	1.17	1.07

7.4 Placa plana de material compósito laminado com otimização de orientação angular

Os resultados apresentados nessa subseção foram publicados conforme a referência [57]. A estrutura escolhida para a otimização é a placa já representada na Figura 15 do capítulo 6. Essa estrutura foi usada para otimização de flambagem no trabalho de Lariú [58]. É um laminado *crossply* simétrico retangular $[(0/45/90)]_s$. A dimensão horizontal é $a = 0.3$ m e a dimensão vertical é $b = 0.24$ m. As espessuras das lâminas são constantes e iguais a 2.54 mm. As propriedades do material são dadas na Tabela 25.

Tabela 25 – Propriedades do material.

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade longitudinal, E_1 (GPa)	207
Módulo de elasticidade transversal, E_2 (GPa)	20.7
Módulo de cisalhamento, G_{12} (GPa)	6.9
Coefficiente de Poisson, ν_{12}	0.3
Densidade, ρ (kg/m ³)	1580

Nessa subseção a flambagem e frequência são calculadas por fórmulas analíticas desenvolvidas por Jones [53] e apresentadas nas Eqs. (7.4-1) e (7.4-2). A Eq. (7.4-3) foi desenvolvida com base nas anteriores para o cálculo da frequência levando em consideração o carregamento aplicado.

$$\lambda = \pi^2 \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \right] \quad (7.4-1)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (7.4-2)$$

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] - \frac{\lambda}{\rho h} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (7.4-3)$$

onde λ é carga de flambagem e ω é a frequência natural; a e b são respectivamente as dimensões horizontal e vertical da placa; m e n são o número de comprimento de meia onda nas direções x e y , respectivamente. O menor valor de λ ocorre quando $n = 1$ e para placas com pequena relação a/b (< 2.5) a flambagem acontece em uma única meia onda na direção x . Dessa forma considera-se $m = n = 1$. D_{11} , D_{22} , D_{12} , D_{66} são termos de rigidez a flexão do laminado.

Essas equações são válidas para laminados ortotrópicos simplesmente apoiados sob carregamento compressivo e foram usadas também nos trabalhos de Lariu [58] e Miki e Sugiyama [59], ambos realizando otimização de flambagem. O trabalho de Miki e Sugiyama [59] determina uma região viável em um plano bidimensional e encontra o ótimo através de relações geométricas entre a região viável e a função objetivo. Esse ótimo de Miki será sempre um laminado angle-ply. O trabalho de Lariu [58] usa a aproximação de Foldager et al. [2] que exclui a necessidade de se determinar uma região viável. Os resultados obtidos nessa subseção podem ser comparados com os resultados de Lariu [58] visto que, exceto pela inclusão da frequência na otimização, as condições de projeto são as mesmas.

É importante ressaltar que tanto o trabalho de Lariu [58] quanto os resultados dessa subseção tem relevância em termos de validação do procedimento de projeto, visto que o ótimo é conhecido. Porém não tem aplicações práticas. Isso se deve ao fato de que as funções objetivo são calculadas por formulação adequada para laminado ortotrópico e os laminados iniciais e ótimos não são desse tipo.

Para aplicações reais de projeto pode-se usar as Eq.(7.4-1 a 7.4-3) desde que seja definida a região viável como em Miki e Sugiyama [59]. Para a utilização do procedimento de Foldager

et al. [2] é necessário que o cálculo da flambagem e frequência seja mais completo, incluindo, por exemplo, o cisalhamento transversal. Isso pode ser obtido por elementos finitos.

O processo de otimização considera três magnitudes diferentes de carregamento compressivo e três valores de requisitos de frequência mínima. Os requisitos de frequência são usados como valores de normalização (ω_0) para as frequências. A combinação das três magnitudes de carregamento com os três requisitos de frequência mínima resulta em nove processos de otimização. As magnitudes dos carregamentos e os requisitos de frequência mínima são dados na Tabela 26.

O número máximo de orientações angulares arbitrárias usadas para a minimização da função objetivo interna de Foldager foi 2000. Esse número corresponde ao critério de parada e pode-se dizer que 2000 representa um critério de parada rigoroso, porém possível devido ao baixo custo computacional do processo de otimização quando se usa as funções objetivos calculadas analiticamente.

Tabela 26 – Magnitude do carregamento e requisito de frequência mínimo.

N_x (kN/m)	1200	7200	14400
	50	50	50
ω_0 (Hz)	100	100	100
	150	150	150

Os resultados da otimização são dados nas Tabelas 27, 28 e 29.

Tabela 27 – Resultados da otimização para $N_x = 1200$ (kN/m).

	$\omega_0 = 50$ Hz		$\omega_0 = 100$ Hz		$\omega_0 = 150$ Hz	
	Inicial	Ótimo	Inicial	Ótimo	Inicial	Ótimo
	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$
θ_1	0	51.86	0	-51.16	0	51.96
θ_2	45	51.90	45	52.08	45	52.13
θ_3	90	51.87	90	52.65	90	52.03
λ/N_x	11.88	20.37	11.88	20.37	11.88	20.37
ω/ω_0	24.54	32.75	12.27	16.37	8.18	10.92

Observando a Tabela 27 é possível ver que quando $N_x = 1200$ kN/m e $\omega_0 = 50$ Hz o critério dominante é flambagem. Quando $\omega_0 = 100$ Hz o critério dominante é flambagem no início da otimização e frequência no final do processo de otimização. Quando $\omega_0 = 150$ Hz o critério dominante é frequência. Para os três casos o valor da flambagem e da frequência não normalizada no ponto ótimo é o mesmo. Porém a orientação angular ótima apresenta pequenas diferenças.

Tabela 28 – Resultados da otimização para $N_x = 7200$ (kN/m).

	$\omega_0 = 50$ Hz		$\omega_0 = 100$ Hz		$\omega_0 = 150$ Hz	
	Inicial	Ótimo	Inicial	Ótimo	Inicial	Ótimo
	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$
θ_1	0	51.86	0	51.86	0	51.86
θ_2	45	51.90	45	51.90	45	51.90
θ_3	90	51.87	90	51.87	90	51.87
λ/N_x	1.98	3.39	1.98	3.39	1.98	3.39
ω/ω_0	18.04	28.21	9.02	14.10	6.01	9.40

Analisando a Tabela 28 é possível ver que quando $N_x = 7200$ kN/m e $\omega_0 = 50, 100$ e 150 Hz o critério dominante é flambagem e a orientação angular ótima é exatamente a mesma. Nesses casos a flambagem é fortemente dominante no processo de otimização e a otimização da frequência torna-se apenas uma consequência do processo de otimização de flambagem. O valor da flambagem e da frequência não normalizada no ponto ótimo é o mesmo nos três casos; as orientações angulares também apresentam o mesmo valor.

Tabela 29 – Resultados da otimização para $N_x = 14400$ (kN/m).

	$\omega_0 = 50$ Hz		$\omega_0 = 100$ Hz		$\omega_0 = 150$ Hz	
	Inicial [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s	Ótimo [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s	Inicial [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s	Ótimo [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s	Inicial [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s	Ótimo [$\theta_1/\theta_2/\theta_3$] _s
θ_1	0	51.90	0	51.96	0	51.96
θ_2	45	51.90	45	51.93	45	51.92
θ_3	90	51.84	90	51.75	90	51.75
λ/N_x	0.99	1.70	0.99	1.70	0.99	1.70
ω/ω_0	0	21.53	0	10.76	0	7.18

Observando a Tabela 29 é possível perceber que o carregamento aplicado ($N_x = 14400$ kN/m) resulta em uma estrutura inicial flambada. No entanto, a estrutura ótima suporta carregamento 70% maior que o aplicado. O valor da flambagem e da frequência não normalizada no ponto ótimo é o mesmo nos três casos. A orientação angular apresenta pequenas diferenças.

7.5 Painel reforçado de material compósito laminado sob carregamento não uniforme com otimização de orientação angular

A estrutura otimizada nessa seção é a mesma da subseção 7.3. A diferença está nas variáveis de projeto. Aqui a espessura das camadas e dimensões dos reforçadores é considerada constante e as variáveis de projeto são as orientações angulares das camadas. Dessa forma utilizam-se espessuras das camadas $t = 0.15$ mm, altura do reforçador $h = 80$ mm e largura do reforçador $w = 4$ mm. A orientação das lâminas nas três regiões é a mesma. O material do laminado tem suas propriedades definidas na Tabela 25.

Utiliza-se a representação do carregamento não uniforme conforme descrita no capítulo 5 considerando os casos de carregamento descritos na Tabela 19 como na subseção 7.3. Considera-se $P_{ij} = 0.25$, pois esse foi o valor com aproximação de carregamento não uniforme mais realística conforme descrito na subseção 7.3.

A otimização de massa é feita através da redução do número de camadas do laminado de forma que a otimização é iniciada com um laminado quasi-isotrópico que tenha o número de camadas correspondente a um valor de função objetivo normalizada maior que 1 e menor que 2.

O cálculo dos valores de flambagem e frequência foi feito com Abaqus 6.5-1. O custo computacional do processo é alto visto que soma-se ao custo inerente do cálculo por elementos finitos o custo de 32 casos de carregamento para flambagem e frequência. Sendo assim, o critério de parada adotado foi 200 orientações angulares arbitrárias na minimização da função objetivo interna de Foldager. Esse valor foi usado baseado no fato que para o exemplo da subseção 7.4, se for adotado 200 como critério de parada ao invés 2000 como foi utilizado, o valor de flambagem e frequência ótimo é o mesmo, como mostra a Tabela 30.

Tabela 30 – Resultado comparativo para critério de parada.

Critério de parada	$\omega_0 = 50$ Hz		$\omega_0 = 50$ Hz	
	Inicial	Ótimo	Inicial	Ótimo
	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$	$[\theta_1/\theta_2/\theta_3]_s$
	2000		200	
θ_1	0	51.86	0	54.34
θ_2	45	51.90	45	52.60
θ_3	90	51.87	90	52.20
λN_x	11.88	20.37	11.88	20.37
ω/ω_0	24.54	32.75	24.54	32.75

Os dados da Tabela 30 mostram que o critério de parada de 200 pode ser usado sem que haja prejuízo na cálculo do valor ótimo da função objetivo.

As Tabelas 31 e 32 apresentam os resultados da otimização quando valor de normalização de frequência foi de $\omega_0 = 10$ e 50 Hz, respectivamente.

Tabela 31 – Otimização da orientação angular do laminado, $\omega_0 = 10$ Hz.

	Inicial	Ótimo
	$[\theta_5/\theta_4/\theta_3/\theta_4/\theta_1]_s$	$[\theta_5/\theta_4/\theta_3/\theta_4/\bar{\theta}_1]_s$
	$[-36/-72/72/36/0]_s$	$[47.62/-45.19/-41.26/-23.98/8.11]_s$
λ_1	1.56	1.47
ω_1/ω_0	5.32	5.41
λ_2	1.57	1.51
ω_2/ω_0	5.42	5.70
λ_3	1.96	1.80
ω_3/ω_0	5.89	6.00
λ_4	1.52	1.30
ω_4/ω_0	5.85	5.77
λ_5	1.52	1.31
ω_5/ω_0	5.88	5.76
λ_6	2.06	1.77
ω_6/ω_0	6.01	5.84
λ_7	1.75	1.40
ω_7/ω_0	5.69	5.38
λ_8	1.74	1.41
ω_8/ω_0	5.55	5.22
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{32}	2.76	2.16
ω_{32}/ω_0	6.60	6.36

Tabela 32 – Otimização da orientação angular do laminado, $\omega_0 = 50$ Hz.

	Inicial	Ótimo
	$[\theta_5/\theta_4/\theta_3/\theta_4/\theta_1]_s$	$[\theta_5/\theta_4/\theta_3/\theta_4/\bar{\theta}_1]_s$
	$[-36/-72/72/36/0]_s$	$[39.31/-30.13/-40.86/14.00/-51.34]_s$
λ_1	1.56	1.32
ω_1/ω_0	1.06	1.05
λ_2	1.57	1.36
ω_2/ω_0	1.08	1.12
λ_3	1.96	1.69
ω_3/ω_0	1.18	1.19
λ_4	1.52	1.22
ω_4/ω_0	1.17	1.14
λ_5	1.52	1.24
ω_5/ω_0	1.18	1.14
λ_6	2.06	1.66
ω_6/ω_0	1.20	1.18
λ_7	1.75	1.29
ω_7/ω_0	1.14	1.08
λ_8	1.74	1.30
ω_8/ω_0	1.11	1.05
\vdots	\vdots	\vdots
λ_{32}	2.76	2.21
ω_{32}/ω_0	1.32	1.22

Quando $\omega_0 = 10$ Hz o critério dominante é a flambagem antes e depois do processo de otimização. O caso crítico de carregamento é o caso 1. Quando $\omega_0 = 50$ Hz o critério dominante é a frequência e o caso crítico de carregamento é o caso 1. O laminados iniciais possuíam 10 camadas e o processo de otimização de massa possibilitou a redução de uma camada nos dois casos. O laminado ótimo da Tabela 31 suporta um carregamento 30% maior que o aplicado e atende ao requisito de frequência. O laminado ótimo da Tabela 32 atende ao requisito de frequência com 5% de margem de segurança.

8 CONCLUSÃO

Nesse trabalho a otimização multicritério de estruturas é explorada de sob vários aspectos. Varia-se o material de estrutura (isotrópico ou compósito), a geometria (pórtico, placa placa, painel reforçado), a modelagem do carregamento (incerto, não uniforme) e as variáveis de projeto (espessuras, dimensões de reforçadores, ângulos de orientação de camadas).

As simulações numéricas visam ilustrar a evolução e amadurecimento do trabalho sendo implementadas com complexidade crescente, indo de um pórtico isotrópico sob carregamento incerto até um painel reforçado compósito sob carregamento não uniforme.

Em todos os casos analisados o objetivo foi maximizar a flambagem e frequência natural simultaneamente. Para tanto se utilizou a estratégia minimax associada ao método de Powell. Em alguns casos, acrescentou-se ao algoritmo de otimização um loop externo de otimização de massa. Essa abordagem tornou possível ajustar a massa da estrutura de acordo com margens de segurança e especificações de projeto adotadas.

Os resultados mostraram que a estratégia de otimização adotada, além de fornecer estruturas ótimas, permite também identificar qual é o critério dominante no processo de otimização, em que região o ótimo se encontrará, qual a melhor distribuição de espessuras em um laminado, entre outras constatações. De forma geral, pode-se dizer que para todos os casos analisados a estratégia forneceu resultados satisfatórios.

A otimização multicritério confere um aspecto inovador ao trabalho, visto que esse é um assunto pouco explorado e sem nenhuma técnica definitivamente melhor em relação a outras. A modelagem do carregamento não uniforme e a utilização do Abaqus 6.5-1 para cálculo de flambagem e frequência natural das estruturas por elementos finitos conferem maior confiabilidade ao projeto. Além disso, a utilização de um pacote comercial para cálculo estrutural por elementos finitos confere maior portabilidade e flexibilidade ao trabalho, visto que podem-se otimizar estruturas variadas usando qualquer pacote comercial disponível.

Ainda com relação à portabilidade e flexibilidade pode-se afirmar que procedimento de projeto não depende dos métodos de otimização usados. Ou seja, é possível adequar o método de otimização ao problema e manter as principais características do procedimento de projeto.

No procedimento de otimização que usa orientação angular como variável de projeto as modificações implementadas na metodologia de Foldager et al. [2] contribuem significativamente no aspecto inovador e prático desse trabalho. A forma adotada de cálculo da sensibilidade amplia a aplicabilidade da metodologia visto que exclui a necessidade do uso de função analítica. Além disso, com as modificações implementadas torna-se possível incluir materiais diferentes em um mesmo laminado.

Resumindo, do ponto de vista de procedimento de projeto, conclui-se que o presente trabalho contribui com um procedimento inovador e de aplicação ampla. As inovações concentram-se nos seguintes aspectos:

- Otimização multicritério realizada por um procedimento que combina estratégia minimax e método de Powell;
- Técnica de otimização e cálculo estrutural independentes, porém iterativos;
- Inclusão de um *loop* externo de otimização de massa no processo de otimização;
- Adaptação da metodologia de Foldager et al. [2] para lidar com função objetivo não analítica, através da modificação na forma de calcular a sensibilidade. Modificação na definição dos parâmetros de laminação que possibilita trabalhar com laminados formados por mais de um material.

Essas inovações resultaram em um procedimento de projeto de ampla aplicação pois não restringe o método de otimização, a forma de cálculo estrutural, as variáveis de projeto, a massa da estrutura e o material utilizado.

9 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apesar de seu potencial para aplicações práticas, o presente trabalho trata apenas de simulações. Em trabalhos futuros poderia se usar envelopes de carregamento reais modelando-os através da metodologia descrita no capítulo 5. Além disso, poderia se otimizar uma estrutura mais complexa, visto que o Abaqus 6.5-1 confere essa flexibilidade ao trabalho. Como métodos alternativos de otimização pode-se testar os algoritmos genéticos, técnicas de Pareto e métodos que usam informação de gradiente.

Na representação do carregamento não uniforme pode-se explorar melhor a escolha do valor do parâmetro P_{ij} . Pode-se pensar inclusive em um forma de sistemática de definir o valor do parâmetro.

O presente trabalho se limitou à análise linear de flambagem, porém é possível trabalhar também com esse tipo de procedimento de projeto em análises de pós-flambagem desde que não tenha ocorrido falha. Na prática uma estrutura é capaz de suportar carregamentos significativamente maiores que a carga de flambagem. Além disso, a frequência da estrutura não se torna zero na carga de flambagem como acontece na análise linear. Porém, para se trabalhar com essas magnitudes de carregamento torna-se necessário uma análise não linear. Por exemplo, nos trabalhos de Arbelo [59] e Arbelo et al. [60] mostrou-se através de análises não lineares que uma estrutura mantém sua integridade estrutural no regime de pós-flambagem com carregamento significativamente maior que a carga de flambagem. Esse tipo de análise permite trabalhar com novas amplitudes de carregamento e lidar com interações entre flambagem e frequência menos descontínuas visto que, ao contrário da análise linear, na análise não linear o valor de frequência não é zero quando se atinge a carga de flambagem.

Utilizando o procedimento descrito no capítulo 6 podem-se desenvolver projetos aeronáuticos com laminados construídos com mais de um material e otimizados quanto à orientação angular. Além disso podem-se incluir restrições no processo de otimização para que o

laminado ótimo penalize *layups* de difícil fabricação ou que sejam mais suscetíveis a problemas como delaminação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARORA, J. S. Guide to structural optimization. **ASCE manuals and reports on engineering practice**, New York: The Society, n. 90, 1997.
2. FOLDAGER, J., HANSEN, J. S., OLHOFF, N. A general approach forcing convexity of ply angle optimization in composite laminates. **Structural Optimization**, n. 16, p. 201-211, 1998.
3. DEM'YANOV, V. F. e MALOZEMOV, V. N. **Introduction to minimax.** , New York: John Wiley & Sons, 1974.
4. VANDEPLAATS G. **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications.** New York: McGraw-Hill, 1984.
5. BRUHN, E. F. **Analysis and design of flight vehicle structures.** Cincinnati, OH: Tri-State Offset, 1973.
6. CONRADO, A. C., FARIA, A. R., ALMEIDA, S. F. M. Optimum design for buckling of arbitrary shaped ribs under uncertain loadings. **The Aeronautical Journal**, v. 109, n. 1102, p. 609-618, 2005.
7. GAMA, R. C. **Otimização da carga de flambagem de um painel reforçado submetido a carregamentos incertos.** 2009. Dissertação de mestrado - ITA, São José dos Campos.
8. HULL, D. **An introduction to composite material.** Cambridge University, 1995.
9. CHAO, C. C., KOH, S. L., SUN, C. T. Optimization of buckling and yield strenghts of laminated composites. **AIAA Journal**, v.13, n. 9, p. 1131-1132, 1975.
10. HIRANO, Y. Optimum design of laminated plates under axial compression. **AIAA Journal**, v.17, n. 9, p. 1017-1019, 1979.
11. HAFTKA, R. T., WALSH, J. L. Stacking-sequence optimization for buckling of laminated plates by integer programming. **AIAA Journal**, v. 30, n. 3, p. 814-819, 1992.
12. FARIA, A. R., ALMEIDA, S. F. M. Buckling optimization of plates with variable thickness subjected to nonuniform uncertain loads. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 15, p. 3955-3966, 2003.
13. FARIA, A. R., ALMEIDA, S, F. M. The maximization of fundamental frequency of structures under arbitrary initial stress states. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 65, p. 445-460, 2006.

14. HAMMER, V. B., BENDSOE, M. P., LIPTON, R., PEDERSEN, P. Parametrization in laminate design for optimal compliance. **International Journal of Solids and Structures**, n. 34, p. 415-434, 1997.
15. FARIA, A. R., Compliance minimization of structures under uncertain loadings. **Latin American Journal of Solids and Structures**, n. 1, p. 363-378, 2004.
16. PEDERSEN, N. L. e NIELSEN, A. K. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. **Struct. Multidisc. Optim.**, n. 25, p. 436-445, 2003.
17. TOPAL, U. Multiobjective optimization of laminated composite cylindrical shells for maximum frequency and buckling load. **Materials and Design**, n. 30, p. 2584-2594, 2009.
18. BERT, C. W. Optimal design of a composite material plate to maximize its fundamental frequency. **Journal of Sound and Vibration**, v. 50, n. 2, p. 229-237, 2009.
19. KANG, B., PARK, J., KIM, J. Analysis and optimal design of smart skin structures for buckling and free vibration. **Composite Structures**, n. 84, p. 177-185, 2008.
20. ABOUHAMZE, M., SHAKERI, M. Multi-objective stacking sequence optimization of laminated cylindrical panels using a genetic algorithm and neural networks. **Composite Structures**, n. 81, p. 253-263, 2007.
21. ELISHAKOFF, I. **Probabilistic methods in the theory of structures**. New York: Wiley-Interscience, 1983.
22. BEM-HAIM, Y., ELISHAKOFF, I. **Convex models of uncertainty in applied mechanics**. New York: Elsevier Science Publishers, 1990.
23. LI, Y. W., ELISHAKOFF, I., STARVES Jr. J. H., SHINOZUKA, M. Prediction of natural frequency and buckling variability due to uncertainty in material properties by convex modeling. **Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics**. Providence, RI, , Fields Institute Communications: American Mathematical Society, v. 9, p.139-154, 1996.
24. FARIA, A. R. Buckling optimization and antioptimization of composite plates: uncertain loading combinations. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, n. 53, p. 719-732, 2002.
25. DVORAK, G. J. Composite materials: Inelastic behavior, damage, fatigue and fracture. **International Journal of Solids and Structures**, n. 37, p. 155-170, 2000.

26. SCARPONI, C., PERILLO, A. M., CUTILLO, L., FOGGIO, C. Advanced TTT composite materials for aeronautical purposes: Compression after impact (CAI) behaviour. **Composites: Part B**, n. 38, p. 258–264, 2007.
27. TAN, H., HUANG, Y., LIU, C., RAVICHANDRAN, G., INGLIS, H. M., GEUBELLE, P. H. The uniaxial tension of particulate composite materials with nonlinear interface debonding. **International Journal of Solids and Structures**, n. 44, p. 1809–1822, 2007.
28. KADDOUR, A. S., HINTON, M. J. Failure criteria for polymer composites under 3D stress states: the second world-wide failure exercise. **Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17)**, Edinburgh, Scotland, 2009.
29. IJSSELMUIDEN, S., ABDALLA, M., GURDAL, Z. Thickness tailoring of variable stiffness panels for maximum buckling load. **Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17)**, Edinburgh, Scotland, 2009.
30. CAMPEN, J. V., KASSAPOGLOU, C., ABDALLA, M., GURDAL, Z. Blended designs for composite plates with two concentric lay-ups under compression. **Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17)**, Edinburgh, Scotland, 2009.
31. TSAI, S. W., PAGANO, N. J. Invariant properties of composite materials. **Composite Materials Workshop**, p. 233-23, 1968.
32. BISMARC_NASR, M. N. **Finite elements in applied mechanics**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1993.
33. MARTIN, H. C. , CAREY, G. F. **Introduction to finite element analysis**. McGraw-Hill Book Company, 1973.
34. ALMEIDA, S. F. M., HANSEN, J. S. Natural frequencies of composite plates with tailored thermal residual-stresses. **International Journal of Solids and Structures**, n. 36, p. 3517-3539, 1999.
35. FARIA, A. R. **Buckling optimization of composite plates and cylindrical shells: uncertain loadings combinations**. 2000. Doctoral Thesis, University of Toronto, Institute for Aerospace Studies.
36. DANIEL, I. M., ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. New York, NY: Oxford University Press, 1994.
37. REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. McGraw-Hill, 1993.

38. FERREIRA, A. P. C. S., DE FARIA, A. R. Simultaneous buckling and fundamental frequency optimization of frames under uncertain loadings. **Proceedings of the 12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference**, Victoria, British Columbia Canada, AIAA 2008-5866, 2008.
39. SCHMIT, L. A. structural design by systematic synthesis. **Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computation**, ASCE, New York, p. 105-122, 1960.
40. HAFTKA, R. T., GURDAL, Z. **Elements of structural optimization**. Kluwer Academic Publishers, 1992.
41. SCHMIT, L. A. Jr. **Structural synthesis 1959-1969: a decade of progress, in recent advances in matrix methods of structural analysis and design**, Huntsville: University of Alabama Press, p. 565-634, 1971.
42. PIERSON, B. L. A. survey of optimal structural design under dynamic constraints. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, n. 4, p. 491-499, 1972.
43. VENKAYA, V. B. Structural optimization: a review and some recommendations. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, n. 13, p. 203-228, 1978.
44. SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. Structural optimization: challenges and opportunities. **Int. J. Vehicle Design**, n. 7, p. 242-263, 1986.
45. VANDERPLAATS, G. N. Structural design optimization status and direction. **Journal of Aircraft**, n. 36, p. 10-20, 1999.
46. ARORA, J. S., WANG, Q. Review of formulations for structural and mechanical system optimization. **Struct. Multidisc. Optim.**, n. 30, p. 251-272, 2005.
47. POWELL, M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. **Computer J.**, v. 7, n. 4, p. 303-307, 1964.
48. LEVENBERG, K. A. Method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quart. Appl. Math.**, v. 2, p. 164-168, 1944.
49. MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-square estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 11, p. 431-441, 1963.
50. DANTZIG, G. B. **Programming in a linear structure**. Washington, D.C.: Comptroller, USAF, 1948.
51. MEGSON, T. H. G. **Aircraft structures for engineering students**. Arnold, 1999.
52. FOLDAGER, J. P. **Design of composite structures**. 1999. Doctoral Thesis, Aalborg University, Institute of Mechanical Engineering.

53. JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. Washington, D.C.: Hemisphere Publishing Co., 1975
54. FERREIRA, A. P. C. S., DE FARIA, A. R. Simultaneous buckling and fundamental frequency optimization of frames under uncertain loadings. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, v. 32, n. 1, p. 71-77, 2010.
55. GELFAND, I. M., FOMIN, S. V. **Calculus of variations**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall Inc., 1963.
56. FERREIRA, A. P. C. S., FARIA, A. R., ALMEIDA, S. F. M. Simultaneous buckling and fundamental frequency optimization of composite plates under uncertain loadings. **Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM-17)**, Edinburgh, Scotland, 2009.
57. FERREIRA, A. P. C. S., ALMEIDA, S. F. M. Aeronautical composite panel multicriteria optimization using compressive loads and lamination parameters. **Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, Campina Grande, Paraíba, 2010.
58. LARIÚ, G. A. **Otimização de placas de material compósitos com auxílio dos parâmetros de laminação**. 2008. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo.
59. MIKI, M., SUGIYAMA, Y. Optimum design of laminated composite plates using lamination parameters. **AIAA Journal**, v. 31, n. 5, p. 921-922, 1993.
60. ARBELO, M. A. **Comportamento estrutural de painéis laminados em materiais compósitos sujeitos a carga de cisalhamento no plano**. 2008. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo.
61. ARBELO, M. A., ALMEIDA, S. F. M., DONADON, M. V. A numerical model for post-buckling analysis of composite shear webs. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 17, n. 5, p. 313-319, 2010.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TD	2. DATA 22 de setembro de 2010	3. REGISTRO N° DCTA/ITA/TD-011/2010	4. N° DE PÁGINAS 133
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Projeto Aeronáutico Ótimo Simultâneo sob Carregamentos Incertos			
6. AUTOR(ES): Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Otimização Multicritério, Projeto Aeronáutico, Material Compósito, Flambagem, Frequência Natural.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Projeto estrutural; Otimização; Carregamentos incertos; Flambagem; Estruturas de aeronaves; Materiais compósitos; Modelos matemáticos; Engenharia de materiais; Engenharia estrutural			
10. APRESENTAÇÃO: X Nacional Internacional ITA, São José dos Campos. Curso de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Mecânica dos Sólidos e Estruturas. Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frascino Müller de Almeida. Defesa em 15/09/2010. Publicada em 2010.			
11. RESUMO: <p>Esse trabalho apresenta um procedimento de projeto para obtenção de estruturas típicas em aplicações aeronáuticas otimizadas satisfazendo simultaneamente dois critérios: carga de flambagem máxima e frequência fundamental máxima.</p> <p>As estruturas projetadas estão sujeitas a carregamentos incertos ou não uniformes. Para a representação do carregamento não uniforme utiliza-se uma metodologia de extração de carregamentos auto-equilibrados a partir dos carregamentos físicos que atuam na estrutura. O carregamento auto-equilibrado é definido usando alguns pontos de controle de carga localizados nos contornos da estrutura. O carregamento auto-equilibrado é descrito usando funções lineares por parte.</p> <p>A abordagem matemática do projeto envolve a solução de problemas de otimização “minimax” em dois níveis e simultâneos. Utiliza-se a estratégia minimax com o intuito de se obter o melhor projeto para a pior condição de carregamento. O processo de otimização envolve também o método de Powell e um loop externo de otimização de massa. O loop externo de otimização de massa torna possível ajustar a massa da estrutura de acordo com especificações de projeto e margens de segurança adotadas.</p> <p>As variáveis de projeto da otimização são propriedades geométricas de estruturas e/ou ângulos de orientação das camadas (em estruturas de material compósito). No entanto, em otimizações que utilizam ângulos de orientação das camadas, é necessário utilizar parâmetros de laminação com o intuito de manter a convexidade do problema. Uma nova definição dos parâmetros de laminação foi adotada para aumentar a aplicabilidade do procedimento.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO			

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)