

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador

Tiago José Arruda

Ribeirão Preto
2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE RIBEIRÃO PRETO
PROGRAMA DE FÍSICA APLICADA À MEDICINA E BIOLOGIA

Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador

Tiago José Arruda

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física Aplicada à Medicina e Biologia.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez

Ribeirão Preto, Agosto de 2010.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE DOCUMENTO, POR MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Arruda, T. J.

Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador / Tiago José Arruda; orientador Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez.

– Riberão Preto/SP, 2010.

160 f.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada à Medicina e Biologia) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Riberão Preto da Universidade de São Paulo.

espalhamento eletromagnético; teoria de Lorenz-Mie; esferas e cilindros magnéticos; densidade de energia eletromagnética; eficiência de absorção; velocidade de transporte de energia.

Banca Examinadora:

Dedicatória

Aos meus queridos pais e irmãs

Agradecimentos

Ao meu ex-orientador de Iniciação Científica e Mestrado, Prof. Dr. Alexandre Souto Martinez, pela preciosa orientação, pelas críticas e sugestões no desenvolvimento deste trabalho.

À minha ex-orientadora de Iniciação Científica, Profa. Dra. Katia Andreia Gonçalves de Azevedo, pela amizade e incentivo aos estudos.

Aos meus colegas de laboratório pelo apoio e companhia durante os cappuccinos.

Aos professores do Programa de Física Aplicada à Medicina e Biologia pela orientação nas disciplinas que cursei.

Ao coordenador da Pós-Graduação, Prof. Dr. Marcelo Mulato, pelos esclarecimentos e incentivo à pesquisa.

Ao Departamento de Física e Matemática pelo suporte ao trabalho.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

"When you possess light within, you see it externally."

Anaïs Nin

Resumo

ARRUDA, T. J.. **Espalhamento de ondas eletromagnéticas por esferas e cilindros magnéticos: confinamento e transporte de ondas no limite de pequenas partículas e independência da energia armazenada com relação à forma do centro espalhador**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2010.

O espalhamento eletromagnético por uma esfera com propriedades ópticas e raio arbitrários, conhecido como espalhamento de Lorenz-Mie, ou por um cilindro circular infinito, pode ser resolvido analiticamente e é comumente tratado dentro da abordagem de espalhadores dielétricos. Na região óptica, tanto meio circundante quanto partícula espalhadora possuem o mesmo valor de permeabilidade magnética. A ausência do magnetismo nessa região do espectro torna o índice de refração relativo entre os meios interno e externo ao espalhador homogêneo equivalente ao respectivo índice de impedância óptica. Em regiões espectrais de micro-ondas ou radio-frequências, entretanto, materiais ferromagnéticos podem exibir valores absolutos de permeabilidade magnética extremamente elevados, reduzindo então a impedância óptica em comparação ao valor correspondente de índice de refração relativo. Uma característica marcante vinculada ao magnetismo no centro espalhador é que pequenas partículas comparadas com o comprimento de onda (parâmetros de tamanho na região de Rayleigh) podem apresentar grandes seções de choque de extinção a despeito de suas pequenas seções de choque geométricas. Isso torna possível, fisicamente, a presença de picos de ressonância morfológica na energia eletromagnética interna ao centro espalhador mesmo na região de parâmetros de tamanho inferiores à unidade. Em especial, mostramos que essa energia eletromagnética possui, no regime de fraca absorção, uma relação funcional simples com o comprimento de onda incidente e a seção de choque de absorção da partícula espalhadora, independentemente do formato geométrico da mesma. No espalhamento por uma coleção de partículas magnéticas, a velocidade de transporte de energia pode ser estimada a partir da energia eletromagnética média que é armazenada no interior de um centro espalhador isolado. Dessa maneira, a validade da relação universal que encontramos entre o fator de aumento da energia eletromagnética interna ao centro espalhador e sua correspondente seção de choque de absorção (no regime de baixa absorção óptica) implica na possibilidade de estimarmos de maneira simples a velocidade de transporte de energia em um meio desordenado. Um resultado decorrente dessa aproximação é que mesmo na região de Rayleigh a velocidade de transporte de energia em um meio magnético desordenado é drasticamente reduzida, levando, por conseguinte, à redução do coeficiente de difusividade dos fótons no meio. O estudo analítico e numérico da energia eletromagnética armazenada por uma esfera e por um cilindro magnéticos irradiados por ondas planas homogêneas são os temas em foco nesta dissertação de Mestrado.

Palavras-chave: espalhamento eletromagnético; teoria de Lorenz-Mie; esferas e cilindros magnéticos; densidade de energia eletromagnética; eficiência de absorção; velocidade de transporte de energia.

Abstract

ARRUDA, T. J.. **Electromagnetic wave scattering by magnetic spheres and cylinders: waves confinement and transport in the small particle limit and independence of the stored energy with respect to the shape of the scatterer.** Dissertation (Master) – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2010.

Electromagnetic scattering by a sphere with arbitrary optical properties and radius, known as the Lorenz-Mie scattering, or by an infinite right circular cylinder can be solved analytically and is widely treated in the approach of dielectric scatterers. In the optical range, both embedding medium and scattering particle have the same magnetic permeability. The absence of magnetism in this spectral range leads to the equivalence between the relative refraction and impedance indices associated with the scatterers. However, in microwave or radio-frequency ranges, ferromagnetic materials can exhibit extremely huge values of magnetic permeability, which reduce the optical impedance in comparison to the corresponding value of relative refraction index. One striking feature associated with the magnetism in the scatterer is that particles smaller than the wavelength (Rayleigh size region) can present large extinction cross sections in despite of their small geometric cross sections. This becomes physically possible the presence of morphology-dependent resonances in the electromagnetic energy within the scatterer even in size parameters region smaller than unity. In particular, we show that this time-averaged electromagnetic energy has, in the weak absorption regime, a simple functional relation with the incident wavelength and the scatterer absorption cross section which does not depend on the shape of the scatterer. In the multiple scattering regime, the energy-transport velocity can be estimated from the time-averaged electromagnetic energy stored in a single scatterer. Thereby, the validity of the universal relation between the internal energy-enhancement factor and the absorption cross section respective to an arbitrary scattering center (in the weak absorption regime) implies that the energy-transport velocity in disordered media can be evaluated in a simple way. From this approximation, we obtain that even in the Rayleigh size region the energy-transport velocity in disordered magnetic media is dramatically reduced, which consequently leads to a reduction of the diffusion coefficient of the photons. The analytical and numerical studies of the time-averaged electromagnetic energy within magnetic isotropic spheres and cylinders irradiated by plane waves are our aim in this Master's degree dissertation.

Keywords: electromagnetic scattering; Lorenz-Mie theory; magnetic spheres and cylinders; electromagnetic energy density; absorption efficiency; energy-transport velocity.

Sumário

Dedicatória	p. vii
Agradecimentos	p. ix
Resumo	p. xiii
Abstract	p. xv
Lista de Figuras	p. v
1 Introdução	p. 1
2 Física do espalhamento eletromagnético	p. 5
2.1 Equação de Helmholtz escalar	p. 9
2.2 Condições de contorno dos campos eletromagnéticos	p. 10
3 Espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esfera magnética	p. 13
3.1 Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas	p. 15
3.2 Campos eletromagnéticos em termos de ondas parciais esféricas	p. 17
3.3 Coeficientes magnéticos de Lorenz-Mie	p. 18
3.4 Energia eletromagnética interna à esfera	p. 21
3.4.1 Média temporal da energia elétrica	p. 22
3.4.2 Média temporal da energia magnética	p. 24
3.4.3 Energia eletromagnética média no tempo	p. 24
3.4.4 Caso dielétrico	p. 25

3.5	Seção de choque de absorção e os coeficientes internos	p. 26
3.6	Resultados numéricos e discussão	p. 28
3.7	Conclusões	p. 35
4	Espalhamento de ondas eletromagnéticas por duas esferas magnéticas concêntricas	p. 37
4.1	Campos eletromagnéticos	p. 38
4.2	Coeficientes das expansões	p. 39
4.3	Energia eletromagnética interna às esferas	p. 42
4.3.1	Esfera interior	p. 42
4.3.2	Camada esférica concêntrica	p. 43
4.4	Resultados numéricos e discussão	p. 45
4.5	Conclusões	p. 51
5	Esfera magnética opticamente ativa	p. 53
5.1	Relações constitutivas e equação de Helmholtz vetorial	p. 53
5.2	Campos eletromagnéticos	p. 55
5.3	Coeficientes das expansões	p. 55
5.4	Energia eletromagnética interna à esfera	p. 58
5.5	Conclusões	p. 59
6	Espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro infinito magnético	p. 61
6.1	Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas cilíndricas	p. 62
6.2	Campos eletromagnéticos em termos de ondas parciais cilíndricas	p. 62
6.3	Coeficientes magnéticos das expansões	p. 65
6.4	Energia eletromagnética média no tempo	p. 69
6.4.1	Modo TM	p. 70
6.4.2	Modo TE	p. 72

6.5	Eficiência de absorção e os coeficientes internos	p. 74
6.6	Resultados numéricos e discussão	p. 75
6.6.1	Seção de choque de absorção e a energia interna	p. 77
6.6.2	Velocidade de transporte de energia em meios magnéticos desordenados bidimensionais	p. 80
6.7	Conclusões	p. 87
7	Espalhamento de ondas eletromagnéticas por dois cilindros magnéticos concêntricos	p. 89
7.1	Campos eletromagnéticos	p. 90
7.2	Coeficientes das expansões	p. 91
7.2.1	Incidência oblíqua	p. 93
7.2.2	Incidência normal	p. 97
7.3	Energia eletromagnética média no tempo	p. 99
7.3.1	Modo TM	p. 100
7.3.2	Modo TE	p. 103
7.3.3	Incidência normal	p. 105
7.4	Resultados numéricos e discussão	p. 107
7.5	Conclusões	p. 112
8	Meios dispersivos	p. 115
8.1	Permeabilidade magnética e permissividade elétrica negativas	p. 116
8.2	Energia interna em meios dispersivos	p. 117
8.3	Esferas concêntricas contendo um metamaterial	p. 119
8.4	Conclusões	p. 123
9	Conclusões e perspectivas	p. 125
	Apêndice A – Componentes dos campos eletromagnéticos	p. 129

A.1	Esfera homogênea	p. 129
A.2	Esferas concêntricas	p. 131
A.3	Esfera opticamente ativa	p. 132
A.4	Cilindro homogêneo	p. 133
A.5	Cilindros concêntricos	p. 137
Apêndice B – Aproximações para a esfera e cilindro homogêneos		p. 141
B.1	Esfera homogênea	p. 141
B.1.1	Limite de pequena esfera	p. 143
B.1.2	Limite de Rayleigh	p. 143
B.1.3	Limite ferromagnético para grandes esferas	p. 145
B.1.4	Limite ferromagnético para pequenas esferas	p. 145
B.2	Cilindro homogêneo	p. 146
B.2.1	Limite de cilindro fino	p. 147
B.2.2	Limites de Rayleigh e ferromagnético	p. 147
B.2.3	Polarização	p. 148
Apêndice C – Funções especiais e relações de recorrência		p. 149
C.1	Funções angulares	p. 149
C.2	Funções esféricas	p. 150
C.2.1	Esfera homogênea	p. 151
C.2.2	Esferas concêntricas	p. 152
C.2.3	Esfera opticamente ativa	p. 153
C.3	Funções cilíndricas	p. 154
C.3.1	Cilindro homogêneo	p. 154
C.3.2	Cilindros concêntricos	p. 155
Referências		p. 157

Lista de Figuras

- 2.1 O campo eletromagnético incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) dá origem ao campo ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) interno à partícula e ao campo espalhado ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) no meio circundante. Figura adaptada da Ref. [1]. p. 8
- 3.1 Sistema de coordenadas esféricas centrado em uma partícula esférica de raio a . Figura adaptada da Ref. [1]. p. 15
- 3.2 Integral $S = \int_0^a dr r^2 \text{Re}[j_{n-1}(mkr)j_{n+1}(m^*kr)]$ em função de a^3 para $n = 20$, $\epsilon_1/\epsilon = (1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i)$, $\mu_1/\mu = 10$ e $ka = 20; 50; 100; 1000$. A relação linear mostra que $S = a^3 F_n(ka, m, \tilde{m})$, onde F_n é uma função que desconhecemos. p. 29
- 3.3 Contribuições das componentes radial e angulares para a energia eletromagnética no interior de uma esfera magnética com constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 10$ e $\mu_1/\mu = 100$. As grandezas $W_r = (W_{Er} + W_{Hr})$ e $W_a = (W_{\text{tot}} - W_r)$ são calculadas no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 2$, $\delta(ka) = 10^{-4}$ p. 30
- 3.4 Energia eletromagnética no interior de uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A energia interna normalizada $W(a)/W_0$ é calculada no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$ p. 31
- 3.5 Energia eletromagnética no interior de uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 10^4$. A energia interna $W(a)/W_0$ é calculada no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$ p. 32
- 3.6 Eficiência de extinção para uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. Os valores de Q_{tot} são calculados no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$ p. 33

- 3.7 Comparação não realista entre a energia interna em esferas fracamente absorbitivas com permeabilidades magnéticas $\mu_1/\mu = 1$ (esfera não magnética) e $\mu_1/\mu = 100$ (esfera magnética), ambas com permissividade elétrica $\epsilon_1/\epsilon = (1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i)^2$. As grandezas são calculadas no intervalo $1 \leq ka \leq 50$, $\delta(ka) = 0,01$ p. 34
- 4.1 Esfera magnética (ϵ_1, μ_1) de raio a envolvida por uma camada magnética (ϵ_2, μ_2) de espessura uniforme $(b - a)$ p. 38
- 4.2 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de duas esferas concêntricas, sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1$; 10; 100; 1000 as constantes ópticas da esfera interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada esférica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $b - a$. A razão de espessura é $a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 46
- 4.3 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de duas esferas concêntricas, sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1$; 10; 100; 1000 as constantes ópticas da camada esférica de espessura $(b - a)$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da esfera interior não magnética ($\mu_1/\mu = 1$) de raio a . A razão de espessura é $a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 47
- 4.4 Energia eletromagnética $W_2(a, b)/W_0(a, b) = W_2/W_{02}$ armazenada em uma camada esférica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$), de espessura $(b - a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvendo uma esfera magnética de raio a e constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1$; 10; 100; 1000. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 48
- 4.5 Energia eletromagnética $W_1(0, a)/W_0(0, a) = W_1/W_{01}$ armazenada em uma esfera não magnética ($\mu_1/\mu = 1$) de raio a e índice de refração $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ envolvida por uma camada esférica de espessura $(b - a)$ e constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1$; 10; 100; 1000. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 49

- 4.6 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ no interior de duas esféricas concêntricas, sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 10$ as constantes ópticas da esfera interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada esférica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $(b - a)$. As razões de espessura são $S = 0$ (esfera homogênea de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 50
- 4.7 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ no interior de duas esféricas concêntricas, sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 10$ as constantes ópticas da camada esférica de espessura $b - a$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da esfera interior de raio a não magnética ($\mu_2/\mu = 1$). As razões de espessura são $S = 0$ (esfera homogênea de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 51
- 6.1 Cilindro infinito irradiado obliquamente por uma onda plana. Os versores \hat{e}_i e \hat{e}_s indicam, respectivamente, as direções de propagação da onda incidente e espalhada. Figura adaptada da Ref. [1]. p. 63
- 6.2 Orientação dos vetores de campo em relação ao cilindro infinito para os modos TM e TE. Figura adaptada da Ref. [2]. p. 64
- 6.3 Energia eletromagnética normalizada $W_{\text{tot}}^{(I)}/W_0$ dentro de cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 10; 100$) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = (1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i)$ sob incidência oblíqua ($\zeta = 60^\circ$). As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$. Apenas a polarização TM é mostrada. p. 76
- 6.4 Razão entre eficiência de absorção Q_{abs} multiplicada por m_r/m_i e o fator de aumento da energia eletromagnética $W = W_{\text{tot}}^{(II)}/W_0$ dentro de um cilindro não magnético com $m = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ sob incidência oblíqua ($\zeta = 60^\circ$). Apenas a polarização TE é mostrada. p. 78
- 6.5 Comparação entre a energia eletromagnética normalizada W_{tot}/W_0 dentro de um cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 100$) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$). As polarizações paralela e perpendicular são indicadas por (I) e (II), respectivamente. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$ p. 82

- 6.6 Comparação entre a velocidade de transporte de energia v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 100$) e não magnéticos ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e fração volumétrica $f = 0,36$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$). As polarizações paralela e perpendicular são indicadas por (I) e (II), respectivamente. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$ p. 83
- 6.7 Energia eletromagnética normalizada $W_{\text{tot}}^{\parallel}/W_0$ dentro de um cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 10; 100$) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$, polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $10^{-8} < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$ p. 84
- 6.8 Velocidade de transporte de energia normalizada v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 10; 100$) e não magnéticos ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e fração volumétrica $f = 0,36$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $10^{-8} < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$ p. 85
- 6.9 Velocidade de transporte de energia normalizada v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 1000$) sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $1 < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$ p. 86
- 7.1 Cilindro magnético (ϵ_1, μ_1) de raio a envolvido por uma camada magnética (ϵ_2, μ_2) de espessura uniforme ($b - a$). p. 90
- 7.2 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}}^{\parallel} = W_{1,2}/W_0$ armazenada no interior de dois cilindros concêntricos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da cilindro interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada cilíndrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura ($b - a$). A razão de espessura é $a/b = 0,4$ e a polarização paralela é considerada. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 108

- 7.3 Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}}^{\parallel} = W_{1,2}/W_0$ armazenada no interior de dois cilindros concêntricos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da camada cilíndrica de espessura $(b - a)$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo do cilindro interior não magnético ($\mu_2/\mu = 1$) de raio a . A razão de espessura é $a/b = 0,4$ e a polarização paralela é considerada. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 109
- 7.4 Energia eletromagnética $W_2^{\parallel}(a, b)/W_0(a, b) = W_2/W_{02}$ armazenada em uma camada cilíndrica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$), de espessura $(b - a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvendo um cilindro magnético de raio a e constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A incidência de radiação é normal ao eixo do cilindro e a polarização é paralela. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 110
- 7.5 Energia eletromagnética $W_1^{\parallel}(a, b)/W_0(a, b) = W_1/W_{01}$ armazenada em um cilindro não magnético ($\mu_2/\mu = 1$) de raio a e índice de refração $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvido por uma camada cilíndrica de espessura $(b - a)$ e constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A incidência de radiação é normal ao eixo do cilindro e a polarização é paralela. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 111
- 7.6 Velocidade de transporte de energia efetiva v_E/c_0 em um meio desordenado formado por cilindros concêntricos paralelos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$) e polarização perpendicular. As constantes ópticas do cilindro interior de raio a são $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 10$, enquanto a camada cilíndrica concêntrica é não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $(b - a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$. As razões de espessura são $S = 0$ (cilindro homogêneo de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$, e a fração volumétrica de espalhadores no meio é $f = 0,36$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$ p. 112

- 8.1 Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial no regime de frequência em que $\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ não absorbitiva tem constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,6$ e $\mu_2/\mu = 1$. As grandezas são calculadas no intervalo $2 \leq f \leq 7$ GHz, com $\delta(f) = 0,025$ GHz. O gráfico superior é o mesmo da Ref. [60]. p. 120
- 8.2 Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial no regime de frequência em que $\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ absorbitiva tem constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,6 + 0,2i$ e $\mu_2/\mu = 1$. As grandezas são calculadas no intervalo $2 \leq f \leq 7$ GHz, com $\delta(f) = 0,025$ GHz. O gráfico superior é o mesmo da Ref. [60]. p. 121
- 8.3 Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial para uma frequência incidente $f = 4,3$ GHz [$\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$] em função da razão de espessura $S = a/b$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ tem constantes ópticas $\mu_2/\mu = 1$ e $\epsilon_2/\epsilon = 1,6; (1,6 + 0,01i); (1,6 + 0,05i); (1,6 + 0,1i); (1,6 + 0,2i)$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < S < 1$ GHz, com $\delta(S) = 0,005$. . . p. 122

1 *Introdução*

A ausência ou presença de espalhamento eletromagnético em um meio material estão associadas às propriedades ópticas que esse meio apresenta. Macroscopicamente, caracterizamos as propriedades ópticas de um meio pelo seu índice de refração e, conquanto esse seja uniforme, a luz passará através dele sem ser defletida. Sempre que tivermos variações discretas no índice de refração – em virtude da presença de partículas imersas no meio ou porque há flutuações na densidade –, parte da radiação será espalhada em todas as direções. Genericamente falando, qualquer flutuação espacial ou temporal das propriedades ópticas de um dado meio causará o espalhamento de um feixe de luz incidente. A origem e o aparecimento dessa luz espalhada são, de fato, intimamente dependentes dos constituintes do meio de propagação e do comprimento de onda da radiação [1, 2]. Nosso interesse aqui se restringe, especialmente, a duas geometrias de centros espalhadores cujo espalhamento eletromagnético apresenta solução analítica exata: as geometrias esférica e cilíndrica.

Neste e no Capítulo a seguir, fornecemos uma introdução sobre a física básica subjacente ao fenômeno de espalhamento eletromagnético sem, no entanto, nos aprofundarmos em certos detalhes da teoria. Esses podem ser facilmente encontrados na literatura; em especial, nos livros clássicos de teoria eletromagnética de Bohren e Huffman [1], van de Hulst [2], Kerker [3], Stratton [4], Born e Wolf [5], Ishimaru [6], Jackson [7], Tsang *et al.* [8] e Mishchenko *et al.* [9]. Aqui nos limitamos aos pontos-chave do fenômeno de espalhamento em óptica clássica no sentido de fornecermos um embasamento físico aos Capítulos subsequentes.

O ponto de partida para o estudo analítico do espalhamento eletromagnético por uma esfera (também chamado de espalhamento de Lorenz-Mie [1, 2, 3, 4]) e por um cilindro infinito magnéticos são as equações macroscópicas de Maxwell. No regime óptico, este problema é normalmente tratado na abordagem de meios dielétricos ou não magnéticos, isto é, as permeabilidades magnéticas da partícula espalhadora e do meio circundante são as mesmas [1, 2, 4, 7]. Uma consequência importante dessa consideração é que o índice de refração relativo associado à partícula espalhadora é equivalente à sua impedância óptica relativa [10]. Essa equivalência, entretanto, não é válida para materiais ferromagnéticos fora do regime óptico, como por exem-

plô as *ferritas moles*, as quais exibem grandes valores de permeabilidade magnética no regime de micro-ondas e rádio-frequências [11, 12]. A presença do magnetismo traz à tona algumas propriedades interessantes atinentes a espalhadores magnéticos, tais como picos de ressonância morfológica (*morphology-dependent resonance* ou MDR [13]) na eficiência de extinção [14, 15] e supressão da velocidade de transporte de energia [16, 17], mesmo para parâmetros de tamanho na aproximação de pequena partícula (região de Rayleigh [2]).

Tanto o espalhamento eletromagnético por uma esfera quanto por um cilindro infinito são problemas bem conhecidos e bastante estudados em teoria de espalhamento eletromagnético [1, 2, 3, 4, 7, 9]. Há certos aspectos, no entanto, muito pouco explorados na literatura, e dentre os quais o espalhamento por partículas magnéticas se inclui. Como contribuição para a teoria eletromagnética, a “novidade” que apresentamos nesta dissertação de Mestrado, e que nos rendeu duas publicações no *Journal of the Optical Society of America A* [18, 19], consiste em abordarmos o problema do espalhamento de Lorenz-Mie via campos internos às partículas espalhadoras *magnéticas*. Para levarmos a efeito esses estudos, adotamos a configuração mais simples, a saber, espalhadores esféricos ou cilíndricos (*não dispersivos*), embebidos em uma matriz (*não absorbitiva*), interagindo com uma *onda eletromagnética plana* e homogênea com *dependência temporal harmônica*. Tanto o meio circundante quanto o centro espalhador são considerados *lineares, homogêneos* (ou compostos com uma camada externa) e *isotrópicos*.

Por simplicidade, a aplicação de um campo magnético externo, necessário para se reduzir as perdas magnéticas atreladas aos elevados valores absolutos de permeabilidade magnética (μ_r) e tunar a ressonância na região de radio-frequências ou de micro-ondas [12, 20, 21, 22, 23], não é aqui considerada. Dessa maneira, assumimos explicitamente a isotropia dos meios magnéticos envolvidos (μ_r escalar) [11] e calculamos algumas grandezas de espalhamento no limite de baixa absorção magnética [$\text{Im}(\mu_r) \ll \text{Re}(\mu_r)$] para campos incidentes com frequências nas regiões espectrais mencionadas.

Para a realização dos cálculos analíticos, seguimos de perto as considerações feitas no trabalho seminal de Kerker *et al.* [10] sobre esferas magnéticas e os cálculos de intensidade dos campos internos e energia eletromagnética obtidos originalmente por Bott e Zdunkowski [24] no contexto de esferas dielétricas não dispersivas. A notação aqui empregada para os coeficientes de Lorenz-Mie, oriundos das expansões dos campos eletromagnéticos em harmônicos vetoriais esféricos (no caso da esfera) ou cilíndricos (no caso do cilindro infinito), baseia-se nos livros clássicos de Bohren e Huffman [1], van de Hulst [2] e Stratton [4]. Desses livros, o mais utilizado para os cálculos, e cuja notação e sistema de unidades abarcam todo o trabalho aqui desenvolvido, é a Ref. [1]. Em especial, como as Refs. [2, 3] adotam o sistema Gaussiano

de unidades (CGS) e nós usamos aqui o Sistema Internacional (SI) [1], há algumas diferenças entre as expressões finais obtidas nesses dois sistemas, visto que os coeficientes das expansões dos campos (coeficientes de Lorenz-Mie) não são independentes do sistema de unidades adotado. No caso esférico, essa diferença é evidenciada pela presença de um fator multiplicativo (especificamente, o índice de refração relativo) nos coeficientes internos expressos nas unidades do SI, então ausente no sistema CGS. A principal diferença entre as notações das Refs. [1, 2] advém, entretanto, da escolha da dependência temporal harmônica dos campos eletromagnéticos complexos. Enquanto neste trabalho consideramos a dependência temporal como sendo $e^{-i\omega t}$ [1, 4, 5, 25], onde ω é a frequência angular da onda incidente e $i^2 = -1$, os autores das Refs. [2, 3, 26] optam por $e^{+i\omega t}$. Dependendo de uma ou outra escolha, impomos no campo espalhado o uso de uma função de Hankel diferente [1]. Das condições de contorno do sistema, essa mesma função de Hankel necessariamente entrará nas expressões dos coeficientes de Lorenz-Mie [1, 2, 3, 4]. De modo geral, os sinais das partes imaginárias de grandezas complexas calculadas nessas duas abordagens são diferentes.

No Capítulo a seguir, discutimos brevemente as principais considerações e limitações que permeiam este trabalho. As equações macroscópicas de Maxwell para ondas planas, no domínio da frequência, são apresentadas com os campos elétrico e magnético já desacoplados. Esse é o ponto de partida para o estudo analítico realizado nos Capítulos subsequentes, o qual consiste em expandir os campos eletromagnéticos na simetria do problema. No Capítulo 3, estudamos em detalhes o problema do espalhamento eletromagnético por uma esfera magnética. Revisamos o cálculo dos campos eletromagnéticos em todos os pontos do espaço nas Seções 3.1–3.3, explicitando os coeficientes das expansões dos campos em termos de harmônicos esféricos vetoriais [1]. Na Seção 3.4, usamos o campo eletromagnético interno no cálculo da média temporal da energia eletromagnética que é armazenada no interior de uma esfera magnética, resultado que publicamos na Ref. [18]. Uma relação conhecida entre a energia interna e a eficiência de absorção óptica no regime de baixa absorção [24] é por nós reobtida [18], mostrando que a mesma independe do magnetismo. Nos Capítulos 4 e 5, estendemos o estudo da energia interna para duas esferas concêntricas magnéticas e para uma esfera magnética opticamente ativa. Esses Capítulos podem ser encarados como complementos do Capítulo 3 e generalizam as expressões nele obtidas. No Capítulo 6, realizamos esses mesmos estudos para o caso de um cilindro infinito magnético irradiado obliquamente por uma onda plana. Na aproximação de incidência normal, estimamos em função do parâmetro de tamanho o comportamento da velocidade de transporte de energia em um meio magnético desordenado bidimensional, Seção 6.6. Mostramos que mesmo em regiões cujo comprimento de onda é maior que o raio do cilindro há presença de ressonâncias morfológicas na energia interna, o que acarreta diminuição da ve-

locidade de transporte e, por conseguinte, do coeficiente de difusão dos fótons. Em especial, mostramos na Seção 6.6.1 que, à semelhança do espalhamento de Lorenz-Mie, a eficiência de absorção óptica associada a um cilindro magnético, considerado como sendo fracamente absorbitivo, está relacionada ao seu fator de aumento da energia interna [19]. De fato, as expressões para a seção de choque de absorção obtidas para as geometrias esférica e cilíndrica sugerem uma relação mais geral, que independe da forma do centro espalhador. Esse é um dos resultados mais importantes deste trabalho e o publicamos na Ref. [19]. A validade dessa relação universal implica na possibilidade de estimarmos de maneira simples a velocidade de transporte de energia no regime de baixa absorção óptica, fornecido apenas o volume e a seção de choque de absorção das partículas embebidas no meio e a respectiva fração de empacotamento do meio desordenado. Nesse contexto, mostramos que essa relação está de acordo com a teoria de Rayleigh-Gans, Seção 6.6.1. No Capítulo 7, generalizamos nossos resultados do cilindro homogêneo para o caso de dois cilindros concêntricos magnéticos sob incidência oblíqua de radiação. A solução completa desse problema de espalhamento é dada nas Seções 7.1 e 7.2, e a energia eletromagnética efetiva que é armazenada no centro espalhador é pela primeira vez calculada, Seção 7.9. No Capítulo 8, discutimos algumas limitações presentes em nossos cálculos e como podemos generalizá-los para meios dispersivos com fraca absorção. Um exemplo para o caso em que os meios materiais são descritos por relações de dispersão do tipo Lorentz na presença de dissipação é fornecido na Seção 8.2. Finalmente, no Capítulo 9 apresentamos as conclusões gerais e perspectivas para o trabalho que desenvolvemos nesta dissertação. As componentes dos campos eletromagnéticos nos sistemas de coordenadas esféricas e cilíndricas, os casos limites dos coeficientes de Lorenz-Mie e do cilindro homogêneo, e as principais relações entre as funções especiais usadas neste trabalho são fornecidos, respectivamente, nos Apêndices A–C.

2 *Física do espalhamento eletromagnético*

O espalhamento eletromagnético devido a imperfeições do meio material (entendidas aqui como variações bruscas da função dielétrica) está vinculado ao grau de heterogeneidade (desordem ou irregularidade) que esse sistema apresenta do ponto de vista da onda (periodicidade espacial e/ou temporal) [1, 2, 3]. Para os sistemas aqui tratados, o grau de heterogeneidade é dado pela densidade de partículas distribuídas aleatoriamente em uma matriz homogênea, que é comumente assumida como sendo o vácuo clássico. Essa heterogeneidade, dependendo do comprimento de onda, pode manifestar-se em diversas escalas, desde a atômica até a macroscópica. Embora haja distinções com respeito à heterogeneidade, a física subjacente ao espalhamento é a mesma para todos os sistemas [1].

A matéria é essencialmente composta por partículas elementares (cargas elétricas discretas), a saber, elétrons e prótons. Se um obstáculo, que poderia ser um elétron, um átomo, uma molécula, ou uma partícula sólida ou líquida, é irradiado por uma onda eletromagnética, as cargas elétricas presentes nesse obstáculo são levadas a realizar um movimento de oscilação devido ao campo elétrico da onda incidente. Essas cargas elétricas aceleradas irradiam energia eletromagnética em todas as direções, e é precisamente essa radiação secundária que denominamos espalhamento da radiação pelo obstáculo.

Em adição à essa radiação secundária de energia eletromagnética, as cargas elementares excitadas podem transformar parte dessa energia incidente em outras formas de energia (energia térmica, por exemplo), em um processo chamado de absorção. Espalhamento e absorção não são processos mutuamente independentes e, embora, por brevidade, se fale apenas em espalhamento, em geral a absorção também está presente. De fato, nas grandezas constitutivas complexas que descrevem a interação da onda com o meio material, as partes imaginárias dessas grandezas estão associadas a um acréscimo de fase nos campos eletromagnéticos ou, termodinamicamente falando, a um aumento de entropia do sistema [25]. A absorção é, portanto, função das partes imaginárias das grandezas constitutivas (dissipação ou adição de fase nos campos de-

vido à interação), as quais estão vinculadas às partes reais (grandezas de propagação do campo) via relações de Krammers-Kronig [1, 25].

A remoção de energia do feixe de luz incidente em razão da interação com o espalhador é comumente chamada de extinção (teorema de Ewald-Oseen) [1]. Da conservação da energia, a extinção é definida como sendo a soma das contribuições dos fenômenos de espalhamento e absorção, aos quais concerne à atenuação do feixe.

O espalhamento de uma onda eletromagnética depende fundamentalmente do total de campo ao qual o centro espalhador é exposto. Uma considerável simplificação surge da assunção de que o espalhamento é isolado, isto é, o número de partículas é suficientemente pequeno e sua separação é grande o bastante na vizinhança de outras partículas, de modo que o campo espalhado por todas as outras é pequeno se comparado ao campo externo. Todas as partículas do obstáculo, portanto, interagem apenas com o campo incidente. Além disso, assumimos que as separações entre as partículas são aleatórias, o que implica em espalhamento incoerente [2]. Em outras palavras, não há uma relação sistemática entre as fases das ondas espalhadas por partículas individuais. A consequência imediata disso é que a intensidade de radiação espalhada pela coleção de partículas é apenas a soma da radiação espalhada pelas partículas individuais (espalhamento independente). A única ressalva a ser feita é que em uma coleção de partículas aleatoriamente separadas o espalhamento é coerente para ângulos de espalhamento virtualmente nulos (espalhamento para frente) [2].

A fim de estimarmos algumas grandezas atinentes ao espalhamento múltiplo por partículas (como velocidade de transporte de energia eletromagnética, por exemplo), estudamos em detalhes a teoria de Lorenz-Mie [1, 2, 3, 4]. O problema básico a ser resolvido diz respeito à interação entre um feixe de radiação com comprimento de onda arbitrário e uma partícula esférica ou cilíndrica isolada (isto é, um agregado de muitos átomos ou moléculas bem definido) que está embebida em um meio homogêneo cuja composição difere da partícula. Por homogeneidade entendemos que a heterogeneidade atômica ou molecular é pequena se comparada ao comprimento de onda da radiação incidente. Aqui também ignoramos o espalhamento por flutuações, que é usualmente muito menor que o espalhamento por partículas [1, 2]. Todos os pontos do material e a radiação eletromagnética são descritos em termos macroscópicos, não havendo a necessidade de considerarmos explicitamente a interação dos fótons com excitações quânticas elementares [1, 3].

Para a abordagem do problema de espalhamento isolado, quer seja por uma esfera ou por um cilindro infinito, há alguns ingredientes que conferem simplicidade à resolução analítica e, em boa aproximação, reproduzem situações particulares do que de fato acontece [1, 2, 3, 27].

Basicamente, essas considerações podem ser divididas em dois grupos: o primeiro levando em conta o meio de propagação e o segundo, a radiação eletromagnética.

Quanto aos meios materiais:

- No espalhamento simples, o centro espalhador esférico ou cilíndrico é considerado uma partícula isolada em um meio infinito. Como se percebe, essa consideração não é consistente no caso de um cilindro infinito, visto que esse, mesmo embebido em um meio de baixa densidade de espalhadores, nunca seria completamente isolado e nem partícula. Em realidade, a partícula cilíndrica sob análise não é infinita; o que fazemos aqui é uma aproximação para o caso em que o comprimento ao longo do eixo do cilindro é muito maior que seu raio [1, 2].
- Tanto a partícula esférica ou cilíndrica quanto o meio circundante são assumidos *lineares, homogêneos e isotrópicos* [1], e possuem indutâncias capacitivas (ϵ_1, μ_1) e (ϵ, μ) , respectivamente. Dessas considerações, sendo o meio magneto-opticamente inativo, esses tensores correspondentes às permissividades elétricas e permeabilidades magnéticas do centro espalhador e do meio circundante podem ser expressos como um escalar multiplicando um tensor unitário. No caso, assumimos que há componentes absorbitivas no meio de propagação apenas no interior da partícula, de sorte que ϵ_1 e μ_1 são grandezas complexas. Em nossos estudos, o meio externo é comumente assumido como sendo o vácuo, uma vez que as grandezas importantes do problema (índices de refração e impedância relativos) dependem das grandezas relativas μ_1/μ e ϵ_1/ϵ .

Quanto à onda incidente:

- Consideramos uma onda eletromagnética complexa proveniente de uma fonte muito distante, sendo, portanto, assumida como uma onda plana. O vetor diretor dessas frentes de onda planares é denotado pelo vetor de onda \mathbf{k} , considerado aqui como sendo real (onda homogênea). A componente complexa surge da interação da onda com um substrato no qual haja absorção eletromagnética.
- A onda eletromagnética é monocromática, possuindo frequência de oscilação ω . Não há perda de generalidade nessa consideração, uma vez que os meios são lineares e a teoria eletromagnética de Maxwell fornecerá, por conseguinte, equações lineares. Assim, para o caso policromático ou com dependência temporal arbitrária, a solução geral do problema de espalhamento pode ser obtida a partir da teoria de Fourier [1].

- No sentido de caracterizarmos os campos incidentes, conferimos uma polarização linear à onda eletromagnética. Para a geometria esférica, basta um estado de polarização para um estudo genérico do espalhamento de ondas planas. No caso da geometria cilíndrica, no entanto, há duas polarizações básicas a partir das quais se originam todas as outras: o campo magnético (modo TM) ou elétrico (modo TE) transversos ao eixo do cilindro [1, 2, 27].
- Assumimos que a onda eletromagnética incidente tem a mesma frequência (isto é, o mesmo comprimento de onda) que a onda espalhada (espalhamento elástico). Efeitos como o espalhamento Raman, fluorescência e outras transições de natureza quântica ou o espalhamento de Brillouin, que surge do deslocamento Doppler associado ao movimento das partículas, são, portanto, excluídos [3].

A Fig. 2.1 mostra esquematicamente a interação de um feixe de ondas eletromagnéticas planas (representado pelas setas paralelas) e uma partícula isolada de formato geométrico arbitrário.

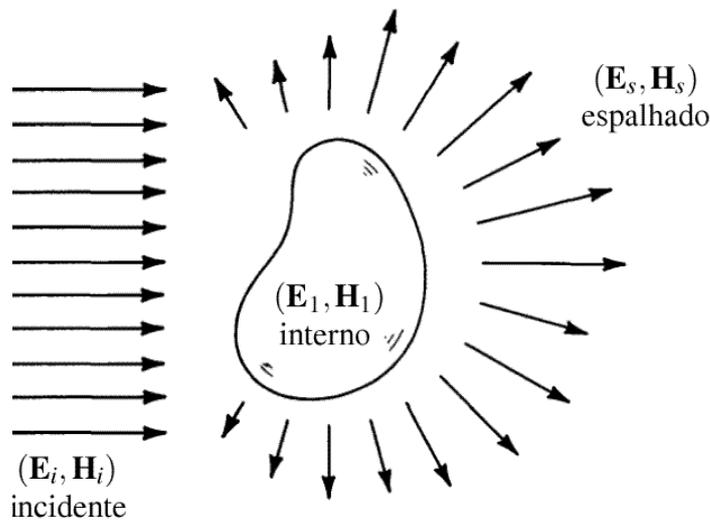


Figura 2.1: O campo eletromagnético incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ dá origem ao campo $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ interno à partícula e ao campo espalhado $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ no meio circundante. Figura adaptada da Ref. [1].

Implícita nas considerações acima, encontra-se a assunção de que os campos eletromagnéticos são grandezas vetoriais complexas com dependência temporal harmônica dada por $e^{-i\omega t}$ [1, 27]. Essa convenção é a mesma encontrada nos livros clássicos de Bohren e Huffman [1], Stratton [4], Born e Wolf [5], Jackson [7] e Barber [27]. É importante enfatizarmos qual é a escolha da dependência temporal harmônica dos campos complexos pois, ao compararmos grandezas calculadas, por exemplo, nos livros de van de Hulst [2] ou de Kerker [3], os quais

adotam $e^{+i\omega t}$, com as do Jackson [7], há certas diferenças de sinal na parte imaginária dessas grandezas [1, 2]. Se os meios materiais envolvidos não tiverem distribuições de cargas e nem fontes de corrente, as equações macroscópicas de Maxwell atinentes ao sistema se reduzem a

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, & \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ [\nabla^2 + k^2] \mathbf{E} &= \mathbf{0}, & [\nabla^2 + k^2] \mathbf{H} &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, e $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ é o número de onda. Nas equações rotacionais de Maxwell – as únicas independentes no sistema (2.1) –, usamos as relações constitutivas lineares $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, onde \mathbf{D} e \mathbf{B} são, respectivamente, os vetores deslocamento elétrico e indução magnética. Note que, ao desacoplarmos os campos elétrico e magnético vinculados nas equações de Maxwell, inicialmente obtemos duas equações de onda a eles correspondentes. Entretanto, em virtude das considerações aqui feitas, o problema de resolvermos uma *equação de onda vetorial* transfere-se naturalmente para uma *equação de Helmholtz vetorial*, devido ao operador $k^2 = -\mu\epsilon\partial_t^2$.

2.1 Equação de Helmholtz escalar

Grande parte dos livros clássicos que tratam do problema do espalhamento isolado se utiliza do vetor de Hertz para desacoplar os campos elétrico e magnético vinculados nas equações de Maxwell [3, 26]. No presente trabalho, contudo, empregamos a mesma abordagem das Refs. [1, 2, 4], a qual consiste em expandir os campos incidente, interno e espalhado na simetria do problema em questão (harmônicos esféricos ou cilíndricos vetoriais). Isso é feito mediante a introdução de uma função escalar ψ , chamada *função escalar geratriz*, sobre a qual é imposta uma série de condições de modo a que os harmônicos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} , definidos por

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\psi) \quad \text{e} \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M},\tag{2.2}$$

onde o vetor piloto \mathbf{c} é escolhido de acordo com a conveniência, satisfaçam as equações macroscópicas de Maxwell [1, 2]. No caso da esfera, $\mathbf{c} = \mathbf{r}$ é o vetor radial no sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) ; para o cilindro infinito cuja seção transversal é circular, $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{e}}_z$ é o versor no sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Dependendo da escolha de \mathbf{c} , os harmônicos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} são ditos esféricos ou cilíndricos vetoriais [1].

Repare que \mathbf{M} e \mathbf{N} possuem divergência nula, satisfazendo, portanto, as equações rotacionais de Maxwell apresentadas em (2.1). Impondo que \mathbf{M} seja solução da equação de Helmholtz

vetorial, obtemos [1]

$$[\nabla^2 + k^2] \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c} (\nabla^2 + k^2) \boldsymbol{\Psi}] = 0 .$$

Como se nota, a segunda igualdade é satisfeita quando

$$[\nabla^2 + k^2] \boldsymbol{\Psi}(x, y, z) = 0 , \quad (2.3)$$

que é a *equação de Helmholtz escalar*.

Até o momento, perceba que nenhuma informação relativa à partícula foi adicionada ao problema; apenas admitimos um meio com as características já mencionadas e sem uma distribuição espacial de cargas e fontes de corrente ($\rho_f = J_f = 0$). Basicamente, o sistema físico de interesse reduziu-se à resolução de uma equação de onda escalar em coordenadas retangulares (x, y, z) ; em outras palavras, um problema essencialmente matemático. Como podemos observar, a simetria do problema entrará na escolha do vetor piloto \mathbf{c} e ditará o sistema de coordenadas mais conveniente para a resolução da Eq. (2.3). Valendo-se do *método de separação de variáveis*, também conhecido como *método de Fourier* [1], e usando condições de contorno na superfície do centro espalhador, obtemos as soluções correspondentes aos campos elétrico e magnético, então expressos em termos de harmônicos vetoriais esféricos (no caso da esfera) ou cilíndricos (no caso do cilindro infinito). Fisicamente, portanto, a partícula ganha um significado a partir da imposição das condições de contorno dos campos eletromagnéticos (\mathbf{E}, \mathbf{H}) na interface de separação entre os meios interior e exterior à partícula.

2.2 Condições de contorno dos campos eletromagnéticos

O campo eletromagnético deve satisfazer as equações de Maxwell nos pontos onde tanto ϵ quanto μ são contínuos. No entanto, quando a onda atravessa a separação entre uma partícula e um meio circundante, há, em geral, uma mudança repentina nessas propriedades. Essa mudança ocorre em uma região de transição com espessura da ordem de dimensões atômicas [1]. Do ponto de vista macroscópico, portanto, há uma descontinuidade no contorno. Assim, na interface de separação entre dois meios, os campos vetoriais \mathbf{E} e \mathbf{H} podem ser descontínuos. As condições de contorno na interface, então necessárias para a determinação dos campos em todos os pontos do espaço, podem ser derivadas a partir das equações macroscópicas de Maxwell na forma integral [7, 4]. Considerando um meio sem cargas e fontes de corrente, as condições de contorno para o campo eletromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{H}) interagindo com uma partícula espalhadora são

dadas por

$$(\mathbf{E}_{\text{incidente}} + \mathbf{E}_{\text{espalhado}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_{\text{interior}} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.4)$$

$$\underbrace{(\mathbf{H}_{\text{incidente}} + \mathbf{H}_{\text{espalhado}})}_{\text{campos exteriores}} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{H}_{\text{interior}} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.5)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor normal à superfície de separação entre os meios interior e exterior à partícula (continuidade das componentes tangenciais).

Nos Capítulos que se seguem, aplicamos as considerações aqui delineadas e, via Eq. (2.3), determinamos expansões para os campos eletromagnéticos em termos de harmônicos vetoriais. Os coeficientes das expansões são obtidos mediante as condições de contorno expressas nas Eqs. (2.4) e (2.5). Uma vez determinados os campos eletromagnéticos e os respectivos coeficientes de Fourier das expansões, podemos calcular quaisquer grandezas do espalhamento eletromagnético [1, 2, 3]. Nesta dissertação de Mestrado, estamos interessados nos campos eletromagnéticos no interior dos centros espalhadores magnéticos e nas propriedades de transporte que deles podem ser auferidas. Posto que na literatura da área pouca atenção é dada aos campos internos e coeficientes associados [1, 2, 3, 4, 9], é imperativo que calculemos explicitamente essas grandezas a fim de estudarmos a energia eletromagnética armazenada no centro espalhador.

3 Espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esfera magnética

Talvez o mais importante problema solúvel na teoria de absorção e espalhamento de ondas eletromagnéticas por partículas seja aquele para uma esfera de raio e índice de refração arbitrários. Na literatura, os primeiros resultados em teoria de espalhamento por pequenas esferas foram derivados por Lord Rayleigh [28, 29] em 1871 e analisados posteriormente por J. C. Maxwell-Garnett [30] em 1904. Em seus trabalhos, Rayleigh considera a restrição de pequenas partículas dielétricas comparadas com o comprimento de onda incidente, e estabelece este limite de validade para suas expressões. Uma solução completa para o problema de uma esfera homogênea de constantes ópticas e tamanho arbitrários foi obtida em 1908 por Gustav Mie [31] a partir de um tratamento teórico rigoroso das equações de Maxwell do sistema [1, 3]. Mie desenvolve a teoria no intuito de entender as cores variadas na absorção e espalhamento exibidas por pequenas partículas coloidais de ouro suspensas em água [1, 3, 31]. Na mesma época, usando uma solução analítica original para o espalhamento por uma esfera, Peter Debye considerava o problema da pressão de radiação exercida sobre pequenas partículas no espaço [32]. O trabalho de Debye, o qual era assunto de sua tese de doutorado, constituiu uma das primeiras aplicações dessa teoria a problemas astrofísicos [1, 3]. Entretanto, Mie e Debye não foram os primeiros a construir uma solução completa para o problema da esfera. A primeira solução desse problema foi obtida, em realidade, por Lorenz em 1890, baseada em sua própria versão do eletromagnetismo [33]. Esse trabalho, porém, foi publicado em dinamarquês e não recebeu o reconhecimento apropriado da comunidade científica da época. Do ponto de vista histórico é razoável, portanto, chamarmos a solução do problema da esfera de solução de Lorenz-Mie ou, para sermos ainda mais precisos, de Lorenz-Mie-Debye. Neste trabalho, assumimos o termo mais usado em publicações científicas, que é solução ou teoria de Lorenz-Mie. Os livros clássicos de teoria de espalhamento eletromagnético, sem entrar em precedentes históricos, usam o termo espalhamento ou teoria de Mie [1, 2, 3, 4]. Ao longo dos anos, a solução exata obtida

por Lorenz, Mie e Debye foi cuidadosamente analisada e aplicada com sucesso para descrever o espalhamento por partículas de vários tamanhos [1, 2] e, posteriormente, generalizada para a descrição do espalhamento por partículas de formatos variados [34]. No limite de pequenas esferas, isto é, quando o raio é muito menor que o comprimento de onda incidente, a teoria de Lorenz-Mie reproduz os resultados obtidos por Rayleigh [1, 2].

Alguns dos mais belos fenômenos ópticos naturais podem ser explicados, em uma roupagem moderna e sofiscada, pela teoria de Lorenz-Mie. Em especial, usando o formalismo de Debye [32] na aproximação de esferas transparentes, o físico brasileiro H. M. Nussenzveig formulou uma teoria quantitativa do arco-íris (primário e secundário) e da auréola em 1969 [35, 36]. Seus resultados, obtidos a partir de estudos dos polos nas expansões das amplitudes de espalhamento em termos de múltiplas reflexões (séries de Mie) e analogias das ondas escalares parciais com os potenciais da Mecânica Quântica e momentos angulares complexos (transformação de Watson), lhe renderam o prêmio Max Born em 1986, conferido pela *Optical Society of America*.

Neste Capítulo, delineamos os principais resultados analíticos novos que obtivemos na teoria clássica de espalhamento de Lorenz-Mie; mais especificamente, o cálculo da energia eletromagnética média dentro de uma esfera magnética. A resolução explícita dos coeficientes magnéticos provenientes das expansões dos campos (\mathbf{E} , \mathbf{H}) em termos de harmônicos esféricos vetoriais, o cálculo das intensidades de Stokes e matriz de espalhamento podem ser encontrados nas Refs. [1, 2, 3, 9]. Aqui nos limitamos a apresentar alguns desses resultados e, quando necessário e conveniente, detalhamos os caminhos que levam à obtenção das expressões exatas. No contexto da teoria de Lorenz-Mie, o estudo da média temporal da energia eletromagnética no interior de uma esfera dielétrica foi realizado por Bott e Zdunkowski [24]. Nesse trabalho, os autores calcularam analiticamente expressões exata e aproximada para a energia média dentro de uma partícula esférica e realizaram um estudo numérico calculando fatores de eficiência a partir dessas expressões. Tais resultados, no entanto, restringem-se ao caso particular de esferas não magnéticas, isto é, aplicam-se apenas a sistemas cuja permeabilidade magnética da partícula seja numericamente igual a do meio circundante (regime óptico). O objetivo da Ref. [24] dizia respeito ao estudo teórico do fluxo de fótons em gotas de água na alta atmosfera com vistas a investigações na área fotoquímica [24]. Nesta dissertação, ampliamos essa solução para o caso geral de esferas magnéticas isotrópicas. Os principais resultados que obtivemos encontram-se em nosso artigo [18].

3.1 Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas

O ponto de partida para a resolução do problema da esfera são as equações macroscópicas de Maxwell restritas a condições de contorno, as quais dizem respeito às propriedades ópticas e geométricas do espalhador e meio circundante, e características da radiação incidente. A Fig. 3.1 representa esquematicamente a geometria do problema, qual seja, uma esfera de raio a na origem do sistema de coordenadas polares esféricas sendo irradiada por uma onda plana.

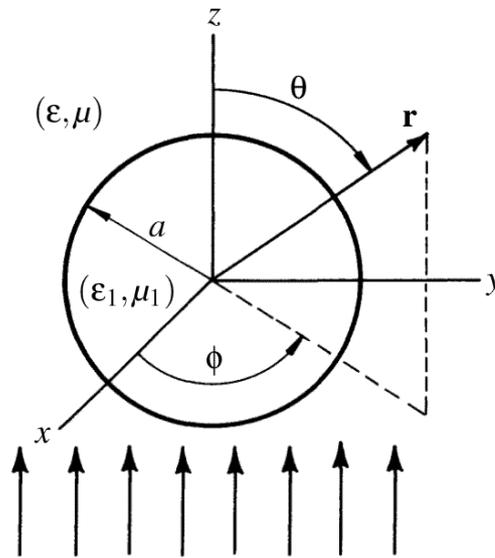


Figura 3.1: Sistema de coordenadas esféricas centrado em uma partícula esférica de raio a . Figura adaptada da Ref. [1].

Valendo-se da simetria esférica do centro espalhador, usamos o artifício de se expandir os campos eletromagnéticos em harmônicos esféricos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} , então gerados por uma função escalar geratriz ψ , como apresentado no Capítulo 2. Essa abordagem reduz o problema de resolvermos uma equação de onda vetorial a uma equação de Helmholtz escalar, Eq. (2.3). Em coordenadas polares esféricas, a Eq. (2.3) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right] \psi(r, \theta, \phi) = 0. \quad (3.1)$$

Essa equação é comumente resolvida mediante o método de separação de variáveis. Usando esse método, obtemos três equações diferenciais ordinárias correspondentes às variáveis radial, angular e azimutal, as quais fornecem como soluções, respectivamente, funções de Bessel e Neumann, funções associadas de Legendre e funções senoidais [1, 2]. Dessa maneira, nas

coordenadas (r, θ, ϕ) , a solução geral da Eq. (3.1) pode ser descrita pelas funções

$$\Psi_{e\ell n}(kr, \cos \theta, \phi) = z_n(kr) P_n^\ell(\cos \theta) \cos(\ell \phi), \quad (3.2)$$

$$\Psi_{o\ell n}(kr, \cos \theta, \phi) = z_n(kr) P_n^\ell(\cos \theta) \sin(\ell \phi), \quad (3.3)$$

onde $P_n^\ell(\cos \theta)$ é uma função associada de Legendre ($\ell, n \in \mathbb{Z}$ são constantes de separação), e z_n é qualquer das quatro funções esféricas j_n (Bessel), y_n (Neumann), $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$ ou $h_n^{(2)} = j_n - iy_n$ (Hankel de primeiro e segundo tipos). Os índices e e o provêm do inglês *even* (par) e *odd* (ímpar) para se referirem à paridade das funções senoidais que entram na composição da função ψ na componente azimutal ϕ . Em razão da completude das funções $\cos(\ell \phi)$, $\sin(\ell \phi)$, $P_n^\ell(\cos \theta)$ e $z_n(kr)$, qualquer função que satisfaça a equação de onda escalar em coordenadas esféricas pode ser expandida como uma série infinita das funções (3.2) e (3.3) [1]. Observe que, em função da simetria esférica, a dependência da função geratriz com o ângulo de espalhamento θ se dá através da função $\cos \theta$, que é portanto a variável angular natural do problema. De fato, o parâmetro de assimetria na teoria de Mie pode ser calculado como a média da função $\cos \theta$ no ângulo sólido [1, 2]. O mesmo pode ser mencionado com relação à dependência radial das soluções, que é $kr = 2\pi r/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda. Naturalmente, portanto, a dependência radial das soluções da equação de onda escalar leva em conta a razão entre distância radial e comprimento de onda.

Substituindo as funções $\Psi_{e\ell n}$ e $\Psi_{o\ell n}$ nos harmônicos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} , expressos nas Eqs. (2.2) do Capítulo 2, e tomando $\mathbf{c} = \mathbf{r}$, obtemos [1, 2]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{e\ell n} &= \nabla \times (\mathbf{r}\Psi_{e\ell n}), & \mathbf{M}_{o\ell n} &= \nabla \times (\mathbf{r}\Psi_{o\ell n}), \\ \mathbf{N}_{e\ell n} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{e\ell n}}{k}, & \mathbf{N}_{o\ell n} &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_{o\ell n}}{k}. \end{aligned}$$

Na forma de componentes, temos explicitamente

$$\mathbf{M}_{e\ell n} = -\ell \sin(\ell \phi) \pi_n^\ell z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \cos(\ell \phi) \tau_n^\ell z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{M}_{o\ell n} = \ell \cos(\ell \phi) \pi_n^\ell z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin(\ell \phi) \tau_n^\ell z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{e\ell n} &= n(n+1) \sin \theta \cos(\ell \phi) \pi_n^\ell \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r \\ &+ \cos(\ell \phi) \tau_n^\ell \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta - \ell \sin(\ell \phi) \pi_n^\ell \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{o\ell n} &= n(n+1) \sin \theta \sin(\ell \phi) \pi_n^\ell \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r \\ &+ \sin(\ell \phi) \tau_n^\ell \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \ell \cos(\ell \phi) \pi_n^\ell \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\rho = kr$,

$$\pi_n^\ell = \frac{P_n^\ell(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad \tau_n^\ell = \frac{d}{d\theta} \left[P_n^\ell(\cos \theta) \right]. \quad (3.8)$$

Embora usemos aqui apenas um caso particular das funções generalizadas definidas nas Eqs. (3.8), salientamos que elas podem ser utilizadas como funções de base em algoritmos numéricos para o cálculo de espalhamento múltiplo [27].

Uma vez determinados os harmônicos vetoriais, quaisquer soluções para as equações dos campos restritos às condições apresentadas no Capítulo 2 podem ser expandidas em séries infinitas das funções (3.4)–(3.7). Em outras palavras, escrevemos uma onda plana como uma série infinita de ondas parciais esféricas \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n .

3.2 Campos eletromagnéticos em termos de ondas parciais esféricas

Considere uma onda eletromagnética plana $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ polarizada na direção da abscissa x a qual é incidente a uma esfera linear, homogênea e isotrópica de raio a e constantes ópticas (ϵ_1, μ_1) imersa em um meio (ϵ, μ) . Em coordenadas esféricas,

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{ikr \cos \theta} \hat{\mathbf{e}}_x, \quad (3.9)$$

onde E_0 é a amplitude do campo e $\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Da ortogonalidade das funções seno e cosseno, e das Eqs. (3.4)–(3.9), segue que apenas $\ell = 1$ satisfaz a expansão do campo elétrico \mathbf{E}_i em termos dos harmônicos esféricos vetoriais [1]. Em outras palavras, apenas as funções associadas de Legendre de primeira ordem entram na composição dos harmônicos. Nas expressões a seguir, denotamos por simplicidade as funções angulares $\pi_n^1 = \pi_n$ e $\tau_n^1 = \tau_n$. Os coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n das expansões dos campos espalhado $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ e interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ em harmônicos esféricos vetoriais são obtidos impondo-se condições de contorno na interface entre a partícula espalhadora e o meio circundante. Embora $r \geq a$ expresse o mesmo que $a \leq r$, consideramos como convenção $r \geq a$ para expressar o domínio de ondas incidentes e $a \leq r$ para ondas emergentes em relação à esfera. Alguns detalhes que levam à obtenção das expansões a seguir encontram-se na Ref. [1]. Em forma de componentes, os campos eletromagnéticos estão expressos na Seção A.1 do Apêndice A.

Considerando os domínios de existência mencionados acima, os campos eletromagnéticos

em termos dos harmônicos vetoriais \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n são dados por

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}(k) - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}(k) \right], \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}_i = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\mathbf{M}_{e1n}^{(1)}(k) + i\mathbf{N}_{o1n}^{(1)}(k) \right]; \quad (3.11)$$

$$\mathbf{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[c_n \mathbf{M}_{o1n}^{(1)}(k_1) - i d_n \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}(k_1) \right], \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n \mathbf{M}_{e1n}^{(1)}(k_1) + i c_n \mathbf{M}_{o1n}^{(1)}(k_1) \right]; \quad (3.13)$$

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[i a_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)}(k) - b_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}(k) \right], \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[i b_n \mathbf{N}_{o1n}^{(3)}(k) + a_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}(k) \right], \quad (3.15)$$

onde $E_n = i^n E_0 (2n+1)/[n(n+1)]$ e os índices (1) e (3) indicam, respectivamente, o emprego das funções esféricas de Bessel j_n e de Hankel de primeiro tipo $h_n^{(1)}$ na composição dos harmônicos vetoriais \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n . Os números de onda k e k_1 indicam se o argumento das funções esféricas de Bessel e de Hankel é $\rho = kr$ (meio circundante) ou $\rho_1 = k_1 r$ (interior da esfera). A função de Bessel $j_n(\rho_1)$ no interior da esfera é escolhida devido à sua finitude na origem do sistema de coordenadas. Já a função de Hankel de primeiro tipo no campo espalhado é escolhida devido ao seu comportamento de onda emergente no campo distante, o qual está intimamente associado à dependência temporal harmônica que escolhemos para o campo incidente [1, 2].

Uma vez realizadas as expansões dos campos em cada região do espaço, resta determinarmos as ponderações, dadas pelos coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n , de cada onda esférica parcial \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n . Isso é feito mediante a aplicação das condições de contorno expressas nas Eqs. (2.4) e (2.5) da Seção 2.2.

3.3 Coeficientes magnéticos de Lorenz-Mie

Considerando que não existam fontes de corrente no meio, temos que as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético são contínuas na interface $r = a$. Na forma de com-

ponentes, as Eqs. (2.4) e (2.5) são expressas por

$$E_{i\theta} + E_{s\theta} - E_{1\theta} = 0, \quad (3.16)$$

$$E_{i\phi} + E_{s\phi} - E_{1\phi} = 0, \quad (3.17)$$

$$H_{i\theta} + H_{s\theta} - H_{1\theta} = 0, \quad (3.18)$$

$$H_{i\phi} + H_{s\phi} - H_{1\phi} = 0, \quad (3.19)$$

onde $r = a$ (campos eletromagnéticos na interface partícula-meio circundante). Substituindo as componentes dos campos eletromagnéticos $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$, $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$, dadas na Seção A.1, nas Eqs. (3.16)–(3.19), obtemos um sistema de quatro equações lineares nas variáveis a_n , b_n , c_n e d_n :

$$\begin{cases} m\xi_n(x)\underline{a}_n + \tilde{m}\psi_n(mx)\underline{d}_n = m\Psi_n(x), \\ m\xi'_n(x)\underline{a}_n + \psi'_n(mx)\underline{d}_n = m\Psi'_n(x), \\ m\xi_n(x)\underline{b}_n + \psi_n(mx)\underline{c}_n = m\Psi_n(x), \\ m\xi'_n(x)\underline{b}_n + \tilde{m}\psi'_n(mx)\underline{c}_n = m\Psi'_n(x), \end{cases} \quad (3.20)$$

onde os coeficientes a serem determinados encontram-se sublinhados e as pricas indicam derivação com respeito ao argumento entre parênteses. A grandeza $x = ka$ é chamada parâmetro de tamanho da partícula esférica, sendo a o raio da mesma e $k = |\mathbf{k}|$ o número de onda correspondente à onda incidente com dependência temporal harmônica $e^{-i\omega t}$. Ainda, $m = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1 / (\mu \epsilon)}$ e $\tilde{m} = \sqrt{\mu \epsilon_1 / (\mu_1 \epsilon)}$ são, respectivamente, os índices de refração e de impedância relativos entre a esfera e o meio circundante. Repare que o sistema de quatro equações acima é composto, na verdade, de dois sistemas de duas equações.

Resolvendo o sistema de Eqs. (3.20), os coeficientes das expansões dos campos eletromag-

néticos por uma esfera magnética são dados por

$$a_n = \frac{\Psi_n(x)}{\xi_n(x)} \frac{d_x \ln \left\{ [\Psi_n(x)]^{m\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}}{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)]^{m\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}} = \frac{\tilde{m}\Psi_n(mx)\Psi_n'(x) - \Psi_n(x)\Psi_n'(mx)}{\tilde{m}\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\Psi_n'(mx)}, \quad (3.21)$$

$$b_n = \frac{\Psi_n(x)}{\xi_n(x)} \frac{d_x \ln \left\{ [\Psi_n(x)]^{m/\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}}{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)]^{m/\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}} = \frac{\Psi_n(mx)\Psi_n'(x) - \tilde{m}\Psi_n(x)\Psi_n'(mx)}{\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - \tilde{m}\xi_n(x)\Psi_n'(mx)}, \quad (3.22)$$

$$c_n = \frac{\Psi_n(x)}{\Psi_n(mx)} \frac{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)/\Psi_n(x)]^{m^2/\tilde{m}} \right\}}{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)]^{m/\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}} = \frac{m\mu}{\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - \tilde{m}\xi_n(x)\Psi_n'(mx)}, \quad (3.23)$$

$$d_n = \frac{\Psi_n(x)}{\Psi_n(mx)} \frac{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)/\Psi_n(x)]^{m^2} \right\}}{d_x \ln \left\{ [\xi_n(x)]^{m\tilde{m}} / \Psi_n(mx) \right\}} = \frac{m\mu}{\tilde{m}\Psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\Psi_n'(mx)}. \quad (3.24)$$

Com a finalidade de tornarmos as expressões dos coeficientes de Lorenz-Mie “ainda mais simples” para cálculos numéricos, podemos definir as funções

$$f_n(x) = \frac{\Psi_n(x)}{\xi_n(x)}, \quad g_n(x, m) = \frac{m^2\Psi_n(x)}{\Psi_n(mx)},$$

$$\mathcal{A}_n(x, mx) = \frac{d_x \ln \Psi_n(x)}{d_x \ln \Psi_n(mx)}, \quad \mathcal{B}_n(x, mx) = \frac{d_x \ln \xi_n(x)}{d_x \ln \Psi_n(mx)}.$$

Efetuada-se as substituições nas Eqs. (3.21)–(3.24), resulta que

$$a_n = f_n(x) \left[\frac{1 - m\tilde{m}\mathcal{A}_n(x, mx)}{1 - m\tilde{m}\mathcal{B}_n(x, mx)} \right], \quad (3.25)$$

$$b_n = f_n(x) \left[\frac{1 - (m/\tilde{m})\mathcal{A}_n(x, mx)}{1 - (m/\tilde{m})\mathcal{B}_n(x, mx)} \right], \quad (3.26)$$

$$c_n = \frac{g_n(x, m)}{\tilde{m}} \left[\frac{\mathcal{A}_n(x, mx) - \mathcal{B}_n(x, mx)}{1 - (m/\tilde{m})\mathcal{B}_n(x, mx)} \right], \quad (3.27)$$

$$d_n = g_n(x, m) \left[\frac{\mathcal{A}_n(x, mx) - \mathcal{B}_n(x, mx)}{1 - m\tilde{m}\mathcal{B}_n(x, mx)} \right]. \quad (3.28)$$

Fica claro nas Eqs. (3.25)–(3.28) que tanto os coeficientes de espalhamento a_n e b_n quanto os coeficientes internos c_n e d_n , além de dependerem das grandezas x e mx , possuem dependências com outras grandezas em particular. No caso, os coeficientes de espalhamento dependem apenas de $m\tilde{m} = \epsilon_1/\epsilon$, $m/\tilde{m} = \mu_1/\mu$, enquanto os coeficientes internos dependem de m e \tilde{m} separadamente. Note que na abordagem não magnética ($m = \tilde{m}$), essas dependências ficam restritas apenas à grandeza $m = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon}$.

3.4 Energia eletromagnética interna à esfera

Considere um campo eletromagnético harmônico $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ propagando-se em um meio linear, homogêneo e isotrópico (ϵ_1, μ_1) não dispersivo, isto é, as grandezas constitutivas independem da frequência ω de oscilação do campo. Na teoria clássica do eletromagnetismo, a média temporal da densidade de energia eletromagnética U nesse meio material é definida como sendo

$$U = \frac{1}{4} \text{Re} [\epsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 + \mu_1 |\mathbf{H}_1|^2] , \quad (3.29)$$

onde assumimos que $\text{Re}(\epsilon_1) \gg \text{Im}(\epsilon_1)$ e $\text{Re}(\mu_1) \gg \text{Im}(\mu_1)$ – regime de fraca absorção ou transparência [7, 25]. Integrando a Eq. (3.29) em uma certa região V do espaço, obtemos a média temporal de energia eletromagnética W no respectivo volume: $W = \int \int \int_V dV U$. No caso de uma partícula esférica de raio a e campos internos complexos $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, obtemos em coordenadas esféricas

$$W(a) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^a dr r^2 \text{Re} \left[\frac{\epsilon_1}{4} (|E_{1r}|^2 + |E_{1\theta}|^2 + |E_{1\phi}|^2) + \frac{\mu_1}{4} (|H_{1r}|^2 + |H_{1\theta}|^2 + |H_{1\phi}|^2) \right] . \quad (3.30)$$

Aqui assumimos tacitamente que a série de funções que entra na integral tripla da Eq. (3.30) converge uniformemente no domínio $0 \leq r \leq a$, $0 < \theta \leq \pi$, $0 < \phi \leq 2\pi$ para uma função integrável a Riemann. A consideração de que há convergência é consistente com o fato de que a energia no interior de um volume finito é finita. Ademais, a uniformidade na maneira como a série converge é uma condição necessária para que possamos, nos cálculos a seguir, efetuar a “permutação” entre o somatório da série infinita e o símbolo de integração.

O cálculo analítico da energia eletromagnética armazenada em uma esfera de Lorenz-Mie não é uma tarefa trivial e requer certo conhecimento entre relações envolvendo produto de funções de Bessel, relações de recorrência e propriedades das funções associadas de Legendre [24, 18]. No caso das funções de Bessel, esse conhecimento é necessário para que seja possível resolver analiticamente as integrais na variável radial. As funções angulares, que são dependentes das funções associadas de Legendre de primeira ordem, favorecem ou não a simplificação do somatório duplo proveniente do módulo ao quadrado das componentes dos campos internos. Um resumo sobre essas relações envolvendo funções especiais, muitas das quais não há registro na literatura, encontra-se no Apêndice C.

A seguir, efetuamos o cálculo da energia interna levando em conta cada componente do campo eletromagnético separadamente. Isso não é feito na Ref. [24] para a energia armazenada

no interior de esferas não magnéticas e não dispersivas. Nosso intuito aqui é fornecermos uma descrição analítica mais rica que a da Ref. [24], de modo que possamos obter informações das componentes angulares e radiais do espalhamento.

3.4.1 Média temporal da energia elétrica

Da definição da energia interna, Eq. (3.30), é natural que consideremos as contribuições dos campos elétrico e magnético em separado. Usamos abaixo algumas relações presentes nas Seções C.1 e C.2.1. As componentes do campo eletromagnético $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ em coordenadas esféricas encontram-se na Seção A.1 do Apêndice A.

A energia eletromagnética média no tempo relacionada à componente r do campo elétrico \mathbf{E}_1 é dada por

$$\begin{aligned}
 W_{Er}(a) &= \frac{\text{Re}(\epsilon_1)}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^a dr |E_{1r}|^2 r^2 \sin\theta \\
 &= \frac{\pi}{4} \text{Re}(\epsilon_1) \int_0^a dr \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} E_n E_{n'}^* j_n(\rho_1) j_{n'}^*(\rho_1) \\
 &\quad nn'(n+1)(n'+1) \underbrace{\frac{d_n d_{n'}^*}{|k_1|^2} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \pi_n \pi_{n'} \sin^2\theta}_{\text{Eq. (C.7)}} \\
 &= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\epsilon_1)}{|k_1|^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) |d_n|^2 \int_0^a dr |j_n(\rho_1)|^2.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $\rho_1 = k_1 r = mkr$ e o asterísco indica conjugação da variável complexa: $\iota \leftrightarrow -\iota$. Chamamos atenção ao fato de que, nesta situação, o somatório duplo é simplificado via função delta de Kronecker e a integral em ϕ é apenas $\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi = \pi$. Contudo, a integral da componente radial não possui solução analítica [37].

Para as componentes angulares θ e ϕ do campo elétrico, a contribuição à energia eletromagnética média no tempo definida na Eq. (3.30) é

$$\begin{aligned}
[W_{E\theta} + W_{E\phi}](a) &= \frac{\text{Re}(\epsilon_1)}{4} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr (|E_{1\theta}|^2 + |E_{1\phi}|^2) r^2 \sin\theta \\
&= \frac{\pi \text{Re}(\epsilon_1)}{4 |k_1|^2} \int_0^a dr \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} E_n E_{n'}^* \\
&\quad \times \left\{ [c_n c_{n'}^* \Psi_n(\rho_1) \Psi_{n'}(\rho_1^*) + d_n d_{n'}^* \Psi'_n(\rho_1) \Psi'_{n'}(\rho_1^*)] \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos\theta) (\pi_n \pi_{n'} + \tau_n \tau_{n'})}_{\text{Eq. (C.5)}} \right. \\
&\quad \left. + [i c_n d_{n'}^* \Psi_n(\rho_1) \Psi_{n'}^* - i d_n c_{n'}^* \Psi'_n(\rho_1) \Psi_{n'}(\rho_1^*)] \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos\theta) (\tau_n \pi_{n'} + \pi_n \tau_{n'})}_{\text{Eq. (C.6)}} \right\} \\
&= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\epsilon_1)}{|k_1|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \int_0^a dr (|c_n \Psi_n(\rho_1)|^2 + |d_n \Psi'_n(\rho_1)|^2),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $\Psi_n(\rho_1) = \rho_1 \psi_n(\rho_1)$ é a função de Riccati-Bessel. Analogamente à componente radial, a contribuição das componentes angulares (θ, ϕ) à energia interna é simplificada mediante propriedades das funções associadas de Legendre. Note que da simetria do sistema resulta a impossibilidade de separarmos as contribuições de cada componente angular. Caso tentemos fazê-lo, relações importantes entre as funções angulares, especificamente, Eqs. (C.5) e (C.6), não aparecem nos cálculos.

Usando a informação das contribuições das duas componentes e a relação de recorrência (C.12), segue que a energia interna média respectiva ao campo elétrico é dada por

$$\begin{aligned}
W_E(a) &= W_{Er}(a) + [W_{E\theta} + W_{E\phi}](a) \\
&= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 a^3 \text{Re}(\epsilon_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+1) |c_n|^2 I_n(y) + |d_n|^2 [n I_{n+1}(y) + (n+1) I_{n-1}(y)] \right\},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde definimos a grandeza adimensional

$$I_n(y) = \frac{1}{a^3} \int_0^a dr r^2 |j_n(\rho_1)|^2, \tag{3.34}$$

sendo $y = mka$. A solução analítica dessa integral está expressa na Eq. (C.14) do Apêndice C para $\text{Im}(m) \neq 0$ (meio absorbitivo) e na Eq. (C.16) para m real (meio transparente). Salientamos que I_n depende apenas das grandezas adimensionais y e y^* , embora, à primeira vista, aparente depender do raio a da esfera. Para simplificarmos a notação, omitimos a dependência de I_n com relação a y^* . Ao longo desta dissertação, funções similares a I_n são definidas de modo a obtermos uma expressão analítica fechada para a energia eletromagnética armazenada no centro

espalhador magnético.

3.4.2 Média temporal da energia magnética

O cálculo da contribuição do campo magnético interno \mathbf{H}_1 à energia eletromagnética expressa na Eq. (3.30) é inteiramente análogo ao cálculo da contribuição do campo elétrico. Sendo W_{Hr} e $[W_{H\theta} + W_{H\phi}]$ as contribuições radial e angulares, respectivamente, obtemos:

$$W_{Hr}(a) = \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\mu_1^{-1})}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) |c_n|^2 \int_0^a dr |j_n(\rho_1)|^2, \quad (3.35)$$

$$[W_{H\theta} + W_{H\phi}](a) = \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\mu_1^{-1})}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \int_0^a dr (|d_n \Psi_n(\rho_1)|^2 + |c_n \Psi'_n(\rho_1)|^2). \quad (3.36)$$

Portanto, a energia interna média associada ao campo magnético \mathbf{H}_1 é expressa por

$$\begin{aligned} W_H(a) &= W_{Hr}(a) + [W_{H\theta} + W_{H\phi}](a) \\ &= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 a^3 \text{Re} \left(\frac{|k_1|^2}{\omega^2 \mu_1^*} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2n+1) |d_n|^2 I_n(y) + |c_n|^2 [n I_{n+1}(y) + (n+1) I_{n-1}(y)] \}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde usamos, uma vez mais, a Eq. (C.12).

3.4.3 Energia eletromagnética média no tempo

Com as grandezas expressas nas Eqs. (3.33) e (3.37), podemos determinar a energia eletromagnética média W no interior de uma esfera magnética, visto que $W(a) = W_E(a) + W_H(a)$. Explicitamente, temos

$$W(a) = \frac{\pi}{2} |E_0|^2 a^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{|\Psi_n(y)|^2} \left[n \beta_n I_{n+1}(y) + (n+1) \beta_n I_{n-1}(y) + (2n+1) \alpha_n I_n(y) \right], \quad (3.38)$$

onde definimos, como nas Refs. [18, 24],

$$\alpha_n = \frac{|\Psi_n(y)|^2}{\varepsilon} \left[\text{Re}(\varepsilon_1) |c_n|^2 + \text{Re} \left(\frac{|k_1|^2}{\omega^2 \mu_1^*} \right) |d_n|^2 \right], \quad (3.39)$$

$$\beta_n = \frac{|\Psi_n(y)|^2}{\varepsilon} \left[\text{Re}(\varepsilon_1) |d_n|^2 + \text{Re} \left(\frac{|k_1|^2}{\omega^2 \mu_1^*} \right) |c_n|^2 \right]. \quad (3.40)$$

Ainda, com o objetivo de recuperarmos as expressões calculadas na Ref. [24] para uma esfera não magnética, a Eq. (3.38) pode ser reescrita como

$$W(a) = \frac{3}{4}W_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{y^2 - y^{*2}} \left\{ \alpha_n \left[\frac{A_n(y^*)}{y} - \frac{A_n(y)}{y^*} \right] + \beta_n \left[\frac{A_n(y^*)}{y^*} - \frac{A_n(y)}{y} \right] \right\}, \quad (3.41)$$

onde temos

$$y = mka, \quad (3.42)$$

$$A_n(y) = \frac{\Psi'_n(y)}{\Psi_n(y)} = \frac{d}{dy} [\ln \Psi(y)], \quad (3.43)$$

$$W_0 = \frac{2}{3}\pi a^3 |E_0|^2 \epsilon. \quad (3.44)$$

Nesta situação, W_0 denota a energia eletromagnética média dentro de uma esfera de raio a tendo as mesmas propriedades eletromagnéticas do meio circundante [24].

No intuito de simplificarmos ainda mais a expressão da energia interna, podemos definir as funções

$$B_n(y) = \frac{2n+1}{y^2 - y^{*2}} \left[\frac{A_n(y^*)}{y} - \frac{A_n(y)}{y^*} \right], \quad (3.45)$$

$$C_n(y) = \frac{2n+1}{y^2 - y^{*2}} \left[\frac{A_n(y^*)}{y^*} - \frac{A_n(y)}{y} \right]. \quad (3.46)$$

Substituindo essas expressões na Eq. (3.41), obtemos

$$W(a) = \frac{3}{4}W_0 \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n B_n(y) + \beta_n C_n(y)]. \quad (3.47)$$

3.4.4 Caso dielétrico

Uma situação particular a ser considerada diz respeito a uma esfera dielétrica perfeita, então estudada pelos autores da Ref. [24]. Para isso, com a finalidade de confrontarmos nossos resultados com os da Ref. [24], consideramos o caso não magnético, isto é, $\mu = \mu_1$. Como consequência, temos $m = \tilde{m} = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon}$. Note que $\omega^2/k_1^{*2} = 1/(\epsilon_1^*\mu_1^*) \Rightarrow |k_1|^2/(\omega^2\mu_1^*) = \epsilon_1^*(k_1/k_1^*) = \epsilon_1^*(m/m^*)$; $\epsilon_1 + \epsilon_1^* = \epsilon(m^2 + m^{*2})$. Portanto, para o caso não magnético, resulta que $\text{Re}(\epsilon_1/\epsilon) = \text{Re}(m\tilde{m}) = (m^2 + m^{*2})/2$, e $\text{Re}[|k_1|^2/(\omega^2\mu_1^*\epsilon)] = \text{Re}(m\tilde{m}^*) = |m|^2$.

Uma vez mais, convém enfatizarmos que a notação do presente trabalho é diferente da adotada na Ref. [24]. *Grosso modo*, podemos comparar as expressões aqui obtidas com as daquele trabalho fazendo as substituições $\xi_n(x)$ por $\zeta_n(x)$, c_n por md_n , d_n por mc_n e assumindo $m = \tilde{m}$ (abordagem não magnética). Aqui, $\zeta_n(x) = x[j_n(x) - iy_n(x)]$ é a função de Riccati-

Hankel de segundo tipo, então relacionada à escolha da dependência temporal harmônica dos campos eletromagnéticos, como mencionamos no Capítulo 1 [1, 2, 3, 4, 27].

Usando as relações de recorrência expressas nas Eqs. (C.8)–(C.11) do Apêndice C e a Eq. (3.43), obtemos que a derivada de primeira ordem de $A_n(y)$ é expressa por $A'_n(y) = -1 - A_n^2(y) + n(n+1)/y^2$. Portanto, aplicando-se a regra de L'Hospital e sendo $m = m_r + im_i$ o índice de refração complexo, o caso limite de uma esfera dielétrica perfeita, obtido quando $m_i \rightarrow 0$, fornece as seguintes relações:

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} B_n(y) = \frac{2n+1}{2y^2} \left[-\frac{A_n(y)}{y} + A_n^2(y) + 1 - \frac{n(n+1)}{y^2} \right], \quad (3.48)$$

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} C_n(y) = \frac{2n+1}{2y^2} \left[\frac{A_n(y)}{y} + A_n^2(y) + 1 - \frac{n(n+1)}{y^2} \right]. \quad (3.49)$$

Substituindo essas expressões na Eq. (3.47), à parte as diferenças de notação já comentadas, o resultado obtido na Ref. [24] é recuperado:

$$\lim_{m_i \rightarrow 0} W(a) = \frac{3}{4} W_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{y^2} \gamma_n \left[1 + A_n^2(y) - \frac{n(n+1)}{y^2} \right], \quad (3.50)$$

onde $\gamma_n = m^2 |\Psi_n(y)|^2 (|c_n|^2 + |d_n|^2)$.

3.5 Seção de choque de absorção e os coeficientes internos

Partindo da conservação da energia, a teoria de Lorenz-Mie fornece expressões para simples para os cálculos das seções de choque de espalhamento e total a partir dos coeficientes dos campos espalhados. Explicitamente, sendo σ_{sca} a seção de choque de espalhamento e σ_{tot} a seção de choque total, temos que

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (3.51)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re} \{a_n + b_n\}. \quad (3.52)$$

Assim, a seção de choque de absorção σ_{abs} fica definida em termos de σ_{sca} e σ_{tot} pela equação

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{abs}} &= \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{sca}} \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \{ \text{Re} (a_n + b_n) - (|a_n|^2 + |b_n|^2) \}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Em outras palavras, a seção de choque de absorção no espalhamento de Lorenz-Mie é expressa por grandezas relacionadas apenas aos campos espalhados, isto é, os coeficientes a_n e b_n [1, 2].

Uma vez que esses coeficientes, via condições de contorno, estão relacionados aos coeficientes internos c_n e d_n , é natural que haja uma expressão simples para a seção de choque de absorção dependente apenas dos coeficientes internos.

Das condições de contorno na superfície da esfera magnética, expressas no sistema de Eqs. (3.20), temos que os coeficientes de espalhamento e internos de Lorenz-Mie são vinculados pelas relações

$$h_n^{(1)}(x)b_n = j_n(x) - j_n(mx)c_n, \quad (3.54)$$

$$h_n^{(1)}(x)a_n = j_n(x) - \tilde{m}j_n(mx)d_n. \quad (3.55)$$

Substituindo essas expressões na definição (3.53), obtemos o resultado

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ \text{Re} \left[\frac{\Psi_n(mx)}{m\xi_n^*(x)} (c_n + \tilde{m}d_n) \right] - \frac{|\Psi_n(mx)|^2}{|m\xi_n^*(x)|^2} (|c_n|^2 + |\tilde{m}d_n|^2) \right\}. \quad (3.56)$$

Em particular, podemos escrever

$$\text{Re} \left[\frac{\Psi_n(mx)}{m\xi_n^*(x)} (c_n + \tilde{m}d_n) \right] = \frac{x}{|\xi_n(x)|^2} \text{Im} \left\{ \frac{m\tilde{m}}{\Phi_n(mx) - m\tilde{m}g_n(x)} + \frac{(m/\tilde{m})}{\Phi_n(mx) - (m/\tilde{m})g_n(x)} \right\},$$

onde $x = ka$ e $g_n(x) = x d_x \ln [\xi_n(x)]$.

Finalmente, usando as definições de c_n e d_n expressas nas Eqs. (3.23) e (3.24), e o fato de que $\text{Re}[-i\xi_n^*(x)\xi_n'(x)] = \chi_n(x)\Psi_n'(x) - \Psi_n(x)\chi_n'(x) = 1$ (Wronskiano), onde $\chi_n(x) = -xy_n(x)$ é a função de Riccati-Neumann, obtemos

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|c_n|^2 + |d_n|^2) \text{Im} \left[\frac{\tilde{m}}{|m|^2} \Psi_n(y)\Psi_n'(y^*) \right], \quad (3.57)$$

onde $y = mx$ e $\Psi_n(y) = yj_n(y)$ é a função de Riccati-Bessel. A expressão exata (3.57) para a seção de choque de absorção em termos dos coeficientes de Lorenz-Mie internos é original [18]. Essa expressão é importante na aproximação de esferas não dispersivas fracamente absorbitivas, e serve, a menos de alguns fatores multiplicativos, como uma boa estimativa para a energia eletromagnética média armazenada no centro espalhador [24].

No regime de baixa absorção (wa), há uma correspondência óbvia entre a energia eletromagnética interna média e a eficiência de absorção em função do parâmetro de tamanho [18, 24]. Essa relação pode ser visualizada nas Figs. 3 e 4 da Ref. [24] e, para o caso magnético, Fig. 5 da Ref. [18].

Analicamente, para $m_i \ll m_r$ e $\tilde{m}_i \ll \tilde{m}_r$, podemos escrever $y^2 - y^{*2} \approx 4ix^2 m_r m_i$, $\text{Re}(m\tilde{m}) \approx$

$m_r \tilde{m}_r$ e $\text{Re}(m \tilde{m}^*) \approx m_r \tilde{m}_r$. Usando estas aproximações na Eq. (3.41), obtemos que

$$W_{\text{wa}}(a) \approx \frac{3}{8} W_0 \frac{m_r}{m_i} \frac{2\tilde{m}_r}{x^3 m_r^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|c_n|^2 + |d_n|^2) \text{Im} [\Psi_n(y) \Psi_n'(y^*)] . \quad (3.58)$$

Uma vez que a eficiência de absorção no espalhamento de Lorenz-Mie é definida por $Q_{\text{abs}} = \sigma_{\text{abs}}/\sigma_g$, onde $\sigma_g = \pi a^2$ é a seção de choque geométrica e σ_{abs} está expressa na Eq. (3.57), podemos escrever

$$W_{\text{wa}}(a) \approx \frac{3}{8} W_0 \frac{m_r}{m_i x} Q_{\text{abs}} , \quad (3.59)$$

que é a mesma relação obtida na Ref. [24] para o caso não magnético. De fato, esta aproximação é válida sempre que $m_i \ll m_r$ e $\tilde{m}_i \ll \tilde{m}_r$, e não é afetada pelo valor de μ_1/μ . Em adição, para o caso em que $m_r \approx 1$, obtemos $W_{\text{wa}}(a) \approx W_0$. Nesta situação particular, podemos escrever $Q_{\text{abs}} \approx (8/3)m_i x$, que é a mesma expressão calculada nas Refs. [2, 24].

3.6 Resultados numéricos e discussão

Nesta Seção apresentamos alguns resultados numéricos provenientes das expressões exatas obtidas nas seções anteriores para a energia eletromagnética armazenada em uma esfera magnética. O código do programa usado nos cálculos numéricos foi escrito para o *software* gratuito *Scilab* 5.1.1. No truncamento das séries infinitas, usamos $N_{\text{max}} = x + 4x^{1/3} + 2$ como limite superior para os somatórios $\sum_{n=1}^{N_{\text{max}}}$, onde x é o parâmetro de tamanho [27].

Para a realização dos cálculos numéricos, é conveniente definirmos grandezas adimensionais relacionadas à energia interna média:

$$W_E^{\text{nor}}(m, \tilde{m}, ka) = \frac{W_E(m, \tilde{m}, ka; \epsilon, a)}{W_0(\epsilon, a)} , \quad (3.60)$$

$$W_H^{\text{nor}}(m, \tilde{m}, ka) = \frac{W_H(m, \tilde{m}, ka; \epsilon, a)}{W_0(\epsilon, a)} , \quad (3.61)$$

onde W_E , W_H e W_0 estão expressos nas Eqs. (3.33), (3.37) e (3.44), respectivamente. A dependência de W_E e W_H em relação à grandeza m^* é omitida.

Podemos definir, portanto, uma normalização da energia eletromagnética média no tempo pela relação $W_{\text{tot}}^{\text{nor}} = W_E^{\text{nor}} + W_H^{\text{nor}}$ ou diretamente da Eq. (3.41): $W_{\text{tot}}^{\text{nor}}(m, \tilde{m}, ka) = W(a)/W_0$. A grandeza W/W_0 representa o fator de aumento da energia eletromagnética dentro da esfera magnética em relação a uma esfera com as mesmas propriedades ópticas que o meio circundante e depende apenas das grandezas adimensionais m , \tilde{m} , ka e seus complexos conjugados.

Usando a Eq. (C.13) do Apêndice C, a Eq. (3.31) pode ser reescrita como

$$\frac{W_{Er}(a)}{W_0} = \frac{3}{4} \text{Re}(m\tilde{m}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} |d_n|^2 \left\{ I_{n-1}(y) + I_{n+1}(y) + \frac{2}{a^3} \int_0^a dr r^2 \text{Re}[j_{n-1}(\rho_1) j_{n+1}(\rho_1^*)] \right\}.$$

Note que a integral que aparece na equação acima não pode ser resolvida analiticamente por meio da Eq. (C.14) [37]. Não obstante, é possível mostrar numericamente que o resultado desta integral é proporcional a a^3 .

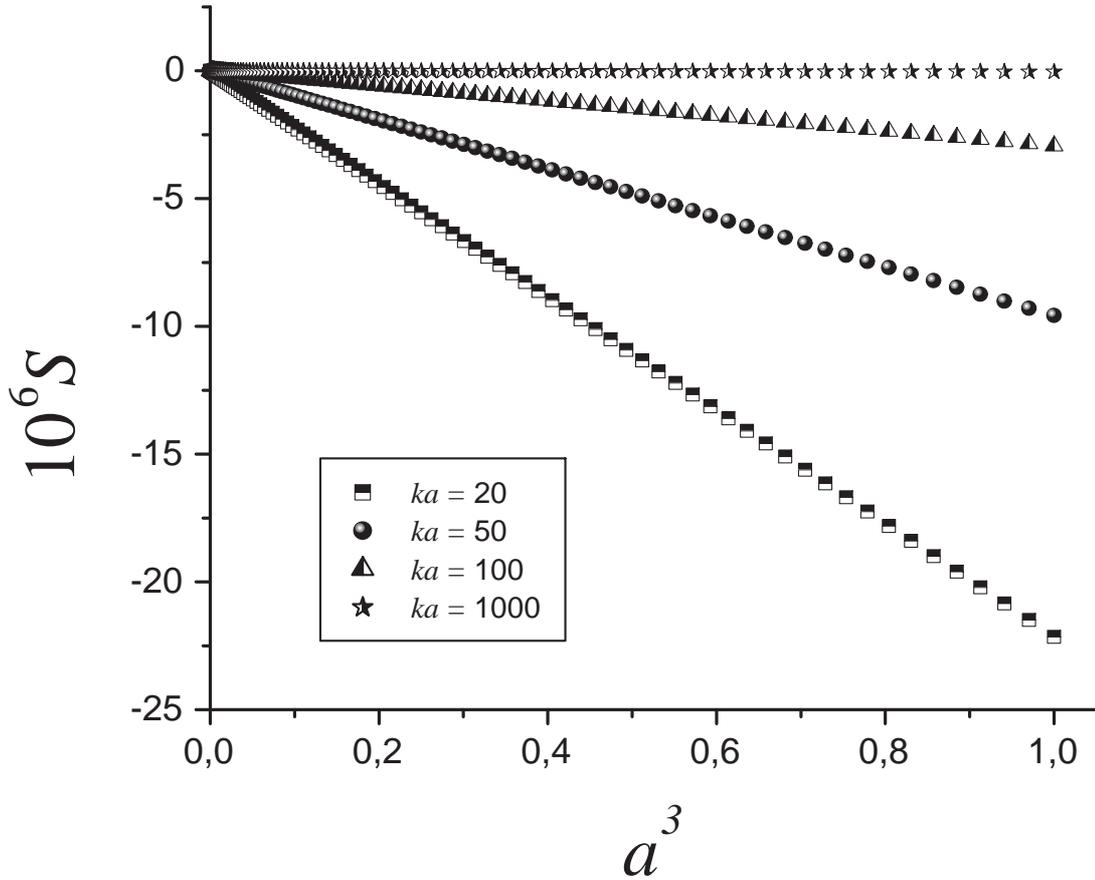


Figura 3.2: Integral $S = \int_0^a dr r^2 \text{Re}[j_{n-1}(mkr) j_{n+1}(m^* kr)]$ em função de a^3 para $n = 20$, $\epsilon_1/\epsilon = (1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i)$, $\mu_1/\mu = 10$ e $ka = 20; 50; 100; 1000$. A relação linear mostra que $S = a^3 F_n(ka, m, \tilde{m})$, onde F_n é uma função que desconhecemos.

Essa proporcionalidade, a qual pode ser verificada na Fig. 3.2, significa que podemos estudar as contribuições da componente radial para o fator de aumento da energia eletromagnética usando apenas os parâmetros adimensionais m , \tilde{m} e ka . O mesmo argumento pode ser aplicado tanto para $[W_{E\theta} + W_{E\phi}](a)/W_0$ quanto para as expressões correspondentes à energia interna magnética, Eqs. (3.35) e (3.36). As contribuições angulares e radial para a energia eletromagnética

interna encontram-se graficadas na Fig. 3.3.

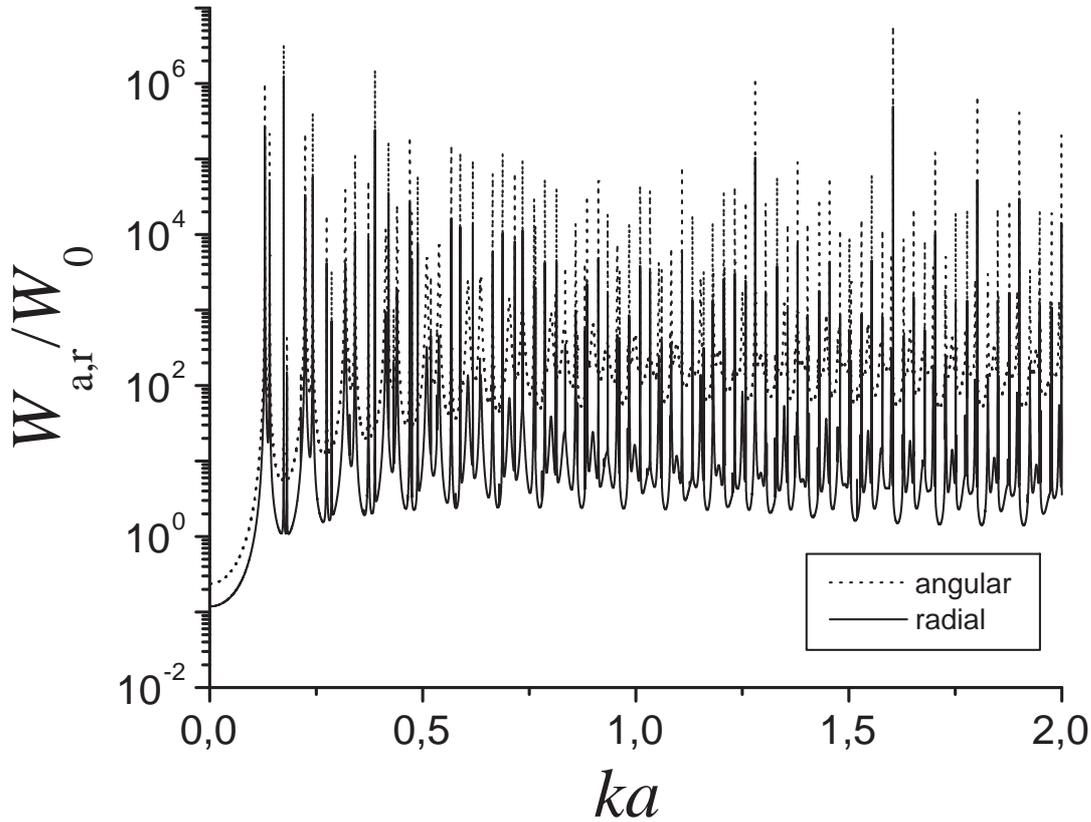


Figura 3.3: Contribuições das componentes radial e angulares para a energia eletromagnética no interior de uma esfera magnética com constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 10$ e $\mu_1/\mu = 100$. As grandezas $W_r = (W_{Er} + W_{Hr})$ e $W_a = (W_{tot} - W_r)$ são calculadas no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 2$, $\delta(ka) = 10^{-4}$.

A Fig. 3.4 mostra uma diferença marcante no perfil de energia interna para pequenas partículas quando o influência do magnetismo é aumentada no espalhamento. O valor de permissividade relativa escolhido para a partícula magnética é o mesmo usado na Ref. [16]. Na literatura, a sucessão de picos de ressonância em função do parâmetro de tamanho do espalhamento é bem conhecida e é chamada de ressonância morfológica ou, mais precisamente, ressonância dependente da morfologia do espalhador (MDR) [13]. Um resultado bem conhecido é que, para esferas não magnéticas, esses picos de ressonância aparecem apenas para grandes esferas comparadas com o comprimento de onda [1, 2, 24]. No entanto, observe que nas Figs. 3.4–3.7 há a presença de ressonâncias mesmo na região de Rayleigh.

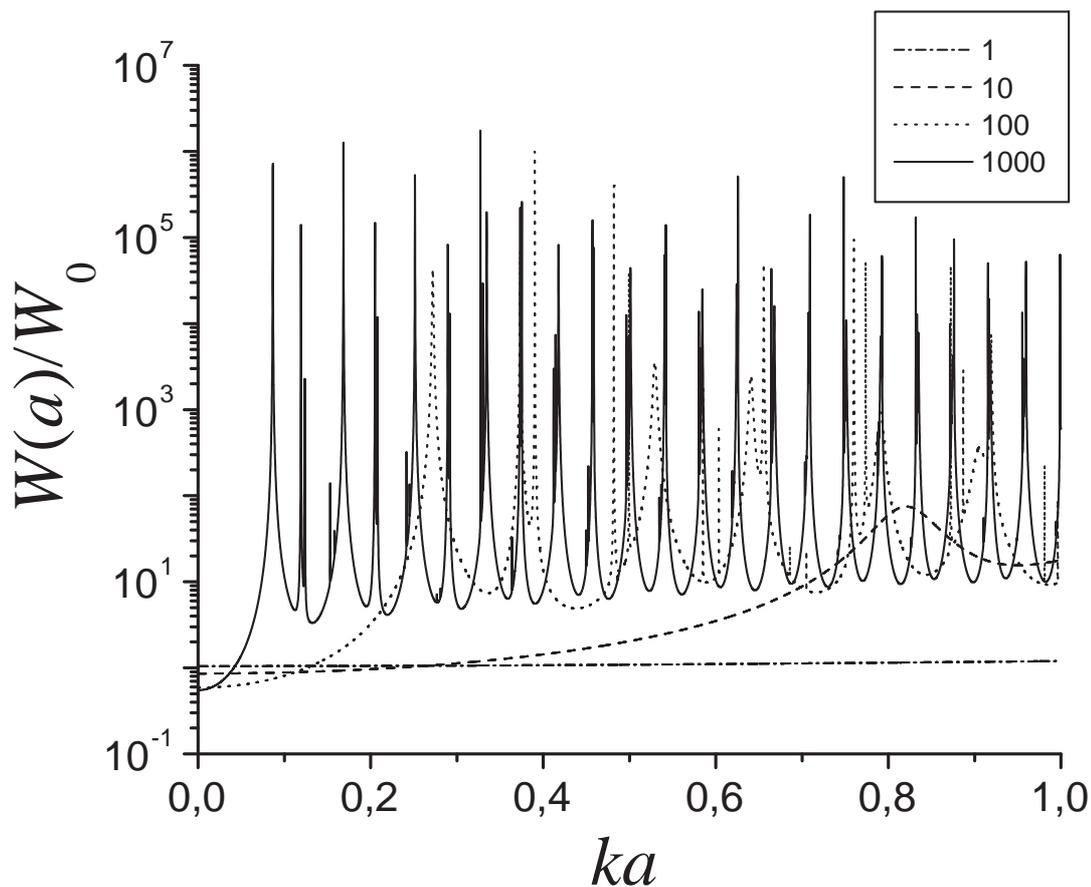


Figura 3.4: Energia eletromagnética no interior de uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A energia interna normalizada $W(a)/W_0$ é calculada no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$.

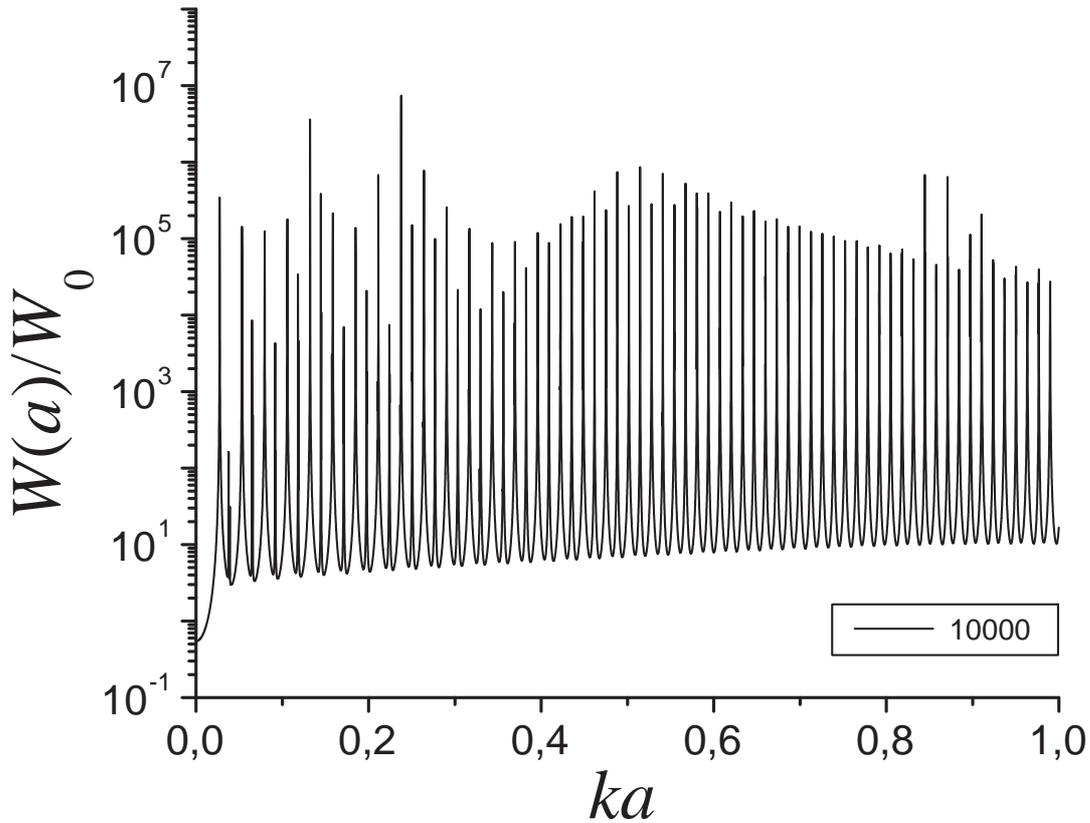


Figura 3.5: Energia eletromagnética no interior de uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 10^4$. A energia interna $W(a)/W_0$ é calculada no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$.

Uma explicação para essas ressonâncias no limite de pequenas partículas é que o magnetismo aumenta drasticamente a seção de choque de extinção mesmo para esferas muito menores que o comprimento de onda de excitação [15, 17, 16]. Em outras palavras, o fóton interage com a seção de choque óptica da partícula a despeito da pequena seção de choque geométrica. De fato, é possível notar uma correspondência entre as Figs. 3.4 e 3.6. Observe que os picos de ressonância na eficiência de extinção $Q_{\text{tot}} = \sigma_{\text{tot}}/(\pi a^2)$, onde σ_{tot} é a seção de choque total definida na Eq. (3.52), ocorrem para os mesmos parâmetros de tamanho da energia interna $W(a)/W_0$.

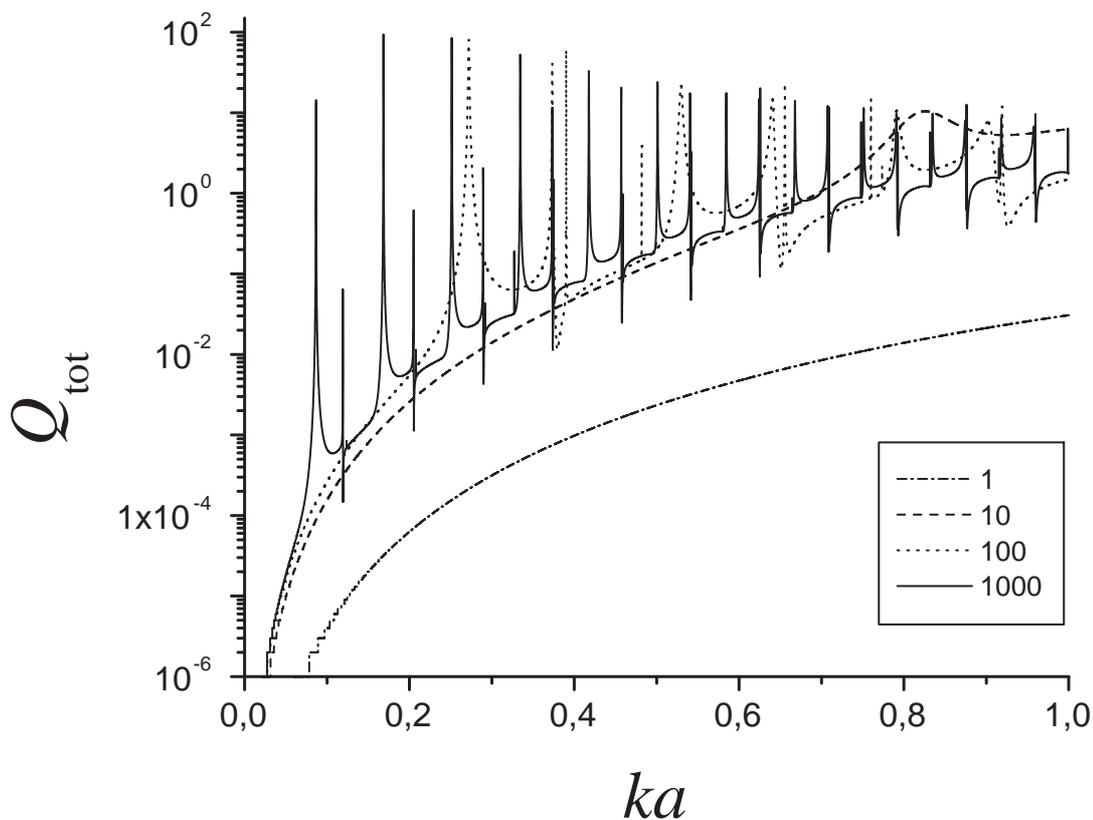


Figura 3.6: Eficiência de extinção para uma esfera não absorbitiva com grandezas constitutivas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. Os valores de Q_{tot} são calculados no intervalo $10^{-6} \leq ka \leq 1$, $\delta(ka) = 10^{-4}$.

A acumulação de energia eletromagnética no interior da esfera magnética para certos parâmetros de tamanho está vinculada ao fato de que a onda permanece mais tempo no centro espalhador (formação de ondas estacionárias), afetando por conseguinte o transporte de energia no meio desordenado. Um estudo detalhado da velocidade de transporte de energia em meios magnéticos tridimensionais (partículas de Lorenz-Mie), sem menção à energia armazenada em cada centro espalhador individualmente, é dado na Ref. [16].

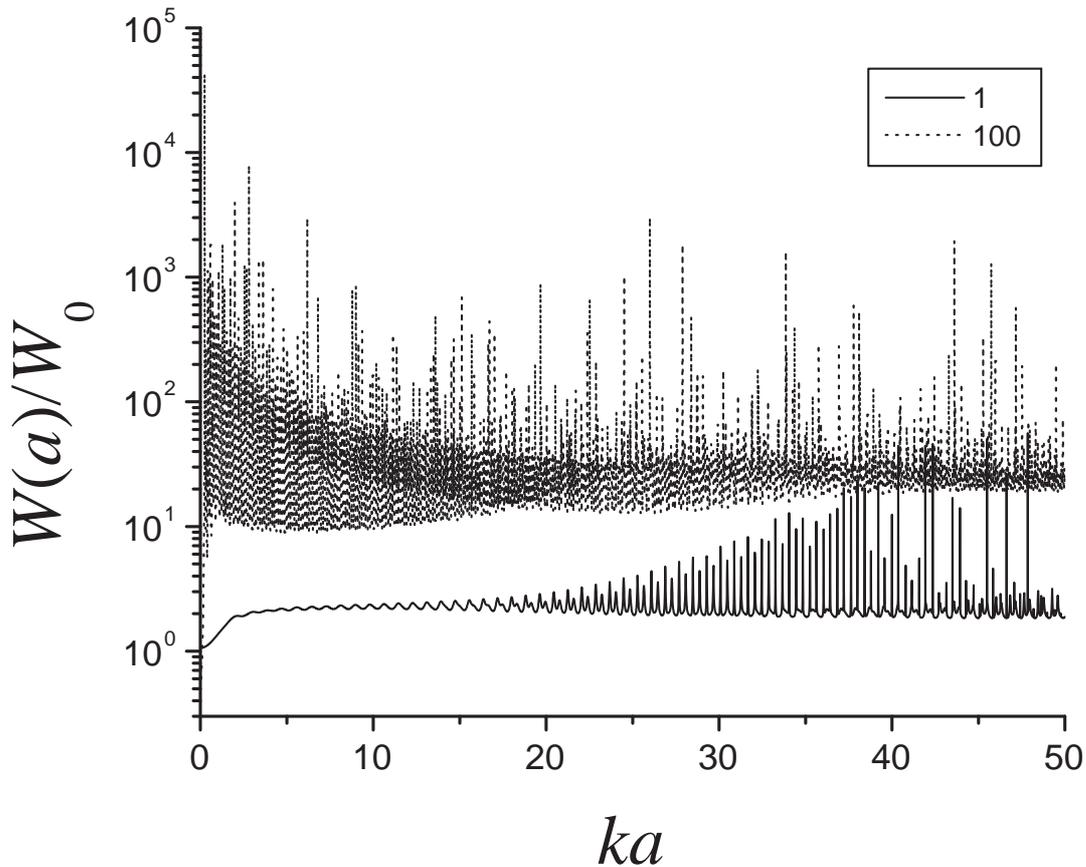


Figura 3.7: Comparação não realista entre a energia interna em esferas fracamente absorbitivas com permeabilidades magnéticas $\mu_1/\mu = 1$ (esfera não magnética) e $\mu_1/\mu = 100$ (esfera magnética), ambas com permissividade elétrica $\epsilon_1/\epsilon = (1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i)^2$. As grandezas são calculadas no intervalo $1 \leq ka \leq 50$, $\delta(ka) = 0,01$.

Na Fig. 3.7 usamos o mesmo valor de índice de refração para a esfera não magnética fracamente absorbitiva da Ref. [24]. O objetivo dos autores da Ref. [24] era estudar o fluxo de fótons em gotículas de água na alta atmosfera, de maneira que apenas os casos não magnético e dielétrico tinham importância prática. Assim, embora a Fig. 3.7 não seja condizente com a realidade, pois obviamente não há magnetismo na água mesmo para frequências fora da região óptica, nosso objetivo de reproduzir o gráfico da Ref [24] ($\mu_1/\mu = 1$) e mostrar a discrepância entre duas situações-limite, isto é, a presença de forte magnetismo e ausência total, é aqui alcançada. Todos esses resultados estão publicados no nosso artigo [18].

3.7 Conclusões

Neste Capítulo apresentamos resultados originais no contexto da teoria de Lorenz-Mie, muitos dos quais se encontram publicados na Ref. [18]. Calculamos analiticamente a energia eletromagnética armazenada no interior de uma esfera homogênea magnética e mostramos que na presença do magnetismo há ressonâncias morfológicas mesmo no limite de pequena esfera comparada ao comprimento de onda incidente (região de Rayleigh). Resultados similares e indiretos foram obtidos nas Refs. [14, 15, 16, 17]. Em especial, Pinheiro *et al.* [16] mostraram que a teoria de Lorenz-Mie para esferas magnéticas prevê a localização de ondas eletromagnéticas na região de Rayleigh. Esse resultado está em concordância com nossos cálculos, uma vez que a acumulação de energia eletromagnética nos centros espalhadores reduz a velocidade de transporte dos fótons no meio desordenado. Embora não tenhamos dado ênfase na Seção 3.5, o fato de termos expressado a seção de choque de absorção em termos dos coeficientes internos c_n e d_n , e mostrado que a relação entre essa grandeza e a energia interna (no regime de fraca absorção) não é alterada pelo magnetismo, é de fundamental importância nesta dissertação. Visto que a energia interna não pode ser mensurada experimentalmente e, mesmo na teoria, é de difícil cálculo analítico quando esse é possível, torna-se interessante associarmos essa grandeza a grandezas de espalhamento – como as seções de choque, no caso. Assim, via seções de choque de extinção e de absorção, podemos ter uma ideia do comportamento da velocidade de transporte de energia no meio desordenado e avaliar o coeficiente de difusão dos fótons [38, 39].

Os principais resultados aqui desenvolvidos estão publicados em nosso artigo [18]. Nos próximos dois Capítulos, generalizamos o cálculo da energia interna para esferas magnéticas concêntricas – isto é, uma esfera magnética que possui uma camada de material magnético de espessura uniforme – e uma esfera opticamente ativa [1].

4 *Espalhamento de ondas eletromagnéticas por duas esferas magnéticas concêntricas*

O campo espalhado por qualquer partícula simetricamente esférica composta de materiais lineares, homogêneos e isotrópicos tem a mesma forma matemática que o campo espalhado por uma esfera linear, homogênea e isotrópica [1]. No entanto, a forma funcional dos coeficientes de espalhamento a_n e b_n dependem das variações radiais de ϵ_1 e μ_1 , e os coeficientes internos são outros. Neste Capítulo, consideramos o problema de espalhamento por uma esfera magnética envolvida por uma camada homogênea de espessura uniforme. A solução para esse problema foi obtida primeiramente por Aden e Kerker em 1951 [40]. Este é um dos exemplos mais simples de partículas com índice de refração variável espacialmente, e pode ser prontamente generalizado para o caso de uma esfera com multicamadas [1].

Com a finalidade de estudarmos a energia eletromagnética efetiva armazenada no interior dessas esferas concêntricas, consideradas *magnéticas*, calculamos aqui explicitamente os coeficientes de Lorenz-Mie do campo eletromagnético interno. Na literatura, apenas os coeficientes de espalhamento na abordagem não magnética podem ser encontrados com facilidade [1]. Em especial, os coeficientes internos do caso não magnético, aplicados ao estudo da densidade de energia em nano- e microcamadas esféricas, foram calculados recentemente por Suzuki e Lee [41]. Um fato que não nos surpreende, aliás, dada nossa experiência com a teoria de Lorenz-Mie, é que os autores da Ref. [41] cometeram um erro no cálculo de um dos coeficientes internos, obtendo, então, resultados numéricos distorcidos sobre a densidade de energia nas esferas. A errata desses cálculos foi publicada no final de 2009, pouco mais de um ano após a publicação do artigo original [41].

Enfatizamos que o sistema que lidamos aqui, por levarmos em conta o magnetismo, é mais rico e genérico que o da Ref. [41]. Ademais, nosso objetivo neste Capítulo é obtermos uma expressão analítica exata para a energia eletromagnética armazenada nas esferas, e não apenas a densidade de energia, cujo cálculo, uma vez determinados os campos e os coeficientes internos,

é imediato. A ideia é modelarmos um sistema em que podemos ter uma esfera magnética envolvida por um material dielétrico, e vice-versa. O meio externo, por simplicidade, é assumido como sendo transparente e não dispersivo.

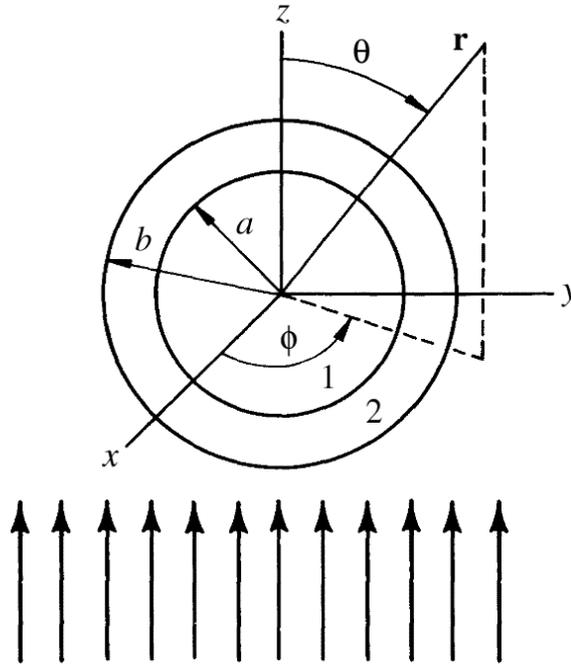


Figura 4.1: Esfera magnética (ϵ_1, μ_1) de raio a envolvida por uma camada magnética (ϵ_2, μ_2) de espessura uniforme ($b - a$).

A descrição desse sistema é essencialmente a mesma do Capítulo 3, com a diferença de que a esfera magnética não é homogênea. Consideramos uma onda eletromagnética plana $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)e^{-i\omega t}$ incidente a uma partícula composta por uma esfera interior de raio a e uma camada esférica concêntrica de raio b , como é mostrado na Fig. 4.1. Os meios envolvidos, como mencionamos acima, são tomados como sendo lineares, homogêneos e isotrópicos, com constantes ópticas (ϵ_1, μ_1) para a esfera interior ($0 \leq r \leq a$), (ϵ_2, μ_2) para a camada externa ($a \leq r \leq b$) e (ϵ, μ) para o meio circundante não absorbitivo. O problema a ser resolvido é o mesmo da teoria de Lorenz-Mie: equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas – Eq. (3.1). O que muda, neste caso, são as condições de contorno que levam em conta três meios materiais distintos.

4.1 Campos eletromagnéticos

As soluções da equação de Helmholtz para cada uma das regiões são expressas em termos dos harmônicos esféricos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} definidos nas Eqs. (3.4)–(3.7) da Seção 3.1. Os

campos eletromagnéticos incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ ($r \geq b$), interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ ($0 \leq r \leq a$) e espalhado $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ ($b \leq r$) são dados pelas mesmas expansões calculadas na teoria de Lorenz-Mie da Seção 3.2. A novidade é o campo eletromagnético $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ na camada esférica concêntrica $a \leq r \leq b$. Seguindo a Ref. [1], esse campo tem a mesma forma que o campo interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, com a diferença de que, neste caso, devemos considerar nos harmônicos esféricos vetoriais tanto a função esférica de Riccati-Bessel $\psi_n(\rho_2) = \rho_2 j_n(\rho_2)$ quanto a de Riccati-Neumann $\chi_n(\rho_2) = -\rho_2 y_n(\rho_2)$, visto que não há nenhuma restrição nesta região (e ambas são finitas para $a \neq 0$). Aqui, temos a dependência radial $\rho_2 = k_2 r$, sendo k_2 o número de onda no meio (ϵ_2, μ_2) .

O fato de não considerarmos como solução para o campo eletromagnético na camada as funções esféricas de Riccati-Henkel $\rho_2[j_n(\rho_2) \pm iy_n(\rho_2)]$, que também não divergem na região $a \leq r \leq b$, tem uma explicação física bastante intuitiva. Se tomarmos o limite $n \rightarrow \infty$, as funções de Riccati-Bessel $\psi_n(\rho_2)$ e Riccati-Neumann $\chi_n(\rho_2)$, das quais dependem a onda escalar ψ geratriz dos harmônicos vetoriais, podem ser expressas por $\sin \rho_2$ e $\cos \rho_2$, respectivamente – Seção B.1. Assim, assumida a mesma dependência temporal harmônica, enquanto a onda escalar $\alpha \sin \rho_2 + \beta \cos \rho_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) representa uma onda estacionária, $\sin \rho_2 \pm i \cos \rho_2 = e^{\pm i \rho_2}$ descreve uma onda complexa progressiva. É natural, portanto, que os campos internos sejam descritos por ondas estacionárias (funções de Bessel e Neumann), enquanto que os campos espalhados sejam representados por ondas progressivas (funções de Hankel).

Dessas considerações, temos que o campo eletromagnético $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$, por apresentar na solução estacionária as funções esféricas de Bessel e Neumann separadamente, possui dois coeficientes a mais que o campo $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$. Portanto, podemos escrever [1]

$$\mathbf{E}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[f_n \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i g_n \mathbf{N}_{e1n}^{(1)} + v_n \mathbf{M}_{o1n}^{(2)} - i w_n \mathbf{N}_{e1n}^{(2)} \right], \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[g_n \mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + i f_n \mathbf{N}_{o1n}^{(1)} + w_n \mathbf{M}_{e1n}^{(2)} + i v_n \mathbf{N}_{o1n}^{(2)} \right], \quad (4.2)$$

onde os harmônicos com índice (2) são gerados pela função de Neumann $y_n(k_2 r)$. Em termos das componentes em coordenadas esféricas, o campo eletromagnético $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ está expresso no Apêndice A, Seção A.2.

4.2 Coeficientes das expansões

As condições de contorno aplicadas ao problema das esferas concêntricas magnéticas em $r = b$ são as mesmas expressas na Seção 2.2, com a complexidade adicional de que há uma interface em $r = a$ entre a esfera interior e a camada esfericamente concêntrica. Portanto, não

havendo distribuições de carga e fontes de corrente nos meios materiais envolvidos, a imposição de que as componentes tangenciais dos campos eletromagnéticos sejam contínuas nas interfaces é dada pelas equações vetoriais

$$\begin{aligned}
 r = a : & \begin{cases} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0} , \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0} , \end{cases} \\
 r = b : & \begin{cases} (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0} , \\ (\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_i - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0} , \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Expressando o sistema de Eqs. (4.3) em termos das componentes dos campos eletromagnéticos, dadas nas Seções A.1 e A.2, obtemos o sistema de equações escalares

$$\left\{ \begin{aligned}
 m_2 \xi'_n(y) \underline{a}_n + \psi'_n(m_2 y) \underline{g}_n - \chi'_n(m_2 y) \underline{w}_n &= m_2 \psi'_n(y) , \\
 m_2 \xi_n(y) \underline{b}_n + \psi_n(m_2 y) \underline{f}_n - \chi_n(m_2 y) \underline{v}_n &= m_2 \psi_n(y) , \\
 m_2 \xi_n(y) \underline{a}_n + \tilde{m}_2 \psi_n(m_2 y) \underline{g}_n - \tilde{m}_2 \chi_n(m_2 y) &= m_2 \psi_n(y) , \\
 m_2 \xi'_n(y) \underline{b}_n + \tilde{m}_2 \psi'_n(m_2 y) \underline{f}_n - \tilde{m}_2 \chi'_n(m_2 y) \underline{v}_n &= m_2 \psi'_n(y) , \\
 m_2 \psi_n(m_1 x) \underline{c}_n - m_1 \psi_n(m_2 x) \underline{f}_n + m_1 \chi_n(m_2 x) \underline{v}_n &= 0 , \\
 m_2 \psi'_n(m_1 x) \underline{d}_n - m_1 \psi'_n(m_2 x) \underline{g}_n + m_1 \chi'_n(m_2 x) \underline{w}_n &= 0 , \\
 m_2 \tilde{m}_1 \psi'_n(m_1 x) \underline{c}_n - m_1 \tilde{m}_2 \psi'_n(m_2 x) \underline{f}_n + m_1 \tilde{m}_2 \chi'_n(m_2 x) \underline{v}_n &= 0 , \\
 m_2 \tilde{m}_1 \psi_n(m_1 x) \underline{d}_n - m_1 \tilde{m}_2 \psi_n(m_2 x) \underline{g}_n + m_1 \tilde{m}_2 \chi_n(m_2 x) \underline{w}_n &= 0 ,
 \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

onde as funções incógnitas a_n , b_n , c_n , d_n , f_n , g_n , v_n e w_n encontram-se destacadas com um duplo sublinhado. A resolução do sistema de Eqs. (4.4), embora mais complicada que a do sistema de

Eqs. (3.20), é relativamente simples e fornece os coeficientes

$$a_n = \frac{\tilde{m}_2 \Psi'_n(y) \alpha_n - \Psi_n(y) \tilde{\alpha}_n}{\tilde{m}_2 \xi'_n(y) \alpha_n - \xi_n(y) \tilde{\alpha}_n}, \quad (4.5)$$

$$b_n = \frac{\Psi'_n(y) \beta_n - \tilde{m}_2 \Psi_n(y) \tilde{\beta}_n}{\xi'_n(y) \beta_n - \tilde{m}_2 \xi_n(y) \tilde{\beta}_n}, \quad (4.6)$$

$$c_n = \frac{m_1 f_n \beta_n}{m_2 \Psi_n(m_1 x)}, \quad (4.7)$$

$$d_n = \frac{m_1 g_n \tilde{\alpha}_n}{m_2 \Psi'_n(m_1 x)}, \quad (4.8)$$

$$f_n = \frac{m_2 \iota}{\xi'_n(y) \beta_n - \tilde{m}_2 \xi_n(y) \tilde{\beta}_n}, \quad (4.9)$$

$$g_n = \frac{m_2 \iota}{\tilde{m}_2 \xi'_n(y) \alpha_n - \xi_n(y) \tilde{\alpha}_n}, \quad (4.10)$$

$$v_n = B_n f_n, \quad (4.11)$$

$$w_n = A_n g_n, \quad (4.12)$$

onde consideramos, por simplicidade, as funções [1]

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tilde{m}_2 \Psi_n(m_2 x) \Psi'_n(m_1 x) - \tilde{m}_1 \Psi'_n(m_2 x) \Psi_n(m_1 x)}{\tilde{m}_2 \chi_n(m_2 x) \Psi'_n(m_1 x) - \tilde{m}_1 \chi'_n(m_2 x) \Psi_n(m_1 x)}, \\ B_n &= \frac{\tilde{m}_2 \Psi'_n(m_2 x) \Psi_n(m_1 x) - \tilde{m}_1 \Psi_n(m_2 x) \Psi'_n(m_1 x)}{\tilde{m}_2 \chi'_n(m_2 x) \Psi_n(m_1 x) - \tilde{m}_1 \chi_n(m_2 x) \Psi'_n(m_1 x)}, \\ \alpha_n &= \Psi_n(m_2 y) - A_n \chi_n(m_2 y), \\ \beta_n &= \Psi_n(m_2 y) - B_n \chi_n(m_2 y) \\ \tilde{\alpha}_n &= \Psi'_n(m_2 y) - A_n \chi'_n(m_2 y), \\ \tilde{\beta}_n &= \Psi'_n(m_2 y) - B_n \chi'_n(m_2 y). \end{aligned}$$

As grandezas $x = ka$ e $y = kb$ são os parâmetros de tamanho relativos às esferas interior e exterior, respectivamente. Nos coeficientes internos f_n e g_n , usamos o Wronskiano $\Psi_n(y) \xi'_n(y) - \Psi'_n(y) \xi_n(y) = \iota$. Seguindo nossa notação para as grandezas ópticas, $m_q = \sqrt{\mu_q \epsilon_q / \mu \epsilon}$ e $\tilde{m}_q = \sqrt{\mu \epsilon_q / \mu_q \epsilon}$ são, respectivamente, os índices de refração e impedância relativos entre os meios q ($q = 1; 2$) e o meio circundante ($r \geq b$). Note que para uma esfera magnética homogênea, isto é, $m_1 = m_2$ e $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$, temos $A_n = B_n = 0$ e, portanto, os coeficientes usuais de Lorenz-Mie, Eqs. (3.21)–(3.24), são recuperados [1]. O mesmo resultado vale tanto no limite de esfera interior de volume nulo ($a \rightarrow 0$, o que resulta em uma esfera homogênea de raio b) quanto na situação em que $m_2 = 1$ (esfera homogênea de raio a) [1].

4.3 Energia eletromagnética interna às esferas

Nesta Seção estendemos os cálculos da energia interna realizados na Seção 3.4 do Capítulo 3. Aqui, consideramos tanto a energia média armazenada na esfera interior ($0 \leq r \leq a$), calculada na Seção 3.4, quanto na camada esférica concêntrica ($a \leq r \leq b$). Até onde sabemos, essa é a primeira vez que o cálculo explícito da energia eletromagnética média no interior de duas esferas concêntricas é realizado.

Para a abordagem do problema, considere um campo eletromagnético harmônico ($\mathbf{E}_q, \mathbf{H}_q$) confinado a um meio não dispersivo e fracamente absorbitivo que é restrito à camada esférica ($l_1 \leq r \leq l_2$), com grandezas constitutivas (ϵ_q, μ_q). Da teoria clássica do eletromagnetismo, temos que a média temporal da energia eletromagnética W_q nessa região do espaço [25] é dada por

$$W_q(l_1, l_2) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_{l_1}^{l_2} dr r^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\epsilon_q}{4} (|E_{qr}|^2 + |E_{q\theta}|^2 + |E_{q\phi}|^2) + \frac{\mu_q}{4} (|H_{qr}|^2 + |H_{q\theta}|^2 + |H_{q\phi}|^2) \right]. \quad (4.13)$$

Ademais, se a camada esférica tem as mesmas propriedades ópticas que o meio circundante, segue que

$$W_0(l_1, l_2) = \frac{2}{3} \pi |E_0|^2 \epsilon (l_2^3 - l_1^3). \quad (4.14)$$

4.3.1 Esfera interior

A partir das Eqs. (4.13) e (4.14), podemos determinar expressões analíticas para a energia nas regiões $0 \leq r \leq a$ e $a \leq r \leq b$. Para a esfera interior ($0 \leq r \leq a$), os detalhes dos cálculos encontram-se na Seção 3.4 [18]. Usando uma notação adequada ao problema, reescrevemos as Eqs. (3.33) e (3.37) da seguinte forma:

$$W_{1E}(0, a) = \frac{3}{4} W_0(0, a) \operatorname{Re} (m_1 \tilde{m}_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+1) |c_n|^2 I_{1,n}^{(jj)}(0, a) + |d_n|^2 \left[n I_{1,n+1}^{(jj)}(0, a) + (n+1) I_{1,n-1}^{(jj)}(0, a) \right] \right\}, \quad (4.15)$$

para o campo elétrico \mathbf{E}_1 , e

$$W_{1H}(0, a) = \frac{3}{4} W_0(0, a) \operatorname{Re} (m_1 \tilde{m}_1^*) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+1) |d_n|^2 I_{1,n}^{(jj)}(0, a) + |c_n|^2 \left[n I_{1,n+1}^{(jj)}(0, a) + (n+1) I_{1,n-1}^{(jj)}(0, a) \right] \right\}, \quad (4.16)$$

para o campo magnético \mathbf{H}_1 , onde definimos a função

$$I_{q,n}^{(z\bar{z})}(l_1, l_2) = \frac{1}{(l_2^3 - l_1^3)} \int_{l_1}^{l_2} dr r^2 z_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q^*), \quad (4.17)$$

sendo z_n e \bar{z}_n quaisquer das funções esféricas de Bessel ou Neumann. A integral expressa na Eq. (4.17) pode ser resolvida analiticamente [37] e sua solução está definida nas Eqs. (C.17) para $m_q \neq m_q^*$ (meio absorbitivo) e (C.18) para m_q real (meio transparente). No presente caso, usamos nas Eqs. (4.15) e (4.16) $q = 1$, a função esférica de Bessel $z_n = \bar{z}_n = j_n$, e tomamos os limites de integração $l_1 = 0$ e $l_2 = a$. Nas expressões acima, empregamos as igualdades $\text{Re}(m_q \tilde{m}_q) = \text{Re}(\epsilon_q)/\epsilon$ e $\text{Re}(m_q \tilde{m}_q^*) = |k_q/\omega\mu_q|^2 \text{Re}(\mu_q)/\epsilon$, onde $q = 1; 2$.

Portanto, a energia eletromagnética média armazenada na esfera interior é dada por

$$W_1(0, a) = W_{1E}(0, a) + W_{1H}(0, a). \quad (4.18)$$

A partir desse momento, para fixarmos um padrão de notação, é conveniente denotarmos nossas expressões apenas em função de $I_{q,n}^{(z\bar{z})}(l_1, l_2)$. Como pode ser verificado na Seção 3.4, essa função para $q = 1$, $l_1 = 0$, $l_2 = a$ e $z_n = \bar{z}_n = j_n$ pode ser escrita em termos da função derivada logarítmica, Eq. (3.43), a qual costuma ser empregada para facilitar cálculos numéricos envolvendo funções de Bessel [1].

4.3.2 Camada esférica concêntrica

O cálculo da energia interna à camada de espessura uniforme ($b - a$) é análogo ao cálculo da energia apresentada na Seção anterior. A complicação a mais é que, dessa vez, temos também a função esférica de Neumann nos cálculos. Sem entrarmos em detalhes, aplicando o mesmo procedimento da Seção 3.4 para eliminarmos o duplo somatório, calculamos, a partir da Eq. (4.13), a contribuição das componentes radial e angulares do campo elétrico \mathbf{E}_2 :

$$\begin{aligned} W_{2Er}(a, b) &= \frac{\text{Re}(\epsilon_2)}{4} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b dr r^2 |E_{2r}|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\epsilon_2)}{|k_2|^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) \int_a^b dr \left\{ |g_n j_n(\rho_2)|^2 + |w_n y_n(\rho_2)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re}[g_n w_n^* j_n(\rho_2) y_n(\rho_2^*)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}
[W_{2E\theta} + W_{2E\phi}](a, b) &= \frac{\text{Re}(\epsilon_2)}{4} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dr r^2 \left[|E_{2\theta}|^2 + |E_{2\phi}|^2 \right] \\
&= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\epsilon_2)}{|k_2|^2} \int_a^b dr \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |f_n \Psi_n(\rho_2)|^2 + |v_n \chi_n(\rho_2)|^2 \right. \\
&\quad - 2\text{Re} [f_n v_n^* \Psi_n(\rho_2) \chi_n(\rho_2^*)] + |g_n \Psi'_n(\rho_2)|^2 \\
&\quad \left. + |w_n \chi'_n(\rho_2)|^2 - 2\text{Re} [g_n w_n^* \Psi'_n(\rho_2) \chi'_n(\rho_2^*)] \right\}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Usando as Eqs. (C.12), (C.20) e (C.19) da Seção C.2 e a definição (4.17), obtemos a média temporal da energia elétrica na camada esférica ($a \leq r \leq b$):

$$\begin{aligned}
W_{2E}(a, b) &= \frac{3}{4} W_0(a, b) \text{Re}(m_2 \tilde{m}_2) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+1) |f_n|^2 I_{2,n}^{(jj)}(a, b) \right. \\
&\quad + |g_n|^2 \left[n I_{2,n+1}^{(jj)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(jj)}(a, b) \right] \\
&\quad + (2n+1) |v_n|^2 I_{2,n}^{(yy)}(a, b) \\
&\quad + |w_n|^2 \left[n I_{2,n+1}^{(yy)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(yy)}(a, b) \right] \\
&\quad + 2\text{Re} \left[(2n+1) f_n v_n^* I_{2,n}^{(jy)}(a, b) \right. \\
&\quad \left. \left. + g_n w_n^* \left(n I_{2,n+1}^{(jy)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(jy)}(a, b) \right) \right] \right\}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Analogamente, para o campo magnético \mathbf{H}_2 , obtemos

$$\begin{aligned}
W_{2Hr}(a, b) &= \frac{\text{Re}(\mu_2)}{4} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b dr r^2 |H_{2r}|^2 \\
&= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\mu_2^{-1})}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) \int_a^b dr \left\{ |f_n j_n(\rho_2)|^2 + |v_n y_n(\rho_2)|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\text{Re} [f_n v_n^* j_n(\rho_2) y_n(\rho_2^*)] \right\}, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[W_{2H\theta} + W_{2H\phi}](a, b) &= \frac{\text{Re}(\mu_2)}{4} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dr r^2 \left[|H_{2\theta}|^2 + |H_{2\phi}|^2 \right] \\
&= \frac{\pi}{2} |E_0|^2 \frac{\text{Re}(\mu_2^{-1})}{\omega^2} \int_a^b dr \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left\{ |g_n \Psi_n(\rho_2)|^2 + |w_n \chi_n(\rho_2)|^2 \right. \\
&\quad - 2\text{Re} [g_n w_n^* \Psi_n(\rho_2) \chi_n(\rho_2^*)] + |f_n \Psi'_n(\rho_2)|^2 \\
&\quad \left. + |v_n \chi'_n(\rho_2)|^2 - 2\text{Re} [f_n v_n^* \Psi'_n(\rho_2) \chi'_n(\rho_2^*)] \right\}, \tag{4.23}
\end{aligned}$$

de modo que a média temporal da energia magnética na camada esférica ($a \leq r \leq b$) é dada por:

$$\begin{aligned}
W_{2H}(a, b) = & \frac{3}{4} W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2 \tilde{m}_2^*) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+1) |g_n|^2 I_{2,n}^{(jj)}(a, b) \right. \\
& + |f_n|^2 \left[n I_{2,n+1}^{(jj)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(jj)}(a, b) \right] + (2n+1) |w_n|^2 I_{2,n}^{(yy)}(a, b) \\
& + |v_n|^2 \left[n I_{2,n+1}^{(yy)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(yy)}(a, b) \right] + 2 \operatorname{Re} \left[(2n+1) g_n w_n^* I_{2,n}^{(jy)}(a, b) \right. \\
& \left. \left. + f_n v_n^* \left(n I_{2,n+1}^{(jy)}(a, b) + (n+1) I_{2,n-1}^{(jy)}(a, b) \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Portanto, a energia eletromagnética média no tempo dentro da região da camada esférica é expressa por

$$W_2(a, b) = W_{2E}(a, b) + W_{2H}(a, b). \tag{4.25}$$

Usando a Eq. (4.18) e as expressões calculadas na Seção anterior, obtemos a energia eletromagnética média *efetiva* dentro das duas esferas concêntricas, região ($0 \leq r \leq b$):

$$W_{1;2}(a, b) = W_1(0, a) + W_2(a, b). \tag{4.26}$$

A fim de tratarmos apenas com grandezas adimensionais, definimos a normalização

$$W_{\text{nor}}(S) = \frac{W_{1;2}(a, b)}{W_0(0, b)} = S^3 \frac{W_1(0, a)}{W_0(0, a)} + (1 - S^3) \frac{W_2(a, b)}{W_0(a, b)}, \tag{4.27}$$

onde $S = a/b$ é a razão de espessura das esferas concêntricas. Aqui, por simplicidade de notação, omitimos a dependência de W_{nor} com relação a m_q , \tilde{m}_q , ka , kb e seus complexos conjugados.

4.4 Resultados numéricos e discussão

Os cálculos numéricos que efetuamos aqui são uma extensão daqueles realizados na Seção 3.6 para uma esfera homogênea. A novidade é que, no presente caso, podemos considerar situações em que há um material dielétrico compondo a partícula espalhadora. Como limite superior para as séries infinitas, usamos nos cálculos numéricos o mesmo N_{max} usado na teoria de Lorenz-Mie, com a diferença de que consideramos $y = kb$ no lugar de $x = ka$ [27].

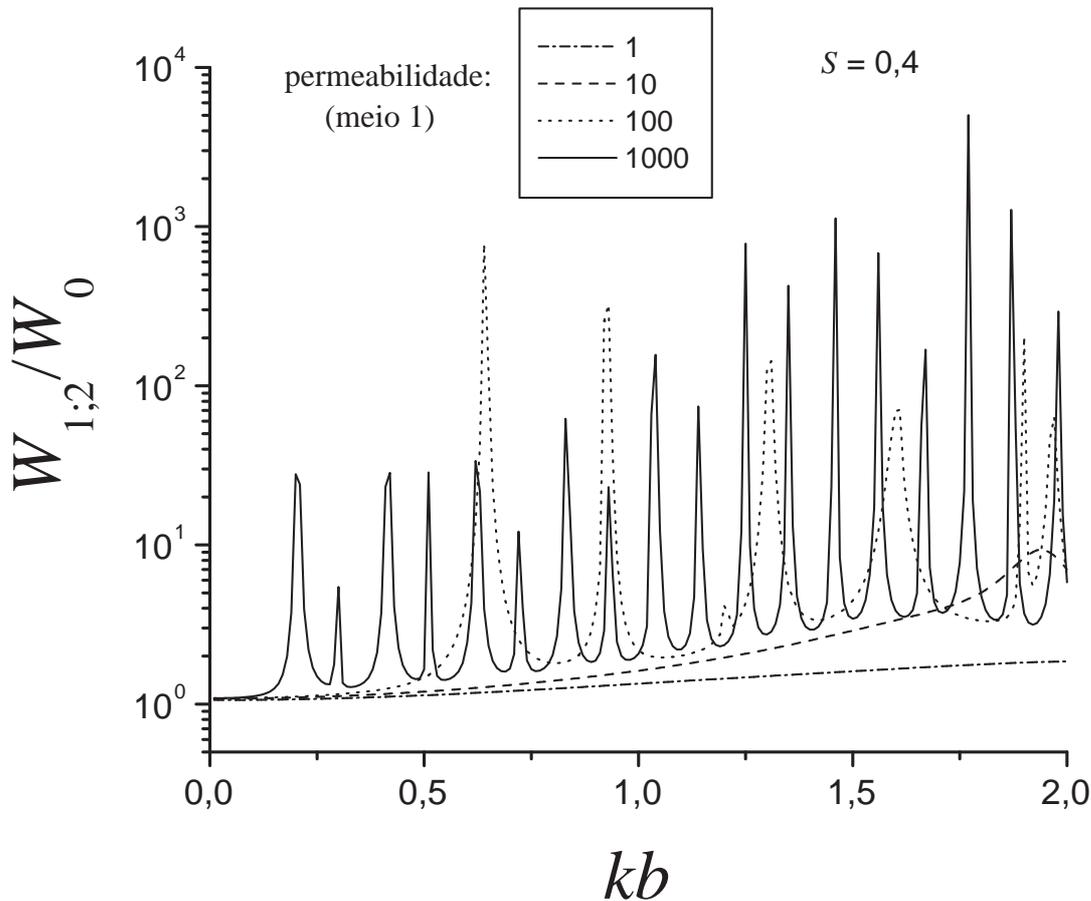


Figura 4.2: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de duas esferas concêntricas, sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da esfera interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada esférica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $b - a$. A razão de espessura é $a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

A Fig. 4.2 mostra o perfil da energia eletromagnética armazenada em duas esferas concêntricas, assumindo que a esfera interior é magnética e a camada esférica concêntrica não o é. Para ambos os meios materiais, usamos os mesmos valores de índice de refração empregados no Capítulo anterior. Aqui, tratamos os meios como sendo fracamente absorbitivos, de maneira que uma parte imaginária muito menor que a parte real é introduzida nas permissividades elétricas relativas. Como esperado, para uma dada espessura, o sistema apresentado na Fig. 4.2 se comporta como uma única esfera magnética efetiva. De fato, as ressonâncias nos coeficientes internos de Lorenz-Mie, mesmo na região de Rayleigh [2], aumentam à medida que elevamos o valor de permeabilidade magnética efetiva do centro espalhador, resultado que já conhecemos [18]. O mesmo pode ser visto no caso em que a esfera é dielétrica e a camada esférica é

magnética, Fig. 4.3.

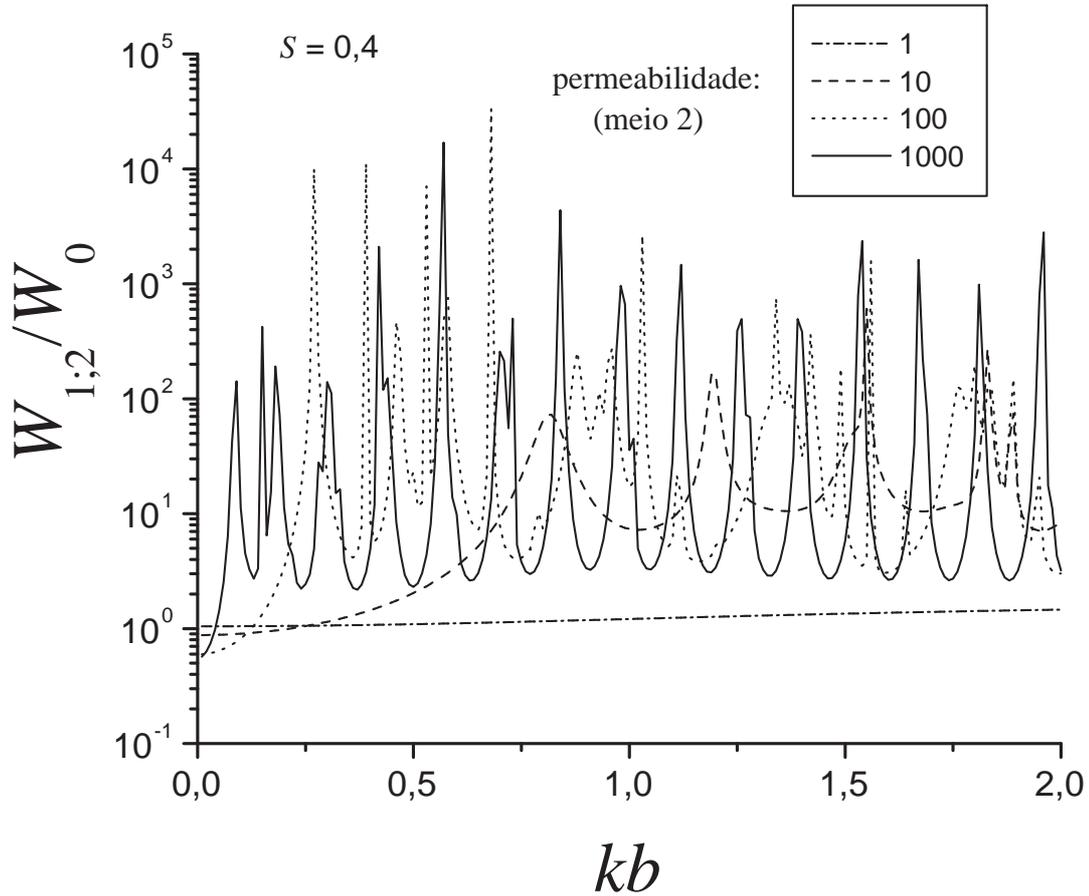


Figura 4.3: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de duas esferas concêntricas, sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da camada esférica de espessura $(b - a)$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da esfera interior não magnética ($\mu_1/\mu = 1$) de raio a . A razão de espessura é $a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Um resultado interessante surge, porém, da consideração de apenas um dos materiais isoladamente. Podemos calcular, por exemplo, qual é o perfil da energia interna na parte dielétrica das duas esferas concêntricas quando o magnetismo da outra parte complementar é aumentado. Isso é feito nas Figs. 4.4 e 4.5, respectivamente, para uma camada esférica concêntrica não magnética envolvendo uma esfera magnética e o caso recíproco. Os perfis apresentados nos dois casos são claramente distintos.

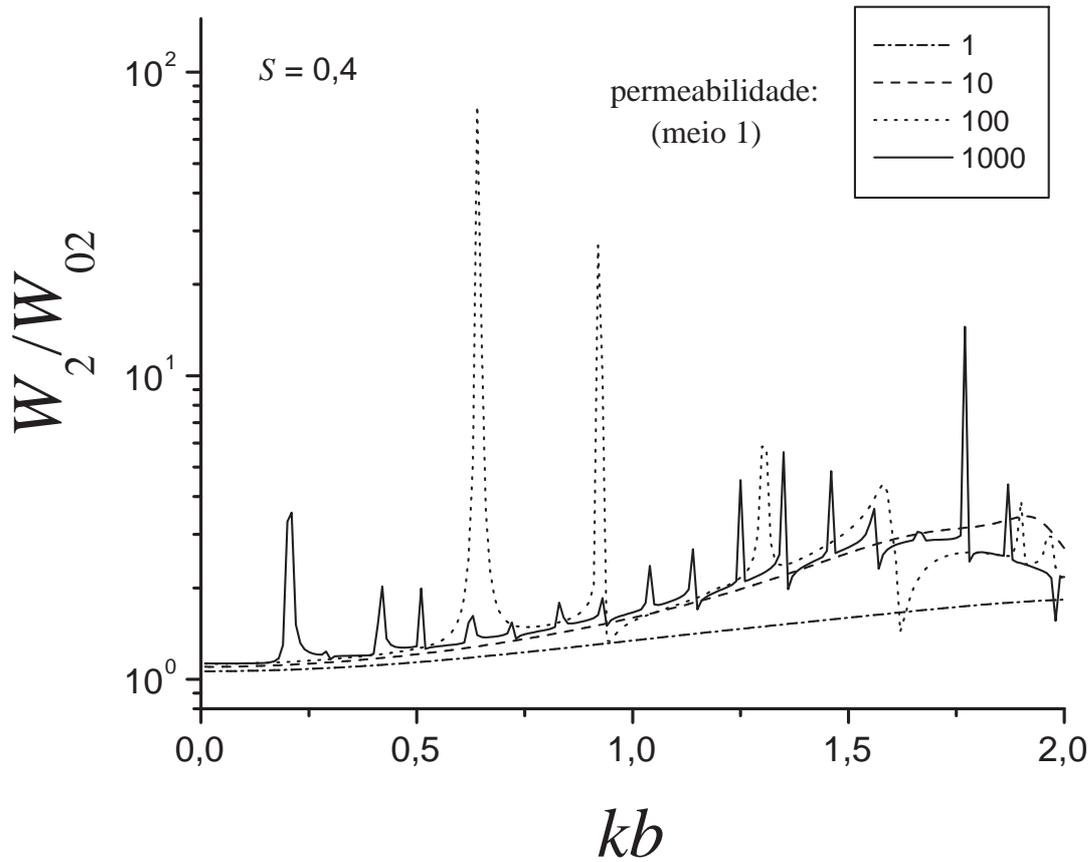


Figura 4.4: Energia eletromagnética $W_2(a,b)/W_0(a,b) = W_2/W_{02}$ armazenada em uma camada esférica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$), de espessura $(b-a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvendo uma esfera magnética de raio a e constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

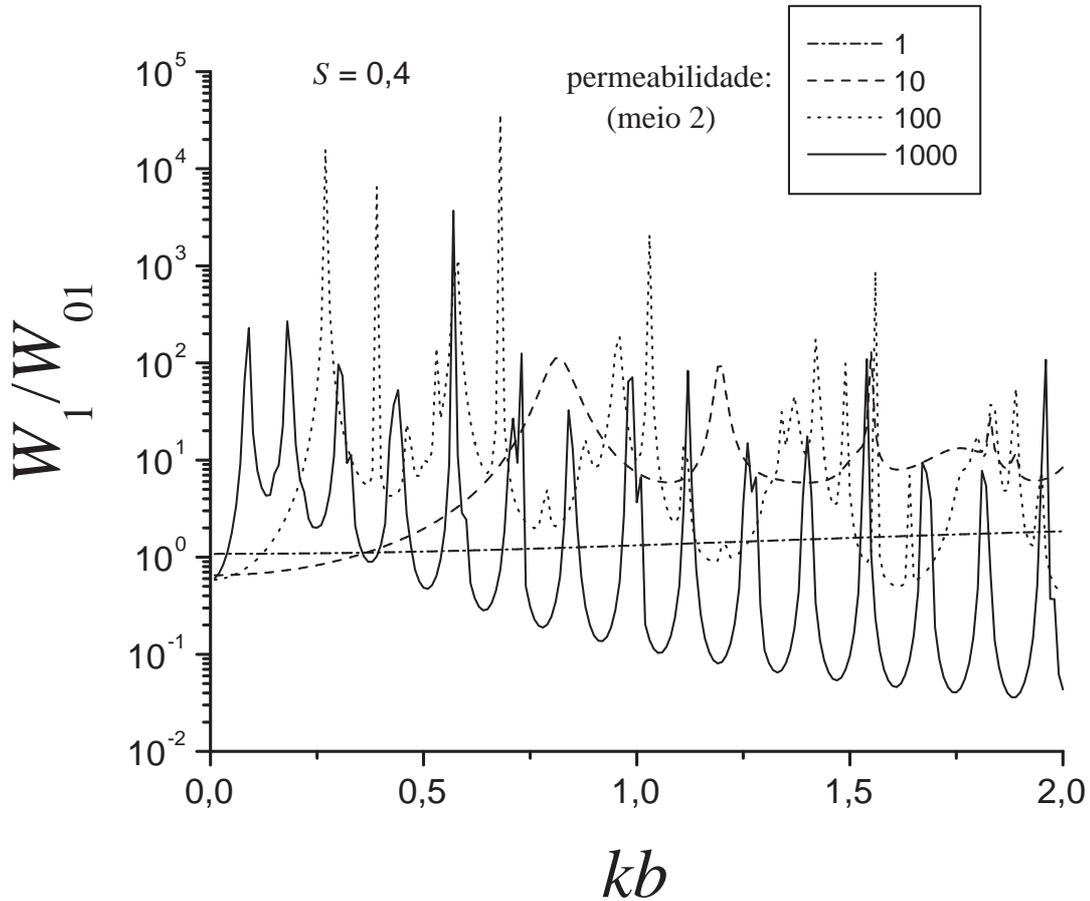


Figura 4.5: Energia eletromagnética $W_1(0, a)/W_0(0, a) = W_1/W_{01}$ armazenada em uma esfera não magnética ($\mu_1/\mu = 1$) de raio a e índice de refração $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ envolvida por uma camada esférica de espessura $(b - a)$ e constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Poderíamos imputar a diferença exibida entre as Figs. 4.4 e 4.5 à geometria dos meios envolvidos e, principalmente, às propriedades ópticas dos meios materiais vizinhos. A hipótese da geometria, na verdade, pode ser descartada, pois o mesmo resultado é obtido para a geometria cilíndrica – ver Capítulo 7. Note, em especial, que devido à interface com o meio exterior – que assumimos como sendo o vácuo –, a energia interna associada à camada esférica não magnética (ϵ_2, μ_2), Fig. 4.4, não é tão drasticamente afetada pelo magnetismo do centro esférico (ϵ_1, μ_1), embora alguns picos de ressonância morfológica, e alguma alteração do perfil, possam ser evidenciados. A energia interna, nessa situação, é um pouco superior ao caso não magnético $\mu_1/\mu = 1$. Isso não acontece na situação apresentada na Fig. 4.5, em que o dielétrico é completamente envolvido pela camada esférica magnética. Nesse caso, há um aumento substancial da

energia eletromagnética armazenada na região de pequenos parâmetros de tamanho efetivos, ao qual se sucedem ressonâncias abaixo do valor de energia interna para $\mu_2/\mu = 1$, e até mesmo muito abaixo do valor de energia armazenada por uma esfera com as mesmas propriedades ópticas do meio circundante (ϵ, μ) quando $\mu_2/\mu = 1000$. Para certos parâmetros de tamanho na presença de forte magnetismo, podemos concluir que o campo eletromagnético se acumula na camada esférica magnética.

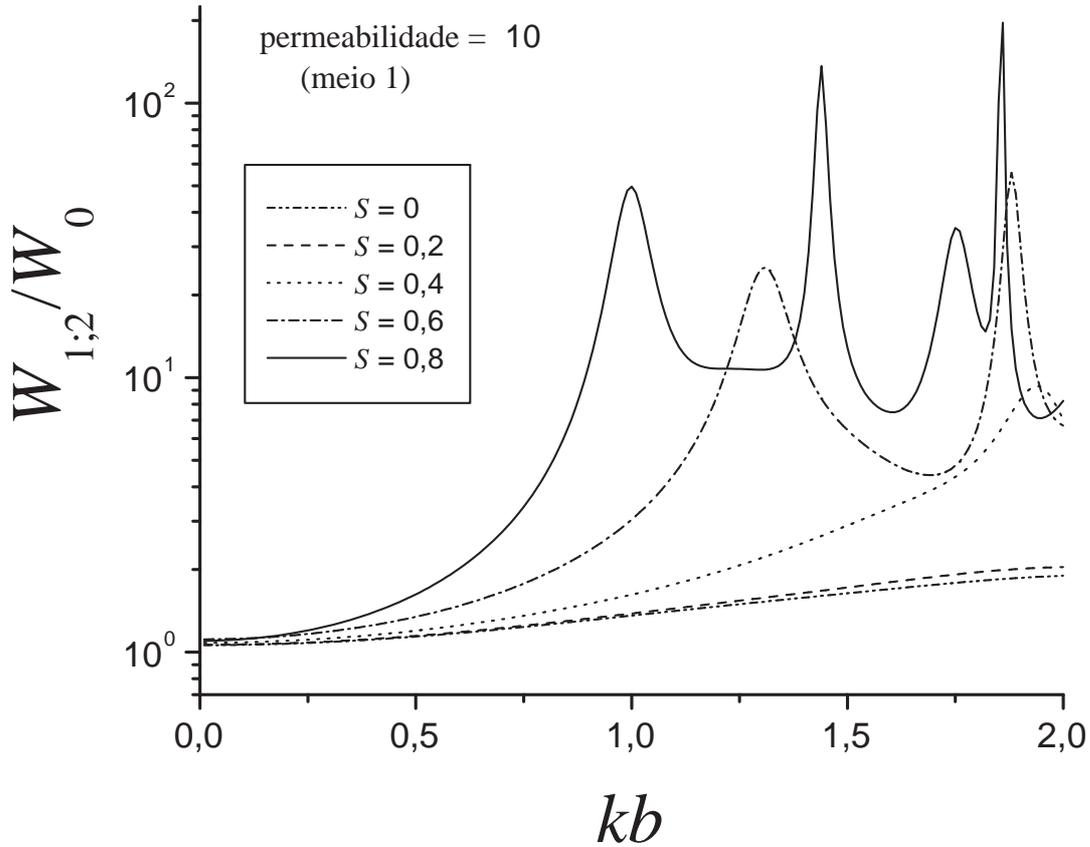


Figura 4.6: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1;2}/W_0$ no interior de duas esféricas concêntricas, sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 10$ as constantes ópticas da esfera interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada esférica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $(b - a)$. As razões de espessura são $S = 0$ (esfera homogênea de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Uma outra situação que podemos analisar no espalhamento por duas esferas concêntricas não dispersivas diz respeito à influência da razão de espessura na energia interna efetiva. Nas Figs. 4.6 e 4.7, podemos notar que à medida que a razão volumétrica de material magnético aumenta (Fig. 4.6) ou diminui (Fig. 4.7, o mesmo ocorre com a energia interna efetiva. Todavia,

um estudo mais abrangente envolvendo as espessuras e os parâmetros de tamanho das esferas concêntricas ainda carece de ser realizado. Ao todo, devemos considerar 9 situações-limite: $ka \ll 1$ ($kb \ll 1, kb \approx 1, kb \gg 1$), $ka \approx 1$ ($kb \ll 1, kb \approx 1, kb \gg 1$) e $ka \gg 1$ ($kb \ll 1, kb \approx 1, kb \gg 1$).

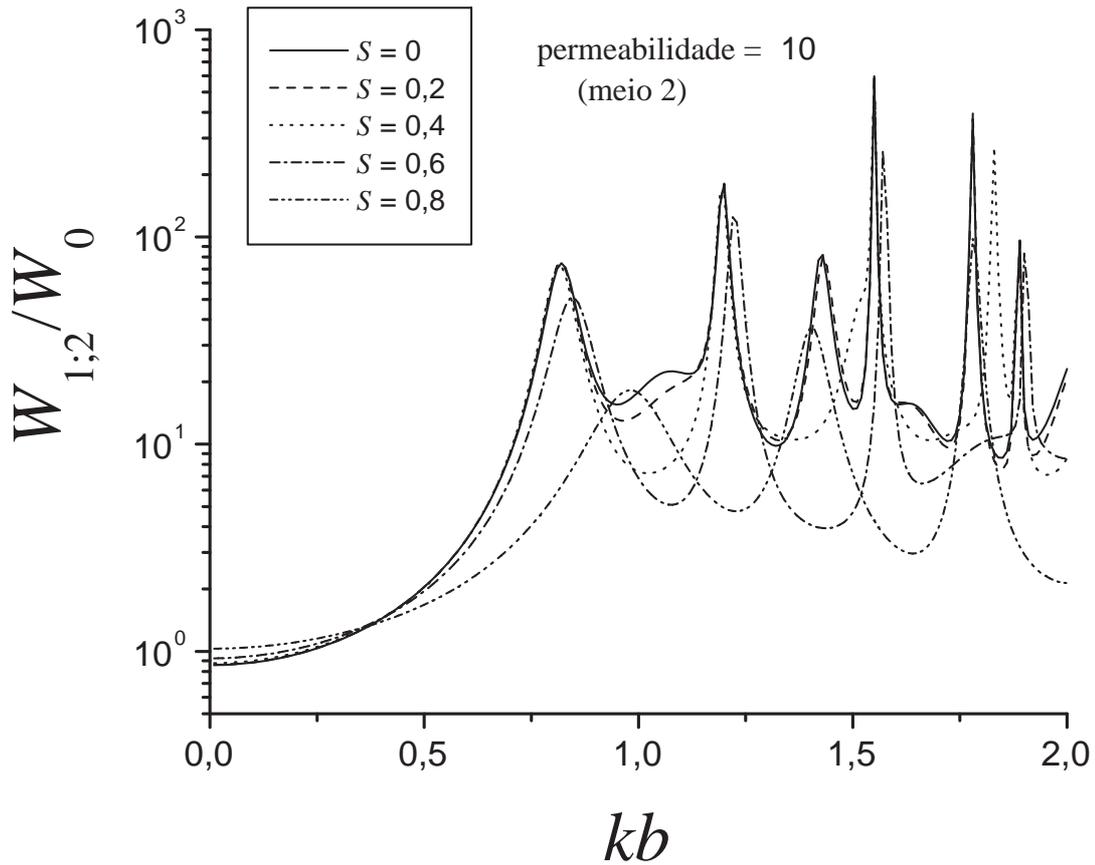


Figura 4.7: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}} = W_{1,2}/W_0$ no interior de duas esféricas concêntricas, sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 10$ as constantes ópticas da camada esférica de espessura $b - a$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da esfera interior de raio a não magnética ($\mu_2/\mu = 1$). As razões de espessura são $S = 0$ (esfera homogênea de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

4.5 Conclusões

Apresentamos aqui um estudo analítico do espalhamento eletromagnético por duas esferas concêntricas magnéticas. Determinamos todos os coeficientes magnéticos das expansões dos campos em harmônicos esféricos vetoriais. Esses não são encontrados facilmente na literatura,

posto que na teoria de espalhamento a maioria das grandezas relevantes podem ser descritas apenas com os coeficientes de espalhamento. Em especial, calculamos explicitamente a energia eletromagnética armazenada na camada esférica concêntrica e demos uma expressão para a energia eletromagnética média efetiva no interior das esferas concêntricas. Até onde sabemos, essa é a primeira vez que esse cálculo é realizado. Por fim, aplicamos nossos resultados ao estudo numérico de algumas situações particulares de espalhadores formados por dois materiais distintos, sendo um deles magnético. Esses estudos ainda estão no início, de maneira que não sabemos ao certo, por exemplo, como a espessura da camada envolvendo uma esfera magnética (e vice-versa) afeta o transporte de energia no regime de espalhamento múltiplo, e nem como podemos associá-la à densidade de centros espalhadores no meio.

No próximo Capítulo, como uma continuação natural de nossos estudos analíticos, realizamos os mesmos cálculos para uma esfera magnética opticamente ativa. Nosso objetivo, uma vez mais, é determinar todos os coeficientes das expansões e aplicá-los ao cálculo da energia eletromagnética média no tempo que é armazenada no espalhador com simetria esférica.

5 *Esfera magnética opticamente ativa*

Na teoria eletromagnética, um estudo analítico rigoroso do espalhamento de ondas planas por esferas isotrópicas opticamente ativas foi fornecido por Bohren [42] em 1974 e estendido a cilindros sob incidência normal [43] em 1978. Meios opticamente ativos, também chamados de birrefringentes ou quirais, são meios materiais em que ondas planas podem propagar-se sem sofrer mudança de polarização apenas se forem ondas circularmente polarizadas à esquerda e à direita [1]. A razão disso é que os índices de refração para a polarização circular à direita e à esquerda são diferentes.

Neste Capítulo, à semelhança dos Capítulos 3 e 4, calculamos explicitamente os campos eletromagnéticos em termos dos harmônicos esféricos vetoriais e os coeficientes dessas expansões. Nosso objetivo aqui é fornecer uma expressão analítica exata para a energia eletromagnética que é armazenada na esfera quiral fracamente absorbitiva. Até onde sabemos, essa é a primeira vez que esse cálculo é realizado.

No que se segue, revisamos a teoria apresentada na Ref. [1] e a estendemos para esferas magnéticas opticamente ativas. Esse desenvolvimento prévio é necessário para obtermos os coeficientes dos campos internos no caso magnético, os quais não são encontrados na literatura.

5.1 Relações constitutivas e equação de Helmholtz vetorial

Considere uma esfera linear, homogênea e isotrópica opticamente ativa de raio a e constantes ópticas (ϵ_1, μ_1) embebida em um meio não opticamente ativo (ϵ, μ) . De acordo com a Ref. [42], as relações constitutivas referentes a essa esfera podem ser escritas com um termo de giro do campo eletromagnético interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$:

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 (\mathbf{E}_1 + \gamma \nabla \times \mathbf{E}_1) , \quad (5.1)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 (\mathbf{H}_1 + \gamma \nabla \times \mathbf{H}_1) , \quad (5.2)$$

onde \mathbf{D}_1 e \mathbf{B}_1 são, respectivamente, os vetores deslocamento elétrico e de indução magnética no interior da esfera magnética, e a grandeza γ está associada aos índices de refração relativos m_L e m_R pelas relações

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_R} - \frac{1}{k_L} \right), \quad (5.3)$$

$$\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_R} + \frac{1}{k_L} \right) \right]^{-1}, \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

onde $k_q = km_q$, $q = L$ ou R , e ω é a frequência angular do campo com dependência temporal harmônica $e^{-i\omega t}$. Os índices L e R vêm do inglês *left* (esquerda) e *right* (direita). Considerando as relações constitutivas (5.1) e (5.2) nas equações de Maxwell para ondas planas $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, temos em notação matricial um sistema de equações equivalente às Eqs. (2.1):

$$[\nabla^2 + \mathcal{K}^2] \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{K} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

onde [1]

$$\mathcal{K} = \frac{i\omega}{1 - \gamma^2 \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2} \begin{pmatrix} -i\gamma \varepsilon_1 \mu_1 \omega & \mu_1 \\ -\varepsilon_1 & -i\gamma \varepsilon_1 \mu_1 \omega \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Para diagonalizarmos \mathcal{K} , usamos a transformação linear

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_L \\ \mathbf{Q}_R \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{K} \mathcal{A}, \quad (5.10)$$

onde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k_L & 0 \\ 0 & -k_R \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_R \\ \alpha_L & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_R = -i\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}, \quad \alpha_L = -i\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}.$$

Os campos eletromagnéticos transformados \mathbf{Q}_L e \mathbf{Q}_R satisfazem independentemente as

equações da forma

$$[\nabla^2 + k^2] \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{Q} = k\mathbf{Q}, \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (5.13)$$

onde $k = k_L$ para $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_L$ e $k = -k_R$ para $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_R$.

5.2 Campos eletromagnéticos

Expandindo os campos \mathbf{Q}_L e \mathbf{Q}_R em termos dos harmônicos esféricos \mathbf{M} e \mathbf{N} dados nas Eqs. (3.4)–(3.7), temos [1]

$$\mathbf{Q}_L = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ f_{on} \left[\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}(k_L) + \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}(k_L) \right] + f_{en} \left[\mathbf{M}_{e1n}^{(1)}(k_L) + \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}(k_L) \right] \right\}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{Q}_R = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ g_{on} \left[\mathbf{M}_{o1n}^{(1)}(k_R) - \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}(k_R) \right] + g_{en} \left[\mathbf{M}_{e1n}^{(1)}(k_R) - \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}(k_R) \right] \right\}, \quad (5.15)$$

onde $E_n = E_0 r^n (2n+1)/[n(n+1)]$ e k_R ou k_L indicam, respectivamente, que $\rho_R = k_R r$ ou $\rho_L = k_L r$ são argumentos da função de Bessel esférica $j_n(\rho)$. O campo espalhado é dado pela expansão [1]

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[ia_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - b_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)} + c_n \mathbf{M}_{e1n}^{(3)} - id_n \mathbf{N}_{o1n}^{(3)} \right], \quad (5.16)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[a_n \mathbf{M}_{e1n}^{(3)} + ib_n \mathbf{N}_{o1n}^{(3)} - ic_n \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - d_n \mathbf{M}_{o1n}^{(3)} \right]. \quad (5.17)$$

As componentes dos campos eletromagnéticos (5.10), (5.16) e (5.17) em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) são fornecidas na Seção A.3.

5.3 Coeficientes das expansões

Usando as condições de contorno (2.4) e (2.5) do Capítulo 2.2, as Eqs. (5.10), (5.16), (5.17) e o campo incidente apresentado na Seção 3.2, obtemos o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l}
i\xi'_n(x)\underline{a}_n - \xi_n(x)\underline{b}_n - \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} + i\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \left[\frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} - \frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] \\
\hspace{15em} = -\Psi_n(x) + i\Psi'_n(x) , \\
i\xi'_n(x)\underline{c}_n + \xi_n(x)\underline{d}_n - i\tilde{m} \left[\frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} + \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} \right] + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} - \frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] = 0 , \\
i\xi'_n(x)\underline{a}_n + \xi_n(x)\underline{b}_n + \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} - i\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \left[\frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} + \frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] \\
\hspace{15em} = \Psi_n(x) + i\Psi'_n(x) , \\
i\xi'_n(x)\underline{c}_n - \xi_n(x)\underline{d}_n + i\tilde{m} \left[\frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} \right] - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} + \frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] = 0 , \\
\xi_n(x)\underline{a}_n + i\xi'_n(x)\underline{b}_n + i\tilde{m} \left[\frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} + \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} \right] + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} - \frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] \\
\hspace{15em} = \Psi_n(x) + i\Psi'_n(x) , \\
\xi_n(x)\underline{c}_n + i\xi'_n(x)\underline{d}_n + \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} + i\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \left[\frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} + \frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] = 0 , \\
\xi_n(x)\underline{a}_n - i\xi'_n(x)\underline{b}_n - i\tilde{m} \left[\frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} \right] - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} + \frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] \\
\hspace{15em} = \Psi_n(x) - i\Psi'_n(x) , \\
\xi_n(x)\underline{c}_n - i\xi'_n(x)\underline{d}_n - \frac{\Psi'_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{on} - \frac{\Psi_n(y_L)}{m_L}\underline{f}_{en} - i\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \left[\frac{\Psi'_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{on} - \frac{\Psi_n(y_R)}{m_R}\underline{g}_{en} \right] = 0 ,
\end{array} \right.$$

onde os coeficientes a serem determinados encontram-se sublinhados. Os campos eletromagnéticos em forma de componentes, usados na construção deste sistema, encontram-se nas Seção A.1 e A.3. Em especial, usamos os ângulos de espalhamento $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$ para obtermos as oito equações independentes, de maneira que $\pi_n(1) = \tau_n(1) = n(n+1)/2$, $\pi_n(-1) = (-1)^{n-1}\pi_n(1)$ e $\tau_n(-1) = (-1)^n\tau_n(1)$, onde $\pi_n = \pi_n^1$ e $\tau_n = \tau_n^1$ estão definidas nas Eqs. (3.8). Observamos que no caso da esfera homogênea não opticamente ativa, Capítulo 3, apenas um ângulo de espalhamento é suficiente para a construção do sistema de equações (3.20).

Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos as soluções

$$a_n = \frac{V_n^{(R)} A_n^{(L)} + V_n^{(L)} A_n^{(R)}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.18)$$

$$b_n = \frac{W_n^{(R)} B_n^{(L)} + W_n^{(L)} B_n^{(R)}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.19)$$

$$c_n = i \frac{W_n^{(R)} A_n^{(L)} - W_n^{(L)} A_n^{(R)}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.20)$$

$$d_n = -c_n, \quad (5.21)$$

$$f_{on} = \frac{im_L W_n^{(R)}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.22)$$

$$f_{en} = \frac{m_L V_n^{(R)}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.23)$$

$$g_{on} = \frac{-m_R W_n^{(L)} (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.24)$$

$$g_{en} = \frac{-im_R V_n^{(L)} (\epsilon_1/\mu_1)^{1/2}}{W_n^{(L)} V_n^{(R)} + W_n^{(R)} V_n^{(L)}}, \quad (5.25)$$

$$W_n^{(q)} = \tilde{m} \Psi_n(m_q x) \xi'_n(x) - \xi_n(x) \Psi'_n(m_q x), \quad (5.26)$$

$$V_n^{(q)} = \Psi_n(m_q x) \xi'_n(x) - \tilde{m} \xi_n(x) \Psi'_n(m_q x), \quad (5.27)$$

$$A_n^{(q)} = \tilde{m} \Psi_n(m_q x) \Psi'_n(x) - \Psi_n(x) \Psi'_n(m_q x), \quad (5.28)$$

$$B_n^{(q)} = \Psi_n(m_q x) \Psi'_n(x) - \tilde{m} \Psi_n(x) \Psi'_n(m_q x), \quad (5.29)$$

onde $x = ka$, $q = L$ ou R , e

$$\frac{1}{\tilde{m}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_1 \mu}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_R} + \frac{1}{m_L} \right) \quad (5.30)$$

sendo \tilde{m} a impedância óptica efetiva do meio quiral (ϵ_1, μ_1) em relação ao meio circundante (ϵ, μ) .

Salientamos que os coeficientes de espalhamento calculados na Ref. [1] consideram a esfera quiral dielétrica ou não magnética. A substituição direta do índice de refração (efetivo) relativo m , que é apresentado na Ref. [1] no caso magnético, nos coeficientes de espalhamento lá calculados fornece expressões incorretas. Como fator multiplicativo das funções de Riccati-Bessel e Riccati-Hankel nas expressões dos coeficientes, devemos ter, no caso magnético, $(\mu/\mu_1)m$ em vez de apenas m . Isso não está claro no texto da Ref. [1] e pode causar alguns equívocos.

5.4 Energia eletromagnética interna à esfera

A energia eletromagnética armazenada no interior de uma esfera opticamente ativa é calculada da mesma forma que na Seção 3.4. Em particular, definimos a função

$$I_n^{(AB)} = \frac{1}{a^3} \int_0^a dr r^2 j_n(m_A kr) j_n(m_B^* kr), \quad (5.31)$$

onde A e B podem ser tanto L quanto R e a solução analítica da integral está expressa na Eq. (C.22) para $m_A \neq m_B^*$ e na Eq. (C.23) para $m_A = m_B^*$.

Então, sendo $m = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon \mu}$ e $W_0 = 2\pi a^3 |E_0|^2 \epsilon / 3$, as contribuições radiais e angulares dos campos elétrico e magnético à energia interna expressa na Eq. (3.30) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} W_{Er}(a) = & \frac{3}{4} W_0 \frac{\text{Re}(m\tilde{m})}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) \left\{ \left(|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2 \right) \int_0^a dr \frac{|j_n(\rho_L)|^2}{|k_L|^2} \right. \\ & + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| \left(|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2 \right) \int_0^a dr \frac{|j_n(\rho_R)|^2}{|k_R|^2} \\ & \left. + 2\text{Im} \left[\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \int_0^a dr \frac{j_n(\rho_L) j_n(\rho_R^*)}{k_L k_R^*} \right] \right\}, \quad (5.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{Hr}(a) = & \frac{3}{4} W_0 \frac{\text{Re}(m\tilde{m}^*)}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(2n+1) \left\{ \left(|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2 \right) \int_0^a dr \frac{|j_n(\rho_L)|^2}{|k_L|^2} \right. \\ & + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| \left(|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2 \right) \int_0^a dr \frac{|j_n(\rho_R)|^2}{|k_R|^2} \\ & \left. - 2\text{Im} \left[\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \int_0^a dr \frac{j_n(\rho_L) j_n(\rho_R^*)}{k_L k_R^*} \right] \right\}, \quad (5.33) \end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (C.7), e

$$\begin{aligned} [W_{E\theta} + W_{E\phi}](a) = & \frac{3}{4} W_0 \frac{\text{Re}(m\tilde{m})}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \int_0^a dr \left\{ \frac{1}{|k_L|^2} \left(|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2 \right) \left[|\psi_n(\rho_L)|^2 + |\psi_n'(\rho_L)|^2 \right] \right. \\ & + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| \frac{1}{|k_R|^2} \left(|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2 \right) \left[|\psi_n(\rho_R)|^2 + |\psi_n'(\rho_R)|^2 \right] \\ & \left. + 2\text{Im} \left[\frac{1}{k_L k_R^*} \sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \left[\psi_n'(\rho_L) \psi_n'(\rho_R^*) - \psi_n(\rho_L) \psi_n(\rho_R^*) \right] \right] \right\}, \quad (5.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[W_{H\theta} + W_{H\phi}](a) = & \frac{3}{4} W_0 \frac{\text{Re}(m\tilde{m}^*)}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \int_0^a dr \left\{ \frac{1}{|k_L|^2} (|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2) \left[|\Psi_n(\rho_L)|^2 + |\Psi'_n(\rho_L)|^2 \right] \right. \\
& + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| \frac{1}{|k_R|^2} (|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2) \left[|\Psi_n(\rho_R)|^2 + |\Psi'_n(\rho_R)|^2 \right] \\
& \left. - 2\text{Im} \left[\frac{1}{k_L k_R^*} \sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \left[\Psi'_n(\rho_L) \Psi'_n(\rho_R^*) - \Psi_n(\rho_L) \Psi_n(\rho_R^*) \right] \right] \right\}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

onde usamos as Eqs. (C.5) e (C.6). A média temporal da energia eletromagnética é dada, portanto, por $W = W_E + W_H$, onde $W_E = W_{Er} + [W_{E\theta} + W_{E\phi}]$ e $W_H = W_{Hr} + [W_{H\theta} + W_{H\phi}]$. Definindo a função

$$\mathcal{F}_{\pm,n}^{(AB)} = n I_{n+1}^{(AB)} + (n+1) I_{n-1}^{(AB)} \pm (2n+1) I_n^{(AB)} \tag{5.36}$$

obtemos as contribuições elétrica e magnética:

$$\begin{aligned}
W_E = & \frac{3}{4} W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2) \mathcal{F}_{+,n}^{(LL)} \right. \\
& \left. + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| (|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2) \mathcal{F}_{+,n}^{(RR)} + 2\text{Im} \left[\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \mathcal{F}_{-,n}^{(LR)} \right] \right\}, \tag{5.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_H = & \frac{3}{4} W_0 \text{Re}(m^* \tilde{m}) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (|f_{on}|^2 + |f_{en}|^2) \mathcal{F}_{+,n}^{(LL)} \right. \\
& \left. + \left| \frac{\mu_1}{\epsilon_1} \right| (|g_{on}|^2 + |g_{en}|^2) \mathcal{F}_{+,n}^{(RR)} - 2\text{Im} \left[\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\epsilon_1^*}} (f_{on} g_{on}^* + f_{en} g_{en}^*) \mathcal{F}_{-,n}^{(LR)} \right] \right\}. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

5.5 Conclusões

Fornecemos neste Capítulo uma expressão analítica exata para a média temporal da energia eletromagnética armazenada no interior de uma esfera magnética opticamente ativa. Para o desenvolvimento dos cálculos, seguimos de perto as considerações feitas por Bohren [42]. Um estudo analítico e numérico da energia interna a uma esfera magnética com atividade óptica e sua relação com os fenômenos de dicroísmo circular e rotação óptica ainda carecem de ser realizados. Todavia, a base teórica para esse estudo encontra-se aqui delineada. As expressões para o cálculo das grandezas de espalhamento – seções de choque, matriz de amplitudes, etc. – podem ser encontradas na Ref. [1].

Terminamos aqui nosso estudo do espalhamento eletromagnético por espalhadores magné-

ticos esféricos. A partir do próximo Capítulo, examinamos a interação de ondas eletromagnéticas planas com centro espalhadores cilíndricos magnéticos. Uma vez mais, nosso enfoque são os campos eletromagnéticos internos aos espalhadores e como o magnetismo pode afetar o transporte de ondas no meio desordenado.

6 *Espalhamento de ondas eletromagnéticas por um cilindro infinito magnético*

O problema do espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito cuja seção transversal é circular não é novo e foi resolvido analiticamente, sob a restrição de incidência normal e cilindro dielétrico, por Lord Rayleigh em 1881 [44, 45]. Para o caso geral em que as induções capacitivas da partícula e do meio são diferentes e o ângulo de incidência é arbitrário, James Wait [46] em 1955 parece ter sido o primeiro a fornecer uma solução exata do problema, a qual foi estendida, rederivada e aplicada a diversas situações no contexto de partículas não magnéticas [1, 2]. Apenas com o advento dos metamateriais e do estudo da tunabilidade das bandas fotônicas proibidas (*photon band gaps* ou PBGs) é que o espalhamento por cilindros magnéticos, nas regiões espectrais de rádio-frequências e micro-ondas, ganhou a devida atenção [11, 12, 20, 21, 22].

Assumindo um ângulo de incidência *arbitrário*, construímos aqui a solução exata para o problema de absorção e espalhamento de ondas eletromagnéticas planas por um cilindro reto circular infinito *magnético*. Detalhes dessa solução para o caso não magnético e incidência oblíqua podem ser encontrados nas Refs. [1, 46]. Usamos, em especial, a mesma notação de Bohren e Huffman [1], de maneira que os resultados apresentados nas Seções 6.2 e 6.3, no limite de partícula não magnética, coincidem com os da Ref. [1]. No intuito de estudarmos a influência do magnetismo e da geometria do centro espalhador no espalhamento eletromagnético, calculamos a energia eletromagnética média que é armazenada no interior de um cilindro magnético por unidade de comprimento. Nossos resultados, publicados na Ref. [19], generalizam as expressões obtidas por Ruppín [47] na consideração de cilindros dielétricos não dispersivos iluminados sob um ângulo de incidência nulo. Enfatizamos que, embora nossos cálculos estejam fundamentados na teoria de espalhamento não magnético das Refs. [1, 2, 3, 27], nossos resultados são originais e contêm as soluções desses textos como casos particulares.

6.1 Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas cilíndricas

Como fizemos no cálculo do espalhamento de Lorenz-Mie, construímos a solução do problema do cilindro expandindo os campos eletromagnéticos na simetria do sistema. Nesta situação, usamos os harmônicos cilíndricos vetoriais $\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{e}_z \psi)$ e $\mathbf{N} = \nabla \times \mathbf{M}/k$, onde ψ é uma função escalar geratriz, k é o número de onda e $\hat{\mathbf{e}}_z$ é o versor apontando na direção positiva do eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Da imposição de que esses harmônicos vetoriais sejam soluções das equações de Maxwell do problema, Eqs. (2.1), as quais descrevem a interação de uma onda plana monocromática homogênea com um meio linear, homogêneo e isotrópico, obtemos a equação de onda escalar $[\nabla^2 + k^2]\psi = 0$, a qual, em coordenadas cilíndricas, assume a forma

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \psi(r, \phi, z) = 0. \quad (6.1)$$

Usando o método de separação de variáveis, obtemos como solução da equação de Helmholtz escalar

$$\psi_n(\rho, \phi, z) = Z_n(\rho) e^{i(n\phi + hz)}, \quad (6.2)$$

onde n é um número inteiro, h é um parâmetro real a ser determinado e $Z_n(\rho = r\sqrt{k^2 - h^2})$ é qualquer das função de Bessel cilíndricas J_n e Y_n (Neumann), ou de Hankel $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ e $H_n^{(2)} = J_n - iY_n$ [1]. Da definição dos harmônicos cilíndricos vetoriais, obtemos as soluções

$$\mathbf{M}_n = \left[in \frac{Z_n(\rho)}{r} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\rho}{r} Z_n'(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] e^{i(n\phi + hz)}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{N}_n = \left\{ ih\rho \frac{Z_n'(\rho)}{kr} \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{Z_n(\rho)}{kr} \left[hn \hat{\mathbf{e}}_\phi - \frac{\rho^2}{r} \hat{\mathbf{e}}_z \right] \right\} e^{i(n\phi + hz)}, \quad (6.4)$$

as quais estão escritas de maneira mais conveniente que na Ref. [1]. O próximo passo é expandirmos os campos eletromagnéticos (\mathbf{E}, \mathbf{H}) em cada região do espaço em termos dos harmônicos expressos nas Eqs. (6.3) e (6.4).

6.2 Campos eletromagnéticos em termos de ondas parciais cilíndricas

O espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito pode se dar, em última análise, de duas maneiras distintas, dependendo da polarização da luz incidente em relação ao eixo do

cilindro. As outras polarizações possíveis são obtidas como combinações dessas duas polarizações básicas, as quais são chamadas modos TM e TE – respectivamente, campo magnético (caso I) ou elétrico (caso II) transversos ao eixo do cilindro [1, 2, 27]. Em outras palavras, na situação mais geral em que consideramos o espalhamento oblíquo, os casos I e II correspondem aos sistemas nos quais o campo elétrico incidente \mathbf{E}_i encontra-se paralelo ou perpendicular ao plano xz , respectivamente. A geometria do sistema para um segmento L do cilindro é mostrada nas Figs. 6.1 e 6.2

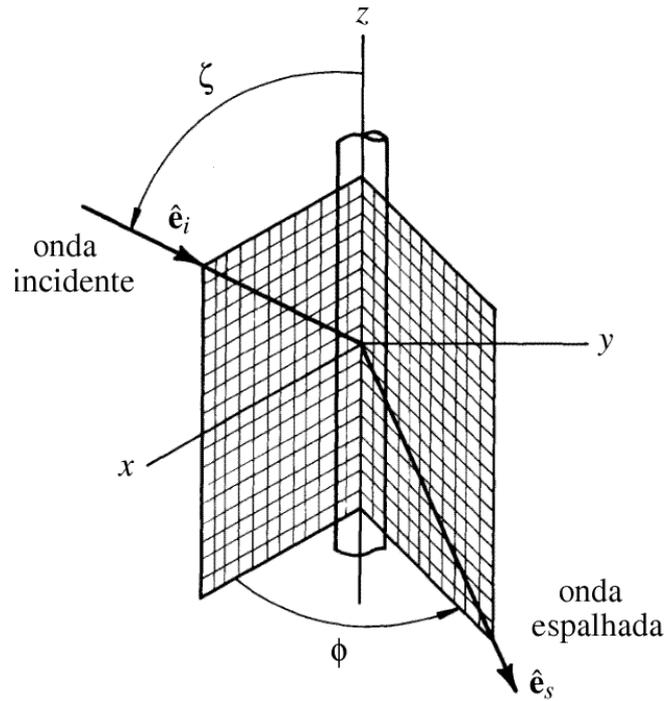


Figura 6.1: Cilindro infinito irradiado obliquamente por uma onda plana. Os vetores \hat{e}_i e \hat{e}_s indicam, respectivamente, as direções de propagação da onda incidente e espalhada. Figura adaptada da Ref. [1].

Explicitamente, o campo elétrico incidente ao cilindro na polarização TM ou TE pode ser expresso, respectivamente, por

$$\mathbf{E}_i^{(I)} = E_0 \hat{e}_p e^{ik\hat{e}_i \cdot \mathbf{x}} = E_0 (\sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x) e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{E}_i^{(II)} = E_0 \hat{e}_y e^{-ik(r \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}, \quad (6.6)$$

onde os vetores \hat{e}_p e \hat{e}_y indicam a direção na qual o campo elétrico oscila (polarização) e o vetor \hat{e}_i descreve a direção de propagação da onda eletromagnética. O vetor \mathbf{x} corresponde à variável espacial do campo e ζ é o ângulo entre o vetor de onda incidente $\mathbf{k} = k\hat{e}_i$ e o eixo z do cilindro, isto é, o complementar do ângulo de incidência. A grandeza E_0 é a amplitude real do campo elétrico com dependência temporal harmônica $e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência angular de

oscilação do campo eletromagnético.

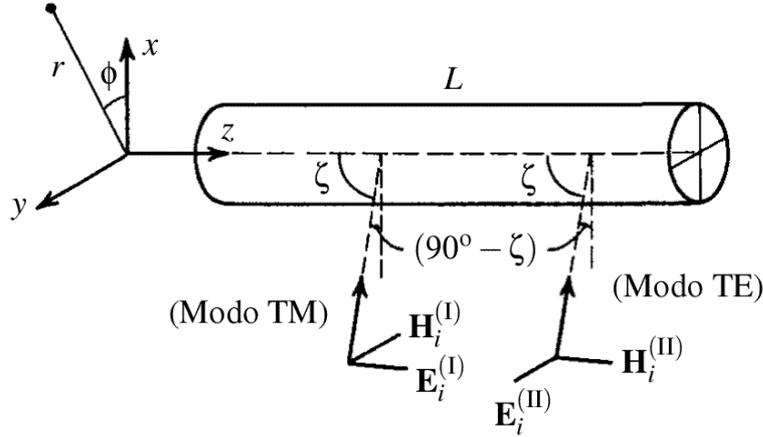


Figura 6.2: Orientação dos vetores de campo em relação ao cilindro infinito para os modos TM e TE. Figura adaptada da Ref. [2].

Como podemos facilmente observar, na expansão dos campos eletromagnéticos em função dos harmônicos cilíndricos, a dependência do campo elétrico na variável z impõe $h = -k \cos \zeta$ nas Eqs. (6.3) e (6.4). Seguindo o desenvolvimento da Ref. [1], na polarização TM ($\mathbf{E}_i^{(I)} || xz$) os campos eletromagnéticos incidente ($\mathbf{E}_i^{(I)}, \mathbf{H}_i^{(I)}$), interno ($\mathbf{E}_1^{(I)}, \mathbf{H}_1^{(I)}$) e espalhado ($\mathbf{E}_s^{(I)}, \mathbf{H}_s^{(I)}$) em termos dos harmônicos cilíndricos \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n são dados por

$$\mathbf{E}_i^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \mathbf{N}_n^{(1)}(k), \quad (6.7)$$

$$\mathbf{H}_i^{(I)} = \frac{-ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \mathbf{M}_n^{(1)}(k); \quad (6.8)$$

$$\mathbf{E}_1^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_1)} \left[d_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(1)}(k_1) + c_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(1)}(k_1) \right], \quad (6.9)$$

$$\mathbf{H}_1^{(I)} = \frac{-ik_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_1)} \left[d_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(1)}(k_1) + c_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(1)}(k_1) \right]; \quad (6.10)$$

$$\mathbf{E}_s^{(I)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \left[b_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(3)}(k) + ia_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(3)}(k) \right], \quad (6.11)$$

$$\mathbf{H}_s^{(I)} = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \left[b_n^{(I)} \mathbf{M}_n^{(3)}(k) + ia_n^{(I)} \mathbf{N}_n^{(3)}(k) \right], \quad (6.12)$$

onde $E_n^{(k)} = E_0(-i)^n r / \rho$, $E_n^{(k_1)} = E_0(-i)^n r / \rho_1$, sendo $\rho = kr \sin \zeta$ e $\rho_1 = kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$. Os índices (1) e (3) indicam, respectivamente, o emprego das funções cilíndricas de Bessel J_n e de Hankel de primeiro tipo $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ na composição dos harmônicos vetoriais. Os números de onda k e k_1 nos harmônicos vetoriais estabelecem o argumento das funções cilíndricas como sendo ρ (meio circundante) ou ρ_1 (interior do cilindro), respectivamente. Como no espalha-

mento de Lorenz-Mie, a função $J_n(\rho_1)$ para o campo eletromagnético interno é escolhida por ser finita na origem do sistema de coordenadas (r, ϕ, z) , enquanto a escolha da função $H_n^{(1)}(\rho)$ para o campo espalhado está associada à dependência temporal harmônica escolhida para o campo incidente [1].

Similarmente, na polarização TE ($\mathbf{E}_i^{(\text{II})} \perp xz$) os campos eletromagnéticos são

$$\mathbf{E}_i^{(\text{II})} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \mathbf{M}_n^{(1)}(k), \quad (6.13)$$

$$\mathbf{H}_i^{(\text{II})} = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \mathbf{N}_n^{(1)}(k); \quad (6.14)$$

$$\mathbf{E}_1^{(\text{II})} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_1)} \left[d_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(1)}(k_1) + c_n \mathbf{N}_n^{(1)}(k_1) \right], \quad (6.15)$$

$$\mathbf{H}_1^{(\text{II})} = -\frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_1)} \left[d_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(1)}(k_1) + c_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(1)}(k_1) \right]; \quad (6.16)$$

$$\mathbf{E}_s^{(\text{II})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \left[ia_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(3)} + b_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(3)}(k) \right], \quad (6.17)$$

$$\mathbf{H}_s^{(\text{II})} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k)} \left[a_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(3)}(k) - ib_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(3)}(k) \right]. \quad (6.18)$$

Os coeficientes das expansões a_n , b_n , c_n e d_n para os dois modos são obtidos mediante a aplicação das condições de contorno na interface de separação entre os meios interior e exterior ao cilindro ($r = a$), Eqs. (2.4) e (2.5) da Seção 2.2. Em termos de componentes no sistema de coordenadas cilíndricas, os campos eletromagnéticos encontram-se expressos na Seção A.4 do Apêndice A.

6.3 Coeficientes magnéticos das expansões

Na interface de separação ($r = a$) entre meio circundante (ϵ, μ) e centro espalhador (ϵ_1, μ_1) livres de fontes ($\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$), a teoria clássica do eletromagnetismo impõe que as componentes tangenciais dos campos eletromagnéticos sejam contínuas, isto é,

$$(r = a) \quad \begin{cases} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6.19)$$

As condições (6.19) fornecem um conjunto de quatro equações algébricas lineares nos coeficientes a_n , b_n , c_n e d_n para cada um dos modos.

Explicitamente, obtemos das componentes ϕ e z dos campos eletromagnéticos para o modo TM – expressas nas Eqs. (A.10), (A.11) e (A.12) da Seção A.4 – o sistema de equações escalares

com propriedades distintas ($r = a$) as seguintes funções:

$$\mathcal{A}_n = i\xi \left[\xi J_n(\xi) J_n'(\eta) \frac{m}{\tilde{m}} - \eta J_n'(\xi) J_n(\eta) \right], \quad (6.22)$$

$$\mathcal{B}_n = \xi \left[m\tilde{m}\xi J_n(\xi) J_n'(\eta) - \eta J_n'(\xi) J_n(\eta) \right], \quad (6.23)$$

$$\mathcal{C}_n = n \cos \zeta \eta J_n(\xi) J_n(\eta) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (6.24)$$

$$\mathcal{D}_n = n \cos \zeta \eta H_n^{(1)}(\xi) J_n(\eta) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \quad (6.25)$$

$$\mathcal{V}_n = \xi \left[m\tilde{m}\xi H_n^{(1)}(\xi) J_n'(\eta) - \eta H_n^{(1)}(\xi) J_n(\eta) \right], \quad (6.26)$$

$$\mathcal{W}_n = i\xi \left[\eta H_n^{(1)}(\xi) J_n(\eta) - \xi H_n^{(1)}(\xi) J_n'(\eta) \frac{m}{\tilde{m}} \right]. \quad (6.27)$$

As funções (6.22)–(6.27) são análogas àquelas apresentadas na Ref. [1], e elas são as mesmas para $\mu = \mu_1$ (abordagem não magnética).

Resolvendo então o sistema de Eqs. (6.20), obtemos os coeficientes do modo TM

$$a_n^{(I)} = \frac{\mathcal{C}_n \mathcal{V}_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (6.28)$$

$$b_n^{(I)} = \frac{\mathcal{B}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{C}_n \mathcal{D}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (6.29)$$

$$c_n^{(I)} = \frac{-2im\xi \mathcal{W}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (6.30)$$

$$d_n^{(I)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi \tilde{m} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}. \quad (6.31)$$

Similarmente, para o modo TE obtemos

$$a_n^{(II)} = -\frac{\mathcal{A}_n \mathcal{V}_n - i \mathcal{C}_n \mathcal{D}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (6.32)$$

$$b_n^{(II)} = -i \frac{\mathcal{C}_n \mathcal{W}_n + \mathcal{A}_n \mathcal{D}_n}{\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2}, \quad (6.33)$$

$$c_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{D}_n}{\pi [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (6.34)$$

$$d_n^{(II)} = \frac{-2m\xi \mathcal{V}_n}{\pi \tilde{m} [\mathcal{V}_n \mathcal{W}_n + i \mathcal{D}_n^2]}, \quad (6.35)$$

onde as funções \mathcal{A}_n , \mathcal{B}_n , \mathcal{C}_n , \mathcal{D}_n , \mathcal{V}_n e \mathcal{W}_n são definidas nas Eqs. (6.22)–(6.27).

No caso particular em que a onda eletromagnética ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) incide normalmente ao cilindro

($\zeta = 90^\circ$), temos $a_n^{(I)} = b_n^{(II)} = c_n^{(II)} = d_n^{(I)} = 0$ e

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(II)} \Big|_{\zeta=90^\circ} = \frac{\tilde{m}J'_n(x)J_n(mx) - J_n(x)J'_n(mx)}{\tilde{m}J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}, \\ b_n &= b_n^{(I)} \Big|_{\zeta=90^\circ} = \frac{J_n(mx)J'_n(x) - \tilde{m}J'_n(mx)J_n(x)}{J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - \tilde{m}J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}, \\ c_n &= c_n^{(I)} \Big|_{\zeta=90^\circ} = \frac{2\iota/(\pi x)}{J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - \tilde{m}J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}, \\ d_n &= d_n^{(II)} \Big|_{\zeta=90^\circ} = \frac{2\iota/(\pi x)}{\tilde{m}J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde usamos o Wronskiano $H_n^{(1)'}(x)J_n(x) - H_n^{(1)}(x)J'_n(x) = 2\iota/(\pi x)$.

Note que nesta situação os coeficientes de espalhamento a_n e b_n são análogos aos do espalhamento de Lorenz-Mie, bastando-se fazer a substituição J_n por j_n e $H_n^{(1)}$ por ξ_n . O mesmo vale para os coeficientes internos c_n e d_n sem a simplificação do Wronskiano, com a ressalva de que há um fator m nos denominadores para o caso da esfera. Essas observações são importantes para se verificar, por exemplo, cálculos envolvendo cilindros e esferas em situações mais gerais. Visto que a resolução do problema da esfera é mais simples, podemos usar argumentos similares para obtermos soluções do espalhamento por cilindros (sob incidência normal) sem a necessidade de resolvermos os sistemas de equações explicitamente.

Das relações $J_{-n} = (-1)^n J_n$ e $Y_{-n} = (-1)^n Y_n$, obtemos as relações de paridade

$$\begin{aligned} a_{-n}^{(I)} &= -a_n^{(I)}, & a_{-n}^{(II)} &= a_n^{(II)}, \\ b_{-n}^{(I)} &= b_n^{(I)}, & b_{-n}^{(II)} &= -b_n^{(II)}, \\ c_{-n}^{(I)} &= c_n^{(I)}, & c_{-n}^{(II)} &= -c_n^{(II)}, \\ d_{-n}^{(I)} &= -d_n^{(I)}, & d_{-n}^{(II)} &= d_n^{(II)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos $a_0^{(I)} = d_0^{(I)} = 0$ e $b_0^{(II)} = c_0^{(II)} = 0$. Essas propriedades são usadas na Seção A.4 do Apêndice A para escrevermos os campos eletromagnéticos como séries de funções começando o somatório em $n = 1$. Em outras palavras, só é possível escrever as expansões daquela forma somente após a determinação dos coeficientes. Separamos os campos eletromagnéticos e os coeficientes em Seções distintas apenas por motivos didáticos.

Embora não seja óbvio, a relação

$$\iota [C_n \mathcal{W}_n + \mathcal{A}_n \mathcal{D}_n] = \xi \eta J_n(\eta) \left[-H_n^{(1)'}(\xi) C_n + J'_n(\xi) \mathcal{D}_n \right] = C_n \mathcal{V}_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n,$$

implica $a_n^{(I)} = -b_n^{(II)}$, o que está de acordo com a Ref. [1].

6.4 Energia eletromagnética média no tempo

A média temporal da energia eletromagnética, então associada a um campo interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, armazenada no interior de um cilindro não dispersivo *finito* de radio a e comprimento L é dada por [47]

$$W(a) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr r \operatorname{Re} \left[\frac{\epsilon_1}{4} (|E_{1r}|^2 + |E_{1\phi}|^2 + |E_{1z}|^2) + \frac{\mu_1}{4} (|H_{1r}|^2 + |H_{1\phi}|^2 + |H_{1z}|^2) \right], \quad (6.37)$$

onde μ_1 e ϵ_1 são grandezas complexas com parte real positiva muito maior que a parte imaginária (regime de fraca absorção) [25]. Uma vez que o integrando como um todo não depende da variável z , o valor de $W(a)$ diverge para o caso de um cilindro infinito, isto é, $L \rightarrow \infty$. A solução para esse impasse é considerarmos uma porção finita do espalhador cilíndrico e calcularmos a energia média dentro desse volume por unidade de comprimento. Na presente situação, consideramos um segmento do cilindro centrado na origem e com comprimento L . Em particular, para um cilindro com as mesmas propriedades ópticas que o meio, temos

$$W_0 = \frac{\pi a^2}{2} \epsilon |E_0|^2 L. \quad (6.38)$$

Nos cálculos a seguir, assumimos, como no caso da esfera (Seção 3.4), que a série infinita de funções que entra na integral expressa na Eq. (6.37) converge uniformemente no domínio $0 \leq r \leq a$, $0 < \phi \leq 2\pi$, e $-L/2 \leq z \leq L/2$, e que o mesmo vale para as componentes dos campos em separado, as quais são finitas e integráveis. Essa consideração é válida fisicamente, posto que não há sentido físico no caso de divergência das grandezas envolvidas se o cilindro for finito. Por outro lado, do ponto de vista matemático, é necessário que haja essa garantia de convergência uniforme e integrabilidade para que possamos nos cálculos “permutar” o símbolo de integração com o somatório proveniente do cálculo das intensidades.

Embora não seja óbvio, note que a dependência exponencial das componentes dos campos com relação à variável z , Eqs. (6.3) e (6.4), é fundamental na simplificação do cálculo das intensidades dos campos internos, da mesma forma que ocorre com as funções associadas de Legendre no caso da esfera, Seção C.1. Explicitamente, permutando o sinal de integração com um somatório duplo em n e n' no cálculo de uma intensidade do integrando da Eq. (6.37), aparece naturalmente a expressão

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-n')\phi} = 2\pi \delta_{nn'}, \quad (6.39)$$

onde $\delta_{nm'}$ é o delta de Kronecker.

A fim de simplificarmos algumas expressões analíticas e, conseqüentemente, os cálculos numéricos correspondentes, usamos relações recursivas envolvendo funções de Bessel. Particularmente, para o cálculo da energia eletromagnética média no tempo, aplicamos algumas equações da Ref. [37] nas quais integrais associadas com produto de duas funções de Bessel são resolvidas analiticamente. Essas integrais, na verdade, podem ser obtidas das relações de recorrência (C.23)–(C.26) da Seção C.3.1. Em nossa notação, definimos a função

$$I_n(\eta) = \frac{1}{a^2} \int_0^a dr r |J_n(\rho_1)|^2, \quad (6.40)$$

onde $\rho_1(r) = kr\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ e a integral é resolvida analiticamente nas Eqs. (C.29) para $m \neq m^*$ e (C.30) para m real (regime de transparência). Embora não seja óbvio, a função I_n depende apenas das grandezas adimensionais $\eta = \rho_1(a)$ e η^* . Isso pode ser visto facilmente nas Eqs. (C.29) e (C.30), as quais mostram que a integral na Eq. (6.40) é proporcional a a^2 . Maiores detalhes sobre essas relações envolvendo funções de Bessel cilíndricas encontram-se no Apêndice C. No que se segue, estudamos em separado a energia eletromagnética que é armazenada no cilindro magnético para os modos TM e TE.

6.4.1 Modo TM

Considere o campo interno ($\mathbf{E}_1^{(I)}, \mathbf{H}_1^{(I)}$) em forma de componentes em coordenadas cilíndricas, expressas nas Eqs. (A.11) da Seção A.4, e tome separadamente cada uma das componentes dos campos na definição (6.37). Assim, para a polarização TM (caso I), a energia eletromagnética média no tempo $W_{\text{tot}}^{(I)}(a)$ armazenada em um cilindro magnético sob incidência oblíqua é dada por:

$$W_{\text{tot}}^{(I)} = \left[W_{Er}^{(I)} + W_{E\phi}^{(I)} + W_{Ez}^{(I)} \right] + \left[W_{Hr}^{(I)} + W_{H\phi}^{(I)} + W_{Hz}^{(I)} \right], \quad (6.41)$$

com

$$W_{Er}^{(I)}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left[\cos^2 \zeta \left| \frac{c_0^{(I)}}{m} \right|^2 I_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| \frac{\cos \zeta}{m} c_n^{(I)} D_n(\rho_1) + d_n^{(I)} \frac{n}{\rho_1} \right|^2 \right], \quad (6.42)$$

$$W_{E\phi}^{(I)}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| \frac{\cos \zeta}{m} c_n^{(I)} \frac{n}{\rho_1} - d_n^{(I)} D_n(\rho_1) \right|^2, \quad (6.43)$$

$$W_{Ez}^{(I)}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left| \frac{\eta}{mx} \right|^2 \left[\left| c_0^{(I)} \right|^2 I_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n^{(I)} \right|^2 I_n(\eta) \right]; \quad (6.44)$$

$$W_{Hr}^{(I)}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| c_n^{(I)} \frac{n}{\rho_1} - \frac{\cos \zeta}{m} d_n^{(I)} D_n(\rho_1) \right|^2, \quad (6.45)$$

$$W_{H\phi}^{(I)}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left[|c_0^{(I)}|^2 I_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| c_n^{(I)} D_n(\rho_1) - \frac{\cos \zeta}{m} d_n^{(I)} \frac{n}{\rho_1} \right|^2 \right], \quad (6.46)$$

$$W_{Hz}^{(I)}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left| \frac{\eta}{mx} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n^{(I)}|^2 I_n(\eta), \quad (6.47)$$

onde $W_{Er} = \int dr r \int d\phi \int dz \text{Re}(\epsilon_1) |E_{1r}|^2/4$, $W_{Hr} = \int dr r \int d\phi \int dz \text{Re}(\mu_1) |H_{1r}|^2/4$, e assim por diante, e $D_n(\rho_1) = J'_n(\rho_1)/J_n(\rho_1)$.

Devido às integrações na variável radial, repare que as Eqs. (6.42), (6.43), (6.45) e (6.46) não podem ser resolvidas analiticamente. Apenas a contribuição da componente z do campo eletromagnético possui uma expressão fechada. No entanto, se considerarmos as contribuições $W_{Er\phi} = (W_{Er} + W_{E\phi})$ e $W_{Hr\phi} = (W_{Hr} + W_{H\phi})$ para a energia interna, as expressões são simplificadas por meio das Eqs. (C.35) and (C.36) da Seção C.3.1. Explicitamente, usando a Eq. (C.36), para $A = c_n^{(I)} \cos \zeta/m$ e $B = d_n^{(I)}$, segue das Eqs. (6.42) e (6.43) que

$$W_{Er\phi}^{(I)}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left\{ \cos^2 \zeta \left| \frac{c_0^{(I)}}{m} \right|^2 I_1(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\cos^2 \zeta \left| \frac{c_n^{(I)}}{m} \right|^2 + |d_n^{(I)}|^2 \right) [I_{n-1}(\eta) + I_{n+1}(\eta)] - \frac{4 \cos \zeta}{a^2} \text{Im} \left(\frac{c_n^{(I)} d_n^{(I)*}}{m} \right) \int_0^a dr r \text{Im} [J_{n+1}(\rho_1) J_{n-1}(\rho_1^*)] \right] \right\}. \quad (6.48)$$

Ainda, empregando a Eq. (C.35), para $A = c_n^{(I)}$ e $B = d_n^{(I)} \cos \zeta/m$, obtemos das Eqs. (6.45) e (6.46) a expressão

$$W_{Hr\phi}^{(I)}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left\{ |c_0^{(I)}|^2 I_1(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| c_n^{(I)} - d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m} \right|^2 I_{n-1}(\eta) + \left| c_n^{(I)} + d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m} \right|^2 I_{n+1}(\eta) \right] \right\}. \quad (6.49)$$

Note que a integral no último termo da Eq. (6.48) não pode ser resolvida analiticamente [37]. Contudo, para a incidência normal ($\zeta = 90^\circ$: $\mathbf{E}_i \parallel z$), é imediato que $W_{Er\phi}^{(I)} = W_{Hz}^{(I)} = 0$, e a energia eletromagnética média é dada, portanto, por $W_{\text{tot}}^{(I)} = W_{Ez}^{(I)} + W_{Hr\phi}^{(I)}$. Neste caso particular, podemos mostrar que $I_{n-1}(y) + I_{n+1}(y) = 4 \text{Re}[y J_n(y) J'_n(y^*) / (y^2 - y^{*2})]$, onde $y = mx$, e, por

consequente,

$$W_{\text{tot}}^{\parallel} = \frac{2W_0}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \left[\frac{J_n(mx) J'_n(m^*x)}{m^2 - m^{*2}} \right] [m \text{Re}(m\tilde{m}^*) + m^* \text{Re}(m\tilde{m})] \right\} |c_n|^2. \quad (6.50)$$

Quando m e \tilde{m} são grandezas reais, usando a regra de L'Hospital, a Eq. (6.50) assume a forma

$$W_{\text{tot}}^{\parallel} = \frac{W_0 \tilde{m}}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(mx) J'_n(mx) + mx J_n(mx)^2 - mx J_{n-1}(mx) J_{n+1}(mx)] |c_n|^2. \quad (6.51)$$

6.4.2 Modo TE

Para a polarização TE (caso II), usando as componentes do campo interno ($\mathbf{E}_1^{(\text{II})}$, $\mathbf{H}_1^{(\text{II})}$) na definição (6.37), obtemos expressões similares às da Seção anterior:

$$W_{Er}^{(\text{II})}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| d_n^{(\text{II})} \frac{n}{\rho_1} - \frac{\cos \zeta}{m} c_n^{(\text{II})} D_n(\rho_1) \right|^2, \quad (6.52)$$

$$W_{E\phi}^{(\text{II})}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left[\left| d_0^{(\text{II})} \right|^2 I_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| d_n^{(\text{II})} D_n(\rho_1) - \frac{\cos \zeta}{m} c_n^{(\text{II})} \frac{n}{\rho_1} \right|^2 \right], \quad (6.53)$$

$$W_{Ez}^{(\text{II})}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left| \frac{\eta}{mx} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n^{(\text{II})} \right|^2 I_n(\eta); \quad (6.54)$$

$$W_{Hr}^{(\text{II})}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left[\cos^2 \zeta \left| \frac{d_0^{(\text{II})}}{m} \right|^2 I_1(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| \frac{\cos \zeta}{m} d_n^{(\text{II})} D_n(\rho_1) + c_n^{(\text{II})} \frac{n}{\rho_1} \right|^2 \right], \quad (6.55)$$

$$W_{H\phi}^{(\text{II})}(a) = 2W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a dr r \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{a^2} \left| \frac{\cos \zeta}{m} d_n^{(\text{II})} \frac{n}{\rho_1} - c_n^{(\text{II})} D_n(\rho_1) \right|^2, \quad (6.56)$$

$$W_{Hz}^{(\text{II})}(a) = W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left| \frac{\eta}{mx} \right|^2 \left[\left| d_0^{(\text{II})} \right|^2 I_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n^{(\text{II})} \right|^2 I_n(\eta) \right]. \quad (6.57)$$

Novamente, apenas as contribuições das componentes paralelas ao eixo do cilindro possuem uma expressão fechada. Empregando uma vez mais as Eqs. (C.35) e (C.36) do Apêndice C, obtemos então

$$\begin{aligned}
W_{Er\phi}^{(\text{II})}(a) &= W_{Er}^{(\text{II})}(a) + W_{E\phi}^{(\text{II})}(a) \\
&= W_0 \text{Re}(m\tilde{m}) \left\{ \left| d_0^{(\text{II})} \right|^2 I_1(\eta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| d_n^{(\text{II})} - c_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m} \right|^2 I_{n-1}(\eta) + \left| d_n^{(\text{II})} + c_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m} \right|^2 I_{n+1}(\eta) \right] \right\} \quad (6.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{Hr\phi}^{(\text{II})}(a) &= W_0 \text{Re}(m\tilde{m}^*) \left\{ \cos^2 \zeta \left| \frac{d_0^{(\text{II})}}{m} \right|^2 I_1(\eta) \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\cos^2 \zeta \left| \frac{d_n^{(\text{II})}}{m} \right|^2 + \left| c_n^{(\text{II})} \right|^2 \right) [I_{n-1}(\eta) + I_{n+1}(\eta)] \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4 \cos \zeta}{a^2} \text{Im} \left(\frac{d_n^{(\text{II})} c_n^{(\text{II})*}}{m} \right) \int_0^a dr r \text{Im} [J_{n+1}(\rho_1) J_{n-1}(\rho_1^*)] \right] \right\}. \quad (6.59)
\end{aligned}$$

Para a incidência normal ($\zeta = 90^\circ$: $\mathbf{E}_i \perp z$), temos $W_{Ez}^{(\text{II})} = W_{Hr\phi}^{(\text{II})} = 0$ e, portanto, a energia eletromagnética média é $W_{\text{tot}}^{(\text{II})} = W_{Er\phi}^{(\text{II})} + W_{Hz}^{(\text{II})}$. Explicitamente, podemos escrever

$$W_{\text{tot}}^\perp = \frac{2W_0}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \left[\frac{J_n(mx) J_n'(m^*x)}{m^2 - m^{*2}} \right] [m^* \text{Re}(m\tilde{m}^*) + m \text{Re}(m\tilde{m})] \right\} |d_n|^2. \quad (6.60)$$

Se m e \tilde{m} são grandezas reais, a Eq. (6.60) torna-se a Eq. (6.51) fazendo-se a troca de c_n por d_n :

$$W_{\text{tot}}^\perp = \frac{W_0 \tilde{m}}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(mx) J_n'(mx) + mx J_n(mx)^2 - mx J_{n-1}(mx) J_{n+1}(mx)] |d_n|^2. \quad (6.61)$$

Em todas as grandezas acima, usamos as igualdades $\text{Re}(m\tilde{m}) = \text{Re}(\epsilon_1)/\epsilon$, a qual é associada ao campo elétrico, e $\text{Re}(m\tilde{m}^*) = |k_1/\omega\mu_1|^2 \text{Re}(\mu_1)/\epsilon$, que aparece no campo magnético. Para cilindros *dispersivos*, as expressões para a energia interna devem ser modificadas de acordo com o modelo usado para escrevermos as funções $\epsilon_1(\omega)$ e $\mu_1(\omega)$ [47]. Fornecemos no Capítulo 8 um resumo de como generalizar as expressões calculadas aqui e nos Capítulos anteriores para um caso dispersivo de baixa absorção [25] e para um metamaterial com dispersão do tipo Lorentz [48].

6.5 Eficiência de absorção e os coeficientes internos

No espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito não opticamente ativo, os fatores de eficiência ou qualidade são definidos pelas grandezas [1, 2]

$$Q_{\text{sca}}^{(I)} = \frac{2}{x} \left[|b_0^{(I)}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(|b_n^{(I)}|^2 + |a_n^{(I)}|^2 \right) \right], \quad (6.62)$$

$$Q_{\text{tot}}^{(I)} = \frac{2}{x} \text{Re} \left[b_0^{(I)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(I)} \right], \quad (6.63)$$

$$Q_{\text{abs}}^{(I)} = Q_{\text{tot}}^{(I)} - Q_{\text{sca}}^{(I)}, \quad (6.64)$$

onde $Q_{\text{tot}}^{(I)}$, $Q_{\text{sca}}^{(I)}$ e $Q_{\text{abs}}^{(I)}$ são as eficiências de extinção (ou total), de espalhamento e de absorção para a polarização TM, respectivamente. Expressões para o modo TE são obtidas trocando-se $a_n^{(I)}$ por $b_n^{(II)}$ e $b_n^{(I)}$ por $a_n^{(II)}$ [1].

Repare que a eficiência de absorção é calculada a partir dos coeficientes de espalhamento. Essa situação é análoga à do espalhamento de Lorenz-Mie, em que a descrição da interação centro espalhador e campo eletromagnético incidente se dá mediante grandezas de espalhamento, Seção 3.5. Da mesma forma que no caso da esfera, podemos escrever a eficiência de absorção em termos de grandezas associadas ao campo eletromagnético no interior do cilindro e associá-la à energia interna.

Usando então as condições de contorno para o modo TM – Eqs. (6.20) –,

$$\eta J_n(\eta) c_n^{(I)} = m \xi \left[J_n(\xi) - H_n^{(1)}(\xi) b_n^{(I)} \right], \quad (6.65)$$

$$\tilde{m} \eta J_n(\eta) d_n^{(I)} = m \xi H_n^{(1)}(\xi) a_n^{(I)}, \quad (6.66)$$

e as definições para os coeficientes internos magnéticos $c_n^{(I)}$ e $d_n^{(I)}$, dadas nas Eqs. (6.30) e (6.31), obtemos após algumas manipulações

$$Q_{\text{abs}}^{(I)} = \frac{2}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ |c_n^{(I)}|^2 \frac{i\pi \tilde{m}}{2m^*} \eta J_n(\eta^*) J_n'(\eta) + \left| \frac{\tilde{m} d_n^{(I)}}{m} \right|^2 \left[\frac{\pi \eta^2 J_n(\eta^*) (\xi^2 - \eta^{*2}) \mathcal{W}_n}{2\xi^2 \eta^{*2} H_n^{(1)}(\xi) (\eta^2 - \xi^2)} - \left| \frac{\eta J_n(\eta)}{H_n^{(1)}(\xi)} \right|^2 \right] \right\}, \quad (6.67)$$

onde \mathcal{W}_n está definida na Eq. (6.27). Da mesma maneira, usando as condições de contorno para

o modo TE – Eqs. (6.21),

$$\eta J_n(\eta) c_n^{(\text{II})} = im\xi H_n^{(1)}(\xi) b_n^{(\text{II})}, \quad (6.68)$$

$$\tilde{m}\eta J_n(\eta) d_n^{(\text{II})} = m\xi \left[J_n(\xi) - H_n^{(1)}(\xi) a_n^{(\text{II})} \right], \quad (6.69)$$

e os coeficientes $c_n^{(\text{II})}$ e $d_n^{(\text{II})}$, dados pelas Eqs. (6.34) e (6.35), obtemos

$$Q_{\text{abs}}^{(\text{II})} = \frac{2}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left\{ \left| \frac{\tilde{m} d_n^{(\text{II})}}{m} \right|^2 \frac{i\pi m}{2\tilde{m}} \eta^* J_n(\eta^*) J'_n(\eta) \right. \\ \left. + \left| \frac{c_n^{(\text{II})}}{m} \right|^2 \left[\frac{i\pi \eta^2 J_n(\eta^*) (\xi^2 - \eta^{*2}) \mathcal{V}_n}{2\xi^2 \eta^* H_n^{(1)}(\xi) (\xi^2 - \eta^2)} - \left| \frac{\eta J_n(\eta)}{H_n^{(1)}(\xi)} \right|^2 \right] \right\}, \quad (6.70)$$

onde \mathcal{V}_n está definida na Eq. (6.26).

Se considerarmos no último termo da Eq. (6.67) a aproximação $\eta^2 \approx \eta^{*2}$, que significa $m^2 \approx m^{*2}$ (baixa absorção), podemos mostrar que

$$Q_{\text{abs}}^{(\text{I})} \approx \frac{\pi}{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left| c_n^{(\text{I})} \right|^2 \text{Im} \left[\frac{\tilde{m}^*}{m} \eta J_n(\eta) J'_n(\eta^*) \right] + \left| d_n^{(\text{I})} \right|^2 \text{Im} \left[\frac{\tilde{m}}{m} \eta J_n(\eta) J'_n(\eta^*) \right] \right\}, \quad (6.71)$$

onde usamos o Wronskiano $H_n^{(1)}(\xi) J_n(\xi) - H_n^{(1)}(\xi) J'_n(\xi) = 2i/(\pi\xi)$. Uma expressão análoga é obtida para a polarização TE trocando-se (I) por (II) na Eq. (6.71). É importante enfatizarmos que na Eq. (6.71) apenas os termos que se anulam para a incidência normal são aproximados usando $\eta^2 \approx \eta^{*2}$. Portanto, quando $\zeta = 90^\circ$, segue que

$$Q_{\text{abs}}^{\parallel} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Im} \left[\tilde{m}^* J_n(mx) J'_n(m^*x) \right] |c_n|^2, \quad (6.72)$$

$$Q_{\text{abs}}^{\perp} = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Im} \left[\tilde{m} J_n(mx) J'_n(m^*x) \right] |d_n|^2, \quad (6.73)$$

que são expressões exatas para as eficiências de absorção paralela e perpendicular em termos dos coeficientes internos magnéticos c_n e d_n . A seguir, mostramos uma conexão esperada entre a energia eletromagnética média dentro de um cilindro e sua eficiência de absorção óptica, com a condição de que $\text{Re}(m) \gg \text{Im}(m)$ e $\text{Re}(\tilde{m}) \gg \text{Im}(\tilde{m})$ (limite de baixa absorção).

6.6 Resultados numéricos e discussão

Apresentamos nesta Seção alguns resultados numéricos provenientes das expressões exatas que calculamos para o fator de aumento da energia eletromagnética W_{tot}/W_0 no interior de um cilindro infinito magnético. Todos os cálculos numéricos são realizados a partir de um

programa que escrevemos para o *software* gratuito *Scilab* 5.1.1. Como limite superior N_{\max} para as séries truncadas $\sum_{n=1}^{N_{\max}}$, empregamos a expressão $N_{\max} = \max(n_c, |m|x) + (101,0 + x)^{1/2}$, com $n_c = x + 4.05x^{1/3} + 2$ [27]. A modificação adicional em N_{\max} na qual tomamos o valor $\max(n_c, |m|x)$ em vez de apenas n_c é introduzida com a finalidade de obtermos somas mais acuradas mesmo para grandes valores de μ_1/μ em regiões de pequenos parâmetros de tamanho $x = ka$, Figs. 6.3–6.6. As exceções são as Figs. 6.7–6.9, onde trocamos $\max(n_c, |m|x)$ por n_c .

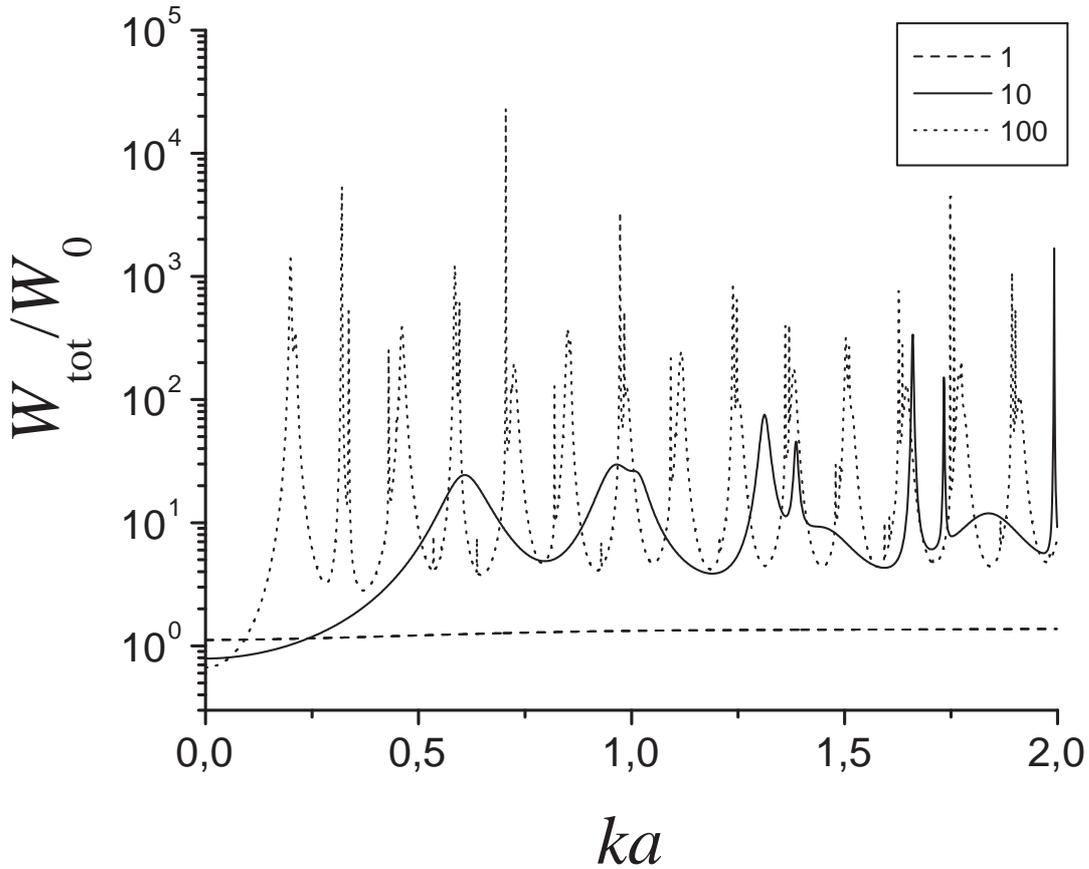


Figura 6.3: Energia eletromagnética normalizada $W_{\text{tot}}^{(1)}/W_0$ dentro de cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 10$; 100) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = (1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i)$ sob incidência oblíqua ($\zeta = 60^\circ$). As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$. Apenas a polarização TM é mostrada.

A Fig. 6.3 mostra uma comparação entre as abordagens magnética e não magnética para o modo TM com $\zeta = 60^\circ$ (incidência oblíqua). Usamos neste cálculo o mesmo valor de ϵ_1/ϵ que na Ref. [17] é usado para uma esfera magnética e aplicamos a Eq. (6.41) normalizada. O resultado aqui obtido é bastante similar ao que encontramos no espalhamento eletromagnético

por uma esfera magnética [18], Seção 3.6. Em ambos os casos, a energia interna média é muito maior do que aquela relacionada a um espalhador com as mesmas propriedades ópticas que o meio circundante mesmo para parâmetros de tamanho no intervalo $ka < 1$.

Como mencionamos na Seção 3.6, as séries de picos estreitos que aparecem na Fig. 6.3 em função do parâmetro de tamanho ka são bem conhecidas e são geralmente chamadas de ressonâncias dependentes da morfologia (MDRs) [13]. Para a energia interna média, esses picos característicos são imputados a ressonâncias dos coeficientes de espalhamento [49, 50], os quais estão vinculados aos coeficientes internos pelas Eqs. (6.65), (6.66), (6.68) e (6.69). O mesmo argumento usado para a esfera magnética pode ser aqui aplicado. Como no espalhamento de Lorenz-Mie, os elevados valores de energia interna normalizada podem ser explicados pelo aumento da eficiência de extinção Q_{tot} , cujos picos estreitos ocorrem em parâmetros de tamanho correspondentes aos máximos de energia eletromagnética W_{tot}/W_0 [47] e refletem a formação de ondas estacionárias no centro espalhador.

6.6.1 Seção de choque de absorção e a energia interna

Na Seção 3.5, calculamos a seção de choque de absorção óptica de uma esfera magnética em função dos coeficientes internos. No regime de fraca absorção (wa), mostramos que a eficiência de absorção possui uma relação linear com a energia interna normalizada. Fazemos aqui esse mesmo estudo para o cilindro infinito magnético. Por simplicidade, consideramos a Eq. (6.50) para a incidência normal em modo TM (polarização paralela) e assumimos que $m_i \ll m_r$ e $\tilde{m}_i \ll \tilde{m}_r$, onde $m = m_r + im_i$, $\tilde{m} = \tilde{m}_r + i\tilde{m}_i$ são os índices de refração e a impedância relativos, respectivamente. Fazendo a aproximação $(m^2 - m^{*2}) \approx 4im_r m_i$, $\text{Re}(m\tilde{m}^*) \approx m_r \tilde{m}_r$ e $\text{Re}(m\tilde{m}) \approx m_r \tilde{m}_r$, obtemos

$$\frac{W_{\text{tot}}^{\parallel}}{W_0} \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m_r}{m_i x} \text{Im} [\tilde{m}_r J_n(mx) J'_n(m^*x)] |c_n|^2 . \quad (6.74)$$

Comparando as Eqs. (6.72) e (6.74), segue imediatamente o resultado

$$\frac{W_{\text{tot}}^{(\text{wa})}}{W_0} \approx \left(\frac{m_r}{\pi m_i x} \right) Q_{\text{abs}} . \quad (6.75)$$

Embora tenhamos usado uma situação particular de incidência normal e polarização paralela, a Eq. (6.75) obtida para espalhadores cilíndricos vale para ambos os modos TM e TE e independe do ângulo de incidência ($90^\circ - \zeta$), como ilustramos na Fig. 6.4. Este resultado é original e está publicado na Ref. [19].

Devido à simetria do sistema, note que a constante que associa W_{tot}/W_0 a Q_{abs} para um

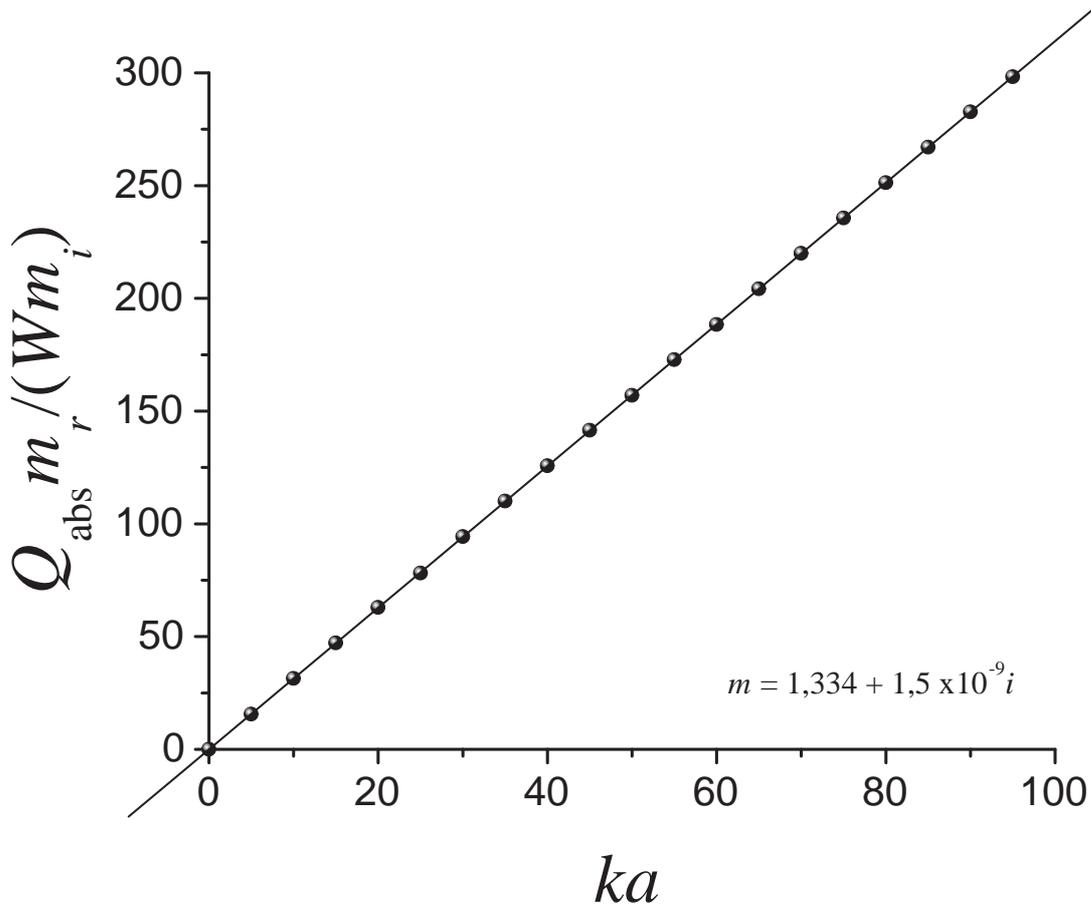


Figura 6.4: Razão entre eficiência de absorção Q_{abs} multiplicada por m_r/m_i e o fator de aumento da energia eletromagnética $W = W_{\text{tot}}^{(\text{II})}/W_0$ dentro de um cilindro não magnético com $m = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ sob incidência oblíqua ($\zeta = 60^\circ$). Apenas a polarização TE é mostrada.

cilindro infinitamente longo não é a mesma que para uma esfera homogênea, Eq. (3.59). No caso especial de um cilindro infinito com as mesmas propriedades do meio circundante, isto é, $m_r \approx 1$ e $W_{\text{tot}}^{(\text{wa})} \approx W_0$, obtemos $Q_{\text{abs}} \approx \pi m_i x$. Este último resultado está de acordo com [2]. Para um espalhador esférico, temos $Q_{\text{abs}} \approx 8m_i x/3$ [2, 24].

Como podemos observar, a alteração drástica de geometria dos espalhadores magnéticos – de esfera para um cilindro infinito – não modifica o comportamento global da eficiência de absorção em relação à energia interna. Isso sugere que a diferença entre os fatores que aparecem nas Eqs. (3.59) e (6.75) seja devido à geometria do problema, o que corresponderia a um preço a se pagar pelo espalhador ser esférico ou cilíndrico. Como curiosidade, observe que os fatores $8/3$ e π podem ser reescritos a partir de propriedades geométricas dos espalhadores esféricos e

cilíndricos, respectivamente:

$$\frac{8}{3} = \frac{2}{a} \left(\frac{4\pi a^3/3}{\pi a^2} \right), \quad \pi = \frac{2}{a} \left(\frac{\pi a^2 L}{2aL} \right).$$

Em outras palavras, escrevemos esses fatores como sendo a razão de duas vezes o volume pela seção de choque geométrica do centro espalhador multiplicada pelo raio a . Portanto, no regime de baixa absorção óptica ($m_i \ll m_r$), podemos reescrever as Eqs. (6.75) e (3.59) como

$$\frac{W_{\text{tot}}^{(\text{wa})}}{W_0} \approx \frac{a\sigma_g}{2V} \frac{m_r}{x} \frac{Q_{\text{abs}}}{m_i} = \frac{m_r}{2kV} \frac{\sigma_{\text{abs}}}{m_i}, \quad (6.76)$$

onde V é o volume do espalhador, k é o número de onda do campo eletromagnético incidente, e σ_g e $\sigma_{\text{abs}} = Q_{\text{abs}}\sigma_g$ são as seções de choque geométrica e de absorção, respectivamente. Note que, embora tenhamos considerado explicitamente duas geometrias particulares nesta derivação (uma esfera de raio a e um segmento L de um cilindro infinito de raio a), a Eq. (6.76) *não depende da forma do centro espalhador*. Este é talvez o resultado mais importante do trabalho que desenvolvemos nesta dissertação. Evidentemente, a Eq. (6.76) deve ser investigada para verificarmos se sua universalidade é válida ou não.

Das teorias de espalhamento que levam em conta partículas de formato arbitrário, a teoria de Rayleigh-Gans [1, 2] é uma das mais simples e intuitivas. Essa teoria, também chamada de teoria de Rayleigh-Debye [3, 6], fornece uma estimativa para o espalhamento de partículas com formato geométrico arbitrário e propriedades ópticas similares as do meio circundante [1]. Essencialmente, o que se faz é considerar as amplitudes S_j ($j = 1; 2$) do espalhamento de Lorenz-Mie [1] em relação a um elemento de volume ΔV , isto é, $s_j = S_j/\Delta V$. Fisicamente, é plausível que, sob certas condições, as amplitudes de espalhamento relativas a uma partícula de formato arbitrário possam ser aproximadas por uma integral apropriada de s_j sobre o volume V da partícula. No espalhamento da mecânica quântica, a aproximação análoga é chamada de *aproximação de Born* [6] (para sermos precisos, a *primeira* aproximação de Born).

As condições para a validade da aproximação de Rayleigh-Gans (índice de refração próximo à unidade e pequeno deslocamento de fase da onda) são expressas por

$$|m - 1| \ll 1, \quad kd|m - 1| \ll 1, \quad (6.77)$$

onde d é uma dimensão linear característica da partícula e m é seu índice de refração complexo da partícula em relação ao meio circundante. Pode ser mostrado que a aproximação de Rayleigh-Gans é obtida se o campo dentro da partícula é aproximado pelo campo incidente [1]. *Grosso modo*, podemos dizer que as condições (6.77) impõem, respectivamente, que (i) a onda incidente não seja “refletida” apreciavelmente na interface partícula-meio e (ii) não sofra

mudança apreciável de fase ou amplitude depois de penetrar na partícula.

A menos que S_1 e S_2 sejam independentes do ângulo azimutal ϕ , o que é verdade para partículas com simetria esférica, a seção de choque de espalhamento na teoria de Rayleigh-Gans depende do estado de polarização da luz incidente. Um resultado importante dessa teoria é que o mesmo não se verifica para a seção de choque de absorção. De acordo com as aproximações (6.77), o teorema óptico [1] fornece a seção de choque de absorção

$$\sigma_{\text{abs}} = 2kV m_i, \quad (6.78)$$

que, como se nota, é claramente independente da polarização da luz incidente e da orientação da partícula. A Eq. (6.78) pode ser escrita de modo mais conveniente se considerarmos $\sigma_{\text{abs}} = \alpha v$, onde $\alpha = 4\pi m_i/\lambda$ é o coeficiente de absorção e m_i é a parte imaginária do índice de refração da partícula.

O que gostaríamos de chamar atenção é que o resultado (6.78) é um caso particular da Eq. (6.76): basta considerarmos $W_{\text{tot}} \approx W_0$ e $m_r \approx 1$, o que é válido quando as condições (6.77) são satisfeitas. Isso reforça a hipótese de universalidade da Eq. (6.76).

6.6.2 Velocidade de transporte de energia em meios magnéticos desordenados bidimensionais

No regime de frequência em que há formação de ondas estacionárias no interior da partícula, isto é, $W/W_0 \gg 1$, onde W/W_0 é o fator de aumento da energia eletromagnética média armazenada no interior do centro espalhador [18, 19, 24, 47], e mesmo fora desse regime, fornecido que $x, mx \gg 1$ (condições de confinamento da onda), onde m é o índice de refração relativo da partícula em relação ao meio circundante e $x = ka$ é o parâmetro de tamanho da esfera ou cilindro, podemos escrever uma expressão aproximada para a velocidade de transporte de energia em termos da energia interna média [38, 39]:

$$v_E = \frac{c_0}{1 + f(W/W_0 - 1)}, \quad (6.79)$$

onde c_0 é a velocidade de propagação da onda no meio circundante às partículas e f é a fração volumétrica de espalhadores no meio, também chamada de fração de empacotamento do meio desordenado.

Desse modo, a partir do cálculo da energia interna média W e valendo-se da Eq. (6.79), podemos estimar o comportamento global da velocidade de transporte de energia no meio desordenado *independentemente da forma* do centro espalhador. Aqui, como na Ref. [47], não nos

preocupamos em nossas estimativas com as condições de confinamento da onda ($ka, mka \gg 1$), posto que a energia eletromagnética armazenada no centro espalhador está bem definida para meios não dispersivos e fracamente absorbitivos [25]. Para cálculos mais precisos, seria necessário recorrermos à *teoria de transporte* (equação de Bethe-Salpeter) e resolvermos o problema para cada tipo de partícula espalhadora separadamente.

No espalhamento eletromagnético por cilindros, Ruppin [47] usou com sucesso a Eq. (6.79) como uma aplicação da energia interna média armazenada dentro de um cilindro dielétrico infinito. Este modelo simples para o cálculo da velocidade de transporte de energia em um meio desordenado bidimensional, como enfatiza Ruppin [47], reproduz bem os resultados de Busch *et al.* [51], os quais foram obtidos na aproximação de baixa densidade da equação de Bethe-Salpeter. Nesta Seção, estendemos o uso da Eq. (6.79) para o cálculo da velocidade de transporte de energia em um meio magnético desordenado bidimensional ($\zeta = 90^\circ$), o qual é de interesse para a engenharia fotônica [12, 52]. Evidentemente, o meio sob análise não tem apenas duas dimensões. O que consideramos, na verdade, são os caminhos efetuados pelos fótons espalhados neste meio [53] e não a geometria do sistema, que é tridimensional.

Assim, consideramos uma coleção de cilindros infinitos paralelos e dispostos aleatoriamente em um meio não absorbitivo com fração de empacotamento $f = 0,36$, que é a mesma usado em experimentos com espalhadores não magnéticos de TiO_2 [39]. A condição de incidência normal ($\zeta = 90^\circ$) e cilindros paralelos é necessária para que os fótons possam ser modelados por uma caminhada aleatória no plano xy e, por conseguinte, restritos a um espalhamento em duas dimensões [53]. Em especial, assumimos que os espalhadores são magnéticos e que as perdas magnéticas são negligenciáveis, isto é, (ϵ_1, μ_1) são grandezas reais. Esta última consideração, como já mencionamos, pode ser encontrada em ferritas moles, que apresentam elevados valores de permeabilidade magnética μ_1/μ com baixa perda magnética tipicamente em frequências abaixo de 100 MHz [11].

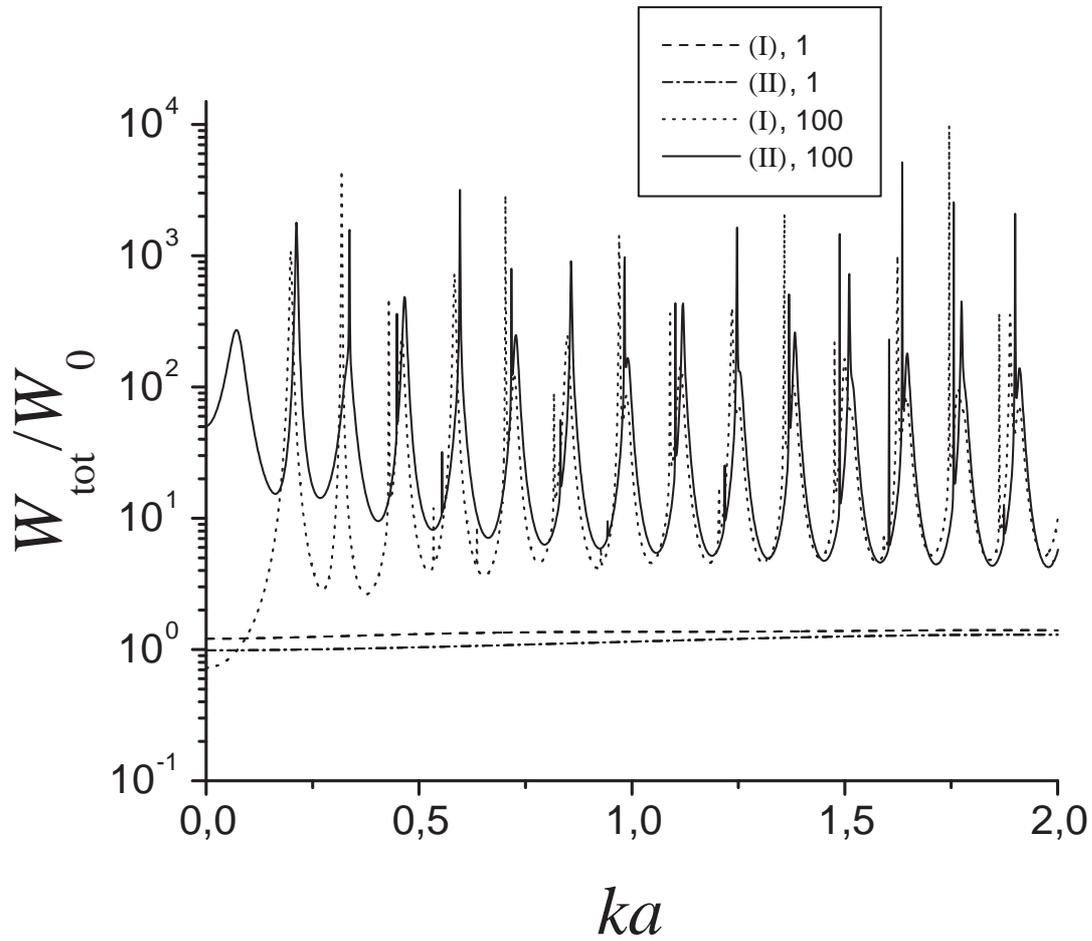


Figura 6.5: Comparação entre a energia eletromagnética normalizada W_{tot}/W_0 dentro de um cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 100$) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$). As polarizações paralela e perpendicular são indicadas por (I) e (II), respectivamente. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$.

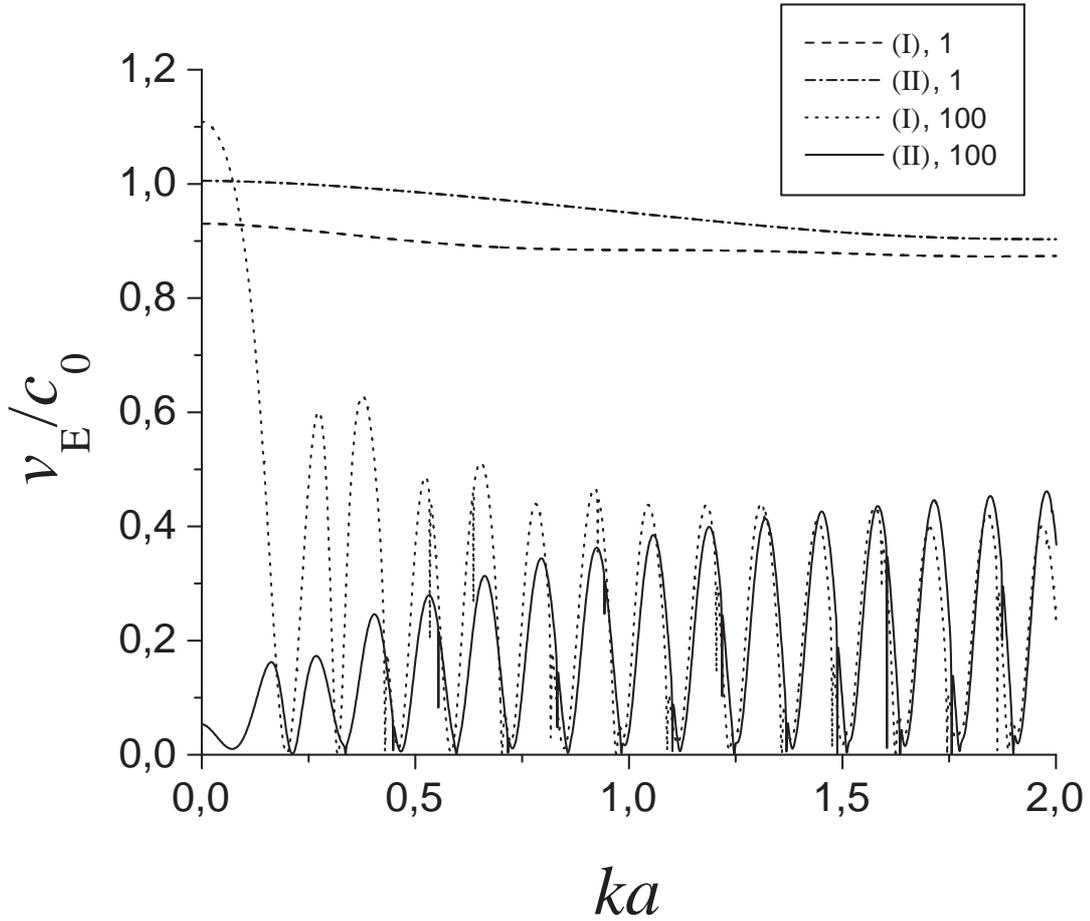


Figura 6.6: Comparação entre a velocidade de transporte de energia v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 100$) e não magnéticos ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e fração volumétrica $f = 0,36$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$). As polarizações paralela e perpendicular são indicadas por (I) e (II), respectivamente. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < ka < 2$, com $\delta(ka) = 10^{-3}$.

Os picos de ressonância na energia eletromagnética interna representados na Fig. 6.5, como esperado, fornecem pequenos valores de velocidade de transporte de energia, então mostrados na Fig.6.6 [39, 47]. Para o cálculo de W_{tot}/W_0 , usamos as Eqs.(6.51) e (6.61) para as polarizações paralela e perpendicular, respectivamente, e as aplicamos no cálculo de v_E/c_0 expressa na Eq. (6.79). Devido ao magnetismo, observe na Fig. 6.6 que a velocidade de transporte de energia se anula mesmo para cilindros com raio muito menor do que o comprimento de onda incidente (região de tamanho de Rayleigh). Um estudo da velocidade de transporte para $ka < 1$ em um meio magnético desordenado tridimensional (esferas de Lorenz-Mie) pode ser encontrado na Ref. [16], onde o mesmo resultado é obtido. Qualitativamente, os altos valores de energia

interna W_{tot} significam que a onda eletromagnética passa muito tempo dentro dos espalhadores, levando a uma diminuição da velocidade de transporte v_E e, por conseguinte, do coeficiente de difusão $D = v_E \ell^* / d$, onde ℓ^* é o livre caminho médio de transporte e d é a dimensionalidade do meio desordenado do ponto de vista do fóton [16, 39, 51]. Esse forte decréscimo da velocidade de transporte, e, conseqüentemente, do coeficiente de difusão, está relacionado a ressonâncias nos centros espalhadores isolados e favorecem a localização da onda eletromagnética [38, 39, 51]. A diminuição, e mesmo supressão, de v_E em um meio magnético desordenado bidimensional pode ser observada na Fig. 6.6 para $0 < ka < 2$ e na Fig. 6.8 para $0 < ka < 100$.

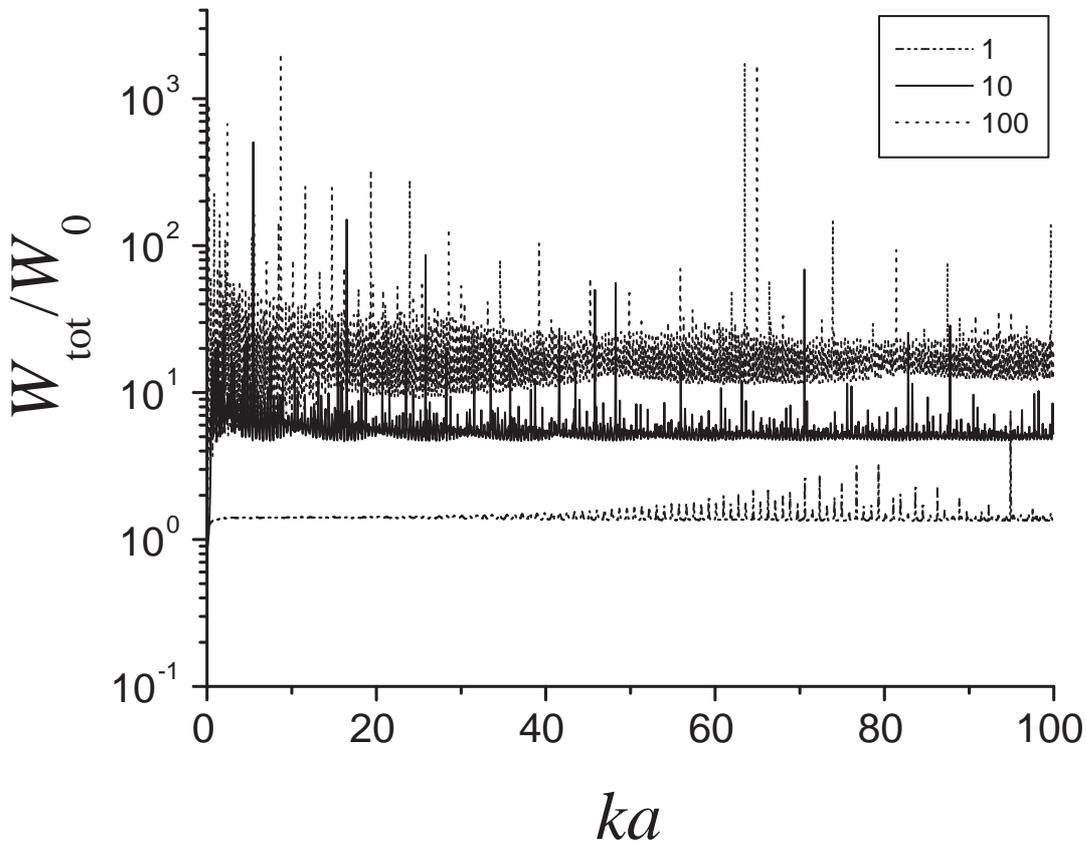


Figura 6.7: Energia eletromagnética normalizada $W_{\text{tot}}^{\parallel}/W_0$ dentro de um cilindro magnético ($\mu_1/\mu = 10; 100$) e não magnético ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$, polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $10^{-8} < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$.

Note que a velocidade de transporte de energia graficada como uma função do parâmetro de tamanho apresenta um comportamento oscilatório. Em razão das diferenças entre a energia eletromagnética armazenada nas polarizações paralela e perpendicular (Fig. 6.5), o comportamento da velocidade de transporte normalizada é também diferente para ambas as polarizações.

De fato, elas mostram tendências oscilatórias opostas para pequenos parâmetros de tamanho: enquanto a amplitude de oscilação de v_E/c_0 no modo paralelo é reduzida com o aumento de ka , no modo perpendicular ela é aumentada. Isto pode ser claramente observado na Fig. 6.6.

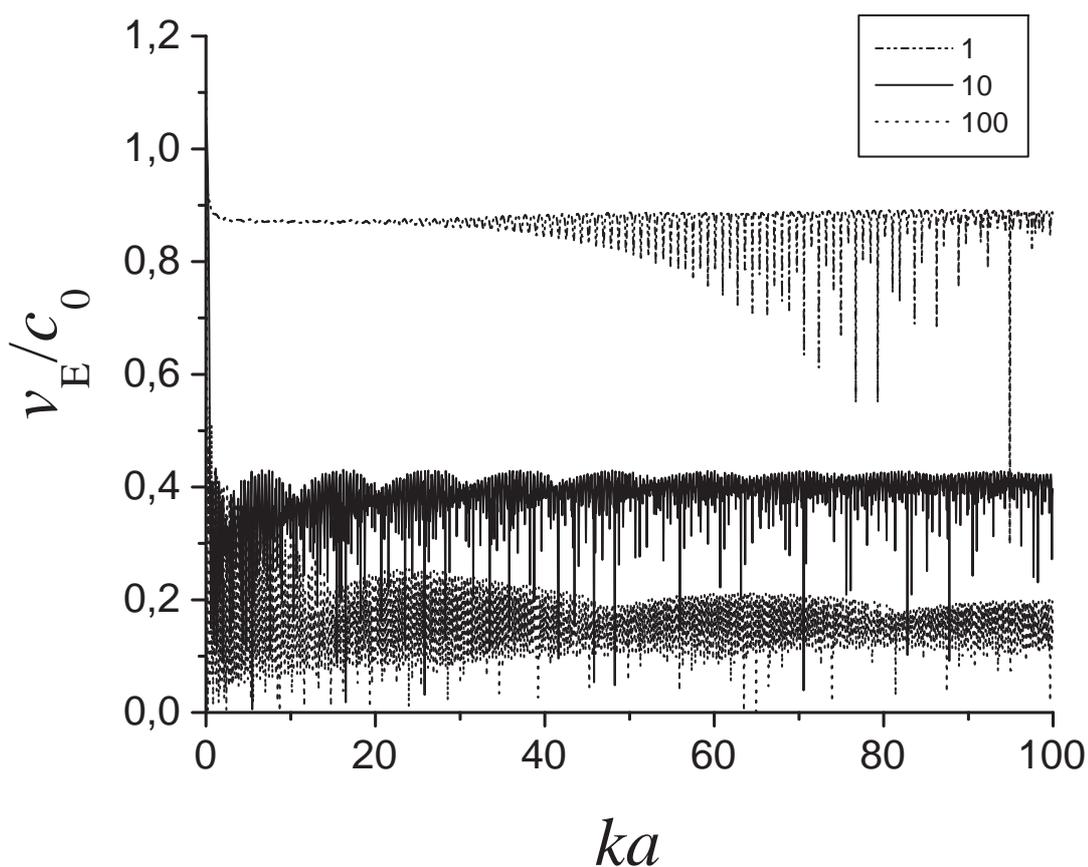


Figura 6.8: Velocidade de transporte de energia normalizada v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 10; 100$) e não magnéticos ($\mu_1/\mu = 1$) com $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161$ e fração volumétrica $f = 0,36$ sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $10^{-8} < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$.

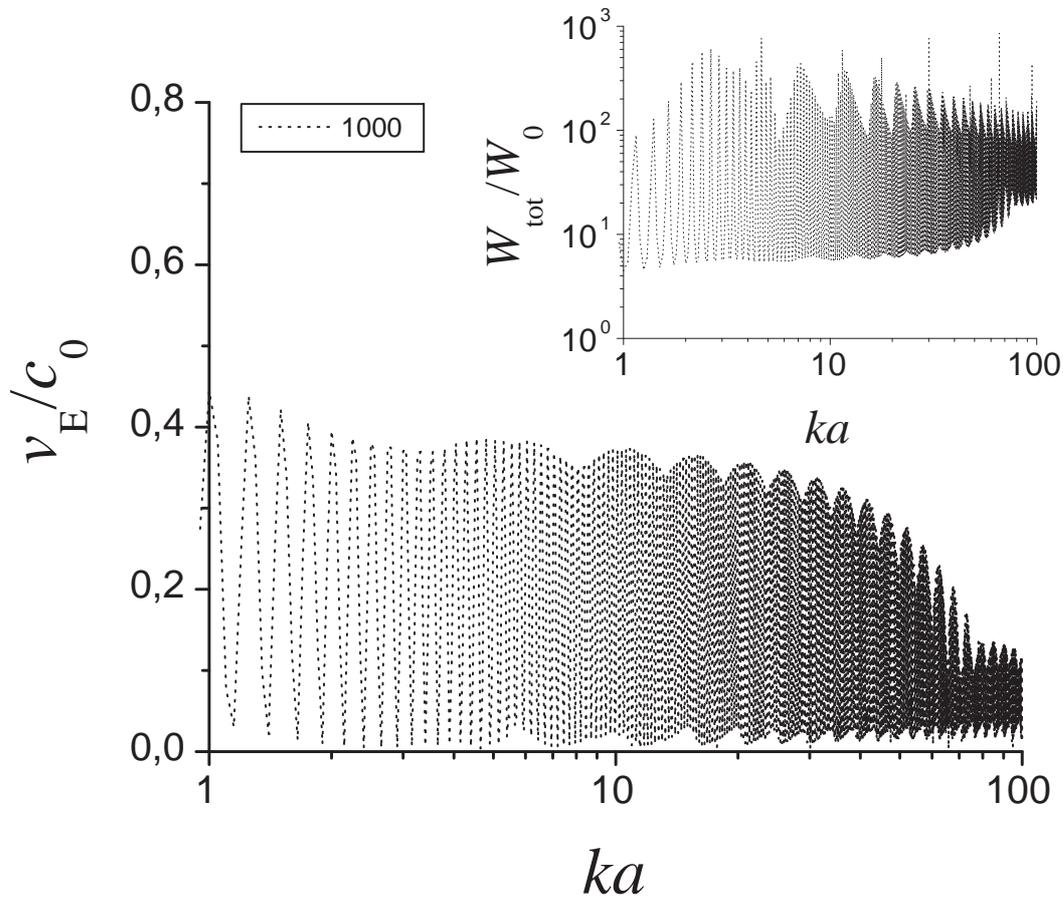


Figura 6.9: Velocidade de transporte de energia normalizada v_E/c_0 em um meio contendo cilindros magnéticos ($\mu_1/\mu = 1000$) sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), polarização paralela. As grandezas são calculadas no intervalo $1 < ka < 100$, com $\delta(ka) = 0,05$.

Representamos na Fig. 6.9 o perfil de v_E/c_0 para $\mu_1/\mu = 1000$, incidência normal ($\zeta = 90^\circ$) na polarização paralela. Embora o número de picos estreitos mostrados nesta região de parâmetros de tamanho, para incrementos $\delta(ka) < 0,05$, seja muito maior do que é representado aqui [para $\delta(ka) = 0,05$], podemos avaliar o comportamento oscilatório global de v_E como função de ka . Em uma configuração particular de esferas magnéticas em que $ka = 0,01$, há na Ref. [16] um estudo de v_E/c_0 como função da permeabilidade magnética relativa μ_1/μ .

6.7 Conclusões

Este Capítulo traz alguns dos resultados analíticos mais importantes desta dissertação de Mestrado. Tratando o problema de espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito magnético sob incidência oblíqua, determinamos a energia eletromagnética média que é armazenada no centro espalhador para os modos TM e TE. Mostramos que o comportamento exibido pela energia interna a um cilindro magnético é similar ao caso da esfera magnética que é considerado no Capítulo 3 e que publicamos na Ref. [18]. Em especial, seguindo as considerações de Ruppin [47], aplicamos nossas expressões na estimação da velocidade de transporte de energia em meios desordenados magnéticos bidimensionais [19]. Conseguimos, com isso, obter resultados similares aos apresentados na Ref. [16] para o caso de uma esfera de Lorenz-Mie magnética. Finalmente, calculamos a seção de choque de absorção em termos de grandezas relacionadas apenas ao campo interno ao cilindro. Para meios fracamente absorbitivos, determinamos uma expressão que relaciona a energia interna à eficiência de absorção do centro espalhador. Usando o resultado obtido na Seção 3.5, deduzimos a partir de nossos cálculos e da geometria dos espalhadores uma expressão entre a energia interna e seção de choque de absorção óptica que vale tanto para a esfera quando para o cilindro magnéticos. De fato, essa expressão independe da forma do centro espalhador e vincula a energia interna a grandezas de espalhamento que podem ser mensuradas na prática. Isso sugere que, no regime de fraca absorção, podemos estimar a energia interna e, por conseguinte, a velocidade de transporte de energia no meio desordenado usando este modelo simples, o qual exige apenas o conhecimento da fração volumétrica de partículas no meio, o volume de uma partícula individual, o comprimento de onda incidente, o índice de refração complexo e a seção de choque de absorção.

Os principais resultados aqui discutidos encontram-se publicados em nosso artigo [19]. No Capítulo a seguir, estendemos nosso estudo da energia interna a um cilindro magnético envolvido por uma camada de material magnético de espessura uniforme.

7 *Espalhamento de ondas eletromagnéticas por dois cilindros magnéticos concêntricos*

Assim como podemos generalizar a teoria de Lorenz-Mie para esferas multicamadas [1, 40], o mesmo pode ser feito no caso do espalhamento eletromagnético por um cilindro circular infinito. Na literatura, a solução analítica do espalhamento eletromagnético por cilindros concêntricos não magnéticos *sob incidência normal* foi obtida em 1961 por Kerker e Matijevic [54]. Para espalhadores cilíndricos, essa é a abordagem mais simples e usual, e tem como principal propriedade o fato de que as grandezas de espalhamento calculadas nessa geometria são análogos às da geometria esférica. Especificamente, no caso dos cilindros concêntricos, as expressões obtidas para os coeficientes das expansões e, por conseguinte, para as grandezas de espalhamento são análogas as do espalhamento por duas esferas concêntricas de raios e materiais correspondentes [2, 54].

Neste capítulo, aplicamos ao espalhamento eletromagnético por dois cilindros concêntricos as mesmas considerações feitas no Capítulo 4 para uma esfera de Lorenz-Mie com uma camada linear, homogênea e isotrópica de espessura uniforme [40, 54]. Nossos cálculos são originais e abordam a situação geral em que os cilindros são *magnéticos* e a incidência é *oblíqua*. No intuito de analisarmos as ressonâncias morfológicas no centro espalhador, calculamos explicitamente a energia eletromagnética média no tempo armazenada no interior do cilindro e da camada cilíndrica concêntrica. Até onde sabemos, essa é a primeira vez que uma expressão analítica exata para a energia efetiva interna a um cilindro magnético constituído de dois materiais distintos é calculada.

Assim, considere uma onda eletromagnética plana $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)e^{-i\omega t}$ incidente a uma partícula composta por um cilindro interior de raio a e uma camada cilíndrica concêntrica de raio b , $b > a$. Os meios envolvidos são assumidos lineares, homogêneos e isotrópicos, com constantes ópticas (ϵ_1, μ_1) para o cilindro interior ($0 \leq r \leq a$), (ϵ_2, μ_2) para a camada cilíndrica ($a \leq r \leq b$) e (ϵ, μ) para o meio circundante não absorbitivo ($r \geq b$). O eixo do cilindro coincide com o eixo

z do sistema de coordenadas retangulares ou cilíndricas e a onda eletromagnética incidente a um ângulo de incidência arbitrário nas polarizações TM e TE.

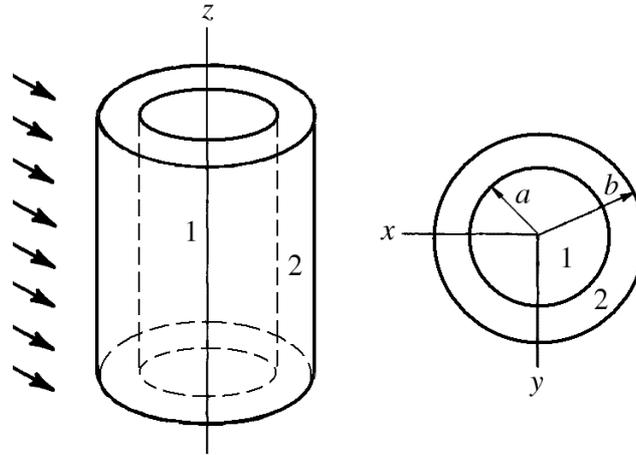


Figura 7.1: Cilindro magnético (ϵ_1, μ_1) de raio a envolvido por uma camada magnética (ϵ_2, μ_2) de espessura uniforme $(b - a)$.

No que se segue, apresentamos os campos eletromagnéticos oriundos da resolução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas cilíndricas, Eq. (6.1). Como discutido na Seção 2.2, os campos eletromagnéticos em todos os pontos do espaço são determinados por meio das condições de contorno, as quais, no presente caso, envolvem três meios materiais distintos.

7.1 Campos eletromagnéticos

O método de resolução deste problema é inteiramente análogo ao do problema de duas esferas concêntricas magnéticas abordado no Capítulo 4. As soluções da equação de Helmholtz para cada uma das regiões são expressas em termos dos harmônicos cilíndricos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} definidos nas Eqs. (6.3) e (6.4). Em razão das condições impostas nos parágrafos acima, os campos eletromagnéticos incidente $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$, interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ – região $0 \leq r \leq a$ – e espalhado $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ são dados pelas mesmas expansões calculadas do Capítulo 6. Resta-nos, portanto, escrever uma expressão para o campo eletromagnético $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ no interior da camada cilíndrica concêntrica de espessura $b - a$. Como argumentamos na Seção 4.1, esse campo tem a mesma forma matemática que o campo interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ com a diferença de que tanto as funções esféricas de Bessel quanto Neumann entram na composição dos harmônicos, fornecendo, portanto, dois coeficientes a mais.

Como nas Figs. 6.1 e 6.2, sejam ζ o ângulo formado entre a onda incidente e o eixo do cilindro e $\varphi_n(\phi, z) = E_0(-i)^n e^{i(n\phi + hz)}$, onde $h = -k \cos \zeta$. As polarizações TM $(\mathbf{E}_i^{(1)} || xy)$ e TE

($\mathbf{E}_i^{(\text{II})} \perp xy$) são indicadas pelos índices (I) e (II), respectivamente. Em termos dos harmônicos vetoriais cilíndricos, os campo eletromagnéticos ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$) relativos aos modos TM e TE na camada cilíndrica concêntrica, região $a \leq r \leq b$, são expressos por

$$\mathbf{E}_2^{(\text{I})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_2)} \left[g_n^{(\text{I})} \mathbf{M}_n^{(1)} + f_n^{(\text{I})} \mathbf{N}_n^{(1)} + w_n^{(\text{I})} \mathbf{M}_n^{(2)} + v_n^{(\text{I})} \mathbf{N}_n^{(2)} \right], \quad (7.1)$$

$$\mathbf{H}_2^{(\text{I})} = -\iota \frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_2)} \left[f_n^{(\text{I})} \mathbf{M}_n^{(1)} + g_n^{(\text{I})} \mathbf{N}_n^{(1)} + v_n^{(\text{I})} \mathbf{M}_n^{(2)} + w_n^{(\text{I})} \mathbf{N}_n^{(2)} \right]; \quad (7.2)$$

$$\mathbf{E}_2^{(\text{II})} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_2)} \left[g_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(1)} + f_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(1)} + w_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(2)} + v_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(2)} \right], \quad (7.3)$$

$$\mathbf{H}_2^{(\text{II})} = -\frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(k_2)} \left[f_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(1)} + g_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(1)} + v_n^{(\text{II})} \mathbf{M}_n^{(2)} + w_n^{(\text{II})} \mathbf{N}_n^{(2)} \right], \quad (7.4)$$

onde $E_n^{(k_2)} = r(-\iota)^n E_0 / \rho_2$ [com $\rho_2 = kr \sqrt{m_2^2 - \cos^2 \zeta}$] e os índices (1) e (2) indicam, respectivamente, o emprego das funções de cilíndricas de Bessel $J_n(\rho_2)$ e de Neumann $Y_n(\rho_2)$ na composição dos harmônicos cilíndricos, Eqs. (6.3) e (6.4). Na Seção A.5 fornecemos esses campos em termos de suas componentes em coordenadas cilíndricas. Os coeficientes das expansões $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n, v_n$ e w_n são obtidos, para ambos os modos, são obtidos a seguir mediante as condições de contorno do problema. A determinação explícita desses coeficientes no caso de incidência oblíqua e cilindros magnéticos está longe de ser trivial.

7.2 Coeficientes das expansões

As condições de contorno impostas ao espalhamento eletromagnético por dois cilíndricos concêntricos são as mesmas expressas nas Eqs. (4.3) da Seção 4.2, com a diferença de que, no presente caso, $\hat{\mathbf{e}}_r$ é o versor radial do sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) . Portanto, não havendo distribuições de carga e nem fontes de corrente nos meios materiais envolvidos, a imposição de que as componentes tangenciais dos campos sejam contínuas em $r = a$ e $r = b$ podem ser expressas pelas equações

$$\begin{aligned} r = a : & \begin{cases} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}; \end{cases} \\ r = b : & \begin{cases} (\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_i - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Usando as componentes dos campos eletromagnéticas em coordenadas cilíndricas, Seção A.5, obtemos para cada uma das polarizações um sistema de oito equações lineares acopladas. Ex-

plicitamente, temos para a polarização TM

$$\left\{ \begin{array}{l}
 im_2 \eta \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{a}_n^{(I)} - m_2 \eta n \cos \zeta H_n^{(1)}(\xi) \underline{b}_n^{(I)} - \xi n \cos \zeta J_n(\eta) \underline{f}_n^{(I)} \\
 \quad + m_2 \eta \xi J_n'(\eta) \underline{g}_n^{(I)} - \xi n \cos \zeta Y_n(\eta) \underline{v}_n^{(I)} + m_2 \eta \xi Y_n'(\eta) \underline{w}_n^{(I)} = -m_2 \eta n \cos \zeta J_n(\xi) , \\
 m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{b}_n^{(I)} + \eta J_n(\eta) \underline{f}_n^{(I)} + \eta Y_n(\eta) \underline{v}_n^{(I)} = m_2 \xi J_n(\xi) , \\
 m_2 \eta n \cos \zeta H_n^{(1)}(\xi) \underline{a}_n^{(I)} + im_2 \eta \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{b}_n^{(I)} + im_2 \tilde{m}_2 \eta \xi J_n'(\eta) \underline{f}_n^{(I)} \\
 \quad - im_2 \tilde{\xi} n \cos \zeta J_n(\eta) \underline{g}_n^{(I)} + im_2 \tilde{m}_2 \eta \xi Y_n'(\eta) \underline{v}_n^{(I)} - im_2 \tilde{\xi} n \cos \zeta Y_n(\eta) \underline{w}_n^{(I)} = im_2 \eta \xi J_n'(\xi) , \\
 m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{a}_n^{(I)} - im_2 \eta J_n(\eta) \underline{g}_n^{(I)} - im_2 \eta Y_n(\eta) \underline{w}_n^{(I)} = 0 , \\
 m_2 \eta_2 n \cos \zeta J_n(\eta_1) \underline{c}_n^{(I)} - m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_1) \underline{d}_n^{(I)} - m_1 \eta_1 n \cos \zeta J_n(\eta_2) \underline{f}_n^{(I)} \\
 \quad + m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_2) \underline{g}_n^{(I)} - m_1 \eta_1 n \cos \zeta Y_n(\eta_2) \underline{v}_n^{(I)} + m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 Y_n'(\eta_2) \underline{w}_n^{(I)} = 0 , \\
 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \underline{c}_n^{(I)} - m_1 \eta_2 J_n(\eta_2) \underline{f}_n^{(I)} - m_1 \eta_2 Y_n(\eta_2) \underline{v}_n^{(I)} = 0 , \\
 m_1 \tilde{m}_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_1) \underline{c}_n^{(I)} - \tilde{m}_1 m_2 \eta_2 n \cos \zeta J_n(\eta_1) \underline{d}_n^{(I)} - m_1 m_2 \tilde{m}_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_2) \underline{f}_n^{(I)} \\
 \quad + m_1 \tilde{m}_2 \eta_1 n \cos \zeta J_n(\eta_2) \underline{g}_n^{(I)} - m_1 m_2 \tilde{m}_2 \eta_1 \eta_2 Y_n'(\eta_2) \underline{v}_n^{(I)} + m_1 \tilde{m}_2 \eta_1 n \cos \zeta Y_n(\eta_2) \underline{w}_n^{(I)} = 0 , \\
 \tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \underline{d}_n^{(I)} - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J_n(\eta_2) \underline{g}_n^{(I)} - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 Y_n(\eta_2) \underline{w}_n^{(I)} = 0 ;
 \end{array} \right. \tag{7.6}$$

e para o modo TE, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_2 \eta \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{a_n^{(II)}} + im_2 \eta n \cos \zeta H_n^{(1)}(\xi) \underline{b_n^{(II)}} - \xi n \cos \zeta J_n(\eta) \underline{f_n^{(II)}} \\
+ m_2 \eta \xi J_n'(\eta) \underline{g_n^{(II)}} - \xi n \cos \zeta Y_n(\eta) \underline{v_n^{(II)}} + m_2 \eta \xi Y_n'(\eta) \underline{w_n^{(II)}} = m_2 \eta \xi J_n'(\xi) , \\
im_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{b_n^{(II)}} - \eta J_n(\eta) \underline{f_n^{(II)}} - \eta Y_n(\eta) \underline{v_n^{(II)}} = 0 , \\
m_2 \eta n \cos \zeta H_n^{(1)}(\xi) \underline{a_n^{(II)}} + im_2 \eta \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{b_n^{(II)}} - m_2 \tilde{m}_2 \eta \xi J_n'(\eta) \underline{f_n^{(II)}} \\
+ \tilde{m}_2 \xi n \cos \zeta J_n(\eta) \underline{g_n^{(II)}} - m_2 \tilde{m}_2 \eta \xi Y_n'(\eta) \underline{v_n^{(II)}} + \tilde{m}_2 \xi n \cos \zeta Y_n(\eta) \underline{w_n^{(II)}} = m_2 \eta n \cos \zeta J_n(\xi) , \\
m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \underline{a_n^{(II)}} + \tilde{m}_2 \eta J_n(\eta) \underline{g_n^{(II)}} + \tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) \underline{w_n^{(II)}} = m_2 \xi J_n(\xi) , \\
m_2 \eta_2 n \cos \zeta J_n(\eta_1) \underline{c_n^{(II)}} - m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_1) \underline{d_n^{(II)}} - m_1 \eta_1 n \cos \zeta J_n(\eta_2) \underline{f_n^{(II)}} \\
+ m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_2) \underline{g_n^{(II)}} - m_1 \eta_1 n \cos \zeta Y_n(\eta_2) \underline{v_n^{(II)}} + m_1 m_2 \eta_1 \eta_2 Y_n'(\eta_2) \underline{w_n^{(II)}} = 0 , \\
m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \underline{c_n^{(II)}} - m_1 \eta_2 J_n(\eta_2) \underline{f_n^{(II)}} - m_1 \eta_2 Y_n(\eta_2) \underline{v_n^{(II)}} = 0 , \\
m_1 \tilde{m}_1 m_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_1) \underline{c_n^{(II)}} - \tilde{m}_1 m_2 \eta_2 n \cos \zeta J_n(\eta_1) \underline{d_n^{(II)}} - m_1 m_2 \tilde{m}_2 \eta_1 \eta_2 J_n'(\eta_2) \underline{f_n^{(II)}} \\
+ m_1 \tilde{m}_2 \eta_1 n \cos \zeta J_n(\eta_2) \underline{g_n^{(II)}} - m_1 m_2 \tilde{m}_2 \eta_1 \eta_2 Y_n'(\eta_2) \underline{v_n^{(II)}} + m_1 \tilde{m}_2 \eta_1 n \cos \zeta Y_n(\eta_2) \underline{w_n^{(II)}} = 0 , \\
\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \underline{d_n^{(II)}} - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J_n(\eta_2) \underline{g_n^{(II)}} - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 Y_n(\eta_2) \underline{w_n^{(II)}} = 0 ,
\end{array} \right. \quad (7.7)$$

onde os coeficientes a serem determinados encontram-se destacados com um duplo sublinhado. A resolução dos sistemas de Eqs. (6.20) e (6.21) respectivos a um cilindro homogêneo magnético (sob incidência oblíqua) é mais trabalhosa que a do sistema correspondente para uma esfera de Lorenz-Mie, Eqs. (3.20). O mesmo podemos dizer com relação às esferas e cilindros concêntricos. Em especial, na consideração de incidência oblíqua, não é possível desacoplarmos os sistemas de Eqs. (7.6) e (7.7) em sistemas mais simples como no caso esférico da Seção 4.2. De fato, dos problemas abordados nesta dissertação de Mestrado, a resolução analítica desses sistemas de equações em sua forma mais geral é a mais trabalhosa e desafiadora, e requer uma experiência prévia com o espalhamento por um cilindro homogêneo. Até onde sabemos, não há na literatura uma solução detalhada deste problema sem que se assuma incidência normal da onda plana e se calcule apenas os coeficientes de espalhamento não magnéticos.

7.2.1 Incidência oblíqua

Nas expressões a seguir, considere os parâmetros de tamanho $x = ka$ do cilindro interno e $y = kb$ do cilindro externo, e as grandezas $\eta = y \sqrt{m_2^2 - \cos^2 \zeta}$, $\eta_q = x \sqrt{m_q^2 - \cos^2 \zeta}$, $\tilde{m}_q = \sqrt{\mu \epsilon_q / \mu_q \epsilon}$, com $q = 1; 2$. A grandeza adimensional \tilde{m}_q é índice de impedância relativa entre

os meios (ϵ_q, μ_q) e o meio circundante não absorbitivo (ϵ, μ) . Na aproximação de cilindros dielétricos, $\tilde{m}_q \neq m_q$.

A fim de tornarmos as expressões o mais “simples” possível, definimos as funções:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= \frac{\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) J'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J'_n(\eta_1) J_n(\eta_2)}{\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)}, \\ \mathcal{B}_n &= \frac{\tilde{m}_2 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) J'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_1 \eta_2 J'_n(\eta_1) J_n(\eta_2)}{\tilde{m}_2 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_1 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)}, \\ \mathcal{C}_n &= \frac{\tilde{m}_1 \eta_1 J_n(\eta_1) J_n(\eta_2) (\eta_2^2 / \eta_1^2 - 1)}{\eta_2 [\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)]}, \\ \mathcal{D}_n &= \frac{\tilde{m}_1 \eta_1 J_n(\eta_1) Y_n(\eta_2) (\eta_2^2 / \eta_1^2 - 1)}{\eta_2 [\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)]}, \\ \mathcal{V}_n &= \frac{\tilde{m}_2 \eta_1 J_n(\eta_1) J_n(\eta_2) (\eta_2^2 / \eta_1^2 - 1)}{\eta_2 [\tilde{m}_2 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_1 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)]}, \\ \mathcal{W}_n &= \frac{\tilde{m}_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y_n(\eta_2) (\eta_2^2 / \eta_1^2 - 1)}{\eta_2 [\tilde{m}_2 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) Y'_n(\eta_2) - m_1 \tilde{m}_1 \eta_2 J'_n(\eta_1) Y_n(\eta_2)]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_n &= \frac{\tilde{m}_2 \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)}{\tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)}, \\ \bar{\mathcal{B}}_n &= \frac{\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \tilde{m}_2 \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)}{\eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \tilde{m}_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)}, \\ \bar{\mathcal{C}}_n &= \frac{\eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) (\eta^2 / \xi^2 - 1)}{\eta [\tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)]}, \\ \bar{\mathcal{D}}_n &= \frac{\eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) (\eta^2 / \xi^2 - 1)}{\eta [\tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)]}, \\ \bar{\mathcal{V}}_n &= \frac{\tilde{m}_2 \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) (\eta^2 / \xi^2 - 1)}{\eta [\eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \tilde{m}_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)]}, \\ \bar{\mathcal{W}}_n &= \frac{\tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) (\eta^2 / \xi^2 - 1)}{\eta [\eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \tilde{m}_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)]},\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_n^{(1)} = \frac{2im_2}{\pi [\eta Y_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - m_2 \tilde{m}_2 \xi Y'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi)]},$$

$$\mathcal{P}_n^{(1)} = \mathcal{F}_n^{(1)} [\bar{\mathcal{C}}_n (1 - n^2 \mathcal{W}_n \mathcal{D}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{C}_n (1 - n^2 \zeta \mathcal{W}_n \bar{\mathcal{D}}_n \cos^2 \zeta) + \mathcal{B}_n (\mathcal{D}_n - \bar{\mathcal{D}}_n)],$$

$$\mathcal{Q}_w^{(1)} = \mathcal{F}_n^{(1)} [\bar{\mathcal{A}}_n (\mathcal{C}_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n) - \mathcal{A}_n (\bar{\mathcal{C}}_n - \mathcal{B}_n \bar{\mathcal{D}}_n) + \mathcal{V}_n (\bar{\mathcal{C}}_n \mathcal{D}_n - \mathcal{C}_n \bar{\mathcal{D}}_n) n^2 \cos^2 \zeta],$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_v^{(I)} &= (\mathcal{A}_n - n^2 \mathcal{V}_n \mathcal{D}_n \cos^2 \zeta) \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{B}}_n (1 - n^2 \mathcal{W}_n \overline{\mathcal{D}}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{B}_n (1 - n^2 \overline{\mathcal{W}}_n \overline{\mathcal{D}}_n \cos^2 \zeta) + \overline{\mathcal{C}}_n (\mathcal{W}_n - \overline{\mathcal{W}}_n) n^2 \cos^2 \zeta \right] \\
&+ (1 - n^2 \mathcal{W}_n \mathcal{D}_n \cos^2 \zeta) \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{V}}_n (\overline{\mathcal{C}}_n - \overline{\mathcal{B}}_n \overline{\mathcal{D}}_n) n^2 \cos^2 \zeta - \mathcal{V}_n (\overline{\mathcal{C}}_n - \overline{\mathcal{B}}_n \overline{\mathcal{D}}_n) n^2 \cos^2 \zeta + \overline{\mathcal{A}}_n (\mathcal{B}_n - \overline{\mathcal{B}}_n) \right] \\
&+ (\mathcal{C}_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n) n^2 \cos^2 \zeta \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{W}}_n (\overline{\mathcal{A}}_n - n^2 \mathcal{V}_n \overline{\mathcal{D}}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{W}_n (\overline{\mathcal{A}}_n - n^2 \overline{\mathcal{V}}_n \overline{\mathcal{D}}_n \cos^2 \zeta) + (\mathcal{V}_n - \overline{\mathcal{V}}_n) \right] \\
\mathcal{F}_n^{(II)} &= \frac{2im_2}{\pi \left[\tilde{m}_2 \eta Y_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) - m_2 \xi Y_n'(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]}, \\
\mathcal{P}_n^{(II)} &= \mathcal{F}_n^{(II)} \left[\overline{\mathcal{V}}_n (1 - n^2 \mathcal{D}_n \mathcal{W}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{V}_n (1 - n^2 \zeta \mathcal{D}_n \overline{\mathcal{W}}_n \cos^2 \zeta) + \mathcal{A}_n (\mathcal{W}_n - \overline{\mathcal{W}}_n) \right], \\
\mathcal{Q}_v^{(II)} &= \mathcal{F}_n^{(II)} \left[\overline{\mathcal{B}}_n (\mathcal{V}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{W}_n) - \mathcal{B}_n (\overline{\mathcal{V}}_n - \mathcal{A}_n \overline{\mathcal{W}}_n) + \mathcal{C}_n (\overline{\mathcal{V}}_n \mathcal{W}_n - \mathcal{V}_n \overline{\mathcal{W}}_n) n^2 \cos^2 \zeta \right], \\
\mathcal{R}_v^{(II)} &= (\mathcal{B}_n - n^2 \mathcal{C}_n \mathcal{W}_n \cos^2 \zeta) \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{A}}_n (1 - n^2 \mathcal{D}_n \overline{\mathcal{W}}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{A}_n (1 - n^2 \overline{\mathcal{D}}_n \overline{\mathcal{W}}_n \cos^2 \zeta) + \overline{\mathcal{V}}_n (\mathcal{D}_n - \overline{\mathcal{D}}_n) n^2 \cos^2 \zeta \right] \\
&+ (1 - n^2 \mathcal{D}_n \mathcal{W}_n \cos^2 \zeta) \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{C}}_n (\overline{\mathcal{V}}_n - \mathcal{A}_n \overline{\mathcal{W}}_n) n^2 \cos^2 \zeta - \mathcal{C}_n (\overline{\mathcal{V}}_n - \mathcal{A}_n \overline{\mathcal{W}}_n) n^2 \cos^2 \zeta + \overline{\mathcal{B}}_n (\mathcal{A}_n - \overline{\mathcal{A}}_n) \right] \\
&+ (\mathcal{V}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{W}_n) n^2 \cos^2 \zeta \\
&\quad \times \left[\overline{\mathcal{D}}_n (\overline{\mathcal{B}}_n - n^2 \mathcal{C}_n \overline{\mathcal{W}}_n \cos^2 \zeta) - \mathcal{D}_n (\overline{\mathcal{B}}_n - n^2 \overline{\mathcal{C}}_n \overline{\mathcal{W}}_n \cos^2 \zeta) + (\mathcal{C}_n - \overline{\mathcal{C}}_n) \right].
\end{aligned}$$

Novamente, os índices (I) e (II) referem-se, respectivamente, aos modos TM e TE. Todas essas funções estão associadas aos sistemas de Eqs. (7.6) e (7.7). Em especial, a função \mathcal{R}_v está relacionada ao determinante da matriz que multiplica o vetor de coeficientes $[a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n, v_n, w_n]$.

Resolvendo os sistemas de equações, obtemos que os coeficientes para o modo TM são dados por

$$\begin{aligned}
a_n^{(I)} &= \frac{i\tilde{m}_2 \eta J_n(\eta) \left[\overline{\mathcal{C}}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \overline{\mathcal{D}}_n \mathcal{Q}_v^{(I)} \right] n \cos \zeta}{m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \overline{\mathcal{C}}_n \mathcal{R}_v^{(I)}}, \\
b_n^{(I)} &= \frac{\eta J_n(\eta) \left[\overline{\mathcal{A}}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{Q}_v^{(I)} \right]}{m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \overline{\mathcal{C}}_n \mathcal{R}_v^{(I)}} + \frac{J_n(\xi)}{H_n^{(1)}(\xi)}, \\
c_n^{(I)} &= \frac{-m_1 \eta_2 J_n(\eta_2) \left[\mathcal{A}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{Q}_v^{(I)} \right]}{m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \mathcal{C}_n \mathcal{R}_v^{(I)}}, \\
d_n^{(I)} &= \frac{m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J_n(\eta_2) \left[\mathcal{C}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{D}_n \mathcal{Q}_v^{(I)} \right] n \cos \zeta}{\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \mathcal{C}_n \mathcal{R}_v^{(I)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_n^{(I)} &= \frac{n^2 \mathcal{D}_n \left[\mathcal{V}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{W}_n \mathcal{Q}_v^{(I)} \right] \cos^2 \zeta - \left[\mathcal{A}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{Q}_v^{(I)} \right]}{\mathcal{R}_v^{(I)} (C_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n)}, \\
 g_n^{(I)} &= \frac{n \mathcal{P}_n^{(I)} \cos \zeta}{\mathcal{R}_v^{(I)}}, \\
 v_n^{(I)} &= \frac{-n^2 C_n \left[\mathcal{V}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{W}_n \mathcal{Q}_v^{(I)} \right] \cos^2 \zeta + \left[\mathcal{B}_n \mathcal{P}_n^{(I)} + \mathcal{Q}_v^{(I)} \right]}{\mathcal{R}_v^{(I)} (C_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n)}, \\
 w_n^{(I)} &= \frac{n \mathcal{Q}_v^{(I)} \cos \zeta}{\mathcal{R}_v^{(I)}}.
 \end{aligned}$$

Similarmente, para o modo TE obtemos

$$\begin{aligned}
 a_n^{(II)} &= \frac{\tilde{m}_2 \eta J_n(\eta) \left[\overline{\mathcal{B}}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{Q}_v^{(II)} \right]}{m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \overline{\mathcal{V}}_n \mathcal{R}_v^{(II)}} + \frac{J_n(\xi)}{H_n^{(1)}(\xi)}, \\
 b_n^{(II)} &= \frac{-\eta J_n(\eta) \left[\overline{\mathcal{V}}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \overline{\mathcal{W}}_n \mathcal{Q}_v^{(II)} \right] n \cos \zeta}{m_2 \xi H_n^{(1)}(\xi) \overline{\mathcal{V}}_n \mathcal{R}_v^{(II)}}, \\
 c_n^{(II)} &= \frac{m_1 \eta_2 J_n(\eta_2) \left[\mathcal{V}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{W}_n \mathcal{Q}_v^{(II)} \right] n \cos \zeta}{\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \mathcal{V}_n \mathcal{R}_v^{(II)}}, \\
 d_n^{(II)} &= \frac{-m_1 \tilde{m}_2 \eta_2 J_n(\eta_2) \left[\mathcal{B}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{Q}_v^{(II)} \right]}{\tilde{m}_1 m_2 \eta_1 J_n(\eta_1) \mathcal{V}_n \mathcal{R}_v^{(II)}}, \\
 f_n^{(II)} &= \frac{n \mathcal{P}_n^{(II)} \cos \zeta}{\mathcal{R}_v^{(II)}}, \\
 g_n^{(II)} &= \frac{n^2 \mathcal{W}_n \left[C_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{D}_n \mathcal{Q}_v^{(II)} \right] \cos^2 \zeta - \left[\mathcal{B}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{Q}_v^{(II)} \right]}{\mathcal{R}_v^{(II)} (\mathcal{V}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{W}_n)}, \\
 v_n^{(II)} &= \frac{n \mathcal{Q}_v^{(II)} \cos \zeta}{\mathcal{R}_v^{(II)}}, \\
 w_n^{(II)} &= \frac{-n^2 \mathcal{V}_n \left[C_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{D}_n \mathcal{Q}_v^{(II)} \right] \cos^2 \zeta + \left[\mathcal{A}_n \mathcal{P}_n^{(II)} + \mathcal{Q}_v^{(II)} \right]}{\mathcal{R}_v^{(II)} (\mathcal{V}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{W}_n)}.
 \end{aligned}$$

Das relações $J_{-n} = (-1)^n J_n$ e $Y_{-n} = (-1)^n Y_n$, obtemos as relações de paridade

$$\begin{aligned} a_{-n}^{(I)} &= -a_n^{(I)}, & a_{-n}^{(II)} &= a_n^{(II)}, \\ b_{-n}^{(I)} &= b_n^{(I)}, & b_{-n}^{(II)} &= -b_n^{(II)}, \\ c_{-n}^{(I)} &= c_n^{(I)}, & c_{-n}^{(II)} &= -c_n^{(II)}, \\ d_{-n}^{(I)} &= -d_n^{(I)}, & d_{-n}^{(II)} &= d_n^{(II)}, \\ f_{-n}^{(I)} &= f_n^{(I)}, & f_{-n}^{(II)} &= -f_n^{(II)}, \\ g_{-n}^{(I)} &= -g_n^{(I)}, & g_{-n}^{(II)} &= g_n^{(II)}, \\ v_{-n}^{(I)} &= v_n^{(I)}, & v_{-n}^{(II)} &= -v_n^{(II)}, \\ w_{-n}^{(I)} &= -w_n^{(I)}, & w_{-n}^{(II)} &= w_n^{(II)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos $a_0^{(I)} = d_0^{(I)} = g_0^{(I)} = w_0^{(I)} = 0$ e $b_0^{(II)} = c_0^{(II)} = f_0^{(II)} = v_0^{(II)} = 0$.

7.2.2 Incidência normal

Na aproximação de incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), as expressões que definimos acima para o caso oblíquo tornam-se mais simples:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^{(I)} &= \mathcal{F}_n^{(I)} \left[(\bar{C}_n - C_n) + \mathcal{B}_n (\mathcal{D}_n - \bar{\mathcal{D}}_n) \right], \\ \mathcal{P}_n^{(II)} &= \mathcal{F}_n^{(II)} \left[(\bar{\mathcal{V}}_n - \mathcal{V}_n) + \mathcal{A}_n (\mathcal{W}_n - \bar{\mathcal{W}}_n) \right], \\ \mathcal{Q}_n^{(I)} &= \mathcal{F}_n^{(I)} \left[\bar{\mathcal{A}}_n (C_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n) - \mathcal{A}_n (\bar{C}_n - \mathcal{B}_n \bar{\mathcal{D}}_n) \right], \\ \mathcal{Q}_n^{(II)} &= \mathcal{F}_n^{(II)} \left[\bar{\mathcal{B}}_n (\mathcal{V}_n - \mathcal{A}_n \mathcal{W}_n) - \mathcal{B}_n (\bar{\mathcal{V}}_n - \mathcal{A}_n \bar{\mathcal{W}}_n) \right], \\ \mathcal{R}_n^{(I)} &= \mathcal{R}_n^{(II)} = (\mathcal{A}_n - \bar{\mathcal{A}}_n) (\bar{\mathcal{B}}_n - \mathcal{B}_n). \end{aligned}$$

Substituindo diretamente nas expressões dos coeficientes, Eqs. (7.2.1)–(7.2.1) e (7.2.1)–(7.2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
 a_n^{(I)} &= b_n^{(II)} = c_n^{(II)} = d_n^{(I)} = f_n^{(II)} = g_n^{(I)} = v_n^{(II)} = w_n^{(I)} = 0, \\
 a_n &= a_n^{(II)} = \frac{\tilde{m}_2 J_n(m_2 y) \mathcal{F}_n^{(I)}(\overline{\mathcal{V}}_n - \overline{\mathcal{A}}_n \overline{\mathcal{W}}_n)}{H_n^{(1)}(y) \overline{\mathcal{V}}_n (\overline{\mathcal{A}}_n - \overline{\mathcal{A}}_n)} + \frac{J_n(y)}{H_n^{(1)}(y)}, \\
 b_n &= b_n^{(I)} = \frac{J_n(m_2 y) \mathcal{F}_n^{(I)}(\overline{\mathcal{C}}_n - \overline{\mathcal{B}}_n \overline{\mathcal{D}}_n)}{H_n^{(1)}(y) \overline{\mathcal{C}}_n (\overline{\mathcal{B}}_n - \overline{\mathcal{B}}_n)} + \frac{J_n(y)}{H_n^{(1)}(y)}, \\
 c_n &= c_n^{(I)} = \frac{J_n(m_2 x) \mathcal{F}_n^{(I)}(\mathcal{C}_n - \mathcal{B}_n \mathcal{D}_n)}{J_n(m_1 x) \mathcal{C}_n (\overline{\mathcal{B}}_n - \mathcal{B}_n)}, \\
 d_n &= d_n^{(II)} = \frac{\tilde{m}_2 J_n(m_2 x) (\overline{\mathcal{A}}_n \overline{\mathcal{W}}_n - \overline{\mathcal{V}}_n) \mathcal{F}_n^{(II)}}{\tilde{m}_1 J_n(m_1 x) \overline{\mathcal{V}}_n (\overline{\mathcal{A}}_n - \overline{\mathcal{A}}_n)}, \\
 f_n &= f_n^{(I)} = \frac{\mathcal{F}_n^{(I)}}{\overline{\mathcal{B}}_n - \mathcal{B}_n}, \\
 g_n &= g_n^{(II)} = \frac{\mathcal{F}_n^{(II)}}{\overline{\mathcal{A}}_n - \overline{\mathcal{A}}_n}, \\
 v_n &= v_n^{(I)} = -\mathcal{B}_n f_n^{(I)}, \\
 w_n &= w_n^{(II)} = -\overline{\mathcal{A}}_n g_n^{(II)}.
 \end{aligned}$$

Em termos apenas das funções de Bessel, chegamos ao resultado conhecido

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\tilde{m}_2 J'_n(y) \alpha_n - J_n(y) \tilde{\alpha}_n}{\tilde{m}_2 H_n^{(1)}(y) \alpha_n - H_n^{(1)}(y) \tilde{\alpha}_n}, \\
 b_n &= \frac{J'_n(y) \beta_n - \tilde{m}_2 J_n(y) \tilde{\beta}_n}{H_n^{(1)}(y) \beta_n - \tilde{m}_2 H_n^{(1)}(y) \tilde{\beta}_n}, \\
 c_n &= \frac{f_n \beta_n}{J_n(m_1 x)}, \\
 d_n &= \frac{\tilde{m}_2 g_n \alpha_n}{\tilde{m}_1 J_n(m_1 x)}, \\
 f_n &= \frac{2i/\pi y}{H_n^{(1)}(y) \beta_n - \tilde{m}_2 H_n^{(1)}(y) \tilde{\beta}_n}, \\
 g_n &= \frac{2i/\pi y}{\tilde{m}_2 H_n^{(1)}(y) \alpha_n - H_n^{(1)}(y) \tilde{\alpha}_n}, \\
 v_n &= -\mathcal{B}_n f_n, \\
 w_n &= -\overline{\mathcal{A}}_n g_n,
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= \frac{\tilde{m}_1 J_n(m_1 x) J_n'(m_2 x) - \tilde{m}_2 J_n'(m_1 x) J_n(m_2 x)}{\tilde{m}_1 J_n(m_1 x) Y_n'(m_2 x) - \tilde{m}_2 J_n'(m_1 x) Y_n(m_2 x)}, \\ \mathcal{B}_n &= \frac{\tilde{m}_2 J_n(m_1 x) J_n'(m_2 x) - \tilde{m}_1 J_n'(m_1 x) J_n(m_2 x)}{\tilde{m}_2 J_n(m_1 x) Y_n'(m_2 x) - \tilde{m}_1 J_n'(m_1 x) Y_n(m_2 x)}, \\ \alpha_n &= J_n(m_2 y) - \mathcal{A}_n Y_n(m_2 y), \\ \beta_n &= J_n(m_2 y) - \mathcal{B}_n Y_n(m_2 y), \\ \tilde{\alpha}_n &= J_n'(m_2 y) - \mathcal{A}_n Y_n'(m_2 y), \\ \tilde{\beta}_n &= J_n'(m_2 y) - \mathcal{B}_n Y_n'(m_2 y),\end{aligned}$$

e usamos o Wronskiano $H_n^{(1)}(y)J_n(y) - H_n^{(1)}(y)J_n'(y) = 2i/\pi y$ nos coeficientes f_n e g_n .

Como antecipamos na Seção 6.3, os coeficientes das expansões dos campos eletromagnéticos em harmônicos cilíndricos vetoriais, na aproximação de incidência normal, podem ser determinados fazendo-se uma correspondência com o caso esférico [2, 54]. De fato, se efetuarmos as trocas $H_n^{(1)}$ por ξ_n , J_n por ψ_n e Y_n por χ_n , que são as funções esféricas correspondentes, recuperamos os coeficientes de espalhamento apresentados na Seção 4.1. Para os coeficientes internos, a “receita” para recuperarmos o caso das esferas consiste em não usarmos a simplificação do Wronskiano, considerarmos um sinal negativo nos coeficientes v_n e w_n (oriundo da definição da função esférica de Riccati-Neumann), e os fatores m_1 e m_2 que ponderam os coeficientes internos da esfera no sistema de unidades que escolhermos. No sistema de unidades gaussiano, esses fatores não aparecem [2, 3, 24].

7.3 Energia eletromagnética média no tempo

Seguindo a mesma notação que usamos na Seção 4.3, consideramos um campo eletromagnético (E_q, H_q) harmônico confinado à região do espaço $l_1 \leq r \leq l_2$ no sistema de coordenadas polares cilíndricas (r, ϕ, z) . Para um meio não dispersivo e fracamente absorbitivo, a energia eletromagnética média no tempo armazenada no interior de uma camada cilíndrica concêntrica de comprimento L e raios interno l_1 e externo l_2 é dada por [25]

$$\begin{aligned}W(l_1, l_2) &= \int_{l_1}^{l_2} dr r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-L/2}^{L/2} dz \operatorname{Re} \left[\frac{\epsilon_q}{4} (|E_{qr}|^2 + |E_{q\phi}|^2 + |E_{qz}|^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_q}{4} (|H_{qr}|^2 + |H_{q\phi}|^2 + |H_{qz}|^2) \right].\end{aligned}\tag{7.9}$$

A Eq. (7.9) fornece, para $l_1 = 0$, $l_2 = a$ e $q = 1$, a energia eletromagnética média dentro de um segmento L do cilindro interior $0 \leq r \leq a$, Seção 6.4. Para $l_1 = a$, $l_2 = b$ e $q = 2$, obtemos a

energia média relacionada a um segmento L da camada cilíndrica concêntrica $a \leq r \leq b$.

No caso particular em que a região $l_1 \leq r \leq l_2$ do espaço tem as mesmas propriedades do meio circundante (ϵ, μ) , obtemos

$$W_0(l_1; l_2) = \frac{\epsilon}{2} |E_0|^2 (l_2^2 - l_1^2) L. \quad (7.10)$$

7.3.1 Modo TM

Na polarização TM, considere a contribuição de E_{1r} e $E_{1\phi}$ à energia eletromagnética armazenada no cilindro interior (ϵ_1, μ_1) ($0 \leq r \leq a$) dada por

$$\begin{aligned} W_{1Er\phi} &= W_{1E} - W_{1Ez} \\ &= \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\text{Re}(\epsilon_1)}{4} (|E_{1r}|^2 + |E_{1\phi}|^2), \end{aligned}$$

onde W_{1E} é a energia elétrica total nesta região do espaço e W_{1Ez} é a contribuição da componente z do campo à energia elétrica média no tempo. Usando as expansões do campo elétrico $\mathbf{E}_1^{(I)}$ da Seção A.5 e a expressão (C.38) tomando $A = c_n^{(I)} \cos \zeta / m_1$, $B = d_n^{(I)}$ e $C = D = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} W_{1Er\phi}^{(I)} &= W_0(0, a) \text{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left\{ \left| c_0^{(I)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_1|^2} I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\left| c_n^{(I)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_1|^2} + \left| d_n^{(I)} \right|^2 \right) \left(I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4 \cos \zeta}{a^2} \text{Im} \left(\frac{c_n^{(I)} d_n^{(I)*}}{m_1} \right) \int_0^a dr r \text{Im} [J_{n+1}(\rho_1) J_{n-1}(\rho_1^*)] \right] \right\}. \quad (7.11) \end{aligned}$$

$$W_{1Ez}^{(I)} = W_0(0, a) \text{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left| \frac{\eta_1}{m_{1x}} \right|^2 \left[\left| c_0^{(I)} \right|^2 I_{1;0}^{(JJ)}(0, a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n^{(I)} \right|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a) \right]. \quad (7.12)$$

Observe que, como no caso do cilindro homogêneo, a integração que aparece na expressão acima não pode ser resolvida analiticamente. No entanto, para o caso de incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), o termo em que aparece a integral é identicamente nulo. Analogamente, obtemos para o campo magnético $\mathbf{H}_2^{(I)}$

$$\begin{aligned} W_{1Hr\phi}^{(I)} &= W_0(0, a) \text{Re}(m_1^* \tilde{m}_1) \left\{ \left| c_0^{(I)} \right|^2 I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| c_n^{(I)} - d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} \right|^2 I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + \left| c_n^{(I)} + d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} \right|^2 I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right] \right\}. \quad (7.13) \end{aligned}$$

$$W_{1Hz}^{(I)} = 2W_0(0, a) \text{Re}(m_1^* \tilde{m}_1) \left| \frac{\eta_1}{m_{1x}} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n^{(I)} \right|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a), \quad (7.14)$$

onde usamos a expressão (C.37) e as componentes do campo $\mathbf{H}_1^{(I)}$ expressas na Seção A.5. Como se percebe, no modo TM (caso I) apenas a contribuição magnética à energia média armazenada no cilindro tem solução analítica fechada. Da definição (7.9), a energia eletromagnética armazenada no cilindro interior ($0 \leq r \leq a$) no modo TM é expressa por

$$W_1^{(I)}(0, a) = W_{1E}^{(I)}(0, a) + W_{1H}^{(I)}(0, a) , \quad (7.15)$$

onde $W_{1E}^{(I)} = W_{1Er\phi}^{(I)} + W_{1Ez}^{(I)}$ e $W_{1H}^{(I)} = W_{1Hr\phi}^{(I)} + W_{1Hz}^{(I)}$ são, respectivamente, as médias temporais da energia elétrica e magnética no cilindro interno.

Procedendo da mesma maneira, obtemos para a região ($a \leq r \leq b$) da camada cilíndrica (ϵ_2, μ_2) as expressões analíticas

$$\begin{aligned} W_{2Er\phi}^{(I)} = & W_0(a, b) \operatorname{Re} (m_2 \tilde{m}_2) \left\{ \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} \left[\left| f_0^{(I)} \right|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) \right. \right. \\ & + \left. \left| v_0^{(I)} \right|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(f_0^{(I)} v_0^{(I)*} I_{2;1}^{(JY)}(a, b) \right) \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vartheta_n \left(\left| f_n^{(I)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + \left| g_n^{(I)} \right|^2 \right) + \rho_n \left(\left| v_n^{(I)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + \left| w_n^{(I)} \right|^2 \right) \right. \\ & + 2 \operatorname{Re} \left[\gamma_n \left(f_n^{(I)} v_n^{(I)*} \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + g_n^{(I)} w_n^{(I)*} \right) \right] \\ & + \frac{2 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{f_n^{(I)} w_n^{(I)*}}{m_2} - \frac{g_n^{(I)} v_n^{(I)*}}{m_2^*} \right) \int_a^b dr r [J_{n-1}(\rho_2) Y_{n+1}(\rho_2^*) - J_{n+1}(\rho_2) Y_{n-1}(\rho_2^*)] \right] \\ & - \frac{4 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \operatorname{Im} \left(\frac{f_n^{(I)} g_n^{(I)*}}{m_2} \right) \int_a^b dr r \operatorname{Im} [J_{n-1}(\rho_2) J_{n+1}(\rho_2^*)] \\ & \left. - \frac{4 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \operatorname{Im} \left(\frac{v_n^{(I)} w_n^{(I)*}}{m_2} \right) \int_a^b dr r \operatorname{Im} [Y_{n-1}(\rho_2) Y_{n+1}(\rho_2^*)] \right\} , \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde usamos a Eq. (C.38) com $A = f_n^{(I)} \cos \zeta / m_2$, $B = g_n^{(I)}$, $C = v_n^{(I)} \cos \zeta / m_2$ e $D = w_n^{(I)}$, e

$$\begin{aligned} W_{2Ez}^{(I)} = & W_0(a, b) \operatorname{Re} (m_2 \tilde{m}_2) \left| \frac{\eta_2}{m_2 y} \right|^2 \left\{ \left| f_0^{(I)} \right|^2 I_{2;0}^{(JJ)}(a, b) \right. \\ & + \left. \left| v_0^{(I)} \right|^2 I_{2;0}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(f_0^{(I)} v_0^{(I)*} I_{2;0}^{(JY)}(a, b) \right) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| f_n^{(I)} \right|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) + \left| v_n^{(I)} \right|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(f_n^{(I)} v_n^{(I)*} I_{2;n}^{(JY)}(a, b) \right) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde

$$\vartheta_n = I_{2;n-1}^{(JJ)}(a, b) + I_{2;n+1}^{(JJ)}(a, b), \quad (7.18)$$

$$\rho_n = I_{2;n-1}^{(YY)}(a, b) + I_{2;n+1}^{(YY)}(a, b), \quad (7.19)$$

$$\gamma_n = I_{2;n-1}^{(JY)}(a, b) + I_{2;n+1}^{(JY)}(a, b). \quad (7.20)$$

Para o campo magnético $\mathbf{H}_2^{(I)}$, obtemos

$$\begin{aligned} W_{2Hr\phi}^{(I)} = & W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2^* \tilde{m}_2) \left\{ \left| f_0^{(I)} \right|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) + \right. \\ & + \left| v_0^{(I)} \right|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(f_0^{(I)} v_0^{(I)*} I_{2;1}^{(JY)}(a, b) \right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| f_n^{(I)} - g_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n-1}^{(JJ)}(a, b) + \left| v_n^{(I)} - w_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n-1}^{(YY)}(a, b) \right. \\ & + \left| f_n^{(I)} + g_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n+1}^{(JJ)}(a, b) + \left| v_n^{(I)} + w_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n+1}^{(YY)}(a, b) \\ & + 2 \operatorname{Re} \left[\left(f_n^{(I)} - \frac{g_n^{(I)} \cos \zeta}{m_2} \right) \left(v_n^{(I)*} - \frac{w_n^{(I)*} \cos \zeta}{m_2^*} \right) I_{2;n-1}^{(JY)}(a, b) \right] \\ & \left. + 2 \operatorname{Re} \left[\left(f_n^{(I)} + \frac{g_n^{(I)} \cos \zeta}{m_2} \right) \left(v_n^{(I)*} + \frac{w_n^{(I)*} \cos \zeta}{m_2^*} \right) I_{2;n+1}^{(JY)}(a, b) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde usamos a Eq. (C.37) com $A = f_n^{(I)}$, $B = v_n^{(I)}$, $C = g_n^{(I)} \cos \zeta / m_2$ e $D = w_n^{(I)} \cos \zeta / m_2$, e

$$\begin{aligned} W_{2Hz}^{(I)} = & 2W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2^* \tilde{m}_2) \left| \frac{\eta_2}{m_{2y}} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left| g_n^{(I)} \right|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) \right. \\ & \left. + \left| w_n^{(I)} \right|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(g_n^{(I)} w_n^{(I)*} I_{2;n}^{(JY)}(a, b) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Assim, a energia eletromagnética interna à camada cilíndrica ($a \leq r \leq b$) no modo TM é dada por

$$W_2^{(I)}(a, b) = W_{2E}^{(I)}(a, b) + W_{2H}^{(I)}(a, b), \quad (7.23)$$

onde $W_{2E}^{(I)} = W_{2Er\phi}^{(I)} + W_{2Ez}^{(I)}$ e $W_{2H}^{(I)} = W_{2Hr\phi}^{(I)} + W_{2Hz}^{(I)}$ são, respectivamente, as médias temporais da energia elétrica e magnética na camada.

As componentes dos campos eletromagnéticos usadas nos cálculos acima estão definidas na Seção A.5. Note que a energia elétrica total $W_E^{(I)} = W_{1E}^{(I)} + W_{1H}^{(I)}$ não possui uma expressão analítica fechada para a incidência oblíqua.

Finalmente, das Eqs. (7.15) e (7.23), temos que a energia eletromagnética efetiva no interior dos cilindros concêntricos é expressa por

$$W_{1;2}^{(I)}(a, b) = W_1^{(I)}(0, a) + W_2^{(I)}(a, b), \quad (7.24)$$

de modo que podemos definir, à semelhança do Capítulo 4, a energia interna normalizada

$$W_{1;2}^{(I)\text{nor}}(S) = \frac{W_{1;2}^{(I)}(0, b)}{W_0(0, b)} = S^2 \frac{W_1^{(I)}(0, a)}{W_0(0, a)} + (1 - S^2) \frac{W_2^{(I)}(a, b)}{W_0(a, b)}, \quad (7.25)$$

sendo $S = a/b$ a razão de espessura da camada cilíndrica concêntrica. A energia total normalizada $W_{1;2}^{(I)}$ depende apenas das grandezas adimensionais S , ka , kb , m_q e \tilde{m}_q ($q = 1; 2$). A grandeza W_0 está definida na Eq. (7.10).

7.3.2 Modo TE

De maneira análoga à Seção anterior, para a região ($0 \leq r \leq a$) do cilindro interior (ϵ_1, μ_1), obtemos no modo TE as expressões

$$W_{1Er\phi}^{(II)} = W_0(0, a) \text{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left\{ \left| d_0^{(II)} \right|^2 I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| d_n^{(II)} - c_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} \right|^2 I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + \left| d_n^{(II)} + c_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} \right|^2 I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right] \right\} \quad (7.26)$$

$$W_{1Ez}^{(II)} = 2W_0(0, a) \text{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left| \frac{\eta_1}{m_{1x}} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n^{(II)} \right|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a), \quad (7.27)$$

$$W_{1Hr\phi}^{(II)} = W_0(0, a) \text{Re}(m_1^* \tilde{m}_1) \left\{ \left| d_0^{(II)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_1|^2} I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\left| d_n^{(II)} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_1|^2} + \left| c_n^{(II)} \right|^2 \right) \left(I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right) + \frac{4 \cos \zeta}{a^2} \text{Re} \left(\frac{ic_n^{(II)} d_n^{(II)*}}{m_1^*} \right) \int_0^a dr r \text{Im} [J_{n+1}(\rho_1) J_{n-1}(\rho_1^*)] \right] \right\}, \quad (7.28)$$

$$W_{1Hz}^{(II)} = W_0(0, a) \text{Re}(m_1^* \tilde{m}_1) \left| \frac{\eta_1}{m_{1x}} \right|^2 \left[\left| d_0^{(II)} \right|^2 I_{1;0}^{(JJ)}(0, a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n^{(II)} \right|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a) \right] \quad (7.29)$$

onde aplicamos as Eqs. (C.37) e (C.38), respectivamente, para a energia elétrica e magnética. Para a região ($a \leq r \leq b$) da camada cilíndrica (ϵ_2, μ_2), obtemos

$$\begin{aligned}
 W_{2Er\phi}^{(\text{II})} = & W_0(a, b) \text{Re}(m_2 \tilde{m}_2) \left\{ \left| g_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) + \right. \\
 & \left| w_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \text{Re} \left(g_0^{(\text{II})} w_0^{(\text{II})*} I_{2;1}^{(JY)}(a, b) \right) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| g_n^{(\text{II})} - f_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n-1}^{(JJ)}(a, b) + \left| w_n^{(\text{II})} - v_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n-1}^{(YY)}(a, b) \right. \\
 & + \left| g_n^{(\text{II})} + f_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n+1}^{(JJ)}(a, b) + \left| w_n^{(\text{II})} + v_n^{(\text{II})} \frac{\cos \zeta}{m_2} \right|^2 I_{2;n+1}^{(YY)}(a, b) \\
 & + 2 \text{Re} \left[\left(g_n^{(\text{II})} - \frac{f_n^{(\text{II})} \cos \zeta}{m_2} \right) \left(w_n^{(\text{II})*} - \frac{v_n^{(\text{II})*} \cos \zeta}{m_2^*} \right) I_{2;n-1}^{(JY)}(a, b) \right] \\
 & \left. + 2 \text{Re} \left[\left(g_n^{(\text{II})} + \frac{f_n^{(\text{II})} \cos \zeta}{m_2} \right) \left(w_n^{(\text{II})*} + \frac{v_n^{(\text{II})*} \cos \zeta}{m_2^*} \right) I_{2;n+1}^{(JY)}(a, b) \right] \right\}, \tag{7.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{2Ez}^{(\text{II})} = & 2W_0(a, b) \text{Re}(m_2 \tilde{m}_2) \left| \frac{\eta_2}{m_{2y}} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left| f_n^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) \right. \\
 & \left. + \left| v_n^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) + 2 \text{Re} \left(f_n^{(\text{II})} v_n^{(\text{II})*} I_{2;n}^{(JY)}(a, b) \right) \right\}; \tag{7.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{2Hr\phi}^{(\text{II})} = & W_0(a, b) \text{Re}(m_2^* \tilde{m}_2) \left\{ \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} \left[\left| g_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left| w_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \text{Re} \left(g_0^{(\text{II})} w_0^{(\text{II})*} I_{2;1}^{(JY)}(a, b) \right) \right] \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\vartheta_n \left(\left| g_n^{(\text{II})} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + \left| f_n^{(\text{II})} \right|^2 \right) + \rho_n \left(\left| w_n^{(\text{II})} \right|^2 \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + \left| v_n^{(\text{II})} \right|^2 \right) \right. \\
 & + 2 \text{Re} \left[\gamma_n \left(g_n^{(\text{II})} w_n^{(\text{II})*} \frac{\cos^2 \zeta}{|m_2|^2} + f_n^{(\text{II})} v_n^{(\text{II})*} \right) \right] \\
 & + \frac{2 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \text{Re} \left[\left(\frac{g_n^{(\text{II})} v_n^{(\text{II})*}}{m_2} - \frac{f_n^{(\text{II})} w_n^{(\text{II})*}}{m_2^*} \right) \int_a^b dr r [J_{n-1}(\rho_2) Y_{n+1}(\rho_2^*) - J_{n+1}(\rho_2) Y_{n-1}(\rho_2^*)] \right] \\
 & + \frac{4 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \text{Re} \left(\frac{i g_n^{(\text{II})} f_n^{(\text{II})*}}{m_2} \right) \int_a^b dr r \text{Im} [J_{n-1}(\rho_2) J_{n+1}(\rho_2^*)] \\
 & \left. + \frac{4 \cos \zeta}{b^2 - a^2} \text{Re} \left(\frac{i w_n^{(\text{II})} v_n^{(\text{II})*}}{m_2} \right) \int_a^b dr r \text{Im} [Y_{n-1}(\rho_2) Y_{n+1}(\rho_2^*)] \right\}, \tag{7.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{2Hz}^{(\text{II})} = W_0(a, b) \text{Re}(m_2^* \tilde{m}_2) & \left| \frac{\eta_2}{m_{2y}} \right|^2 \left\{ \left| g_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;0}^{(JJ)}(a, b) \right. \\
& + \left| w_0^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;0}^{(YY)}(a, b) + 2\text{Re} \left(g_0^{(\text{II})} w_0^{(\text{II})*} I_{2;0}^{(JY)}(a, b) \right) \\
& 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| g_n^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) + \left| w_n^{(\text{II})} \right|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) \right. \\
& \left. \left. + 2\text{Re} \left(g_n^{(\text{II})} w_n^{(\text{II})*} I_{2;n}^{(JY)}(a, b) \right) \right] \right\}, \tag{7.33}
\end{aligned}$$

onde mais uma vez usamos as Eqs. (C.37) e (C.38) para a energia elétrica e magnética, respectivamente.

Ainda, definimos a energia interna normalizada

$$W_{1;2}^{(\text{II})\text{nor}}(S) = \frac{W_{1;2}^{(\text{II})}(0, b)}{W_0(0, b)} = S^2 \frac{W_1^{(\text{II})}(0, a)}{W_0(0, a)} + (1 - S^2) \frac{W_2^{(\text{II})}(a, b)}{W_0(a, b)}, \tag{7.34}$$

onde $S = a/b$ é a razão de espessura da camada cilíndrica concêntrica, $W_1^{(\text{II})} = W_{1E}^{(\text{II})} + W_{1H}^{(\text{II})}$ é a energia eletromagnética no cilindro interior e $W_2^{(\text{II})} = W_{2E}^{(\text{II})} + W_{2H}^{(\text{II})}$ é a energia eletromagnética na camada cilíndrica. A grandeza W_0 está definida na Eq. (7.10).

7.3.3 Incidência normal

Como comentamos anteriormente, as expressões referentes à energia eletromagnética média no interior do cilindro infinito magnético tornam-se mais simples na consideração de que a onda eletromagnética incide perpendicularmente ao eixo do cilindro, isto é, $\zeta = 90^\circ$. Explicita-

mente, temos para o modo TM (polarização paralela ao eixo z):

$$\begin{aligned}
W_{1Er\phi}^{\parallel} &= W_{1Hz}^{\parallel} = W_{2Er\phi}^{\parallel} = W_{2Hz}^{\parallel} = 0, \\
W_{1Ez}^{\parallel} &= W_0(0, a) \operatorname{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left[|c_0|^2 I_{1;0}^{(JJ)}(0, a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a) \right], \\
W_{1Hr\phi}^{\parallel} &= W_0(0, a) \operatorname{Re}(m_1 \tilde{m}_1^*) \left\{ |c_0|^2 I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \left[I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right] \right\}, \\
W_{2Ez}^{\parallel} &= W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2 \tilde{m}_2) \left\{ |f_0|^2 I_{2;0}^{(JJ)}(a, b) + |v_0|^2 I_{2;0}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re}(f_0 v_0^* I_{2;0}^{(JY)}(a, b)) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|f_n|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) + |v_n|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re}(f_n v_n^* I_{2;n}^{(JY)}(a, b)) \right] \right\}, \\
W_{2Hr\phi}^{\parallel} &= W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2 \tilde{m}_2^*) \left\{ |f_0|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) + |v_0|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re}(f_0 v_0^* I_{2;1}^{(JY)}(a, b)) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|f_n|^2 \vartheta_n + |v_n|^2 \rho_n + 2 \operatorname{Re}(f_n v_n^* \gamma_n) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{7.35}$$

onde os coeficientes estão definidos nas Eqs. (7.8). Portanto, a energia eletromagnética média nas regiões $0 \leq r \leq a$ e $a \leq r \leq b$ é dada por, respectivamente, $W_1^{\parallel} = W_{1Ez}^{\parallel} + W_{1Hr\phi}^{\parallel}$ e $W_2^{\parallel} = W_{2Er\phi}^{\parallel} + W_{2Hz}^{\parallel}$.

De maneira análoga, temos para o modo TE (polarização perpendicular ao eixo z):

$$\begin{aligned}
W_{1Ez}^\perp &= W_{1Hr\phi}^\perp = W_{2Ez}^\perp = W_{2Hr\phi}^\perp = 0, \\
W_{1Er\phi}^\perp &= W_0(0, a) \operatorname{Re}(m_1 \tilde{m}_1) \left\{ |d_0|^2 I_{1;1}^{(JJ)}(0, a) + \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \left[I_{1;n-1}^{(JJ)}(0, a) + I_{1;n+1}^{(JJ)}(0, a) \right] \right\}, \\
W_{1Hz}^\perp &= W_0(0, a) \operatorname{Re}(m_1 \tilde{m}_1^*) \left[|d_0|^2 I_{1;0}^{(JJ)}(0, a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 I_{1;n}^{(JJ)}(0, a) \right], \\
W_{2Er\phi}^\perp &= W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2 \tilde{m}_2) \left\{ |g_0|^2 I_{2;1}^{(JJ)}(a, b) + |w_0|^2 I_{2;1}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(g_0 w_0^* I_{2;1}^{(JY)}(a, b) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|g_n|^2 \vartheta_n + |w_n|^2 \rho_n + 2 \operatorname{Re} (g_n w_n^* \gamma_n) \right] \right\}, \\
W_{2Hz}^\perp &= W_0(a, b) \operatorname{Re}(m_2 \tilde{m}_2^*) \left\{ |g_0|^2 I_{2;0}^{(JJ)}(a, b) + |w_0|^2 I_{2;0}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(g_0 w_0^* I_{2;0}^{(JY)}(a, b) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|g_n|^2 I_{2;n}^{(JJ)}(a, b) + |w_n|^2 I_{2;n}^{(YY)}(a, b) + 2 \operatorname{Re} \left(g_n w_n^* I_{2;n}^{(JY)}(a, b) \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{7.36}$$

e a energia eletromagnética média nas regiões $0 \leq r \leq a$ e $a \leq r \leq b$ é dada por $W_1^\perp = W_{1Er\phi}^\perp + W_{1Hz}^\perp$ e $W_2^\perp = W_{2Ez}^\perp + W_{2Hr\phi}^\perp$, respectivamente. Para ambos os casos, podemos definir a energia total normalizada $W_{1;2}^{\text{nor}}$ usando as Eqs. (7.25) e (7.34).

7.4 Resultados numéricos e discussão

Nesta Seção apresentamos alguns cálculos numéricos realizados a partir das últimas considerações feitas na Seção anterior. Assumimos que a incidência de radiação é normal ao eixo do cilindro, de maneira que os cálculos numéricos são similares aos do espalhamento por duas esferas concêntricas substituindo funções radiais esféricas por funções cilíndricas. Uma vez mais, usamos para esses cálculos um programa escrito para o *software* gratuito *Scilab* 5.1.1., e consideramos como limite superior para as séries infinitas o mesmo N_{max} da Seção 6.6 fazendo a troca $x = ka$ por $y = kb$. Os valores de permeabilidade magnética e permissividade elétrica são os mesmos dos Capítulos anteriores.

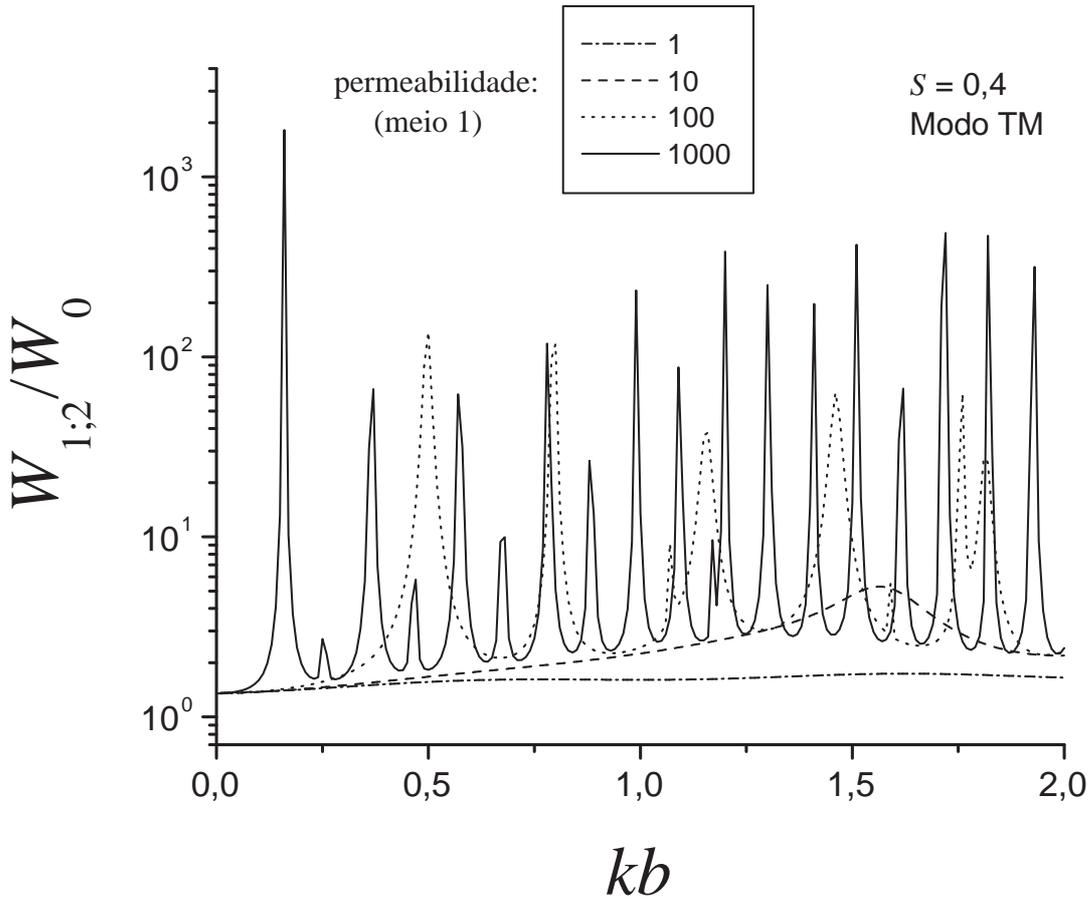


Figura 7.2: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}}^{\parallel} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de dois cilindros concêntricos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), sendo $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da cilindro interior de raio a , e $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo da camada cilíndrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $(b - a)$. A razão de espessura é $a/b = 0,4$ e a polarização paralela é considerada. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Como podemos notar na Fig. 7.2, em que calculamos a energia eletromagnética efetiva no interior de um cilindro magnético de raio a envolvido por uma camada cilíndrica não magnética de raio b , o perfil de energia interna é bastante influenciado pelo magnetismo. O sistema, como no caso das esferas concêntricas estudado no Capítulo 4, se comporta como se houvesse um cilindro magnético efetivo, revelando, portanto, um perfil de energia interna bastante similar ao encontrado no Capítulo 6 para um cilindro homogêneo. O mesmo argumento pode ser aplicado ao caso recíproco em que o interior é não magnético e a camada é magnética, Fig. 7.3. Para ambos os casos, consideramos a polarização paralela (modo TM).

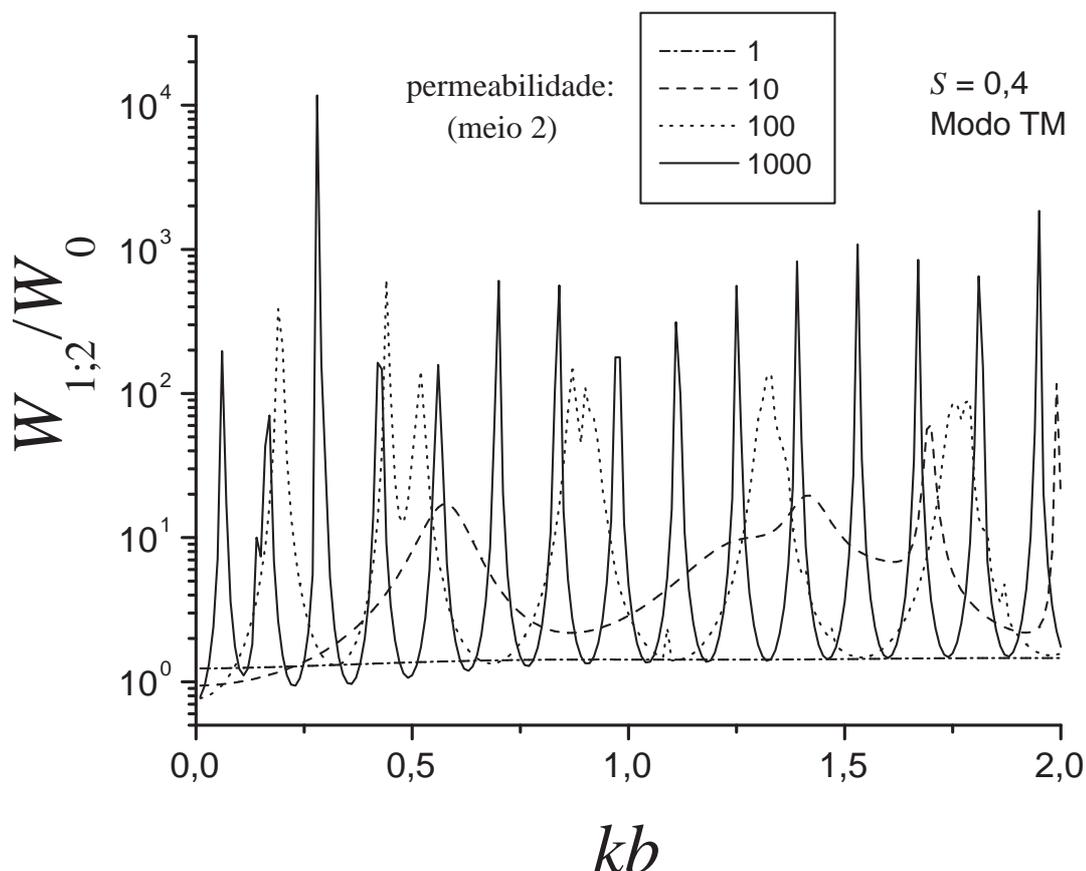


Figura 7.3: Energia eletromagnética efetiva $W_{\text{nor}}^{\parallel} = W_{1;2}/W_0$ armazenada no interior de dois cilindros concêntricos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$), sendo $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$ as constantes ópticas da camada cilíndrica de espessura $(b - a)$, e $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$ o índice de refração relativo do cilindro interior não magnético ($\mu_2/\mu = 1$) de raio a . A razão de espessura é $a/b = 0,4$ e a polarização paralela é considerada. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Uma situação interessante, já discutida no Capítulo 4, surge da consideração da energia interna parcial na região não magnética do centro espalhador. Para um cilindro magnético envolvido por uma camada cilíndrica não magnética, apresentamos na Fig. 7.4 o perfil de energia interna na camada. É possível notarmos como o magnetismo afeta a energia eletromagnética nessa região, elevando o valor de energia armazenada e induzindo o aparecimento de picos característicos, os quais estão relacionados às ressonâncias dos coeficientes internos no cilindro magnético.

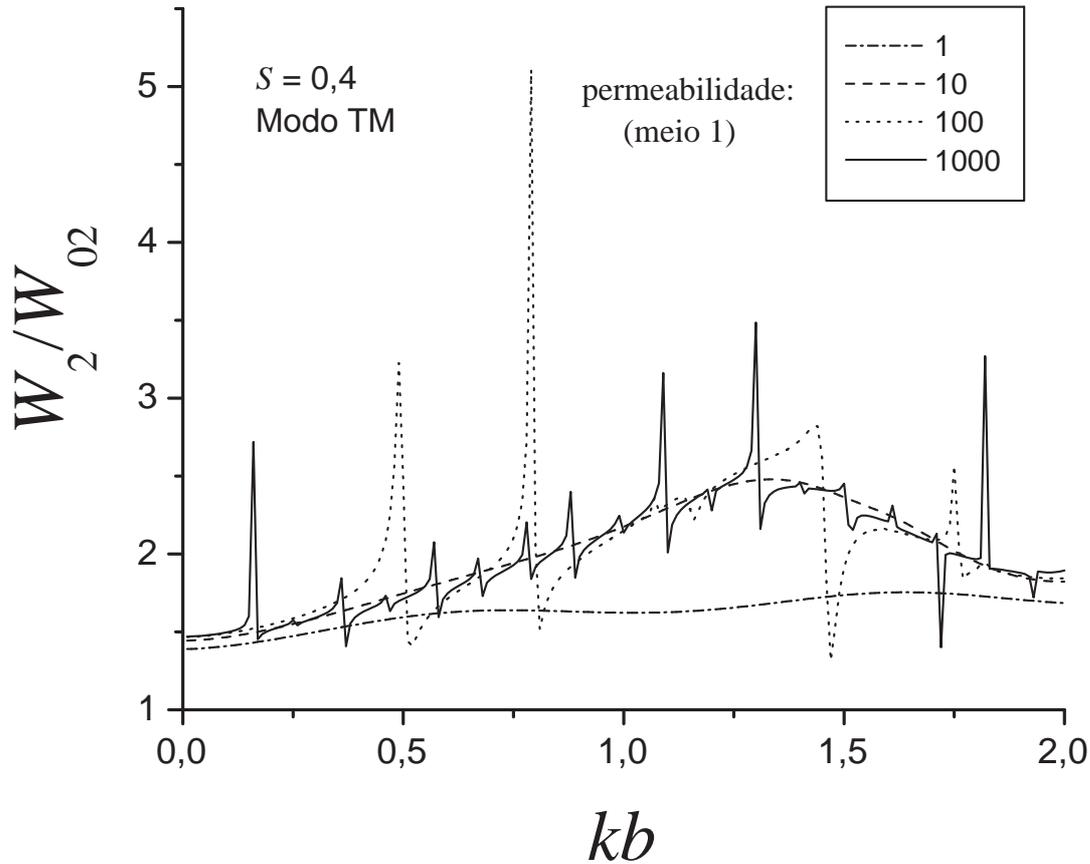


Figura 7.4: Energia eletromagnética $W_2^{\parallel}(a, b)/W_0(a, b) = W_2/W_{02}$ armazenada em uma camada cilíndrica concêntrica não magnética ($\mu_2/\mu = 1$), de espessura $(b - a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvendo um cilindro magnético de raio a e constantes ópticas $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A incidência de radiação é normal ao eixo do cilindro e a polarização é paralela. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

Como discutimos no Capítulo 4, as propriedades ópticas da vizinhança influenciam a energia interna ao centro espalhador. Da diferença de perfis apresentada nas Figs. 7.4 e 7.5, poderíamos nos perguntar se não seria a diferença de geometria – de camada cilíndrica para cilindro – que estaria induzindo essa diferença de comportamento. Analisando atentamente as Figs. 4.4 e 4.5 do Capítulo 4, as quais representam a situação correspondente para o caso esférico, vemos que a mudança no perfil da energia interna no meio não magnético não está relacionada à sua geometria. De fato, o que devemos levar em conta são as propriedades ópticas dos meios que fazem interface com o volume sob análise. Na situação apresentada na Fig. 7.4, a camada não magnética (ϵ_2, μ_2) está em contato com o meio circundante (ϵ, μ) e com o centro esférico magnético (ϵ_1, μ_1) . Já na Fig. 7.5, a região não magnética (ϵ_1, μ_1) está em contato apenas com

a camada esférica magnética (ϵ_2, μ_2).

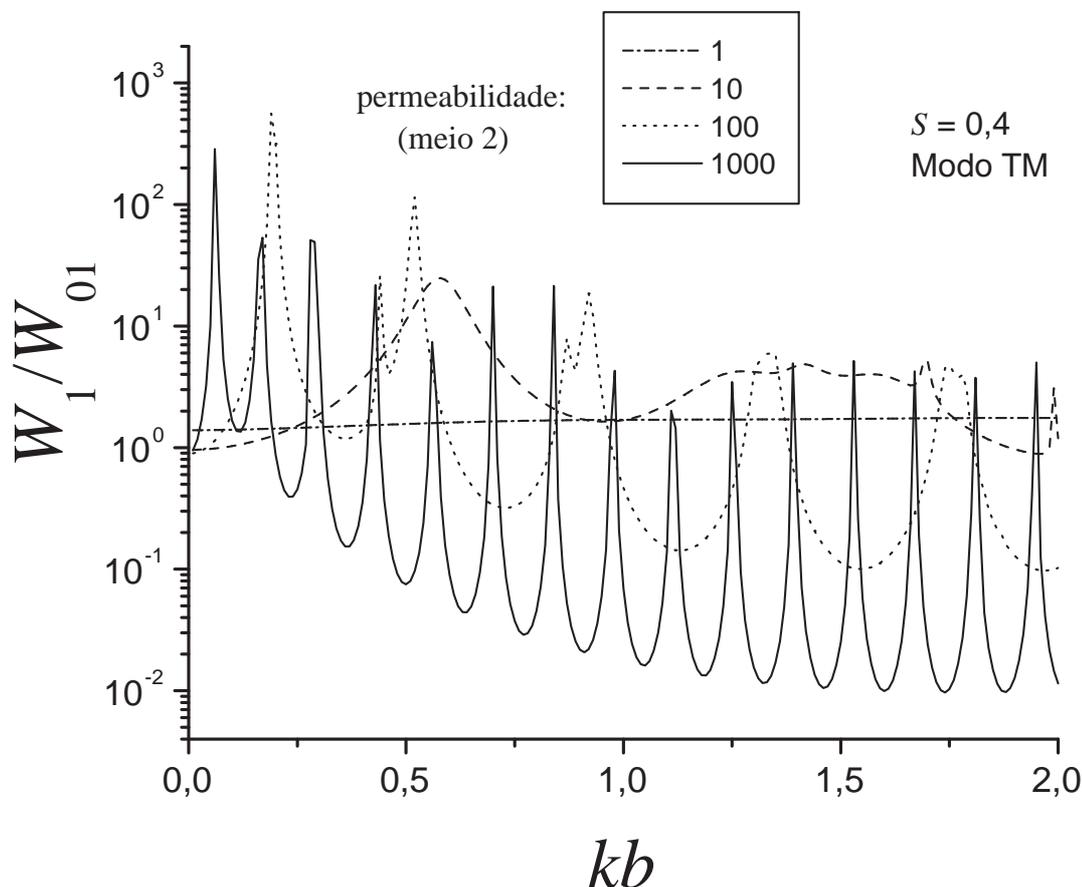


Figura 7.5: Energia eletromagnética $W_1^{\parallel}(a,b)/W_0(a,b) = W_1/W_{01}$ armazenada em um cilindro não magnético ($\mu_2/\mu = 1$) de raio a e índice de refração $m_1 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$, envolvido por uma camada cilíndrica de espessura $(b-a)$ e constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_2/\mu = 1; 10; 100; 1000$. A incidência de radiação é normal ao eixo do cilindro e a polarização é paralela. A razão de espessura é $S = a/b = 0,4$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

A razão de espessura $S = a/b$ influencia, evidentemente, esses perfis de energia interna que apresentamos para um caso específico em que $S = 0,4$. Na Fig. 7.6, em vez de olharmos para a energia eletromagnética efetiva, estimamos a velocidade de transporte de energia v_E/c_0 , expressa na Eq. (6.79) da Seção 6.6.2, para um meio desordenado bidimensional com fração volumétrica de espalhadores $f = 0,36$. O cilindro interior de raio a é assumido magnético, sendo envolvido por uma camada não magnética de espessura $b-a$. Como podemos perceber, à medida que S aumenta, isto é, quanto menor é a camada dielétrica que envolve o cilindro magnético, maior é a influência do magnético na energia interna. O aumento de S correspon-

dente a um valor cada vez menor de velocidade de transporte de energia no meio, visto que altos valores de energia eletromagnética interna correspondem a situações de ressonância dos campos eletromagnéticos estacionários no interior do centro espalhador.

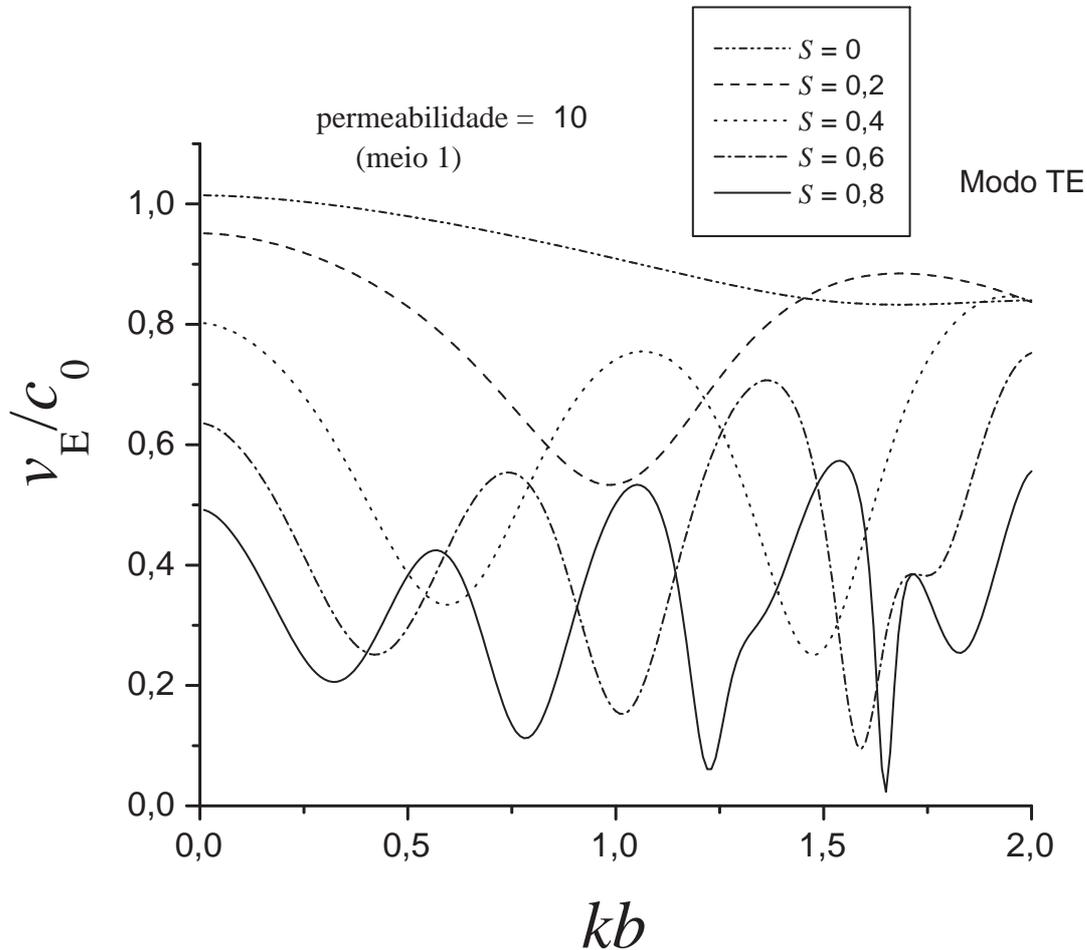


Figura 7.6: Velocidade de transporte de energia efetiva v_E/c_0 em um meio desordenado formado por cilindros concêntricos paralelos sob incidência normal ($\zeta = 90^\circ$) e polarização perpendicular. As constantes ópticas do cilindro interior de raio a são $\epsilon_1/\epsilon = 1,4161 + 4,0 \times 10^{-9}i$ e $\mu_1/\mu = 10$, enquanto a camada cilíndrica concêntrica é não magnética ($\mu_2/\mu = 1$) de espessura $(b - a)$ e índice de refração $m_2 = 1,334 + 1,5 \times 10^{-9}i$. As razões de espessura são $S = 0$ (cilindro homogêneo de raio b) e $S = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$, e a fração volumétrica de espalhadores no meio é $f = 0,36$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < kb < 2$, com $\delta(kb) = 0,01$.

7.5 Conclusões

Nesta Capítulo realizamos o cálculo analítico do espalhamento por dois cilindros magnéticos concêntricos sob incidência oblíqua de ondas eletromagnéticas planas. Calculamos expli-

tamente os coeficientes das expansões dos campos eletromagnéticos para as polarizações TM e TE e determinamos a energia eletromagnética média efetiva que é armazenada nos dois cilindros – resultado novo. À semelhança do Capítulo 4, um estudo numérico mais abrangente, considerando situações-limite relacionadas aos parâmetros de tamanho ka e kb , à influência da razão de espessura $S = a/b$ e do magnetismo no transporte de energia no meio, ainda carece de ser levado a efeito. Todavia, as principais expressões analíticas para esse estudo estão calculadas neste trabalho.

Com essa breve conclusão, fechamos o estudo analítico do espalhamento eletromagnético por centros espalhadores cilíndricos magnéticos não dispersivos. No Capítulo a seguir, para o caso particular em que há fraca absorção óptica e o campo incidente é harmônico, fornecemos alguns comentários sobre como incluir dispersão nas expressões que calculamos ao longo desta dissertação. Um exemplo específico em que há elevada absorção e as grandezas constitutivas tem parte real negativa (metamateriais) é apresentado.

8 *Meios dispersivos*

Nos Capítulos precedentes, abordamos situações nas quais tanto partícula espalhadora quanto meio circundante são não dispersivos, isto é, as “constantes” ópticas (ϵ_q, μ_q) , $q = 1$ ou 2 , são de fato constantes com relação à frequência ω do campo eletromagnético incidente. Mais do que isso, assumimos explicitamente a isotropia e homogeneidade dos meios materiais envolvidos, de maneira que essas grandezas ópticas, que são tensoriais, pudessem ser consideradas escalares multiplicando um tensor unitário. Essa última consideração é válida para materiais amorfos e cristais com simetria cúbica [1, 2]. Na prática, porém, a grande maioria dos materiais comumente encontrados na natureza são anisotrópicos, inhomogêneos e dispersivos [9].

Problemas de espalhamento eletromagnético por partículas anisotrópicas são geralmente intratáveis. Dentre os poucos exemplos que possuem solução analítica exata, podemos citar o espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito composto de um material uniaxial, de modo que o eixo do cilindro coincide com o eixo óptico [1]. Aqui não nos preocupamos com situações particulares como essa. O máximo de complexidade que agregamos ao espalhamento por partículas esféricas ou cilíndricas diz respeito a considerarmos variações radiais das constantes ópticas, Capítulos 4 e 7, ou a diferença nos índices de refração à direita e à esquerda, Capítulo 5. Por simplicidade, em nenhuma dessas situações consideramos anisotropia e dispersão.

Embora não seja possível aplicar as expressões calculadas nesta dissertação para meios anisotrópicos, podemos considerar situações particulares de meios dispersivos que sejam isotrópicos e lineares. Como a dispersão está frequentemente associada à absorção, nossas expressões para a energia interna não podem ser aplicadas diretamente para meios que apresentem elevada absorção óptica. De fato, definir uma expressão para a energia interna que leve em conta possíveis ressonâncias na parte imaginária das constantes ópticas não é uma tarefa trivial. Para meios *não dispersivos e fracamente absorbitivos*, considerando ondas eletromagnéticas *harmônicas*, a densidade de energia eletromagnética no interior da partícula pode ser calculada sem qualquer ambiguidade [25]. No entanto, na presença de *dispersão e atenuação* do feixe (*absorção*), o conhecimento das funções de permissividade elétrica e de permeabilidade magnética sozinhas é

insuficiente para fornecer uma expressão para a densidade de energia armazenada [25, 55]. Para essa situação, um modelo físico que contenha detalhes microscópicos do meio sob investigação é necessário, o que significa, em outras palavras, que o problema de se encontrar a densidade de energia eletromagnética tem de ser resolvido separadamente para para cada material. Na literatura, uma discussão sobre como incluir dissipação no cálculo da energia interna em meios dielétricos foi fornecida primeiramente por Loudon [55] em 1970 e, posteriormente, seu método foi estendido para a cálculo da densidade de energia eletromagnética armazenada em um *metamaterial* (com índice de refração negativo) do tipo Lorentz [48].

A seguir, discutimos uma situação genérica na qual o meio é dispersivo mas fracamente absorbitivo. Para trabalhos futuros, é de nosso interesse analisarmos situações em que o índice de refração, para certos valores de frequência, assume valores negativos (metamateriais). Fornecemos aqui apenas os ingredientes básicos para generalizarmos nossos resultados atinentes a meios não dispersivos para o caso dispersivo.

8.1 Permeabilidade magnética e permissividade elétrica negativas

A construção de materiais com índice de refração negativo suscitou novas possibilidades de aplicações práticas na área de óptica [56]. Velocidade de grupo contrária à velocidade de fase [57], refração negativa, ondas “evanescentes” cujas amplitudes aumentam exponencialmente com a distância [58] e lentes com resolução abaixo do comprimento de onda incidente (limite de difração) [59] são algumas das consequências da teoria desenvolvida por Veselago [57] em 1964. Sem nos aprofundarmos nessa teoria, um ponto que gostaríamos de chamar a atenção antes de discutirmos o cálculo da energia interna é que na grande maioria dos trabalhos que tratam dos metamateriais há referência apenas às grandezas constitutivas $\epsilon_q = \epsilon'_q + i\epsilon''_q$ e $\mu_q = \mu'_q + i\mu''_q$, e ao índice de refração relativo $m = p\sqrt{\epsilon_q\mu_q}/(\epsilon\mu)$, onde $p = -1$ se tanto ϵ'_q quanto μ'_q forem negativos, e $p = 1$ caso contrário. A única restrição nesse caso é que, para frequências positivas, temos $\epsilon''_q > 0$ e $\mu''_q > 0$, o que está de acordo com a segunda lei da termodinâmica [25]. Não é comum haver menção à impedância óptica relativa $\tilde{m}_q = \tilde{p}\sqrt{\epsilon_q\mu_q}/(\epsilon\mu_q)$ e ao seu respectivo sinal \tilde{p} . No entanto, podemos determinar o valor de \tilde{p} a partir da definição que usamos quando da aplicação das condições de contorno (2.4) e (2.5):

$$\tilde{m}_q = m_q \frac{\mu}{\mu_q}; \quad (8.1)$$

portanto, $\tilde{p} = p \operatorname{sign}(\mu'_q)$, uma vez que μ , permeabilidade magnética do meio circundante, é assumida como sendo uma grandeza real positiva. Assim, é mais conveniente usarmos em nossos estudos a definição dada na Eq. (8.1), a qual fornece o sinal correto da impedância óptica $\tilde{m} = \tilde{m}(m, \mu_q/\mu)$ diretamente. É interessante notarmos essa dependência da impedância óptica com relação ao índice de refração e ao magnetismo do material apenas. Ela implica que há situações nas quais o índice de refração é positivo mas a impedância não o é, a saber, quando $\mu'_q < 0$ e $\epsilon'_q > 0$.

8.2 Energia interna em meios dispersivos

Como mencionamos acima, em um meio homogêneo e isotrópico (ϵ_q, μ_q) que possui dispersão, a permissividade e permeabilidade são grandezas escalares dependentes da frequência: $\epsilon_q = \epsilon_q(\omega)$ e $\mu_q = \mu_q(\omega)$. Para fixarmos as ideias, consideramos aqui o caso de duas esferas concêntricas estudado no Capítulo 4. O objetivo é calcularmos, no regime de refração negativa, a energia armazenada em centros espalhadores constituídos por uma camada interfacial dielétrica (não dispersiva) encerrando no interior uma esfera composta por um metamaterial, e vice-versa [60].

Uma consequência da dispersão é que a Eq. (4.13) para a energia eletromagnética média no interior de uma camada esférica não é mais válida e torna-se dependente do modelo usado para descrever as relações de dispersão para $\epsilon_q(\omega)$ e $\mu_q(\omega)$ [25]. No regime de transparência, isto é, quando $\epsilon'_q \gg \epsilon''_q$ e $\mu'_q \gg \mu''_q$, para um campo eletromagnético harmônico $(\mathbf{E}_q, \mathbf{H}_q)$ confinado em uma região $l_1 \leq r \leq l_2$, podemos estabelecer a energia eletromagnética média W como sendo

$$W_q(l_1, l_2) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_{l_1}^{l_2} dr r^2 \left[\frac{\partial(\omega\epsilon'_q)}{\partial\omega} |\mathbf{E}_q|^2 + \frac{\partial(\omega\mu'_q)}{\partial\omega} |\mathbf{H}_q|^2 \right], \quad (8.2)$$

onde necessariamente devemos ter $\partial(\omega\epsilon'_q)/\partial\omega > 0$ e $\partial(\omega\mu'_q)/\partial\omega > 0$ a fim de mantermos o sinal positivo da energia eletromagnética [25].

Para um estudo da energia interna nas mesmas configurações abordadas na Ref. [60] no cálculo da eficiência de extinção, considere a região interior ($q = 1$) composta de um metamaterial e a região da camada esférica ($q = 2$) constituída por um material dielétrico, e vice-versa. As relações constitutivas que descrevem um metamaterial com dispersão do tipo Lorentz são dadas

nas Refs. [61, 48, 56]:

$$\varepsilon_q = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right], \quad (8.3)$$

$$\mu_q = \mu_0 \left[1 - \frac{F\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\Gamma} \right], \quad (8.4)$$

onde ω_p é a frequência de plasma, F é uma grandeza que leva em conta a geometria do metamaterial, e Γ é um fator de dissipação. As grandezas constitutivas (ε_0, μ_0) dizem respeito ao vácuo. Para um certo regime de frequência, as partes reais das grandezas expressas em (8.3) e (8.4) são ambas negativas.

A fim de obtemos a energia eletromagnética média expressa na Eq. (8.2), devemos calcular as derivadas parciais das Eqs. (8.3) e (8.4), as quais levam a

$$\frac{\partial(\omega\varepsilon'_q)}{\partial\omega} = \varepsilon'_q + \frac{2\varepsilon''_q}{\zeta(1 + \zeta^2)}, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial(\omega\mu'_q)}{\partial\omega} = \mu'_q + 2\mu''_q \left(\frac{\eta + 2\omega/\Gamma}{1 + \eta^2} - \frac{\omega}{\Gamma} - \frac{1}{\eta} \right), \quad (8.6)$$

onde $\zeta = \gamma/\omega$, $\eta = \omega\Gamma/(\omega^2 - \omega_0^2)$, $\varepsilon_q = \varepsilon'_q + i\varepsilon''_q$ e $\mu_q = \mu'_q + i\mu''_q$, sendo

$$\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_0} = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \gamma^2)} \right] + i \left[\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \right], \quad (8.7)$$

$$\frac{\mu_q}{\mu_0} = \left[1 - \frac{F\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \right] + i \left[\frac{F\omega^3\Gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} \right]. \quad (8.8)$$

Comparando as definições (4.13) e (8.2), temos que a energia eletromagnética média dentro de um meio passivo linear $[\varepsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$, dado pelas Eqs. (8.3) e (8.4), é obtida substituindo-se as seguintes grandezas nas Eqs. (4.15) e (4.16), respectivamente:

$$\text{Re}(m_q \tilde{m}_q) \dashrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon'_q)}{\partial\omega} \right], \quad (8.9)$$

$$\text{Re}(m_q \tilde{m}_q^*) \dashrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{k_q}{\omega\mu_q} \right|^2 \left[\frac{\partial(\omega\mu'_q)}{\partial\omega} \right], \quad (8.10)$$

onde as derivadas parciais estão expressas nas Eqs. (8.5) e (8.6). Toda essa discussão, porém, é válida somente para aquelas frequências em que as partes imaginárias podem ser negligenciadas (limite de baixa absorção) [25]. Sem esta restrição, uma expressão para a densidade de energia média U_q em um metamaterial dispersivo (ε_q, μ_q) com dissipação, no qual a permeabilidade magnética é descrita pela mesma lei de dispersão que a permissividade elétrica no modelo de

Lorentz, Eqs. (8.3) e (8.4), foi calculada por Ruppin [48]:

$$U_q = \frac{1}{4} \left[\left(\varepsilon'_q + \frac{2\omega\varepsilon''_q}{\gamma} \right) |\mathbf{E}_q|^2 + \left(\mu'_q + \frac{2\omega\mu''_q}{\Gamma} \right) |\mathbf{H}_q|^2 \right]. \quad (8.11)$$

Note que se considerarmos $\zeta \ll 1$ e $\eta \ll 1$ nas Eqs. (8.5) e (8.6), o que significa que as frequências de amortecimento γ e Γ são muito pequenas se comparadas à frequência aplicada ω (regime de baixa absorção), podemos escrever $\partial(\omega\varepsilon'_q)/\partial\omega \approx \varepsilon'_q + 2\omega\varepsilon''_q/\gamma$ e $\partial(\omega\mu'_q)/\partial\omega \approx \mu'_q + 2\omega\mu''_q/(\omega\Gamma)$, que são expressões similares àquelas obtidas na Ref. [48] sem essas restrições, Eq. (8.11). Por esta razão, sem nos preocuparmos se a absorção está presente ou não, empregamos a seguir as expressões calculadas na Ref. [48]. Nesta abordagem, seguindo nossa notação em termos dos índices de refração e de impedância relativos, as equações para o caso dispersivo são obtidas por meio das substituições nas Eqs. (4.15)-(4.24):

$$\text{Re}(m_q \tilde{m}_q) \quad \dashrightarrow \quad \text{Re}(m_q \tilde{m}_q) + \frac{2\omega}{\gamma} \text{Im}(m_q \tilde{m}_q), \quad (8.12)$$

$$\text{Re}(m_q \tilde{m}_q^*) \quad \dashrightarrow \quad \text{Re}(m_q \tilde{m}_q^*) + \frac{2\omega}{\Gamma} \text{Im}(m_q \tilde{m}_q^*), \quad (8.13)$$

onde $q = 1$ ou 2 e \tilde{m}_q é dado pela Eq. (8.1) com a consideração do sinal p de m_q . Em outras palavras, a contribuição das partes imaginárias das grandezas constitutivas são levadas em conta neste modelo.

8.3 Esferas concêntricas contendo um metamaterial

Como um exemplo prático, nesta seção apresentamos alguns estudos numéricos a partir das considerações aqui feitas. Em particular, consideramos uma esfera dispersiva $[\varepsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ de raio a , cuja dispersão é dada pelas Eqs. (8.3) e (8.4), envolvida por uma camada dielétrica não absorbitiva de constantes ópticas $\varepsilon_2 = 1,6$ e $\mu_2 = 1$, e espessura uniforme $(b - a)$, como mostrado na Fig 4.1 do Capítulo 4. Seguindo as Refs. [60, 61], escolhemos $f_p = 10$ GHz para a frequência de plasma da esfera e $f_0 = 4$ GHz para a frequência de ressonância magnética. Para os parâmetros de amortecimento do sistema, consideramos $\gamma = 0,03\omega_p$, $\Gamma = 0,03\omega_0$ e $F = 0,56$. O meio circundante é assumido como sendo o vácuo, de maneira que, para os cálculos numéricos, empregamos os valores $\varepsilon = 1$ e $\mu = 1$.

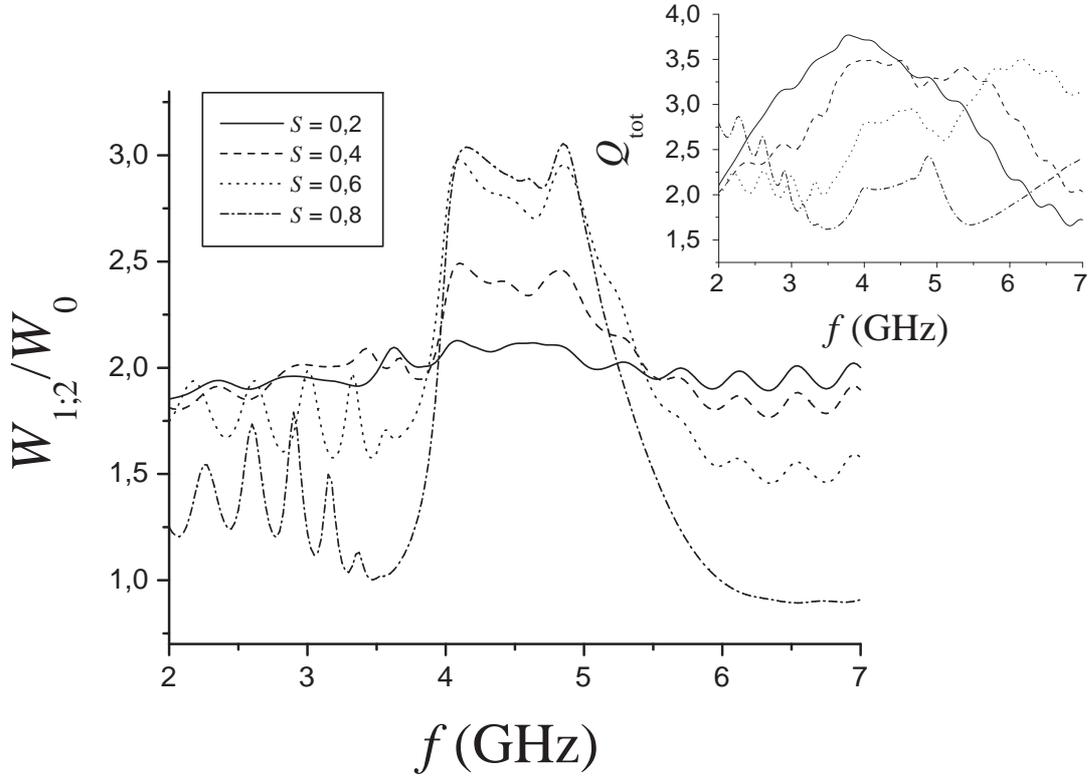


Figura 8.1: Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial no regime de frequência em que $\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ não absorbitiva tem constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,6$ e $\mu_2/\mu = 1$. As grandezas são calculadas no intervalo $2 \leq f \leq 7$ GHz, com $\delta(f) = 0,025$ GHz. O gráfico superior é o mesmo da Ref. [60].

Na Fig. 8.1 graficamos a energia eletromagnética efetiva no interior das esferas concêntricas para algumas razões de espessura $S = a/b$. Usamos para estes cálculos a Eq. (4.27), onde a energia eletromagnética na camada é calculada por meio da Eq. (4.25). A energia eletromagnética na esfera dispersiva $0 \leq r \leq a$ é obtida da Eq. (4.18) considerando as substituições expressas nas Eq. (8.12) e (8.13) para $q = 1$. Ademais, o índice de refração e impedância relativa da esfera $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ possuem um sinal p dependente dos sinais de ϵ'_1 e μ'_1 , como discutido na Seção anterior. A eficiência de extinção é dada pela razão $Q_{\text{tot}} = \sigma_{\text{tot}}/\pi b^2$, onde a seção de choque de extinção σ_{tot} está definida na Eq. (3.52) do Capítulo 3 e os coeficientes das expansões estão expressos no Capítulo 4. Reproduzimos no lado direito superior da Fig. 8.1 o mesmo gráfico obtido por Gao e Huang [60] sob essas mesmas condições.

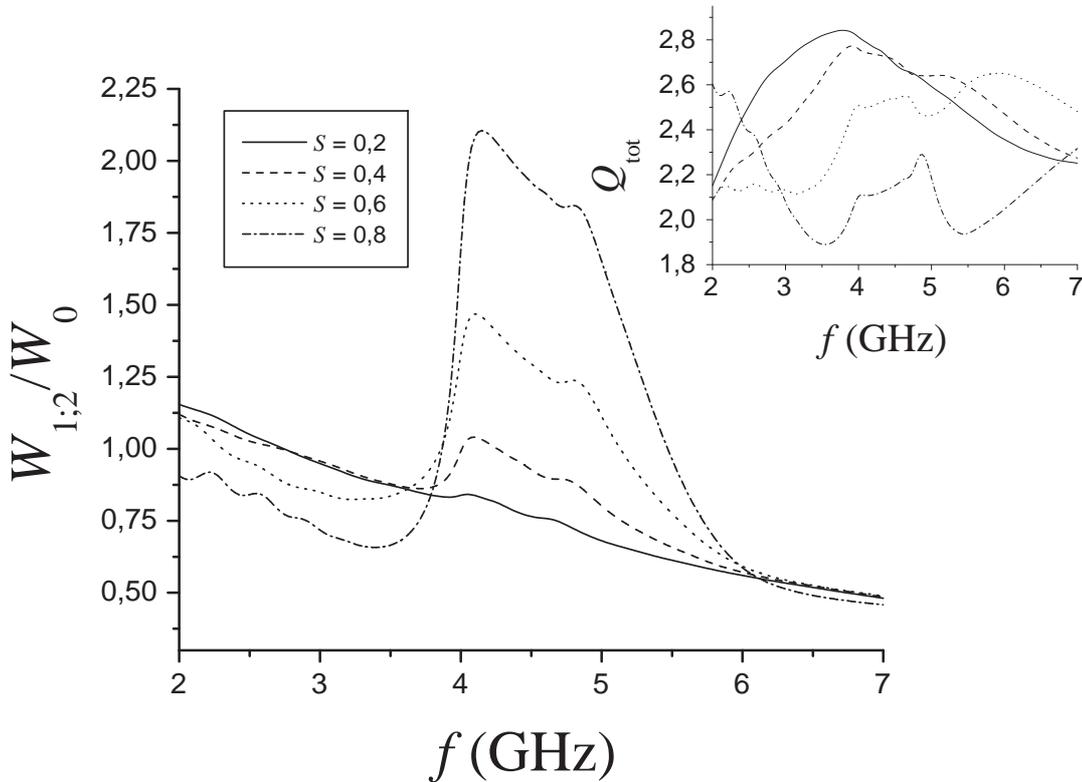


Figura 8.2: Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial no regime de frequência em que $\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ absorbitiva tem constantes ópticas $\epsilon_2/\epsilon = 1,6 + 0,2i$ e $\mu_2/\mu = 1$. As grandezas são calculadas no intervalo $2 \leq f \leq 7$ GHz, com $\delta(f) = 0,025$ GHz. O gráfico superior é o mesmo da Ref. [60].

Note que quando S é pequeno ($S = 0,2$), a eficiência de extinção decresce monotonicamente com f na região de frequência em que o índice de refração é negativo (4 a 6 GHz). Essa variação, no entanto, devido ao sinal do índice de refração, é pouco percebida no gráfico da energia interna, Fig. 8.1. O que se nota na realidade é um comportamento oposto ao observado nos Capítulos anteriores: o aumento da eficiência de extinção em um material de Veselago significa uma diminuição da energia eletromagnética. Considerando que a camada esférica concêntrica não é inteiramente transparente, isto é, possui componentes absorbitivas, esse comportamento é alterado. Enquanto há uma suavização nas curvas de eficiência de extinção, a energia interna efetiva passa a ter valores ainda menores nas regiões de índice de refração positivo (2 a 4 GHz e 6 a 7 GHz) e mesmo fora dessa região, como estimado na Fig. 8.2. Tal fato está dentro do esperado, uma vez que essa suavização significa uma redução das amplitudes dos modos

estacionários gerados no interior das esferas concêntricas.

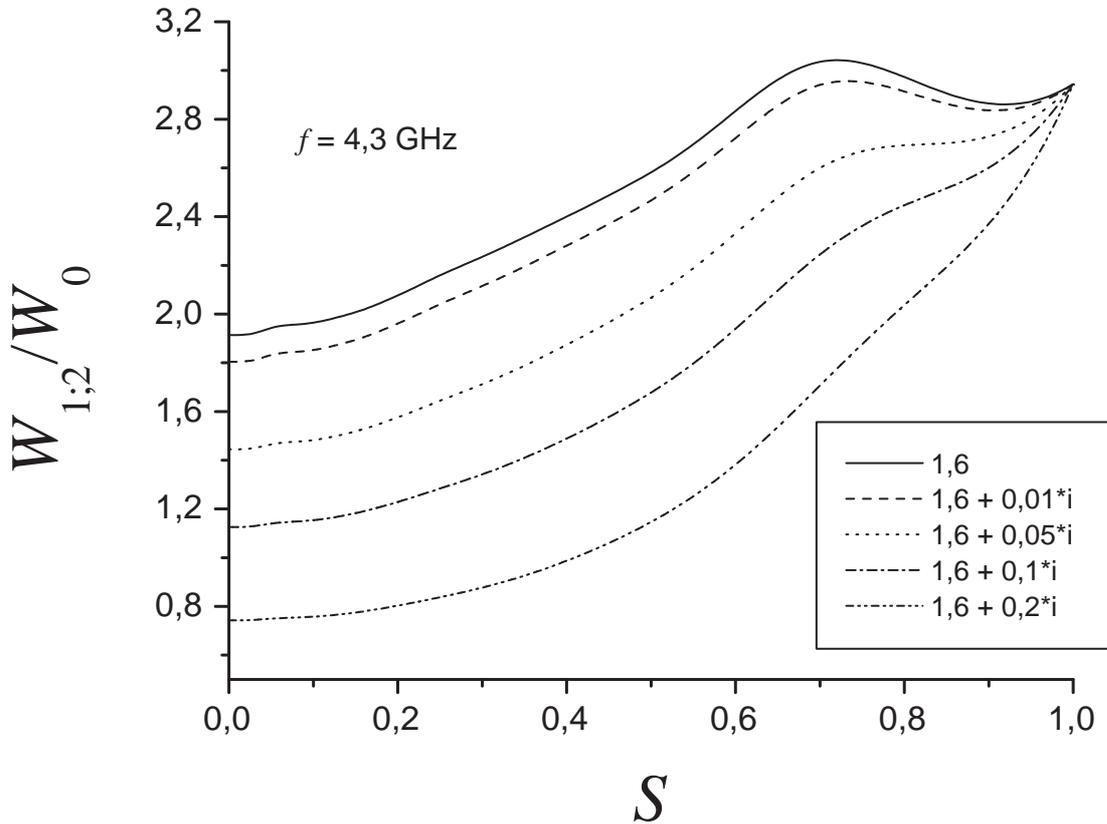


Figura 8.3: Energia eletromagnética média (efetiva) no interior de duas esferas concêntricas contendo um metamaterial para uma frequência incidente $f = 4,3$ GHz [$\text{Re}[m_1(\omega)] < 0$] em função da razão de espessura $S = a/b$. A dispersão $[\epsilon_1(\omega), \mu_1(\omega)]$ na esfera interior de raio a é dada nas Eqs. (8.3) e (8.4), e a camada esférica de espessura uniforme $(b - a)$ tem constantes ópticas $\mu_2/\mu = 1$ e $\epsilon_2/\epsilon = 1,6; (1,6 + 0,01i); (1,6 + 0,05i); (1,6 + 0,1i); (1,6 + 0,2i)$. As grandezas são calculadas no intervalo $0 < S < 1$ GHz, com $\delta(S) = 0,005$.

Uma estimativa da influência da absorção na camada não dispersiva no perfil de energia interna, para uma frequência na região de índice de refração negativo, pode ser visualizada na Fig. 8.3. Esses cálculos são aproximados, visto que a energia interna na camada não dispersiva, Eq. (4.25), está bem definida apenas para regiões transparentes ou fracamente absorbitivas [25]. Quanto maior a absorção, menos precisas se tornam as estimativas da energia interna armazenada no meio não dispersivo.

8.4 Conclusões

O presente Capítulo trouxe algumas considerações a respeito de como incluir dispersão nas expressões para a energia eletromagnética interna calculadas em centros espalhadores não dispersivos, Capítulos 3–7. Chamamos atenção para a questão da absorção dos materiais dispersivos e para a situação dramática em que o índice de refração é negativo. Usamos como um exemplo de aplicação o estudo das esferas concêntricas para estimarmos a energia interna no interior de uma esfera de metamaterial envolvida por uma camada não dispersiva e não magnética [60], que poderia simular uma camada de solvatação. Como é possível perceber, esses estudos estão apenas no início, posto que, mesmo no caso mais simples de meios magnéticos não dispersivos com camadas dielétricas – Capítulo 4 –, ainda não temos um estudo numérico satisfatório sobre a influência dos parâmetros de tamanho, magnetismo e razões de espessura na energia interna.

9 *Conclusões e perspectivas*

Abordamos nesta dissertação de Mestrado aspectos relevantes da interação de ondas eletromagnéticas planas com meios magnéticos isotrópicos. Para as geometrias esférica e cilíndrica, calculamos explicitamente os campos eletromagnéticos interno e espalhado pelo centro espalhador magnético. Na maior parte dos textos científicos da área, as análises do fenômeno de espalhamento são focadas quase que exclusivamente no campo espalhado e, por conseguinte, nos coeficientes de espalhamento. Em realidade, os cálculos da matriz de amplitudes (também chamada de matriz de Jones), parâmetros de Stokes, matriz de intensidades (referida muitas vezes como matriz de Müller) e eficiência de absorção, a qual pode ser escrita em função do espalhamento apenas, não necessitam do campo eletromagnético interno e coeficientes associados [1, 2, 3, 27, 9]. A conveniência em descrever o espalhamento e propriedades ópticas do meio apenas em função do campo eletromagnético espalhado é oriunda da constatação experimental de que, na prática, tanto em problemas diretos quanto inversos, o campo interno não pode ser mensurado diretamente [1]. Mesmo assim, dentro da teoria de espalhamento, muitas informações relevantes podem ser auferidas da análise dos campos eletromagnéticos armazenados nos centros espalhadores [18, 19, 24, 47]. Nesse sentido, embora não calculemos intensidades de espalhamento, parâmetros de assimetria e etc., apresentamos aqui a solução completa do problema, a qual inclui os coeficientes das expansões dos campos internos. Apenas os coeficientes de espalhamento são encontrados nos livros clássicos de teoria eletromagnética de ondas [1, 2, 3, 4, 9, 27] e ainda com a restrição de meios não magnéticos.

Dentro da teoria de Lorenz-Mie, calculamos analiticamente a energia eletromagnética armazenada por esferas com e sem a influência do magnetismo [18]. Estendemos nossos estudos para duas esferas magnéticas concêntricas, esfera magnética opticamente ativa, cilindro magnético homogêneo [19] e dois cilindros magnéticos concêntricos. Tais estudos foram possíveis graças à simplificação de expressões matemáticas complicadas envolvendo funções de Bessel esféricas ou cilíndricas. De fato, algumas das relações entre funções de Bessel que usamos neste trabalho são originais e foram obtidas de relações de recorrência conhecidas na literatura [37, 62, 63]. As principais relações que usamos ao longo dos Capítulos podem ser encontradas

no Apêndice C.

Mostramos que tanto esferas quanto cilindros magnéticos apresentam picos de ressonância na energia interna mesmo em configurações desfavoráveis, a saber, quando o comprimento de onda é muito maior que um comprimento característico da partícula [18, 19]. Em especial, obtivemos uma relação direta entre o fator de aumento da energia eletromagnética no espalhamento e a eficiência de absorção óptica no regime de fraca absorção. Essa relação já era conhecida para a esfera dielétrica [24], mas ainda não havia sido calculada para esfera e cilindro magnéticos [18, 19]. Mostramos que, desde que seja mantida a condição de fraca absorção eletromagnética, o magnetismo não afeta essa relação entre as grandezas [18]. Destacamos no Capítulo 6 [19] o fato de que essa correspondência entre energia interna e seção de choque de absorção óptica pode ser escrita em uma única equação válida tanto para o caso esférico quanto para o cilíndrico. Este é um dos resultados mais importantes desta dissertação de mestrado: partindo dessas duas geometrias particulares, obtivemos uma expressão que independe da forma do centro espalhador [19].

Aplicamos nossos resultados ao cálculo de estimativas para a velocidade de transporte de energia em meios magnéticos bidimensionais [19]. Os limites de validade para essa aproximação, fornecida nas Refs. [38, 39], precisam ser melhor estudados no caso de materiais magnéticos e meios dispersivos no limite de pequenas partículas. Contudo, a partir do comportamento global da velocidade de transporte calculada nesse modelo simples, mostramos que as ressonâncias morfológicas na energia eletromagnética armazenada nos centros espalhadores favorecem a diminuição da velocidade de transporte de energia no meio magnético desordenado. Isso se verifica mesmo e especialmente, como mencionamos acima, em regiões de parâmetros de tamanho inferiores à unidade.

Resolvemos explicitamente o problema de espalhamento eletromagnético por duas esferas e por dois cilindros magnéticos concêntricos. Para ambos os sistemas, embora tenhamos apresentado um estudo analítico completo das grandezas mais relevantes à descrição do espalhamento – a saber, campos eletromagnéticos e coeficientes das expansões –, um estudo numérico da energia interna em função dos parâmetros do sistema e demais grandezas de espalhamento, associadas aos coeficientes calculados, não foi realizado neste trabalho. Apenas apresentamos algumas situações específicas a partir das quais, usando nossa experiência com os sistemas homogêneos estudados, fomos capazes de tirar algumas informações genéricas. Não fizemos isso, por exemplo, no caso da esfera magnética opticamente ativa, cujos resultados que obtivemos se restringiram apenas ao cálculo analítico de grandezas de espalhamento.

Finalmente, na tentativa de generalizarmos nossas expressões analíticas, fornecemos alguns

comentários sobre como modificá-las a fim de estudarmos alguns sistemas que apresentem dispersão. Em particular, apresentamos um exemplo de metamaterial com dispersão do tipo Lorentz e o aplicamos ao cálculo da energia eletromagnética efetiva que é armazenada por duas esferas concêntricas. Estudos parecidos podem ser realizados usando as expressões analíticas que calculamos para os outros sistemas. Um ponto que não consideramos, por exemplo, e que aparece naturalmente no estudo da energia parcial que é armazenada no interior de uma esfera dielétrica encerrada por uma camada magnética de espessura uniforme, diz respeito à influência do meio circundante nas grandezas de espalhamento. Seria interessante analisarmos analítica e numericamente situações em que o meio circundante é também magnético e dispersivo, tanto no espalhamento isolado quanto no regime de espalhamento múltiplo (o qual não foi abordado neste trabalho). A base para esses e outros estudos em teoria de espalhamento eletromagnético foi construída nesta dissertação de Mestrado.

APÊNDICE A – Componentes dos campos eletromagnéticos

Ao longo desta dissertação, para cada problema de espalhamento, fornecemos expressões para os campos eletromagnéticos (\mathbf{E} , \mathbf{H}) em termos dos harmônicos vetoriais \mathbf{M} e \mathbf{N} . Os cálculos dos coeficientes das expansões e da energia interna são realizados, contudo, a partir das componentes desses campos com suas dependências angulares e radiais explicitadas. Neste Apêndice, apresentamos as componentes dos campos eletromagnéticos que calculamos para os casos da esfera e cilindro homogêneos, esferas e cilindros concêntricos, e esfera quiral magnética. Diferentemente dos livros clássicos de teoria de espalhamento [1, 2, 3, 6], explicitamos aqui cada uma das componentes dos campos eletromagnéticos atinentes aos sistemas que estudamos. De fato, sem uma descrição completa desses campos, não seria possível realizarmos estudos analíticos da energia interna aos espalhadores e nem a dependência dos coeficientes internos com os de espalhamento.

A fim de evitarmos confusões, salientamos que os coeficientes das expansões de Fourier (coeficientes de espalhamento e internos) que aparecem em cada uma das Seções a seguir, embora estejam muitas vezes denotados pelo mesmo símbolo (a_n , b_n , etc.), devem ser entendidos apenas dentro de sua própria Seção e Capítulo correspondente. Evidentemente, esses coeficientes dependem da geometria e propriedades ópticas do centro espalhador.

A.1 Esfera homogênea

Considere o espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esfera homogênea nas mesmas condições do Capítulo 3. Em termos de componentes no sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , os campos eletromagnéticos incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), interno ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e espalhado ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) dados nas Eqs. (3.10)–(3.15) são expressos a seguir.

- *Campo eletromagnético incidente* ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), região ($r \geq a$):

$$E_{ir} = \frac{-\iota \cos \phi \sin \theta}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \psi_n(\rho) n(n+1) \pi_n ,$$

$$E_{i\theta} = \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [\pi_n \psi_n(\rho) - \iota \tau_n \psi_n'(\rho)] ,$$

$$E_{i\phi} = \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [\iota \pi_n \psi_n'(\rho) - \tau_n \psi_n(\rho)] ;$$

$$H_{ir} = \frac{k}{\omega \mu} \tan \phi E_{ir} ,$$

$$H_{i\theta} = \frac{k}{\omega \mu} \tan \phi E_{i\theta} ,$$

$$H_{i\phi} = \frac{-k}{\omega \mu} \cot \phi E_{i\phi} ,$$

onde $\rho = kr$, $\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho)$ é a função de Riccati-Bessel e as funções angulares $\pi_n = \pi_n^1$ e τ_n^1 estão definidas nas Eqs. (3.8).

- *Campo eletromagnético interno* ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$), região ($0 \leq r \leq a$):

$$E_{1r} = \frac{-\iota \cos \phi \sin \theta}{\rho_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n d_n \psi_n(\rho_1) n(n+1) \pi_n , \quad (\text{A.1})$$

$$E_{1\theta} = \frac{\cos \phi}{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [c_n \pi_n \psi_n(\rho_1) - \iota d_n \tau_n \psi_n'(\rho_1)] , \quad (\text{A.2})$$

$$E_{1\phi} = \frac{\sin \phi}{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [\iota d_n \pi_n \psi_n'(\rho_1) - c_n \tau_n \psi_n(\rho_1)] ; \quad (\text{A.3})$$

$$H_{1r} = \frac{-\iota k_1 \sin \phi \sin \theta}{\omega \mu_1 \rho_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n c_n \psi_n(\rho_1) n(n+1) \pi_n , \quad (\text{A.4})$$

$$H_{1\theta} = \frac{k_1 \sin \phi}{\omega \mu_1 \rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [d_n \pi_n \psi_n(\rho_1) - \iota c_n \tau_n \psi_n'(\rho_1)] , \quad (\text{A.5})$$

$$H_{1\phi} = \frac{k_1 \cos \phi}{\omega \mu_1 \rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [d_n \tau_n \psi_n(\rho_1) - \iota c_n \pi_n \psi_n'(\rho_1)] , \quad (\text{A.6})$$

onde $\rho_1 = k_1 r$ e os coeficientes internos c_n e d_n estão definidos nas Eqs. (3.23) e (3.24).

- *Campo eletromagnético espalhado* ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), região ($a \leq r$):

$$\begin{aligned}
E_{sr} &= \frac{\iota \cos \phi \sin \theta}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n a_n \xi_n(\rho) n(n+1) \pi_n, \\
E_{s\theta} &= \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\iota a_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) - b_n \tau_n \xi_n(\rho) \right], \\
E_{s\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[b_n \tau_n \xi_n(\rho) - \iota a_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) \right]; \\
H_{sr} &= \frac{\iota k \sin \phi \sin \theta}{\omega \mu} \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n b_n \xi_n(\rho) n(n+1) \pi_n, \\
H_{s\theta} &= \frac{k \sin \phi}{\omega \mu} \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\iota b_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) - a_n \pi_n \xi_n(\rho) \right], \\
H_{s\phi} &= \frac{k \cos \phi}{\omega \mu} \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left[\iota b_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) - a_n \tau_n \xi_n(\rho) \right],
\end{aligned}$$

onde $\xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho)$ é a função de Riccati-Hankel de primeiro tipo e os coeficientes de espalhamento a_n e b_n estão definidos nas Eqs. (3.21) e (3.22).

A.2 Esferas concêntricas

No caso de uma camada de espessura uniforme de comprimento ($b - a$) envolvendo uma esfera homogêna de raio a , como no Capítulo 4, as expressões da Seção A.1 para os campos permanecem válidas, havendo mudanças nas expressões dos coeficientes das expansões e no domínio do campo espalhado, que passa a ser definido na região $b \leq r$. Na região da camada esférica $a \leq r \leq b$, o campo eletromagnético ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$) é dado por

$$\begin{aligned}
E_{2r} &= \frac{-\iota \cos \phi \sin \theta}{\rho_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n n(n+1) \pi_n [g_n \Psi_n(\rho_2) - w_n \chi_n(\rho_2)], \\
E_{2\theta} &= \frac{\cos \phi}{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \pi_n [f_n \Psi_n(\rho_2) - v_n \chi_n(\rho_2)] - \iota \tau_n [g_n \Psi_n'(\rho_2) - w_n \chi_n'(\rho_2)] \right\}, \\
E_{2\phi} &= \frac{\sin \phi}{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \iota \pi_n [g_n \Psi_n'(\rho_2) - w_n \chi_n'(\rho_2)] - \tau_n [f_n \Psi_n(\rho_2) - v_n \chi_n(\rho_2)] \right\}; \\
H_{2r} &= \frac{-\iota k_2 \sin \phi \sin \theta}{\omega \mu_2} \frac{1}{\rho_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n n(n+1) \pi_n [f_n \Psi_n(\rho_2) - v_n \chi_n(\rho_2)], \\
H_{2\theta} &= \frac{k_2 \sin \phi}{\omega \mu_2} \frac{1}{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \pi_n [g_n \Psi_n(\rho_2) - w_n \chi_n(\rho_2)] - \iota \tau_n [f_n \Psi_n'(\rho_2) - v_n \chi_n'(\rho_2)] \right\}, \\
H_{2\phi} &= \frac{k_2 \cos \phi}{\omega \mu_2} \frac{1}{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \tau_n [g_n \Psi_n(\rho_2) - w_n \chi_n(\rho_2)] - \iota \pi_n [f_n \Psi_n'(\rho_2) - v_n \chi_n'(\rho_2)] \right\},
\end{aligned}$$

onde $\rho_2 = k_2 r$ e $\chi_n(\rho_2) = -\rho_2 y_n(\rho_2)$ é a função de Riccati-Neumann.

A.3 Esfera opticamente ativa

No Capítulo 5 resolvemos o problema de espalhamento eletromagnético por uma esfera quiral magnética [1]. O campo eletromagnético incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$) à esfera é o mesmo da Seção A.1. A quiralidade da esfera, em razão da causalidade, manifesta-se nos campos eletromagnéticos interno ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e espalhado ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), definidos em termos de harmônicos esféricos vetoriais nas Eqs (5.10), (5.16) e (5.17). Em termos de componentes em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), esses campos são dados abaixo.

- *Campo eletromagnético interno* ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$), região ($0 \leq r \leq a$):

$$\begin{aligned}
 E_{1r} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \theta n(n+1) \pi_n \left\{ \sin \phi \left[f_{on} \frac{\Psi_n(\rho_L)}{\rho_L^2} + i g_{on} \frac{\Psi_n(\rho_R)}{\rho_R^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos \phi \left[f_{en} \frac{\Psi_n(\rho_L)}{\rho_L^2} + i g_{en} \frac{\Psi_n(\rho_R)}{\rho_R^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \right] \right\}, \\
 E_{1\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \frac{\cos \phi}{\rho_L} [f_{on} \pi_n \Psi_n(\rho_L) + f_{en} \tau_n \Psi'_n(\rho_L)] + \frac{\sin \phi}{\rho_L} [f_{on} \tau_n \Psi'_n(\rho_L) - f_{en} \pi_n \Psi_n(\rho_L)] \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{\cos \phi}{\rho_R} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} [g_{on} \pi_n \Psi_n(\rho_R) + g_{en} \tau_n \Psi'_n(\rho_R)] + i \frac{\sin \phi}{\rho_R} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} [g_{on} \tau_n \Psi'_n(\rho_R) + g_{en} \pi_n \Psi_n(\rho_R)] \right\}, \\
 E_{1\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \frac{\cos \phi}{\rho_L} [f_{on} \pi_n \Psi'_n(\rho_L) - f_{en} \tau_n \Psi_n(\rho_L)] - \frac{\sin \phi}{\rho_L} [f_{on} \tau_n \Psi_n(\rho_L) + f_{en} \pi_n \Psi'_n(\rho_L)] \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{\cos \phi}{\rho_R} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} [g_{on} \pi_n \Psi'_n(\rho_R) + g_{en} \tau_n \Psi_n(\rho_R)] + i \frac{\sin \phi}{\rho_R} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} [g_{on} \tau_n \Psi_n(\rho_R) - g_{en} \pi_n \Psi'_n(\rho_R)] \right\}; \\
 H_{1r} &= - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \theta n(n+1) \pi_n \left\{ \sin \phi \left[i f_{on} \frac{\Psi_n(\rho_L)}{\rho_L^2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + g_{on} \frac{\Psi_n(\rho_R)}{\rho_R^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \cos \phi \left[i f_{en} \frac{\Psi_n(\rho_L)}{\rho_L^2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + g_{en} \frac{\Psi_n(\rho_R)}{\rho_R^2} \right] \right\}, \\
 H_{1\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ \frac{\cos \phi}{\rho_R} [g_{on} \pi_n \Psi_n(\rho_R) - g_{en} \tau_n \Psi'_n(\rho_R)] - \frac{\sin \phi}{\rho_R} [g_{on} \tau_n \Psi'_n(\rho_R) + g_{en} \pi_n \Psi_n(\rho_R)] \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{\cos \phi}{\rho_L} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [f_{on} \pi_n \Psi_n(\rho_L) + f_{en} \tau_n \Psi'_n(\rho_L)] - i \frac{\sin \phi}{\rho_L} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [f_{on} \tau_n \Psi'_n(\rho_L) - f_{en} \pi_n \Psi_n(\rho_L)] \right\}, \\
 H_{1\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left\{ - \frac{\cos \phi}{\rho_R} [g_{on} \pi_n \Psi'_n(\rho_R) + g_{en} \tau_n \Psi_n(\rho_R)] + \frac{\sin \phi}{\rho_R} [-g_{on} \tau_n \Psi_n(\rho_R) + g_{en} \pi_n \Psi'_n(\rho_R)] \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{\cos \phi}{\rho_L} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [f_{on} \pi_n \Psi'_n(\rho_L) - f_{en} \tau_n \Psi_n(\rho_L)] + i \frac{\sin \phi}{\rho_L} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} [f_{on} \tau_n \Psi_n(\rho_L) + f_{en} \pi_n \Psi'_n(\rho_L)] \right\},
 \end{aligned}$$

onde $E_n = E_0 i^n (2n+1)/[n(n+1)]$, $\rho_q = k_q r$, sendo $q = L$ ou R . Os coeficientes f_{on} , f_{en} , g_{on} e g_{en} estão definidos nas Eqs. (5.22)–(5.25).

- *Campo eletromagnético espalhado* ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), região ($a \leq r$):

$$\begin{aligned}
E_{sr} &= \frac{\iota \sin \theta}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \xi_n(\rho) n(n+1) (a_n \cos \phi - d_n \sin \phi) \pi_n, \\
E_{s\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\rho} \left\{ \cos \phi \left[\iota a_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) - b_n \tau_n \xi_n(\rho) \right] - \sin \phi \left[c_n \pi_n \xi_n(\rho) + \iota d_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) \right] \right\}, \\
E_{s\phi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\rho} \left\{ \sin \phi \left[-\iota a_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) + b_n \tau_n \xi_n(\rho) \right] - \cos \phi \left[c_n \tau_n \xi_n(\rho) + \iota d_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) \right] \right\}; \\
H_{sr} &= \frac{\iota k \sin \theta}{\omega \mu \rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \xi_n(\rho) n(n+1) (b_n \sin \phi - c_n \cos \phi) \pi_n, \\
H_{s\theta} &= \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\rho} \left\{ \sin \phi \left[-a_n \pi_n \xi_n(\rho) + \iota b_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) \right] - \cos \phi \left[\iota c_n \tau_n \xi_n^{(1)}(\rho) - d_n \pi_n \xi_n(\rho) \right] \right\}, \\
H_{s\phi} &= \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\rho} \left\{ \cos \phi \left[-a_n \tau_n \xi_n(\rho) + \iota b_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) \right] + \sin \phi \left[\iota c_n \pi_n \xi_n^{(1)}(\rho) - d_n \tau_n \xi_n(\rho) \right] \right\},
\end{aligned}$$

onde $\rho = kr$, $\xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho)$ é a função de Riccati-Hankel de primeiro tipo e os coeficientes de espalhamento a_n , b_n , c_n e d_n , obtidos mediante condições de contorno em $r = a$, estão definidos nas Eqs. (5.18)–(5.21).

A.4 Cilindro homogêneo

Considere a mesma configuração apresentada no Capítulo 6 para um cilindro reto circular infinito magnético interagindo com uma onda eletromagnética plana. Nas coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , as componentes dos campos incidente ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), interno ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e espalhado ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) nas polarizações TM e TE, expressos nas Eqs. (6.7)–(6.12) e (6.13)–(6.18), são dadas abaixo. Considere nas expressões a seguir as funções

$$\gamma = E_0 e^{-\iota kz \cos \zeta}, \quad (\text{A.7})$$

$$\varphi_n(\phi) = (-\iota)^n \cos(n\phi), \quad (\text{A.8})$$

$$\vartheta_n(\phi) = (-\iota)^n \sin(n\phi). \quad (\text{A.9})$$

Modo TM

Sejam $a_n^{(I)}$, $b_n^{(I)}$, $c_n^{(I)}$ e $d_n^{(I)}$ os coeficientes das expansões dos campos eletromagnéticos em termos dos harmônicos \mathbf{M}_n e \mathbf{N}_n na polarização TM, isto é, $\mathbf{E}_i|_{xz}$. Esses coeficientes são determinados a partir das condições de continuidade das componentes tangenciais dos campos na superfície do centro espalhador ($r = a$) e estão definidos nas Eqs. (6.28)–(6.31).

- *Campo eletromagnético incidente* ($\mathbf{E}_i^{(I)}, \mathbf{H}_i^{(I)}$), região ($r \geq a$):

$$\begin{aligned}
E_{ir}^{(I)} &= -r\gamma \cos \zeta \left[J'_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) J'_n(\rho) \right], \\
E_{i\phi}^{(I)} &= 2r\gamma \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) n \frac{J_n(\rho)}{\rho}, \\
E_{iz}^{(I)} &= \gamma \sin \zeta \left[J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) J_n(\rho) \right]; \\
H_{ir}^{(I)} &= \frac{2ik\gamma}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) n \frac{J_n(\rho)}{\rho}, \\
H_{i\phi}^{(I)} &= \frac{ik\gamma}{\omega\mu} \left[J'_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) J'_n(\rho) \right], \\
H_{iz}^{(I)} &= 0,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

onde $\rho = kr \sin \zeta$. Empregamos nessas componentes a relação $J_{-n} = (-1)^n J_n = (-i)^{2n} J_n$, a qual fornece um somatório que se inicia em $n = 1$. Note que, por simetria, podemos escrever $H_{ir}^{(I)} = [k \sec \zeta / (\omega\mu)] E_{i\phi}^{(I)}$ e $H_{i\phi}^{(I)} = -[k \sec \zeta / (\omega\mu)] E_{ir}^{(I)}$.

- *Campo eletromagnético interno* ($\mathbf{E}_i^{(I)}, \mathbf{H}_i^{(I)}$), região ($0 \leq r \leq a$):

$$\begin{aligned}
E_{1r}^{(I)} &= \frac{r\gamma}{m} \left\{ c_0^{(I)} J'_0(\rho_1) \cos \zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[c_n^{(I)} J'_n(\rho_1) \cos \zeta + m d_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \right] \right\}, \\
E_{1\phi}^{(I)} &= \frac{2r\gamma}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[c_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \cos \zeta - m d_n^{(I)} J'_n(\rho_1) \right], \\
E_{1z}^{(I)} &= \frac{\rho_1 \gamma}{k_1 r} \left[c_0^{(I)} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) c_n^{(I)} J_n(\rho_1) \right]; \\
H_{1r}^{(I)} &= \frac{2ik_1 \gamma}{m \omega \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[m c_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - d_n^{(I)} J'_n(\rho_1) \cos \zeta \right], \\
H_{1\phi}^{(I)} &= \frac{ik_1 \gamma}{m \omega \mu_1} \left\{ m c_0^{(I)} J'_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[m c_n^{(I)} J'_n(\rho_1) - d_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \cos \zeta \right] \right\}, \\
H_{1z}^{(I)} &= \frac{2k_1 \gamma \rho_1}{\omega \mu_1 k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) d_n^{(I)} J_n(\rho_1),
\end{aligned} \tag{A.11}$$

onde $\rho_1 = kr \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$ e $m = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / (\epsilon \mu)}$ é o índice de refração relativo entre os meios (ϵ_1, μ_1) e (ϵ, μ) .

- *Campo eletromagnético espalhado* $(\mathbf{E}_s^{(I)}, \mathbf{H}_s^{(I)})$, região $(a \leq r)$:

$$\begin{aligned}
E_{sr}^{(I)} &= \frac{\gamma}{\rho} \left\{ ib_0^{(I)} H_0'^{(1)}(\rho) \cos \zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[na_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) + ib_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) \cos \zeta \right] \right\}, \\
E_{s\phi}^{(I)} &= -2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[a_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) + ib_n^{(I)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \cos \zeta \right], \\
E_{sz}^{(I)} &= -\gamma \sin \zeta \left[b_0^{(I)} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) b_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho) \right]; \\
H_{sr}^{(I)} &= -\frac{2k\gamma}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[a_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) \cos \zeta + ib_n^{(I)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right], \\
H_{s\phi}^{(I)} &= -\frac{k\gamma}{\omega\mu} \left\{ ib_0^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[a_n^{(I)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \cos \zeta + ib_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) \right] \right\}, \\
H_{sz}^{(I)} &= -\frac{2ik\gamma}{\omega\mu} \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) a_n^{(I)} H_n^{(1)}(\rho).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Modo TE

Considere, de maneira análoga ao modo TM acima, os coeficientes das expansões $a_n^{(II)}$, $b_n^{(II)}$, $c_n^{(II)}$ e $d_n^{(II)}$ para a polarização TE, isto é, $\mathbf{E}_i \perp xz$. Esses coeficientes estão definidos nas Eqs. (6.32)–(6.35).

- *Campo eletromagnético incidente* $(\mathbf{E}_i^{(II)}, \mathbf{H}_i^{(II)})$, região $(r \geq a)$:

$$\begin{aligned}
E_{ir}^{(II)} &= 2\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) n \frac{J_n(\rho)}{\rho}, \\
E_{i\phi}^{(II)} &= r\gamma \left[J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) J_n'(\rho) \right], \\
E_{iz}^{(II)} &= 0; \\
H_{ir}^{(II)} &= \frac{ik\gamma}{\omega\mu} \cos \zeta \left[J_0'(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) J_n'(\rho) \right], \\
H_{i\phi}^{(II)} &= -\frac{2ik\gamma}{\omega\mu} \cos \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) n \frac{J_n(\rho)}{\rho}, \\
H_{iz}^{(II)} &= -\frac{k\gamma}{\omega\mu} \sin \zeta \left[J_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) J_n(\rho) \right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Note que $H_{ir}^{(II)} = [k \cos \zeta / (\omega\mu)] E_{i\phi}^{(II)}$ e $H_{i\phi}^{(II)} = -[k \cos \zeta / (\omega\mu)] E_{ir}^{(II)}$.

- *Campo eletromagnético interno* ($\mathbf{E}_1^{(\text{II})}, \mathbf{H}_1^{(\text{II})}$), região ($0 \leq r \leq a$):

$$\begin{aligned}
E_{1r}^{(\text{II})} &= \frac{2r\gamma}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[md_n^{(\text{II})} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - c_n^{(\text{II})} J_n'(\rho_1) \cos \zeta \right], \\
E_{1\phi}^{(\text{II})} &= \frac{\gamma}{m} \left\{ id_n^{(\text{II})} J_0'(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[-md_n^{(\text{II})} J_n'(\rho_1) + c_n^{(\text{II})} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \cos \zeta \right] \right\}, \\
E_{1z}^{(\text{II})} &= \frac{2i\rho_1\gamma}{k_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) c_n^{(\text{II})} J_n(\rho_1); \\
H_{1r}^{(\text{II})} &= -\frac{ik_1\gamma}{m\omega\mu_1} \left\{ d_0^{(\text{II})} J_0'(\rho_1) \cos \zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[d_n^{(\text{II})} J_n'(\rho_1) \cos \zeta + mc_n^{(\text{II})} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \right] \right\}, \\
H_{1\phi}^{(\text{II})} &= -\frac{2ik_1\gamma}{m\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[d_n^{(\text{II})} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \cos \zeta - mc_n^{(\text{II})} J_n'(\rho_1) \right], \\
H_{1z}^{(\text{II})} &= -\frac{k_1\gamma}{\omega\mu_1} \frac{\rho_1}{k_1 r} \left[d_0^{(\text{II})} J_0(\rho_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) d_n^{(\text{II})} J_n(\rho_1) \right].
\end{aligned} \tag{A.14}$$

- *Campo eletromagnético espalhado* ($\mathbf{E}_s^{(\text{II})}, \mathbf{H}_s^{(\text{II})}$), região ($a \leq r$):

$$\begin{aligned}
E_{sr}^{(\text{II})} &= \frac{2\gamma}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[-ia_n^{(\text{II})} n H_n^{(1)}(\rho) + b_n^{(\text{II})} H_n'^{(1)}(\rho) \cos \zeta \right], \\
E_{s\phi}^{(\text{II})} &= \gamma \left\{ a_0^{(\text{II})} H_0'^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[-ia_n^{(\text{II})} H_n'^{(1)}(\rho) + b_n^{(\text{II})} n \frac{H_n(\rho)}{\rho} \cos \zeta \right] \right\}, \\
E_{sz}^{(\text{II})} &= 2r\gamma \sin \zeta \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) b_n^{(\text{II})} H_n^{(1)}(\rho); \\
H_{sr}^{(\text{II})} &= \frac{k\gamma}{\omega\mu} \left\{ -ia_0^{(\text{II})} H_0^{(1)}(\rho) \cos \zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) \left[-ia_n^{(\text{II})} H_n'^{(1)}(\rho) + b_n^{(\text{II})} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \right\}, \\
H_{s\phi}^{(\text{II})} &= \frac{2k\gamma}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\phi) \left[ia_n^{(\text{II})} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \cos \zeta - b_n^{(\text{II})} H_n'^{(1)}(\rho) \right], \\
H_{sz}^{(\text{II})} &= \frac{k\gamma}{\omega\mu} \sin \zeta \left[a_0^{(\text{II})} H_0^{(1)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\phi) a_n^{(\text{II})} H_n^{(1)}(\rho) \right].
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Embora não tenhamos mencionado, algumas relações de paridade entre os coeficientes foram usadas a fim de que os somatórios começassem a partir de $n = 1$. Essas relações são obtidas após a aplicação das condições de contorno na superfície do cilindro magnético.

A.5 Cilindros concêntricos

Os cálculos para o cilindro com camada de espessura uniforme são extremamente mais complicados que os do cilindro homogêneo. A fim de “facilitarmos” os cálculos e tornarmos algumas relações mais evidentes, é conveniente expressarmos os campos eletromagnéticos com somatórios com índice $n \in \mathbb{Z}$. Mesmo porque, como comentamos na Seção A.4, a paridade dos coeficientes das expansões, necessária para a simplificação dos somatórios, só pode ser estabelecida após a determinação desses coeficientes. Apenas passamos os somatórios para índices $n \in \mathbb{N}$ após calculadas as grandezas de espalhamento e já conhecidas essas relações.

Sejam ζ o ângulo formado entre a onda incidente e o eixo do cilindro e $\varphi_n(\phi, z) = E_0(-\iota)^n e^{\iota(n\phi + hz)}$, onde $h = -k \cos \zeta$. As polarizações TM ($\mathbf{E}_i \parallel xz$) e TE ($\mathbf{E}_i \perp xz$) são indicadas pelos índices (I) e (II), respectivamente. As componentes dos campos ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$) e ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$) são as mesmas expressas na Seção A.4. No presente caso, apenas ignoramos as relações de paridade entre os coeficientes, visto que não as conhecemos de antemão.

- *Campo eletromagnético incidente* ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$), região ($r \geq b$):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{ir}^{(I)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \zeta J'_n(\rho) \varphi_n(\phi, z), \\ E_{i\phi}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cos \zeta \frac{J_n(\rho)}{\rho} \varphi_n(\phi, z), \\ E_{iz}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho \frac{J_n(\rho)}{kr} \varphi_n(\phi, z), \\ H_{ir}^{(I)} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{J_n(\rho)}{\rho} \varphi_n(\phi, z), \\ H_{i\phi}^{(I)} = \iota \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(\rho) \varphi_n(\phi, z), \\ H_{iz}^{(I)} = 0; \\ E_{ir}^{(II)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{J_n(\rho)}{\rho} \varphi_n(\phi, z), \\ E_{i\phi}^{(II)} = \iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(\rho) \varphi_n(\phi, z), \\ E_{iz}^{(II)} = 0, \\ H_{ir}^{(II)} = \iota \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \zeta J'_n(\rho) \varphi_n(\phi, z), \\ H_{i\phi}^{(II)} = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cos \zeta \frac{J_n(\rho)}{\rho} \varphi_n(\phi, z), \\ H_{iz}^{(II)} = -\frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho \frac{J_n(\rho)}{kr} \varphi_n(\phi, z), \end{array} \right.$$

onde $\rho = kr \sin \zeta$.

- *Campo eletromagnético espalhado* ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), região ($b \leq r$):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{sr}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ib_n^{(I)} \cos \zeta \frac{H_n'^{(1)}(\rho)}{\rho} + a_n^{(I)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{s\phi}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ia_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) - b_n^{(I)} \cos \zeta n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{sz}^{(I)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(I)} \rho \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{kr} \Phi_n(\phi, z), \\ H_{sr}^{(I)} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ia_n^{(I)} \cos \zeta H_n'^{(1)}(\rho) - b_n^{(I)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{s\phi}^{(I)} = - \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n^{(I)} \cos \zeta n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} + ib_n^{(I)} H_n'^{(1)}(\rho) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{sz}^{(I)} = - \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(I)} \rho \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{kr} \Phi_n(\phi, z); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{sr}^{(II)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ib_n^{(II)} \cos \zeta \frac{H_n'^{(1)}(\rho)}{\rho} + a_n^{(II)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{s\phi}^{(II)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[b_n^{(II)} \cos \zeta n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} - ia_n^{(II)} H_n'^{(1)}(\rho) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{sz}^{(II)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(II)} \rho \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{kr} \Phi_n(\phi, z), \\ H_{sr}^{(II)} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[b_n^{(II)} n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} - ia_n^{(II)} \cos \zeta H_n'^{(1)}(\rho) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{s\phi}^{(II)} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ib_n^{(II)} H_n'^{(1)}(\rho) + a_n^{(II)} \cos \zeta n \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{\rho} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{sz}^{(II)} = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(II)} \rho \frac{H_n^{(1)}(\rho)}{kr} \Phi_n(\phi, z). \end{array} \right.$$

- *Campo eletromagnético interno* ($\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$), região ($0 \leq r \leq a$):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1r}^{(I)} = \iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[d_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} + c_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{1\phi}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - d_n^{(I)} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{1z}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(I)} \rho_1 \frac{J_n(\rho_1)}{k_1 r} \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1r}^{(I)} = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1\phi}^{(I)} = \iota \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(I)} J_n'(\rho_1) - d_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_1} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1z}^{(I)} = -\iota \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(I)} \rho_1 \frac{J_n(\rho_1)}{k_1 r} \Phi_n(\phi, z); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1r}^{(II)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[d_n^{(II)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - c_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{1\phi}^{(II)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} - d_n^{(II)} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ E_{1z}^{(II)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(II)} \rho_1 \frac{J_n(\rho_1)}{k_1 r} \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1r}^{(II)} = -\iota \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(II)} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} + d_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} J_n'(\rho_1) \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1\phi}^{(II)} = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n^{(II)} J_n'(\rho_1) - d_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_1} n \frac{J_n(\rho_1)}{\rho_1} \right] \Phi_n(\phi, z), \\ H_{1z}^{(II)} = -\frac{k_1}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(II)} \rho_1 \frac{J_n(\rho_1)}{k_1 r} \Phi_n(\phi, z), \end{array} \right.$$

onde $\rho_1 = kr \sqrt{m_1^2 - \cos^2 \zeta}$ e $m_1 = \sqrt{\mu_1 \epsilon_1 / \mu \epsilon}$ é o índice de refração relativo entre os meios (ϵ_1, μ_1) e (ϵ, μ) .

- *Campo eletromagnético na camada ($\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$), região ($a \leq r \leq b$):*

$$\begin{cases}
 E_{2r}^{(I)} = \iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[g_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + w_n^{(I)} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] + \left[f_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} J_n'(\rho_2) + v_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 E_{2\phi}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + v_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] - \left[g_n^{(I)} J_n'(\rho_2) + w_n^{(I)} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 E_{2z}^{(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f_n^{(I)} \rho_2 \frac{J_n(\rho_2)}{k_2 r} + v_n^{(I)} \rho_2 \frac{Y_n(\rho_2)}{k_2 r} \right] \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2r}^{(I)} = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(I)} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + v_n^{(I)} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] - \left[g_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} J_n'(\rho_2) + w_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2\phi}^{(I)} = \iota \frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(I)} J_n'(\rho_2) + v_n^{(I)} Y_n'(\rho_2) \right] - \left[g_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + w_n^{(I)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2z}^{(I)} = -\iota \frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g_n^{(I)} \rho_2 \frac{J_n(\rho_2)}{k_2 r} + w_n^{(I)} \rho_2 \frac{Y_n(\rho_2)}{k_2 r} \right] \Phi_n(\phi, z); \\
 \\
 E_{2r}^{(II)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[g_n^{(II)} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + w_n^{(II)} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] - \left[f_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} J_n'(\rho_2) + v_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 E_{2\phi}^{(II)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + v_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] - \left[g_n^{(II)} J_n'(\rho_2) + w_n^{(II)} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 E_{2z}^{(II)} = -\iota \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f_n^{(II)} \rho_2 \frac{J_n(\rho_2)}{k_2 r} + v_n^{(II)} \rho_2 \frac{Y_n(\rho_2)}{k_2 r} \right] \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2r}^{(II)} = \frac{-\iota k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(II)} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + v_n^{(II)} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] + \left[g_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} J_n'(\rho_2) + w_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} Y_n'(\rho_2) \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2\phi}^{(II)} = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f_n^{(II)} J_n'(\rho_2) + v_n^{(II)} Y_n'(\rho_2) \right] - \left[g_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{J_n(\rho_2)}{\rho_2} + w_n^{(II)} \frac{\cos \zeta}{m_2} n \frac{Y_n(\rho_2)}{\rho_2} \right] \right\} \Phi_n(\phi, z), \\
 H_{2z}^{(II)} = -\frac{k_2}{\omega \mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g_n^{(II)} \rho_2 \frac{J_n(\rho_2)}{k_2 r} + w_n^{(II)} \rho_2 \frac{Y_n(\rho_2)}{k_2 r} \right] \Phi_n(\phi, z),
 \end{cases}$$

onde $\rho_2 = kr\sqrt{m_2^2 - \cos^2 \zeta}$ e $m_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 / \mu \varepsilon}$ é o índice de refração relativo entre os meios (ε_2, μ_2) e (ε, μ) .

Os coeficientes das expansões $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n, v_n$ e w_n para ambos os modos TM e TE são obtidos mediante a aplicação das condições de contorno do problema e estão definidos nas Eqs. (7.2.1)–(7.2.1) e Eqs. (7.2.1)–(7.2.1), respectivamente.

APÊNDICE B – Aproximações para a esfera e cilindro homogêneos

Na teoria de espalhamento, quer seja devido a interpretações físicas do problema ou mesmo a limitações numéricas das simulações (tempo de convergência das séries, etc.), há alguns casos particulares de aproximações dos coeficientes e truncamento das séries que merecem atenção especial. Esse estudo é feito, essencialmente, a partir de aproximações polinomiais para as funções de Bessel e Neumann. Nesta seção apresentamos algumas aproximações para os coeficientes magnéticos de Lorenz-Mie e para os coeficientes associados ao espalhamento por um cilindro infinito.

B.1 Esfera homogênea

As funções de Ricatti-Bessel e Ricatti-Hankel, das quais dependem os coeficientes de Lorenz-Mie, são definidas, respectivamente, pelas expressões $\psi_n(z) = z j_n(z)$ e $\xi_n(z) = z h_n^{(1)}(z)$, onde z é um variável complexa. Em particular, é conveniente definirmos a função $\phi_n(z) = z d[\ln \psi(z)]/dz$.

Em termos de séries infinitas, as funções de Bessel e Neumann podem ser expressas por

$$j_n(z) = 2^n z^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{s! (2s+2n+1)!} z^{2s}, \quad (\text{B.1})$$

$$y_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n z^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-n)!}{s! (2s-2n)!} z^{2s}. \quad (\text{B.2})$$

Na situação em que $|z| \ll 1$, as Eqs. (B.1) e (B.2) podem ser aproximadas por

$$j_n(z) \approx \frac{z^n}{(2n+1)!!} - \frac{z^{n+2}}{2(2n+3)!!}, \quad (\text{B.3})$$

$$y_n(z) \approx -z^{-n-1} (2n-1)!! + \frac{z^{-n+1}}{2} (2n-3)!! . \quad (\text{B.4})$$

A partir dessas expressões, determinamos aproximações para as funções Ψ_n , ξ_n e φ_n . Saliemos que o termo $n = 1$ é suficiente para se estudar o espalhamento de partículas não magnéticas. Contudo, na presença do magnetismo, é necessário considerarmos os termos $n = 1$ e $n = 2$ no sentido de maternos as ordens dos coeficientes de Lorenz-Mie consistentes.

Assim, obtemos as seguintes aproximações para pequeno argumento:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &\approx \frac{z^2}{3} \left(1 - \frac{z^2}{10}\right), & \Psi_2(z) &\approx \frac{z^3}{15}, \\ \xi_1(z) &\approx -\frac{i}{z} - \frac{iz}{2} + \frac{z^2}{3}, & \xi_2(z) &\approx -\frac{3i}{z^2}; \\ \varphi_1(z) &\approx 2 \left(1 - \frac{z^2}{10} - \frac{z^4}{50}\right), & \varphi_2(z) &\approx 3.\end{aligned}$$

Por outro lado, para grandes argumentos, isto é, $|z| \rightarrow \infty$ ($-\pi < \arg(z) < 2\pi$), a Ref. [63] fornece as expressões

$$\Psi_n(z) \approx \sin(z - \delta_n), \quad (\text{B.5})$$

$$\xi_n(z) \approx -ie^{i(z - \delta_n)}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\delta_n = n\pi/2$.

A fim de simplificarmos os cálculos de aproximação para os coeficientes – basicamente, divisão entre polinômios –, consideramos a função $\varphi_n(x)$ nas Eqs. (3.21) a (3.24):

$$a_n = \frac{\varphi_n(mx)\Psi_n(x) - m\tilde{m}x\Psi_n'(x)}{\varphi_n(mx)\xi_n(x) - m\tilde{m}x\xi_n'(x)}, \quad (\text{B.7})$$

$$b_n = \frac{\varphi_n(mx)\Psi_n(x) - (m/\tilde{m})x\Psi_n'(x)}{\varphi_n(mx)\xi_n(x) - (m/\tilde{m})x\xi_n'(x)}, \quad (\text{B.8})$$

$$c_n = \frac{m}{\Psi_n(mx)} \frac{i(m/\tilde{m})x}{[(m/\tilde{m})x\xi_n'(x) - \varphi_n(mx)\xi_n(x)]}, \quad (\text{B.9})$$

$$d_n = \frac{(m/\tilde{m})}{\Psi_n(mx)} \frac{im\tilde{m}x}{[m\tilde{m}x\xi_n'(x) - \varphi_n(mx)\xi_n(x)]}. \quad (\text{B.10})$$

Sendo $x = ka$ o parâmetro de tamanho da esfera, onde a é o raio e k é o número de onda incidente, e m o índice de refração relativo, temos os seguintes casos-limite:

1. Pequena partícula comparada com o comprimento de onda ($x \ll 1$);
2. Limite de Rayleigh ($x \ll 1$ e $|m|x \ll 1$);
3. Limite ferromagnético ($|m|x \gg 1$).

B.1.1 Limite de pequena esfera

Considerando $x \ll 1$ nas Eqs. (B.1) e (B.2), todos os termos com ordem maior ou igual a x^2 podem ser negligenciados. Assim, substituindo essas expressões nos coeficientes de espalhamento de Lorenz-Mie, Eqs. (B.7) e (B.8), obtemos

$$a_1 \approx \frac{\iota x^3}{3} \frac{\varphi_1(mx) - 2m\tilde{m}}{\varphi_1(mx) + m\tilde{m}} - \frac{\iota x^5}{5} \frac{[\varphi_1(mx) - m\tilde{m}]^2 - m\tilde{m}\varphi_1(mx)}{[\varphi_1(mx) + m\tilde{m}]^2} + \frac{x^6}{9} \left[\frac{\varphi_1(mx) - 2m\tilde{m}}{\varphi_1(mx) + m\tilde{m}} \right]^2 + O(x^7), \quad (\text{B.11})$$

$$b_1 \approx \frac{\iota x^3}{3} \frac{\varphi_1(mx) - 2m/\tilde{m}}{\varphi_1(mx) + m/\tilde{m}} - \frac{\iota x^5}{5} \frac{[\varphi_1(mx) - m/\tilde{m}]^2 - (m/\tilde{m})\varphi_1(mx)}{[\varphi_1(mx) + m/\tilde{m}]^2} + \frac{x^6}{9} \left[\frac{\varphi_1(mx) - 2m/\tilde{m}}{\varphi_1(mx) + m/\tilde{m}} \right]^2 + O(x^7), \quad (\text{B.12})$$

$$a_2 \approx \frac{\iota x^5}{45} \frac{\varphi_2(mx) - 3m\tilde{m}}{\varphi_2(mx) + 2m\tilde{m}} + O(x^7), \quad (\text{B.13})$$

$$b_2 \approx \frac{\iota x^5}{45} \frac{\varphi_2(mx) - 3m/\tilde{m}}{\varphi_2(mx) + 2m/\tilde{m}} + O(x^7). \quad (\text{B.14})$$

Para os coeficientes internos de Lorenz-Mie, Eqs. (B.9) e (B.10), as aproximações assumem a forma

$$c_1 \approx \frac{mx^2}{\Psi_1(mx)} \frac{m/\tilde{m}}{[\varphi_1(mx) + m/\tilde{m}]} - \frac{mx^4}{\Psi_1(mx)} \frac{(m/\tilde{m})[\varphi_1(mx) - m/\tilde{m}]}{2[\varphi_1(mx) + m/\tilde{m}]^2} + O(x^5), \quad (\text{B.15})$$

$$d_1 \approx \frac{(m/\tilde{m})x^2}{\Psi_1(mx)} \frac{m\tilde{m}}{[\varphi_1(mx) + m\tilde{m}]} - \frac{(m/\tilde{m})x^4}{\Psi_1(mx)} \frac{m\tilde{m}[\varphi_1(mx) - m\tilde{m}]}{2[\varphi_1(mx) + m\tilde{m}]^2} + O(x^5), \quad (\text{B.16})$$

$$c_2 \approx \frac{m}{3\Psi_2(mx)} \frac{(m/\tilde{m})x^3}{[\varphi_2(mx) + 2m/\tilde{m}]} + O(x^5), \quad (\text{B.17})$$

$$d_2 \approx \frac{(m/\tilde{m})}{3\Psi_2(mx)} \frac{m\tilde{m}x^3}{[\varphi_2(mx) + 2m\tilde{m}]} + O(x^5). \quad (\text{B.18})$$

Note que, para esta aproximação, os coeficientes de espalhamento a_n e b_n são de ordem $O[(ka)^{2n+1}]$, enquanto que os coeficientes internos c_n e d_n são de ordem $O[(ka)^{n+1}]$. Os termos para $n > 2$ são ignorados.

B.1.2 Limite de Rayleigh

Considerando que a permutação entre os limites $x \ll 1$ e $|m|x \ll 1$ seja válida, obtemos diretamente os coeficientes de Lorenz-Mie para $n = 1$ e $n = 2$ no limite de Rayleigh a partir das aproximações calculadas para o limite de pequena esfera. Neste caso em particular, apenas as

funções com argumentos mx são manipuladas.

Os coeficientes de espalhamento, nessa aproximação, são dados por

$$a_1 \approx \frac{-2ix^3}{3} \frac{m\tilde{m} - 1}{m\tilde{m} + 2} - \frac{ix^5}{5} \frac{m^3\tilde{m} - 6m\tilde{m} + (m\tilde{m})^2 + 4}{(m\tilde{m} + 2)^2} + \frac{4x^6}{9} \left(\frac{m\tilde{m} - 1}{m\tilde{m} + 2} \right)^2 + O(x^7), \quad (\text{B.19})$$

$$b_1 \approx \frac{-2ix^3}{3} \frac{m/\tilde{m} - 1}{m/\tilde{m} + 2} - \frac{ix^5}{5} \frac{m^3\tilde{m} - 6m/\tilde{m} + (m/\tilde{m})^2 + 4}{(m/\tilde{m} + 2)^2} + \frac{4x^6}{9} \left(\frac{m/\tilde{m} - 1}{m/\tilde{m} + 2} \right)^2 + O(x^7), \quad (\text{B.20})$$

$$a_2 \approx \frac{-ix^5}{15} \frac{m\tilde{m} - 1}{2m\tilde{m} + 3} + O(x^7), \quad (\text{B.21})$$

$$b_2 \approx \frac{-ix^5}{15} \frac{m/\tilde{m} - 1}{2m/\tilde{m} + 3} + O(x^7), \quad (\text{B.22})$$

e os coeficientes dos campos internos assumem a forma

$$c_1 \approx \frac{3}{2\tilde{m} + m} \left[1 + \frac{(mx)^2}{10} \right] - \frac{3x^2}{2} \left[1 + \frac{(mx)^2}{10} \right] \frac{(2\tilde{m} - m)}{(2\tilde{m} + m)^2} + O(x^5), \quad (\text{B.23})$$

$$d_1 \approx \frac{3}{2 + m\tilde{m}} \left[1 + \frac{(mx)^2}{10} \right] - \frac{3x^2}{2} \left[1 + \frac{(mx)^2}{10} \right] \frac{(2 - m\tilde{m})}{(2 + m\tilde{m})^2} + O(x^5), \quad (\text{B.24})$$

$$c_2 \approx \frac{5}{m\tilde{m}(3 + 2m/\tilde{m})} + O(x^5), \quad (\text{B.25})$$

$$d_2 \approx \frac{5}{m(3 + 2m\tilde{m})} + O(x^5). \quad (\text{B.26})$$

Tomando o caso particular em que $m = \tilde{m}$, são recuperados os coeficientes do espalhamento não magnético [1].

Observamos que Kerker et al. [10] obtiveram os coeficientes de Lorenz-Mie em sua ordem mais baixa com relação ao parâmetro de tamanho em função da permissividade elétrica relativa $\epsilon_r = m\tilde{m}$ e da permeabilidade magnética relativa $\mu_r = m/\tilde{m}$:

$$a_1 \approx \frac{-2ix^3}{3} \frac{1 - \epsilon_r}{2 + \epsilon_r}, \quad b_1 \approx \frac{-2ix^3}{3} \frac{1 - \mu_r}{2 + \mu_r}, \quad (\text{B.27})$$

onde toda dependência em μ_r se encontra no termo b_1 , o qual obviamente se anula para o caso não magnético ($\mu_r = 1$) [1]. Nesse caso, o termo dominante na expansão de b_1 é da ordem de x^5 .

B.1.3 Limite ferromagnético para grandes esferas

Usando as Eqs. (B.5) e (B.6), e considerando $|m|x \gg 1$, obtemos os coeficientes de Lorenz-Mie

$$\begin{aligned}
 a_n &\approx \frac{e^{-i(x-\delta_n)}}{\sec(x-\delta_n)} \left[\frac{\tilde{m} \tan(mx - \delta_n) - \tan(x - \delta_n)}{\tilde{m} \tan(mx - \delta_n) + i} \right], \\
 b_n &\approx \frac{e^{-i(x-\delta_n)}}{\sec(x-\delta_n)} \left[\frac{\tan(mx - \delta_n) - \tilde{m} \tan(x - \delta_n)}{\tan(mx - \delta_n) + i\tilde{m}} \right], \\
 c_n &\approx \frac{e^{-i(x-\delta_n)}}{\cos(mx - \delta_n)} \frac{im}{[\tan(mx - \delta_n) + i\tilde{m}]}, \\
 d_n &\approx \frac{e^{-i(x-\delta_n)}}{\cos(mx - \delta_n)} \frac{im}{[\tilde{m} \tan(mx - \delta_n) + i]}.
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

Esse limite, não estudado na literatura, pode ser usado para conferirmos resultados numéricos provenientes das outras aproximações.

B.1.4 Limite ferromagnético para pequenas esferas

Da mesma forma que na aproximação de Rayleigh, esse limite ferromagnético é derivado diretamente da aproximação de pequenas esferas. Da Eq. (B.5), temos que

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(mx) &\approx -\cos(mx), & \Phi_1(mx) &\approx -mx \tan(mx) \\
 \Psi_2(mx) &\approx -\sin(mx), & \Phi_2(mx) &\approx mx \cot(mx).
 \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões nas Eqs.(B.11)–(B.18), resulta que os coeficientes de espalhamento são dados por

$$\begin{aligned}
 a_1 &\approx \frac{ix^3}{3} \frac{x \tan(mx) + 2\tilde{m}}{x \tan(mx) - \tilde{m}} - \frac{ix^5}{5} \frac{[x \tan(mx) + \tilde{m}]^2 + \tilde{m}x \tan(mx)}{[x \tan(mx) - \tilde{m}]^2} \\
 &\quad + \frac{x^6}{9} \left[\frac{x \tan(mx) + 2\tilde{m}}{x \tan(mx) - \tilde{m}} \right]^2 + O(x^7),
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &\approx \frac{ix^3}{3} \frac{\tilde{m}x \tan(mx) + 2}{\tilde{m}x \tan(mx) - 1} - \frac{ix^5}{5} \frac{[\tilde{m}x \tan(mx) + 1]^2 + \tilde{m}x \tan(mx)}{[\tilde{m}x \tan(mx) - 1]^2} \\
 &\quad + \frac{x^6}{9} \left[\frac{\tilde{m}x \tan(mx) + 2}{\tilde{m}x \tan(mx) - 1} \right]^2 + O(x^7),
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

$$a_2 \approx \frac{ix^5}{45} \frac{x - 3\tilde{m} \tan(mx)}{x + 2\tilde{m} \tan(mx)} + O(x^7), \tag{B.31}$$

$$b_2 \approx \frac{ix^5}{45} \frac{\tilde{m}x - 3 \tan(mx)}{\tilde{m}x + 2 \tan(mx)} + O(x^7); \tag{B.32}$$

os coeficientes internos, por sua vez, têm a forma

$$c_1 \approx \frac{m}{\cos(mx)} \frac{x^2}{[\tilde{m}x \tan(mx) - 1]} - \frac{mx^4}{2 \cos(mx)} \frac{[\tilde{m}x \tan(mx) + 1]}{[\tilde{m}x \tan(mx) - 1]^2} + O(x^5), \quad (\text{B.33})$$

$$d_1 \approx \frac{m}{\cos(mx)} \frac{x^2}{[x \tan(mx) - \tilde{m}]} - \frac{mx^4}{2 \cos(mx)} \frac{[x \tan(mx) + \tilde{m}]}{[x \tan(mx) - \tilde{m}]^2} + O(x^5), \quad (\text{B.34})$$

$$c_2 \approx \frac{-m}{3 \cos(mx)} \frac{x^3}{[2 \tan(mx) + \tilde{m}x]} + O(x^5), \quad (\text{B.35})$$

$$d_2 \approx \frac{-m}{3 \cos(mx)} \frac{x^3}{[2\tilde{m} \tan(mx) + x]} + O(x^5). \quad (\text{B.36})$$

B.2 Cilindro homogêneo

À semelhança da Seção anterior, calculamos aqui aproximações para os coeficientes magnéticos do cilindro infinito no caso particular de incidência normal ($\zeta = 90^\circ$). As funções cilíndricas de Bessel e Neumann usadas nas aproximações são [1]

$$\begin{aligned} J_0(z) &\approx 1 - \frac{z^2}{4}, & Y_0(z) &\approx \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right), \\ J_1(z) &\approx \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16}, & Y_1(z) &\approx -\frac{2}{\pi z}, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

no limite de pequenos argumentos, isto é, $|z| \ll 1$, e

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos[z - (2n+1)\pi/4], \quad (\text{B.38})$$

$$H_n^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i[z - (2n+1)\pi/4]}, \quad (\text{B.39})$$

para grandes argumentos, $|z| \rightarrow \infty$ ($-\pi < \arg(z) < 2\pi$) [63].

B.2.1 Limite de cilindro fino

Se $x = ka \ll 1$, onde a é o raio do cilindro e k é o número de onda incidente, obtemos as seguintes aproximações para os coeficientes de espalhamento das Eqs. (6.36), $n = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{aligned}
 a_0 &\approx \frac{i\pi D_0(mx)}{8\tilde{m}} x(4-x^2) + \frac{i\pi}{32} x^2(8-x^2), \\
 b_0 &\approx \frac{i\pi\tilde{m}D_0(mx)}{8} x(4-x^2) + \frac{i\pi}{32} x^2(8-x^2), \\
 a_1 &\approx \frac{-i\pi x^2 [\tilde{m}(8-3x^2) - D_1(mx)x(8-x^2)]}{32 [D_1(mx)x + \tilde{m}]}, \\
 b_1 &\approx \frac{-i\pi x^2 [8-3x^2 - \tilde{m}D_1(mx)x(8-x^2)]}{32 [\tilde{m}D_1(mx)x + 1]}.
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

B.2.2 Limites de Rayleigh e ferromagnético

Na aproximação de Rayleigh, impomos $x \ll 1$ e $|m|x \ll 1$, o que fornece para a função derivada logarítmica $D_n(z) = J'_n(z)/J_n(z)$ as aproximações

$$D_0(mx) \approx -mx/2 - m^3 x^3/16, \tag{B.41}$$

$$D_1(mx) \approx 1/mx - mx/4. \tag{B.42}$$

Assim, a partir das Eqs. (B.40), obtemos os coeficientes

$$\begin{aligned}
 a_0 &\approx -\frac{i\pi}{4} \left(\frac{m}{\tilde{m}} - 1 \right) x^2 - \frac{i\pi}{32} \left(1 + \frac{m^3}{\tilde{m}} - 2\frac{m}{\tilde{m}} \right) x^4, \\
 b_0 &\approx -\frac{i\pi}{4} (m\tilde{m} - 1) x^2 - \frac{i\pi}{32} (1 + m^3\tilde{m} - 2m\tilde{m}) x^4, \\
 a_1 &\approx -\frac{i\pi}{4} \left(\frac{m\tilde{m} - 1}{m\tilde{m} + 1} \right) x^2 - \frac{i\pi}{32} \left[\frac{2m^2 - 3m\tilde{m} + 1}{m\tilde{m} + 1} \right] x^4, \\
 b_1 &\approx -\frac{i\pi}{4} \left(\frac{m/\tilde{m} - 1}{m/\tilde{m} + 1} \right) x^2 - \frac{i\pi}{32} \left[\frac{2m^2 - 3m/\tilde{m} + 1}{m/\tilde{m} + 1} \right] x^4.
 \end{aligned}$$

Note que, na presença do magnetismo, os termos de ordem x^2 nos coeficientes a_0 e b_1 não se anulam. O caso dielétrico apresentado na Ref. [1] é recuperado quando assumimos $m = \tilde{m}$.

O limite ferromagnético também pode ser derivado do limite de pequena partícula. Nesta situação, no entanto, devemos considerar os limites $x \ll 1$ e $|m|x \gg 1$. Usando as Eqs. (B.39), a função logarítmica pode ser reescrita como

$$D_n(mx) \approx -\frac{1}{mx} - \tan \left[mx - \frac{(2n+1)\pi}{4} \right], \tag{B.43}$$

e a aproximação ferromagnética é obtida pela substituição de $D_0(mx)$ e $D_1(mx)$ calculados a partir da Eq. (B.43) nos coeficientes de espalhamento no limite de pequena partícula, Eqs. (B.40).

B.2.3 Polarização

Para um cilindro irradiado normalmente em relação ao seu eixo, o grau de polarização da onda eletromagnética espalhada é expresso pela razão

$$P = \frac{T_{11}}{T_{12}}, \quad (\text{B.44})$$

onde $T_{11} = (|T_1|^2 - |T_2|^2)/2$ e $T_{12} = (|T_1|^2 + |T_2|^2)/2$, com as funções de amplitude dadas por

$$T_1 = b_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\Theta), \quad (\text{B.45})$$

$$T_2 = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Theta), \quad (\text{B.46})$$

com $\Theta = 180^\circ - \phi$ [1]. Usando as Eqs. (B.40) no limite de Rayleigh, podemos escrever as funções T_1 e T_2 em termos de ordem x^2 :

$$T_1 \approx -\frac{i\pi}{4}(m\tilde{m} - 1)x^2 - \frac{i\pi}{2} \left(\frac{m/\tilde{m} - 1}{m/\tilde{m} + 1} \right) x^2 \cos \Theta,$$

$$T_2 \approx -\frac{i\pi}{4} \left(\frac{m}{\tilde{m}} - 1 \right) x^2 - \frac{i\pi}{2} \left(\frac{m\tilde{m} - 1}{m\tilde{m} + 1} \right) x^2 \cos \Theta.$$

Em $\Theta = 90^\circ$, o grau de polarização P da luz espalhada não é identicamente 1 para o cilindro magnético, como podemos notar pela expressão

$$P \approx \frac{|m\tilde{m} - 1|^2 - |m/\tilde{m} - 1|^2}{|m\tilde{m} - 1|^2 + |m/\tilde{m} - 1|^2}. \quad (\text{B.47})$$

Portanto, analogamente ao espalhamento eletromagnético por uma esfera magnética [10], a intensidade de radiação espalhada por um cilindro magnético não é simétrica em relação ao ângulo de 90° .

APÊNDICE C – Funções especiais e relações de recorrência

No cálculo da energia eletromagnética média dentro de um centro espalhador, assunto que desenvolvemos ao longo desta dissertação de Mestrado, há a necessidade de integrarmos em um volume bem definido no espaço a intensidade do campo eletromagnético. Nas geometrias particulares que aqui lidamos, as componentes desses campos dependem de funções associadas de Legendre de primeira ordem, funções de Bessel, Neumann e Hankel esféricas (no caso de espalhadores simetricamente esféricos) e funções de Bessel, Neumann e Hankel cilíndricas (para centros espalhadores com simetria cilíndrica). É conveniente, do ponto de vista da interpretação física do problema e do cálculo numérico das grandezas, que resolvamos analiticamente essas integrais a fim de determinarmos uma expressão fechada para a energia eletromagnética.

Fornecemos neste Apêndice as principais relações entre as funções angulares e, principalmente, entre as funções radiais esféricas e cilíndricas que usamos em cada Capítulo. Salientamos que muitas das relações de recorrência aqui calculadas entre funções de Bessel e Neumann, embora possam ser obtidas a partir de algumas relações básicas apresentadas nas Refs. [37, 62], não são encontradas na literatura. Essas relações, como nas Refs. [24, 47], surgem de nossa busca em determinar uma expressão fechada para a energia interna.

As Seções a seguir devem ser encaradas como complementos de seus Capítulos correspondentes. A notação que empregamos é a mesma desenvolvida nas Seções atinentes aos cálculos da energia eletromagnética armazenada nos centros espalhadores magnéticos.

C.1 Funções angulares

As funções angulares $\pi_n = \pi_n^1$ e $\tau_n = \tau_n^1$, definidas nas Eqs. (3.8) da Seção 3.1 em termos das funções associadas de Legendre, surgem naturalmente na solução da parte angular da equação de Helmholtz escalar 3.1 para o problema da esfera. As principais relações de recorrência e

paridade envolvendo essas funções são dadas por [1]

$$\pi_n(\cos \theta) = \left(\frac{2n-1}{n-1} \right) \cos \theta \pi_{n-1}(\cos \theta) - \left(\frac{n}{n-1} \right) \pi_{n-2}(\cos \theta), \quad (\text{C.1})$$

$$\tau_n(\cos \theta) = n \cos \theta \pi_n(\cos \theta) - (n+1) \pi_{n-1}(\cos \theta), \quad (\text{C.2})$$

$$\pi_n(-\cos \theta) = (-1)^{n-1} \pi_n(\cos \theta), \quad (\text{C.3})$$

$$\tau_n(-\cos \theta) = (-1)^n \tau_n(\cos \theta). \quad (\text{C.4})$$

As Eqs. (C.1)–(C.4) auxiliam no cálculo dos coeficientes das expansões dos campos eletromagnéticos em harmônicos esféricos vetoriais. Visto que esses coeficientes independem das variáveis angulares, a resolução do sistema de equações oriundo das condições de contorno (2.4) e (2.5) se dá mediante a escolha de um ângulo de espalhamento em particular. Para $\theta = 0^\circ$, temos $\pi_n(1) = \tau_n(1) = n(n+1)/2$ [1].

Em decorrência de propriedades relacionadas às funções associadas de Legendre, as funções π_n e τ_n satisfazem, $\forall n, n' \in \mathbb{N}$, as integrais definidas

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) (\pi_n \pi_{n'} + \tau_n \tau_{n'}) = \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \delta_{n,n'}, \quad (\text{C.5})$$

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) (\pi_n \tau_{n'} + \tau_n \pi_{n'}) = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \pi_n \pi_{n'} \sin^2 \theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{n,n'}, \quad (\text{C.7})$$

onde $\delta_{n,n'}$ é o delta de Kronecker. Nos livros clássicos de teoria de espalhamento, a Eq. (C.7) não é encontrada nessa forma explícita [1, 2, 3, 27]. Salientamos que a simplificação do somatório duplo que aparece no cálculo da intensidade dos campos expressos em harmônicos esféricos vetoriais só é possível devido às Eqs. (C.5)–(C.7).

C.2 Funções esféricas

A fim de facilitarmos a consulta, separamos as principais relações que obtemos entre as funções esféricas de Bessel e Neumann em seções correspondentes aos sistemas em que elas aparecem. As relações básicas de recorrência, a partir das quais todas as outras podem ser

derivadas, são resumidas nas equações [37, 62]

$$(2n+1)z_n(\rho) = \rho z_{n-1}(\rho) + \rho z_{n+1}(\rho); \quad (\text{C.8})$$

$$(2n+1)z'_n(\rho) = nz_{n-1}(\rho) - (n+1)z_{n+1}(\rho); \quad (\text{C.9})$$

$$\rho z'_n(\rho) = \rho z_{n-1}(\rho) - (n+1)z_n(\rho); \quad (\text{C.10})$$

$$\rho_1 z'_n(\rho) = nz_n(\rho) - \rho z_{n+1}(\rho), \quad (\text{C.11})$$

onde z_n pode ser quaisquer das funções esféricas de Bessel (j_n) ou Neumann (y_n). Note que as Eqs. (C.10) e (C.11) podem ser obtidas das Eqs. (C.8) e (C.9).

C.2.1 Esfera homogênea

Considere a função de Ricatti-Bessel $\psi_n(\rho_1) = \rho_1 j_n(\rho_1)$, onde $\rho_1 = mkr$. Podemos mostrar, a partir das relações de recorrência (C.8) e (C.9) para $z_n = j_n$ que

$$n(n+1) \frac{|j_n(\rho_1)|^2}{|\rho_1|^2} + \frac{|\psi'_n(\rho_1)|^2}{|\rho_1|^2} = \frac{1}{(2n+1)} [n|j_{n+1}(\rho_1)|^2 + (n+1)|j_{n-1}(\rho_1)|^2]. \quad (\text{C.12})$$

Ainda, usando a Eq. (C.8), obtemos facilmente a relação de recorrência

$$(2n+1)^2 |j_n(\rho_1)|^2 = |\rho_1|^2 \{ |j_{n-1}(\rho_1)|^2 + |j_{n+1}(\rho_1)|^2 + 2\text{Re}[j_{n-1}(\rho_1)j_{n+1}(\rho_1^*)] \}. \quad (\text{C.13})$$

A importância da Eq. (C.12) só é manifesta quando tomamos as contribuições radial $[|E_{1r}|^2]$ e angulares $[|E_{1\theta}|^2 + |E_{1\phi}|^2]$ para a energia interna, expressas na Eq. (3.30) da Seção 3.4, e as juntamos no cálculo da energia elétrica (ou magnética) total. A razão disso é que, na integração das intensidades dos campos na variável radial, surgem integrais envolvendo produtos de funções de Bessel pela sua conjugada complexa, uma das quais possui solução analítica e é dada por [37]

$$\int_0^a dr r^2 |j_n(\rho_1)|^2 = 2a^3 \text{Re} \left[\frac{y^* j_n(y) j'_n(y^*)}{y^2 - y^{*2}} \right] = 2a^3 |j_n(y)|^2 \text{Re} \left[\frac{y A_n(y)}{y^{*2} - y^2} \right], \quad (\text{C.14})$$

onde $\rho_1 = mkr$, $y = mka \neq y^*$, $A_n(y) = j'_n(y)/j_n(y)$ e o asterísco indica a conjugação das variáveis complexas: $\iota \leftrightarrow -\iota$, sendo $\iota^2 = -1$. As pricas indicam diferenciação com respeito ao argumento entre parênteses e assumimos que $\text{Im}(m) \neq 0$, ou seja, há absorção eletromagnética no meio. Essa integral, na verdade, é um caso particular da equação [37]

$$\begin{aligned} \int_0^a [(\rho_1^2 - \rho_1^{*2}) - (\alpha + \beta + 1)(\alpha - \beta)] dr j_\alpha(\rho_1) j_\beta(\rho_1^*) \\ = a \left[y^* j_\alpha(y) j'_\beta(y^*) - y j'_\alpha(y) j_\beta(y^*) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

onde α e β , no presente contexto, são números inteiros. Em termos de funções de Bessel cilíndricas, as Eqs. (C.14) e (C.15) são estabelecidas na Ref. [37]. Aqui, a fim de tratarmos apenas com funções de Bessel esféricas, empregamos a relação $\sqrt{2\rho_1}j_n(\rho_1) = \sqrt{\pi}J_{n+1/2}(\rho_1)$ [62]. Em particular, a Eq. (C.15) pode ser obtida das Eqs. (C.8)–(C.11). Uma maneira fácil de verificarmos isso é derivarmos, na forma indefinida, a Eq. (C.15) com respeito a r e usarmos as relações de recorrência (C.9) e (C.11).

A Eq. (C.14) é a mesma que aparece no trabalho de Bott e Zdunkowski [24] em termos das funções de Bessel cilíndricas J_n . De fato, um dos trunfos da Ref. [24] é aplicar essa relação no cálculo analítico da energia eletromagnética média no interior de uma esfera não magnética. Como caso particular, supondo que o índice de refração relativo m seja real ($m = m^*$), a regra de L'Hospital aplicada à integral definida (C.14) para $y^* \rightarrow y$ fornece

$$\int_0^a dr r^2 j_n^2(\rho_1) = \frac{a^3}{2} [j_n^2(y) - j_{n-1}(y)j_{n+1}(y)], \quad (\text{C.16})$$

onde usamos as relações de recorrência (C.10) e (C.11) para simplificarmos as derivadas. Note que nosso objetivo em obter relações como as expressas nas Eqs. (C.12) e (C.13) está vinculado à resolução analítica da integral na Eq. (C.14). Para simplificarmos nossa notação, definimos na Seção 3.4 a função $I_n(y) = \int_0^a dr r^2 |j_n(\rho_1)|/a^3$, que, como podemos observar, depende apenas das grandezas adimensionais y e y^* .

C.2.2 Esferas concêntricas

Para o cálculo da energia eletromagnética no interior de duas esferas concêntricas, devemos considerar tanto a função esférica de Bessel quanto a de Neumann, como descrito na Seção 4.1. Portanto, as expressões que calculamos aqui são mais gerais que as da Seção C.2.1 para uma esfera homogênea.

Usando a mesma notação do Capítulo 4, considere a situação em que $m_q \neq m_q^*$ ($q = 1; 2$). Assim, seguindo a Ref. [37], podemos escrever uma expressão mais geral que a Eq. (C.14), dada por

$$\int_{l_1}^{l_2} dr r^2 z_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q^*) = \frac{r^3 [\rho_q^* z_n(\rho_q) \bar{z}'_n(\rho_q^*) - \rho_q z'_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q^*)]}{\rho_q^2 - \rho_q^{*2}} \Bigg|_{r=l_1}^{r=l_2}, \quad (\text{C.17})$$

onde z_n e \bar{z}_n podem ser quaisquer funções esféricas de Bessel ou Neumann, e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ são os limites de integração. Para situação na qual $m_q = m_q^*$ ($q = 1, 2$), usando a regra de L'Hospital e

as relações de recorrência expressas nas Eqs. (C.10) e (C.11), obtemos

$$\int_{l_1}^{l_2} dr r^2 z_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q) = \frac{r^3}{4} [2z_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q) - z_{n-1}(\rho_q) \bar{z}_{n+1}(\rho_q) - z_{n+1}(\rho_q) \bar{z}_{n-1}(\rho_q)] \Bigg|_{r=l_1}^{r=l_2}. \quad (\text{C.18})$$

De maneira análoga à Seção C.2.1, obtemos das Eqs. (C.8)–(C.11) as relações

$$n(n+1) \frac{j_n(\rho_2) y_n(\rho_2^*)}{|\rho_2|^2} - \frac{\Psi'_n(\rho_2) \chi'_n(\rho_2^*)}{|\rho_2|^2} = \frac{1}{(2n+1)} [n j_{n+1}(\rho_2) y_{n+1}(\rho_2^*) + (n+1) j_{n-1}(\rho_2) y_{n-1}(\rho_2^*)], \quad (\text{C.19})$$

$$n(n+1) \frac{|y_n(\rho_2)|^2}{|\rho_2|^2} + \frac{|\chi'_n(\rho_2)|^2}{|\rho_2|^2} = \frac{1}{(2n+1)} [n |y_{n+1}(\rho_2)|^2 + (n+1) |y_{n-1}(\rho_2)|^2], \quad (\text{C.20})$$

onde $\rho_2 = k_2 r$ e $\chi_n(\rho_2) = -\rho_2 y_n(\rho_2)$ é a função de Riccati-Neumann. As Eqs. (C.19) e (C.20), junto com a Eq. (C.12), aparecem no cálculo da energia eletromagnética armazenada na camada esférica concêntrica. Dessas relações, torna-se conveniente definirmos a função genérica $I_{q,n}^{(z\bar{z})}(l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} dr r^2 z_n(\rho_q) \bar{z}_n(\rho_q^*) / (l_2^3 - l_1^3)$, a qual expressa a solução analítica das integrais nas Eqs. (C.17) e (C.18).

C.2.3 Esfera opticamente ativa

Considere aqui a mesma notação empregada no Capítulo 5. Usando as relações recorrência (C.8)–(C.11), podemos obter uma expressão similar à Eq. (C.12) da Seção C.2.1:

$$\frac{(2n+1)}{\rho_L \rho_R^*} [n(n+1) j_n(\rho_L) j_n(\rho_R^*) + \Psi'_n(\rho_L) \Psi'_n(\rho_R^*)] = n j_{n+1}(\rho_L) j_{n+1}(\rho_R^*) + (n+1) j_{n-1}(\rho_L) j_{n-1}(\rho_R^*). \quad (\text{C.21})$$

Da mesma maneira, para $m_A \neq m_B^*$, onde A e B podem ser tanto L quanto R, temos a integral [37]

$$\int_0^a dr r^2 j_n(\rho_A) j_n(\rho_B^*) = 2 \text{Re} \left[\frac{y_B^* j_n(y_A) j'_n(y_B^*)}{y_A^2 - y_B^{*2}} \right], \quad (\text{C.22})$$

onde $y_A = m_A x$ e $y_B = m_B x$. Para $m_A = m_B^*$, obtemos a expressão

$$\int_0^a dr r^2 j_n(\rho_A) j_n(\rho_B) = \frac{1}{2} [j_n(y)^2 - j_{n-1}(y) j_{n+1}(y)].$$

As integrais aqui definidas são praticamente as mesmas que as associadas à energia interna no espalhamento de Lorenz-Mie. Uma vez mais, definimos, por simplicidade, a função $I_n^{(AB)} = \int_0^a dr r^2 j_n(\rho_A) j_n(\rho_B^*) / a^3$.

C.3 Funções cilíndricas

As principais relações de recorrência entre as funções de Bessel e Neumann cilíndricas, as quais são usadas na simplificação de expressões e cálculos, podem ser resumidas nas equações

$$2nZ_n(\rho) = \rho [Z_{n-1}(\rho) + Z_{n+1}(\rho)] , \quad (\text{C.23})$$

$$2Z_n'(\rho) = Z_{n-1}(\rho) - Z_{n+1}(\rho) , \quad (\text{C.24})$$

$$nZ_n(\rho) = \rho [Z_{n-1}(\rho) - Z_n'(\rho)] , \quad (\text{C.25})$$

$$nZ_n(\rho) = \rho [Z_{n+1}(\rho) + Z_n'(\rho)] . \quad (\text{C.26})$$

onde, no presente contexto, n é um número inteiro e Z_n é quaisquer das funções cilíndricas de Bessel (J_n) ou Neumann (Y_n). Em particular, podemos escrever as Eqs. (C.25) e (C.26) de maneira compacta: $Z_n'(\rho) = \pm[nZ_n(\rho)/\rho - Z_{n\pm 1}(\rho)]$. Note que as Eqs. (C.25) e (C.26) podem ser obtidas a partir das Eqs. (C.23) e (C.24). Essas relações são correspondentes às Eqs. (C.8)–(C.11) para o caso esférico, Seção C.2.1.

C.3.1 Cilindro homogêneo

Nesta Seção, considere a mesma notação do Capítulo 6. Por razões computacionais, é conveniente considerarmos a derivada logarítmica [1]:

$$D_n(\rho_1) = \frac{J_n'(\rho_1)}{J_n(\rho_1)} , \quad (\text{C.27})$$

$$D_{n-1}(\rho_1) = \frac{n-1}{\rho_1} - \frac{1}{(n/\rho_1) + D_n(\rho_1)} . \quad (\text{C.28})$$

Sendo $\rho_1(r) = kr\sqrt{m^2 - \cos^2 \xi}$ e $\eta = \rho_1(a)$, as principais relações usadas no cálculo da energia eletromagnética armazenada em um cilindro magnético infinito são

$$\int_0^a r dr |J_n(\rho_1)|^2 = 2a^2 |J_n(\eta)|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\eta D_n(\eta)}{\eta^* 2 - \eta^2} \right] , \quad (\text{C.29})$$

$$\int_0^a r dr J_n^2(\rho_1) = \frac{a^2}{2} [J_n^2(\eta) - J_{n-1}(\eta)J_{n+1}(\eta)] , \quad (\text{C.30})$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dr}{r} J_\alpha(\rho_1) J_\beta(\rho_1) &= -\frac{\eta [J_{\alpha+1}(\eta)J_\beta(\eta) - J_\alpha(\eta)J_{\beta+1}(\eta)]}{\alpha^2 - \beta^2} \\ &+ \frac{J_\alpha(\eta)J_\beta(\eta)}{\alpha + \beta} \quad (\alpha \neq \beta) , \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

$$\int_0^a r dr [|J_{n-1}(\rho_1)|^2 - |J_{n+1}(\rho_1)|^2] = 2a^2 \eta \frac{|J_n(\eta)|^2}{|\eta|^2} . \quad (\text{C.32})$$

À parte diferenças de notação, as Eqs. (C.29)–(C.31) podem ser encontradas na Ref. [37]. Em particular, a Eq. (C.29), aqui expressa por meio de derivadas logarítmicas, é a mesma usada nas Refs. [24, 47].

Ainda, das relações de recorrência (C.23) a (C.26), podemos obter

$$|J_{n-1}(\rho_1)|^2 - |J_{n+1}(\rho_1)|^2 = 4n \frac{|J_n(\rho_1)|^2}{|\rho_1|^2} \operatorname{Re}[\rho_1 D_n(\rho_1)] , \quad (\text{C.33})$$

$$|J_{n-1}(\rho_1)|^2 + |J_{n+1}(\rho_1)|^2 = 2|J_n(\rho_1)|^2 \left[\frac{n^2}{|\rho_1|^2} + |D_n(\rho_1)|^2 \right] . \quad (\text{C.34})$$

Para quaisquer duas funções A e B , por meio das Eqs. (C.33) e (C.34), é possível mostrar que

$$2 \left| A J'_n(\rho) - B \frac{n J_n(\rho)}{\rho} \right|^2 + 2 \left| A \frac{n J_n(\rho)}{\rho} - B J'_n(\rho) \right|^2 = |J_{n-1}(\rho) (A - B)|^2 + |J_{n+1}(\rho) (A + B)|^2 , \quad (\text{C.35})$$

$$2 \left| A J'_n(\rho) + B \frac{n J_n(\rho)}{\rho} \right|^2 + 2 \left| A \frac{n J_n(\rho)}{\rho} - B J'_n(\rho) \right|^2 = (|A|^2 + |B|^2) [|J_{n-1}(\rho)|^2 + |J_{n+1}(\rho)|^2] - 4 \operatorname{Im}(AB^*) \operatorname{Im}[J_{n+1}(\rho) J_{n-1}(\rho^*)] . \quad (\text{C.36})$$

As Eqs. (C.35) e (C.36) são originais e aparecem no cálculo da energia eletromagnética média interna ao cilindro associada às componentes (r, ϕ) [$|E_{1r}|^2 + |E_{1\phi}|^2$] do espalhamento em incidência oblíqua. Essas equações nos permitem escrever a energia interna em função das integrais (C.29), quando $m \neq m^*$, e (C.30), quando m é real. À semelhança dos Capítulos para espalhadores simetricamente esféricos, definimos para o cilindro a função $I_n(\eta) = \int_0^a dr r |J_n(\rho_1)|^2 / a^2$, onde omitimos a dependência de I_n com relação a η^* . Nos cálculos da energia, empregamos ainda a relação $J'_0(\rho) = -J_1(\rho)$ [62].

C.3.2 Cilindros concêntricos

O cálculo da energia interna associada a dois cilindros magnéticos concêntricos (sob incidência oblíqua) é o mais complicado entre os cálculos que desenvolvemos nesta dissertação. Duas relações importantes para esse cálculo, as quais generalizam as Eqs. (C.33) e (C.34) apresentadas na Seção anterior (cilindro homogêneo), podem ser obtidas das Eqs. (C.23)–(C.26). Sem entramos nos detalhes dos cálculos, e sendo A , B , C e D quatro funções quaisquer, obte-

mos

$$\begin{aligned}
& 2 \left| An \frac{J_n(\rho)}{\rho} - BJ'_n(\rho) + Cn \frac{Y_n(\rho)}{\rho} - DY'_n(\rho) \right|^2 + 2 \left| AJ'_n(\rho) - Bn \frac{J_n(\rho)}{\rho} + CY'_n(\rho) - Dn \frac{Y_n(\rho)}{\rho} \right|^2 \\
&= |(A - B)J_{n-1}(\rho) + (C - D)Y_{n-1}(\rho)|^2 + |(A + B)J_{n+1}(\rho) + (C + D)Y_{n+1}(\rho)|^2 \\
&= |(A - B)J_{n-1}(\rho)|^2 + |(C - D)Y_{n-1}(\rho)|^2 + 2\text{Re}[(A - B)(C^* - D^*)J_{n-1}(\rho)Y_{n-1}(\rho^*)] \\
&\quad + |(A + B)J_{n+1}(\rho)|^2 + |(C + D)Y_{n+1}(\rho)|^2 + 2\text{Re}[(A + B)(C^* + D^*)J_{n+1}(\rho)Y_{n+1}(\rho^*)] , \\
\end{aligned} \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left| An \frac{J_n(\rho)}{\rho} - BJ'_n(\rho) + Cn \frac{Y_n(\rho)}{\rho} - DY'_n(\rho) \right|^2 + 2 \left| AJ'_n(\rho) + Bn \frac{J_n(\rho)}{\rho} + CY'_n(\rho) + Dn \frac{Y_n(\rho)}{\rho} \right|^2 \\
&= (|A|^2 + |B|^2) [|J_{n-1}(\rho)|^2 + |J_{n+1}(\rho)|^2] + (|C|^2 + |D|^2) [|Y_{n-1}(\rho)|^2 + |Y_{n+1}(\rho)|^2] \\
&\quad + 2\text{Re}\{(AC^* + BD^*) [J_{n-1}(\rho)Y_{n-1}(\rho^*) + J_{n+1}(\rho)Y_{n+1}(\rho^*)]\} \\
&\quad + 2\text{Re}\{(AD^* - BC^*) [J_{n-1}(\rho)Y_{n+1}(\rho^*) - J_{n+1}(\rho)Y_{n-1}(\rho^*)]\} \\
&\quad - 4\text{Im}(AB^*) \text{Im}[J_{n-1}(\rho)J_{n+1}(\rho^*)] - 4\text{Im}(CD^*) \text{Im}[Y_{n-1}(\rho)Y_{n+1}(\rho^*)] , \\
\end{aligned} \tag{C.38}$$

As quais são expressões usadas no cálculo das contribuições (r, ϕ) $[|E_{2r}|^2 + |E_{2\phi}|^2]$ para a energia interna média na camada cilíndrica concêntrica sob incidência oblíqua. Uma vez mais, nosso objetivo em determinar expressões como as Eqs. (C.37) e (C.38) está vinculado às integrações na variável radial das intensidades. Neste caso em particular, seguindo a Ref. [37] e usando a mesma notação do Capítulo 7, para $m_q \neq m_q^*$ ($q = 1; 2$), temos a integral

$$\int_{l_1}^{l_2} dr r Z_n(\rho_q) \bar{Z}_n(\rho_q^*) = \frac{r^2 [\rho_q^* Z_n(\rho_q) \bar{Z}'_n(\rho_q^*) - \rho_q Z'_n(\rho_q) \bar{Z}_n(\rho_q^*)]}{\rho_q^2 - \rho_q^{*2}} \Bigg|_{r=l_1}^{r=l_2} , \tag{C.39}$$

onde Z_n e \bar{Z}_n são funções de Bessel ou Neumann cilíndricas, e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ são os limites inferior e superior de integração. Na situação em que $m_q = m_q^*$, a Eq. (C.39) pode ser reescrita como

$$\int_{l_1}^{l_2} dr r Z_n(\rho_q) \bar{Z}_n(\rho_q) = \frac{r^2}{4} [2Z_n(\rho_q) \bar{Z}_n(\rho_q) - Z_{n-1}(\rho_q) \bar{Z}_{n+1}(\rho_q) - Z_{n+1}(\rho_q) \bar{Z}_{n-1}(\rho_q)] \Bigg|_{r=l_1}^{r=l_2} . \tag{C.40}$$

As Eqs. (C.39) e (C.40) são análogas às Eqs. (C.17) e (C.18) da Seção C.2.2, respectivamente. Para simplificarmos a notação, definimos a função $I_{q,n}^{(ZZ)}(l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} dr r Z_n(\rho_q) \bar{Z}_n(\rho_q^*) / (l_2^2 - l_1^2)$.

Referências

- [1] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. John Wiley, 1983.
- [2] H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications, 1980.
- [3] M. Kerker, *The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation*. Academic Press, 1969.
- [4] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [5] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon, 1989.
- [6] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice Hall, 1991.
- [7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 1999.
- [8] L. Tsang, J. A. Kong, and K. H. Ding, *Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications*. John Wiley, 2000.
- [9] M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*. Cambridge University Press, 2004.
- [10] M. Kerker, D. S. Wang, and C. L. Giles, “Electromagnetic scattering by magnetic spheres,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 73, pp. 765–767, 1983.
- [11] M. M. Sigalas, C. M. Soukoulis, R. Biswas, and K. M. Ho, “Effect of the magnetic permeability on photonic band gaps,” *Phys. Rev. B*, vol. 56, pp. 959–962, 1997.
- [12] P. Chen, R. X. Wu, J. Xu, A. M. Jiang, and X. Y. Ji, “Effects of magnetic anisotropy on the stop band of ferromagnetic electromagnetic band gap materials,” *J. Phys. Condens. Matter*, vol. 19, p. 106205, 1997.
- [13] M. I. Mishchenko and A. A. Lacis, “Manifestations of morphology-dependent resonances in mie scattering matrices,” *Appl. Math. and Comp.*, vol. 116, pp. 167–179, 2000.
- [14] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, “Multiple scattering of electromagnetic waves in disordered magnetic media: localization parameter, energy transport velocity and diffusion constant,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 31, no. 1, pp. 65–70, 2001.
- [15] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, “Electromagnetic scattering by small magnetic particles,” *J. Magnet. Mag. Mat.*, vol. 226-230, pp. 1951–1953, 2001.
- [16] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, “Vanishing of energy transport and diffusion constant of electromagnetic waves in disordered magnetic media,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 5563–5566, 2000.

- [17] F. A. Pinheiro, A. S. Martinez, and L. C. Sampaio, “New effects in light scattering in disordered media and coherent backscattering cone: system of magnetic particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, no. 7, pp. 1435–1438, 2000.
- [18] T. J. Arruda and A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within magnetic spheres,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, pp. 992–1001, 2010.
- [19] T. J. Arruda and A. S. Martinez, “Electromagnetic energy within a magnetic infinite cylinder and scattering properties for oblique incidence,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, p. 1679, 2010.
- [20] Z. F. Lin and S. T. Chui, “Electromagnetic scattering by optically anisotropic magnetic particles,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 056614, 2004.
- [21] Z. F. Lin and S. T. Chui, “Manipulating electromagnetic radiation with magnetic photonic crystals,” *Opt. Lett.*, vol. 32, pp. 2288–2290, 2007.
- [22] S. Liu, J. Du, Z. Lin, R. X. Wu, and S. T. Chui, “Formation of robust and completely tunable resonant photonic band gaps,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 155101, 2008.
- [23] R.-J. Tarento, K.-H. Bennemann, P. Joyes, and J. V. de Walle, “Mie scattering of magnetic spheres,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 026606, 2004.
- [24] A. Bott and W. Zdunkowski, “Electromagnetic energy within dielectric spheres,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, no. 8, pp. 1361–1365, 1987.
- [25] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, 1984.
- [26] D. Deirmendjian, *Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions*. Elsevier, 1969.
- [27] P. W. Barber, *Light Scattering by Particles: Computational Methods*. World Scientific, 1990.
- [28] L. Rayleigh, “On the light from the sky, its polarization and color,” *Philos. Mag.*, vol. 41, pp. 107–120, 274–279, 1871.
- [29] L. Rayleigh, “On the scattering of light by small particles,” *Philos. Mag.*, vol. 41, p. 447–454, 1871.
- [30] J. C. Maxwell-Garnett, “Colours in metal glasses and in metallic films,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 203, p. 385–420, 1904.
- [31] G. Mie, “Beiträge zur optik trüber medien speziell kolloidaler goldlösungen (contributions to the optics of diffuse media, especially colloid metal solutions),” *Ann. Phys.*, vol. 25, p. 377–445, 1908.
- [32] P. Debye, “Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material (light pressure on spheres of arbitrary material),” *Ann. Phys.*, vol. 30, p. 57–136, 1909.
- [33] L. V. Lorenz, “Lysbevaegelsen i og uden for en af plane lysbolger belyst kugle (upon the reflection and refraction of plane light waves by a transparent sphere),” *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, vol. 6, p. 1–62, 1890.

- [34] M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, and L. D. Travis, eds., *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications*. Academic Press, 2000.
- [35] H. M. Nussenzveig, “High-frequency scattering by a transparent sphere. i. direct reflection and transmission,” *J. Math. Phys.*, vol. 10, no. 1, pp. 82–124, 1969.
- [36] H. M. Nussenzveig, “High-frequency scattering by a transparent sphere. ii. theory of the rainbow and the glory,” *J. Math. Phys.*, vol. 10, no. 1, pp. 125–176, 1969.
- [37] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Mathematical Library, 1958.
- [38] M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, “Speed of propagation of classical waves in strongly scattering media,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, no. 24, pp. 3132–3135, 1991.
- [39] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, M. P. van Albada, and A. Tip, “Speed of light in random media,” *Phys. Rev. B*, vol. 45, pp. 12233–12243, 1992.
- [40] A. L. Aden and M. Kerker, “Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres,” *J. Appl. Phys.*, vol. 22, pp. 1242–1246, 1951.
- [41] H. Suzuki and I.-Y. S. Lee, “Calculation of the mie scattering field inside and outside a coated spherical particle,” *International Journal of Physical Sciences*, vol. 3, pp. 38–41, 2008.
- [42] C. F. Bohren, “Light scattering by an optically active sphere,” *Chem. Phys. Lett.*, vol. 29, no. 3, pp. 458–462, 1974.
- [43] C. F. Bohren, “Scattering of electromagnetic waves by an optically active cylinder,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 66, no. 1, pp. 105–109, 1978.
- [44] L. Rayleigh, “On the electromagnetic theory of light,” *Philos. Mag.*, vol. 12, p. 81–101, 1881.
- [45] L. Rayleigh, “The dispersal of light by a dielectric cylinder,” *Philos. Mag.*, vol. 36, pp. 365–376, 1918.
- [46] J. R. Wait, “Scattering of a plane wave from a circular dielectric cylinder at oblique incidence,” *Can. J. Phys.*, vol. 33, pp. 189–195, 1955.
- [47] R. Ruppin, “Electromagnetic energy inside an irradiated cylinder,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, pp. 1891–1895, 1998.
- [48] R. Ruppin, “Electromagnetic energy density in a dispersive and absorptive material,” *Phys. Lett. A*, vol. 299, p. 309–312, 2002.
- [49] J. F. Owen, R. K. Chang, and P. W. Barber, “Internal electric field distributions of a dielectric cylinder at resonance wavelengths,” *Opt. Lett.*, vol. 6, pp. 540–542, 1981.
- [50] P. Chylek, J. D. Pendleton, and R. G. Pinnick, “Internal and near-surface scattered field of a spherical particle at resonant conditions,” *Appl. Opt.*, vol. 24, pp. 3940–3942, 1985.

- [51] K. Busch, C. M. Soukoulis, and E. N. Economou, “Transport velocity in two-dimensional random media,” *Phys. Rev. B*, vol. 52, pp. 10834–10840, 1995.
- [52] L. C. Botten, N.-A. P. Nicorovici, A. A. Asatryan, R. C. McPhedran, C. M. de Sterke, and P. A. Robinson, “Formulation for electromagnetic scattering and propagation through grating stacks of metallic and dielectric cylinders for photonic crystal calculations. part i. method,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 17, pp. 2165–2176, 2000.
- [53] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, “Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices,” *Nature*, vol. 446, pp. 52–55, 2007.
- [54] M. Kerker and E. Mtaijevic, “Scattering of electromagnetic waves from concentric infinite cylinders,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 51, pp. 506–508, 1961.
- [55] R. Loudon, “The propagation of electromagnetic energy through an absorbing dielectric,” *J. Phys. A: Gen. Phys.*, vol. 3, pp. 233–245, 1970.
- [56] D. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187, 2000.
- [57] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ,” *Sov. Phys. Usp.*, vol. 10(4), p. 509–514, 1968.
- [58] V. Veselago, L. Braginsky, V. Shklover, and C. Hafner, “Negative refractive index materials,” *J. Comput. Theor. Nanosci.*, vol. 3, no. 2, pp. 1–30, 2006.
- [59] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969, 2000.
- [60] L. Gao and Y. Huang, “Extinction properties of a coated sphere containing a left-handed material,” *Optics Communications*, vol. 239, p. 25–31, 2004.
- [61] R. Ruppin, “Extinction properties of a sphere with negative permittivity,” *Solid State Communications*, vol. 116, p. 411–415, 2000.
- [62] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Essentials of Math Methods for Physicists*. Academic Press, 2003.
- [63] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1970.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)