

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO COPPEAD DE ADMINISTRAÇÃO

Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa

**Controle Multidimensional em Simulação Monte Carlo: Propostas para a
Combinação da Amostragem Descritiva com Técnicas Quasi-Monte Carlo em
Problemas de Apreçamento de Opções**

Rio de Janeiro
Mai de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa

**Controle Multidimensional em Simulação Monte Carlo: Propostas para a
Combinação da Amostragem Descritiva com Técnicas Quasi-Monte Carlo em
Problemas de Apreçamento de Opções**

**Tese de Doutorado submetida ao
Instituto COPPEAD de Administração,
Universidade Federal do Rio de
Janeiro, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do grau de
Doutor em Administração.**

Orientador: Prof. Eduardo Saliby, Ph.D.

Rio de Janeiro

Mai de 2008

Gouvêa, Sergio Luiz Medeiros Proença de.

Controle Multidimensional em Simulação Monte Carlo: Propostas para a Combinação da Amostragem Descritiva com Técnicas Quasi-Monte Carlo em Problemas de Apreçamento de Opções / Sergio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa. Rio de Janeiro, 2008.

ix, 224 f.: il.

Tese (Doutorado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto COPPEAD de Administração, 2008.

Orientador: Eduardo Saliby

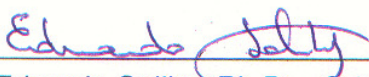
1. Simulação Monte Carlo. 2. Amostragem Descritiva. 3. Quasi-Monte Carlo. 4. Controle Multivariado. 5. Administração – Teses. I. Saliby, Eduardo (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto COPPEAD de Administração. III. Título.

**CONTROLE MULTIDIMENSIONAL EM SIMULAÇÃO MONTE
CARLO: PROPOSTAS PARA A COMBINAÇÃO DA
AMOSTRAGEM DESCRITIVA COM TÉCNICAS QUASI-MONTE
CARLO EM PROBLEMAS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES**

Sérgio Luiz Medeiros Proença de Gouvêa

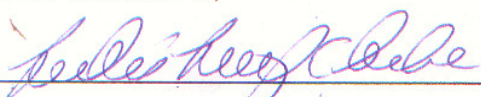
Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora do Instituto COPPEAD de Administração, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Administração.

Aprovada por:

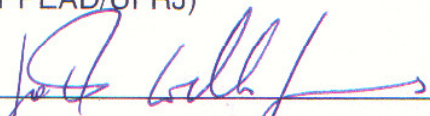


Prof. Eduardo Saliby, Ph.D. – Orientador
(COPPEAD/UFRJ)


Presidente da Banca




Prof. André Luiz Carvalho da Silva, D.Sc.
(COPPEAD/UFRJ)



Prof. Gastão Coelho Gomes, D.Sc.
(IM/UFRJ)



Prof. Octávio Manuel Bessada Lion, D.Sc.
(Banco Central do Brasil)



Prof^a Jaqueline Terra Moura Marins, D.Sc.
(Banco Central do Brasil)

Rio de Janeiro
2008

A minha filha, Luciana: começo, meio e fim.

Agradecimentos

À minha família, pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador.

Ao corpo de funcionários e docentes do Coppead, por toda ajuda prestada.

Aos colegas de curso, pela troca de experiências.

Ao Banco Central do Brasil, pelo apoio prestado pelo programa de pós-graduação.

Aos colegas do Deban, pelo apoio na reta final.

Resumo

GOUVÊA, Sergio Luiz Medeiros Proença de. **Controle Multidimensional em Simulação Monte Carlo: Propostas para a Combinação da Amostragem Descritiva com Técnicas Quasi-Monte Carlo em Problemas de Apreçamento de Opções**. Rio de Janeiro, 2008. Tese de Doutorado em Administração – Instituto COPPEAD de Administração, 2008.

As técnicas de redução de variância de estimativas Monte Carlo compõem uma importante área de estudo de pesquisa operacional por permitir a obtenção de estimativas precisas em menor tempo. Dentre as diversas técnicas existentes, encontram-se a Amostragem Descritiva e o Quasi-Monte Carlo. Ambas propõem conjuntos de pontos mais eficientes que os gerados pela Amostragem Aleatória Simples, tradicionalmente utilizada em simulação Monte Carlo. Contudo, enquanto os conjuntos utilizados na Amostragem Descritiva priorizam a representação das distribuições unidimensionais, mas carecem de controle multidimensional, os métodos Quasi-Monte Carlo exercem controle multidimensional, mas não utilizam a melhor representação unidimensional. O método ideal seria um que utilizasse a melhor representação unidimensional e, ao mesmo tempo, exercesse controle multidimensional. Nesta tese são propostas alternativas para controle multidimensional da Amostragem Descritiva, assim como uma implementação de Quasi-Monte Carlo que emula a Amostragem Descritiva, reproduzindo sua superioridade unidimensional. Para a avaliação das propostas, foram utilizadas opções européia, asiática e asiática modelada com ponte browniana. Dentre as técnicas propostas, apenas uma não resultou em alguma melhoria em relação à Amostragem Descritiva e duas apresentaram melhorias em relação ao Quasi-Monte Carlo.

Abstract

GOUVÊA, Sergio Luiz Medeiros Proença de. **Controle Multidimensional em Simulação Monte Carlo: Propostas para a Combinação da Amostragem Descritiva com Técnicas Quasi-Monte Carlo em Problemas de Apreçamento de Opções**. Rio de Janeiro, 2008. Tese de Doutorado em Administração – Instituto COPPEAD de Administração, 2008.

Variance reduction techniques of Monte Carlo estimates is an important area of operations research because it allows for precise estimates in shorter times. Among several existing techniques, there is Descriptive Sampling and Quasi-Monte Carlo. Both propose more efficient point set than those generated by Simple Random Sampling, traditionally used with Monte Carlo simulation. However, while the point sets used in Descriptive Sampling prioritize the unidimensional distributions, but lack multidimensional control, Quasi-Monte Carlo methods apply multidimensional control but do not produce the best unidimensional representations. The ideal method would be one that used the best unidimensional representation while applying, at the same time, multidimensional control. This thesis proposes different alternatives for multidimensional control in Descriptive Sampling, as well as an implementation of Quasi-Monte Carlo that emulates Descriptive Sampling and reproduces its unidimensional superiority. These proposals were evaluated with European options, Asian options and Asian options modeled with Brownian bridge. Among the proposed techniques, only one did not result in some improvement over traditional Descriptive Sampling and two of them resulted in improvement over Quasi-Monte Carlo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo	7
1.2 Delimitação.....	8
1.3 Organização	10
2 MÉTODO MONTE CARLO	12
2.1 Modelagem e Monte Carlo	12
2.2 Descrição do Método Monte Carlo	13
2.3 Erro das Estimativas e Convergência	15
2.4 Exemplo Numérico	16
3 AMOSTRAGEM DESCRITIVA	21
4 QUASI-MONTE CARLO.....	27
4.1 Conceitos	28
4.1.1 Discrepância.....	28
4.1.2 Importância Relativa das Variáveis de um Modelo e sua Dimensão Efetiva	33
4.1.3 Randomização	38
4.2 Richtmyer	39
4.3 Halton e Hammersley	44
4.4 Sobol'	49
4.5 Outras Construções Quase-Monte Carlo	58
4.5.1 Faure	58
4.5.2 Lattice.....	60
4.A1 Apêndice: Análise Preliminar da Seqüência de Richtmyer	62
4.A2 Apêndice: Construção e Características de Seqüências de Sobol'	68

5 MODELOS FINANCEIROS AVALIADOS.....	90
5.1 Opções de Compra Tipo Européia	90
5.2 Opções de Compra Tipo Asiática (trajetórias geradas por incrementos)	94
5.3 Construção de Trajetórias com a Técnica da Ponte Browniana.....	97
6 TÉCNICAS PROPOSTAS	106
6.1 AD com Richtmyer	108
6.2 AD Bipartida	110
6.3 AD Bidimensional	118
6.4 Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	126
6.5 Avaliação de importância relativa entre as dimensões.....	128
6.A1 Apêndice: Construção Eficiente da AD Bidimensional.....	132
7 DESCRIÇÃO DOS EXPERIMENTOS.....	133
7.1 Experimento 1: Avaliação do método de identificação da hierarquia	136
7.2 Experimento 2: Estimativa de prêmio e probabilidade de exercício de opções europeias.....	137
7.3 Experimento 3: Estimativa de prêmio de opções asiáticas com trajetórias geradas pelo método incremental	139
7.4 Experimento 4: Estimativa de prêmio de opções asiáticas com trajetórias geradas pelo método da ponte browniana	140
8 Resultados dos Experimentos.....	141
8.1 Resultados do Experimento 1: Avaliação do método simplificado de identificação da hierarquia	141
8.2 Resultados do Experimento 2: Estimativa de prêmio e probabilidade de exercício de opções europeias	152
8.3 Resumo dos Resultados do Experimento 3	187

8.4 Resumo dos Resultados do Experimento 4	192
8.5 Análise Conjunta dos Resultados dos Experimentos	198
8.A1 Apêndice: Erros Padrões obtidos nos apreçamentos do Experimento 2	207
9 Conclusão	216
Anexos	221
Anexo 1: <i>Script</i> para gerar Amostragem Descritiva (<i>Descriptive Sampling</i>).....	222
Anexo 2: <i>Script</i> para gerar Richtmyer <i>randomizado</i> (<i>randomized Richtmyer</i>).....	223
Anexo 3: <i>Script</i> para gerar Sobol' <i>randomizado</i> (<i>randomized Sobol'</i>).....	224
Anexo 4: <i>Script</i> para gerar números direcionais iniciais para Sobol' (initial directional numbers for <i>Sobol'</i>).....	226
Anexo 5: <i>Script</i> para gerar Amostragem Descritiva ordenada por Richtmyer <i>randomizado</i> (<i>Descriptive Sampling ordered by randomized Richtmyer</i>).....	227
Anexo 6: <i>Script</i> para gerar Amostragem Descritiva Bipartida (<i>Splited Descriptive Sampling</i>)	228
Anexo 7: <i>Script</i> para gerar Sobol' com <i>randomização</i> discreta (<i>Sobol' with discrete randomization</i>).....	229
Anexo 8: <i>Script</i> para gerar Amostragem Descritiva Bidimensional ordenada por Amostragem Descritiva Bipartida (<i>Bidimensional Descriptive Sampling ordered by Splited Descriptive Sampling</i>).....	231
Anexo 9: <i>Script</i> para gerar Amostragem Descritiva Bidimensional ordenada por Sobol' com <i>randomização</i> discreta (<i>Bidimensional Descriptive Sampling ordered by Sobol' with discrete randomization</i>).....	233
Referências	235

1 INTRODUÇÃO

O método Monte Carlo foi proposto na década de 40, pela equipe do projeto Manhattan que desenvolveu a bomba atômica, como uma forma de estimar soluções para integrais multivariadas de difícil solução (Jäckel, 2002). Embora a solução de integrais seja tipicamente uma aplicação de natureza determinística, o método é fortemente associado e utilizado na solução de problemas estocásticos, como os que são encontrados em finanças. De forma geral, o método Monte Carlo é indicado em situações em que a obtenção de solução analítica não seja possível, ou fácil.

Como ferramenta, o método Monte Carlo é uma alternativa que, freqüentemente, apresenta desempenho superior a outros métodos numéricos, especialmente em problemas com grande número de variáveis. No caso particular de finanças, ele constitui uma ferramenta útil, por possibilitar o uso de premissas mais realistas nas modelagens dos problemas. Isso permite abandonar algumas premissas excessivamente simplificadoras que, por vezes, são adotadas nas modelagens a fim de permitir a obtenção de fórmulas analíticas. Dessa forma, o método Monte Carlo possibilita a utilização de modelos mais complexos e próximos da realidade.

Resumidamente, o método consiste em gerar uma amostra (de tamanho N) de resultados possíveis de uma situação previamente modelada por uma função matemática e, a partir desta amostra, estimar algum parâmetro da distribuição de resultados possíveis. Cada uma das N observações da amostra é obtida a partir de uma observação de um vetor aleatório. A dimensão (d) desse vetor é uma característica da modelagem do problema em questão, sendo o caso mais simples, o de $d = 1$. As coordenadas do vetor representam as diversas variáveis

probabilísticas do problema. Por exemplo, a primeira coordenada poderia representar “quantidade de vendas”, a segunda coordenada poderia representar “valor médio por venda”, e assim por diante. Usualmente, os valores dessas variáveis são obtidos pela técnica da função inversa, partindo de um número aleatório no intervalo $(0, 1)$, e aplicando a função inversa da probabilidade acumulada. No caso unidimensional ($d = 1$), isso equivale a transformar um conjunto de pontos distribuídos uniformemente em $(0, 1)$ em pontos distribuídos segundo a distribuição especificada pelo modelo.

No caso do problema ter duas variáveis, pode-se pensar na técnica da função inversa como uma transformação que leva pontos - ou vetores – aleatórios em um quadrado unitário¹ à distribuição bivariada sendo modelada. Como as modelagens Monte Carlo costumam usar muitas variáveis aleatórias, pode-se pensar numa transformação de vetores aleatórios em um hiper-cubo unitário d -dimensional - representado por $(0, 1)^d$ – em uma distribuição d -variada, definida em \mathbb{R}^d , onde d é a quantidade de variáveis aleatórias do modelo.

Como ocorre com qualquer método numérico, uma preocupação predominante relacionada ao método Monte Carlo é quanto à precisão das estimativas obtidas e o erro associado às mesmas. No entanto, diferentemente de outros métodos numéricos, no caso do Monte Carlo, a estimativa – e, portanto, o erro – se comporta como variável aleatória, não sendo possível definir limites. Contudo, se for assumido que o modelo usado gera estimativas não tendenciosas, é possível mensurar a incerteza associada às estimativas pelo seu desvio padrão ou, equivalentemente, por sua variância. Por sua vez, a variância da estimativa pode ser estimada pela

¹ O termo quadrado unitário se refere ao quadrado situado no primeiro quadrante, que tem um vértice na origem e os lados iguais a um. Trata-se do produto cartesiano de duas distribuições $(0, 1)$. No caso de três distribuições $(0, 1)$, o produto cartesiano é representado por um cubo unitário, e para d distribuições, a representação é dada pelo hiper cubo unitário d -dimensional.

variância amostral, calculada com base em uma amostra de estimativas para o mesmo problema.

A forma mais simples de reduzir a variância e melhorar a precisão das estimativas é, simplesmente, aumentar o tamanho das amostras usadas. No Monte Carlo tradicional, a relação entre o desvio padrão - ou erro – e tamanho da amostra é dada por

$$EP = CN^{-1/2}, \quad 1.1$$

onde C é uma constante, e diz-se que a convergência do erro é da ordem $O(N^{-1/2})$. Isso implica que, para reduzir erro padrão pela metade é necessário quadruplicar N. Obviamente, aumentar o tamanho da amostra pode acarretar em sérios problemas de tempo de processamento e/ou de custo de *hardware*.

Conseqüentemente, uma importante linha de pesquisa na área do método Monte Carlo tem como objetivo reduzir a variância das estimativas sem aumentar o tamanho das amostras. Embora, em geral, todas essas técnicas sejam conhecidas como técnicas de redução de variância, é possível fazer uma diferenciação entre as diversas técnicas existentes, classificando-as em duas abordagens distintas a partir da forma pela a qual os pontos no hiper-cubo unitário são gerados inicialmente. Na primeira abordagem, não há controle na forma em que os pontos são gerados no hiper-cubo unitário enquanto que, a segunda abordagem visa justamente controlar a forma em que os pontos são gerados no hiper-cubo unitário. As duas abordagens podem ser combinadas, potencializando o efeito de redução da variância das técnicas.

A primeira abordagem consiste em se partir de um conjunto de pontos gerados no hiper-cubo unitário, sem que haja preocupação com a forma pela qual esse conjunto é gerado, sendo que, normalmente, utiliza-se o gerador de números

aleatórios. A partir deste conjunto inicial, algumas técnicas implicam na redefinição do conjunto. São exemplos deste caso o uso de variáveis antitéticas e algumas formas de implementação da amostragem por importância. Já em outras técnicas, o conjunto inicial de pontos é aplicado em uma modelagem alterada do problema; alguns exemplos destas técnicas são: ponte browniana, variável de controle e algumas outras formas de implementação da amostragem por importância.

A segunda abordagem consiste em controlar o próprio processo de geração do conjunto inicial de pontos utilizando uma das muitas técnicas de geração de pontos no hiper-cubo unitário que visam obter uma distribuição mais homogênea quando comparado aos conjuntos obtidos de forma totalmente aleatória. Uma grande parte destas técnicas é classificada como Quasi-Monte Carlo², mas há também o Hiper-Cubo Latino e a Amostragem Descritiva. O potencial de redução de variância destas técnicas em relação ao uso de amostragem aleatória simples (na qual os pontos são selecionados com o uso de gerador de números aleatórios³) é comprovado em diversos estudos, incluindo estudos aplicados a problemas em finanças. Esses ganhos podem ser observados tanto para algum valor fixo do tamanho da amostra, quanto na ordem de convergência do desvio padrão.

No caso dos métodos Quasi-Monte Carlo, o melhor desempenho em relação à amostragem aleatória simples resulta da melhor distribuição do conjunto de pontos no hiper-cubo. Ressalta-se que, o que é chamado de Quasi-Monte Carlo na verdade engloba uma variedade de técnicas diferentes para a geração de pontos em um hiper-cubo unitário. Nesta tese, a atenção está voltada para algumas técnicas

² Rigorosamente falando, Quasi-Monte Carlo não pode ser classificado como Monte Carlo. Um dos motivos é que os resultados obtidos são determinísticos e não apresentam variabilidade no sentido descrito para Monte Carlo. No entanto, é possível considerar o Quasi-Monte Carlo Randomizado como uma forma de Monte Carlo, e proceder de forma igual no que tange a estimação de variância.

³ Os geradores de números aleatórios dos sistemas de computação são algoritmos que geram seqüências determinísticas e cíclicas. Porém, estas seqüências têm características e comprimento de ciclo que permitem que os números sejam tratados e usados como números aleatórios. O mais correto, no entanto, é chamá-los de pseudo-aleatórios.

Quasi-Monte Carlo chamadas de seqüências de baixa discrepância, que são seqüências de pontos multidimensionais no intervalo $[0, 1)^d$. Cada uma dessas seqüências utiliza esquema próprio para controlar a distribuição dos pontos que, idealmente, devem forçar que cada dimensão seja preenchida da maneira mais uniforme possível e, ao mesmo tempo, que a distribuição multivariada também seja uniforme. Na prática, o controle multivariado em seqüências de baixa discrepância se dá pela relação entre as seqüências unidimensionais de preenchimento de cada coordenada tomada individualmente. É importante ressaltar que a eficácia dos controles multivariados é maior para poucas dimensões, já que o controle perfeito para um número grande de dimensões exigiria tamanhos de amostra impraticáveis. Devido aos métodos de controle utilizados, observa-se ainda que as dimensões das seqüências apresentam uma hierarquia de qualidade. Essa hierarquia se dá no sentido de as dimensões de ordem mais baixa terem, em geral, um controle multidimensional - e as vezes unidimensional também - melhor que as de ordem mais elevadas. Isso possibilita programar o modelo de forma que as variáveis mais importantes sejam geradas pelas dimensões mais controladas.

Já no caso da Amostragem Descritiva sua eficácia na redução de variância resulta apenas do controle unidimensional, ou seja, as distribuições marginais são bem controladas, representando bem as premissas de distribuições da modelagem. Por exemplo, se o modelo especifica que uma variável determinada segue uma distribuição normal, a Amostragem Descritiva garante que essa variável convirja rapidamente para uma normal. De fato, o conjunto de pontos utilizados pela Amostragem Descritiva é o de maior uniformidade unidimensional possível para um tamanho de amostra dado. No entanto, a Amostragem Descritiva carece de

mecanismo de controle multidimensional, resultando em menor convergência para as distribuições conjuntas.

Uma segunda e importante característica da Amostragem Descritiva é que essa técnica permite que as variáveis unidimensionais sejam calculadas apenas uma vez, independente do tamanho da amostra de estimativas usada para avaliar a variância. Por exemplo, se forem geradas 30 estimativas, cada uma a partir de uma amostra de $N = 10\,000$ resultados, o uso da Amostragem Descritiva possibilita que cada variável da modelagem só precise ser calculada (pela função inversa da probabilidade acumulada) 10 000 vezes. Isso proporciona uma grande economia de esforço computacional, visto que, as demais técnicas requerem que a função inversa seja calculada 300 000 vezes.

Conforme exposto acima, tanto a Amostragem Descritiva como o Quasi-Monte Carlo fazem parte dos esforços que visam melhorar a eficiência do método Monte Carlo. Neste contexto, a presente tese oferece como principal contribuição um conjunto de propostas que pretendem se unir a estas e, ao mesmo tempo, serem alternativas mais eficientes que as formas tradicionais da Amostragem Descritiva e do Quasi-Monte Carlo. A fim de auxiliar na avaliação dessas propostas, também foi pesquisado na literatura um método simples de identificação das variáveis importantes de um modelo, o que, por sua vez, permite um melhor uso das técnicas de controle multivariado. Este método foi avaliado com modelos financeiros típicos e, apesar das restrições existentes na literatura, foi considerado útil se usado com alguns cuidados, o que habilita seu uso para aplicações práticas. Outra contribuição pretendida (ainda que modesta) é oferecer textos mais acessíveis e abrangentes para serem utilizados como primeira leitura por quem for desenvolver trabalhos – teóricos ou práticos – utilizando Sobol' ou ponte browniana.

A importância da obtenção de maior eficiência em simulação numérica está associada ao fato de algumas aplicações terem o tempo e a precisão das estimativas como fatores críticos, sendo necessário obter um determinado nível mínimo de precisão em um limite máximo de tempo. Isso ocorre, por exemplo, quando é necessário apreçar derivativos em tempo real, como é o caso de sistemas de monitoramento eletrônico de mercados de derivativos com vistas a encontrar oportunidades de negócios. Como são muitos ativos e os preços mudam dinamicamente, é necessário que o apreçamento seja realizado dentro de um limite máximo de tempo e ainda preserve um nível mínimo de precisão. Contudo, os problemas de tempo e de precisão podem ser agravados quando o uso de modelagem mais sofisticada resulta num aumento significativo da dimensionalidade. Desta forma, dispor de técnicas que aumentem a eficiência computacional pode ser um fator crítico de sucesso.

1.1 Objetivo

O objetivo principal desta tese é propor e avaliar alternativas que agreguem algum controle multidimensional à técnica da Amostragem Descritiva, melhorando a representação da distribuição conjunta da mesma a partir da tentativa de incorporação de características do Quasi-Monte Carlo e da combinação da Amostragem Descritiva com Quasi-Monte Carlo. O trabalho visa também três objetivos secundários. Primeiro, que os controles multivariados atribuam alguma hierarquia, facilmente identificável, às dimensões geradas no hiper-cubo unitário, de forma que seja possível atribuir as dimensões mais controladas do conjunto de pontos gerados em $(0, 1)^d$ às variáveis mais importantes do modelo. Isto é, deseje-se que a técnica de controle multivariado seja de tal forma, que exerça um controle

maior para algumas dimensões facilmente identificáveis, por exemplo, as de ordem mais baixas. O segundo objetivo secundário se refere à pesquisa na literatura e/ou à adaptação de maneiras de identificar quais são as dimensões mais importantes de um modelo. Finalmente, será avaliada a possibilidade de aproveitar alguma(s) característica(s) da Amostragem Descritiva para melhorar o uso do Quasi-Monte Carlo.

1.2 Delimitação

A avaliação das alternativas propostas será feita pela comparação da variância e convergência das estimativas. Para tal, serão utilizados alguns problemas de finanças usualmente encontrados em pesquisa na área de simulação com intuito de comparação de técnicas de redução de variância. Estes problemas são o apreçamento e o cálculo da probabilidade de exercício de opções modeladas com a hipótese simplificadora do preço do ativo seguindo o modelo geométrico browniano. Especificamente, serão estimados preços e probabilidades de exercícios de opções europeias com trajetórias geradas por incrementos e os preços de opções asiáticas modeladas tanto com trajetórias geradas por incrementos, como com o uso da técnica da ponte browniana. Além destes problemas serem utilizados freqüentemente em trabalhos na área de simulação para comparação de diferentes técnicas, sua seleção se justifica em função e suas características, que os tornam particularmente úteis para comparar e avaliar o controle multidimensional em Monte Carlo.

Dentre as características dos problemas que serão utilizados para avaliação das técnicas propostas, as principais são a possibilidade de aumentos de dimensionalidade e as diferentes estruturas de hierarquia. O uso de opção europeia

permite o aumento indefinido da dimensionalidade do modelo sem alterar o problema propriamente dito, o que facilita avaliar o comportamento da técnica em função da dimensionalidade. Além disso, a opção europeia possui fórmula analítica para os dois parâmetros a serem estimados: preço e probabilidade de exercício. Isto permite avaliar melhor a eficácia dos métodos propostos na estimação de dois parâmetros de grande interesse na área de finanças: o valor esperado (utilizado em apreçamento) e quantil (utilizado em cálculo de VaR). Por outro lado, enquanto que, nos modelos de opção europeia com trajetórias geradas por incrementos todas as dimensões têm a mesma importância, na modelagem de opção asiática usando trajetórias geradas por incrementos, a importância das dimensões decai gradativamente com o avanço do tempo, isto é, há uma hierarquia entre as variáveis. Já no caso de opções asiáticas modeladas com ponte browniana, a hierarquia é ainda mais acentuada. A presença de estrutura hierárquica conhecida permite avaliar não apenas o método para identificar quais as dimensões mais relevantes, mas também como as técnicas amostrais existentes e as propostas se comportam diante de diferentes relações de hierarquia.

Cabe notar que, embora o tempo de processamento seja a variável que, efetivamente, se deseje reduzir, será seguida a linha de diversos outros estudos na área, que não usam o tempo como medida de avaliação, pois isso envolveria técnicas de engenharia de *software* fora do escopo desta tese. Por exemplo, embora as rotinas de geração de números aleatórios sejam bastante complexas, elas são nativas às linguagens de programação e, portanto, muito mais rápidas que a geração de outros valores via programação. Existem também questões relativas ao *hardware* como, por exemplo, a relação entre velocidade do processador e o tamanho da memória *cache* do processador, que também podem fazer com que

uma ou outra forma de programar uma técnica seja mais rápida. Um exemplo marcante da dificuldade de usar o tempo de processamento como critério foi encontrado ao longo deste trabalho: a *randomização* de uma matriz poderia ser programada usando repetição da operação de soma módulo 1 linha a linha ou coluna a coluna. No primeiro caso, uma matriz com tamanho 65536 x 100 levou, aproximadamente, 7,8 minutos para ser *randomizada*, ao passo que, no segundo, esse tempo foi reduzido para 0,6 segundo.

1.3 Organização

A presente tese inicia com a apresentação do método Monte Carlo e da Amostragem Descritiva. Em seguida, são apresentados alguns conceitos de Quasi-Monte Carlo e algumas seqüências de baixa discrepância, juntamente com análises das estruturas e das características das mesmas. Em seguida são apresentados os modelos de simulação utilizados nos experimentos. Com base nas análises da dinâmica das seqüências e das características da Amostragem Descritiva, são propostas novas técnicas de amostragem multidimensional, que serão testadas usando os modelos de simulação apresentados. Também é testada uma técnica empírica – levantada na bibliografia – para a identificação da hierarquia entre as variáveis de um modelo e avaliado se esta técnica é adequada aos problemas de simulação utilizados para teste das técnicas amostrais. No que toca a organização dos capítulos, o restante deste texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 e no Capítulo 3 são feitas revisões das técnicas de Monte Carlo e de Amostragem Descritiva respectivamente; o Capítulo 4 revê alguns conceitos relacionados a Quasi-Monte Carlo e descreve e explora as características de algumas de suas seqüências mais tradicionais; o Capítulo 5 apresenta os modelos a

serem testados; no Capítulo 6 são apresentadas e explicadas as técnicas propostas para amostragem assim como a técnica simplificada para identificação das variáveis importantes; o Capítulo 7 e o Capítulo 8 são dedicados à apresentação dos experimentos de avaliação e análise dos resultados dos mesmos, respectivamente; e, finalmente, no Capítulo 9 é feita uma conclusão dos trabalhos desenvolvidos para a tese.

2 MÉTODO MONTE CARLO

2.1 Modelagem e Monte Carlo

Dado um fenômeno qualquer, se for possível representar algum aspecto deste, através de um modelo matemático, esta modelagem será, em geral, uma função $R^d \rightarrow R$. Uma vez especificada a função que modela o fenômeno, é possível abandonar – temporariamente - o fenômeno em si e concentrar a atenção no modelo. Um exemplo de função de um modelo matemático é a função para o valor de uma opção de compra do tipo européia no momento de seu vencimento, dada por

$$\text{VALOR} = \text{máximo}(0, X - K), \quad 2.1.1$$

onde X é o preço, no instante do vencimento, do ativo objeto do contrato de opção e K é o preço de exercício da opção contratada. Dependendo da forma que a variável X for tratada, esta função especificará um modelo determinístico ou estocástico. Caso, a variável de entrada, X , seja fixada em um ou mais valores a fim de se verificar o resultado da variável VALOR , o modelo é dito determinístico. Este é o caso de, por exemplo, análises de cenários. Por outro lado, o modelo será classificado como estocástico, se for assumido que X é uma variável aleatória cujo valor – desconhecido - segue uma distribuição conhecida ou pressuposta, por exemplo, a distribuição log-normal.

A implicação direta de X ser uma variável aleatória é que VALOR também o será, embora, a princípio, sua distribuição não seja conhecida. Mesmo não conhecendo a distribuição de VALOR , é possível gerar uma amostra de observações para X e usá-la para obter uma amostra de observações para VALOR , com a qual será possível fazer inferências sobre sua verdadeira distribuição. Cabe notar

também, que a modelagem para VALOR é estática no tempo, isto é, não está se modelando a trajetória de VALOR ao longo do tempo, mas simplesmente em um momento específico. O método Monte Carlo é uma ferramenta numérica para a analisar modelos matemáticos estáticos ou dinâmicos, além disso, como na maioria das aplicações de interesse em finanças, uma ou mais variáveis do modelo são desconhecidas, mas seguem distribuições especificadas (Banks, Carlson e Nelson, 1996).

2.2 Descrição do Método Monte Carlo

Generalizando o exemplo da seção anterior, o método Monte Carlo consiste em gerar uma amostra de resultados (de tamanho N) para uma função $Y = G(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_d)$, onde x_k são as variáveis aleatórias de entrada, com distribuições definidas pelo modelo⁴, e estimar um parâmetro para Y , tipicamente, a média. Para obter uma amostra com N valores de Y , é necessário gerar N conjuntos de valores para $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_d$ segundo as distribuições especificadas para cada variável. É comum se referir a cada um destes N conjuntos como um vetor, onde as coordenadas do vetor são os valores de $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_d$, o que conduz ao conceito de vetor aleatório d -dimensional. No caso mais simples, em que as variáveis do modelo são independentes, os valores de x_k podem ser gerados de forma independente segundo função de distribuição de cada variável. Nas implementações em computadores, o mais usual é aproveitar o gerador de números aleatórios do próprio pacote ou linguagem de programação usada e gerar as variáveis aleatórias do modelo usando a técnica da inversão da função de

⁴ O modelo pode especificar alguma relação de dependência entre as variáveis e, neste caso, deverá especificar a distribuição conjunta das mesmas ou a forma desta relação.

distribuição acumulada, que leva $u \rightarrow x$, onde u é a variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 1)$ e x é a variável aleatória com a distribuição especificada pelo modelo. Formalmente, para cada dimensão k do vetor aleatório, tem-se $x_k = F_k^{-1}(u_k)$, onde F_k^{-1} é a inversa da função de distribuição acumulada F_k , referente k -ésima variável. Como a função G é avaliada N vezes para cada estimativa dos parâmetros da distribuição de Y , convém usar a notação $x_{jk} = F_k^{-1}(u_{jk})$ onde $j = 1, 2, \dots, N$ representa o número seqüencial das realizações de u_k e x_k .

Em termos da classificação usual encontrada na literatura, simulações em que u representa uma variável aleatória (gerada pelo gerador de números pseudo-aleatórios) são chamadas de Monte Carlo, e quando u é um valor de uma seqüência quasi-aleatória, o método é referido como Quasi-Monte Carlo. Ainda é possível fazer a distinção entre Monte Carlo com amostragem aleatória simples e com Amostragem Descritiva ou com Hiper-Cubo Latino.

Na presente tese, cada estimativa foi realizada a partir de uma matriz U , N por d , de valores u_{jk} , pertencentes ao intervalo $(0, 1)$, onde cada linha da matriz resulta em uma avaliação da função G (ou seja, um valor para Y) e cada coluna representa uma dimensão do modelo (ou variável de G).

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,d} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N,1} & u_{N,2} & \cdots & u_{N,d} \end{bmatrix} \quad 2.2.1$$

Após a geração de U , é possível gerar a matriz X , em que, cada linha representa uma realização do vetor aleatório de tamanho d . Isto pode ser feito usando a técnica da distribuição inversa, descrita anteriormente, a cada elemento do

vetor coluna da matriz U^5 . Calculada a matriz X , é possível avaliar a função G nos N pontos (ou vetores) desta e obter uma amostra de tamanho N para a variável aleatória Y .

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,d} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & X_{N,2} & \cdots & X_{N,d} \end{bmatrix} \quad 2.2.2$$

As diferentes técnicas comparadas nesta tese diferem entre si apenas na forma como as colunas de U são geradas. Interpretando a matriz U como N pontos no hiper cubo unitário d -dimensional, cada técnica pode ser vista como uma tentativa de preencher este cubo da forma mais homogênea. A forma mais simples de tentar fazer isto é simplesmente atribuir a cada elemento de U , um número aleatório entre 0 e 1. Esta é a forma do Monte Carlo padrão e será chamada de amostragem aleatória simples, nesta tese.

2.3 Erro das Estimativas e Convergência

Como foi mencionado anteriormente, o método Monte Carlo é um método numérico que pode ser empregado para obter estimativas da solução de problemas dos quais não se consegue obter o valor exato de forma analítica. Uma característica dos métodos numéricos é a existência de erro associado às estimativas obtidas e, portanto, é desejável que se tenha uma forma de dimensionar este erro. No caso do Monte Carlo, o erro deve ser tratado pela variância estimada da estimativa obtida – o que permite obter um intervalo de confiança a um nível desejado – e não por limite, como ocorre com alguns métodos numéricos

⁵ Como nos exemplos avaliados neste trabalho as variáveis x_k são i.i.d. (todas seguem a normal padrão), essa operação pode ser simplificada aplicando F^{-1} indistintamente a todos os elementos de U .

determinísticos. A forma de obter uma estimativa para a variância da estimativa obtida é, simplesmente, obter uma amostra de M estimativas e calcular a variância amostral das estimativas. Naturalmente, a estimativa final passa a ser a média das M estimativas.

Como foi mencionado no capítulo 1, é possível melhorar a precisão das estimativas aumentando o tamanho da amostra, N . Seja Y_N o estimador de Monte Carlo obtido de uma amostra de tamanho N para um parâmetro da função G , cujo valor correto é Ψ e $f(u)$ uma função tal que

$$\Psi = \int_{[0,1]^d} f(u) du \quad 2.3.1$$

e $u_j \in P_N$, onde P_N é um conjunto de N pontos aleatórios uniformemente distribuídos tal que $P_N = \{u_1, \dots, u_N\} \subset [0, 1)^d$. Então,

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(u_j) \quad 2.3.2$$

é um estimador não viesado de Ψ . Pelo teorema do limite central, tem-se a variância da distribuição de Y_N , $\sigma_{Y_N}^2 = \sigma^2/N$, onde σ^2 é a variância de f e, portanto, $Y_N \xrightarrow{d} N(\Psi, \sigma^2/N)$, isto é, a distribuição do estimador converge para uma distribuição normal com média Ψ e variância σ^2/N . Isso significa que o erro $|Y_N - \Psi|$ associado ao método Monte Carlo tem convergência de ordem $O(1/N^{1/2})$, (Glasserman, 2003 e L'Ecuyer e Lemieux, 2002).

2.4 Exemplo Numérico

O uso de simulação Monte Carlo na estimativa de preço de opções foi introduzido por Boyle (1977). Nesta seção será desenvolvido um exemplo numérico a fim de demonstrar o exposto acima. O primeiro passo é formalizar o modelo de

simulação. Neste exemplo, será desenvolvida uma simulação para estimar o preço de uma opção de compra europeia. O preço da opção é o valor presente do seu valor esperado no vencimento, que é dado pela equação 2.1, repetida aqui,

$$\text{VALOR} = \text{máximo}(0, S_T - K), \quad 2.4.1$$

onde a variável X foi substituída pela notação mais usual: S_T (o preço do ativo objeto no vencimento). Portanto, o preço é dado pelo valor esperado do valor presente da opção:

$$\text{PREÇO} = e^{-RT} E[\text{máximo}(0, S_T - K)] = E[e^{-RT} \text{máximo}(0, S_T - K)]. \quad 2.4.2$$

Esse modelo é desenvolvido com maiores detalhes na seção 5.1, mas, a fim de exemplificar o funcionamento do método Monte Carlo, é possível substituir R por R_f e usar a equação 5.1.6

$$S_T = S_0 e^{[(R_f - \sigma^2/2) * \delta t * T + \sigma * \sqrt{\delta t} * (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_T)]} \quad 2.4.3$$

para obter os valores de S_T a partir de choques aleatórios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_T$ independentes com distribuição $N(0,1)$ e definindo um valor para os demais parâmetros do problema.

No exemplo apresentado abaixo, a taxa livre de risco (R_f) e a volatilidade (σ) são iguais a 10% e 20% ao ano, respectivamente. O preço inicial do ativo (S_0) e o preço de exercício da opção (K) são, ambos, iguais a 55. O prazo da opção é de um ano e a modelagem é feita em seis choques ($T = 6$), o que faz com que δt seja igual a 1/6 ano. Como a modelagem foi feita em seis choques, este é um modelo 6-dimensional.

Após a construção do modelo matemático, é necessário gerar as variáveis de entrada, ou seja, os valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_T$ para estimar o modelo em diferentes pontos aleatórios. Conforme descrito acima, se for usada a técnica da inversa da função de probabilidade acumulada, primeiro é preciso gerar a matriz U , definida

pela equação 2.2.1. Com o uso do gerador de números aleatórios, foi obtida a matriz da equação 2.4.4:

$$U = \begin{bmatrix} 0.2035 & 0.9716 & 0.0576 & 0.0772 & 0.4824 & 0.7883 \\ 0.4190 & 0.7088 & 0.3417 & 0.7482 & 0.7052 & 0.2739 \\ 0.8287 & 0.6556 & 0.6288 & 0.8625 & 0.9810 & 0.3916 \\ 0.1281 & 0.5872 & 0.3676 & 0.7092 & 0.6211 & 0.7162 \\ 0.9997 & 0.5540 & 0.1144 & 0.9045 & 0.1387 & 0.4706 \\ 0.6395 & 0.4795 & 0.1387 & 0.5850 & 0.8949 & 0.5347 \\ 0.3083 & 0.3868 & 0.7187 & 0.5543 & 0.3146 & 0.7926 \\ 0.6057 & 0.4006 & 0.2700 & 0.4406 & 0.8723 & 0.8408 \\ 0.7906 & 0.2774 & 0.0624 & 0.5470 & 0.4459 & 0.9297 \\ 0.4396 & 0.4550 & 0.4915 & 0.4783 & 0.8062 & 0.0824 \end{bmatrix}, \quad 2.4.4$$

da com a qual é possível chegar a matriz X, definida pela equação 2.2.2, onde cada elemento representa uma variável retirada de uma distribuição $N(0, 1)$:

$$X = \begin{bmatrix} -0.8293 & 1.9051 & -1.5755 & -1.4243 & -0.0440 & 0.8005 \\ -0.2046 & 0.5498 & -0.4078 & 0.6688 & 0.5393 & -0.6010 \\ 0.9490 & 0.4005 & 0.3286 & 1.0914 & 2.0744 & -0.2753 \\ -1.1355 & 0.2202 & -0.3381 & 0.5510 & 0.3083 & 0.5717 \\ 3.4739 & 0.1358 & -1.2036 & 1.3079 & -1.0863 & -0.0737 \\ 0.3571 & -0.0513 & -1.0863 & 0.2148 & 1.2533 & 0.0871 \\ -0.5007 & -0.2876 & 0.5790 & 0.1366 & -0.4827 & 0.8154 \\ 0.2680 & -0.2518 & -0.6130 & -0.1496 & 1.1375 & 0.9978 \\ 0.8084 & -0.5907 & -1.5348 & 0.1180 & -0.1361 & 1.4735 \\ -0.1519 & -0.1129 & -0.0212 & -0.0544 & 0.8639 & -1.3894 \end{bmatrix}. \quad 2.4.5$$

Cada coluna das matrizes U e X está associada a uma dimensão (ou variável) do modelo especificado pelas equações 2.4.2 e 2.4.3 e cada linha, a uma observação. Como no caso da matriz X, cada coluna já segue a distribuição especificada pelo modelo, é possível substituir $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_6$, na equação 2.4.3, pelos seis valores de cada linha dessa matriz para obter uma amostra de dez valores de S_T (equação 2.4.6).

$$S_T = \begin{bmatrix} 54.1635 \\ 62.2896 \\ 86.5191 \\ 60.4508 \\ 73.3958 \\ 63.4710 \\ 60.8594 \\ 66.7362 \\ 60.2577 \\ 55.5136 \end{bmatrix} \quad 2.4.6$$

Da amostra de S_T é fácil obter uma amostra do valor presente do valor de exercício da opção, isto é, de $e^{-RT} \text{máximo}(0, S_T - K)$:

$$\text{ValorPresente}(\text{máx}(0, S_T - K)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.5959 \\ 28.5196 \\ 4.9321 \\ 16.6452 \\ 7.6648 \\ 5.3018 \\ 10.6194 \\ 4.7574 \\ 0.4648 \end{bmatrix} \cdot \quad 2.4.7$$

Por fim, é possível estimar o preço da opção usando a equação 3.2.3, ou seja, usando a média da amostra:

$$Y_{10} = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^N \text{ValorPresente}(\text{máx}(0, S_T - K)) = 8.5501. \quad 2.4.8$$

Conforme exposto na seção 2.3, o estimador Y_{10} tem distribuição aproximadamente normal centrada em $E[e^{-RT} \text{máximo}(0, S_T - K)]$. Como o estimador é não viesado, uma medida de sua precisão é a variância de sua distribuição que, por sua vez pode ser estimada empiricamente por uma amostra de Y_{10} . Para obter uma amostra de estimativas, basta repetir o processo, utilizando o gerador de números aleatórios para gerar quantas matrizes U forem necessárias. É possível

reduzir a variância de um estimador Y_N simplesmente aumentando o aumento do tamanho da amostra (N) ou, alternativamente, com o uso de técnicas de redução de variância.

3 AMOSTRAGEM DESCRITIVA

A Amostragem Descritiva, desenvolvida por Saliby (1989), pode ser vista como uma técnica de redução de variância, isto é, uma técnica que tem como objetivo reduzir a variância das estimativas, ou equivalentemente, melhorar sua precisão, sem que seja necessário aumentar o tamanho de amostra. Operacionalmente, pode ser vista como um método alternativo à amostragem aleatória simples para amostrar um conjunto de pontos no hiper-cubo unitário, porém, conceitualmente, há uma diferença mais profunda. Enquanto que no Monte Carlo tradicional, com a amostragem aleatória simples, o objetivo é a reprodução do fenômeno probabilístico de forma realista, com o uso da Amostragem Descritiva, o objetivo é representar o modelo de forma mais eficiente (Saliby, 1989). Um dos principais argumentos em favor do seu uso, é que não faz sentido abrir mão do conhecimento de que se dispõe a respeito das distribuições marginais do modelo e, por isso, a Amostragem Descritiva procura garantir que cada variável se aproxime o máximo possível de sua distribuição teórica.

Conseqüente, no Monte Carlo tradicional, cada observação é resultado de uma realização independente do modelo e a amostra é simplesmente um conjunto de observações independentes. Já no caso do Monte Carlo com Amostragem Descritiva, como o objetivo é otimizar a representação das distribuições marginais, os valores de entrada de cada dimensão são obtidos de forma controlada e dependente das demais realizações do modelo, embora este controle seja realizado de forma independente para cada dimensão, ou seja, não há controle multivariado.

A Amostragem Descritiva começa pela geração de um conjunto de N pontos unidimensionais no intervalo $(0, 1)$ da forma mais homogênea possível. Niederreiter (1992) mostra que, para diferentes medidas de discrepância⁶, o conjunto que tem a distribuição mais homogênea em $(0, 1)$ é o definido por

$$u_j = (j - 0,5)/N \quad 3.1$$

onde $j = 1, 2, \dots, N$. Com a aplicação da função de distribuição acumulada inversa sobre estes pontos, obtêm-se o vetor descritivo referente a k -ésima variável do modelo

$$(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{j,k}, \dots, X_{d,k}) = F^{-1}_k(u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{j,k}, \dots, u_{d,k}) \quad 3.2$$

ou

$$(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{j,k}, \dots, X_{d,k}) = F^{-1}_k [(j - 0,5)/N], \quad 3.3$$

onde $j = 1, 2, \dots, N$.

Após a construção do vetor descritivo, os seus N elementos têm a ordem de seqüência permutada aleatoriamente e, no contexto do capítulo anterior, esse vetor permutado representa a k -ésima coluna da matriz X (equação 2.2.2). O processo é repetido para cada dimensão, usando a respectiva função de distribuição inversa e fazendo uma permutação aleatória independente das demais dimensões.

O resultado deste processo de amostragem é que, cada variável do modelo terá sua distribuição condicional representada da melhor forma para a quantidade N de pontos utilizados. Porém, como as d permutações realizadas para cada uma das dimensões são aleatórias e independentes, nada garante que o processo não resulte em uma distribuição conjunta que se afaste muito da teórica. Apesar disso, o uso da Amostragem Descritiva apresenta melhora da precisão em relação à amostragem aleatória simples, conforme comprovado em vários estudos (p. ex.:

⁶ Discrepância é um conceito, comumente associado a Quasi-Monte Carlo, que se refere à uniformidade da distribuição de um conjunto de pontos num espaço $[0, 1]^d$. Existem várias medidas de discrepância, mas em geral, quanto menor for o valor, mais homogênea é a distribuição do conjunto de pontos.

Araújo, 2001, Moreira, 2001, Marins, Santos e Saliby, 2003 e Saliby, Gouvêa e Marins, 2007). Em particular, para o caso de apreçamento de opções, este último concluiu que, embora a Amostragem Descritiva seja sempre tão ou mais eficiente que a Amostragem Aleatória Simples, há perda de ganho de eficiência conforme a probabilidade de exercício diminui, isto é, conforme uma região menor do hiper-cubo unitário é utilizado. Contudo, para algumas situações, esse problema pode ser contornado com o uso de Amostragem por Importância, conforme é demonstrado em Marins (2006).

Como explica Saliby (1989), na amostragem aleatória simples, há duas fontes de variabilidade, o conjunto de pontos e a ordem de seqüência desses pontos. Já na Amostragem Descritiva, o conjunto de pontos é fixo - e ótimo - e apenas a seqüência varia. Um exemplo que explica bem a filosofia por trás da Amostragem Descritiva é o do modelo em que uma das variáveis representa o lançamento de uma moeda. Numa simulação com $N = 1000$, faz mais sentido descrever a distribuição teórica (500 caras e 500 coroas) do que deixar ao acaso a quantidade de cada resultado. Assim, a única fonte de variação, é como esses resultados serão combinados com as demais variáveis aleatórias do modelo.

Além da eliminação de uma das fontes de variabilidade, a Amostragem Descritiva apresenta o benefício adicional da economia de esforço computacional. Essa economia pode ser obtida em duas situações, uma é quando se repete uma simulação M vezes para obter a estimativa da variância, pois só é necessário calcular $x_{j,k}$ da matriz X (equação 2.2.2) uma única vez e usar este valor nas permutações das outras $M - 1$ estimativas. A outra é quando mais de uma variável tem a mesma distribuição, pois é possível repetir o vetor descritivo. Nesta tese, porém, a fim de padronizar os programas de software, a alternância entre as

diversas técnicas se deu apenas pelas diferentes formas de gerar a matriz U (equação 2.2.1). No caso da Amostragem Descritiva, isso implicou em realizar as d permutações aleatórias e independentes entre os elementos de $(u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{j,k}, u_{d,k})$ e usar os vetores permutados como colunas da matriz U .

No capítulo 2 foi apresentado um exemplo de simulação Monte Carlo. Do ponto de vista matemático, a diferença entre o método Monte Carlo tradicional - com amostragem aleatória simples realizada com o gerador de números aleatórios – e o método Monte Carlo realizado com a Amostragem Descritiva está na geração das matrizes U . Uma possível realização de U_{AD} (a matriz da de Amostragem Descritiva), para o exemplo descrito na seção 2.4, é dado por

$$U_{AD} = \begin{bmatrix} 0.6500 & 0.1500 & 0.9500 & 0.9500 & 0.5500 & 0.0500 \\ 0.9500 & 0.3500 & 0.1500 & 0.2500 & 0.3500 & 0.8500 \\ 0.3500 & 0.2500 & 0.5500 & 0.0500 & 0.1500 & 0.7500 \\ 0.8500 & 0.0500 & 0.4500 & 0.1500 & 0.9500 & 0.5500 \\ 0.0500 & 0.4500 & 0.2500 & 0.3500 & 0.6500 & 0.4500 \\ 0.2500 & 0.5500 & 0.8500 & 0.4500 & 0.8500 & 0.6500 \\ 0.4500 & 0.6500 & 0.6500 & 0.6500 & 0.0500 & 0.9500 \\ 0.1500 & 0.7500 & 0.0500 & 0.8500 & 0.2500 & 0.3500 \\ 0.7500 & 0.8500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.4500 & 0.2500 \\ 0.5500 & 0.9500 & 0.3500 & 0.5500 & 0.7500 & 0.1500 \end{bmatrix}, \quad 3.4$$

um outro exemplo é dado por

$$U_{AD} = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.3500 & 0.6500 & 0.0500 & 0.4500 & 0.9500 \\ 0.1500 & 0.5500 & 0.1500 & 0.7500 & 0.7500 & 0.5500 \\ 0.4500 & 0.6500 & 0.3500 & 0.1500 & 0.0500 & 0.2500 \\ 0.9500 & 0.1500 & 0.9500 & 0.3500 & 0.9500 & 0.0500 \\ 0.8500 & 0.4500 & 0.5500 & 0.5500 & 0.1500 & 0.6500 \\ 0.6500 & 0.9500 & 0.7500 & 0.2500 & 0.3500 & 0.4500 \\ 0.7500 & 0.2500 & 0.8500 & 0.8500 & 0.2500 & 0.8500 \\ 0.3500 & 0.0500 & 0.0500 & 0.6500 & 0.8500 & 0.7500 \\ 0.5500 & 0.8500 & 0.2500 & 0.4500 & 0.6500 & 0.1500 \\ 0.0500 & 0.7500 & 0.4500 & 0.9500 & 0.5500 & 0.3500 \end{bmatrix}. \quad 3.5$$

Tanto em 3.4 como em 3.5, pode ser verificado que todas as colunas são compostas sempre pelo mesmo conjunto de números e que a única diferença entre elas e entre uma e outra realização de U_{AD} é a ordem em que os números se sucedem em cada coluna.

Conforme descrito anteriormente, a ordem em que os valores ocorrem no vetor descritivo é a única fonte de variabilidade na Amostragem Descritiva. Outro fato importante é que esse conjunto explora de forma homogênea o espaço amostral unidimensional. A figura 3.1 mostra um histograma que retrata a distribuição dos valores referente a qualquer dimensão de uma matriz U_{AD} relativa a uma amostra de tamanho dez. Em comparação, na figura 3.2 são apresentadas as distribuições das seis dimensões referentes à matriz U da equação 2.4.4, utilizada na simulação aleatória simples e gerada com o gerador de números aleatórios.

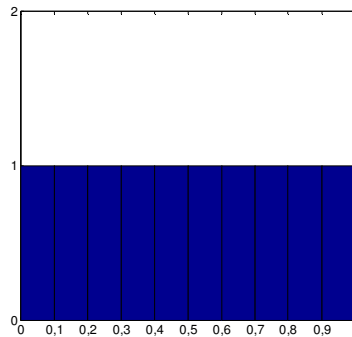


Figura 3.1 Distribuição dos valores da Amostragem Descritiva de tamanho $N = 10$

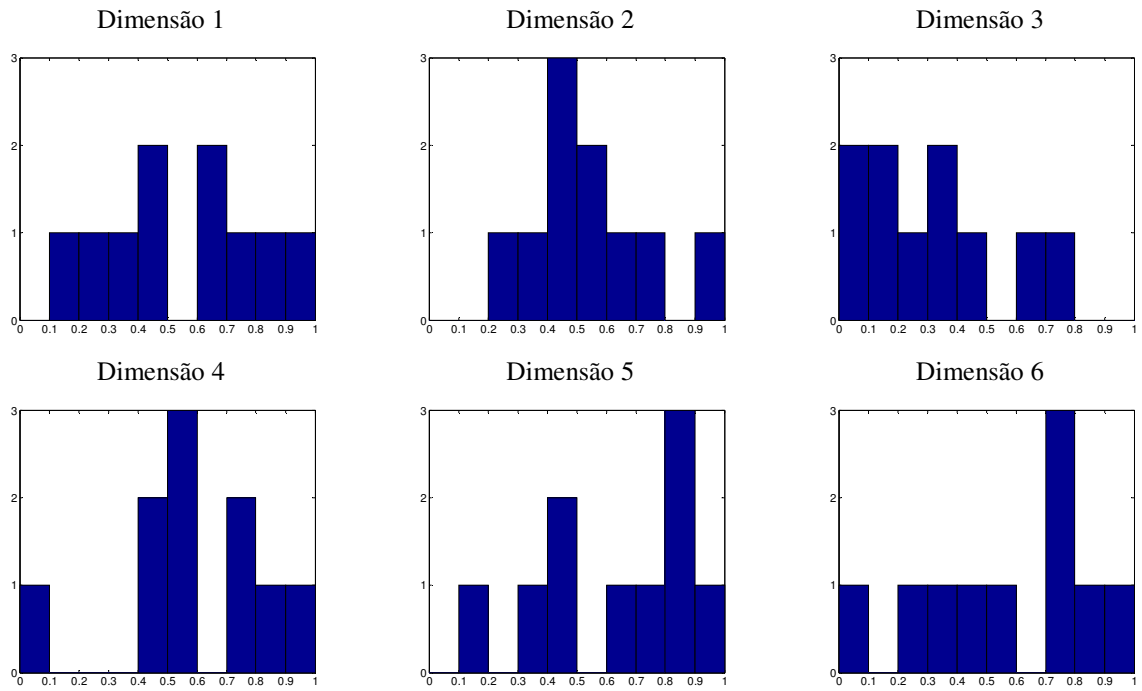


Figura 3.2 Distribuição dos valores de cada dimensão da matriz U referente a uma Amostra Aleatória Simples de tamanho $N = 10$, apresentada na equação 2.4.4

4 QUASI-MONTE CARLO

O Quasi-Monte Carlo é uma das alternativas à amostragem aleatória simples para gerar pontos no hiper-cubo unitário que tem como objetivo obter estimativas mais precisas que as obtidas pelo Monte Carlo tradicional. De forma semelhante ao que ocorre com o uso da Amostragem Descritiva, com o Quasi-Monte Carlo, não há a intenção de reproduzir o fenômeno probabilístico, mas sim de obter uma amostra das possíveis realizações do modelo de forma mais eficiente que com o uso da Amostragem Aleatória Simples. Porém, a estratégia adotada nos dois casos é diferente. Conforme explicado no capítulo 3, a Amostragem Descritiva utiliza a melhor representação possível das distribuições marginais, selecionando os pontos univariados de forma determinística, no entanto, obtêm as distribuições multivariadas combinando esses pontos de forma totalmente aleatória. No caso do Quasi-Monte Carlo, a amostra é selecionada de forma completamente determinística, visando um conjunto de pontos em $\mathcal{I}(0, 1)$ com distribuição mais homogênea e, dessa forma, obter uma representação melhor das distribuições conjunta e marginais do modelo.

Na verdade, o Quasi-Monte Carlo compreende um conjunto de técnicas – ou esquemas matemáticos – para gerar pontos espalhados no hiper-cubo unitário sendo que, essas técnicas são concorrentes entre si. A maioria dessas técnicas – e todas as que serão contempladas nesta tese - cai na categoria chamada de seqüência de baixa discrepância. As seqüências de baixa discrepância são regras matemáticas que geram uma série pontos univariados em $(0, 1)$ de maneira uniforme, mas que também podem gerar pontos multivariados uniformemente distribuídos em $\mathcal{I}(0, 1)$. A multidimensionalidade é obtida gerando uma série diferente para cada uma das dimensões do problema e, assim, as coordenadas do

i-ésimo ponto multivariado é dada pelos i-ésimos valores de cada uma das séries. A diferenciação nas séries referentes a cada dimensão é conseguida pela substituição de algum parâmetro na regra matemática, parâmetro(s) este(s) que são característicos de cada tipo de seqüência de baixa discrepância.

Uma limitação das seqüências de baixa discrepância é que, em geral, não produzem a melhor representação das distribuições marginais. De fato, o conjunto de pontos gerados no intervalo $(0, 1)$ de cada uma de suas dimensões não é tão homogêneo quanto o utilizado na Amostragem Descritiva, embora, seja mais homogêneo que os gerados de forma aleatória. Como dito acima, a vantagem do uso das séries de baixa discrepância advém dos mecanismos de controle multivariado, que forçam o preenchimento do hiper-cubo unitário de forma mais homogênea.

Este capítulo apresenta, rapidamente, alguns conceitos importantes no contexto de Quasi-Monte Carlo, explica como gerar algumas séries de baixa discrepância e analisa alguns mecanismos de controle multivariado das mesmas.

4.1 Conceitos

4.1.1 Discrepância

A discrepância é um conceito associado à homogeneidade de um conjunto de pontos em um hiper-cubo d -dimensional, que avalia o quanto a distribuição deste conjunto se afasta da distribuição uniforme contínua. Em tese, este afastamento se refere à divergência entre o “volume” de qualquer subconjunto do hiper-cubo unitário e a proporção de pontos do conjunto de pontos que está contida neste subconjunto. Na prática, são usadas algumas medidas de discrepância menos abrangentes,

porém mais tratáveis. Além de serem práticas, essas medidas mais simples têm a vantagem de facilitar o entendimento do conceito de discrepância.

Uma medida usual de discrepância é definida restringindo a forma dos subconjuntos à hiper-paralelepípedos, contidos dentro do hiper-cubo unitário, cujas arestas sejam paralelas aos eixos de coordenadas. Essa medida de discrepância é chamada de discrepância ordinária (ou extrema) e é denotada por D_N . Formalmente, é definida pela equação 4.1.1

$$D_N = \sup_{P \in [0,1]^d} \left| \frac{\text{número de pontos em } P}{N} - V(P) \right| \quad 4.1.1$$

onde:

P é qualquer hiper-paralelepípedo com a forma $\Pi(u, v)$, $0 < u < v < 1$;

$V(\bullet)$ representa o volume, $\sup|\bullet|$ é a função *supremo*⁷ ;

d representa a dimensionalidade e

N é o tamanho do conjunto de pontos avaliado. (Niederreiter, 1992)

Para o caso unidimensional, isto é, $d = 1$, o menor valor possível para D_N , dado o conjunto de pontos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, é $1/N$. Conforme antecipado no capítulo 3, esse valor é obtido quando o conjunto é tal que $x_i = (i - 0,5)/N$ para $i = 1, 2, \dots, N$ (ver equação 3.1) e é exatamente o conjunto de pontos utilizados na Amostragem Descritiva, motivo pelo qual foi argumentado que esta utiliza a melhor representação das distribuições parciais.

Alternativamente, a homogeneidade da distribuição de um conjunto de pontos pode ser avaliada de forma subjetiva, com o auxílio do gráfico de dispersão. Esses gráficos representam a projeção do conjunto dos pontos em duas das dimensões do espaço R^d sobre o qual o conjunto é definido e são chamados de projeção par a par. Sua construção é bastante simples e é realizada plotando um gráfico de dispersão

⁷ Retorna o maior valor em módulo

representando as coordenadas dos pontos referentes às duas dimensões em questão.

Na figura 4.1.1 são apresentadas as projeções par a par de cem pontos gerados por Amostragem Aleatória Simples, Amostragem Descritiva e Sobol'⁸. Essa análise visual sugere que a primeira técnica é a que ocupa o quadrado unitário de forma menos homogênea, com vários pontos amontoados (*clusters*) e algumas áreas grandes sem pontos. Por sua vez, a Amostragem Descritiva consegue preencher o quadrado unitário de forma um pouco mais homogênea que a Amostragem Aleatória Simples, mas menos que a distribuição gerada pela seqüência de Sobol'. As projeções par a par também permitem a observação de uma característica da seqüência de Sobol' - e do Quasi-Monte Carlo em geral - que é a existência de padrões. Esses padrões revelam a presença de dependência entre diferentes dimensões e podem resultar em aglomerados e reduzir a precisão das estimativas – o que contraria o objetivo de gerar pontos distribuídos homogeneamente em $\mathcal{U}(0, 1)$. Esse problema tende a se agravar com o aumento da dimensionalidade e leva ao fenômeno às vezes chamado de maldição da dimensionalidade, (M. E. Silva, 2002).

⁸ No caso de Sobol' é necessário também registrar que as duas dimensões são as duas primeiras da seqüência de baixa discrepância.

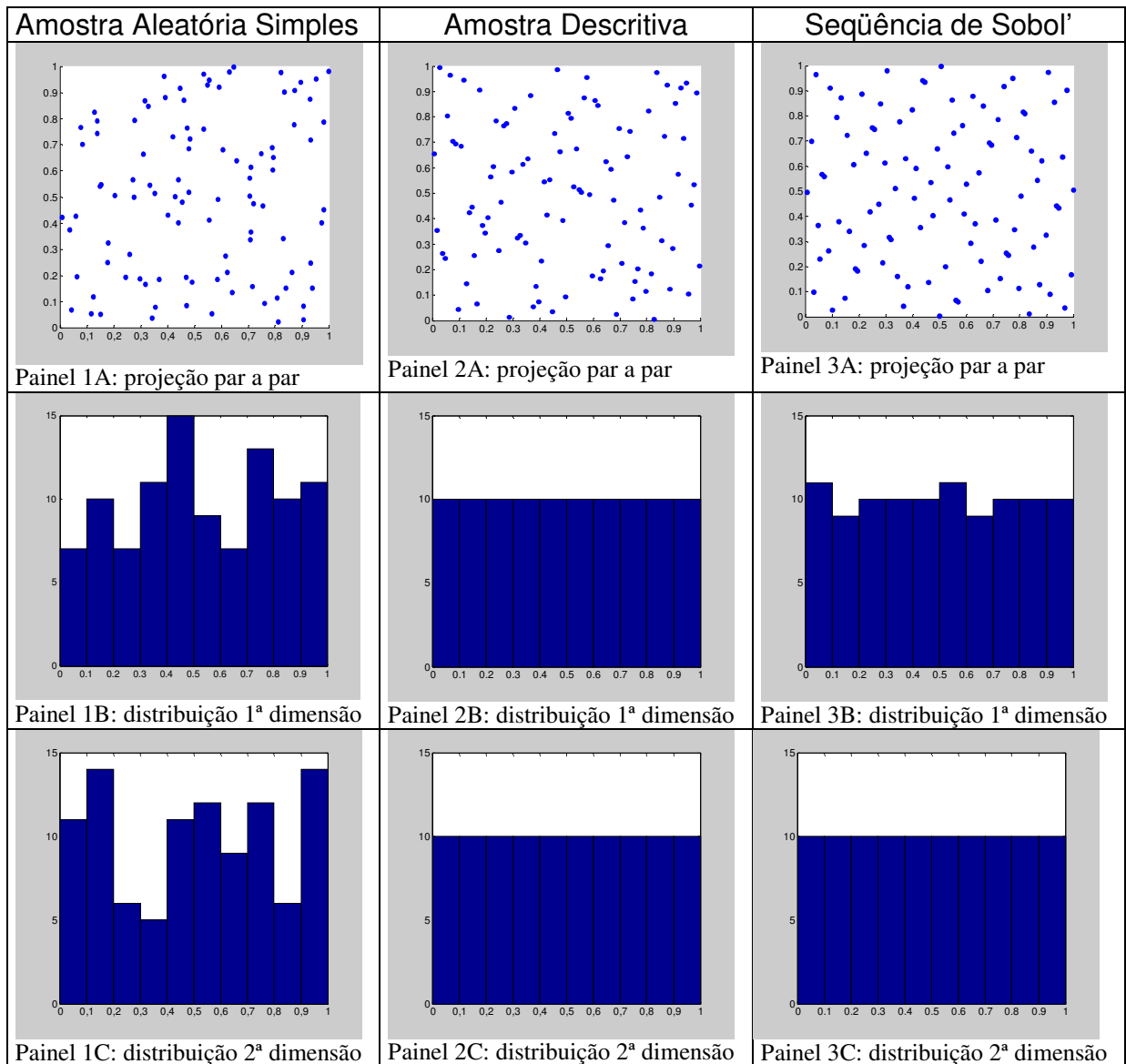


Figura 4.1.1 Projeção par a par de 100 pontos gerados por Amostragem Aleatória Simples, Amostragem Descritiva e Série de Sobol' e as distribuições unidimensionais desses pontos

O agravamento dos padrões e aglomerações e, conseqüentemente, da perda de precisão das estimativas, conforme aumenta a dimensionalidade do modelo estimado por Quasi-Monte Carlo, leva ao conceito de qualidade das dimensões. A redução da qualidade das dimensões, conforme aumenta a ordem das mesmas, é uma característica das seqüências de baixa discrepância. Essa tendência de redução na qualidade das dimensões pode ser observada na figura 4.1.2, que apresenta algumas projeções par a par relativas aos primeiros 200 pontos da

seqüência de Sobol' gerada com a tabela de números direcionais iniciais apresentada em Jäckel⁹. A análise visual permite entender o conceito de qualidade e os problemas que podem decorrer em dimensões mais elevadas. Nos painéis 1, 2 e 3 da figura 4.1.2 - referente às projeções do conjunto de pontos multidimensionais nos planos x_1x_2 , x_1x_3 e x_2x_3 - é possível ver que as distribuições nos quadrados unitários são bastante uniformes. Isso significa que, se esse conjunto de pontos for usado para gerar uma amostra de uma distribuição trivariada usando a técnica da distribuição inversa, essa amostra será bem representativa da distribuição conjunta teórica e que, as interações entre as variáveis serão bem reproduzida pela simulação. No painel 4, referente à projeção para a par das dimensões 1 e 22, também há homogeneidade, porém no painel 5, referente às dimensões 1 e 23, podem ser observados alguns aglomerados. Por fim, no painel 6, referente às dimensões 22 e 23, são observadas aglomerações acentuadas.

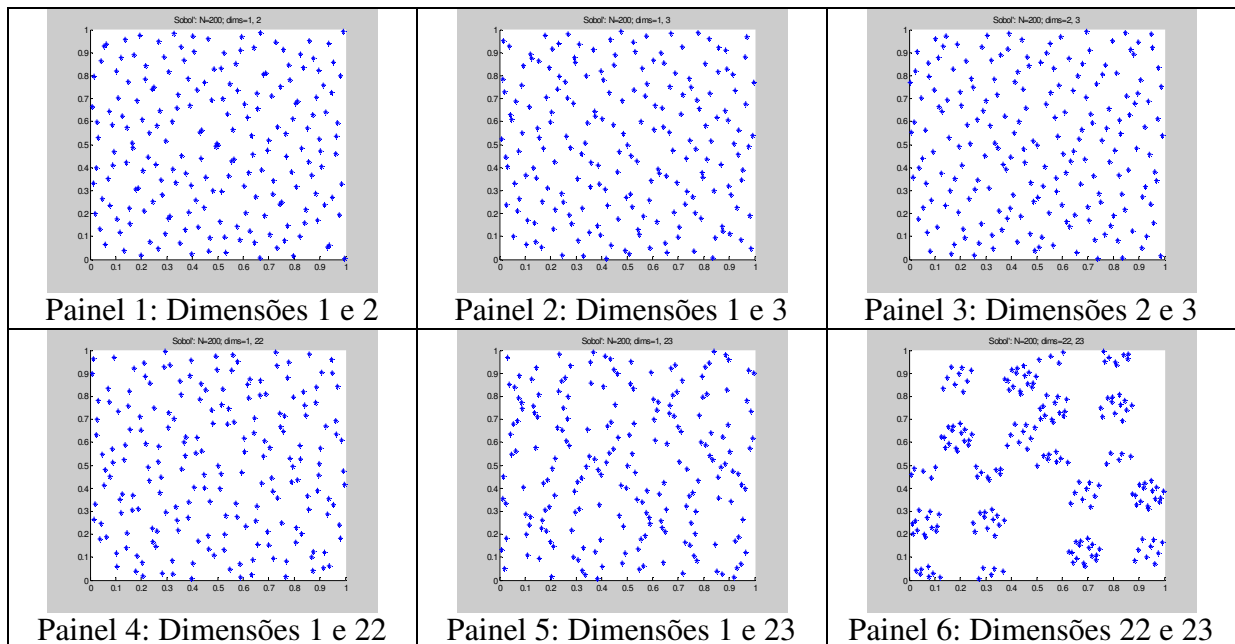


Figura 4.1.2 Projeção par a par de 200 pontos da Série de Sobol' demonstrando o efeito da perda de qualidade para dimensões de ordem mais elevada.

⁹ O uso dos números direcionais iniciais e da importância de sua escolha é apresentado no apêndice 4.A2 deste capítulo.

Portanto, as dimensões de ordem elevada são consideradas de baixa qualidade devido à forma como elas interagem com as demais dimensões e não pelas suas propriedades unidimensionais. De fato, as distribuições unidimensionais das dimensões de ordem elevada não são muito diferentes das distribuições das dimensões de ordem inferior. Na figura 4.1.3, onde são apresentados os histogramas dos 200 pontos das distribuições unidimensionais utilizadas para fazer os diagramas da figura 4.1.2, pode ser visto que todas apresentam distribuições relativamente homogêneas.

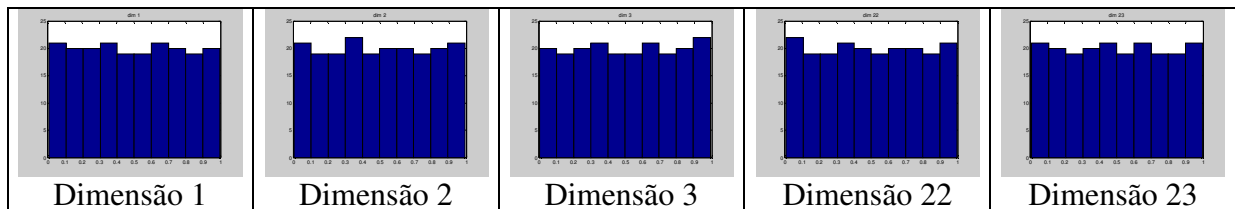


Figura 4.1.3 Distribuições unidimensionais de 200 pontos da Série de Sobol' para os pontos utilizados na figura 4.1.2, demonstrando a manutenção da qualidade para dimensões de ordem mais elevada, quando as dimensões são tomadas individualmente.

4.1.2 Importância Relativa das Variáveis de um Modelo e sua Dimensão Efetiva

A seção anterior introduziu o conceito de qualidade das dimensões das séries de baixa discrepância. Também foi exemplificado como a qualidade tende a reduzir conforme a ordem das dimensões aumenta. A existência de hierarquia entre as dimensões de uma série de baixa discrepância conduz a questão de como escolher qual dimensão associar a cada variável do modelo. A bibliografia recomenda que as variáveis probabilísticas mais importantes do modelo sejam associadas às dimensões de menor ordem das seqüências de baixa discrepância. (Drew e Homem-de-Melo, 2006, Lemieux, 2004 e L'Ecuyer, 2003) Isso, naturalmente, conduz ao problema de como identificar quais são as variáveis mais importantes.

A questão da identificação das variáveis probabilísticas mais importantes de um modelo de simulação pode ser abordada pelo entendimento de como a perda de qualidade - descrita na seção 4.1.1 - afeta as estimativas obtidas. Em particular, é útil entender como a associação escolhida entre dimensões da série de baixa discrepância e as variáveis do modelo afeta a precisão da estimativa. Como a medida de interesse, na avaliação dos métodos Monte Carlo e seus associados, é a precisão das estimativas – seja ela dada pelo erro ou pela variância – a importância de uma variável de um modelo de simulação deve ser tomada com base no impacto desta na precisão das estimativas.

Como situação hipotética, pode ser considerado um modelo no qual o interesse seja relacionado à ocorrência de um evento extremo. Em geral, eventos extremos estão associados aos cantos do quadrado - ou hiper-cubo - unitário relativo às variáveis mais importantes do modelo. Por exemplo, a área de interesse poderia se dar no canto superior direito do quadrado unitário, isto é, quando duas variáveis realizam valores elevados simultaneamente. Neste caso, o uso das dimensões 22 e 23, apresentadas na figura 4.1.2, pode sub-representar esse evento e acarretar em sérios problemas de precisão.

A situação de extremos, descrita acima, é característica de opções de compra¹⁰ muito fora do dinheiro. Supondo que a trajetória do ativo objeto de uma opção de compra seja simulada em duas etapas utilizando as dimensões 22 e 23, conforme a figura 4.1.2., então, o vazio no canto superior direito do painel indica que, na amostra de trajetórias simuladas, não haverá nenhuma em que ocorram dois movimentos de elevação acentuada do preço. Como a opção só tem valor se o preço final for muito elevado, é possível que ocorram poucas, ou nenhuma,

¹⁰ As opções de compra só têm valor em uma determinada data se o preço do ativo objeto subir acima de um determinado valor. Nos casos de opções fora do dinheiro, é necessário que o preço suba muito. As opções de compra serão explicadas em maior detalhes no capítulo cinco.

situações em que a opção tenha valor no vencimento, o que levaria a erros significativos no apuração desta opção. Em outras palavras, a precisão da estimativa será baixa se comparada a, por exemplo, uma estimativa obtida com o uso das dimensões 1 e 2.

Finalmente, a questão da importância relativa das dimensões de um modelo surge, por exemplo, numa situação na qual a opção descrita acima faça parte de um problema de simulação de uma carteira de ativos. Se a opção tiver um peso muito grande na carteira, o erro em sua avaliação pode afetar muito o erro da estimativa da carteira como um todo e, neste caso, as duas variáveis usadas para simular a trajetória do ativo deveriam ser simuladas utilizando dimensões mais baixas, como, por exemplo, as dimensões 1 e 2. Contrariamente, caso a participação dessa opção na carteira seja pouco expressiva, um erro em sua avaliação afetará menos o erro global, devendo as dimensões de ordens mais baixas serem destinadas às dimensões cujo impacto na estimativa final seja mais significativo.

O exemplo da carteira de ativos sugere que, em algumas situações, a precisão da estimativa pode depender quase exclusivamente de uma quantidade de variáveis significativamente menor que a quantidade total de variáveis do modelo. Essa noção leva a um conceito de interesse na literatura de Quasi-Monte Carlo, que é o de dimensionalidade efetiva do problema modelado. Embora existam abordagens e definições diferentes para determinar a dimensão efetiva de um problema, a idéia principal é que algumas poucas variáveis podem responder pela maior parte da variabilidade das estimativas. Portanto, é possível atribuir essas variáveis às dimensões de melhor qualidade e, assim, obter estimativas Quasi-Monte Carlo precisas, mesmo para modelos de elevada dimensionalidade. (Drew e Homem-de-Melo, 2006, L'Ecuyer, 2003 e Liu e Owen, 2006)

De forma simples, a dimensionalidade efetiva de um problema determina a menor quantidade de variáveis que respondem por um percentual pré-estabelecido da variância do modelo. Esse percentual é um critério arbitrário, por exemplo, 95%, e se considera como dimensão efetiva a menor quantidade de variáveis que consegue capturar 95% ou mais da variância das realizações do modelo. Frequentemente, como na situação descrita acima – de uma opção com muita representatividade em uma carteira – o modelo é dominado por poucas variáveis. Isso explica como o Quasi-Monte Carlo pode produzir boas estimativas em problemas de elevada dimensionalidade, conseguindo evitar a maldição da dimensionalidade, pois em algumas situações de interesse a dimensão efetiva não é muito elevada, embora a dimensionalidade o seja.

Uma forma alternativa de abordar a questão da dimensionalidade efetiva de um problema surge quando é possível redefinir o modelo original por outro, com menos variáveis, mas com quase toda a informação do original. Essa situação ocorre quando a elevada dependência entre as variáveis originais do problema permite substituir o conjunto original de variáveis por outro menor sem perda significativa, fazendo com que a idéia de dimensão efetiva acabe surgindo de forma natural na própria estruturação do modelo. Em finanças, o uso de análise de componentes principais para descrever os movimentos de uma curva de taxas de juros é bastante usual (Silveira e Bessada, 2003) e pode ser utilizada para a simulação da curva e de uma carteira dependente da mesma. Normalmente, são utilizados apenas os três primeiros componentes, que explicam a variabilidade em sua quase totalidade (Hull, 2007). Embora o problema original tenha muitas variáveis – referentes aos diversos vértices sendo simulados – estas podem ser resumidas por apenas três sem perda significativa de informação e, assim, a

dimensão efetiva desse problema pode ser considerada como sendo três. (Frye, 1998)

Existem algumas definições mais formais para a dimensionalidade efetiva, uma delas é a “dimensionalidade efetiva no sentido de sobreposição”, apresentada por Caflisch, Morokoff e Owen (1997). Esta definição aborda este conceito a partir da decomposição funcional pela ANOVA da função cuja integral equivale à solução do problema em questão.

Seja $f(x)$, uma função de quadrado integrável, definida sobre o hiper-cubo unitário d -dimensional e x uma variável d -dimensional, isto é, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$. Na decomposição por ANOVA, essa função é escrita como

$$f(x) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, d\}} f_u(x) \quad 4.1.2$$

onde $f_u(x)$ é uma função que só depende de x através das dimensões contidas no subconjunto u e é dada por

$$f_u(x) = \int_{[0,1]^{-u}} f(x) dx^{-u} - \sum_{v \subseteq^* u} f_v(x) \quad 4.1.3$$

(onde \subseteq^* representa subconjunto estrito) isto é, integrando f sobre as dimensões complementares à u e subtraindo todos os termos definidos para subconjuntos estritos de u . Segundo Owen (2003), os termos ANOVA são ortogonais e, portanto, a variância de f pode ser escrita como

$$\sigma^2 = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, d\}} \sigma_u^2 \quad 4.1.4$$

onde

$$\sigma_u^2 = \text{"variância de } f_u(x)\text{"} = \begin{cases} \int f_u(x)^2 dx & |u| > 0 \\ 0 & |u| = 0 \end{cases} \quad 4.1.5$$

e $|\bullet|$ é a função cardinalidade de um vetor. A variância padronizada de $f_u(x)$, dada por σ_u^2 / σ^2 , é chamada de “índice de sensibilidade global” por Sobol’. Finalmente, a dimensionalidade efetiva no sentido de sobreposição é definida como o menor valor de s para o qual a equação 4.1.6 é satisfeita (Liu e Owen, 2003).

$$\sum_{|u| \leq s} \sigma_u^2 \geq 0.99\sigma^2 \quad 4.1.6$$

Sobol’ propõe que o conceito de sensibilidade global seja usado como forma de hierarquização das dimensões de um modelo e também sugere um método para estimar os índices através de Monte Carlo. Este método, que leva em consideração os efeitos de ordem superior a um - isto é, quando a cardinalidade de u na equação 4.1.4 é superior a um - é resumido em Archer, Saltelli e Sobol’ (1997). De fato, em Saltelli, Tarantola e Campolongo (2000) é apresentada uma discussão sobre abordagens para avaliar as variáveis de um modelo. Uma dessas abordagens é usar os coeficientes de regressão múltipla como índice, no entanto, os autores argumentam que as não-linearidades podem gerar sérias distorções. Eles também argumentam que, avaliar apenas os efeitos de primeira ordem nas equações 4.1.4 e 4.1.6 é incorrer em erro, pois não é levado em consideração o impacto oriundo das interações entre as variáveis.

4.1.3 Randomização

Embora o Monte Carlo tradicional e o Quasi-Monte Carlo sejam operacionalmente semelhantes, o primeiro é um método probabilístico, ao passo que, o segundo é um método determinístico. Isto significa que, enquanto a estimativa Monte Carlo é uma variável aleatória, a estimativa Quasi-Monte Carlo é uma constante. Conseqüentemente, não é possível utilizar o procedimento descrito

na seção 2.3 para estimar a variância da estimativa e obter uma medida da dimensão do erro - ou precisão - da estimativa obtida. Uma alternativa para contornar este problema é usar um artifício conhecido como randomização¹¹, que agrega aleatoriedade às estimativas Quasi-Monte Carlo, resultando no que é conhecido como Quasi-Monte Carlo Randomizado. O objetivo das diversas técnicas de randomização existentes é provocar aleatoriedade nas seqüências determinísticas sem, contudo, alterar de forma significativa as propriedades de distribuição que as tornam úteis.

Uma das técnicas de randomização disponíveis é a adição módulo 1 (*addition of a shift modulo 1*), que pode ser aplicada a qualquer conjunto de pontos no hiper-cubo unitário e gera estimativas não viesadas. (Lemieux, Cieslakk e Luttmer, 2002). A técnica consiste em adicionar um vetor aleatório uniforme em $(0, 1)^d$ a todos os pontos do conjunto e realizar a operação módulo 1 em cada coordenada dos pontos após a adição¹². Para cada uma das M estimativas, é necessário um vetor aleatório diferente. Visualmente, esse processo pode ser pensado como transladar todo o conjunto de N pontos e, os pontos que caírem fora do hiper cubo unitário são “retornados pelo lado oposto”.

4.2 Richtmyer

Uma das formas mais simples de Quasi-Monte Carlo é o uso de seqüências de Richtmyer, também conhecidas como séries de Weyl. Foi Hermann Weyl quem primeiro propôs (em 1916) o uso de séries quasi-aleatórias e uma forma de gerá-las.

¹¹ Esse neologismo deriva da palavra em inglês *randomization*, que não encontra tradução adequada para o português.

¹² A função módulo 1 retorna o resto da divisão por um, equivale a remover a parte inteira de um número.

A construção de uma série unidimensional de Richtmyer é extremamente fácil e a regra de formação j-ésimo elemento da seqüência é dada pela fórmula

$$r_j = j\xi \bmod 1, \quad j = 1, 2, \dots \quad 4.2.1$$

onde $x \bmod y$ é o resto da divisão de x por y e ξ é um número irracional qualquer. Weyl também provou que essas séries têm distribuição uniforme em $[0, 1]$, (Takhtamyshev, Vandewoestyne, e Cools, 2007).

A expansão da idéia para o caso multidimensional é obtida usando números irracionais (ξ) diferentes para cada dimensão. Reescrevendo a equação 4.2.1 para o caso d-dimensional tem-se

$$r_{k,j} = j\xi_k \bmod 1, \quad j = 1, 2, \dots \text{ e } k = 1, 2, \dots, d \quad 4.2.2$$

Portanto, do ponto de vista operacional, a única dificuldade para aumentar a dimensionalidade da série de Richtmyer é a disponibilidade de números irracionais.

Uma forma fácil de obter os d diferentes números irracionais ξ_k é usar a raiz quadrada dos primeiros d números primos, caso em que a série também é conhecida como seqüência de raiz quadrada. Se a dimensionalidade for tão elevada que a obtenção de números primos suficientes seja problemática, há ainda uma alternativa que reduz significativamente a quantidade de números primos necessários. Richtmyer (1951) sugere o uso de produtórios das raízes de números primos controlados pelos dígitos da representação binária de k . Por exemplo, dado que os primeiros primos são $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$, para a sexta dimensão, isto é, para $k = \dots 006_{10} = \dots 110_2$, seria usado $\xi_6 = \sqrt{3}\sqrt{5}$.¹³

O uso das séries de Weyl como técnica amostral alternativa à Amostragem Aleatória Simples foi proposto por Richtmyer (1951), como uma forma de melhorar as estimativas Monte Carlo de integrais definidas (James, 1980). Como exposto

¹³ Ver Richtmyer 1951 para mais detalhes.

acima, uma vantagem no uso desta técnica é a simplicidade de gerá-las, mesmo com dimensionalidades elevadas. Porém, conforme relatam Takhtamyshev, Vandewoestyne, e Cools (2007), há pelo menos duas críticas usuais ao seu uso: a impossibilidade de representar exatamente os valores ξ_k em computadores e a existência de dependência entre as dimensões, particularmente, de correlação. No entanto, estes autores compararam o desempenho de Richtmyer e Sobol' para estimar integrais com até mil dimensões e informaram não terem percebido nenhuma consequência prática relacionada a estas duas restrições. Além disso, concluíram que, além de ser muito mais rápida de gerar, a série de Richtmyer supera Sobol' em precisão em muitas situações com tamanho da amostra pequeno.

O problema da impossibilidade de representar números irracionais em computadores pode ser expresso como a diferença entre ξ_k e ξ_k^* (a representação utilizada pelo computador), isto é, o erro ε da representação. Considerando que $\xi_k = \xi_k^* + \varepsilon$ e $j\xi_k = j\xi_k^* + j\varepsilon$, o problema de erro de precisão tenderia a aumentar com o aumento de j . Por outro lado, esse problema poderia ser compensado por uma redução rápida na discrepância univariada da série teórica conforme aumenta o tamanho da amostra (N). De fato, o erro padrão das estimativas Quasi-Monte Carlo obtidas por Richtmyer decresceria à ordem de $1/N$ (James, 1980).

Como a série de Richtmyer recebe pouca atenção e não foi encontrada muita informação sobre suas propriedades na literatura, foi considerado conveniente explorar seu comportamento antes de utilizá-la. A fim de observar como séries de Richtmyer geradas em computador se comportam efetivamente, foram geradas séries de tamanhos diferentes, ou seja, diferentes valores de N . Com relação ao aumento do valor de ξ_k , a bibliografia pesquisada também não menciona nenhum efeito, porém é comentado que a escolha deste parâmetro pode afetar o tamanho do

ciclo (James, Hoogland e Kleiss, 1997). Para avaliar a possível existência de efeito com aumento de ξ_k , este parâmetro também foi variado. Uma descrição detalhada dessas análises preliminares encontra-se no apêndice 4.A1, ao final deste capítulo.

Para fins das análises preliminares de Richtmyer, foram geradas séries multivariadas do tipo seqüência de raiz quadrada, isto é, o número irracional referente a k-ésima dimensão foi obtido extraindo a raiz quadrada do k-ésimo número primo, $\xi_k = \sqrt{p_k}$. A partir de seqüências com diferentes tamanhos, foi observada a uniformidade das distribuições unidimensionais para diferentes dimensões e a presença de correlação linear entre as dimensões usando o coeficiente de determinação r^2 .

A primeira análise procurou avaliar se o aumento do tamanho da amostra N, assim como aumento de ξ_k ou, equivalentemente, de p_k , tem algum impacto na qualidade das distribuições univariadas. A avaliação foi realizada com base na inspeção visual do histograma das distribuições obtidas. Como seria desejável, o aumento do tamanho da amostra melhorou a uniformidade das distribuições em todas as dimensões observadas. Esse resultado atenua a preocupação em relação ao problema de erro de representação em computadores, descrito acima. Com relação ao aumento da ordem da dimensão, foi observada uma menor uniformidade nas amostras geradas a partir de números primos (p_k) maiores. Contudo, a distribuição de dimensões tão elevadas quanto à milésima ainda foi mais homogênea que a obtida pelo gerador de números aleatórios do Matlab 6.5 para todos os tamanhos de amostras observados. Além disso, como o aumento da amostra melhora a sua homogeneidade, esse problema é mais pronunciado nas amostras menores.

Para a análise da presença de correlação linear entre as dimensões, foram geradas amostras de tamanhos 1.000 e 10.000 com dimensionalidades iguais a 100, 200 e 1.000. Em cada uma das seis amostras geradas, foram calculados os coeficientes de determinação (r^2) entre cada par de dimensões e registrados os valores médios e máximos. Também foram criados gráficos representativos das matrizes de coeficientes de determinação que permitiram a avaliação visual da incidência de r^2 com valores elevados.

Tanto para tamanho de amostra igual a 1.000, como para amostra igual a 10.000, foram observados aumento da média e do máximo conforme foi aumentada com a dimensionalidade da seqüência. Por outro lado, para as três dimensionalidades avaliadas (100, 200 e 1.000), o aumento da amostra de 1.000 para 10.000 reduziu bastante o r^2 médio, e mais, para as duas dimensionalidades menores (100 e 200) também houve redução significativa no r^2 máximo observado. O que chamou a atenção é que, em todos os casos, a média permaneceu muito pequena, sendo a maior média observada para r^2 igual a 0,0014 (para tamanho de amostra $N = 1.000$ e dimensionalidade $d = 1.000$). Por outro lado, os r^2 máximos foram comparativamente elevados (~ 1 no caso $N = d = 1.000$). Os elevados valores dos máximos em comparação com as médias e a observação dos gráficos (ver o apêndice 4.A1) sugerem que, no geral, as correlações entre as dimensões são muito baixas com algumas poucas exceções, nas quais as correlações são, de fato, elevadas. Essa observação sugere que se possa criar um filtro com base em um limite de r^2 máximo, para expurgar os números primos que introduzam correlação elevada entre duas ou mais dimensões. Esse procedimento encontra respaldo em James (1980), que sugere que o expurgo seja feito com base na avaliação visual das projeções par a par.

Por fim, também foi avaliado se haveria algum ganho em fazer o descarte dos pontos iniciais da série, como é sugerido para Sobol' (Galanti e Jung, 1997 e Glasserman, 2002). Para tal, foram repetidos os experimentos de correlação para amostras com tamanho 1.000 e dimensionalidades de 100, 200 e 1.000 geradas a partir de semente fixada em $j = 10.000$. Para as três dimensionalidades, foram observadas pequenas reduções nas médias e nos máximos de r^2 , quando comparadas com amostras de mesmo tamanho e dimensões geradas a partir de semente fixada em $j = 1$.

4.3 Halton e Hammersley

Como mencionado anteriormente, embora as seqüências de Richtmyer sejam uma forma extremamente simples de Quasi-Monte Carlo, elas recebem pouca atenção e aparecem pouco na literatura da área. As seqüências de Halton¹⁴, por outro lado, aparecem mais, freqüentemente para introduzir o Quasi-Monte Carlo. Embora seja um pouco mais trabalhosa que Richtmyer, a série de Halton pode ser considerada uma das formas mais simples de gerar pontos distribuídos uniformemente em $(0, 1)$ ¹⁵ e, assim como aquela, é facilmente expandida para múltiplas dimensões. Matematicamente, podem ser representadas pela fórmula

$$h_j = (\psi_{b_1}(j), \psi_{b_2}(j), \dots, \psi_{b_d}(j)), \quad \text{para } j = 0^{16}, 1, 2, \dots \quad 4.3.1$$

onde $\psi_b(\cdot)$ representa a função radical invertida, definida por

¹⁴ São uma forma de generalizar seqüências de Van der Corput para o caso multidimensional, selecionando bases diferentes para cada dimensão.

¹⁵ A bibliografia costuma definir este intervalo como $[0, 1)$ e, embora o valor zero faça parte de seqüências como Halton e Sobol', é necessário tomar cuidado para excluí-los em simulação de Monte Carlo em função dos problemas associados ao cálculo da função de probabilidade inversa em zero.

¹⁶ O valor zero consta apenas por fazer parte da definição, mas não deve ser utilizado para não gerar o ponto na origem, conforme a nota de roda-pé anterior.

$$\Psi_b(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}} \quad 4.3.2$$

onde a_i são os dígitos de j expresso na base b (chamada de expansão base- b ou b -ária) lidos da direita para esquerda. Isso equivale a tomar a representação na base b do inteiro não negativo j e rebatê-la em torno da vírgula (Glasserman, 2003). Este processo está exemplificado na tabela 4.3.1, que demonstra como são obtidos os oito primeiros termos da série gerada a partir da base $b = 2$ e $b = 3$.

j	Dimensão 1 (base = 2)			Dimensão 2 (base = 3)		
	j em base 2	$\Psi_2(j)$ em base 2	$\Psi_2(j) = h_{j,1}$	j em base 3	$\Psi_3(j)$ em base 3	$\Psi_3(j) = h_{j,2}$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0,1	1/2	1	0,1	1/3
2	10	0,01	1/4	2	0,2	2/3
3	11	0,11	3/4	10	0,01	1/9
4	100	0,001	1/8	11	0,11	4/9
5	101	0,101	5/8	12	0,21	7/9
6	110	0,011	3/8	20	0,02	2/9
7	111	0,111	7/8	21	0,12	5/9

Tabela 4.3.1 Construção dos sete valores iniciais da seqüência de Halton / Van der Corput para o caso de base dois e três, que correspondem aos números de Halton para as dimensões 1 ($h_{j,1}$) e 2 ($h_{j,2}$)

No caso multidimensional, é necessário utilizar uma base b diferente para cada dimensão, porém, a fim de evitar que ocorra alguma relação de periodicidade entre duas dimensões, é necessário que as bases sejam números primos relativos. Naturalmente, a solução mais fácil para os valores dos b_i é usar os números primos que são, por definição, primos relativos. Assim como ocorre com séries de Richtmyer, é possível modelar problemas com número ilimitado de dimensões, usando séries de Halton, pois a quantidade de números primos é ilimitada.

Se o tamanho da amostra, N , puder ser definido de antemão, isto é, se não for necessário trabalhar com a série infinita¹⁷, mas apenas com um conjunto finito de

¹⁷ Uma simulação Monte Carlo pode ser estruturada de forma a prosseguir até que a variância das estimativas seja menor que um limite previamente estabelecido, o que requer que se trabalhe com séries infinitas. Esta abordagem não é contemplada nesta tese.

pontos, é possível melhorar um pouco o desempenho de Halton. O procedimento consiste em substituir os pontos da seqüência de Halton d-dimensional, definidos pela equação 4.3.1, pelos pontos

$$h_j = (j/N, \psi_{b_1}(j), \psi_{b_2}(j), \dots, \psi_{b_{d-1}}(j)), \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots \quad 4.3.3$$

onde a última seqüência de Van der Corput – que é a que usa o número primo de maior magnitude – é abandonada e substituída pelo conjunto de pontos formados por j/N . Esse novo conjunto de pontos d-dimensionais é conhecido como conjunto de pontos de Hammersley e apresenta uniformidade ligeiramente superior que a que seria obtido pela equação 4.3.3, (Glasserman, 2003).

Na tabela 4.3.2 são apresentados os primeiros 32 valores para seqüências de Halton geradas com uso de bases iguais aos dez primeiros números primos. Em cada coluna, é possível perceber um padrão, que é a característica das séries de Van der Corput preencherem o intervalo unitário da esquerda para a direita em passadas sucessivas (Galanti e Jung, 1997). Por exemplo, na seqüência referente à base três, os valores de $j = 0$ até $j = 2$ são crescentes e representam à primeira passada, ou ciclo. O segundo ciclo referente à base três, demarcado com fundo cinza, compreende $j = 3$ a $j = 5$. Observando a tabela, na qual foi usado o fundo cinza e branco para ajudar a distinguir entre os diferentes ciclos, pode ser visto que este padrão se repete. Além de todos os ciclos referentes à base três serem preenchidos da esquerda para a direita, isto é, em ordem crescente, todos têm o comprimento três.

No caso geral, uma seqüência gerada na base b_k , tem ciclos de crescimento de tamanho b_k . Como os ciclos das diferentes dimensões têm tamanhos diferentes e primos entre si, os pontos multivariados se distribuem pelo hiper-cubo unitário de forma mais que lembra como os discos de um hodômetro preenchem o espaço das

quilometragens possíveis. O problema deste mecanismo é que, para modelos de dimensionalidade muito elevada, é necessário o uso de números primos de maior magnitude e, conseqüentemente, as seqüências atribuídas a algumas dimensões têm ciclos muito longos. Isso significa dizer que estas seqüências terão longos trechos de crescimento contínuo e ainda, nos casos extremos, em que ocorra $b_k > b_{k-1} > N$, a projeção dos N pontos sobre as dimensões $k-1$ e k terá a forma de uma reta. Assim, o crescimento da dimensionalidade leva a redução da uniformidade da distribuição de um conjunto finito de pontos, (Glasserman, 2003) ou, equivalentemente, na perda da qualidade.

Essa perda de qualidade das dimensões de maior ordem - conforme descrito na seção 4.1.1 - resultante do aumento da base (b_i) nas seqüências de Halton, é exemplificada nos painéis da figura 4.3.1. A figura apresenta os 100 primeiros pontos (incluindo os 32 apresentados na tabela 4.3.2) para as dimensões 1, 2, 9 e 10. Na primeira coluna (painéis 1A, 1B e 1C) pode ser visto que as duas primeiras dimensões apresentam pontos bem distribuídos, tanto em conjunto como tomados dimensão a dimensão. Na segunda coluna, que representa as dimensões 1 e 10, pode ser visto que distribuição unidimensional da dimensão 10 é menos homogênea que a da dimensão 1 (e 2), mas que a distribuição conjunta das duas não apresenta clusters ou grandes áreas vazias. Finalmente, a terceira coluna, que representa as dimensões 9 e 10, mostra que, além das distribuições unidimensionais de ambas serem menos homogêneas que as dimensões 1 e 2, a distribuição conjunta apresenta grandes regiões não preenchidas, como pode ser visto na projeção par a par (painel 3A). Essa análise reflete a queda de qualidade das dimensões de ordem superior nas técnicas Quasi-Monte Carlo apresentada na seção 4.1.1, estendendo o problema de queda de qualidade à própria distribuição unidimensional, e não apenas

na interação entre as dimensões. Conforme explicado acima, esse problema pode exigir tamanhos de amostras muito grandes para modelos de maior dimensionalidade.

j	dim=1	dim=2	dim=3	dim=4	dim=5	dim=6	dim=7	dim=8	dim=9	dim=10
	b=2	b=3	b=5	b=7	b=11	b=13	b=17	b=19	b=23	b=27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,5	0,3333	0,2	0,1429	0,0909	0,0769	0,0588	0,0526	0,0435	0,0370
2	0,25	0,6667	0,4	0,2857	0,1818	0,1538	0,1176	0,1053	0,0870	0,0741
3	0,75	0,1111	0,6	0,4286	0,2727	0,2308	0,1765	0,1579	0,1304	0,1111
4	0,125	0,4444	0,8	0,5714	0,3636	0,3077	0,2353	0,2105	0,1739	0,1481
5	0,625	0,7778	0,04	0,7143	0,4545	0,3846	0,2941	0,2632	0,2174	0,1852
6	0,375	0,2222	0,24	0,8571	0,5455	0,4615	0,3529	0,3158	0,2609	0,2222
7	0,875	0,5556	0,44	0,0204	0,6364	0,5385	0,4118	0,3684	0,3043	0,2593
8	0,0625	0,8889	0,64	0,1633	0,7273	0,6154	0,4706	0,4211	0,3478	0,2963
9	0,5625	0,037	0,84	0,3061	0,8182	0,6923	0,5294	0,4737	0,3913	0,3333
10	0,3125	0,3704	0,08	0,449	0,9091	0,7692	0,5882	0,5263	0,4348	0,3704
11	0,8125	0,7037	0,28	0,5918	0,0083	0,8462	0,6471	0,5789	0,4783	0,4074
12	0,1875	0,1481	0,48	0,7347	0,0992	0,9231	0,7059	0,6316	0,5217	0,4444
13	0,6875	0,4815	0,68	0,8776	0,1901	0,0059	0,7647	0,6842	0,5652	0,4815
14	0,4375	0,8148	0,88	0,0408	0,2810	0,0828	0,8235	0,7368	0,6087	0,5185
15	0,9375	0,2593	0,12	0,1837	0,3719	0,1598	0,8824	0,7895	0,6522	0,5556
16	0,0313	0,5926	0,32	0,3265	0,4628	0,2367	0,9412	0,8421	0,6957	0,5926
17	0,5313	0,9259	0,52	0,4694	0,5537	0,3136	0,0035	0,8947	0,7391	0,6296
18	0,2813	0,0741	0,72	0,6122	0,6446	0,3905	0,0623	0,9474	0,7826	0,6667
19	0,7813	0,4074	0,92	0,7551	0,7355	0,4675	0,1211	0,0028	0,8261	0,7037
20	0,1563	0,7407	0,16	0,898	0,8264	0,5444	0,1799	0,0554	0,8696	0,7407
21	0,6563	0,1852	0,36	0,0612	0,9174	0,6213	0,2388	0,1080	0,9130	0,7778
22	0,4063	0,5185	0,56	0,2041	0,0165	0,6982	0,2976	0,1607	0,9565	0,8148
23	0,9063	0,8519	0,76	0,3469	0,1074	0,7751	0,3564	0,2133	0,0019	0,8519
24	0,0938	0,2963	0,96	0,4898	0,1983	0,8521	0,4152	0,2659	0,0454	0,8889
25	0,5938	0,6296	0,008	0,6327	0,2893	0,9290	0,4740	0,3186	0,0888	0,9259
26	0,3438	0,963	0,208	0,7755	0,3802	0,0118	0,5329	0,3712	0,1323	0,9630
27	0,8438	0,0123	0,408	0,9184	0,4711	0,0888	0,5917	0,4238	0,1758	0,0014
28	0,2188	0,3457	0,608	0,0816	0,5620	0,1657	0,6505	0,4765	0,2193	0,0384
29	0,7188	0,679	0,808	0,2245	0,6529	0,2426	0,7093	0,5291	0,2628	0,0754
30	0,4688	0,1235	0,048	0,3673	0,7438	0,3195	0,7682	0,5817	0,3062	0,1125
31	0,9688	0,4568	0,248	0,5102	0,8347	0,3964	0,8270	0,6343	0,3497	0,1495

Tabela 4.3.2 Amostras de seqüências de Halton para as primeiras dez dimensões (base igual a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 27). O fundo cinza ajuda a separar os diferentes ciclos de crescimento de cada série.

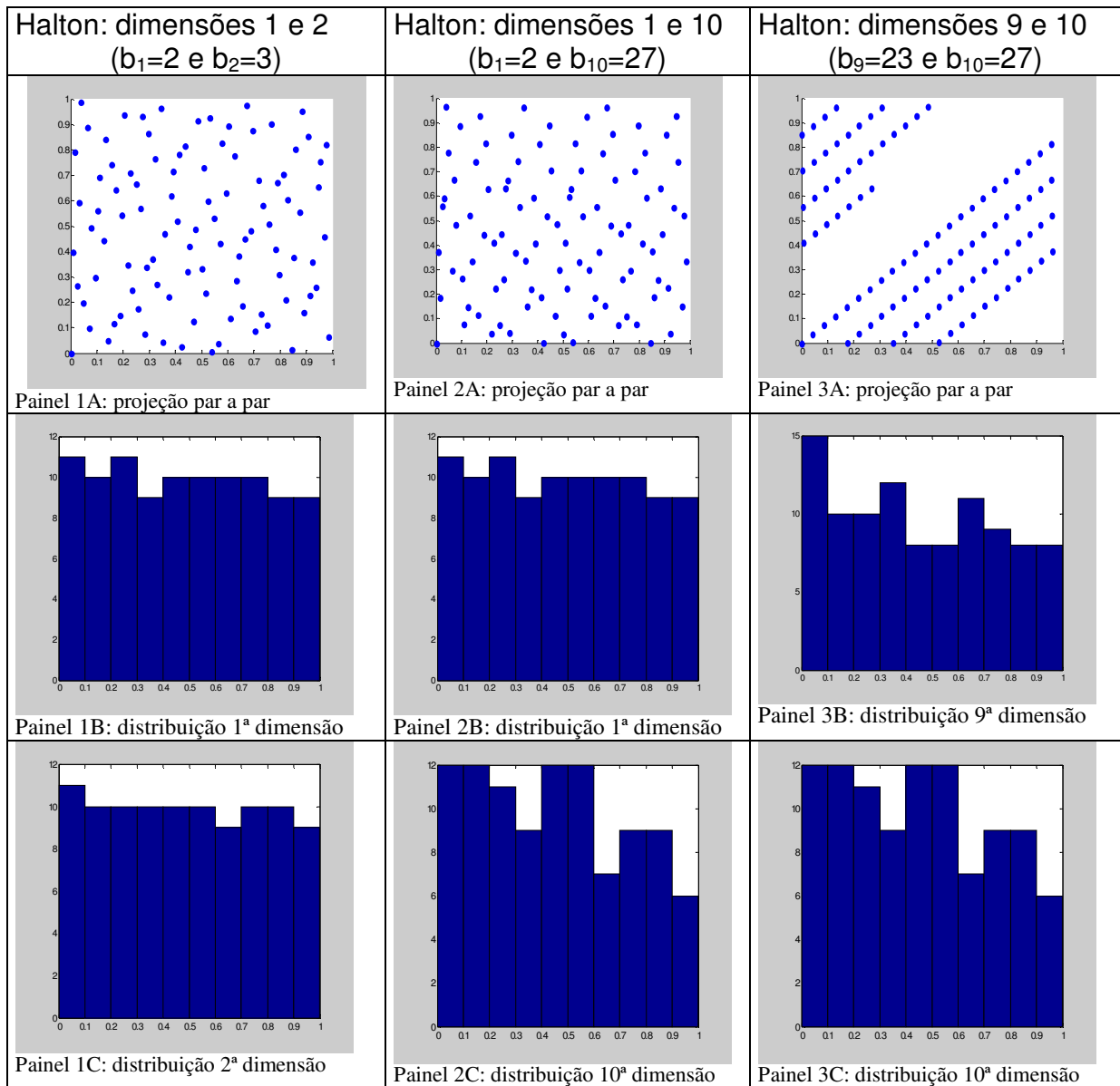


Figura 4.3.1 Projeção par a par de 100 pontos gerados por Halton e as distribuições unidimensionais desses pontos: dimensões 1 e 2, 1 e 10 e 9 e 10.

4.4 Sobol'

Em função dos bons resultados que produz, uma técnica Quasi-Monte Carlo que se destaca na literatura é a série de Sobol', (Sobol', 1967), que é

apresentada em detalhe no apêndice deste capítulo¹⁸. De fato, em vários estudos realizados o Sobol' consegue superar os resultados obtidos por outras técnicas Quasi-Monte Carlo, além da Amostragem Aleatória Simples, (ver, p. ex., Galanti e Jung, 1997 e Glasserman, 2003). Esta seção apresenta um resumo desta técnica.

Semelhantemente às técnicas de Richtmyer e Halton, o uso de Sobol' envolve a construção de uma série unidimensional diferente para cada dimensão do problema simulado. Ainda em analogia com essas duas séries, no Sobol', um polinômio primitivo módulo 2 diferente faz o papel dos números primos na obtenção da diferenciação entre cada dimensão. Segundo Jäckel (2002), o uso de diferentes polinômios primitivos assegura o preenchimento o hiper-cubo unitário de forma homogênea e, ao mesmo tempo, mantém a uniformidade em cada dimensão.

A forma geral dos polinômios primitivos utilizados na construção de cada dimensão de Sobol' é dada pela equação

$$P = a_0 x^g + a_1 x^{g-1} + \dots + a_{g-1} x^1 + 1 = \sum_{k=0}^{g-1} a_k x^{g-k} \quad 4.4.1$$

onde $a_0 = a_g = 1$ e $a_k = 0$ ou 1 para $k = 1, 2, \dots, g-1$. Contudo, nem todo polinômio que tem esta forma é primitivo. Segundo Jäckel (2002), a determinação de quais polinômios são primitivos envolve cálculos bastante complexos, o que torna a seleção de polinômios primitivos muito mais difícil que a determinação dos números primos usados na construção de Halton ou Richtmyer.

Na prática, os polinômios primitivos são obtidos em tabelas que se encontram disponíveis na literatura, porém a maioria dessas tabelas não é grande o suficiente para diversas aplicações em finanças. Uma tabela com 160 polinômios, que pode

¹⁸ O apêndice no final deste capítulo contém uma versão mais completa desta seção e destina-se aos leitores que pretendam trabalhar com séries de Sobol' ou que procurem um entendimento mais detalhado. A presente seção é um resumo deste apêndice e visa, principalmente, apresentar os conceitos necessários para o entendimento do restante desta tese.

ser consultada gratuitamente através da Internet, é apresentada em Press et alli (1998). No entanto, para problemas com dimensionalidade ainda maior, a obtenção de polinômios é mais difícil. Uma alternativa contendo muito mais polinômios – e foi a utilizada nessa tese – é a tabela que acompanha Jäckel (2002). Essa tabela, apresentada em meio ótico, teria mais de oito milhões de polinômios primitivos válidos, o que deve ser suficiente para qualquer modelo.

A utilização dos polinômios primitivos no processo de geração de seqüências de Sobol' se dá na etapa de determinação dos chamados números direcionais. Cada dimensão (k) da seqüência de Sobol' tem um conjunto único de números direcionais (m_i , $i = 1, 2, 3, \dots$) e a obtenção do j -ésimo número quasi-aleatório dessa dimensão ($s_{j,k}$ ou, simplificando a notação, s_j) é obtida por uma combinação única desses números direcionais. Portanto, o primeiro passo é a obtenção de $m_1, m_2, m_3, \dots, m_w$, onde o valor de w determina o maior j para o qual é possível computar s_j . Tipicamente, $w = 32$, o que limita j a 2^{32} , que atende qualquer necessidade realista de simulação.

A geração dos m_i é realizada a partir de uma regra de recorrência determinada pelos coeficientes do polinômio primitivo. A definição desta regra utiliza os coeficientes do polinômio (a_k) da equação 4.4.1 e os substitui na equação 4.4.2, apresentada abaixo:

$$m_i = 2^1 a_1 m_{i-1} \oplus 2^2 a_2 m_{i-2} \oplus \dots \oplus 2^{g-1} a_{g-1} m_{i-g+1} \oplus 2^g a_g m_{i-g} \oplus m_{i-g}, \quad 4.4.2$$

onde \oplus representa uma soma bit a bit sem carregamento do 1, também chamada de operação bit XOR. A característica recursiva da equação 4.4.2 faz com que seja necessário predefinir os g primeiros m_i 's, isto é, m_1, m_2, \dots, m_g , chamados de números direcionais iniciais.

Em princípio, é possível atribuir qualquer inteiro positivo impar menor que 2^i aos m_i iniciais, isto é, m_1 pode ser apenas 1, m_2 pode ser 1 ou 3, m_3 pode ser 1, 3, 5 ou 7, e assim por diante. No entanto, a qualidade do conjunto de pontos gerados em R^d dependerá desta escolha e, portanto, existem escolhas melhores que outras. É comum que a tabela de polinômios primitivos venha acompanhada de uma outra tabela, com números direcionais iniciais sugeridos para os primeiros polinômios, o que resolve o problema de escolha para estes. Em Jäckel há uma tabela com sugestão de números direcionais iniciais para os primeiros 32 polinômios. Para as demais dimensões, a bibliografia sugere algumas alternativas de escolha aleatória (Silva, 2002 e Jäckel, 2002), que são comentadas no apêndice 4.A2.

Os números direcionais iniciais sugeridos nas tabelas têm como objetivo assegurar a melhor distribuição dos pontos. No contexto de Sobol', a qualidade da distribuição de pontos é avaliada não apenas pela discrepância – que avalia conjuntos finitos de pontos – como por duas propriedades propostas por Sobol' para caracterizar séries multivariadas infinitas, que são chamadas de propriedades A e A' de Sobol'. Uma seqüência de pontos d-dimensionais satisfaz a propriedade A se, para qualquer segmento com comprimento 2^d desta seqüência, houver um ponto em cada um dos 2^d hiper-cubos resultantes de dividir em dois pedaços cada comprimento unitário ao longo de cada dimensão. Por exemplo, quando $d = 2$, o quadrado unitário pode ser dividido em quatro quadrados de igual tamanho. Uma seqüência de pontos em R^2 satisfaz a propriedade A se, para quaisquer quatro pontos consecutivos desta, houver um ponto em cada um destes quatro quadrados. Sobol' também definiu a propriedade A', que é ainda mais severa. Para satisfazer a propriedade A', uma seqüência de pontos em um hiper cubo d-dimensional deve ter um ponto em cada um dos 4^d hiper-cubos resultantes de dividir em quatro pedaços

cada comprimento unitário ao longo de cada dimensão, para qualquer segmento de tamanho 4^d .

A perda de qualidade conforme aumenta a ordem da dimensão também está associada à forma como se procura garantir aderência às propriedades A e A'. Em geral, as tabelas de números direcionais iniciais pretendem garantir a aderência às propriedades A e A' para algumas poucas dimensões que, por isso mesmo, devem ser destinadas às variáveis mais importantes do modelo de simulação. Como os números direcionais iniciais tabelados são referentes aos primeiros polinômios da tabela de polinômios e a propriedade A' é assegurada apenas para os primeiros dentre estes, a perda de qualidade conforme a ordem da dimensão aumenta, é reforçada por construção.

Embora a aderência de uma série multidimensional às propriedades A' ou A possa, potencialmente, levar a conjuntos de pontos com menor discrepância, cabe notar que a aplicação prática das propriedades esbarra na questão do tamanho da amostra (N) necessário para que o benefício seja obtido. Isto porque, para que todos os hiper-cubos previstos sejam ocupados, o tamanho da amostra necessária pode ser impraticável mesmo em problemas com dimensionalidade apenas um pouco maiores (Jäckel, 2002). Finalmente, é preciso notar que, mesmo quando há alegação de aderência às propriedades A e A', as séries produzidas nem sempre passam em testes realizados por terceiros (Glasserman, 2002).

Assim como Halton apresenta ciclos de preenchimento da esquerda para direita, Sobol' também apresenta características próprias. A observação de uma seqüência de pontos de uma dimensão qualquer de Sobol' revela um padrão de alternância entre os intervalos $[0, 0,5)$ e $[0,5, 1)$ que pode ser associado a propriedade A (Galanti e Jung, 1997 e Jäckel, 2002). A tabela 4.4.1 apresenta os

primeiros 63 valores gerados a partir dos dez primeiros polinômios primitivos e números direcionais iniciais apresentados em Jäckel (2002) e com o uso de Gray code¹⁹. Nesta tabela, os s_j pertencentes ao intervalo $(0, 0,5)$ estão sobre fundo branco ao passo que, os s_j pertencentes ao intervalo $[0,5, 1)$ estão sobre fundo cinza. Pelo padrão de branco e cinza na coluna da primeira dimensão, pode ser visto que, para o segmento apresentado, os valores de $s_{1, j}$ – os números de Sobol' referentes à primeira dimensão - alternam entre os dois intervalos de dois em dois, isto é, dois valores em um intervalo e dois valores no outro intervalo. Este processo se repete até o final da tabela. Na segunda coluna, pode ser visto que os valores se alternam sem que haja inversão no padrão de alternância, isto é, sem que haja dois valores do mesmo intervalo se sucedendo. É fácil observar que o padrão das duas primeiras dimensões garante a propriedade A. Já para as demais colunas, os padrões não são tão óbvios.

Outra característica de interesse das seqüências de Sobol' diz respeito a forma como o intervalo $[0, 1]$ é preenchido em ciclos de refinamentos sucessivos. A tabela 4.4.2 repete os valores da tabela 4.4.1, mas o destaque em fundo cinza demarca os ciclos de refinamento das dez dimensões apresentadas. O primeiro ciclo é composto apenas do primeiro número de cada dimensão, isto é, $s_{1,k}$ ou, simplesmente, s_1 . O segundo ciclo compreende dois números, s_2 e s_3 , e está destacado no quadro com fundo cinza. O terceiro ciclo compreende quatro números – s_j para $j = 4, 5, 6$ e 7 -, o quarto ciclo – também destacado com fundo cinza – é caracterizado por $j = 8$ até $j = 15$ e contém oito números. No quinto ciclo, contendo dezesseis números, j varia de 16 a 31 e, finalmente, o sexto ciclo, com 32 números vai de $j = 32$ até $j = 63$.

¹⁹ O Gray code é abordado no apêndice. O Gray code pode ser usado para alterar a ordem dos números inteiros de forma que o algoritmo de Sobol' possa se beneficiar de certas propriedades para obter maior eficiência computacional. Para fins do abordado nesta seção, não é necessário o seu entendimento.

j	Dimensões									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.25	0.75
3	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.75	0.25
4	0.375	0.375	0.625	0.125	0.875	0.875	0.125	0.625	0.125	0.875
5	0.875	0.875	0.125	0.625	0.375	0.375	0.625	0.125	0.625	0.375
6	0.625	0.125	0.375	0.375	0.125	0.625	0.875	0.875	0.375	0.125
7	0.125	0.625	0.875	0.875	0.625	0.125	0.375	0.375	0.875	0.625
8	0.1875	0.3125	0.3125	0.6875	0.5625	0.1875	0.0625	0.9375	0.5625	0.0625
9	0.6875	0.8125	0.8125	0.1875	0.0625	0.6875	0.5625	0.4375	0.0625	0.5625
10	0.9375	0.0625	0.5625	0.9375	0.3125	0.4375	0.8125	0.6875	0.8125	0.8125
11	0.4375	0.5625	0.0625	0.4375	0.8125	0.9375	0.3125	0.1875	0.3125	0.3125
12	0.3125	0.1875	0.9375	0.5625	0.4375	0.8125	0.1875	0.3125	0.6875	0.9375
13	0.8125	0.6875	0.4375	0.0625	0.9375	0.3125	0.6875	0.8125	0.1875	0.4375
14	0.5625	0.4375	0.1875	0.8125	0.6875	0.5625	0.9375	0.0625	0.9375	0.1875
15	0.0625	0.9375	0.6875	0.3125	0.1875	0.0625	0.4375	0.5625	0.4375	0.6875
16	0.09375	0.46875	0.84375	0.40625	0.28125	0.34375	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625
17	0.59375	0.96875	0.34375	0.90625	0.78125	0.84375	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625
18	0.84375	0.21875	0.09375	0.15625	0.53125	0.09375	0.28125	0.59375	0.59375	0.65625
19	0.34375	0.71875	0.59375	0.65625	0.03125	0.59375	0.78125	0.09375	0.09375	0.15625
20	0.46875	0.09375	0.46875	0.28125	0.65625	0.71875	0.65625	0.46875	0.96875	0.53125
21	0.96875	0.59375	0.96875	0.78125	0.15625	0.21875	0.15625	0.96875	0.46875	0.03125
22	0.71875	0.34375	0.71875	0.03125	0.40625	0.96875	0.40625	0.21875	0.71875	0.28125
23	0.21875	0.84375	0.21875	0.53125	0.90625	0.46875	0.90625	0.71875	0.21875	0.78125
24	0.15625	0.15625	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625	0.59375	0.15625	0.28125	0.46875
25	0.65625	0.65625	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625	0.09375	0.65625	0.78125	0.96875
26	0.90625	0.40625	0.28125	0.59375	0.09375	0.15625	0.34375	0.40625	0.03125	0.71875
27	0.40625	0.90625	0.78125	0.09375	0.59375	0.65625	0.84375	0.90625	0.53125	0.21875
28	0.28125	0.28125	0.15625	0.96875	0.21875	0.53125	0.71875	0.53125	0.40625	0.59375
29	0.78125	0.78125	0.65625	0.46875	0.71875	0.03125	0.21875	0.03125	0.90625	0.09375
30	0.53125	0.03125	0.90625	0.71875	0.96875	0.78125	0.46875	0.78125	0.15625	0.34375
31	0.03125	0.53125	0.40625	0.21875	0.46875	0.28125	0.96875	0.28125	0.65625	0.84375
32	0.046875	0.265625	0.609375	0.578125	0.703125	0.640625	0.265625	0.671875	0.359375	0.046875
33	0.546875	0.765625	0.109375	0.078125	0.203125	0.140625	0.765625	0.171875	0.859375	0.546875
34	0.796875	0.015625	0.359375	0.828125	0.453125	0.890625	0.515625	0.921875	0.109375	0.796875
35	0.296875	0.515625	0.859375	0.328125	0.953125	0.390625	0.015625	0.421875	0.609375	0.296875
36	0.421875	0.140625	0.234375	0.703125	0.328125	0.265625	0.390625	0.046875	0.484375	0.921875
37	0.921875	0.640625	0.734375	0.203125	0.828125	0.765625	0.890625	0.546875	0.984375	0.421875
38	0.671875	0.390625	0.984375	0.953125	0.578125	0.015625	0.640625	0.296875	0.234375	0.171875
39	0.171875	0.890625	0.484375	0.453125	0.078125	0.515625	0.140625	0.796875	0.734375	0.671875
40	0.234375	0.078125	0.796875	0.140625	0.140625	0.578125	0.328125	0.359375	0.796875	0.109375
41	0.734375	0.578125	0.296875	0.640625	0.640625	0.078125	0.828125	0.859375	0.296875	0.609375
42	0.984375	0.328125	0.046875	0.390625	0.890625	0.828125	0.578125	0.109375	0.546875	0.859375
43	0.484375	0.828125	0.546875	0.890625	0.390625	0.328125	0.078125	0.609375	0.046875	0.359375
44	0.359375	0.453125	0.421875	0.015625	0.765625	0.453125	0.453125	0.984375	0.921875	0.984375
45	0.859375	0.953125	0.921875	0.515625	0.265625	0.953125	0.953125	0.484375	0.421875	0.484375
46	0.609375	0.203125	0.671875	0.265625	0.015625	0.203125	0.703125	0.734375	0.671875	0.234375
47	0.109375	0.703125	0.171875	0.765625	0.515625	0.703125	0.203125	0.234375	0.171875	0.734375
48	0.078125	0.234375	0.265625	0.984375	0.984375	0.984375	0.796875	0.453125	0.515625	0.390625
49	0.578125	0.734375	0.765625	0.484375	0.484375	0.484375	0.296875	0.953125	0.015625	0.890625
50	0.828125	0.484375	0.515625	0.734375	0.234375	0.734375	0.046875	0.203125	0.765625	0.640625
51	0.328125	0.984375	0.015625	0.234375	0.734375	0.234375	0.546875	0.703125	0.265625	0.140625
52	0.453125	0.359375	0.890625	0.859375	0.109375	0.109375	0.921875	0.828125	0.640625	0.515625
53	0.953125	0.859375	0.390625	0.359375	0.609375	0.609375	0.421875	0.328125	0.140625	0.015625
54	0.703125	0.109375	0.140625	0.609375	0.859375	0.359375	0.171875	0.578125	0.890625	0.265625
55	0.203125	0.609375	0.640625	0.109375	0.359375	0.859375	0.671875	0.078125	0.390625	0.765625
56	0.140625	0.421875	0.078125	0.296875	0.421875	0.796875	0.859375	0.515625	0.078125	0.453125
57	0.640625	0.921875	0.578125	0.796875	0.921875	0.296875	0.359375	0.015625	0.578125	0.953125
58	0.890625	0.171875	0.828125	0.046875	0.671875	0.546875	0.109375	0.765625	0.328125	0.703125
59	0.390625	0.671875	0.328125	0.546875	0.171875	0.046875	0.609375	0.265625	0.828125	0.203125
60	0.265625	0.046875	0.703125	0.421875	0.546875	0.171875	0.984375	0.140625	0.203125	0.578125
61	0.765625	0.546875	0.203125	0.921875	0.046875	0.671875	0.484375	0.640625	0.703125	0.078125
62	0.515625	0.296875	0.453125	0.171875	0.296875	0.421875	0.234375	0.390625	0.453125	0.328125
63	0.015625	0.796875	0.953125	0.671875	0.796875	0.921875	0.734375	0.890625	0.953125	0.828125

Tabela 4.4.1 Exibição da alternância entre os intervalos $[0, 0.5)$ e $[0.5, 0)$ para os primeiros 63 valores gerados a partir dos primeiros dez polinômios primitivos com os números direcionais iniciais apresentados em Jäckel com uso de Gray code. Os valores maior ou igual a 0,5 estão destacados em fundo cinza.

Pode ser observado que os números contidos em cada ciclo são os mesmos nas dez dimensões. De fato, o primeiro ciclo de qualquer dimensão de Sobol' é sempre o número 0,5. Já o segundo ciclo é composto de 0,25 e 0,75 para qualquer dimensão, variando apenas a ordem em que estes dois aparecem. Por sua vez, o terceiro ciclo é sempre composto por 0,125, 0,375, 0,625 e 0,875. Esses valores se repetem para qualquer dimensão (ou polinômio) de Sobol'²⁰. Uma observação dos valores revela que, a cada ciclo, os subintervalos delimitados pelos pontos 0, 1 e os pontos dos ciclos anteriores são bipartidos em dois intervalos de mesmo tamanho. Por exemplo, o primeiro ciclo biparte o intervalo [0, 1] em dois intervalos iguais. Os dois pontos do segundo ciclo bipartem cada um desses dois intervalos na metade. Assim, a cada ciclo, dobra a quantidade de pontos e, desta forma, a representação é refinada.

Por fim, é importante notar que o conjunto de números de cada ciclo é exatamente o mesmo que os utilizados em uma Amostragem Descritiva de mesmo tamanho (N), que é obtido pela equação 3.1. Como foi visto no capítulo 3, esse conjunto de pontos é o de menor discrepância e, embora o conjunto de pontos formado pela união de dois ou mais ciclos não tenha a menor discrepância possível para o tamanho da amostra, ainda apresenta boa uniformidade unidimensional.

²⁰ O uso do Gray code, comentado anteriormente, permuta a ordem dos pontos multidimensionais, ou seja, permuta as linhas da tabela 4.4.2. Contudo, essa permutação é restrita a cada ciclo, preservando o conjunto de pontos.

j	Dimensões									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.25	0.75
3	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.75	0.25
4	0.375	0.375	0.625	0.125	0.875	0.875	0.125	0.625	0.125	0.875
5	0.875	0.875	0.125	0.625	0.375	0.375	0.625	0.125	0.625	0.375
6	0.625	0.125	0.375	0.375	0.125	0.625	0.875	0.875	0.375	0.125
7	0.125	0.625	0.875	0.875	0.625	0.125	0.375	0.375	0.875	0.625
8	0.1875	0.3125	0.3125	0.6875	0.5625	0.1875	0.0625	0.9375	0.5625	0.0625
9	0.6875	0.8125	0.8125	0.1875	0.0625	0.6875	0.5625	0.4375	0.0625	0.5625
10	0.9375	0.0625	0.5625	0.9375	0.3125	0.4375	0.8125	0.6875	0.8125	0.8125
11	0.4375	0.5625	0.0625	0.4375	0.8125	0.9375	0.3125	0.1875	0.3125	0.3125
12	0.3125	0.1875	0.9375	0.5625	0.4375	0.8125	0.1875	0.3125	0.6875	0.9375
13	0.8125	0.6875	0.4375	0.0625	0.9375	0.3125	0.6875	0.8125	0.1875	0.4375
14	0.5625	0.4375	0.1875	0.8125	0.6875	0.5625	0.9375	0.0625	0.9375	0.1875
15	0.0625	0.9375	0.6875	0.3125	0.1875	0.0625	0.4375	0.5625	0.4375	0.6875
16	0.09375	0.46875	0.84375	0.40625	0.28125	0.34375	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625
17	0.59375	0.96875	0.34375	0.90625	0.78125	0.84375	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625
18	0.84375	0.21875	0.09375	0.15625	0.53125	0.09375	0.28125	0.59375	0.59375	0.65625
19	0.34375	0.71875	0.59375	0.65625	0.03125	0.59375	0.78125	0.09375	0.09375	0.15625
20	0.46875	0.09375	0.46875	0.28125	0.65625	0.71875	0.65625	0.46875	0.96875	0.53125
21	0.96875	0.59375	0.96875	0.78125	0.15625	0.21875	0.15625	0.96875	0.46875	0.03125
22	0.71875	0.34375	0.71875	0.03125	0.40625	0.96875	0.40625	0.21875	0.71875	0.28125
23	0.21875	0.84375	0.21875	0.53125	0.90625	0.46875	0.90625	0.71875	0.21875	0.78125
24	0.15625	0.15625	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625	0.59375	0.15625	0.28125	0.46875
25	0.65625	0.65625	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625	0.09375	0.65625	0.78125	0.96875
26	0.90625	0.40625	0.28125	0.59375	0.09375	0.15625	0.34375	0.40625	0.03125	0.71875
27	0.40625	0.90625	0.78125	0.09375	0.59375	0.65625	0.84375	0.90625	0.53125	0.21875
28	0.28125	0.28125	0.15625	0.96875	0.21875	0.53125	0.71875	0.53125	0.40625	0.59375
29	0.78125	0.78125	0.65625	0.46875	0.71875	0.03125	0.21875	0.03125	0.90625	0.09375
30	0.53125	0.03125	0.90625	0.71875	0.96875	0.78125	0.46875	0.78125	0.15625	0.34375
31	0.03125	0.53125	0.40625	0.21875	0.46875	0.28125	0.96875	0.28125	0.65625	0.84375
32	0.046875	0.265625	0.609375	0.578125	0.703125	0.640625	0.265625	0.671875	0.359375	0.046875
33	0.546875	0.765625	0.109375	0.078125	0.203125	0.140625	0.765625	0.171875	0.859375	0.546875
34	0.796875	0.015625	0.359375	0.828125	0.453125	0.890625	0.515625	0.921875	0.109375	0.796875
35	0.296875	0.515625	0.859375	0.328125	0.953125	0.390625	0.015625	0.421875	0.609375	0.296875
36	0.421875	0.140625	0.234375	0.703125	0.328125	0.265625	0.390625	0.046875	0.484375	0.921875
37	0.921875	0.640625	0.734375	0.203125	0.828125	0.765625	0.890625	0.546875	0.984375	0.421875
38	0.671875	0.390625	0.984375	0.953125	0.578125	0.015625	0.640625	0.296875	0.234375	0.171875
39	0.171875	0.890625	0.484375	0.453125	0.078125	0.515625	0.140625	0.796875	0.734375	0.671875
40	0.234375	0.078125	0.796875	0.140625	0.140625	0.578125	0.328125	0.359375	0.796875	0.109375
41	0.734375	0.578125	0.296875	0.640625	0.640625	0.078125	0.828125	0.859375	0.296875	0.609375
42	0.984375	0.328125	0.046875	0.390625	0.890625	0.828125	0.578125	0.109375	0.546875	0.859375
43	0.484375	0.828125	0.546875	0.890625	0.390625	0.328125	0.078125	0.609375	0.046875	0.359375
44	0.359375	0.453125	0.421875	0.015625	0.765625	0.453125	0.453125	0.984375	0.921875	0.984375
45	0.859375	0.953125	0.921875	0.515625	0.265625	0.953125	0.953125	0.484375	0.421875	0.484375
46	0.609375	0.203125	0.671875	0.265625	0.015625	0.203125	0.703125	0.734375	0.671875	0.234375
47	0.109375	0.703125	0.171875	0.765625	0.515625	0.703125	0.203125	0.234375	0.171875	0.734375
48	0.078125	0.234375	0.265625	0.984375	0.984375	0.984375	0.984375	0.453125	0.515625	0.390625
49	0.578125	0.734375	0.765625	0.484375	0.484375	0.484375	0.296875	0.953125	0.015625	0.890625
50	0.828125	0.484375	0.515625	0.734375	0.234375	0.734375	0.046875	0.203125	0.765625	0.640625
51	0.328125	0.984375	0.015625	0.234375	0.734375	0.234375	0.546875	0.703125	0.265625	0.140625
52	0.453125	0.359375	0.890625	0.859375	0.109375	0.109375	0.921875	0.828125	0.640625	0.515625
53	0.953125	0.859375	0.390625	0.359375	0.609375	0.609375	0.421875	0.328125	0.140625	0.015625
54	0.703125	0.109375	0.140625	0.609375	0.859375	0.359375	0.171875	0.578125	0.890625	0.265625
55	0.203125	0.609375	0.640625	0.109375	0.359375	0.859375	0.671875	0.078125	0.390625	0.765625
56	0.140625	0.421875	0.078125	0.296875	0.421875	0.796875	0.859375	0.515625	0.078125	0.453125
57	0.640625	0.921875	0.578125	0.796875	0.921875	0.296875	0.359375	0.015625	0.578125	0.953125
58	0.890625	0.171875	0.828125	0.046875	0.671875	0.546875	0.109375	0.765625	0.328125	0.703125
59	0.390625	0.671875	0.328125	0.546875	0.171875	0.046875	0.609375	0.265625	0.828125	0.203125
60	0.265625	0.046875	0.703125	0.421875	0.546875	0.171875	0.984375	0.140625	0.203125	0.578125
61	0.765625	0.546875	0.203125	0.921875	0.046875	0.671875	0.484375	0.640625	0.703125	0.078125
62	0.515625	0.296875	0.453125	0.171875	0.296875	0.421875	0.234375	0.390625	0.453125	0.328125
63	0.015625	0.796875	0.953125	0.671875	0.796875	0.921875	0.734375	0.890625	0.953125	0.828125

Tabela 4.4.2 Exibição dos ciclos de refinamentos sucessivos. Os primeiros 63 valores gerados a partir dos primeiros dez polinômios primitivos com os números direcionais iniciais apresentados em Jäckel com uso de Gray code. Os seis ciclos apresentados estão demarcados pelo fundo cinza e branco.

4.5 Outras Construções Quase-Monte Carlo

Existem várias outras técnicas Quasi-Monte Carlo além das descritas nas seções anteriores. Dentre estas, duas que são citadas com alguma frequência na literatura são Faure e *Lattice*²¹. Enquanto a primeira vem perdendo espaço na literatura de Quasi-Monte Carlo aplicado à finanças (junto com Halton), a segunda tem merecido bastante atenção e rivaliza com Sobol'. No que concerne ao conjunto de pontos gerados, Faure é uma forma de gerar seqüências infinitas, assim como Richtmyer, Halton ou Sobol', ao passo que a *Lattice* – ao menos em sua forma original – se destina a gerar um conjunto de pontos finitos. Esta seção faz uma descrição resumida dessas duas técnicas Quasi-Monte Carlo.

4.5.1 Faure

O método de Faure pode ser visto como uma modificação do método Halton, descrito na seção 4.3. Conforme foi visto, nas seqüências de Halton a diferenciação entre cada dimensão é obtida pela seleção de uma base única para cada dimensão. Também foi visto que, em cada dimensão, o preenchimento do intervalo $[0, 1)$ se dá da esquerda para a direita em ciclos de tamanho igual à base usada. Já com Faure, todas as dimensões utilizam um mesma base e a diferenciação é obtida por uma permutação dos números dentro de cada ciclo de uma seqüência de Halton (Moreira, 2001, Glasserman, 2002).

O primeiro passo é escolher uma base (b), que deve ser um número primo pelo menos tão grande quanto a dimensionalidade do problema. Definida a base, procede-se como na geração de uma dimensão da seqüência de Halton, obtendo a

²¹ Diferentemente das demais técnicas Quasi-Monte Carlo, que recebem o nome de seu proponente, *lattice* é um nome descritivo que poderia ser traduzido como “treliça”. Nesta tese se adotará o termo *Lattice*, com letra maiúscula, para enfatizar se tratar de uma técnica de amostragem como as demais.

expansão base- b de cada $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Esse processo gera uma representação única para cada j na forma $a_\infty \dots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$, onde a_i representa os dígitos da representação na base escolhida. A primeira dimensão de Faure é obtida continuando de forma idêntica à geração da dimensão de Halton com a base escolhida, com o uso da equação 4.3.2 (repetida abaixo)

$$f_{k=1}(j) = \psi_b(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{b^{i+1}}, \quad 4.5.1$$

onde $f_1(j)$ é o j -ésimo termo da dimensão 1, b é a base usada e a_i são os dígitos da representação de j na base b .

A diferenciação para as demais dimensões é obtidas aplicando uma transformação (diferente para cada dimensão $k = 2, 3, \dots, d$) sobre os a_i tal que $a_i \rightarrow a_{k,h}^*$ e substituindo o valores $a_{k,h}^*$ na equação 4.5.1. (Galanti e Jung, 1997). O resultado dessa transformação é simplesmente o de permutar os dígitos a_i necessários para representar j na base b , isto é, os que não estão à esquerda do último dígito não-zero da representação de j na base b . Esta transformação é dada pela equação:

$$a_{k,h}^*(j) = \left[\sum (k-1)^{i-h} C_h^i a_i(j) \right] \text{mod } b, \quad 4.5.2$$

onde $x \text{ mod } y$ é a operação que retorna o resto da divisão de x por y e $C_h^i = \frac{i!}{h!(i-h)!}$.

A equação 4.5.2 pode ser facilmente representada matricialmente para simplificar a programação:

$$\begin{bmatrix} a_{k,0}^*(j) \\ a_{k,1}^*(j) \\ a_{k,2}^*(j) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0^0 & (k-1)^1 C_0^1 & (k-1)^2 C_0^2 & \dots \\ 0 & C_1^1 & (k-1)^1 C_1^2 & \dots \\ 0 & 0 & C_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0(j) \\ a_1(j) \\ a_2(j) \\ \vdots \end{bmatrix} \text{mod } b. \quad 4.5.3$$

Em experimentos, as seqüências de Faure conseguem obter estimativas mais precisas que as obtidas por Halton. Como esperado, essa diferença é mais acentuada em problemas de maior dimensionalidade, já que Faure consegue evitar os problemas inerentes aos longos ciclos de crescimento que ocorrem em Halton. Ainda assim, a seqüência de Sobol' tende a superar Faure em simulações de problemas aplicados a problemas em finanças (Galanti e Jung, 1997, Moreira, 2001 e Glasserman, 2002).

4.5.2 Lattice

O termo *Lattice*, que em inglês quer dizer treliça, expressa bem a idéia por trás da construção do Lattice. Em sua definição genérica, o método de Lattice gera um conjunto de pontos finitos – assim como a Amostragem Descritiva e a amostragem com Hammersley – de forma que a distribuição desses pontos siga um padrão uniforme. Esse padrão de uniformidade pode ser descrito pela possibilidade de traçar diversas famílias de retas (ou planos) paralelas eqüidistantes através desses pontos. Sloan e Joe (1994) apresentam uma definição formal para a construção de um conjunto de pontos em Lattice genérico.

Definição: Seja $\{v_1, \dots, v_d\}$ um conjunto de pontos d-dimensionais linearmente independentes sobre \mathbb{R}^d e com todas as coordenadas em $[0, 1)$ e L_d um conjunto (infinito) de pontos, tal que

$$L_d = \left\{ v = \sum_{j=1}^d z_j v_j \mid z_j \in Z \right\}, \quad 4.5.4$$

onde é assumido que $\{v_1, \dots, v_d\}$ seja tal que $Z^d \subseteq L_d$. Então, um conjunto de pontos em Lattice de tamanho N no espaço \mathbb{R}^d é definido por

$$P_N = L_d \cap [0,1)^d. \quad 4.5.5$$

O tamanho N de P_N definido pelas equações 4.5.4 e 4.5.5 pode ser obtido pelo inverso do determinante da matriz cujas linhas são os vetores $\{v_1, \dots, v_d\}$.

A definição acima é genérica, mas há implementações de Lattice que utilizam definições mais restritivas. Dentre estas, pode ser destacada a regra de Korobov, que define o conjunto de pontos

$$P_N = \left\{ \frac{j}{n} (a_1, \dots, a_d) \bmod 1, j = 0, \dots, n-1 \right\}, \quad 4.5.6$$

onde as coordenadas do vetor $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_d)$ seguem $a_k = \alpha^{k-1} \bmod N$, $\alpha \in \{1, \dots, N-1\}$ e α e N são primos relativos.

Lemieux (2004) comparou o método de Korobov – junto com uma variação chamada de Korobov Polinomial – com Sobol' utilizando o apreçamento de diversos tipos de opções. Neste estudo, foram utilizadas amostras de tamanho N igual a 1024 e 4096 e as dimensionalidades dos modelos variaram entre 64 e 360. Para a maioria das situações analisadas, os métodos Lattice conseguiram superar o Sobol', ainda que em alguns casos a diferença não tenha sido muito grande.

4.A1 Apêndice: Análise Preliminar da Seqüência de Richtmyer

Neste apêndice são relatados os resultados das análises preliminares realizadas com a seqüência de Richtmyer. Ao contrário do que ocorre com as demais técnicas Quasi-Monte Carlo, para o caso de Richtmyer, há pouca informação disponível na literatura. Conforme comentado na seção 4.2, a pesquisa bibliográfica sugeriu dois possíveis problemas no uso dessa técnica de amostragem: a impossibilidade de representar números irracionais numericamente e a existência de dependência entre as dimensões. Os objetivos das análises aqui apresentadas são avaliar se esses problemas são tão acentuados que invalidem de antemão o uso desta técnica e se há alguma vantagem em descartar o início da série.

O objetivo da primeira análise é avaliar a uniformidade da distribuição univariada em função do tamanho da amostra e do número irracional utilizado. No que segue, os números primos são chamados de p_k , onde $k = 1, 2, 3, \dots$, representam os primos em ordem seqüencial, isto é, 2, 3, 5, ..., Assim, tem-se que, $p_1 = 2$, $p_{100} = 541$, $p_{952} = 7517$ e $p_{1000} = 7919$.

Na figura 4.A1.1, são apresentados os histogramas das distribuições univariadas dos valores $r_{k,j}$ para $j = 1, \dots, N$ para diferentes valores de k e N . Na primeira coluna, também são apresentadas amostras geradas com uso do gerador de números aleatórios do Matlab 6.5, a fim de comparar o uso de Richtmyer com números pseudo-aleatórios.

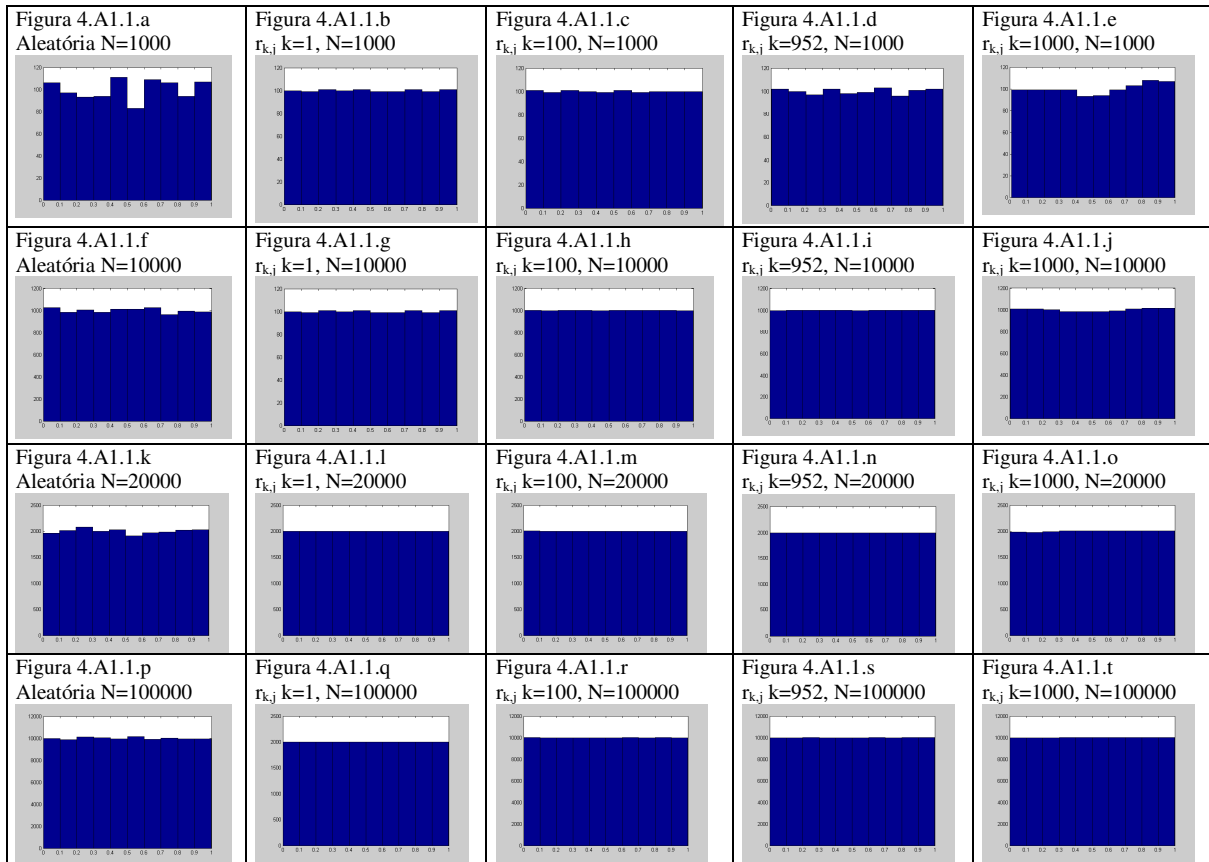


Figura 4.A1.1 Distribuição unidimensional de amostras pseudo-aleatórias para diferentes tamanhos de amostras (N) e distribuições unidimensionais dos primeiros N valores das seqüências de Richtmyer geradas por raiz quadrada de primos para diferentes valores de primos ($p_1 = 2$, $p_{100} = 541$, $p_{952} = 7517$ e $p_{1000} = 7919$).

Os histogramas da figura 4.A1.1 indicam que parece não haver problema em função do aumento do valor de N , isto é, mesmo para tamanhos de amostras elevados, as distribuições unidimensionais parecem ser uniformemente distribuídas em $[0, 1]$. Portanto, mesmo que haja algum problema de aumento de erro resultante da representação do número irracional, esse problema pode ser mais que compensado pela redução da discrepância univariada que ocorreria com o aumento de N . Quanto ao tamanho de ξ , os histogramas de fato indicam que a distribuição pode ser menos homogênea para valores maiores e quando o valor de N não é muito grande (ver, figura 4.A1.1.d e 4.A1.1.e) mas, apesar disto, a distribuição da seqüência de Richtmyer ainda parece ser mais uniforme que a pseudo-aleatória.

O segundo problema associado ao uso de séries de Richtmyer, isto é, a dependência entre as dimensões da série, pode ser avaliada, parcialmente, pela matriz de correlação (r) ou de determinação (r^2). No caso de ser usada a matriz de coeficientes de determinação, se as séries forem pouco correlacionadas, o que se espera é que a diagonal principal seja unitária e os demais elementos da matriz sejam próximos a zero. Devido ao tamanho das matrizes e da natureza da análise, é proposto um “mapa topográfico” da matriz de coeficientes de determinação. Este “mapa” é um gráfico em três dimensões no qual a altura representa os valores de r^2 . Como a diagonal da matriz é unitária e os demais valores deveriam ser próximos a zero, o que se espera é observar um “muro” dividindo um quadrado no plano XY e alguns “picos” representando os valores de r^2 mais elevados. A presença de muitos picos é indicativa de uma grande quantidade de pares de dimensões correlacionadas.

Na figura 4.A1.2 são apresentados os mapas topográficos das matrizes de coeficientes de determinação para os casos de 100, 200 e 1.000 dimensões geradas pela raiz quadrada dos primeiros 100, 200 e 1.000 números primos. Para o cálculo dos coeficientes, foram usados os primeiros 1000 e os primeiro 10.000 valores das seqüências, ou seja, $N = 1.000$ e $N = 10.000$. No caso dos primeiros 1.000 pontos em um espaço R^{100} (figura 4.A1.2.a) o mapa apresenta alguns picos espalhados, mas não muito grandes. O exame da matriz (não apresentada) revela que os valores máximo e médio dos coeficientes de determinação entre as diferentes dimensões tomadas par a par são, respectivamente, 0,4512 e $9.0164e-4$ (ver tabela 4.A1.1). Na figura 4.A1.2.b, é apresentado o mapa topográfico da matriz referente, também, a 100 dimensões, porém, calculada com base nos primeiros 10.000 pontos da série. Pode ser observada a ausência de picos e, de fato, o exame da matriz revela valores

máximos e médios de 0,0095 e 3.0077e-5. Estes valores, assim como os valores e mapas referentes aos casos de dimensionalidade 200 e 1.000 estão apresentados nas colunas dois e três da tabela 4.A1.1, na parte referente a semente $j = 1$. Na última coluna da tabela 4.A1.1, são apresentados os resultados para amostra de tamanho 1.000, porém compreendendo uma parte diferente da série. Esse descarte dos pontos iniciais de seqüências quasi-aleatórias é freqüentemente usado para séries como Halton e Sobol' (ver Galanti e Jung, 1997).

A tabela 4.A1.1 e a figura 4.A1.2 confirmam a existência de casos de elevadas dependências lineares entre seqüências de Richtmyer geradas a partir de diferentes valores de ξ , quando ξ_k é a raiz quadrada do número primo p_k . A observação dos valores médios de r^2 , ao longo das colunas da tabela 4.A1.1, indica que a média sobe ligeiramente quando a dimensionalidade aumenta. O mesmo também ocorre para os máximos. No entanto, mesmo para o pior caso ($j = 1$, $N = 1.000$ e $d = 1.000$), no qual o valor máximo de r^2 é aproximadamente um, o valor médio é desprezível. A observação dos gráficos na figura 4.A1.2 sugere que o aumento da média possa estar relacionado ao aumento da incidência de extremos, que de fato são freqüentes nos gráficos referentes às dimensionalidades mais elevadas. Neste caso, haveria uma grande quantidade de números primos (p_k) que não introduz dependência linear entre as dimensões da série, sugerindo a possibilidade de uma escolha mais seletiva dos p_k utilizados com o intuito de eliminar a dependência entre as dimensões. Isto poderia ser feito estabelecendo um limite máximo para os coeficientes de determinação e eliminando qualquer p_k que introduza r^2 superior a este limite. Ou seja, a cada novo p_k considerado, verifica-se se as correlações deste com todos os demais já aceitos é inferior a um limite pré-estabelecido. Esse processo permitiria a obtenção de uma lista de "primos

ruins”. Um procedimento muito semelhante a este, com base nas projeções par a par, é encontrado na literatura James (1980).

Amostra \ Dimensões	Semente: j=1		Semente: j=10.001
	Amostra: 1000	Amostra: 10.000	Amostra: 1000
100	Máximo: 0,4512 Médio: 9.0164e-4	Máximo: 0,0095 Médio : 3.0077e-5	Máximo: 0,1982 Médio : 7.5624e-4
200	Máximo: 0,6818 Médio: 0,0010	Máximo: 0,0974 Médio: 5.0594e-5	Máximo: 0,3556 Médio : 8.7334e-4
1000	Máximo: ~1 Médio: 0,0014	Máximo: 0,9539 Médio: 1.1074e-4	Máximo: 0,9474 Médio : 9.9259e-4

Tabela 4.A1.1 Valores máximos e médios dos coeficientes de determinação entre dimensões distintas de Richtmyer geradas a partir de raiz quadrada de números primos avaliados para 1000 e 10.000 pontos gerados em espaços com 100, 200 e 1000 dimensões e a partir de sementes diferentes.

A tabela 4.A1.1 e, em especial, a figura 4.A1.2 também sugerem que, com o aumento do tamanho da amostra, a ocorrência de pares de dimensões altamente correlacionadas diminui. Em particular, para as primeiras duzentas dimensões, o valor máximo de r^2 cai de 0,6818 para 0,0974 quando a amostra passa de 1.000 para 10.000. Finalmente, o descarte dos pontos iniciais de seqüências de Richtmyer também resultou numa ligeira melhora, conforme comprova a comparação dos resultados referentes a amostras de tamanho 1000 iniciadas em $j = 1$ e em $j = 10.001$. Tanto no caso de dimensionalidade igual a 100 como igual a 200, o coeficiente de determinação máximo registrado caiu para aproximadamente a metade.

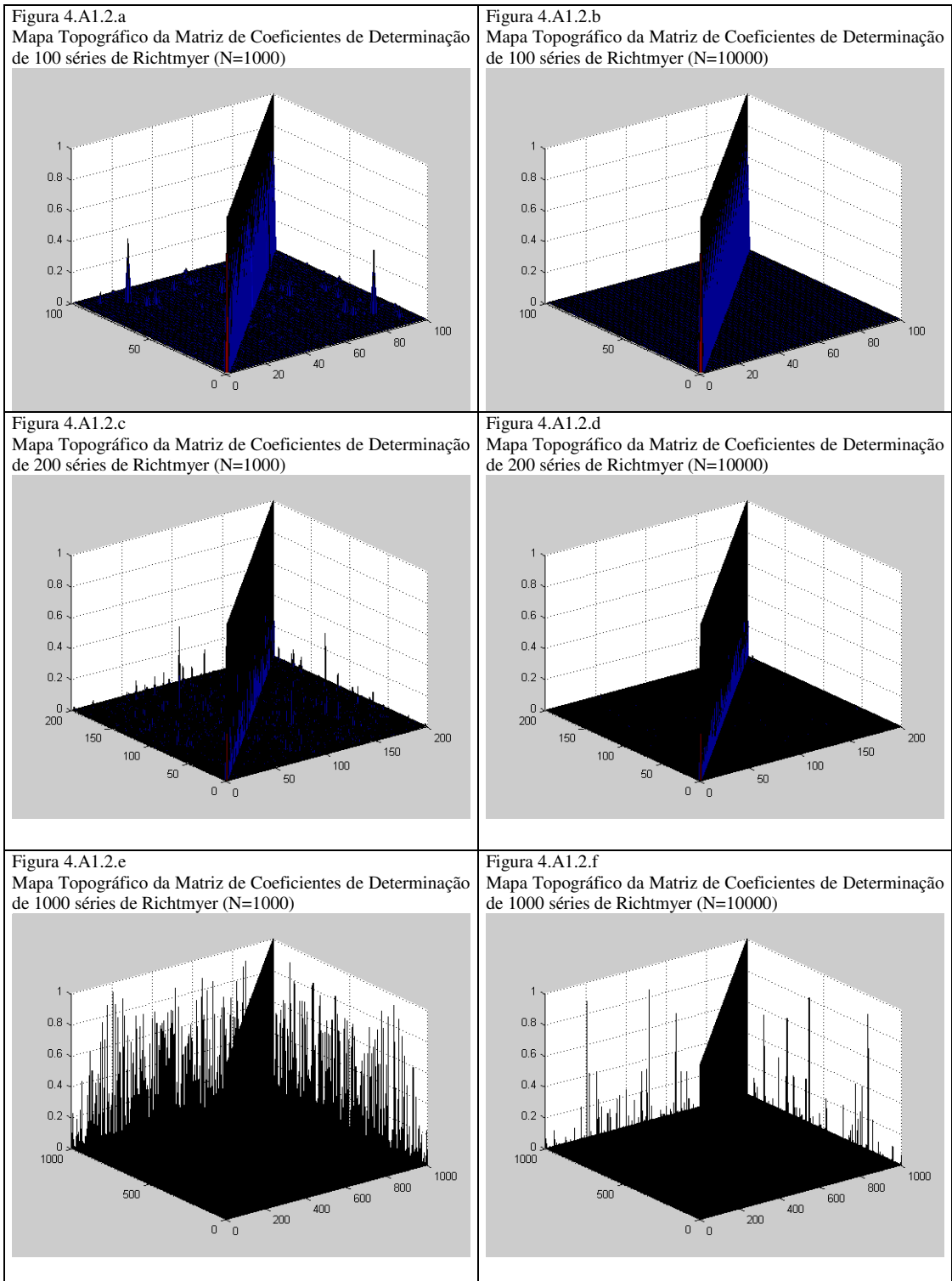


Figura 4.A1.2 Mapa topográfico da matriz de coeficientes de determinação entre dimensões de séries de Richtmyer geradas a partir de raiz quadrada de números primos.

4.A2 Apêndice: Construção e Características de Seqüências de Sobol'

Dentre as diversas técnicas de Quasi-Monte Carlo registradas na literatura, uma que pode ser destacada pelos bons resultados apresentados é a série de Sobol', (Sobol', 1967). Diferentemente das duas técnicas Quasi-Monte Carlo apresentadas nas secções anteriores, a construção de números de Sobol' é bastante trabalhosa, envolvendo vários passos, e utiliza teoria matemática mais avançada que os números primos para diferenciar entre as seqüências das diversas dimensões. Com relação aos passos para gerar cada seqüência, a literatura apresenta algumas variações no roteiro a ser seguido. Por exemplo, enquanto que a abordagem apresentada em Glasserman faz uso de cálculo matricial e a abordagem em Jäckel combina algumas etapas, a apresentada em Silva tem a vantagem de ser melhor para o entendimento da mecânica do processo de geração dos números da seqüência e, conseqüentemente, facilitar a visualização das características da seqüência de Sobol'. Não obstante estas e outras diferenças, a essência e os resultados são os mesmos. O roteiro a seguir, assim como os programas utilizados nesta tese, são, essencialmente, baseados no texto de Silva, (Glasserman, 2003, Jäckel 2002 e Silva 2002).

Assim como ocorre com os métodos de Richtmyer e Halton, no Sobol', cada coordenada do vetor aleatório no hiper-cubo unitário d-dimensional é associada a uma seqüência infinita de números, sendo necessário repetir o processo para cada dimensão do problema. Porém, enquanto que naquelas séries a diferenciação entre a seqüência associada a cada dimensão se dá pela escolha de um número primo²² diferente, no caso de Sobol', a principal fonte de diferenciação se dá pela escolha de

²² Como foi visto nas secções anteriores, tanto para caso de Richtmyer como para o case de Halton, o uso de números primos é conveniente, mas não obrigatório.

um polinômio primitivo. Polinômios primitivos são, por definição, irredutíveis e, por isso, podem ser considerados como análogos aos números primos. No caso de Sobol', é o uso de diferentes polinômios primitivos para cada dimensão que permite preencher o hiper-cubo unitário de forma mais homogênea e, ao mesmo tempo, manter a uniformidade em cada dimensão.

A forma geral de um polinômio primitivo utilizado para a construção de uma seqüência de Sobol' é dada pela equação

$$P = a_0 x^g + a_1 x^{g-1} + \dots + a_{g-1} x^1 + 1 = \sum_{k=0}^g a_k x^{g-k} \quad 4.A2.1$$

onde $a_0 = a_g = 1$ e $a_k = 0$ ou 1 para $k = 1, 2, \dots, g-1$. Porém, os valores possíveis para a_k são restritos, pois além de serem irredutíveis, os polinômios devem atender a outras propriedades que são utilizadas para calcular quais são os polinômios primitivos que, efetivamente, podem ser usados. Esse cálculo é bastante complexo, o que torna a seleção de um polinômio primitivo muito mais difícil que determinar um conjunto de números primos, (Jäckel, 2002). No entanto, é possível utilizar uma das várias tabelas de polinômios disponíveis na bibliografia referente a Sobol'. Em particular, Jäckel apresenta uma tabela (em meio ótico) com mais de oito milhões de polinômios primitivos, que deve ser suficiente para atender qualquer situação realista de modelagem.

Em geral, as tabelas de polinômios primitivos disponíveis são codificadas de forma a economizar espaço – podendo causar alguma confusão a primeira vista. A codificação usa o fato de os coeficientes só assumirem os valores zero e um para associa-los aos dígitos da representação em base 2 de números inteiros, que são registrados nas tabelas na sua representação em base decimal. Por exemplo, $7_{10} = 111_2$ e pode representar o polinômio $x^2 + x + 1$ e $11_{10} = 1011_2$ e pode representar $x^3 + x + 1$. Porém, como o primeiro e último coeficientes de um polinômio

primitivo de grau g , isto é, a_0 e a_g , sempre assumem o valor um, não é necessário representá-los, além disto, eles não são usados na construção da série, como será visto adiante. Por isso, freqüentemente as tabelas encontradas não registram todos os coeficientes, já que apenas os valores dos coeficientes internos (ou seja, a_k para $k = 1, 2, \dots, g-1$) variam e são utilizados para a construção das seqüências. Como é possível usar o grau do polinômio (g) junto com a representação decimal dos coeficientes internos para definir completamente o polinômio primitivo, em algumas tabelas os números decimais representam apenas os coeficientes internos ou, ainda, os coeficientes internos e o termo constante 1. É preciso verificar de que forma a tabela sendo usada foi codificada. Como exemplo de uma tabela de polinômios primitivos, é apresentada a tabela 4.A2.1, retirada de Glasserman. Cada número na coluna direita da tabela representa um polinômio, o que significa dizer que esta tabela é suficiente para modelar problemas com até 53 dimensões, visto que há 53 polinômios representados.

Grau (g)	Polinômios Primitivos
0	1
1	3 ($x + 1$)
2	7 ($x^2 + x + 1$)
3	11 ($x^3 + x + 1$), 13 ($x^3 + x^2 + 1$)
4	19, 25
5	37, 59, 47, 61, 55, 41
6	67, 97, 91, 109, 103, 115
7	131, 193, 137, 145, 143, 241, 157, 185, 167, 229, 171, 213, 191, 253, 203, 211, 239, 247
8	285, 369, 299, 425, 301, 361, 333, 357, 351, 501, 355, 397, 391, 451, 463, 487

Tabela 4.A2.1 Polinômios Primitivos até o grau oito. Cada número na coluna direita, quando expresso em base dois, representa os coeficientes de um polinômio primitivo. (Reproduzido de Glasserman, 2002)

No caso da seqüência de Halton, foi visto que os números primos de menor tamanho tendem a apresentar resultados melhores e, portanto, devem ser

selecionados primeiro, ou seja, para um modelo de cinco dimensões, serão usados os cinco primeiros números primos: 2, 3, 5, 7 e 11. No caso de Sobol', os polinômios são selecionados seguindo a ordem da tabela, ou seja, para um modelo de cinco dimensões são usados os cinco primeiros polinômios da tabela: 1 , $x + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$ e $x^3 + x^2 + 1$. Caso sejam conhecidas quais são as dimensões mais importantes, o ideal é atribuir os primeiros polinômios a estas. Uma vez definidos os polinômios que serão usados, as séries referentes a cada uma das coordenadas podem ser geradas de forma independente, assim como ocorre nas demais técnicas vistas.

Para cada série ou dimensão, o primeiro passo é preencher um vetor de tamanho w^{23} , com valores chamados de números direcionais m_i , $i = 1, 2, \dots, w$. Para tal, o polinômio primitivo é utilizado para definir uma regra de recorrência que gera os valores para m_i a partir de m_{i-1} , m_{i-2} ... m_{i-g} , onde g é o grau do polinômio. Portanto, para poder começar a utilizar o polinômio, é necessário definir primeiro os valores m_i , $i = 1, 2, \dots, g$, que são chamados de números direcionais iniciais. Em princípio, só há duas restrições para os valores dos números direcionais iniciais, m_i deve ser: ímpar e menor que 2^i . Naturalmente, a forma mais simples de atender a estas restrições e obter valores válidos para os primeiros números direcionais é usar a iniciação unitária, isto é, atribuir o valor 1 para todos os números direcionais iniciais. Embora esta forma de *inicializar* o vetor de números direcionais seja tecnicamente possível e não apresente problemas mais sérios para modelagens com baixa dimensionalidade, pode ser mostrado que, para dimensionalidades tão baixas como 30, os resultados apresentam sérios problemas de discrepância, (Jäckel, 2002).

²³ Explicado adiante.

Para a escolha dos números direcionais iniciais (m_i), a literatura apresenta duas alternativas que podem ser combinadas. A primeira é o uso de tabelas de números direcionais previamente escolhidos. Estas tabelas são disponíveis para os números direcionais iniciais referente apenas aos primeiros polinômios apresentados nas tabelas de polinômios primitivos. A proposta destas tabelas é que o uso de seus números direcionais iniciais garanta que o conjunto de pontos gerado num hiper-cubo d -dimensional tenha distribuição com alta uniformidade.

No início deste capítulo, foi apresentado o conceito de discrepância para medir a uniformidade de um conjunto finito de pontos. Um critério para caracterizar uma seqüência infinita de pontos como uniforme, é a utilização das propriedades A e A' definidas por Sobol'. Uma seqüência de pontos d -dimensionais satisfaz a propriedade A se, para qualquer segmento com comprimento 2^d desta seqüência, houver um ponto em cada um dos 2^d hiper-cubos resultantes de dividir em dois pedaços cada comprimento unitário ao longo de cada dimensão. Por exemplo, quando $d = 2$, o quadrado unitário pode ser dividido em quatro quadrados de igual tamanho. Uma seqüência de pontos em R^2 satisfaz a propriedade A se, para quaisquer quatro pontos consecutivos desta, houver um ponto em cada um destes quatro quadrados. Sobol' também definiu a propriedade A' , ainda mais severa. Para satisfazer a propriedade A' , uma seqüência de pontos em um hiper cubo d -dimensional deve ter um ponto em cada um dos 4^d hiper-cubos resultantes de dividir em quatro pedaços cada comprimento unitário ao longo de cada dimensão, para qualquer segmento de tamanho 4^d . Embora a aderência de uma série multidimensional às propriedades A' ou A possa, potencialmente, levar a conjuntos de pontos com menor discrepância, cabe notar que, a aplicação prática das propriedades esbarra na questão do tamanho da amostra (N), necessário para que o

benefício seja obtido. Isto porque, para que todos os hiper-cubos previstos sejam ocupados, o tamanho da amostra necessária pode ser impraticável mesmo em problemas com dimensionalidade apenas um pouco maiores, (Jäckel, 2002).

Como dito anteriormente, o uso de números direcionais iniciais tabelados tem como objetivo que o conjunto de pontos utilizado seja altamente uniforme. Porém, ainda que haja possibilidade de usar tamanhos de amostra muito grandes, as tabelas só garantem as propriedades A e A' para algumas poucas dimensões, isto é, apenas para alguns poucos polinômios no início. Para os demais polinômios, tabelas de números direcionais iniciais pretendem apenas que os pontos da seqüência tenham maior uniformidade. Ainda assim, estas tabelas não são muito extensas e oferecerem valores de m_i apenas para os primeiros 20 ou 30 polinômios.

Surge então o problema de como proceder quando a quantidade de dimensões do modelo supera a quantidade de polinômios para os quais se dispõe de valores para números direcionais iniciais tabelados. Como será discutido adiante, é possível atribuir valores aleatórios para os m_i quando estes não são tabelados e ainda assim obter resultados satisfatórios, (Jäckel, 2002 e Silva, 2002). Naturalmente, as dimensões resultantes de m_i tabelados terão melhor qualidade que as que usam valores aleatórios, razão pela qual se sugere atribuir os primeiros polinômios às variáveis de maior importância do modelo – caso haja – e usar os polinômios de ordens mais altas para as demais. Embora as dimensões possam ter todas, aproximadamente, a mesma importância relativa ou a relação de importância entre as dimensões possa ser desconhecida, Lemieux (2004) afirma que, freqüentemente, os problemas em finanças têm dimensionalidade efetiva pequena, isto é, há algumas poucas dimensões cuja importância relativa é muito maior que a das demais. Associar essas poucas dimensões mais importantes aos primeiros

polinômios primitivos pode assegurar que, pelo menos para estas dimensões, seja possível usufruir das propriedades A e A'.

Como antecipado acima, nos casos em que a dimensionalidade do modelo obriga o uso de polinômios para os quais não há valores tabelados para os números direcionais iniciais, a sugestão é selecionar de forma aleatória os valores de m_i . Lembrando que m_i pode assumir qualquer valor inteiro impar tal que, $1 \leq m_i < 2^i$, isto é, m_i pode assumir os valores 1, 3, 5, ..., 2^i-1 , Jäckel sugere que se faça um sorteio usando $m_i = \text{int}[u \times 2^{i-1}]$, onde u é um número aleatório entre zero e um e $\text{int}[\cdot]$ é a função que retorna a parte inteira do argumento. O sorteio de valores de u deve ser repetido até que seja obtido um valor impar para m_i . Silva por sua vez, afirma ter obtido resultados melhores que Jäckel utilizando $m_i = \max(\text{int}[u \times 2^i - 1], 1)$ e também sugere que, a semente²⁴ de cada dimensão possa ser escolhida aleatoriamente. Na fase preparatória para esta tese, as duas sugestões foram avaliadas pela aderência de distribuições obtidas empiricamente, pela simulação de trajetórias de movimento geométrico browniano, à distribuição log-normal²⁵. O uso de sementes aleatórias não mostrou benefício claro em relação ao de semente fixa, tendo seu efeito variado bastante em função do intervalo de sementes possíveis. Já o esquema de seleção de m_i sugerido por Silva mostrou-se superior ao sugerido por Jäckel.

Uma possível explicação para a superioridade observada pode estar na distribuição dos valores gerados pelos dois esquemas de geração de m_i . As figuras 4.A2.1.a e 4.A2.1.b apresentam as distribuições de amostras de 1000 valores para m_4 geradas pelos dois esquemas. Dada as restrições para o quarto número direcional, m_4 pode ser 1, 3, 5, ... ou 15. O primeiro histograma demonstra que, o

²⁴ O conceito de semente é o mesmo ao utilizado nas seqüências geradoras de números pseudo-aleatórios.

²⁵ Foram realizados testes de Jarque e Bera ao nível de 1% para distribuições de log preços resultantes de movimento geométrico browniano e a avaliação dos esquemas de geração de números direcionais iniciais e de semente foi baseada no percentual de rejeições. Esses testes foram repetidos para dimensionalidades (dias) variando de 2 a 126.

esquema proposto em Jäckel, gera apenas os primeiros quatro valores dentre os oito possíveis. No segundo histograma, é possível ver que a distribuição gerada pelo esquema de Silva explora mais o conjunto de valores possíveis, ainda assim, nunca gera o valor 15 e seleciona de forma desproporcional o valor um. Uma alternativa que parece ser mais coerente é sortear m_i atribuindo probabilidades iguais para cada candidato. De fato, na avaliação preliminar mencionada acima, esse método mostrou-se bem superior aos outros dois. Neste caso, a fórmula utilizada pode ser $m_i = \text{int}[u \times 2^i]$, o que leva a crer que possa haver um erro editorial em Jäckel (2002).

Figura 4.A2.1.a
Esquema de Jäckel

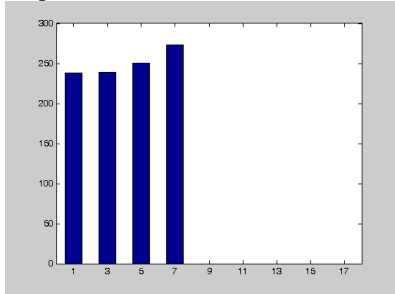


Figura 4.A2.1.b
Esquema de Silva

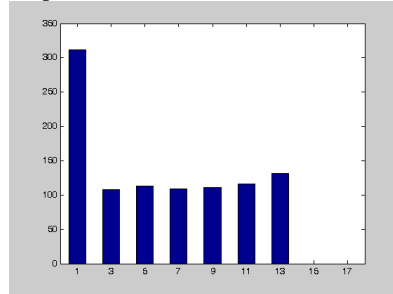


Figura 4.A2.1.c
Esquema com probabilidades iguais

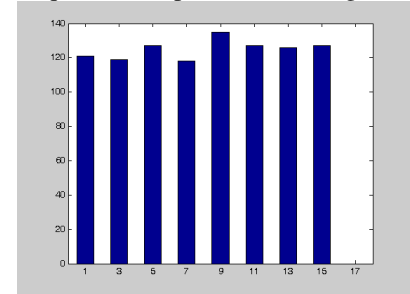


Figura 4.A2.1 - Amostras de 1000 valores para o número direcional inicial m_4 , geradas usando esquemas aleatórios propostos por Jäckel, por Silva e atribuindo probabilidades iguais aos oito valores possíveis.

Uma vez que os números direcionais iniciais para um polinômio tenham sido definidos (por tabela ou por sorteio), é preciso gerar os demais números direcionais até que seja completado um total de w (o tamanho definido para o vetor de números direcionais). A geração destes m_i é realizada a partir de uma fórmula de recorrência determinada pelos coeficientes do polinômio primitivo. A partir dos valores a_k , conforme apresentados na equação 4.A2.1, é definida a regra expressa na equação 4.A2.2, apresentada abaixo:

$$m_i = 2^1 a_1 m_{i-1} \oplus 2^2 a_2 m_{i-2} \oplus \dots \oplus 2^{g-1} a_{g-1} m_{i-g+1} \oplus 2^g a_g m_{i-g} \oplus m_{i-g} \quad 4.A2.2$$

onde \oplus representa uma soma bit a bit sem carregamento do 1, também chamada de operação bit XOR. Nesse tipo de operação, os operandos são representados na base dois e, para cada casa binária, se os algarismos dos operandos forem iguais, o valor é zero e, se forem diferentes, o valor é um. Por exemplo, $9_{10} \oplus 5_{10} = 1001_2 \oplus 0101_2 = 1100_2 = 12_{10}$ e bit XOR de qualquer número com ele mesmo é zero. A tabela 4.A2.2, retirada de Glasserman (2003), apresenta os números direcionais iniciais – em fundo branco - e os demais números direcionais, obtidos pela equação 4.A2.2, até m_5 – fundo cinza - para os primeiros seis polinômios apresentados na tabela 4.A2.1²⁶.

Polinômio	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17
3	1	1	7	11	13
4	1	3	7	5	7
5	1	1	5	3	15
6	1	3	1	1	9

Tabela 4.A2.2 Os números direcionais iniciais para os primeiros seis polinômios e os números direcionais até m_5 gerados pela regra de recorrência (destacado em fundo cinza). Fonte: Glasserman, 2003.

Na tabela 4.A2.2, a terceira linha é relativa ao terceiro polinômio da tabela de polinômios primitivos (tabela 4.A2.1), que tem grau dois e é codificado pelo número 7_{10} , ou seja, $(x^2 + x + 1)$. Para este polinômio, foram tabelados os números direcionais iniciais $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, a partir dos quais os valores de m_3 , m_4 e m_5 foram obtidos para fins de exemplificação. Na construção de números de Sobol', a fórmula de recorrência é utilizada até que o vetor de números direcionais seja completo, ou seja, até que m_w seja obtido. Do ponto de vista matemático, w pode ser tão grande quanto se queira, porém, além de não ser necessário que w seja muito

²⁶ Em Glasserman são apresentados os valores até m_8 para os primeiros vinte polinômios.

grande, existe limitação computacional para seu tamanho. Para fins práticos, w pode ser igual a 32, que é o número de bits usados na maioria dos computadores atuais para representação sem uso de ponto flutuante. Este valor permite a geração de seqüências com até 2^{32} pontos, o que é muito superior a qualquer tamanho de amostra utilizado em simulação, (Silva, 2002).

O segundo passo é calcular os valores $v_i = m_i / 2^i$ para todos os valores de m_i e expressá-los na base 2. Essa operação equivale a expressar m_i em base dois e mover a vírgula i casas a esquerda. Na tabela 4.A2.3 são apresentados os vetores de m_i e de v_i – nas bases 10 e 2 – para a terceira dimensão da tabela 4.A2.2. Nesta, foi utilizado $w = 5$, o que permite gerar uma seqüência de até $31 = 2^5 - 1$ números.

i	1	2	3	4	5
m_i	1	1	7	11	13
$v_{10,i}$	0,5	0,25	0,875	0,6875	0,40625
$v_{2,i}$	0,1	0,01	0,111	0,1011	0,01101

Tabela 4.A2.3 Cinco primeiros m_i e v_i para o terceiro polinômio apresentado na tabela 4.A2.1

Com base no vetor de v_i obtido na tabela 4.A2.3, é possível gerar qualquer valor s_j para $j = 1, 2, \dots, 31$, onde s_j é o j -ésimo termo da seqüência de números de Sobol' referente ao polinômio primitivo e números direcionais iniciais utilizados. O número j funciona como uma chave *booleana* de quais v_i entrarão na composição de s_j . Operacionalmente, cada dígito da representação de j , expresso em base dois, é associado ao $v_{2,i}$ de mesma ordem. Isto é, o dígito de j_2 correspondente ao valor 2^{i-1} é associado a $v_{2,i}$. Isso equivale a expressar j_{10} como j_2 e escrever os dígitos da direita para esquerda, associando o primeiro à $v_{2,1}$, o segundo a $v_{2,2}$ e assim por diante. Fica subentendido que, para os $v_{2,i}$ em que i é maior que a quantidade de dígitos necessária para representar j_2 , $v_{2,i}$ deve ser associado o dígito zero. Os valores de s_j podem ser obtidos fazendo a operação bit XOR de todos os $v_{2,i}$

associados a dígito um na representação de j na base dois.²⁷ Alternativamente, como bit XOR de um número com zero retorna o mesmo número, é possível usar uma definição mais formal e fácil de programar. Chamando os dígitos da representação binária de j , escrita em ordem reversa, de b_i :

$$s_j = \sum_{i=1}^w \oplus b_i v_i, \quad 4.A2.3$$

onde $\sum \oplus$ representa um somatório bit XOR.

A fim de ajudar a visualizar esse processo, um exemplo para o terceiro polinômio é desenvolvido no quadro 4.A2.1. A primeira coluna contém os valores seqüenciais para os valores de j expresso em base 10 e a segunda coluna contém, estes valores convertidos para base dois. A terceira parte do quadro contém os cinco valores de $v_{2,i}$, $i=1, \dots, 5$ na parte de cima de cada linha e b_i (os dígitos de j expresso em base dois, ou j_2 , dispostos em ordem reversa) abaixo dos $v_{2,i}$ associados a cada dígito. Pode ser visto que, a cada linha, ou j , os valores de $v_{2,i}$ são os mesmos, mudando apenas os dígitos b_i . A terceira parte apresenta o resultado da equação 4.A2.3 em base dois. As duas etapas finais servem apenas para converter s_j da base dois para a base dez.

O quadro 4.A2.1 também permite visualizar algumas características das seqüências de Sobol'. A primeira é o conceito de ciclos nas seqüências de Sobol'. A parte da seqüência apresentada – de s_1 até s_{31} – engloba cinco ciclos completos. O primeiro ciclo é composto apenas do primeiro número, isto é, s_1 . O segundo ciclo compreende dois números, s_2 e s_3 , e está destacado no quadro com fundo cinza. O terceiro ciclo compreende quatro números – s_j para $j = 4, 5, 6$ e 7 –, o quarto ciclo – também destacado com fundo cinza – é caracterizado por $j = 8$ até $j = 15$ e contém

²⁷ É fácil verificar que a operação bit XOR atende as propriedades de associatividade e comutatividade.

oito números. Finalmente, no quinto ciclo, com dezesseis números, j varia de 16 a 31.

A observação dos valores de s_j no quadro 4.A2.1 permite entender o que caracteriza um ciclo na seqüência de Sobol' e como se dá a distribuição de pontos no intervalo unitário. O primeiro ciclo, composto apenas do valor $s_1 = 0,5$, divide o intervalo $(0, 1)$ em dois intervalos iguais: $(0, 0,5)$ e $(0,5, 1)$. O segundo ciclo, composto de $s_2 = 0,25$ e $s_3 = 0,75$, parte cada um desses dois intervalos em dois, gerando quatro intervalos de igual tamanho. Este padrão se repete a cada ciclo, com os novos pontos bipartindo os intervalos criados pelos pontos dos ciclos anteriores em duas partes iguais, gerando novos intervalos de iguais tamanho. Também pode ser constatado, que o tamanho de um ciclo é sempre o dobro do tamanho do ciclo anterior, sendo determinado pela expressão $2^{\text{ciclo}-1}$.

O padrão dos ciclos, descrito no parágrafo anterior, é um dos motivos pelos quais as séries de Sobol' apresentam elevada uniformidade em uma dimensão. Como visto, uma seqüência iniciada em s_1 e terminada no fim de qualquer ciclo completo terá os pontos igualmente espaçados, já que estes dividem o intervalo $(0, 1)$ em partes iguais e, portanto, será bastante uniforme. Outro fato relevante diz respeito aos números de um único ciclo de uma seqüência de Sobol' unidimensional. Neste caso, os números são exatamente os mesmos de uma Amostragem Descritiva de mesmo tamanho. Por exemplo, o terceiro ciclo no quadro 4.A2.1, caracterizado por $j = 4, 5, 6$ e 7 , tem tamanho quatro e é composto pelos números $0,125, 0,375, 0,625$ e $0,875$. Estes são os números utilizados pela técnica de Amostragem Descritiva se o tamanho da amostra for igual a quatro, conforme pode ser constatado pela equação 3.1.

Essas observações são válidas para qualquer seqüência de Sobol' independente do polinômio primitivo e números direcionais iniciais utilizados, sendo os números s_j de cada ciclo sempre os mesmos. Ou seja, o segundo ciclo será sempre composto de 1/4 e 3/4, o terceiro ciclo de 1/8, 3/8, 5/8 e 7/8 e assim por diante. De fato, a única diferença entre uma seqüência e outra é a ordem em que os números aparecem dentro de cada ciclo.

O fato de os números s_j não variarem para cada ciclo, significa uma restrição em termos de ordenamento. Por exemplo, se forem utilizados os primeiros sete números da seqüência (para uma simulação com tamanho de amostra igual a sete) só haverá $4!2!1! = 48$ ordenamentos possíveis e não $7! = 5040$. Isso pode causar alguma dependência entre dimensões mesmo para modelos com dimensionalidade relativamente baixa. Uma solução é descartar alguns pontos iniciais, isto é, usar uma semente (ou j) diferente de um. Galanti (1997) diz que esse descarte pode ser arbitrário, mas, em função do exposto acima, é possível escolher a semente e o tamanho de amostra de forma a preservar a integralidade de todos os ciclos utilizados. Em Lemieux (2004), foram utilizados tamanhos de amostra igual a 1024 e 4096, sugerindo que tenha utilizado um ciclo integralmente, no caso, o 11º e o 13º, respectivamente, mas não há indicação explícita, assim como também não há indicação de como proceder no texto que essa autora indica como referência metodológica (Lemieux, C., Cieslak M. e Luttmer. K. 2002). Já Glasserman (2003), descarta os primeiros 256 pontos, independente do tamanho da amostra utilizada, mas restringe esse tamanho à forma 2^n , o que não garante ciclos completos.

j_{10}	j_2	$v_{2,i}$ e b_i					$s_{2,j} = \sum_{i=1}^{\oplus} b_i v_i$	valores da representação binária $(1/2^i)$ em decimal					$s_{10,j}$
1	1	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 0 0 0	0.5	0.00	0.000	0.0000	0.00000	0.50000
2	10	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 0 0 0	0.0	0.25	0.000	0.0000	0.00000	0.25000
3	11	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 0 0 0	0.5	0.25	0.000	0.0000	0.00000	0.75000
4	100	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 1 0 0	0.5	0.25	0.125	0.0000	0.00000	0.87500
5	101	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 1 0 0	0.0	0.25	0.125	0.0000	0.00000	0.37500
6	110	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 1 0 0	0.5	0.00	0.125	0.0000	0.00000	0.62500
7	111	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 1 0 0	0.0	0.00	0.125	0.0000	0.00000	0.12500
8	1000	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 1 1 0	0.5	0.00	0.125	0.0625	0.00000	0.68750
9	1001	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 1 1 0	0.0	0.00	0.125	0.0625	0.00000	0.18750
10	1010	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 1 1 0	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.00000	0.93750
11	1011	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 1 1 0	0.0	0.25	0.125	0.0625	0.00000	0.43750
12	1100	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 0 1 0	0.0	0.25	0.000	0.0625	0.00000	0.31250
13	1101	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 0 1 0	0.5	0.25	0.000	0.0625	0.00000	0.81250
14	1110	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 0 1 0	0.0	0.00	0.000	0.0625	0.00000	0.06250
15	1111	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 0 1 0	0.5	0.00	0.000	0.0625	0.00000	0.56250
16	10000	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 1 0 1	0.0	0.25	0.125	0.0000	0.03125	0.40625
17	10001	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 1 0 1	0.5	0.25	0.125	0.0000	0.03125	0.90625
18	10010	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 1 0 1	0.0	0.00	0.125	0.0000	0.03125	0.15625
19	10011	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 1 0 1	0.5	0.00	0.125	0.0000	0.03125	0.65625
20	10100	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 0 0 1	0.5	0.00	0.000	0.0000	0.03125	0.53125
21	10101	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 0 0 1	0.0	0.00	0.000	0.0000	0.03125	0.03125
22	10110	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 0 0 1	0.5	0.25	0.000	0.0000	0.03125	0.78125
23	10111	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 0 0 1	0.0	0.25	0.000	0.0000	0.03125	0.28125
24	11000	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 0 1 1	0.5	0.25	0.000	0.0625	0.03125	0.84375
25	11001	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 0 1 1	0.0	0.25	0.000	0.0625	0.03125	0.34375
26	11010	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 0 1 1	0.5	0.00	0.000	0.0625	0.03125	0.59375
27	11011	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 0 1 1	0.0	0.00	0.000	0.0625	0.03125	0.09375
28	11100	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 0 1 1 1	0.0	0.00	0.125	0.0625	0.03125	0.21875
29	11101	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 0 1 1 1	0.5	0.00	0.125	0.0625	0.03125	0.71875
30	11110	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 0 1 1 1 1	0.0	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.46875
31	11111	0.10000	0.01000	0.11100	0.10110	0.01101	0, 1 1 1 1 1	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.96875

Quadro 4.A2.1 Exemplo de construção de seqüência de Sobol' utilizando o terceiro polinômio apresentado na tabela 4.A2.1 e os números direcionais da tabela 4.A2.2.

Com relação à mecânica da construção de seqüências de Sobol', pode ser visto no quadro 4.A2.1 que, a cada mudança de ciclo, aumenta a quantidade de dígitos usados na representação em base dois de j . Mais especificamente, em cada ciclo, j_2 tem a mesma quantidade de dígitos que a ordem do ciclo, por exemplo, no quarto ciclo, todos os j_2 tem 4 dígitos. Como o dígito mais a esquerda é necessariamente um, isso significa que, para um ciclo qualquer c , o operando v_c necessariamente entrará na composição dos $s_j \in c$ -ésimo ciclo. Lembrando que $v_i = m_i/2^i$ e que m_i é ímpar, a representação em base dois de v_c terá sempre c dígitos a direita da vírgula. É isso que faz com que, a cada ciclo, aumente o refinamento da distribuição no intervalo $(0, 1)$.

Uma importante característica das seqüências de Sobol' é a forma com que os valores se alternam entre os intervalos $(0, 0,5)$ e $[0,5, 1)$. Na última coluna do quadro 4.A2.1, é possível ver este fenômeno. O primeiro valor da seqüência (s_1) é um valor do segundo intervalo, s_2 é do primeiro e s_3 é do segundo novamente. Essa alternância entre os dois intervalos é invertida (no sentido de s_4 ser do mesmo intervalo de seu predecessor) no segmento que vai de s_4 a s_{11} . Nos oito números seguintes (de s_{12} a s_{19}), a ordem da alternância é invertida novamente, para voltar a se inverter nos próximos oito (de s_{20} a s_{27}). O padrão de alternância e inversão varia para cada polinômio e conjunto de números direcionais iniciais escolhidos e está relacionado à satisfação das propriedades A, como será visto adiante.

A tabela 4.A2.4 apresenta os primeiros 63 valores gerados a partir dos dez primeiros polinômios primitivos e números direcionais iniciais apresentados em Jäckel (2002) e com o uso de j para gerar os valores de s_j , isto é, sem o uso de Gray code²⁸. Nesta tabela, os s_j pertencentes ao intervalo $(0, 0,5)$ estão sobre fundo

²⁸ Gray code será introduzido a seguir.

branco ao passo que, os s_j pertencentes ao intervalo $[0,5, 1)$ estão sobre fundo cinza. Pelo padrão de branco e cinza na coluna da primeira dimensão, pode ser visto que, para o segmento apresentado, os valores de $s_{1, j}$ – os números de Sobol' referentes à primeira dimensão - alternam entre os dois intervalos sem que haja inversão.

Perceber os padrões que governam as demais dimensões não é tão simples – e nem é necessário. Ainda assim, a título de curiosidade, é possível identificar algum tipo de padrão em algumas das demais dimensões. Na coluna referente à dimensão dois, foram assinalados, com linhas pretas, os pontos de inversão de alternância, destacando o que pode ser chamado de “corridas de alternância”. A primeira corrida assinalada tem comprimento quatro e começa em $j = 2$. Ela é seguida de duas corridas de comprimento dois e de mais três corridas de comprimento quatro. Pode ser observado que, para esta coluna, todas as corridas tem comprimento dois ou quatro. Na coluna referente à terceira dimensão, é possível ver que as corridas neste segmento têm comprimento quatro ou oito. A sexta coluna também apresenta um padrão, aparentemente, simples, porém os padrões ficam mais complexos para as demais dimensões. Essa análise permite entender a natureza do mecanismo de preenchimento do hiper-cubo utilizado por Sobol', cuja idéia é diferente da utilizada em Halton, que utiliza ciclos de comprimentos diferentes para preencher cada dimensão da esquerda para a direita.

j	Dimensões									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.75	0.25
3	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.25	0.75
4	0.125	0.625	0.875	0.875	0.625	0.125	0.375	0.375	0.875	0.625
5	0.625	0.125	0.375	0.375	0.125	0.625	0.875	0.875	0.375	0.125
6	0.375	0.375	0.625	0.125	0.875	0.875	0.125	0.625	0.125	0.875
7	0.875	0.875	0.125	0.625	0.375	0.375	0.625	0.125	0.625	0.375
8	0.0625	0.9375	0.6875	0.3125	0.1875	0.0625	0.4375	0.5625	0.4375	0.6875
9	0.5625	0.4375	0.1875	0.8125	0.6875	0.5625	0.9375	0.0625	0.9375	0.1875
10	0.3125	0.1875	0.9375	0.5625	0.4375	0.8125	0.1875	0.3125	0.6875	0.9375
11	0.8125	0.6875	0.4375	0.0625	0.9375	0.3125	0.6875	0.8125	0.1875	0.4375
12	0.1875	0.3125	0.3125	0.6875	0.5625	0.1875	0.0625	0.9375	0.5625	0.0625
13	0.6875	0.8125	0.8125	0.1875	0.0625	0.6875	0.5625	0.4375	0.0625	0.5625
14	0.4375	0.5625	0.0625	0.4375	0.8125	0.9375	0.3125	0.1875	0.3125	0.3125
15	0.9375	0.0625	0.5625	0.9375	0.3125	0.4375	0.8125	0.6875	0.8125	0.8125
16	0.03125	0.53125	0.40625	0.21875	0.46875	0.28125	0.96875	0.28125	0.65625	0.84375
17	0.53125	0.03125	0.90625	0.71875	0.96875	0.78125	0.46875	0.78125	0.15625	0.34375
18	0.28125	0.28125	0.15625	0.96875	0.21875	0.53125	0.71875	0.53125	0.40625	0.59375
19	0.78125	0.78125	0.65625	0.46875	0.71875	0.03125	0.21875	0.03125	0.90625	0.09375
20	0.15625	0.15625	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625	0.59375	0.15625	0.28125	0.46875
21	0.65625	0.65625	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625	0.09375	0.65625	0.78125	0.96875
22	0.40625	0.90625	0.78125	0.09375	0.59375	0.65625	0.84375	0.90625	0.53125	0.21875
23	0.90625	0.40625	0.28125	0.59375	0.09375	0.15625	0.34375	0.40625	0.03125	0.71875
24	0.09375	0.46875	0.84375	0.40625	0.28125	0.34375	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625
25	0.59375	0.96875	0.34375	0.90625	0.78125	0.84375	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625
26	0.34375	0.71875	0.59375	0.65625	0.03125	0.59375	0.78125	0.09375	0.09375	0.15625
27	0.84375	0.21875	0.09375	0.15625	0.53125	0.09375	0.28125	0.59375	0.59375	0.65625
28	0.21875	0.84375	0.21875	0.53125	0.90625	0.46875	0.90625	0.71875	0.21875	0.78125
29	0.71875	0.34375	0.71875	0.03125	0.40625	0.96875	0.40625	0.21875	0.71875	0.28125
30	0.46875	0.09375	0.46875	0.28125	0.65625	0.71875	0.65625	0.46875	0.96875	0.53125
31	0.96875	0.59375	0.96875	0.78125	0.15625	0.21875	0.15625	0.96875	0.46875	0.03125
32	0.015625	0.796875	0.953125	0.671875	0.796875	0.921875	0.734375	0.890625	0.953125	0.828125
33	0.515625	0.296875	0.453125	0.171875	0.296875	0.421875	0.234375	0.390625	0.453125	0.328125
34	0.265625	0.046875	0.703125	0.421875	0.546875	0.171875	0.984375	0.140625	0.203125	0.578125
35	0.765625	0.546875	0.203125	0.921875	0.046875	0.671875	0.484375	0.640625	0.703125	0.078125
36	0.140625	0.421875	0.078125	0.296875	0.421875	0.796875	0.859375	0.515625	0.078125	0.453125
37	0.640625	0.921875	0.578125	0.796875	0.921875	0.296875	0.359375	0.015625	0.578125	0.953125
38	0.390625	0.671875	0.328125	0.546875	0.171875	0.046875	0.609375	0.265625	0.828125	0.203125
39	0.890625	0.171875	0.828125	0.046875	0.671875	0.546875	0.109375	0.765625	0.328125	0.703125
40	0.078125	0.234375	0.265625	0.984375	0.984375	0.984375	0.796875	0.453125	0.515625	0.390625
41	0.578125	0.734375	0.765625	0.484375	0.484375	0.484375	0.296875	0.953125	0.015625	0.890625
42	0.328125	0.984375	0.015625	0.234375	0.734375	0.234375	0.546875	0.703125	0.265625	0.140625
43	0.828125	0.484375	0.515625	0.734375	0.234375	0.734375	0.046875	0.203125	0.765625	0.640625
44	0.203125	0.609375	0.640625	0.109375	0.359375	0.859375	0.671875	0.078125	0.390625	0.765625
45	0.703125	0.109375	0.140625	0.609375	0.859375	0.359375	0.171875	0.578125	0.890625	0.265625
46	0.453125	0.359375	0.890625	0.859375	0.109375	0.109375	0.921875	0.828125	0.640625	0.515625
47	0.953125	0.859375	0.390625	0.359375	0.609375	0.609375	0.421875	0.328125	0.140625	0.015625
48	0.046875	0.265625	0.609375	0.578125	0.703125	0.640625	0.265625	0.671875	0.359375	0.046875
49	0.546875	0.765625	0.109375	0.078125	0.203125	0.140625	0.765625	0.171875	0.859375	0.546875
50	0.296875	0.515625	0.859375	0.328125	0.953125	0.390625	0.015625	0.421875	0.609375	0.296875
51	0.796875	0.015625	0.359375	0.828125	0.453125	0.890625	0.515625	0.921875	0.109375	0.796875
52	0.171875	0.890625	0.484375	0.453125	0.078125	0.515625	0.140625	0.796875	0.734375	0.671875
53	0.671875	0.390625	0.984375	0.953125	0.578125	0.015625	0.640625	0.296875	0.234375	0.171875
54	0.421875	0.140625	0.234375	0.703125	0.328125	0.265625	0.390625	0.046875	0.484375	0.921875
55	0.921875	0.640625	0.734375	0.203125	0.828125	0.765625	0.890625	0.546875	0.984375	0.421875
56	0.109375	0.703125	0.171875	0.765625	0.515625	0.703125	0.203125	0.234375	0.171875	0.734375
57	0.609375	0.203125	0.671875	0.265625	0.015625	0.203125	0.703125	0.734375	0.671875	0.234375
58	0.359375	0.453125	0.421875	0.015625	0.765625	0.453125	0.453125	0.984375	0.921875	0.984375
59	0.859375	0.953125	0.921875	0.515625	0.265625	0.953125	0.953125	0.484375	0.421875	0.484375
60	0.234375	0.078125	0.796875	0.140625	0.140625	0.578125	0.328125	0.359375	0.796875	0.109375
61	0.734375	0.578125	0.296875	0.640625	0.640625	0.078125	0.828125	0.859375	0.296875	0.609375
62	0.484375	0.828125	0.546875	0.890625	0.390625	0.328125	0.078125	0.609375	0.046875	0.359375
63	0.984375	0.328125	0.046875	0.390625	0.890625	0.828125	0.578125	0.109375	0.546875	0.859375

Tabela 4.A2.4 Os primeiros 63 valores gerados a partir dos primeiros dez polinômios primitivos com os números direcionais iniciais apresentados em Jäckel sem uso de Gray code.

Embora a construção de seqüências de Sobol' utilizando o método descrito acima, gera seqüências perfeitamente utilizáveis em simulação, o algoritmo utilizado na prática é um pouco diferente e proporciona maior velocidade computacional. Com relação às séries geradas, a única diferença deste método em relação ao apresentado acima, é que a ordem dos pontos d-dimensionais – isto é, das linhas na tabela 4.A2.4, acima - é diferente, porém ambos geram os mesmos pontos em R^d . Além da alteração preservar os pontos como um todo, ela não altera o conjunto de pontos contidos em cada ciclo, isto é, a mudança na ordem da seqüência de pontos pelos dois métodos não extrapola os limites de cada ciclo. Isso significa dizer que, desde que, a semente e o tamanho da amostra sejam escolhidos de forma a utilizar apenas ciclos inteiros, os conjuntos de pontos gerados no hiper cubo unitário serão idênticos tanto com um método como com o outro.

Foram Antonov e Saleev (1979) que perceberam ser possível trocar a seqüência j de números naturais por outra qualquer desde que isso implicasse apenas na alteração da ordem dos j . Uma dessas seqüências é a que substitui j por $G(j)$, onde $G(\cdot)$ é a função *Gray code*, definida por

$$G(n) = n \oplus \text{int}[n/2], \quad 4.A2.4$$

e $\text{int}[\cdot]$ retorna a parte inteira do argumento. Do ponto de vista computacional, o benefício proporcionado pelo uso do *Gray code* advém do fato que a diferença entre as representações binárias de $G(n)$ e $G(n+1)$ é de apenas um dígito, para qualquer n . Em função disto, uma vez que um número qualquer da seqüência de Sobol' tenha sido gerado pelo algoritmo apresentado acima, por exemplo, é possível gerar os s_j sucessivos usando a fórmula

$$s_j = s_{j-1} \oplus v_i^* \quad 4.A2.5$$

onde v_i^* é o v_i associado a posição do dígito que, na representação binária de $G(j)$, é diferente em relação à representação binária de $G(j-1)$. Inclusive, sequer é necessário gerar $G(j)$ para fazer a comparação, pois a diferença na representação binária de $G(n)$ em relação a representação binária de $G(n-1)$ sempre se dá na posição do zero mais a direita na representação binária de $n-1$. Assim, é possível saber qual a posição associada a v_i^* simplesmente inspecionando a representação binária de $n-1$ e identificando qual o “0” mais a direita. Ou seja, só é necessário calcular o *Gray code* da semente da seqüência para se obter o primeiro número da seqüência, usualmente, s_1 .

A tabela 4.A2.5 demonstra melhor esse processo. Na primeira e quinta coluna, são apresentados os valores de j e de $G(j)$, respectivamente, em base dez. As colunas intermediárias são usadas para explicitar as etapas da transformação *Gray code* conforme a equação 4.A2.4. A segunda e quarta coluna também ajudam a compreender como a posição de v_i^* pode ser antecipada sem a necessidade de efetivamente calcular o *Gray code* dos valores de j . Na segunda coluna, a posição do dígito zero mais a direita é assinalada pelo sublinhado (“_”) e, na quarta coluna, o sublinhado foi utilizado para ressaltar a posição do dígito que é diferente em relação ao valor imediatamente acima. Por exemplo, como $G(4)_2 = 110$ e $G(5)_2 = 111$, a casa binária onde ocorre a mudança é a primeira (lendo da direita para a esquerda) e é a que está sublinhada na tabela. Como dito anteriormente, não é necessário calcular $G(4)$ e $G(5)$ para saber a casa que muda e, portanto, qual é o v_i^* que deverá ser utilizado para o cálculo de s_5 , pois essa casa é indicada pelo zero mais a direita na representação de quatro em base dois ($4_{10} = 100_2$), conforme pode ser constatado na segunda coluna da quarta linha da tabela 4.A2.5.

Outro aspecto do uso do Gray *code* a ser observado, é a preservação dos ciclos mencionados anteriormente. Na tabela 4.A2.5, foi usado o mesmo esquema de fundo branco e cinza, utilizado no quadro 4.A2.1, para ressaltar os ciclos da série. Comparando a primeira e última coluna da tabela, pode ser visto que, os valores de j e $G(j)$ são os mesmos, apenas em ordem diferente e que esta permutação na ordem dos valores fica restrita aos intervalos de cada ciclo, isto é, cada ciclo apresenta os mesmos valores tanto na primeira como na quinta coluna. A implicação desta restrição na permutação promovida pelo uso do Gray *code*, é que, as representações em base dois de $G(j)$ preservam a propriedade mencionada anteriormente de terem a mesma quantidade de dígitos que a ordem do ciclo, conforme pode ser visto comparando as colunas dois e quatro. O efeito prático disso é a preservação do fenômeno dos ciclos de refinamentos sucessivos quando adotado o algoritmo sugerido por Antonov e Saleev.

A tabela 4.A2.6 é semelhante à tabela 4.A2.4 exceto por ter sido gerada com o uso de Gray *code*. É possível constatar que os padrões anteriores foram substituídos. Em particular, destaca-se o forte padrão entre as duas primeiras colunas e a conseqüente presença da propriedade A em R^2 .

j_{10}	j_2	$\text{int}[j/2]_2$	$G(j)_2$	$G(j)_{10}$
1	<u>1</u>	0	1	1
2	<u>10</u>	1	<u>11</u>	3
3	<u>11</u>	1	<u>10</u>	2
4	<u>100</u>	10	<u>110</u>	6
5	<u>101</u>	10	<u>111</u>	7
6	<u>110</u>	11	<u>101</u>	5
7	<u>111</u>	11	<u>100</u>	4
8	<u>1000</u>	100	<u>1100</u>	12
9	<u>1001</u>	100	<u>1101</u>	13
10	<u>1010</u>	101	<u>1111</u>	15
11	<u>1011</u>	101	<u>1110</u>	14
12	<u>1100</u>	110	<u>1010</u>	10
13	<u>1101</u>	110	<u>1011</u>	11
14	<u>1110</u>	111	<u>1001</u>	9
15	<u>1111</u>	111	<u>1000</u>	8
16	<u>10000</u>	1000	<u>11000</u>	24
17	<u>10001</u>	1000	<u>11001</u>	25
18	<u>10010</u>	1001	<u>11011</u>	27
19	<u>10011</u>	1001	<u>11010</u>	26
20	<u>10100</u>	1010	<u>11110</u>	30
21	<u>10101</u>	1010	<u>11111</u>	31
22	<u>10110</u>	1011	<u>11101</u>	29
23	<u>10111</u>	1011	<u>11100</u>	28
24	<u>11000</u>	1100	<u>10100</u>	20
25	<u>11001</u>	1100	<u>10101</u>	21
26	<u>11010</u>	1101	<u>10111</u>	23
27	<u>11011</u>	1101	<u>10110</u>	22
28	<u>11100</u>	1110	<u>10010</u>	18
29	<u>11101</u>	1110	<u>10011</u>	19
30	<u>11110</u>	1111	<u>10001</u>	17
31	<u>11111</u>	1111	<u>10000</u>	16

Tabela 4.A2.5 Cálculo do Gray code e uso do “0” mais a direita como indicador da posição que muda nas representações binárias e delimitação das permutações geradas pelo Gray code demonstrando que o mesmo preserva os ciclos de Sobol’

j	Dimensões									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.25	0.75
3	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.25	0.75	0.75	0.25
4	0.375	0.375	0.625	0.125	0.875	0.875	0.125	0.625	0.125	0.875
5	0.875	0.875	0.125	0.625	0.375	0.375	0.625	0.125	0.625	0.375
6	0.625	0.125	0.375	0.375	0.125	0.625	0.875	0.875	0.375	0.125
7	0.125	0.625	0.875	0.875	0.625	0.125	0.375	0.375	0.875	0.625
8	0.1875	0.3125	0.3125	0.6875	0.5625	0.1875	0.0625	0.9375	0.5625	0.0625
9	0.6875	0.8125	0.8125	0.1875	0.0625	0.6875	0.5625	0.4375	0.0625	0.5625
10	0.9375	0.0625	0.5625	0.9375	0.3125	0.4375	0.8125	0.6875	0.8125	0.8125
11	0.4375	0.5625	0.0625	0.4375	0.8125	0.9375	0.3125	0.1875	0.3125	0.3125
12	0.3125	0.1875	0.9375	0.5625	0.4375	0.8125	0.1875	0.3125	0.6875	0.9375
13	0.8125	0.6875	0.4375	0.0625	0.9375	0.3125	0.6875	0.8125	0.1875	0.4375
14	0.5625	0.4375	0.1875	0.8125	0.6875	0.5625	0.9375	0.0625	0.9375	0.1875
15	0.0625	0.9375	0.6875	0.3125	0.1875	0.0625	0.4375	0.5625	0.4375	0.6875
16	0.09375	0.46875	0.84375	0.40625	0.28125	0.34375	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625
17	0.59375	0.96875	0.34375	0.90625	0.78125	0.84375	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625
18	0.84375	0.21875	0.09375	0.15625	0.53125	0.09375	0.28125	0.59375	0.59375	0.65625
19	0.34375	0.71875	0.59375	0.65625	0.03125	0.59375	0.78125	0.09375	0.09375	0.15625
20	0.46875	0.09375	0.46875	0.28125	0.65625	0.71875	0.65625	0.46875	0.96875	0.53125
21	0.96875	0.59375	0.96875	0.78125	0.15625	0.21875	0.15625	0.96875	0.46875	0.03125
22	0.71875	0.34375	0.71875	0.03125	0.40625	0.96875	0.40625	0.21875	0.71875	0.28125
23	0.21875	0.84375	0.21875	0.53125	0.90625	0.46875	0.90625	0.71875	0.21875	0.78125
24	0.15625	0.15625	0.53125	0.84375	0.84375	0.40625	0.59375	0.15625	0.28125	0.46875
25	0.65625	0.65625	0.03125	0.34375	0.34375	0.90625	0.09375	0.65625	0.78125	0.96875
26	0.90625	0.40625	0.28125	0.59375	0.09375	0.15625	0.34375	0.40625	0.03125	0.71875
27	0.40625	0.90625	0.78125	0.09375	0.59375	0.65625	0.84375	0.90625	0.53125	0.21875
28	0.28125	0.28125	0.15625	0.96875	0.21875	0.53125	0.71875	0.53125	0.40625	0.59375
29	0.78125	0.78125	0.65625	0.46875	0.71875	0.03125	0.21875	0.03125	0.90625	0.09375
30	0.53125	0.03125	0.90625	0.71875	0.96875	0.78125	0.46875	0.78125	0.15625	0.34375
31	0.03125	0.53125	0.40625	0.21875	0.46875	0.28125	0.96875	0.28125	0.65625	0.84375
32	0.046875	0.265625	0.609375	0.578125	0.703125	0.640625	0.265625	0.671875	0.359375	0.046875
33	0.546875	0.765625	0.109375	0.078125	0.203125	0.140625	0.765625	0.171875	0.859375	0.546875
34	0.796875	0.015625	0.359375	0.828125	0.453125	0.890625	0.515625	0.921875	0.109375	0.796875
35	0.296875	0.515625	0.859375	0.328125	0.953125	0.390625	0.015625	0.421875	0.609375	0.296875
36	0.421875	0.140625	0.234375	0.703125	0.328125	0.265625	0.390625	0.046875	0.484375	0.921875
37	0.921875	0.640625	0.734375	0.203125	0.828125	0.765625	0.890625	0.546875	0.984375	0.421875
38	0.671875	0.390625	0.984375	0.953125	0.578125	0.015625	0.640625	0.296875	0.234375	0.171875
39	0.171875	0.890625	0.484375	0.453125	0.078125	0.515625	0.140625	0.796875	0.734375	0.671875
40	0.234375	0.078125	0.796875	0.140625	0.140625	0.578125	0.328125	0.359375	0.796875	0.109375
41	0.734375	0.578125	0.296875	0.640625	0.640625	0.078125	0.828125	0.859375	0.296875	0.609375
42	0.984375	0.328125	0.046875	0.390625	0.890625	0.828125	0.578125	0.109375	0.546875	0.859375
43	0.484375	0.828125	0.546875	0.890625	0.390625	0.328125	0.078125	0.609375	0.046875	0.359375
44	0.359375	0.453125	0.421875	0.015625	0.765625	0.453125	0.453125	0.984375	0.921875	0.984375
45	0.859375	0.953125	0.921875	0.515625	0.265625	0.953125	0.953125	0.484375	0.421875	0.484375
46	0.609375	0.203125	0.671875	0.265625	0.015625	0.203125	0.703125	0.734375	0.671875	0.234375
47	0.109375	0.703125	0.171875	0.765625	0.515625	0.703125	0.203125	0.234375	0.171875	0.734375
48	0.078125	0.234375	0.265625	0.984375	0.984375	0.984375	0.796875	0.453125	0.515625	0.390625
49	0.578125	0.734375	0.765625	0.484375	0.484375	0.484375	0.296875	0.953125	0.015625	0.890625
50	0.828125	0.484375	0.515625	0.734375	0.234375	0.734375	0.046875	0.203125	0.765625	0.640625
51	0.328125	0.984375	0.015625	0.234375	0.734375	0.234375	0.546875	0.703125	0.265625	0.140625
52	0.453125	0.359375	0.890625	0.859375	0.109375	0.109375	0.921875	0.828125	0.640625	0.515625
53	0.953125	0.859375	0.390625	0.359375	0.609375	0.609375	0.421875	0.328125	0.140625	0.015625
54	0.703125	0.109375	0.140625	0.609375	0.859375	0.359375	0.171875	0.578125	0.890625	0.265625
55	0.203125	0.609375	0.640625	0.109375	0.359375	0.859375	0.671875	0.078125	0.390625	0.765625
56	0.140625	0.421875	0.078125	0.296875	0.421875	0.796875	0.859375	0.515625	0.078125	0.453125
57	0.640625	0.921875	0.578125	0.796875	0.921875	0.296875	0.359375	0.015625	0.578125	0.953125
58	0.890625	0.171875	0.828125	0.046875	0.671875	0.546875	0.109375	0.765625	0.328125	0.703125
59	0.390625	0.671875	0.328125	0.546875	0.171875	0.046875	0.609375	0.265625	0.828125	0.203125
60	0.265625	0.046875	0.703125	0.421875	0.546875	0.171875	0.984375	0.140625	0.203125	0.578125
61	0.765625	0.546875	0.203125	0.921875	0.046875	0.671875	0.484375	0.640625	0.703125	0.078125
62	0.515625	0.296875	0.453125	0.171875	0.296875	0.421875	0.234375	0.390625	0.453125	0.328125
63	0.015625	0.796875	0.953125	0.671875	0.796875	0.921875	0.734375	0.890625	0.953125	0.828125

Tabela 4.A2.6 (Repete a tabela 4.4.1) Exibição da alternância entre os intervalos $[0, 0,5)$ e $[0,5, 0)$ para os primeiros 63 valores gerados a partir dos primeiros dez polinômios primitivos com os números direcionais iniciais apresentados em Jäckel com uso de Gray code. Os valores maior ou igual a 0,5 estão destacado em fundo cinza.

5 MODELOS FINANCEIROS AVALIADOS

A fim de avaliar as diferentes técnicas de amostragem contempladas nesta tese – as tradicionais e as propostas – serão realizados alguns experimentos utilizando problemas que surgem com frequência na área de simulação aplicada a finanças. Estes problemas envolvem opções europeias e asiáticas, assim como a técnica conhecida como ponte browniana. Conforme será explicado no capítulo 7, a escolha destes problemas está, em parte, relacionada às diferenças entre as estruturas de hierarquia apresentadas nos diferentes modelos de simulação, o que permite avaliar melhor as técnicas de controle multivariado. Neste capítulo, são apresentadas as opções e técnicas utilizadas na construção dos experimentos.

5.1 Opções de Compra Tipo Européia

Uma opção de compra europeia é um contrato entre dois agentes que assegura a um deles o direito de comprar do outro um objeto (também chamado de ativo-objeto) numa data estipulada (data de vencimento), por um preço determinado (preço de exercício). Matematicamente, na data de vencimento da opção, o valor deste direito é dado pela função *payoff*, (Lemgruber, 1995).

$$payoff = \max(0; S^* - K) = (S^* - K)^+ \quad 5.1.1$$

onde: $S^* = S_T$ = preço do ativo-objeto na data de vencimento da opção e

K = preço de exercício da opção.

Ou seja, no vencimento, o valor do *payoff* é sempre não negativo e, anteriormente ao vencimento, embora o *payoff* seja desconhecido, o valor presente do *payoff* esperado é sempre maior que zero, se for atribuída probabilidade não nula para o

payoff ser maior que zero²⁹. Isso significa que o direito à opção tem valor e, para adquirir este direito, o comprador da opção (comprado) deve pagar um preço ao vendedor do direito (vendido), caso contrário, haverá arbitragem do tipo I, (Cerny, 2003).

Por definição, o preço justo, ou prêmio, da opção é o preço com o qual o resultado esperado de ambas as partes é nulo, isto é, é o valor presente do *payoff* esperado. No entanto, cabe notar que o *payoff* esperado depende do modelo usado para a trajetória do preço do ativo objeto e, conseqüentemente, da distribuição associada ao preço do ativo-objeto resultante deste modelo. O modelo mais consagrado para apuração de opções europeias é, provavelmente, o modelo de Black e Scholes (1973), que possui solução analítica dada pela fórmula

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-R_f T/252} N(d_2) \quad 5.1.2$$

onde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{252}}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \frac{T}{252}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{252}}} = d_1 - \sigma \sqrt{\frac{T}{252}};$$

R_f = taxa de juro livre de risco anual;

T = prazo de vencimento da opção em dias úteis;

$N(d_i)$ = área sob a curva normal padrão à esquerda de d_i , $i=1$ e 2 ;

S_0 = o preço do ativo no instante inicial e

σ = a volatilidade anualizada dos retornos.

Embora o modelo de Black e Scholes utilize premissas simplificadoras e possua solução analítica – o que dispensa a necessidade do uso de métodos numéricos para obter soluções aproximadas - há três vantagens em usar esse modelo de apuração para avaliar métodos Monte Carlo. A primeira é o fato de

²⁹ No modelo log-normal, por exemplo, a probabilidade de exercício é sempre não nula.

haver solução analítica contra a qual é possível avaliar os resultados obtidos pelos diferentes métodos e modelos de simulação usados, (Charnes, 2000). A segunda vantagem, é que o valor $N(d_2)$ na - equação 5.1.2 - é igual à probabilidade de haver exercício, o que permite avaliar melhor se há algum efeito relacionado a esta probabilidade. Finalmente, a terceira, é a possibilidade de aumento indefinido da dimensionalidade sem alterar o problema, (Saliby, Gouvêa e Marins, 2007).

Visto que o modelo de Black e Scholes assume que o ativo-objeto se move seguindo um modelo geométrico browniano e que o *payoff* de uma opção de compra do tipo européia só depende do preço deste ativo no vencimento, a forma mais simples de obter estimativas Monte Carlo para o prêmio é usar um modelo de simulação unidimensional – onde apenas o preço do ativo no vencimento é simulado. No entanto, embora a trajetória entre o valor inicial e final percorrida pelo preço do ativo não seja importante para o apreamento de opções européias, quando a difusão do preço do ativo-objeto é modelada como um processo geométrico browniano, é fácil construir a trajetória a partir de valores intermediários sem descaracterizar o processo. Jäckel (2002) relaciona alguns métodos de obter valores intermediários para a trajetória, sendo o mais simples e direto, o método incremental, na qual o período total de tempo (T) é dividido em uma quantidade (d) de intervalos e a trajetória é criada seqüencialmente pela simulação do preço ao final de cada um desses intervalos. Como a trajetória pode ser dividida em quantos passos forem desejados, é possível aumentar a dimensionalidade do problema indefinidamente sem alterar as características da opção, incluindo o prêmio e a probabilidade de exercício, o que facilita a análise do efeito da dimensionalidade.

Um modelo matemático de simulação que seja compatível com a equação 5.1.2 pode ser obtido a partir dos mesmos pressupostos utilizados no modelo de

Black e Scholes, no qual a trajetória do preço do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano e é representada pela equação diferencial estocástica

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz , \quad 5.1.3$$

onde:

S = preço do ativo;

μ = retorno do ativo;

σ = volatilidade do ativo;

dz = processo de Wiener.

A partir da equação 5.1.3, é possível obter o processo para $\ln S$ com o uso do lema de Ito e, com a adoção da hipótese de neutralidade ao risco, chegar a:

$$d \ln S = \left(R_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz , \quad 5.1.4$$

onde R_f = taxa livre de risco.

Finalmente, com a discretização da equação 5.1.4, é obtida a fórmula estocástica para o preço do ativo após um intervalo de tempo δt .

$$S_t = S_{t-\delta t} e^{[(R_f - \sigma^2/2) * \delta t + \sigma * \sqrt{\delta t} * \varepsilon_t]} \quad 5.1.5$$

Onde:

S_t = preço do ativo na data t ;

S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;

δt = intervalo de tempo;

ε_t = é um choque aleatório com distribuição $N(0, 1)$ referente à data t .

A equação 5.1.5 é o modelo matemático utilizado na simulação de preços a partir de um preço inicial. O aumento da dimensionalidade (d) pode ser obtido fazendo $\delta t = T/d$ no modelo e gerando um preço para o ativo no final de cada um dos d

subintervalos de tempo δt , a partir do preço simulado para o final do intervalo imediatamente anterior, (Hull, 2002).

Quanto à existência ou não de hierarquia entre as dimensões, deve ser levado em consideração que o *payoff* da opção europeia não depende dos estados intermediários da trajetória, isto é, a ordem dos choques $(\Delta S_t = S_t - S_{t-\delta t})$ ³⁰ nos preços não é importante, somente o valor de S_T (o preço no vencimento). Se, na equação 5.1.5, for usado $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_T$ para representar os choques relativos a cada incremento da trajetória, resultando nos preços $S_1, S_2, S_3, \dots, S_T$ observados em t_1, t_2, \dots, t_T , pode ser escrito

$$S_T = S_0 e^{[(R_f - \sigma^2/2) * \delta t * T + \sigma * \sqrt{\delta t} * (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_T)]}, \quad 5.1.6$$

o que demonstra a falta de hierarquia entre as dimensões.

5.2 Opções de Compra Tipo Asiática (trajetórias geradas por incrementos)

Opções do tipo asiáticas sobre um determinado ativo são contratos de derivativos em que o *payoff* depende do preço médio de um ativo-objeto durante, pelo menos, uma parte do período de vigência. Por isso, essas opções são classificadas como *path dependent* (dependente da trajetória), isto é, são derivativos cujo *payoff* dependem da trajetória do preço do ativo subjacente, contrastando com opções europeias, em que só o valor no vencimento é relevante.

Como instrumentos de *hedge*, as opções asiáticas podem ser preferíveis às europeias em situações em que o objetivo é proteger fluxos de caixa distribuídos ao longo de um período de tempo – ao contrário de concentrados em alguns poucos fluxos em datas previamente conhecidas. Por exemplo, para uma empresa que

³⁰ Aqui, choque é usado num sentido menos formal.

planeje um determinado nível de exportações ao longo ano, o *hedge* com opção asiática pode sair mais barato do que o realizado com várias opções européias.

Quanto às suas características, as opções asiáticas apresentam alguma variedade em função das diferentes possibilidades existentes para suas especificações. Por exemplo, o período de cálculo da média pode ser igual ao do prazo da opção ou de apenas uma parte do mesmo, a média pode ser aritmética ou geométrica e o monitoramento do preço pode ser feito com intervalos diários ou com outro período – incluindo o monitoramento contínuo. Há ainda, pelo menos duas formas de definir o *payoff* de uma opção de compra tipo asiática: $(0, \bar{S} - K)^+$ ou $(0, S_T - \bar{S})^+$, onde \bar{S} é a média de preços calculada e S_T é o preço final do ativo na data de exercício. Ou seja, a média tanto pode ser usada para definir o valor do ativo como o preço de exercício da opção, (Hull, 2002 e Glasserman, 2003).

Nesta tese, o tipo de opção asiática utilizada é a definida pela função *payoff*

$$\text{Payoff} = \text{máx}(0; S^* - K) = (S^* - K)^+ \quad 5.2.1$$

onde: $S^* = \bar{S}$ média aritmética do preço do ativo-objeto monitorado diariamente

durante todo período de vigência da opção, isto é, $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T S_{t_i}$;

K = preço de exercício da opção.

Também para fins de experimento nesta tese, o preço do ativo-objeto será modelado como movimento geométrico browniano, a exemplo da modelagem realizada para a opção européia. Diferentemente do caso da opção européia, para a qual há fórmula analítica³¹ quando é suposto um movimento geométrico browniano para o preço do ativo objeto, não há fórmula analítica exata para essa opção asiática com esta modelagem de difusão de preço. Contudo, para fins de avaliar técnicas de controle

³¹ Fórmula de Black e Scholes, ver equação 5.1.2.

multivariado para o método Monte Carlo, o interesse nesse problema de apreçamento está relacionado ao fato de as dimensões do modelo terem importância relativa diferenciada, isto é, há uma hierarquia entre as dimensões.

Embora as importâncias relativas das dimensões (ou variáveis) do modelo não sejam conhecidas, dependendo de como o este for construído, é possível inferir a ordem provável da hierarquia. Especificamente, quando o modelo é construído de forma que as trajetórias de movimento geométrico browniano são geradas pelo método incremental – o mesmo utilizado no experimento com opção europeia – o impacto relativo de cada variável tende a diminuir com o aumento da ordem da dimensão. Por exemplo, se for simulada uma opção asiática com monitoramento diário e prazo de dez dias, a variável relativa ao choque do primeiro dia terá a maior importância e a relativa ao do décimo dia, a menor.

A tendência de queda da importância das dimensões pode ser analisada a partir do cálculo de S^* , onde

$$S^* = \frac{1}{T} [S_1 + S_2 + \dots + S_T] \quad 5.2.2$$

é a média dos preços do ativo-objeto observados em t_1, t_2, \dots, t_T . Usando a notação utilizada na equação 5.1.6 e chamando $a = (R_f - \sigma^2/2) * \delta t$ e $b = \sigma * \sqrt{\delta t}$, os preços ao longo da trajetória podem ser escritos como

$$S_1 = S_0 e^{[a*1 + b*(\varepsilon_1)]},$$

$$S_2 = S_0 e^{[a*2 + b*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]}$$

e, genericamente,

$$S_i = S_0 e^{[a*i + b*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)]}. \quad 5.2.3$$

Reescrevendo a equação 5.2.2 em termos da equação 5.2.3, tem-se

$$S^* = \frac{S_0}{T} \left[e^{[a^*1 + b^*(\varepsilon_1)]} + e^{[a^*2 + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]} + \dots + e^{[a^*i + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)]} + \dots + e^{[a^*T + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_T)]} \right]. \quad 5.2.4$$

Finalmente, tomando as derivadas parciais em relação aos diversos choques, tem-se:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon_1} = \frac{S_0}{T} \left[be^{[a^*1 + b^*(\varepsilon_1)]} + be^{[a^*2 + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]} + \dots + be^{[a^*i + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)]} + \dots + be^{[a^*T + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_T)]} \right],$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon_2} = \frac{S_0}{T} \left[be^{[a^*2 + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]} + \dots + be^{[a^*i + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)]} + \dots + be^{[a^*T + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_T)]} \right]$$

e, genericamente,

$$\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon_i} = \frac{S_0}{T} \left[be^{[a^*i + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i)]} + \dots + be^{[a^*T + b^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_T)]} \right]. \quad 5.2.5$$

A equação 5.2.5 demonstra que, para qualquer $i < j$,

$$\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon_i} \geq \frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon_j}. \quad 5.2.6$$

Usando a equação 5.2.6 e o fato dos choques ε serem i.i.d., é possível afirmar que a hierarquia entre as dimensões é tal que, a dimensão referente ao choque do primeiro incremento é a mais importante, a referente ao choque do segundo incremento é a segunda mais importante e assim por diante.

5.3 Construção de Trajetórias com a Técnica da Ponte Browniana

Uma alternativa à forma incremental para a simulação de trajetórias é a técnica conhecida como ponte browniana. Ao invés de tentar simular diretamente o fenômeno da difusão de um ativo seguindo um processo geométrico browniano – como faz o método incremental – este método utiliza a probabilidade condicional da distribuição de S_t , dado que se conhece S_s e S_u , onde $s < t < u$. Assim, é possível

gerar uma trajetória com d passos, simulando primeiro o seu final, S_d , e utilizando a distribuição condicional de $S_{d/2}$ para simular um preço intermediário da trajetória. Conhecido $S_{d/2}$, é possível simular $S_{d/4}$ (usando a distribuição condicional a S_0 e $S_{d/2}$) e $S_{3d/4}$, (usando a distribuição condicional a $S_{d/2}$ e S_d). Esse processo pode ser repetido em ciclos de refinamentos sucessivos da trajetória até que, todos os pontos S_k , $k = 1, 2, \dots, d$ tenham sido gerados³². A figura 5.3.1 apresenta a ordem para o preenchimento de uma trajetória com oito dias³³ na qual é possível identificar os ciclos de preenchimento. A princípio, o método da ponte browniana não teria nenhuma vantagem em relação ao uso do método incremental, porém, como o uso da ponte browniana concentra a importância relativa em poucas variáveis, é possível combiná-la com o uso de técnicas amostrais que apresentem hierarquia entre as dimensões e tirar proveito desta concentração. De fato, a técnica da ponte browniana é freqüentemente associada ao uso de Sobol' e Quasi-Monte Carlo, na literatura.

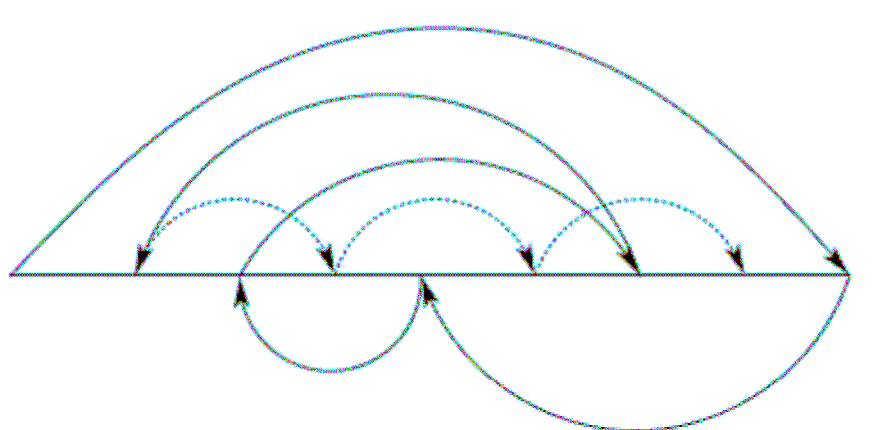


Figura 5.3.1. Ordem de simulação dos pontos de uma trajetória de oito períodos usando a técnica de ponte browniana. (Reproduzido de Winiarski, 1998)

³² A descrição acima é referente ao caso particular em que $d = 2^n$, onde n é um número natural qualquer. Neste caso, é particularmente fácil usar a técnica da ponte browniana, pois, a cada ciclo, todos os intervalos são bipartidos. Nos demais casos, o processo é semelhante, exceto que é necessário optar pelos pontos intermediários que serão simulados a cada ciclo de refinamento.

³³ Embora não haja restrição operacional quanto à ordem de preenchimento dos pontos dentro de cada ciclo, o preenchimento de frente para trás é sugerido nos diagramas explicativos de alguns textos (Winiarski, 1998 e Jäckel, 2002).

Considerando um processo de Wiener,³⁴ em que W_1, W_2, \dots, W_d , são os pontos observados em t_1, t_2, \dots, t_d , para $s < t < u$, a distribuição de W_t condicionado a W_s e W_u é dada por

$$W_t \sim N\left(\frac{(t_u - t_t)W_s + (t_t - t_s)W_u}{t_u - t_s}, \frac{(t_u - t_t)(t_t - t_s)}{t_u - t_s}\right) \quad 5.3.1$$

isto é, W_t tem distribuição gaussiana com valor esperado igual à média ponderada dos valores conhecidos antes e depois de t_t e variância condicional dependente apenas dos intervalos de tempo. O valor final da trajetória simulada pode ser obtido atribuindo $W_d = \sqrt{t_d} z_d$, onde z_d é um valor aleatório retirado de uma amostra $N(0, 1)$.

A generalização para um processo browniano (B_t) pode ser feita a partir do *drift* e variância do mesmo, respectivamente, μ_B e σ_B^2 . Como o valor esperado de B_t condicionado a B_s e B_u não é afetado pelo aumento da volatilidade, a distribuição de B_t é dada por

$$B_t \sim N\left(\frac{(t_u - t_t)B_s + (t_t - t_s)B_u}{t_u - t_s}, \frac{(t_u - t_t)(t_t - t_s)}{t_u - t_s} \sigma_B^2\right) \quad 5.3.2$$

isto é, tem o mesmo valor esperado que W_t com variância proporcional à variância do processo browniano. A incorporação do *drift* é feita na geração do valor final da trajetória, que pode ser simulado atribuindo

$$B_d = \mu_B t_d + \sigma_B \sqrt{t_d} z_d, \quad 5.3.3$$

onde, z_d é um valor aleatório retirado de uma amostra $N(0, 1)$.

³⁴ No que se segue, cabe ter em mente que, como a técnica da ponte browniana é relativa a processos brownianos, para gerar a trajetória de preços, é preciso primeiro gerar a trajetória de \ln -preços e, depois, transformá-la em trajetória de preços aplicando a função exponencial a todos os pontos.

A relação entre os valores de μ_B e σ_B^2 e os parâmetros do problema, são consequência direta da derivação do processo log-normal através do lema de Ito. Considerando que o preço do ativo segue um processo dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad 5.3.4$$

o processo para $G = \ln S$ obtido pelo lema de Ito é

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz, \quad 5.3.5$$

donde se conclui que, $\mu_B = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ e $\sigma_B^2 = \sigma^2$ na equação 5.3.3. Mas, sob a hipótese da neutralidade ao risco, $\mu = r$, a taxa livre de risco. Logo, com a substituição em (5.3.3), o uso de (5.3.2) e a adição da constante referente à condição inicial do preço, são obtidas as equações utilizadas na simulação dos pontos da ponte browniana:

$$B_d = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_d + \sigma \sqrt{t_d} z_d + \ln(S_0) \quad 5.3.6$$

e

$$B_t = \frac{(t_u - t_t)B_s + (t_t - t_s)B_u}{t_u - t_s} + \sqrt{\frac{(t_u - t_t)(t_t - t_s)}{t_u - t_s}} \sigma z_t, \quad 5.3.7$$

onde z_k é um valor aleatório retirado de uma amostra $N(0, 1)$.

A simulação de uma trajetória de ln-preço começa pela simulação do seu final, o que é feito pela avaliação da equação 5.3.6 para um valor aleatório de $z_d = N^{-1}(u)$. Os demais pontos da trajetória são simulados com o uso da equação 5.3.7. Após a geração da trajetória, é necessário transformá-la de ln-preço para preço, a fim de avaliar a função *payoff*.

Como mencionado anteriormente, o ganho potencial do uso da ponte browniana resulta da associação das variáveis de maior importância com as dimensões mais bem distribuídas do Quasi-Monte Carlo. Como todos os pontos S_k , $k = 1, 2, \dots, d-1$ são condicionados a S_d (e a S_0 , que é constante), essa variável deve ser a mais importante e, por isso, associada à dimensão considerada como tendo melhores propriedades – geralmente a primeira - nas séries de baixa discrepância. Excluindo S_d , todas as demais variáveis são dependentes de $S_{d/2}$ o preço realizado no ponto médio da trajetória - o segundo a ser gerado - o que leva esta variável a ser associada à segunda dimensão das séries de baixa discrepância. O próximo conjunto de pontos gerados (o segundo ciclo da ponte browniana) são os pontos $S_{d/4}$ e $S_{3d/4}$. A dependência entre esses pontos se dá apenas através de S_d e $S_{d/2}$, ou seja, condicionados a S_d e $S_{d/2}$, os pontos $S_{d/4}$ e $S_{3d/4}$ são independentes entre si. Por outro lado, todos os demais pontos da trajetória dependerão – direta ou indiretamente – de $S_{d/4}$ ou $S_{3d/4}$, portanto, pode se esperar que ambos tenham importância menor que a de S_d e $S_{d/2}$, mas maior que as dos demais pontos da trajetória. No caso geral, como todos os preços gerados dentro de cada ciclo são independentes entre si, mas dependem da mesma quantidade de variáveis, pode se esperar que, a cada ciclo, a importância relativa das variáveis caia, mas que sejam aproximadamente iguais as demais dentro do mesmo ciclo, (Glasseman 2002, Hull 2003, Jäckel 2002, Krykova 2003 e Winiarski, 1998).

A estrutura de hierarquia argumentada acima pode ser demonstrada para um exemplo de $T = 4$ dias e σ^2 e r (volatilidade e taxa livre de risco) expressas em dias. O primeiro passo é calcular os valores para B_1 , B_2 , B_3 , e B_4 . Usando as equações 5.3.6 e 5.3.7 e substituindo $a = (r - \sigma^2/2)$ e t_0, t_1, t_2, t_3 , e t_4 por 0, 1, 2, 3 e 4 são obtidas as fórmulas:

$$B_4 = 4a + 2\sigma z_4 + \ln S_0, \quad 5.3.8$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \ln S_0 + \frac{1}{2} B_4 + \sigma z_2, \quad 5.3.9$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \ln S_0 + \frac{1}{2} B_2 + \sqrt{\frac{1}{2}} \sigma z_1 \quad e \quad 5.3.10$$

$$B_3 = \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{2} B_4 + \sqrt{\frac{1}{2}} \sigma z_3. \quad 5.3.11$$

A partir da trajetória de log-preços pode ser obtida a trajetória de preços aplicando a função exponencial aos pontos da trajetória. A substituição de $S_i = e^{B_i}$ na equação 5.2.2 resulta na forma

$$S^* = \frac{1}{T} [e^{B_1} + e^{B_2} + e^{B_3} + e^{B_4}]. \quad 5.3.12$$

Semelhante ao que foi feito na seção 5.2, é possível ter uma idéia da hierarquia entre as variáveis do problema de apreçamento, tomando a derivada de S^* em relação às quatro variáveis aleatórias do modelo:

$$\frac{\partial S^*}{\partial z_1} = \frac{\sigma}{T} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} e^{B_1} \right], \quad 5.3.13$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial z_2} = \frac{\sigma}{T} \left[\frac{1}{2} e^{B_1} + e^{B_2} + \frac{1}{2} e^{B_3} \right], \quad 5.3.14$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial z_3} = \frac{\sigma}{T} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} e^{B_3} \right] \quad e \quad 5.3.15$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial z_4} = \frac{\sigma}{T} \left[\frac{1}{2} e^{B_1} + e^{B_2} + \frac{3}{2} e^{B_3} + 2e^{B_4} \right]. \quad 5.3.16$$

As equações acima permitem concluir, com certeza, apenas que, $\frac{\partial S^*}{\partial z_4} > \frac{\partial S^*}{\partial z_2}$ e

$\frac{\partial S^*}{\partial z_4} > \frac{\partial S^*}{\partial z_3}$, o que é insuficiente para determinar a hierarquia das dimensões do

modelo. Porém, como B_i é uma variável aleatória com distribuição normal, e^{B_i} tem distribuição log-normal e $E(e^{B_i}) = e^{\mu_{B_i} + \sigma_{B_i}^2/2}$. Os valores de μ_{B_i} e $\sigma_{B_i}^2$ podem ser obtidos a partir das equações 5.3.8 a 5.3.11, onde as variáveis z_i representam normais padrões independentes:

$$E(e^{B_1}) = e^{\ln S_0 + a + \sigma^2/2}, \quad 5.3.17$$

$$E(e^{B_2}) = e^{\ln S_0 + 2a + \sigma^2}, \quad 5.3.18$$

$$E(e^{B_3}) = e^{\ln S_0 + 3a + 3\sigma^2/2} e \quad 5.3.19$$

$$E(e^{B_4}) = e^{\ln S_0 + 4a + 2\sigma^2}. \quad 5.3.20$$

Como, em geral, nos problemas encontrados em finanças, os valores de r e σ são pequenos e próximos de zero, é possível desprezar o *drift* (a) e a variância (σ^2) e aproximar as esperanças acima para:

$$E(e^{B_1}) \approx e^{\ln S_0} = S_0, \quad 5.3.21$$

$$E(e^{B_2}) \approx e^{\ln S_0} = S_0, \quad 5.3.22$$

$$E(e^{B_3}) \approx e^{\ln S_0} = S_0 \text{ e} \quad 5.3.23$$

$$E(e^{B_4}) \approx e^{\ln S_0} = S_0. \quad 5.3.24$$

Finalmente, substituindo as equações 5.3.21 a 5.3.24 nas equações 5.3.13 a 5.3.16, são obtidas as esperanças das derivadas parciais de S^* em relação às variáveis do modelo:

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_1}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{T} S_0, \quad 5.3.25$$

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_2}\right) \approx 2 \frac{\sigma}{T} S_0, \quad 5.3.26$$

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_3}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{T} S_0 \text{ e} \quad 5.3.27$$

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_4}\right) \approx 5 \frac{\sigma}{T} S_0. \quad 5.3.28$$

As equações 5.3.25 a 5.3.28 sugerem a presença de hierarquia entre os ciclos, conforme adiantado anteriormente. Pode ser visto que a sensibilidade esperada de S^* a variável z_4 , responsável por gerar o preço no último dia da trajetória, (primeiro ciclo de preenchimento) é mais que o dobro da sensibilidade esperada de S^* a variável z_2 , responsável por gerar o ponto médio da trajetória, (segundo ciclo). Esta, por sua vez, também é mais que o dobro das sensibilidades esperadas em relação as variáveis associadas ao terceiro ciclo (z_1 e z_3). Além de terem a menor importância, de acordo com as equações 5.3.25 e 5.3.27, as duas dimensões do terceiro ciclo têm importâncias iguais. No entanto, cabe lembrar que esses valores são aproximações obtidas desprezando o *drift* (a) e a variância (σ^2) nas equações 5.3.17 a 5.3.20. A manutenção destes valores no cálculo das esperanças resulta em:

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_1}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{T} e^{\ln S_0 + a + \sigma^2/2} \text{ e} \quad 5.3.29$$

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_3}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\sigma}{T} e^{\ln S_0 + 3a + 3\sigma^2/2}. \quad 5.3.30$$

Partindo da premissa de *drift* positivo e variância não nula, é possível afirmar que

$$E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_1}\right) < E\left(\frac{\partial S^*}{\partial z_3}\right), \text{ ainda que essa diferença seja muito pequena.}$$

Com base na análise apresentada acima, pode ser sugerida uma ordem de preenchimento que, para a maioria dos casos de finanças, deverá ser a que segue a ordem de redução de importância das variáveis do modelo-problema. A sugestão difere da apresentada em Winiarski (ver figura 5.3.1) apenas no preenchimento dentro de cada ciclo, que passa a ser de trás para frente. A figura 5.3.2 apresenta a ordem esperada de redução de importância segundo a análise apresentada e, portanto, também a ordem sugerida para simulação dos pontos de uma trajetória de 16 dias.

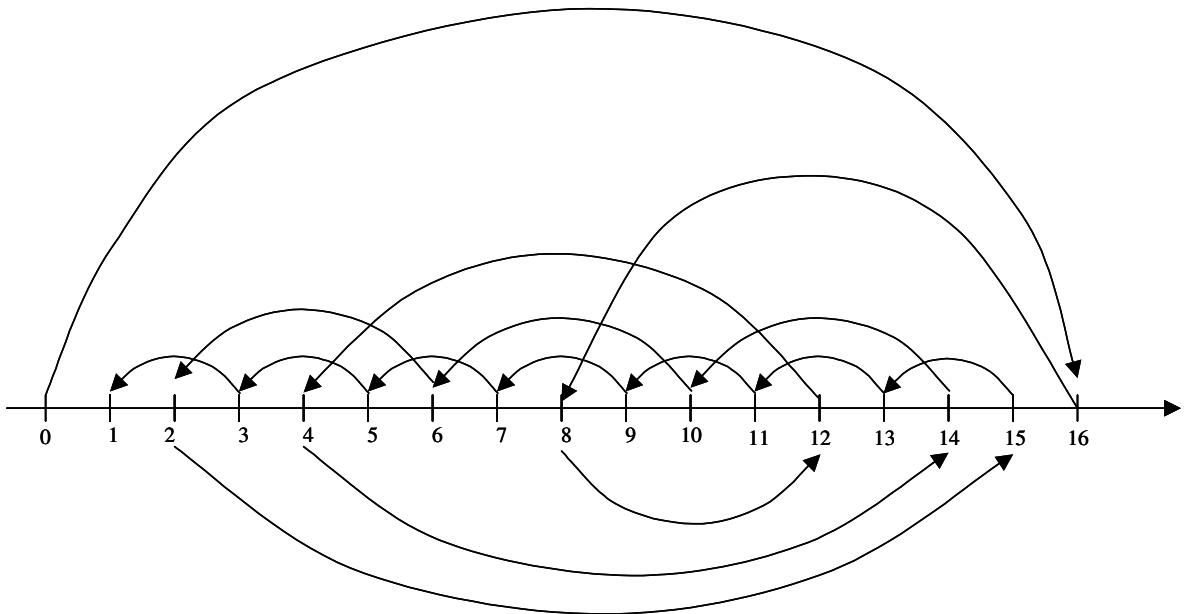


Figura 5.3.2. Ordem sugerida de simulação dos pontos de uma trajetória de 16 períodos usando a técnica de ponte browniana em função da análise das equações 5.3.25 a 5.3.28.

6 TÉCNICAS PROPOSTAS

Como declarado no capítulo 1, o principal objetivo desta tese é propor e avaliar formas de agregar controle multivariado à Amostragem Descritiva, para isto, foram propostas e exploradas algumas técnicas de controle multidimensional. As técnicas propostas podem ser classificadas em três diferentes linhas metodológicas, duas das quais apoiadas ou inspiradas nos métodos Quasi-Monte Carlo, apresentados no capítulo 4, e uma baseada na própria Amostragem Descritiva tradicional, apresentada no capítulo 3. A primeira linha metodológica consiste em combinar a Amostragem Descritiva com uma técnica Quasi-Monte Carlo. A segunda linha metodológica pode ser descrita como imitação do Quasi-Monte Carlo devido a tentativa de introduzir no processo da Amostragem Descritiva alguma característica de uma série Quasi-Monte Carlo. Finalmente, a terceira linha metodológica consistiu na tentativa de desenvolver um mecanismo de gerar os pontos da Amostragem Descritiva de forma mais homogênea em um espaço R^δ , para um δ fixo.

A primeira linha metodológica – a que visa combinar a Amostragem Descritiva com uma série de Quasi-Monte Carlo - foi feita utilizando uma seqüência *randomizada* para ordenar a seqüência do vetor descritivo, $(u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{j,k}, u_{N,k})$. A intenção é reproduzir a dinâmica entre as dimensões da série utilizada, sem abrir mão do conjunto de pontos unidimensionais da Amostragem Descritiva que, por construção, são ótimos. Essa técnica também permite preservar a economia computacional no cálculo da função de distribuição inversa, isto é, basta calcular $F^1(u_{j,k})$ uma vez para as M estimativas realizadas para obtenção da estimativa da variância. Para esta abordagem, optou-se por descartar a seqüência de Halton como seqüência ordenadora devido ao problema dos longos períodos de crescimento

observados nas dimensões mais elevadas. As seqüências de Faure e Sobol' e o Lattice também foram descartados por adicionar mais complexidade ao processo, que já é computacionalmente complexo devido a necessidade de fazer o ordenamento. Assim, para a avaliação desta alternativa de abordagem, optou-se pelo uso da seqüência de Richtmyer devido a sua simplicidade e aos resultados favoráveis relatados por Takhtamyshev, Vandewoestyne e Cools (2007).

No caso de segunda linha metodológica - a que visa imitar o Quasi-Monte Carlo -, inicialmente, foram identificadas duas características das séries de baixa discrepância que poderiam ser aplicadas para o controle multidimensional. A primeira é a forma como as seqüências de Sobol' alternam entre valores maiores e menores que 0,5, seguindo diferentes padrões. A segunda característica identificada é a forma como as diferentes dimensões de uma seqüência de Halton multidimensional preenchem o intervalo (0, 1), utilizando ciclos de diferentes tamanhos. Da primeira característica, resultou a técnica que foi denominada de Amostragem Descritiva Bipartida, apresentada na seção 6.2. Para a reprodução da segunda característica, foram tentadas algumas alternativas de produzir ciclos de diferentes tamanhos para ordenar o vetor descritivo. Estes ciclos seriam obtidos a partir de funções do tipo $\text{seno}(j f(p_k))$, onde $j = 1, 2, \dots, N$, f é uma função como $1/x$ e $1/x^2$ e p_k é um número primo diferente para cada dimensão. Esse método teria como vantagem potencial a possibilidade de um maior controle sobre os tamanhos de ciclos, evitando os segmentos de crescimento muito longo, observados na seqüência de Halton. No entanto, nenhuma das alternativas tentadas conseguiu passar por análises preliminares, o que levou ao abandono desta idéia.

A terceira linha metodológica para tentar obter distribuições mais homogêneas no hiper-cubo unitário em R^d foi utilizar um "bloco básico"

δ -dimensional em substituição ao vetor descritivo unidimensional. Na Amostragem Descritiva tradicional, cada dimensão é gerada a partir de um conjunto de N pontos igualmente distribuídos em $\mathcal{U}(0, 1)^1$ e, após serem permutadas aleatoriamente, as dimensões geradas são agrupadas. Esse processo sugere a geração de pontos bem distribuídos em $\mathcal{U}(0, 1)^\delta$ para a geração simultânea de δ dimensões que poderiam ser agrupadas, posteriormente, com as demais dimensões do modelo.

Ao final, também foi explorado o caminho inverso, ou seja, adaptar o Quasi-Monte Carlo – no caso, o Sobol’ – para que adquira as propriedades favoráveis da Amostragem Descritiva. Nas quatro seções a seguir (6.1 a 6.4), são apresentadas as propostas que resultaram destas três linhas metodológicas, assim como a adaptação proposta no Sobol’. Estas técnicas de amostragem são as principais contribuições da tese. Ao final deste capítulo, na seção 6.5, é feita uma descrição de como proceder em uma abordagem simplificada da técnica dos índices de sensibilidade global propostos por Sobol’.

6.1 AD com Richtmyer

O objetivo de combinar uma técnica Quasi-Monte Carlo com a Amostragem Descritiva é aproveitar o controle multivariado da primeira, sem abrir mão das vantagens unidimensionais e computacionais da segunda. Isso pode ser feito usando a seqüência de baixa discrepância para ordenar o vetor descritivo, da Amostragem Descritiva, que deixa de ser permutado de forma aleatória.

O processo de ordenamento é simples e pode ser realizado de forma independente para cada uma das d dimensões do modelo. Após a geração do k -ésimo vetor descritivo, segundo a distribuição probabilística especificada pelo

modelo³⁵, é gerado um segmento, de tamanho N , da seqüência de Richtmyer, correspondente a k -ésima dimensão. A ordenação do vetor descritivo se dá segundo o *rank* da seqüência de Richtmyer, isto é, se a seqüência de Richtmyer começa com o quarto menor número, o vetor descritivo é reordenado para que também seja iniciado pelo seu quarto valor. Operacionalmente, isto pode ser feito criando uma matriz N por 2 na qual a primeira coluna é composta pela seqüência que vai controlar a permutação e a segunda coluna pelo vetor descritivo não permutado. O ordenamento das linhas desta matriz, usando como critério a primeira coluna, resulta em colocar a segunda coluna na ordem desejada.

Na seção 2.3, foi mostrada uma forma de avaliar a precisão de estimativas Monte Carlo através da variância de uma amostra de estimativas. Daí resulta a necessidade de obter uma quantidade (M) de estimativas e, portanto, da necessidade de que seja possível obter diversas realizações da matriz de vetores descritivos, ou $X = F^{-1}(U)$, conforme a descrito na seção 2.2. Na Amostragem Descritiva, essas M realizações de X são obtidas fazendo M permutações aleatórias para cada vetor descritivo, porém, na técnica proposta, as permutações dos vetores descritivos são controladas por uma seqüência determinística. Assim, como acontece com o Quasi-Monte Carlo, é necessário randomizar a seqüência de Richtmyer para obter uma amostra de estimativas. Isso pode ser feito usando a técnica de “*shift modulo 1*”, ou “adição módulo 1”, descrita em 4.1.3, e usando a seqüência randomizada para fazer o ordenamento do vetor descritivo.

³⁵ Nesta tese, foi usada a distribuição $U(0, 1)$, conforme explicado no capítulo 3.

6.2 AD Bipartida

Uma técnica que pode ser chamada de Amostragem Descritiva Bipartida resultou da segunda linha metodológica, a que procura imitar características do Quasi-Monte Carlo. O objetivo desta proposta é adaptar uma característica, observada nas séries de Sobol', que tende a fazer com que pontos em um hiper-cubo d -dimensional tenham distribuição mais homogênea. Essa característica, que foi apresentada na seção 4.4, é a forma pela qual os valores da seqüência de Sobol' se alternam, entre os intervalos $(0, 0,5)$ e $[0,5, 1)$, segundo padrões repetitivos, padrões estes, relacionados à propriedade A estabelecida por Sobol'.

A Amostragem Descritiva Bipartida é, simplesmente, uma alteração no processo de permutação aleatória do vetor descritivo, utilizado na Amostragem Descritiva tradicional. Esta alteração tem como finalidade introduzir um controle que garanta um nível mínimo de homogeneidade. Por sua vez, este nível mínimo pode ser definido como uma forma alternativa e relaxada da propriedade A. Enquanto que, em sua forma original, a propriedade A requer que qualquer segmento de comprimento 2^d tenha exatamente um ponto d -dimensional em cada um dos sub-hiper-cubos, na versão relaxada, aqui proposta, é suficiente que cada sub-hiper-cubo tenha a mesma quantidade de pontos. Cabe lembrar que, assim como na Amostragem Descritiva tradicional, nesta variante, o tamanho da amostra precisa ser definido a priori.

No restante desta seção são apresentadas as linhas gerais do controle da permutação aleatória utilizado na Amostragem Descritiva Bipartida, um exemplo de realização e, para concluir, um algoritmo que pode ser usado para obter a bipartição da Amostragem Descritiva. Em toda a discussão que se segue, o vetor descritivo considerado é o vetor de u_j , $j = 1, 2, \dots, N$ tal qual descrito na equação 3.1, isto é, não está se considerando o potencial de economia computacional da Amostragem

Descritiva no cálculo das funções inversas. Contudo, a alteração para uma implementação mais eficiente é bastante simples e direta, bastando aplicar o processo de permutação e controle no vetor descritivo tradicional $F^{-1}(u_k)$.

O processo proposto consiste em separar os valores u_j , da Amostragem Descritiva tradicional, em dois subintervalos - $(0, 0,5]$ e $(0,5, 1)^{36}$ - e usar essa segmentação para exercer o controle multidimensional. O controle em si é feito no processo de alternância dos valores da seqüência entre os dois intervalos, mas permite que a ordem dentro de cada subintervalo seja permutada aleatoriamente, como na Amostragem Descritiva tradicional. Como resultado, os mesmos valores da Amostragem Descritiva tradicional se sucedem de forma totalmente aleatória exceto pelo controle de fazê-los alternarem entre menor e maior que meio por segmentos controlados do vetor descritivo permutado – como será visto a seguir.

Na primeira dimensão, essa alternância ocorre do início ao fim, sem interrupção. Isso significa que, se o primeiro valor dessa dimensão ($u_{1,1}$) for do primeiro intervalo, o segundo valor ($u_{2,1}$) será do segundo intervalo, o terceiro será novamente do primeiro e assim por diante até o último valor ($u_{N,1}$), que será do segundo intervalo. Na segunda dimensão, o vetor de tamanho N , contendo os valores $u_{j,2}$ é bipartido em dois segmentos de tamanhos iguais. Se em um deles, a seqüência começar com um valor menor que meio, o outro começará com um valor maior que meio e vice-versa. Isso faz com que a alternância entre menor e maior se inverta na metade da seqüência. Na terceira dimensão, o vetor de tamanho N é dividido em quatro partes de mesmo tamanho e a alternância se inverte no início de cada uma, ou seja, se a primeira parte começar com um valor menor que meio, a segunda começará com um valor maior, a terceira com um valor menor e a quarta

³⁶ A definição de qual dos dois intervalos deve conter o valor 0,5 é irrelevante, pois o tamanho da amostra (N) é sempre par na Amostragem Descritiva Bipartida.

com um valor maior, novamente. Para cada dimensão, a determinação do primeiro segmento iniciar com um valor maior ou menor que meio é feita de forma aleatória e com probabilidades iguais.

Na tabela 6.2.1, é mostrada uma realização - para $N = 32$ e $d = 6$ - em que os valores do intervalo menor que 0,5 estão sobre fundo branco e os valores do intervalo maior que 0,5 estão sobre fundo cinza. Pode ser observado que na primeira coluna, os valores começam com 0,0469, que é um elemento do intervalo $(0, 0,5)$, e prosseguem se alternando sem inversão, seguindo um padrão menor-maior-menor-maior... do início ao fim do vetor. Na segunda coluna, observa-se que o comprimento 32 é bipartido, sendo essa bipartição assinalada pela barra preta na metade da seqüência. Pode ser visto que, a primeira bipartição da segunda dimensão também começa com um valor menor que 0,5 (0,3906) e que a segunda bipartição começa com um valor maior que 0,5 (0,7656), fazendo com que, na passagem da primeira para a segunda metade da seqüência, ocorra uma inversão no padrão de alternância de menor-maior-menor-maior... para maior-menor-maior-menor.... Isso pode ser constatado pela presença de duas caselas contíguas com fundo cinza: 0,5781 e 0,7656. Na terceira coluna, cada uma das duas bipartições da segunda dimensão - de tamanho $N/2 = 16$ - é bipartida, resultando em quatro partes de tamanho oito. As separações entre essas quatro partes da terceira dimensão estão assinaladas por barras pretas. Novamente, há inversão da alternância a cada mudança de parte. Para este caso, em que $N = 32$, o processo de bipartição só pode prosseguir até a coluna cinco, visto que $32 = 2^5$ e, no caso geral, a quantidade de dimensões controlada pela Amostragem Descritiva é dada por $\log(N)/\log(2)$, a partir da qual, a permutação dos valores recai para uma Amostragem Descritiva Bipartida tradicional, não havendo mais controle multidimensional. Conseqüentemente, na

tabela 6.2.1, pode ser observado que na coluna relativa à sexta dimensão, não há mais um padrão de alternância e, de fato, essa coluna foi gerada de forma idêntica a uma Amostragem Descritiva tradicional.

A principal restrição do método da Amostragem Descritiva Bipartida é que o tamanho da amostra tem que seguir a forma $N = 2^n$, onde n é um número natural qualquer. Além disso, se $N < 2^d$, só as primeiras n dimensões terão o benefício do controle multidimensional e, portanto, as primeiras colunas devem ser destinadas às dimensões mais importantes do modelo, assim como ocorre no Quasi-Monte Carlo.

Dimensões					
1	2	3	4	5	6
0,0469	0,3906	0,1094	0,0781	0,5156	0,6406
0,6094	0,9219	0,9844	0,9844	0,0156	0,5156
0,2656	0,4219	0,3281	0,2969	0,2344	0,0156
0,8594	0,9844	0,9219	0,9531	0,8281	0,4844
0,0781	0,3594	0,0781	0,7344	0,6406	0,7031
0,8906	0,5156	0,7031	0,0156	0,2656	0,4219
0,1406	0,0469	0,1719	0,7656	0,1406	0,0469
0,5156	0,6094	0,5469	0,3594	0,9844	0,8281
0,2344	0,1719	0,7344	0,4531	0,9531	0,2969
0,9531	0,7031	0,2656	0,6406	0,3594	0,9219
0,1094	0,4531	0,5156	0,2344	0,1094	0,2656
0,8281	0,8594	0,2031	0,5156	0,6094	0,7656
0,2031	0,1406	0,8281	0,8594	0,5781	0,3281
0,6719	0,6719	0,4844	0,2656	0,2969	0,2031
0,4219	0,2656	0,6406	0,5469	0,3906	0,8906
0,7969	0,5781	0,4219	0,3281	0,8594	0,7344
0,3281	0,7656	0,2969	0,4219	0,5469	0,6719
0,7344	0,3281	0,8594	0,9219	0,0469	0,9531
0,3906	0,7344	0,4531	0,4844	0,3281	0,2344
0,9844	0,0156	0,5781	0,8906	0,7656	0,1719
0,4844	0,6406	0,3906	0,7969	0,7969	0,9844
0,5469	0,4844	0,9531	0,1094	0,2031	0,4531
0,1719	0,7969	0,2344	0,7031	0,1719	0,8594
0,6406	0,2969	0,6719	0,2031	0,6719	0,0781
0,2969	0,5469	0,7969	0,0469	0,7031	0,5781
0,9219	0,2344	0,0469	0,8281	0,4219	0,3906
0,0156	0,8906	0,6094	0,3906	0,0781	0,3594
0,7656	0,1094	0,0156	0,6094	0,8906	0,1406
0,4531	0,8281	0,7656	0,6719	0,7344	0,1094
0,7031	0,0781	0,1406	0,1406	0,4844	0,6094
0,3594	0,9531	0,8906	0,5781	0,4531	0,5469
0,5781	0,2031	0,3594	0,1719	0,9219	0,7969

Tabela 6.2.1. Exemplo de matriz U relativa à Amostragem Descritiva Bipartida com $N = 32$ e $d = 6$. Os valores maiores que meio estão ressaltados por fundo cinza e os pontos de inversão de alternância estão destacados com barras pretas.

Naturalmente, qualquer algoritmo que produza o efeito descrito acima pode ser usado na construção da Amostragem Descritiva Bipartida. Uma alternativa, que se adapta bem ao Matlab e que foi usado nesta tese, é apresentada abaixo com um exemplo do caso em que $N = 16$ e $d = 2$.

Este algoritmo utiliza uma matriz $2 \times N/2$ que serve para gerar o vetor descritivo de cada uma das primeiras $\log(N)/\log(2)$ dimensões, que no caso de $N = 16$ e $d = 2$, significa usar uma matriz 2×8 para as primeiras $\log(16)/\log(2) = 4$ dimensões. Para cada dimensão a ser gerada, o primeiro passo é construir uma matriz 2×8 com os valores 1, 2, ..., 8 na primeira linha e 9, 10, ..., 16 na segunda linha (figura 6.2.1a). Em seguida, cada uma das duas linhas tem seus elementos permutados de forma aleatória e independente da outra linha (figura 6.2.1b).

Neste ponto, é necessário determinar se o primeiro valor do vetor descritivo será do subintervalo dos valores menor ou maior que 0,5, o que é feito por sorteio aleatório com iguais probabilidades para os dois resultados. No caso da construção da primeira dimensão, caso seja determinado que o vetor seja iniciado com um valor menor que 0,5, não é necessário fazer nada, caso contrário, as duas linhas da matriz são permutadas – a primeira linha passa a ser a segunda e a segunda linha passa a ser a primeira. No exemplo, o sorteio determinou que a primeira dimensão inicia por um valor menor que 0,5 e, portanto, não é necessário realizar a permutação das linhas da matriz apresentada na figura 6.2.1b.

O passo seguinte é transferir os valores da matriz para um vetor de tamanho N (16 no exemplo) seguindo a ordem de cima para baixo e da direita para a esquerda³⁷ (figura 6.2.1c). Por fim, os valores $u_{j,1}$ são obtidos subtraindo 0,5 e dividindo por N cada elemento deste vetor, exatamente da mesma forma que na AD

³⁷ Essa é a forma como o Matlab indexa os elementos de matrizes bidimensionais, o que facilita a codificação desse algoritmo e justificou a sua escolha.

tradicional, o que resulta na figura 6.2.1d. Na figura 6.2.1d, os valores menores que 0,5 estão ressaltados por fundo cinza, evidenciando que a alternância entre valores menores e maiores que meio segue do início ao final do vetor, sem inversão.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

Figura 6.2.1a Preenchimento inicial da matriz $2 \times N/2$

4	6	5	7	1	2	3	8
11	14	16	15	10	9	12	13

Figura 6.2.1b Permutação aleatória e independente dos elementos de cada linha da matriz

4	11	6	14	5	16	7	15	1	10	2	9	3	12	8	13
---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---	----	---	----

Figura 6.2.1c Ordenamento dos elementos de “cima para baixo e da esquerda para direita”

0,2188	0,6563	0,3438	0,8438	0,2813	0,9688	0,4063	0,9063	0,0313	0,5938	0,0938	0,5313	0,1563	0,7188	0,4688	0,7813
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Figura 6.2.1d Obtenção do vetor final: subtração de 0,5 e divisão por N

Figura 6.2.1 Exemplo do algoritmo proposto para gerar a primeira dimensão de AD-Bipartida com tamanho de amostra $N = 16$

A geração da segunda dimensão se inicia de forma idêntica a da primeira, com a construção da matriz $2 \times N/2$ com os valores de 1 a N e a permutação dos elementos de cada linha, figuras 6.2.2a e 6.2.2b. A seguir, a matriz é “partida” em

dois ($= 2^{\text{dimensão}-1} = 2^{2-1}$) segmentos de tamanhos iguais, o que, na figura 6.2.2c, é representado por uma linha preta na vertical.

Assim como acontece para a primeira dimensão, neste ponto é necessário determinar se o primeiro valor do vetor descritivo – ou, equivalentemente, o primeiro valor do primeiro segmento – será maior ou menor que 0,5. No que concerne este algoritmo, isso significa determinar se será o primeiro segmento da matriz da figura 6.2.2c que será invertido, ou seja, se suas linhas serão permutadas, ou se será o segundo segmento que terá as linhas permutadas. Novamente, isso é feito de forma aleatória com probabilidade 0,5 para cada caso. Naturalmente, se o primeiro segmento for invertido, o segundo não o será e, inversamente, se o primeiro não for, o segundo será. No caso geral, para dimensões de ordem superior, a determinação da inversão ou não do primeiro segmento determina os subseqüentes pela regra: se o primeiro inverte, todos os segmentos de ordem ímpar também invertem e os de ordem par não, ocorrendo o oposto caso o primeiro não inverta. A figura 6.2.2d apresenta um caso em que o primeiro segmento não inverte e, conseqüentemente, o segundo inverte.

Deste ponto em diante, o processo é idêntico ao da primeira dimensão, resultando nas etapas da figura 6.2.2e e 6.2.2f – na qual os valores menores que meio estão ressaltados. A inversão da alternância ocorre na nona posição do vetor final e pode ser constatada pela presença de dois valores maiores que meio justapostos.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16

Figura 6.2.2a Preenchimento inicial da matriz 2 x N/2

2	6	4	5	7	8	3	1
10	12	9	15	13	16	11	14

Figura 6.2.2b Permutação aleatória e independente dos elementos de cada linha da matriz

2	6	4	5	7	8	3	1
10	12	9	15	13	16	11	14

Figura 6.2.2c Bipartição da matriz 2 x N/2

2	6	4	5	13	16	11	14
10	12	9	15	7	8	3	1

Figura 6.2.2d Inversão do segundo segmento da matriz 2 x N/2 bipartida

2	10	6	12	4	9	5	15	13	7	16	8	11	3	14	1
---	----	---	----	---	---	---	----	----	---	----	---	----	---	----	---

Figura 3e Ordenamento dos elementos de “cima para baixo e da esquerda para direita”

0,0938	0,5938	0,3438	0,7188	0,2188	0,5313	0,2813	0,9063	0,7813	0,4063	0,9688	0,4688	0,6563	0,1563	0,8438	0,0313
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Figura 6.2.2f Obtenção do vetor final: subtração de 0,5 e divisão por N

Figura 6.2.2 Exemplo do algoritmo proposto para gerar a segunda dimensão de AD-Bipartida com tamanho de amostra $N = 16$

O efeito do controle obtido pela Amostragem Descritiva Bipartida é assegurar que, dado um conjunto de $N = 2^n$ (para $n > d$ e $n \in \mathbb{Z}$) pontos num hiper cubo unitário d -dimensional, esses pontos sejam distribuídos de forma que, cada um dos 2^d hiper-cubos d -dimensionais de lado $1/2$, que compõe o hiper cubo unitário, contenham a mesma quantidade pontos. Embora isso não seja exatamente a propriedade A de Sobol', para tamanhos de amostras finitas, $N = 2^n$, o efeito prático é o mesmo.

6.3 AD Bidimensional

Da terceira linha metodológica usada para propor formas de agregar controle multivariado à Amostragem Descritiva - a que visa propor "blocos básicos" em hiper-cubos $I(0, 1)^d$, em substituição ao "bloco básico" usado na AD tradicional - resultou a Amostragem Descritiva Bidimensional. Conforme descrito no capítulo 3, a AD tradicional tem como bloco básico de construção um conjunto de N pontos gerados em $(0, 1)^1$ tal que, $u_j = (j - 0,5)/N$, onde $j = 1, 2, \dots, N$. Foi visto também que, para algumas definições de discrepância, essa é a distribuição de pontos mais homogênea possível em $(0, 1)^1$. Como o próprio nome sugere, na AD Bidimensional, o bloco básico de construção é um conjunto de N pontos gerados simultaneamente em um quadrado unitário. Assim como ocorre com a Amostragem Descritiva tradicional, este bloco pode então ser combinado com outros blocos para obter amostras multidimensionais, possivelmente mais homogêneas que as obtidas pela Amostragem Descritiva tradicional.

De forma análoga à AD tradicional, a construção do bloco básico da AD Bidimensional começa pela divisão de seu espaço amostral em regiões

equiprováveis e a seleção de um ponto de cada um desses estratos. A figura 6.2.1 apresenta um exemplo de construção de AD Bidimensional para o caso de $N = 16$. Na figura 6.2.1a, pode ser visto o quadrado unitário com reticulado formando 16 sub-quadrados de áreas iguais e os valores u_j^{38} da Amostragem Descritiva tradicional dispostos ao longo dos dois eixos. O objetivo da AD Bidimensional é controlar as permutações aleatórias dos valores u_j em cada uma das duas dimensões, de forma a assegurar que cada um dos 16 pontos $(u_{1,j}, u_{2,j})$ resultantes preencha um dos 16 sub-quadrados da figura 6.2.1a. Uma estratégia de garantir que o preenchimento ocorra dessa maneira é apresentada a seguir e, no apêndice 6.A1, é apresentada uma implementação matricial desta estratégia.

O primeiro passo é calcular a raiz quadrada de N e dividir cada um dos segmentos $[0, 1)$ nos dois eixos em $N^{1/2}$ intervalos de igual tamanho. No caso de $N = 16$, isso significa quatro intervalos dados por $[0, 0,25)$, $[0,25, 0,50)$, $[0,50, 0,75)$ e $[0,75, 1)$. Como pode ser observado na figura 6.2.1a, cada um destes intervalos contém $N^{1/2}$ - ou quatro - valores de u_j .

Em princípio, os sub-quadrados poderiam ser preenchidos em qualquer ordem, pois seriam embaralhados depois, assim como na AD tradicional. Para o preenchimento do primeiro sub-quadrado com um ponto $(u_{1,j}, u_{2,j})$, pode ser utilizado qualquer um dos quatro valores do eixo horizontal e do eixo vertical que estão compreendidos nas projeções unidimensionais do mesmo. Por exemplo, para escolher a primeira coordenada do sub-quadrado mais próximo à origem, pode ser utilizado qualquer um dos quatro valores $u_{1,j} \in \{0,03, 0,09, 0,16, 0,22\}$. Para evitar qualquer viés, a escolha de qual desses valores será utilizado deve ser feita de forma aleatória e, para assegurar que todos os N valores da Amostragem Descritiva

³⁸ Os valores foram obtidos com o uso da equação 3.1 e encontram-se arredondados.

tradicional sejam utilizados – garantindo assim, que a qualidade unidimensional seja preservada -, a seleção deve ser feita sem reposição. Os demais sub-quadrados podem ser preenchidos continuando o processo de sorteio aleatório sem reposição dos valores contidos em suas projeções unidimensionais sobre os dois eixos.

Uma forma mais mecânica de realizar este processo consiste em fazer permutações aleatórias e independentes na ordem dos valores dentro de cada estrato unidimensional. Nas figuras 6.2.1b e 6.2.1c, pode ser visto que, cada conjunto de quatro valores u_j , dentro de cada subintervalo, teve sua ordem permutada. A figura 6.2.1b também apresenta um mapa de preenchimento, onde os números 1, 2, 3 e 4 se referem ao número de ordem dos u_j permutados dentro de cada subintervalo, por exemplo, no eixo horizontal, os valores 0,22, 0,28, 0,66 e 0,97 são os primeiros valores de seus respectivos subintervalos e estão associados ao número 1. Já as letras maiúsculas e minúsculas se referem à ordem dos subintervalos dos eixos horizontal e vertical, respectivamente. Dentro de cada sub-quadrado foi codificada uma regra de preenchimento do mesmo, ou seja, um mapeamento genérico do reticulado, independente das permutações realizadas. A associação dos valores permutados aleatoriamente com o mapeamento descrito acima, representa o sorteio sem reposição, comentado anteriormente.

O resultado desse processo preserva a característica da AD tradicional de controle do conjunto de pontos unidimensionais de cada dimensão, assegurando que as distribuições marginais da amostra se aproximem das teóricas, visto que, os valores u_j são os mesmos que os usados no processo tradicional. Além disso, as restrições impostas às permutações evitam a aglomeração de pontos que podem ocorrer na AD tradicional, o que tende a melhorar a qualidade da amostragem no que se refere à distribuição conjunta de duas variáveis. Cabe notar que,

diferentemente da Amostragem Descritiva tradicional, este processo não garante o total controle do conjunto de seu bloco básico. De fato, a cada realização será gerado um novo conjunto de pontos em R^2 , no entanto, todos eles terão um nível mínimo de homogeneidade. Essa variabilidade permitiria a obtenção de estimativas de precisão com base na variância, em modelos com apenas duas dimensões, o que não ocorre com a AD tradicional quando usada em problemas de apenas uma dimensão.

O passo final para a construção do bloco básico é a transferência das coordenadas dos pontos para uma matriz $U_{N,2}$ $N \times 2$, na qual cada linha representa um ponto bidimensional e cada coluna uma dimensão. Com isso, pode ser obtida uma representação bivariada controlada, que pode ser utilizada em modelos bidimensionais.

Para casos de dimensionalidade (d) superior a dois, a analogia com a AD tradicional consiste em agrupar quantas matrizes $U_{N,2}$ forem necessárias para atingir a dimensionalidade do problema³⁹. Continuando com a analogia com a AD tradicional, na qual os vetores descritivos são permutados aleatoriamente antes de serem agrupados, seria necessário permutar aleatoriamente a ordem dos pontos – as linhas de $U_{N,2}$ - antes de agrupá-los, porém, os resultados obtidos dessa forma apresentaram melhoras pouco significativas em relação à AD tradicional. Novamente, pode ser feita uma analogia com a AD tradicional e procurar controlar a forma como os elementos dos blocos básicos se combinam, ao invés de permitir que essa combinação ocorra de maneira puramente aleatória.

³⁹ Uma coluna da última $U_{N,2}$ pode ser descartada se d for ímpar.

Figura 6.2.1a Divisão do quadrado unitário em 16 regiões equiprováveis

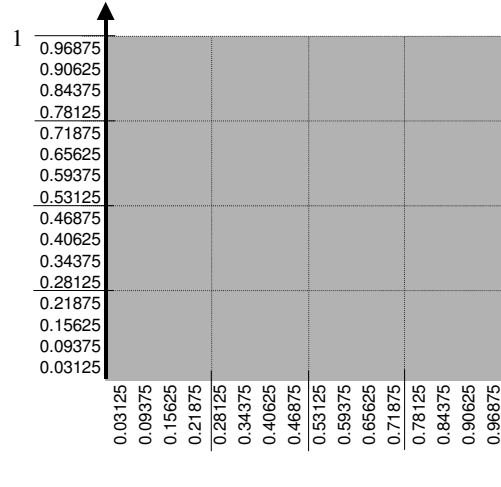


Figura 6.2.1b Mapeamento para seleção dos valores u_j permutados em cada um dos quatro substratos de cada dimensão

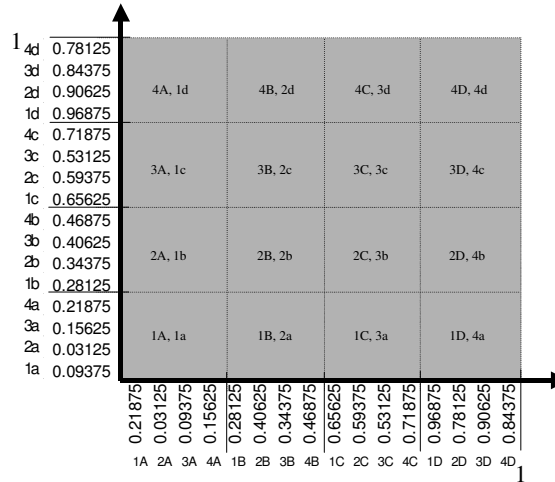


Figura 6.2.1c Coordenadas dos pontos gerados em R^2

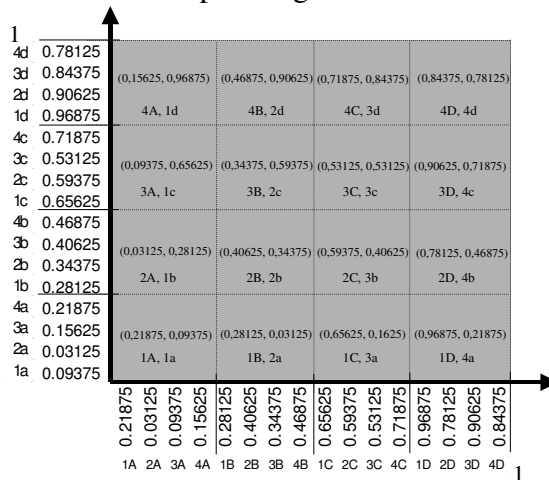


Figura 6.2.1. Exemplo de Construção da AD Bidimensional com $N = 16$

A forma encontrada para controlar a combinação dos pontos em R^2 é semelhante à que foi utilizada em R^1 , em que Amostragem Descritiva tradicional foi combinada com a série de Richtmyer para controlar o ordenamento dos valores do vetor descritivo (ver. seção 6.1). A diferença é que, no caso da AD Bidimensional, o vetor descritivo é substituído pela matriz $U_{N,2}$ e a seqüência utilizada para controle altera a ordem das linhas de $U_{N,2}$ e não dos valores unidimensionais do vetor descritivo. Essa analogia conduz a outra diferença entre a AD Bidimensional e a tradicional: enquanto que, a equação 3.1 gera os pontos do vetor descritivo numa ordem natural, não há uma ordem natural na geração da matriz $U_{N,2}$.

A falta de ordem natural faz com que seja necessário definir um ordenamento para os pontos da AD Bidimensional, ou seja, das linhas de $U_{N,2}$, a fim de possibilitar o uso de uma técnica de controle multivariado. Isso leva à questão do significado do ordenamento do vetor descritivo unidimensional. Em princípio, a interpretação dessa ordem tanto pode ser a probabilidade acumulada como pode ser o lugar geométrico e, nos dois casos, o ordenamento ocorre naturalmente e chega ao mesmo resultado para vetores univariados. Assim, uma técnica de controle multivariado pode ser visto como uma forma de combinar probabilidades acumuladas ou lugares geométricos.

No caso em que os valores do vetor descritivo são interpretados como probabilidades acumuladas, a aplicação para o caso bivariado é bastante direta e é feita pelo produto de suas coordenadas, que representa a probabilidade conjunta. Com isso, bastaria multiplicar os valores de cada linha de $U_{N,2}$ e ordenar as linhas usando o produto como critério. Já no caso em que os valores do vetor descritivo são interpretados como sendo lugares geométricos, a transferência para o caso bidimensional é mais complicada, pois não há uma forma única de ordenar pontos por seu lugar geométrico em um plano. Uma forma possível de ordenar esses

pontos segundo o lugar geométrico é usar a soma das coordenadas como critério. Isso implica em retas de nível paralelas com inclinação -1, ou seja, os pontos sobre uma dessas retas teriam o mesmo lugar geométrico, no que tange o ordenamento, e estariam “acima” dos pontos entre esta reta e a origem. Embora não tenha sido encontrada uma explicação, o ordenamento pela soma apresentou resultados melhores que o ordenamento pela probabilidade acumulada⁴⁰ e é o que foi adotado nos experimentos desta tese.

Duas técnicas foram testadas para fazer o controle da AD Bidimensional, a AD Bipartida – proposta em 6.2 - e uma variante na implementação do Sobol’ *randomizado* – apresentado no capítulo 4 – que será proposta e explicada mais a fundo na seção 6.4. Esta variante foi chamada de Sobol’ com ciclo completo e randomização discreta. O principal motivo para a escolha destas duas técnicas para controlar a permutação dos pontos foi o bom desempenho que elas apresentaram quando utilizadas sozinhas. Esse bom desempenho foi interpretado como indicativo de uma boa capacidade de combinar elementos unidimensionais e, portanto, haveria possibilidade de que essa capacidade também fosse observada com elementos bidimensionais. O segundo motivo para a escolha destas duas técnicas é devido a uma característica que permite uma grande eficiência computacional no processo de ordenamento.

Como já foi antecipado, operacionalmente, o método de ordenamento é muito semelhante ao método utilizado para ordenar o vetor descritivo da Amostragem Descritiva usando a série de Richtmyer. A diferença é que, a seqüência direcionadora – AD Bipartida ou a variante de Sobol’ – é usada para ordenar as linhas da matriz $U_{N,2}$ e não os pontos do vetor descritivo ($U_{N,1}$). Em função dessa

⁴⁰ No apêndice 6.A1 é descrita uma forma de gerar os pontos da AD Bidimensional de forma que os sub-quadrados associados estejam em posições fixas, o que permite usar algoritmos que acelerem o processo de ordenamento.

diferença, não é necessário gerar tantas dimensões da seqüência de controle quanto forem as dimensões do problema. Por exemplo, para um problema com seis dimensões, são necessárias três matrizes $U_{N,2}$ e, portanto, três dimensões da seqüência de controle. Se fossem sete dimensões, seriam necessárias quatro matrizes $U_{N,2}$ e, portanto, quatro dimensões da seqüência de controle.

A maior eficiência computacional obtida pelo uso da AD Bipartida e da variante de Sobol', quando comparada com o uso de Richtmyer, advém do fato que cada dimensão da seqüência de controle terá exatamente os mesmos valores utilizados por uma Amostragem Descritiva tradicional de mesmo tamanho (N). Isso significa que é possível inverter a equação 3.1 multiplicando por N e somando 0,5 a cada valor da seqüência e obter uma nova seqüência, formada pelos primeiros N números naturais. Essa nova seqüência pode então ser usada como índice, ou ponteiro (*pointer*), para ordenar a matriz $U_{N,2}$.

Algumas considerações podem ser feitas neste ponto. Assim como ocorre com as técnicas Quasi-Monte Carlo e a AD Bipartida, é necessário analisar as variáveis do modelo de simulação antes de associá-las às dimensões da AD Bidimensional. Por um lado, o fato de haver uma elevada eficiência amostral par a par, sugere que, em algumas situações, duas variáveis de um modelo devam ser agrupadas de forma a tomar proveito disto. Por outro lado, é preciso levar em conta que, a qualidade das dimensões das técnicas usadas para fazer o controle cai, conforme aumenta a sua ordem. Especificamente, no caso em que o controle é realizado com a AD Bipartida, deve ser levado em consideração que esta técnica recai para uma AD tradicional após uma dimensão k, tal que $N = 2^k$, o que resulta em permutações totalmente aleatórias. Assim, o controle entre as matrizes $U_{N,2}$ deixa de existir para as dimensões acima de $2k$ e a combinação entre os pontos em

R^2 passa a ser totalmente aleatória. No caso do controle ser efetuado pela variante de Sobol', existem outras fontes de controle além da propriedade A. Embora a literatura não deixe claro até que dimensão o controle é exercido, é sabido que este controle diminui.

Por fim, cabe registrar uma limitação da AD Bidimensional quanto aos possíveis tamanhos de amostra (N). Por um lado, a construção do bloco básico da AD Bidimensional exige que N seja um quadrado perfeito, isto é, N deve ser tal que satisfaça $N = \text{base}^2$. Por outro lado, o uso da AD Bipartida ou de Sobol' com ciclo completo exige que N satisfaça $N = 2^n$, onde n é um número natural qualquer. Portanto, para que a AD Bidimensional possa ser usada como está proposta nesta tese, N deve ser tal que satisfaça $N = 2^{2n}$.

6.4 Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta

O objetivo das técnicas propostas nas três seções anteriores é conferir controle multivariado à Amostragem Descritiva usando abordagens inspiradas ou apoiadas em técnicas Quasi-Monte Carlo. A proposta apresentada nesta seção percorre o caminho inverso e procura conferir a uma técnica de controle multivariado, as propriedades favoráveis da Amostragem Descritiva. Essas propriedades são a homogeneidade unidimensional ótima e a eficiência computacional referente ao cálculo da função inversa – comentada no capítulo 3. Para esse fim, é proposto um ajuste no Sobol', junto com uma modificação na técnica de randomização, que resulta num mimetismo da Amostragem Descritiva. De fato, pela simples observação dos valores da matriz U resultante (ver seção 2.2) desta proposta, não seria possível determinar se foi ou não utilizada a Amostragem Descritiva tradicional para gerá-la.

Como foi explicado na seção 4.4, a série de Sobol' opera em ciclos de refinamento sucessivos. Cada um desses ciclos é composto exatamente dos mesmos valores que seriam utilizados em uma Amostragem Descritiva cujo tamanho de amostra (N) fosse igual ao tamanho do ciclo. Dessa forma, para mimetizar realizações da matriz U_{AD} da Amostragem Descritiva, é necessário apenas selecionar tamanhos de amostra (N) que sigam a forma $N = 2^n$ e ajustar a semente da série de Sobol' para N , o que garante a geração de um ciclo completo.

Assim como acontece com as demais técnicas Quasi-Monte Carlo, a precisão das estimativas pode ser avaliada utilizando o recurso da randomização para gerar um conjunto de estimativas. Porém, o uso da *randomização* adição modulo 1 - apresentada na seção 4.1 - resultaria na descaracterização do mimetismo e, portanto, na perda das propriedades favoráveis da Amostragem Descritiva. A fim de contornar esse problema, é proposta uma modificação na técnica de randomização: substituir o choque aleatório retirado de $U(0, 1)$, distribuído continuamente, por um choque aleatório retirado de $\{1\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, N\Delta\}$, onde $\Delta = 1/N$, ou seja, uma forma discreta da randomização adição modulo 1.

O processo proposto acima gera realizações da matriz U , em que cada dimensão, ou variável, é representada pelo conjunto de menor discrepância, preservando a propriedade unidimensional da Amostragem Descritiva. Ao mesmo tempo, por se tratar de um segmento da seqüência de Sobol', preserva o controle multivariado desta. Este processo também pode preservar a economia computacional da Amostragem Descritiva no que tange ao cálculo da matriz de inversas, $X = F^{-1}(U)$, como será explicado a seguir.

Conforme foi descrito no capítulo 3, no processo usual da Amostragem Descritiva, a matriz X (equação 2.3) é calculada uma única vez a partir da inversão

do vetor dado pela equação 3.1, ou seja, X é gerada pela concatenação dos vetores referentes a cada variável do problema, vetores estes, que são dados pela equação 3.2. Inicialmente, os valores referentes a cada dimensão estão em ordem crescente e devem ser permutados aleatoriamente para gerar uma realização de X , da qual resultará uma estimativa. Para obter uma quantidade (M) de estimativas, basta repetir as permutações dos vetores M vezes, não sendo necessário recalculá-la(s) função(ões) inversas a cada vez. No caso da técnica proposta – o Sobol' de ciclo completo com randomização discreta – as matrizes U podem ser usadas como índice (*pointer*) para referenciar a matriz X não permutada. Assim como foi sugerido na seção 6.3, isso pode ser feito simplesmente multiplicando a matriz U por N e, depois, somando 0,5.

6.5 Avaliação de importância relativa entre as dimensões

Como explicado no capítulo 4, em geral, os problemas de simulação costumam apresentar uma hierarquia de importância entre as variáveis. Por outro lado, as séries de baixa discrepância utilizadas no Quasi-Monte Carlo, assim como as técnicas propostas nesta tese para controle multivariado da Amostragem Descritiva, apresentam hierarquia na qualidade das dimensões. Como a literatura recomenda que as variáveis mais importantes do modelo sejam associadas às dimensões de melhor qualidade da técnica amostral utilizada, é necessário dispor de uma maneira de determinar a hierarquia entre as dimensões de modelos para quando a determinação não for simples. Nesta seção, é descrita uma forma de atribuir uma hierarquia às dimensões, que é uma simplificação da técnica proposta por Sobol' para estimar os índices de sensibilidade global e se baseia na decomposição funcional por ANOVA, apresentada na seção 4.1. Nessa versão

simplificada, apenas os efeitos de primeira ordem são avaliados, isto é, não são levadas em consideração as interações entre duas ou mais variáveis.

O objetivo é avaliar a importância relativa de cada dimensão do modelo, comparando as variâncias das estimativas associadas a cada dimensão, tomadas individualmente, e mantido tudo o mais constante. Isto equivale a restringir a um a cardinalidade do conjunto u^{41} na equação 4.1.3, que passa a ser reescrita como

$$f_u(x) = \int_{[0,1]^{-u}} f(x) dx^{-u} . \quad 6.5.1$$

Ou seja, a função de integração da simulação Monte Carlo é reescrita de forma a ser uma função de apenas uma variável, o que significa que apenas os impactos de primeira ordem serão avaliados. Se isso for feito para cada variável do modelo, é possível usar a variância de cada uma dessas funções para avaliar importância relativa de cada dimensão e determinar uma hierarquia entre elas.

Na prática, a integral na equação 6.5.1 pode ser estimada numericamente por Monte Carlo. O primeiro passo é gerar um conjunto de N pontos no hiper cubo unitário d-dimensional, onde d representa a dimensionalidade do modelo. Para a geração desses pontos deve ser utilizada uma técnica que não apresente diferença na qualidade entre as dimensões geradas – como, por exemplo, a Amostragem Aleatória Simples ou a Amostragem Descritiva. A representação matricial deste conjunto de pontos é dada pela equação 2.2.1 (repetida em 6.5.2) onde cada linha representa um ponto do hiper-cubo unitário em R^d e cada coluna representa uma variável.

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,d} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N,1} & u_{N,2} & \cdots & u_{N,d} \end{bmatrix} \quad 6.5.2$$

⁴¹ Aqui, u representa um conjunto de dimensões tal qual utilizado na seção 4.1 e não valores, pontos ou vetores.

Conforme foi explicado na seção 2.2, cada linha da matriz de 6.5.2 resulta em uma observação da função do modelo de simulação. Se o modelo for avaliado em cada um dos N pontos, o conjunto de observações resultante pode ser utilizado para obter uma estimativa Y_N , conforme a equação 2.3.2. Alternativamente, essa amostra pode ser utilizada para obter uma estimativa da variância total da função, que, por sua vez, serve como referência para avaliar a representatividade dos impactos de primeira ordem.

Usando esse conjunto de pontos em 6.5.2, também é possível obter uma medida da importância da k-ésima dimensão do modelo, estimando-o - com amostras de tamanho N - em N' valores da k-ésima variável. Em cada uma das N' estimativas, a k-ésima coordenada dos N pontos assume um mesmo valor enquanto as demais coordenadas são mantidas fixas em seus valores originais. Com isso, são obtidas N' estimativas diferentes com as quais é possível estimar a variância relativa à k-ésima dimensão do modelo. É possível usar um $N' \ll N$ se, para as N' estimativas, forem usados os quantis relativos a uma Amostragem Descritiva de tamanho N' .

Por exemplo, assumindo $N' = 10$, os quantis, obtidos pela equação 3.1, são 0,05, 0,15, ... e ,95. O passo seguinte é substituir o primeiro vetor coluna por cada um dos 10 quantis e obter 10 estimativas $Y_{0,05}^1, Y_{0,15}^1, \dots$ e $Y_{0,95}^1$, onde Y_q^k representa uma estimativa em q da equação 6.5.1 para $u = \{k\}$, isto é, $f_{\{k\}}(q)$. Matricialmente, pode se escrever:

$$U = \begin{bmatrix} 0,05 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,d} \\ 0,05 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,05 & u_{N,2} & \cdots & u_{N,d} \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{0,05}^1, \quad 6.5.3$$

$$U = \begin{bmatrix} 0,15 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,d} \\ 0,15 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,15 & u_{N,2} & \cdots & u_{N,d} \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{0,15}^1, \quad 6.5.4$$

$$\vdots$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0,95 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,d} \\ 0,95 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,95 & u_{N,2} & \cdots & u_{N,d} \end{bmatrix} \Rightarrow Y_{0,95}^1. \quad 6.5.5$$

Com essa amostra de $N' = 10$ estimativas ($Y_{0,05}^1, Y_{0,15}^1, \dots$ e $Y_{0,95}^1$), é possível calcular a variância, que representa uma estimativa para a variância da equação 6.5.1 para $u = \{1\}$. A comparação entre as variâncias obtidas com cada uma das d variáveis do modelo permite obter uma medida relativa de importância e determinar a hierarquia entre as variáveis.

Essa adaptação simplificada do método proposto por Sobol' incorre no erro apontado na seção 4.1, que é o de não levar em consideração as interações entre as variáveis. Porém, é possível obter uma medida de quanto os efeitos de ordem superior representam fazendo o somatório das variâncias proporcionadas por cada variável e comparando a soma com a variância total do modelo. Conforme explicado acima, essa última pode ser estimada simplesmente avaliando o modelo em vários pontos e calculando a variância.

6.A1 Apêndice: Construção Eficiente da AD Bidimensional

A fim de que a Amostragem Bidimensional possa ser controlada por outra técnica de controle multivariado, é necessário que a matriz $U_{N,2}$ esteja ordenada segundo algum critério, conforme descrito na seção 6.3. No caso do critério de ordenação ser a soma das coordenadas, essa ordenação é definida geometricamente por uma reta da forma $x + y = b$, transladando sobre o segmento de reta que une a origem e o ponto de coordenadas (1, 1). O procedimento descrito abaixo permite acelerar o processo de ordenação $U_{N,2}$ visto que, facilita criar essa matriz com algum nível de pré-ordenação.

Gerar quatro matrizes quadradas $N^{1/2}$ por $N^{1/2}$, X , x' , Y e y' tal que as linhas de X e as colunas de Y são os vetores $(0, 1, 2, \dots, N^{1/2})$ e as colunas de x' e as linhas de y' , os vetores $(1, 2, \dots, N^{1/2}-1)$. Para o exemplo com $N = 16$, essas matrizes são:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

A variabilidade é obtida pela permutação aleatória entre os elementos de cada coluna de x' e cada linha de y' , resultando em x^R e y^R , as matrizes x' e y' após a permutação randômica. As coordenadas dos pontos são dadas por:

$$\text{coordenada } x = \frac{X}{\sqrt{N}} + \frac{x^R - 0,5}{N} \text{ e coordenada } y = \frac{Y}{\sqrt{N}} + \frac{y^R - 0,5}{N} \text{ que resulta em}$$

duas matrizes quadradas $N^{1/2}$ por $N^{1/2}$.

A transcrição para a matriz $U_{N,2}$ pode ser feita com uma regra que acompanhe as diagonais das matrizes x e y , o que reduzirá o esforço computacional de ordenamento.

7 DESCRIÇÃO DOS EXPERIMENTOS

Este capítulo descreve os experimentos utilizados na avaliação das técnicas descritas no capítulo 6. Essas técnicas podem ser divididas em duas categorias: hierarquização das dimensões de modelos de simulação e técnicas de amostragem. Em ambos os casos, os experimentos sugeridos para avaliação das técnicas utilizam os problemas – ou modelos - descritos no capítulo 5. Esses problemas de simulação são: o apreçamento e a estimativa da probabilidade de exercício de opções européias com trajetórias geradas por incrementos e o apreçamento de opções asiáticas com trajetórias geradas por incrementos e com uso de ponte browniana. Como é explicada a seguir, a escolha desses problemas se justifica por suas características dimensionais. Por um lado, suas estruturas hierárquicas são muito diferentes, por outro, o modelo da opção européia permite variar a dimensionalidade sem alterar o problema. Já a dimensionalidade máxima dos modelos testados se deve aos limites impostos pelos valores tabelados para números direcionais iniciais.

Conforme foi visto no capítulo 5, as três situações de apreçamento resultam em modelos de simulação que guardam estruturas de hierarquia muito diferentes e, também, previsíveis. No caso do apreçamento de opção européia com trajetórias geradas por incrementos, as dimensões não devem apresentar hierarquia, tendo todas elas pesos muito próximos. Já para a opção asiática com trajetórias simuladas por incrementos, deve ser observada uma redução na hierarquia em função da ordem crescente do tempo. Por fim, no caso das opções asiáticas com trajetórias geradas com ponte browniana, deve ser observada uma forte queda na hierarquia entre as dimensões seguindo a ordem dos ciclos de geração dos pontos. Além da queda de ciclo para ciclo, espera-se que, dentro de cada ciclo, as dimensões mais

próximas do final de trajetória apresentem variância ligeiramente maior que as mais próximas da origem, conforme explicado na seção 5.3.

A previsibilidade das hierarquias das três situações de apreçamento permite avaliar a técnica para identificação de hierarquia. Por outro lado, estes problemas apresentam diferentes estruturas de hierarquia no sentido de, num extremo, todas as dimensões terem o mesmo peso – o caso da europeia - e no outro extremo, as dimensões apresentarem uma acentuada diferença no peso – o caso da asiática com ponte browniana. Esse aspecto dos problemas é interessante para avaliar técnicas de controle multivariado em amostragem, pois, como visto, estas técnicas também apresentam hierarquia entre suas dimensões. Dessa forma, é possível utilizar a estrutura hierárquica validada pelo experimento 1, para associar as dimensões das técnicas amostrais às dimensões dos modelos, assim como avaliar o desempenho das técnicas com diferentes estruturas de modelo e verificar se uma ou outra técnica usufrui de vantagem comparativa em função da hierarquia ser mais ou menos acentuada. Isto é, se uma técnica pode ser melhor em uma situação, mas não em outra.

No caso específico das opções europeias, há ainda a possibilidade de avaliar melhor o impacto do aumento da dimensionalidade do modelo sobre a capacidade de amostragem das técnicas utilizadas. Isso porque a trajetória pode ser dividida infinitamente sem alterar o problema e, principalmente, sua solução. Assim, é fácil comparar o erro padrão obtido por diferentes técnicas amostrais em função da dimensionalidade do modelo. Além disso, conforme explicado no capítulo 1, o problema da opção europeia, quando modelada segundo as premissas utilizadas por Black e Scholes, tem a vantagem de possuir solução analítica, tanto para o preço

como para a probabilidade de exercício, o que permite avaliar os resultados obtidos pelo erro padrão e não pelo desvio padrão.

Com relação às técnicas amostrais, em especial às técnicas Quasi-Monte Carlo, o capítulo 4 demonstra que há bastante espaço para variabilidade nas suas implementações. Nos experimentos especificados abaixo, as séries de Sobol' serão construídas utilizando os polinômios primitivos e os números direcionais iniciais referentes aos primeiros 32 polinômios apresentados por Jäckel⁴². O fato da tabela disponível ser limitada a 32 dimensões limita a dimensionalidade dos modelos, pois, do contrário seria necessário optar por uma das técnicas para seleção de m_i discutidas no apêndice 4.A2, o que introduziria mais uma variável na modelagem. No caso específico de Sobol' *randomizado* tradicional, a semente utilizada é 257⁴³ e a randomização é feita pela adição módulo 1 conforme descrita em 4.1.3.

Para a geração das séries de Richtmyer, tanto a tradicional como a utilizada para ordenar o vetor descritivo, os números irracionais são gerados a partir da raiz quadrada de números primos. Para melhorar a qualidade dos pontos, foi utilizado o processo de expurgo de número primos “ruins”, tal como foi feito e descrito na seção 4.2. O processo desse expurgo usa como critério de rejeição os números primos que, ao serem incorporados ao conjunto de primos já aceitos – os primos “bons” – introduz correlação entre as dimensões. A avaliação da presença de correlação é feita a partir dos coeficientes de determinação (r^2) calculados com base nos primeiros 5000 pontos da série e o critério de expurgo de um candidato a primo “bom” é feita pela existência de $r^2 > 0,001$ entre a dimensão gerada pelo candidato e qualquer dimensão gerada pelos primos já aceitos como “bons”. O processo é iniciado assumindo como “bom” o primo 2 e como candidato o primo 3 e continua

⁴² Caso houvesse dimensionalidade maior, a sugestão é que fossem utilizados números direcionais iniciais gerados com o uso da expressão $m_i = \text{int}[u \times 2^i]$, conforme discutida no apêndice 4.A2, do capítulo 4.

⁴³ Esta escolha de semente segue a orientação apresentada em Glasserman (2003).

considerando como candidatos os números primos em seqüência crescente até que se tenha obtido um conjunto de primos grande o suficiente para gerar todas as dimensões necessárias. Deste processo resulta uma lista de primos “ruins”, que pode ser chamada pela rotina de geração de Richtmyer. Finalmente, para os experimentos, foi descartado o início da série, fixando a semente em $j = 10.000$.

Quanto aos geradores de números pseudo-aleatórios e de permutação aleatória, visando maior simplicidade dos experimentos, foram usados os algoritmos disponíveis no programa utilizado para realizar os experimentos, que foi o Matlab 6.5. Mais precisamente, foi utilizado o gerador da versão Matlab 5⁴⁴.

7.1 Experimento 1: Avaliação do método de identificação da hierarquia

Este experimento visa avaliar até que ponto a técnica descrita na seção 6.5, para identificação da hierarquia entre as dimensões de um modelo, é capaz de reproduzir a hierarquia esperada. Essa hierarquia, que foi deduzida analiticamente no capítulo 5, será usada para associar as dimensões das técnicas às variáveis dos modelos. Portanto, esse experimento também serve para validar a dedução analítica. Para esse fim, essa técnica será aplicada em seis modelos.

Especificamente, serão usados modelos de apreçamento de opções de compra do tipo européia e asiática. São assumidas trajetórias com movimento geométrico browniano para ambas, sendo que, no caso da opção européia, estas trajetórias são construídas pelo método incremental e para a opção asiática são usadas trajetórias construídas pelo método incremental e pela técnica da ponte

⁴⁴ O manual do Matlab 6.5 informa que o pacote dispõe de dois geradores de pseudo-aleatórios, o da versão Matlab 4.x e o da versão Matlab 5. Nestes experimentos foram utilizados o segundo.

browniana⁴⁵. Os parâmetros das opções são: prazo (T) igual a 16 e 32 dias, taxa livre de risco (r_f) igual a 10% ao ano, volatilidade (σ) igual a 40% ao ano, preço inicial (S_0) igual a 55 e preço de exercício (K) igual a 55. O *payoff* da opção europeia é dado pela equação 5.1.1 e o da opção asiática, pela equação 5.2.1.

Conforme proposto na seção 6.5, a avaliação da importância relativa de cada dimensão, e conseqüente identificação da hierarquia entre as mesmas, pode ser obtida usando a variância da equação 6.5.1, ajustada para cada dimensão. Neste experimento, a estimação empírica de cada dimensão será obtida fixando os parâmetros da técnica proposta em $N = 10000$ e $N' = 20$, onde os 20 pontos amostrais utilizados para o cálculo da variância são idênticos aos de um vetor descritivo de tamanho 20 – obtido pela equação 3.3.

A avaliação da hierarquia poderá ser feita tanto pela comparação das variâncias de cada dimensão como pelo índice de sensibilidade global de Sobol' (σ_u^2 / σ^2) que tem como vantagem facilitar a comparação entre modelos. Já a avaliação da qualidade da hierarquia obtida pode ser dada por $\sigma_\Sigma^2 / \sigma^2$, onde σ_Σ^2 representa a soma das variâncias estimadas para cada variável, pelo método.

7.2 Experimento 2: Estimativa de prêmio e probabilidade de exercício de opções europeias

Para a avaliação inicial das técnicas amostrais propostas no capítulo 6 e como elas se comparam com as já existentes, apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4, foram utilizados os modelos de simulação de nove opções de compra do tipo europeias. Essas opções estão especificadas pelos seus parâmetros, apresentados na tabela 7.2.1. Conforme descrito na seção 5.1, os prêmios dessas opções podem

⁴⁵ Os detalhes de construção, tanto para a modelagem por incrementos como para a modelagem com ponte browniana, encontram-se no capítulo 5.

ser obtidos analiticamente pela equação 5.1.2, conhecida como fórmula de Black e Scholes, e as probabilidades de exercício pelos valores de $N(d_i)$. Obtidos por essas expressões analíticas, os prêmios e as probabilidades de exercício das opções com preços de exercício de 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85, 95 e 105 são, respectivamente, \$21,0571, \$11.9326, \$8.1419, \$5.1774, \$1.7207, \$0.4616, \$0.1061, \$0.0219 e \$0.0042 e 98,96%, 85,39%, 70,07%, 51,99%, 21,61%, 6,67%, 1,67%, 0,37% e 0,07%.

S_0	Preço inicial ativo-objeto da opção (em $t=0$)	55
r_f	Taxa anual de juros livre de risco	3%
σ	Volatilidade anual do ativo	20%;
T	Prazo de vencimento das opções (dias úteis)	252
K	Preços de exercício	35, 45, 50, 55, 65, 75, 85, 95 e 105

Tabela 7.2.1 Parâmetros das opções de compra tipo européias utilizadas no experimento 2

Com o uso dos valores analíticos, é possível obter estimativas dos erros padrões, que serão usados como medida de precisão das estimativas. Para a avaliação dos erros e taxas de convergências obtidas pelas diferentes técnicas, assim como o efeito do aumento da dimensionalidade do modelo, serão obtidas estimativas de prêmio e probabilidade de exercício para cada opção, variando a dimensionalidade do modelo e o tamanho da amostra (N). Para esse fim, os tamanhos de amostras usados serão 256, 1024, 4096, 16384 e 65536 e as dimensionalidades de modelo utilizadas serão 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25 e 30. Para cada experimento, o erro padrão será estimado com base em duzentas corridas ($M=200$).

7.3 Experimento 3: Estimativa de prêmio de opções asiáticas com trajetórias geradas pelo método incremental

O terceiro experimento tem como objetivo principal avaliar o potencial das técnicas propostas em situações em que, a associação das dimensões das técnicas de amostragem às variáveis do modelo é beneficiada pela existência de uma estrutura de hierarquia moderada no modelo. Para esse fim, o prêmio de uma opção de compra do tipo asiática será estimado com o uso das técnicas amostrais tradicionais – descritas nos capítulos 2, 3 e 4 – e com as propostas – descritas no capítulo 6. Os parâmetros da opção são: prazos (T) iguais a 16 e 32 dias, taxa livre de risco (r_f) igual a 10% ao ano, volatilidade (σ) igual a 40% ao ano, preço inicial (S_0) igual a 55 e preços de exercícios (K) iguais a 50, 55 e 60. O *payoff* da opção asiática é o definido pela equação 5.2.1 e as trajetórias - seguindo o movimento geométrico browniano - serão geradas pelo método incremental com intervalos diários.

Assim como foi feito no experimento 2, a avaliação da taxa de convergência das estimativas é obtida a partir de diferentes valores de tamanho de amostras. Os tamanhos de amostras (N) utilizados serão: 256, 1024, 4096, 16384 e 65536. A diferença em relação ao experimento anterior é que, devido à inexistência de um resultado analítico, a medida de precisão das estimativas é avaliada com base no desvio padrão e não pelo erro padrão. Como no experimento anterior, essa precisão é estimada com base em amostras de duzentas estimativas, isto é, $M = 200$.

7.4 Experimento 4: Estimativa de prêmio de opções asiáticas com trajetórias geradas pelo método da ponte browniana

Este experimento reproduz o experimento 3 em todos os aspectos exceto na geração das trajetórias, que serão obtidas usando a técnica da ponte browniana. Assim como no experimento anterior, neste experimento, a implementação será feita de forma a tirar proveito da estrutura hierárquica entre as dimensões, que, neste caso, é bastante acentuada.

8 Resultados dos Experimentos

Este capítulo é dedicado a apresentação dos resultados dos experimentos descritos no capítulo 7. A seção 8.1 apresenta e analisa os resultados do experimento 1, especificado na seção 7.1. A partir dos resultados obtidos, é feita a associação das variáveis dos modelos às variáveis das técnicas amostrais nos experimentos 2, 3 e 4. Os resultados desses três experimentos, que foram especificados nas seções 7.2, 7.3 e 7.4, são apresentados e analisados nas seções 8.2, 8.3 e 8.4, respectivamente, deste capítulo. Na seção 8.5 é feita a consolidação dos resultados dos experimentos. No final do capítulo encontra-se um apêndice disponibilizando todos os resultados brutos obtidos, isto é, todos os erros padrões estimados.

8.1 Resultados do Experimento 1: Avaliação do método simplificado de identificação da hierarquia

Os resultados obtidos no experimento 1, descrito na seção 7.1, estão consolidados nas tabelas 8.1.1 a 8.1.6, ao final desta seção. Nelas, estão registradas as variâncias estimadas para cada variável dos modelos analisados, que podem servir como critério para determinar uma estrutura de hierarquia entre suas variáveis. Como mencionado no capítulo 4, esta estrutura é importante por permitir associar as variáveis mais importantes do modelo às dimensões de melhor qualidade da técnica de amostragem utilizada.

Nas tabelas 8.1.1 a 8.1.6, a primeira coluna registra a variável (ou dimensão) dos modelos. Nos seis casos, as dimensões estão associadas a um dia da trajetória do preço do ativo objeto da opção simulada. Por exemplo, o primeiro dia da trajetória

está associado à primeira dimensão do modelo que, por sua vez, é referida por $k = 1$. O segundo dia está associado à dimensão 2, ou $k = 2$, e assim por diante. Para cada dimensão são registrados a variância estimada ($\sigma_{\{k\}}^2$) e o índice de sensibilidade global ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$). Nas duas tabelas referentes à modelagem com ponte browniana - 8.1.5 e 8.1.6 – também é informado o ciclo de preenchimento a qual a dimensão pertence, conforme explicado no capítulo 5. Cada uma das seis tabelas também registra a soma dos efeitos de primeira ordem (σ_{Σ}^2), ou seja, a soma dos $\sigma_{\{k\}}^2$, a variância total da função (σ^2) e a participação percentual dos efeitos de primeira ordem na variância total. Finalmente, todas as tabelas vêm acompanhadas de um gráfico de barras horizontais que registra visualmente as variâncias ($\sigma_{\{k\}}^2$). Cada um desses gráficos foi construído de forma que cada barra se situa ao lado da linha da tabela cuja dimensão representa.

A observação dos gráficos adjacentes às seis tabelas – ou, equivalentemente, das variâncias estimadas para cada dimensão - evidencia que os efeitos de primeira ordem estimados por Monte Carlo reproduzem as hierarquias previstas no capítulo 5, obtidas analiticamente através de derivadas parciais. Para as duas opções tipo européias, modeladas com trajetórias construídas por incrementos, os resultados apresentados nas tabelas 8.1.1 e 8.1.2 demonstram que as dimensões estimadas têm, aproximadamente, a mesma variância e, portanto, que as variáveis têm a mesma importância, dentro do critério adotado. Essa estrutura hierárquica é a mesma que foi obtida como resultado da análise feita no capítulo 5.

No caso de opção asiática modelada com trajetória construída por incrementos, a estrutura hierárquica derivada analiticamente no capítulo 5 indica que a variável referente ao primeiro dia da trajetória é a mais importante, seguida da

variável referente ao segundo dia e assim por diante, até chegar a variável referente ao final da trajetória, que seria a menos importante na estimativa do preço da opção. Novamente, os resultados - apresentados nas tabelas 8.1.3 e 8.1.4 - conseguiram capturar a hierarquia obtida analiticamente com o uso de derivadas parciais.

Já no caso de opções asiáticas modeladas com trajetórias construídas pelo método da ponte browniana, a análise do capítulo 5 indica que a importância das variáveis decai a cada ciclo de preenchimento. O primeiro e segundo ciclos são compostos pelas variáveis que representam o final e o meio da trajetória, respectivamente. O terceiro ciclo é composto pelas variáveis referentes aos pontos médios da primeira e da segunda metade da trajetória, isto é, os pontos que dividem na metade os segmentos da trajetória delimitados pelos ciclos anteriores. A partir do terceiro ciclo, os ciclos vão sucessivamente dividindo na metade os segmentos delimitados pelos ciclos anteriores, de forma análoga aos ciclos de Sobol'. A hierarquia derivada analiticamente também sugere que, além da queda de importância a cada ciclo, dentro de cada ciclo, as variáveis mais próximas do final da trajetória têm maior importância.

A observação dos gráficos de barras adjacentes às tabelas 8.1.5 e 8.1.6 evidencia a queda de importância até o terceiro ciclo. Já a observação das estimativas das variâncias permite constatar que a queda também se dá para os demais ciclos e que, dentro de cada ciclo, as variáveis aumentam de importância quanto mais próximas do final da trajetória estão. Por exemplo, para a opção de 32 dias – tabela 8.1.6 - o quarto ciclo é composto pelas variáveis referentes aos dias 4, 12, 20 e 28, que tiveram suas respectivas variâncias estimadas em 0,0154, 0,0167, 0,0176 e 0,0181, com média 0,0170. Enquanto isso, a média das variâncias

estimadas para o terceiro ciclo – dias 8 e 24 – ficou em 0,1363 e a média para o quinto ciclo – dias 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 e 30 – em 0,0021.

Na parte inferior das tabelas 8.1.1 a 8.1.6 estão registrados o somatório das variâncias estimadas para cada variável (σ_{Σ}^2), a estimativa para a variância total da função de integração (σ^2) e a porcentagem da primeira em relação à segunda ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$). Estas porcentagens revelam que, para as quatro opções em que as trajetórias foram modeladas pelo método incremental, os efeitos de primeira ordem conseguiram captar aproximadamente 71% da variância total da função e que, para os dois casos de opções asiáticas modeladas com trajetórias construídas pelo método da ponte browniana, este percentual se situou na casa dos 85%. A implicação desses valores é que, nos casos em que foi usado o método incremental, aproximadamente 29% da variância resulta de interações entre as variáveis, que não foram contempladas na determinação da hierarquia. Isso, é claro, representa uma fragilidade do método, pois, dependendo de como essa variância não contabilizada estiver distribuída entre as dimensões, a ordem de importância poderia ser completamente alterada. No entanto, nada nos modelos leva a crer que haja interações concentradas de tal forma que resulte numa mudança na hierarquia. Esse risco é ainda menos preocupante no caso das opções asiáticas modeladas com o método da ponte browniana. Neste caso, a variável mais importante responde por aproximadamente 68% da variância total do modelo e nenhuma outra variável poderia superar este percentual. A segunda variável na hierarquia responde por quase 13% da variância total dos modelos. Em tese, se os 15% não contabilizados estiverem fortemente concentrados nas variáveis referentes ao terceiro ciclo de preenchimento, essas duas variáveis deveriam ser associadas às segunda e terceira dimensões da técnica amostral utilizada e a variável referente ao ponto médio

deveria ser associada a quarta dimensão da técnica de amostragem. Na prática, isso não chega a ser um problema, pois a queda na qualidade das dimensões das técnicas amostrais não é tão abrupta – a exceção da AD Bipartida.

A variância total dos modelos (σ^2) revela que, como é esperado, esta aumenta conforme o prazo da opção aumenta. Por outro lado, quando comparados os modelos de opções asiáticas construídos pelo método incremental com os construídos pelo método de ponte browniana, observa-se que as estimativas para as variâncias totais são praticamente idênticas. Isso significa que, a grande diferença entre os dois modelos está na estrutura hierárquica e explica porque o método da ponte browniana só é capaz de auferir ganhos de precisão quando utilizado com uma técnica de amostragem que possa se beneficiar dessa concentração de importância em uma única variável. Isso sugere que as técnicas da Amostragem Descritiva e o Sobol' emulando a Amostragem Descritiva podem obter vantagens comparativas resultante da concentração da importância em uma única dimensão.

Pode ser concluído que, apesar das restrições apontadas na literatura, o método utilizado – obtenção dos índices de sensibilidade global relativos aos efeitos de primeira ordem - têm utilidade na análise de funções de integração. Além de serem simples de calcular, conseguem responder por uma grande parcela da variância total dos modelos. Portanto, numa grande parte dos casos, não deve haver maiores problemas em seu uso. Contudo, devem ser feitas algumas ressalvas. Primeiro, é necessário observar o quanto da variância total é representada pelos efeitos de primeira ordem. Segundo, é necessária atenção ao modelo para perceber possíveis interações entre as variáveis. Cabe notar que, nos modelos avaliados, a correlação entre as variáveis de entrada foi zero. Frequentemente, os modelos especificam correlações entre as variáveis de entrada, nestes casos, talvez seja

possível adaptar o método para que estime alguns efeitos de segunda ordem ou então utilizar os métodos mais sofisticados disponíveis na literatura.

Dia/Dimensão (k)	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	0,5678	4,50%
2	0,5653	4,48%
3	0,5669	4,49%
4	0,5604	4,44%
5	0,5634	4,46%
6	0,5703	4,52%
7	0,5695	4,51%
8	0,5641	4,47%
9	0,5648	4,47%
10	0,5628	4,46%
11	0,5654	4,48%
12	0,5730	4,54%
13	0,5719	4,53%
14	0,5687	4,50%
15	0,5691	4,51%
16	0,5686	4,50%
Somatório (σ_{Σ}^2)	9,0720	71,83%
Variância Total (σ^2)	12,6291	

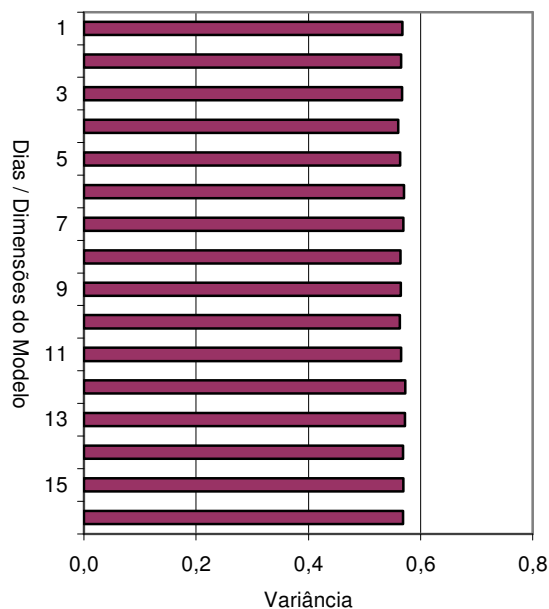


Tabela 8.1.1 Modelo de opção europeia com 16 dimensões e trajetória construída pelo método incremental: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

Dia/Dimensão (k)	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	0,6039	2,22%
2	0,6085	2,24%
3	0,6096	2,24%
4	0,6022	2,21%
5	0,6061	2,23%
6	0,6060	2,23%
7	0,6053	2,23%
8	0,6093	2,24%
9	0,6041	2,22%
10	0,6017	2,21%
11	0,6084	2,24%
12	0,6063	2,23%
13	0,6113	2,25%
14	0,6041	2,22%
15	0,6053	2,23%
16	0,6045	2,22%
17	0,6008	2,21%
18	0,6117	2,25%
19	0,6068	2,23%
20	0,6104	2,24%
21	0,6072	2,23%
22	0,6110	2,25%
23	0,6102	2,24%
24	0,6044	2,22%
25	0,6008	2,21%
26	0,6037	2,22%
27	0,6073	2,23%
28	0,6086	2,24%
29	0,6066	2,23%
30	0,6094	2,24%
31	0,6061	2,23%
32	0,6073	2,23%
Somatório (σ_{Σ}^2)	19,4089	71,38%
Variância Total (σ^2)	27,1913	

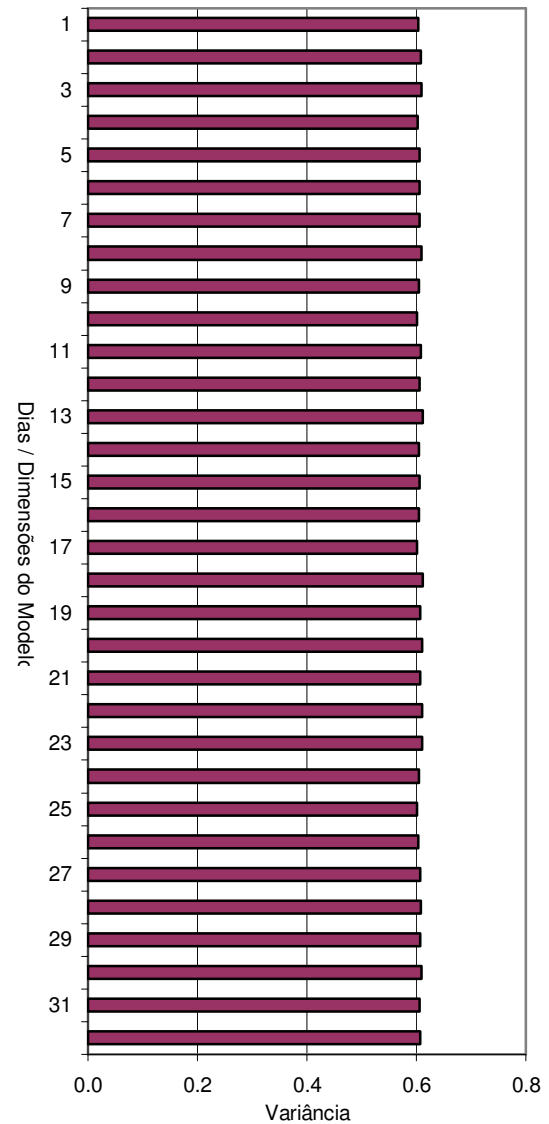


Tabela 8.1.2 Modelo de opção europeia com 32 dimensões e trajetória construída pelo método incremental: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

Dia/Dimensão (k)	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	0,5487	12,07%
2	0,4874	10,72%
3	0,4257	9,37%
4	0,3669	8,07%
5	0,3123	6,87%
6	0,2691	5,92%
7	0,2182	4,80%
8	0,1779	3,91%
9	0,1395	3,07%
10	0,1067	2,35%
11	0,0787	1,73%
12	0,0549	1,21%
13	0,0346	0,76%
14	0,0196	0,43%
15	0,0087	0,19%
16	0,0022	0,05%
Somatório (σ_{Σ}^2)	3,2511	71,54%
Variância Total (σ^2)	4,5446	

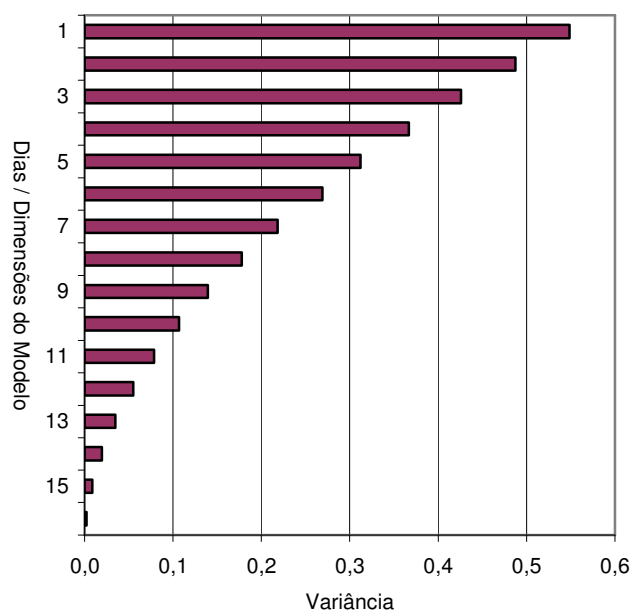


Tabela 8.1.3 Modelo de opção asiática com 16 dimensões e trajetória construída pelo método incremental: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

Dia/Dimensão (k)	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	0,5467	6,08%
2	0,5202	5,78%
3	0,4880	5,42%
4	0,4610	5,12%
5	0,4270	4,75%
6	0,4068	4,52%
7	0,3721	4,14%
8	0,3471	3,86%
9	0,3186	3,54%
10	0,2910	3,23%
11	0,2709	3,01%
12	0,2459	2,73%
13	0,2223	2,47%
14	0,2011	2,24%
15	0,1817	2,02%
16	0,1626	1,81%
17	0,1447	1,61%
18	0,1266	1,41%
19	0,1099	1,22%
20	0,0944	1,05%
21	0,0817	0,91%
22	0,0681	0,76%
23	0,0562	0,62%
24	0,0457	0,51%
25	0,0361	0,40%
26	0,0276	0,31%
27	0,0204	0,23%
28	0,0142	0,16%
29	0,0091	0,10%
30	0,0051	0,06%
31	0,0023	0,03%
32	0,0006	0,01%
Somatório (σ_{Σ}^2)	6,3057	70,09%
Variância Total (σ^2)	8,9961	

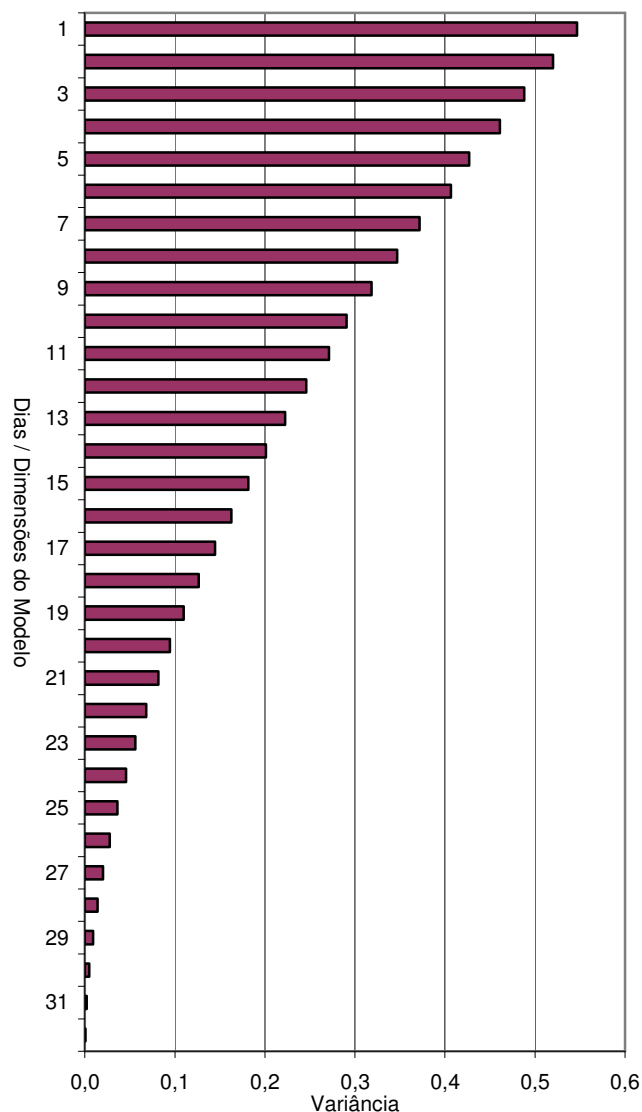


Tabela 8.1.4 Modelo de opção asiática com 32 dimensões e trajetória construída pelo método incremental: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

Dia/Dim (k)	Ciclo	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	5	0,0010	0,02%
2	4	0,0077	0,17%
3	5	0,0010	0,02%
4	3	0,0641	1,45%
5	5	0,0010	0,02%
6	4	0,0082	0,19%
7	5	0,0010	0,02%
8	2	0,5621	12,73%
9	5	0,0010	0,02%
10	4	0,0085	0,19%
11	5	0,0011	0,02%
12	3	0,0687	1,56%
13	5	0,0011	0,02%
14	4	0,0087	0,20%
15	5	0,0011	0,02%
16	1	3,0288	68,59%
Somatório (σ_{Σ}^2)		3,7651	85,27%
Variância Total (σ^2)		4,4156	

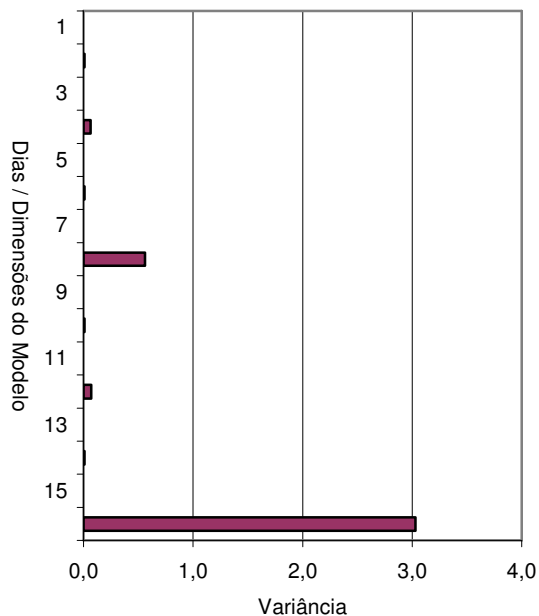


Tabela 8.1.5 Modelo de opção asiática com 16 dimensões e trajetória construída pelo método da ponte browniana: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

Dia/Dim (k)	Ciclo	$\sigma_{\{k\}}^2$	$\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$
1	6	0,0002	0,00%
2	5	0,0019	0,02%
3	6	0,0002	0,00%
4	4	0,0154	0,17%
5	6	0,0002	0,00%
6	5	0,0020	0,02%
7	6	0,0002	0,00%
8	3	0,1293	1,45%
9	6	0,0003	0,00%
10	5	0,0020	0,02%
11	6	0,0003	0,00%
12	4	0,0167	0,19%
13	6	0,0003	0,00%
14	5	0,0021	0,02%
15	6	0,0003	0,00%
16	2	1,1337	12,74%
17	6	0,0003	0,00%
18	5	0,0022	0,02%
19	6	0,0003	0,00%
20	4	0,0176	0,20%
21	6	0,0003	0,00%
22	5	0,0022	0,02%
23	6	0,0003	0,00%
24	3	0,1432	1,61%
25	6	0,0003	0,00%
26	5	0,0022	0,02%
27	6	0,0003	0,00%
28	4	0,0181	0,20%
29	6	0,0003	0,00%
30	5	0,0023	0,03%
31	6	0,0003	0,00%
32	1	5,9962	67,37%
Somatório (σ_{Σ}^2)		7,4915	84,17%
Variância Total (σ^2)		8,9004	

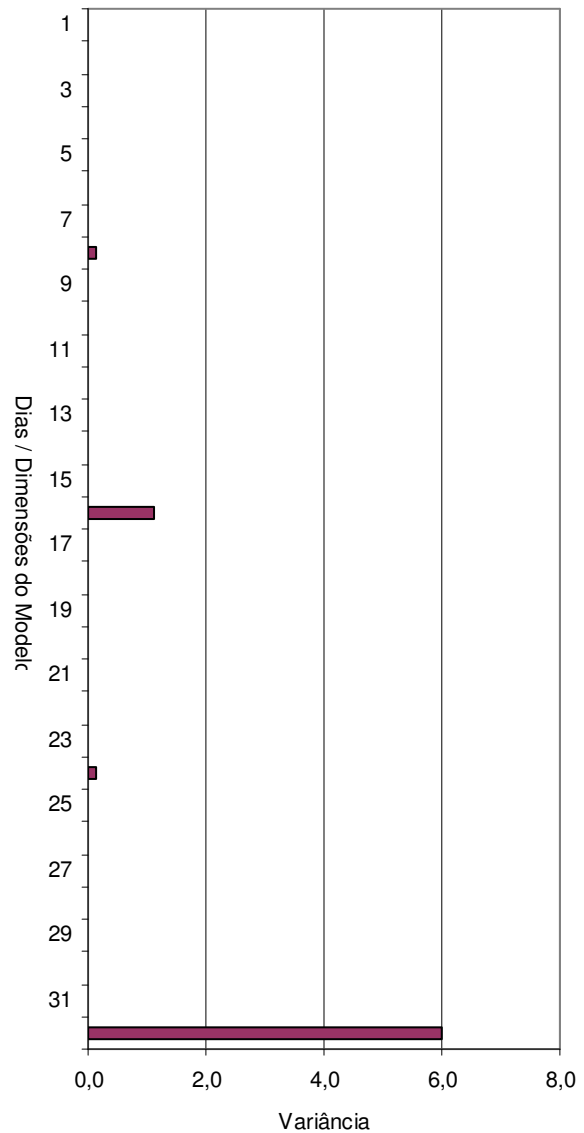


Tabela 8.1.6 Modelo de opção asiática com 32 dimensões e trajetória construída pelo método da ponte browniana: variância associada às variáveis / dimensões ($\sigma_{\{k\}}^2$), índice de sensibilidade global de variáveis individuais ($\sigma_{\{k\}}^2 / \sigma^2$), representatividade dos efeitos de primeira ordem em relação à variância total da função ($\sigma_{\Sigma}^2 / \sigma^2$) e representação gráfica de $\sigma_{\{k\}}^2$

8.2 Resultados do Experimento 2: Estimativa de prêmio e probabilidade de exercício de opções europeias

Esta seção é dedicada à apresentação e análise dos resultados do experimento 2, descrito em detalhe no capítulo anterior. O principal objetivo deste experimento é comparar o desempenho das diferentes técnicas em relação ao aumento da dimensionalidade. Também é avaliado o efeito da probabilidade de exercício e do tamanho da amostra nos erros de estimação. Por um lado, é sabido que as técnicas de controle multivariado perdem a eficiência conforme variáveis são adicionadas aos modelos e, portanto, será dada atenção a esse comportamento nas técnicas propostas no capítulo 6. Por outro lado, há resultados que indicam que algumas técnicas perdem a eficiência em relação à Amostragem Aleatória Simples conforme a probabilidade de exercício diminui, isto é, conforme uma região menor do hiper-cubo unitário é utilizada para gerar resultados não nulos, o que faz necessário verificar este aspecto para as propostas. Já a variação do tamanho da amostra permite avaliar a convergência das técnicas amostrais propostas, o que permite extrapolar os resultados para tamanhos de amostras maiores que os testados. Para facilitar o texto, nesta e nas próximas seções, as técnicas de amostragem presentes na literatura e apresentadas nos capítulos 2, 3 e 4 - especificamente, a Amostragem Aleatória Simples, a Amostragem Descritiva, o Richtmyer e o Sobol' - serão chamadas de técnicas tradicionais.

Nos gráficos 8.2.1 a 8.2.3⁴⁶, são apresentados os erros padrões obtidos pelas técnicas tradicionais de amostragem, em função da dimensionalidade do modelo, para problemas de apreçamento de opções com probabilidades de exercícios iguais a 98,96%, 51,99% e 6,67%, quando usadas amostras de tamanho $N = 1024$. Já os gráficos 8.2.4 a 8.2.6 repetem os três anteriores para amostras de tamanho

⁴⁶ Estes gráficos de linha foram gerados com o pacote MS Excel e são do tipo dispersão suavizado.

$N = 4096$. Em todas as situações de dimensionalidade, de probabilidade de exercício e de tamanho de amostra contempladas, o uso das três técnicas tradicionais de redução de variância produziu ganho em relação ao uso da Amostragem Aleatória Simples. Contudo, esse ganho diminui conforme diminui a probabilidade de exercício. Com relação ao aumento da dimensionalidade, tanto a Amostragem Aleatória Simples como a Amostragem Descritiva não apresentam maiores problemas – como esperado - visto que não incorporam controle multivariado. Por outro lado, no caso de Sobol', é confirmado o problema relativo à perda de eficiência com o aumento da dimensionalidade, fenômeno conhecido como “maldição da dimensionalidade”. Já em alguns casos de Richtmyer, pode ser observada uma melhora com o aumento da dimensionalidade, o que sugere que as dimensões geradas com Richtmyer não apresentam uma ordem previsível na qualidade, da forma sugerida na literatura sobre Quasi-Monte Carlo. Por fim, pode ser visto que o aumento do tamanho da amostra beneficia mais as duas técnicas Quasi-Monte Carlo, o que também é um resultado esperado em função de sua convergência ser mais rápida.

Dentro dos limites de probabilidade de exercício, tamanho de amostra e dimensionalidade, implícitos nos gráficos 8.2.1 a 8.2.6, é possível afirmar que amostragem por Sobol' apresentou os melhores resultados na maioria das situações. A amostragem por Richtmyer também apresentou resultados convincentes, assim como a Amostragem Descritiva que, ainda tem a seu favor, a vantagem computacional no cálculo da inversa da função de distribuição acumulada.

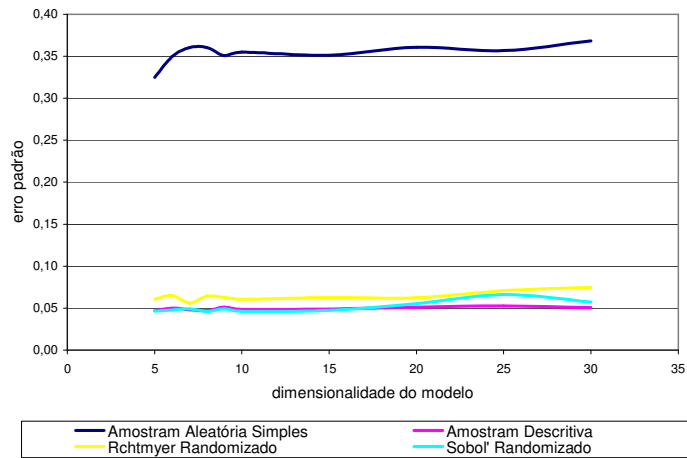


Gráfico 8.2.1 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, $N = 1024$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

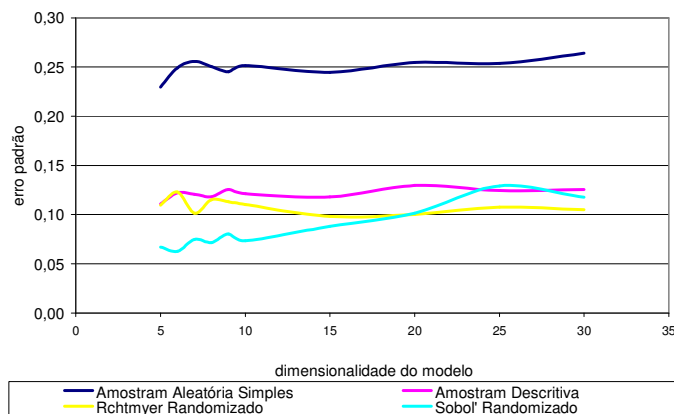


Gráfico 8.2.2 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, $N = 1024$, $K = 55$, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

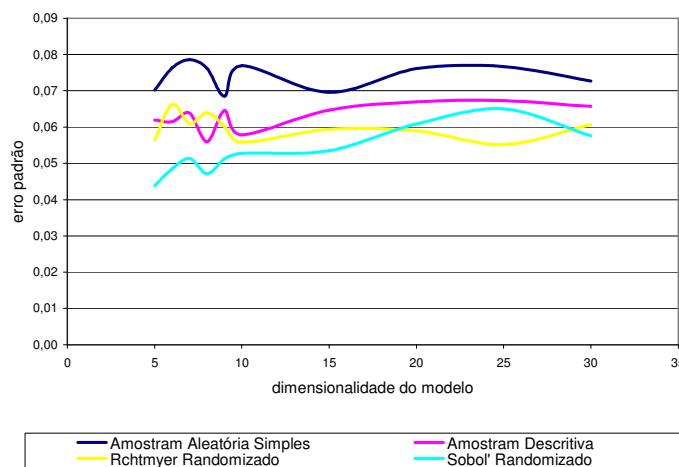


Gráfico 8.2.3 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, $N = 1024$, $K = 75$, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

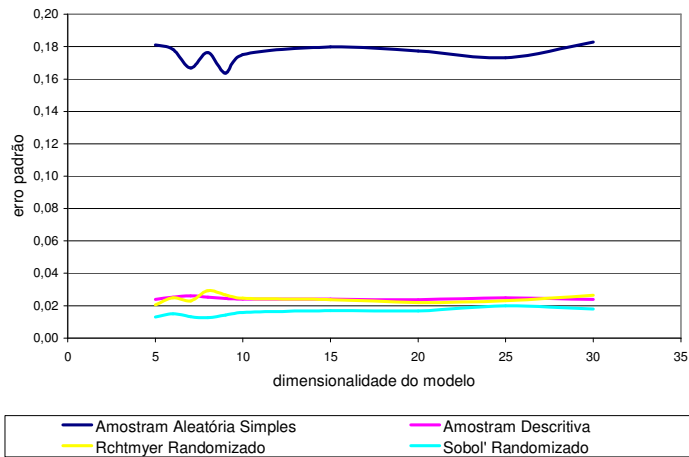


Gráfico 8.2.4 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, N = 4096, K = 35, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

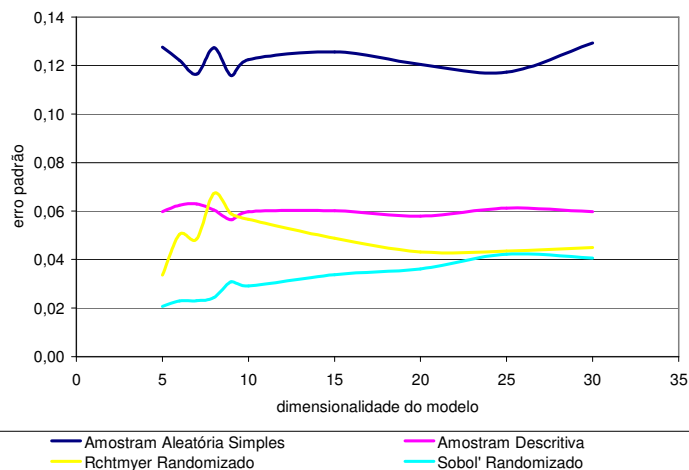


Gráfico 8.2.5 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, N = 4096, K = 55, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

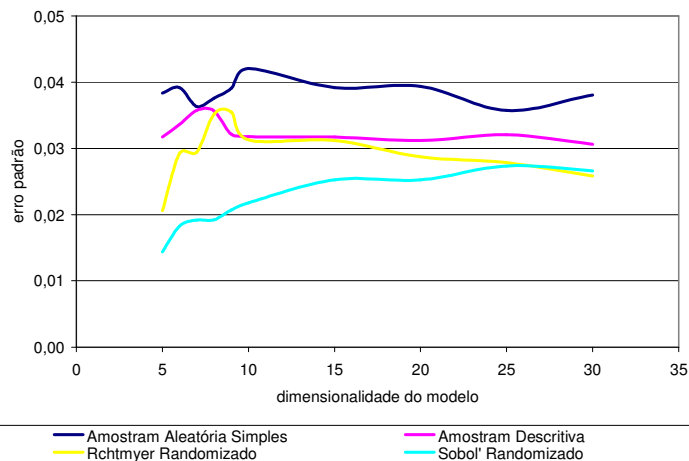


Gráfico 8.2.6 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas de Amostragem Tradicionais, N = 4096, K = 75, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

Os gráficos 8.2.7 a 8.2.12, contemplam as mesmas opções e tamanhos de amostras que os seis gráficos anteriores, mas nestes, são apresentados os erros padrões obtidos pelas quatro técnicas de controle multivariado da Amostragem Descritiva, ou seja: a Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer, a Amostragem Descritiva Bipartida, a Amostragem Descritiva Bidimensional controlada pela Bipartida e a Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol'. Também foi incluída a Amostragem Descritiva tradicional para fins de comparação com as propostas de controle da mesma.

Em todas situações contempladas, observa-se que não houve vantagem no controle através da seqüência de Richtmyer. Pelo contrário, a combinação da Amostragem Descritiva com Richtmyer apresentou resultados piores que a Descritiva pura. Esse fato pode ser considerado surpreendente em função dos bons resultados apresentados por Richtmyer nos gráficos 8.22, 8.23, 8.25 e 8.26. Assim, a combinação do controle multivariado de Richtmyer – por menor que seja - sobre um conjunto de pontos ótimos, deveria ter apresentado resultados melhores que os da Amostragem Descritiva. Pode ser argumentado que o controle multivariado de Richtmyer não é bom e que os resultados positivos foram resultados de boas distribuições univariadas. Isso também não parece ser uma justificativa razoável, porque os pontos da Amostragem Descritiva são ótimos e, portanto, para superá-la, o controle multivariado de Richtmyer teria que agregar alguma qualidade às estimativas. Infelizmente, não foi encontrado o motivo para esse resultado ruim, mas esse problema propõe a questão da identificação da origem dos ganhos obtidos pelas técnicas amostrais.

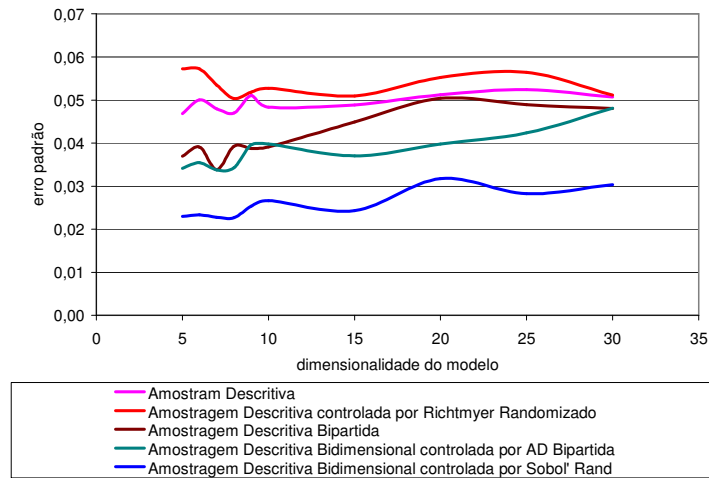


Gráfico 8.2.7 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 1024$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

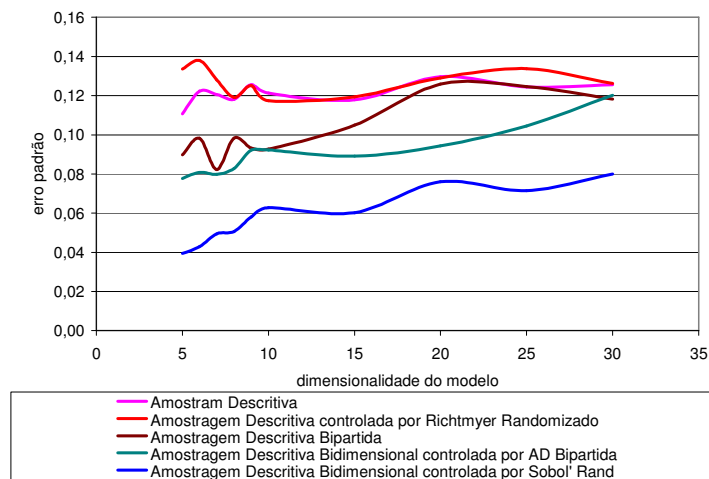


Gráfico 8.2.8 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 1024$, $K = 55$, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

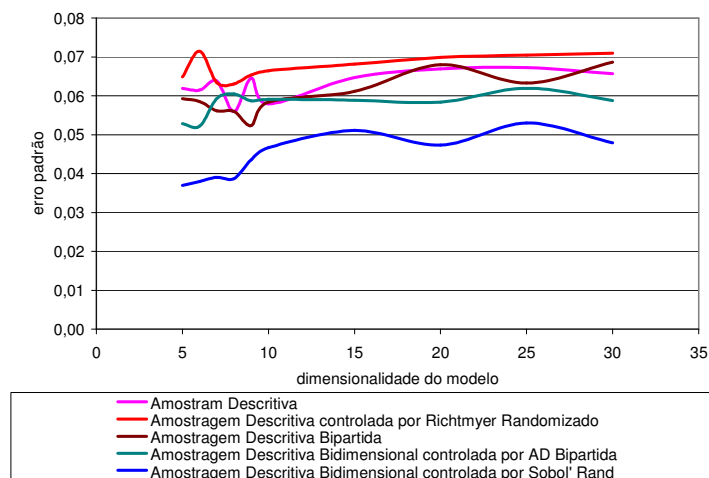


Gráfico 8.2.9 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 1024$, $K = 75$, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

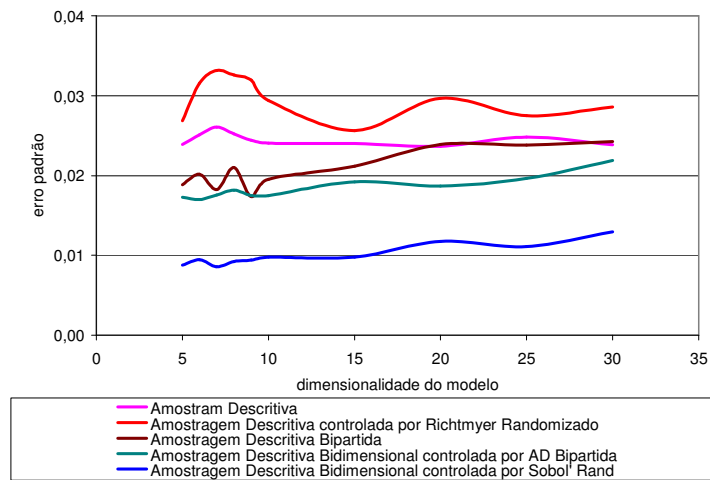


Gráfico 8.2.10 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 4096$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

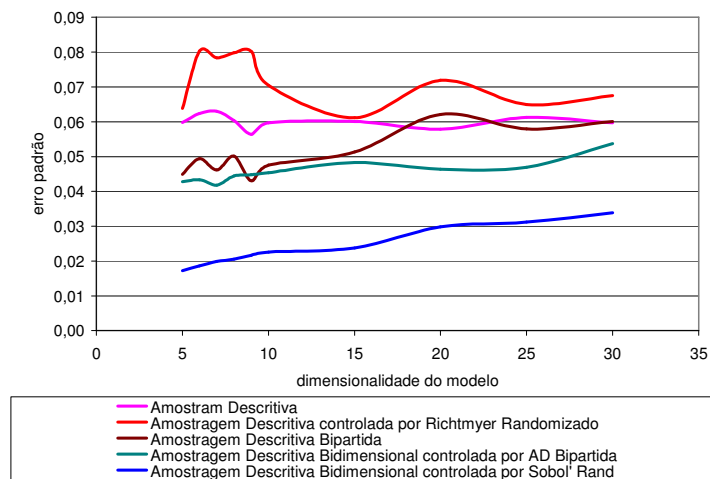


Gráfico 8.2.11 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 4096$, $K = 55$, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

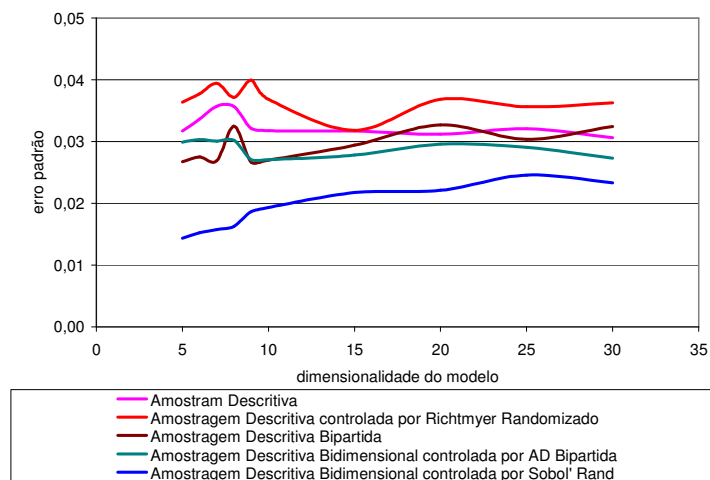


Gráfico 8.2.12 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $N = 4096$, $K = 75$, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

Conforme foi discutido na seção 6.2, a Amostragem Descritiva Bipartida (AD Bipartida) exerce controle apenas para as primeiras $\log(N)/\log(2)$ dimensões. Logo, para amostras de tamanho 1024 e 4096, o controle só é exercido até a décima e décima segunda dimensão, respectivamente, a partir das quais o método recai para uma Amostragem Descritiva tradicional. Nos gráficos 8.2.7 a 8.2.12 pode ser observado que, de fato, os erros padrões obtidos nas estimativas realizadas com a AD Bipartida tendem para os erros obtidos pela Amostragem Descritiva tradicional a partir de, aproximadamente, a décima dimensão. Apesar das duas dimensões adicionais controladas, o tamanho da amostra não parece fazer muita diferença no ganho da AD Bipartida em relação à tradicional.

Nas tabelas 8.2.4 a 8.2.6, são apresentados os ganhos dos erros padrões das diversas técnicas em relação à Amostragem Descritiva tradicional, expressos como razão entre a técnica e a Amostragem Descritiva (ou seja, quanto menor a razão, maior o ganho). Na parte referente à AD Bipartida, foram ressaltadas com fundo cinza as estimativas que se beneficiaram integralmente do controle exercido, qual seja, a forma relaxada da propriedade A. Com relação à probabilidade de exercício, pode ser observado que a vantagem da AD Bipartida em relação à Amostragem Descritiva tradicional reduz para a opção com probabilidade de exercício de 6,7% ($k = 75$), mas é relativamente estável para as duas opções com maior probabilidade de exercício, que são as que utilizam mais volume do hiper-cubo unitário. Considerando que, dentro das áreas em fundo cinza os ganhos são relativamente estáveis para variações de dimensão e tamanho da amostra, a redução do ganho em função da redução da probabilidade de exercício pode ser observada pela média dos ganhos dentro desta área. Para as opções com preço de exercício $K = 35$ e

$K = 55$, o ganho médio das estimativas – dentro da área cinza - foi de 0,77 cada, ao passo que, para a opção com $K = 75$, o ganho médio foi de 0,87.

Conforme foi especificado na seção 7.2, o experimento 2 foi desenhado utilizando nove opções ao todo. Com base nessas opções, foram construídos a tabela 8.2.1 e o gráfico 8.2.13, que informam o ganho que a AD Bipartida obteve para os diferentes preços, ou probabilidades, de exercícios. Cada observação de ganho representa a média dos ganhos para os casos em que todas as dimensões foram controladas (a área cinza nas tabelas 8.2.4 a 8.2.6). Fica claro que, para probabilidades muito baixas, as técnicas se equivalem, mas que, para probabilidades mais elevadas, o ganho da AD Bipartida converge para um valor próximo a 77%. Lembrando que a única diferença entre a Amostragem Descritiva tradicional e a AD Bipartida é a aderência à propriedade A relaxada, é possível creditar a diferença de 23% a esse controle.

K	Pr{exercício}	Ganho Médio
35	99,0%	0,77
45	85,4%	0,78
50	70,1%	0,77
55	52,0%	0,77
65	21,6%	0,81
75	6,7%	0,87
85	1,7%	0,93
95	0,4%	0,99
105	0,1%	1,01

Tabela 8.2.1 Ganho Médio da AD Bipartida para tamanhos de amostra e dimensionalidades que aproveitam integralmente a propriedade A relaxada (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

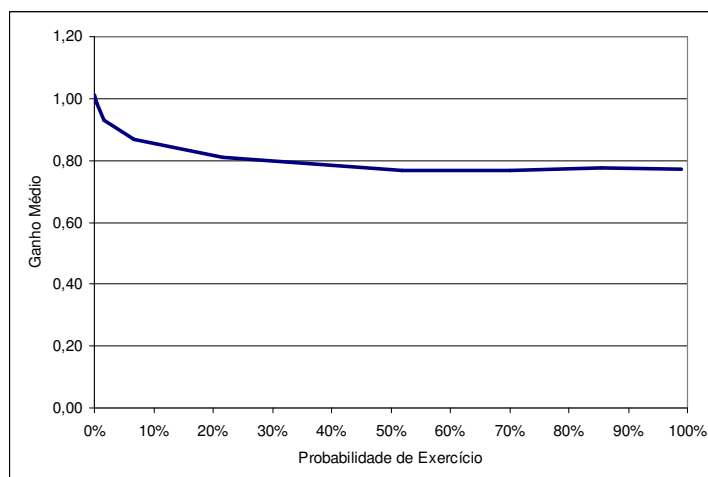


Gráfico 8.2.13 Ganho Médio em Função da Probabilidade de Exercício da AD Bipartida para tamanhos de amostra e dimensionalidades que aproveitam integralmente a propriedade A relaxada (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

Os gráficos 8.2.7 a 8.2.12 revelam que, assim como ocorre com a AD Bipartida, o erro padrão obtido pela AD Bidimensional controlada pela AD Bipartida também se aproxima do obtido pela Amostragem Descritiva tradicional conforme aumenta a dimensionalidade ou para probabilidades de exercício muito baixas. No entanto, embora para dimensionalidades baixas os erros padrões das duas técnicas propostas sejam próximos, a combinação da AD Bidimensional com a AD Bipartida consegue manter o ganho para mais dimensões, comparada com a AD Bipartida pura. Como pode ser observado nos gráficos 8.2.7, 8.2.8, 8.2.10 e 8.2.11, após dez ou doze dimensões o erro padrão da AD Bipartida pura começa a se elevar, aproximando-se da Amostragem Descritiva tradicional, mas, para a AD Bidimensional controlada com AD Bipartida, essa elevação só começa após quinze ou vinte dimensões.

Esse melhor desempenho em dimensionalidades mais elevadas pode, em parte, ser resultado de uma duplicação da quantidade de dimensões controladas pela AD Bipartida. Para amostras de tamanho $N = 1024$, a AD Bipartida consegue controlar um máximo de 10 dimensões. Quando a AD Bidimensional é controlada pela AD Bipartida, cada dimensão desta controla um conjunto de pontos bidimensionais, isto é, duas dimensões. Assim, para o caso de $N = 1024$, o controle exercido pela AD Bipartida abrange até 20 dimensões, enquanto que, no caso de amostras de tamanho $N = 4096$, a AD Bipartida controla 24 dimensões quando combinada com a AD Bidimensional.

Olhados separadamente por tamanho de amostra, os resultados obtidos corroboram parcialmente a explicação do melhor desempenho ser devido à duplicação de dimensões controladas. Para amostras de tamanho $N = 4096$, os gráficos 8.2.10 e 8.2.11 mostram que, de fato a elevação do erro padrão se inicia próximo à dimensionalidade 24, conforme seria previsto pela explicação. No entanto, para tamanhos de amostra $N = 1024$, a elevação começa para dimensionalidades tão baixas quanto 15, conforme pode ser observado nos gráficos 8.2.7 e 8.2.8. Embora seja difícil separar a contribuição de cada efeito das técnicas envolvidas, parece claro que a combinação da AD Bidimensional com a AD Bipartida consegue “prolongar” o intervalo de ganho em relação à Amostragem Descritiva tradicional.

Nas tabelas 8.2.4 a 8.2.6 foi repetido para a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida, o esquema de ressaltar as dimensões controladas por AD Bipartida, anteriormente usado para a AD Bipartida pura. Com base na média dos ganhos relativos às dimensionalidades e tamanhos de amostras ressaltados, foram criados a tabela 8.2.2 e o gráfico 8.2.14, a exemplo do que foi feito anteriormente para a AD Bipartida pura. Nesses, pode se constatar que, também para o caso da

AD Bidimensional, o ganho cai para probabilidades de exercícios muito baixas, isto é, se aproxima de 1. Porém, para probabilidades de exercícios maiores que 52%, este ganho se estabiliza em torno de 0.73, que é um pouco melhor que o observado para o caso da AD Bipartida pura, ou seja, além de conferir o benefício do controle por mais dimensões, a AD Bidimensional parece também agregar maior qualidade ao conjunto de pontos controlados. Embora a interpretação dessa melhoria de ganho esteja além do escopo desta tese, pode se especular que a contribuição da AD Bidimensional seja uma variação no ganho da ordem de 0.04 (0.77 – 0.73).

K	Pr{exercício}	Ganho
35	99,0%	0,74
45	85,4%	0,74
50	70,1%	0,72
55	52,0%	0,72
65	21,6%	0,79
75	6,7%	0,89
85	1,7%	0,97
95	0,4%	1,01
105	0,1%	1,02

Tabela 8.2.2 Ganho Médio da AD Bidimensional controlada com AD Bipartida para tamanhos de amostra e dimensionalidades que aproveitam integralmente a propriedade A relaxada (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

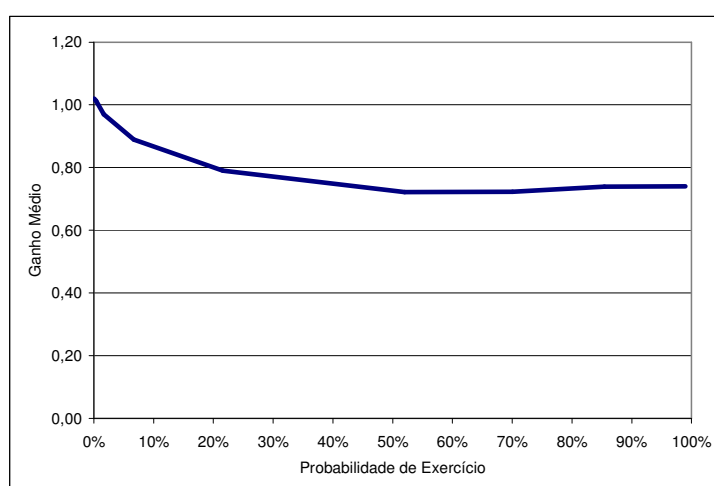


Gráfico 8.2.14 Ganho Médio em Função da Probabilidade de Exercício da AD Bidimensional controlada com AD Bipartida para tamanhos de amostra e dimensionalidades que aproveitam integralmente a propriedade A relaxada (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

Dentre as técnicas propostas para controlar o vetor da Amostragem Descritiva tradicional, a que obteve o melhor resultado foi a AD Bidimensional controlada por Sobol'⁴⁷. Nos gráficos 8.2.7 a 8.2.12, pode ser observado que, em todas as situações contempladas, essa técnica foi a que obteve estimativas mais precisas. Inclusive, nas situações de probabilidade de exercício baixa (gráficos 8.2.9 e 8.2.12), essa técnica de amostragem conseguiu obter resultados distintos dos obtidos pela Amostragem Descritiva tradicional, o que não ocorreu com as outras técnicas apresentadas nesses gráficos. A fim de verificar até que ponto essa combinação de Amostragem Descritiva com o Sobol' é útil, nos gráficos 8.2.15 a 8.2.20, a AD Bidimensional controlada por Sobol' é confrontada com Sobol' tradicional. Também foi incluída a proposta de Sobol' emulando a Amostragem Descritiva tradicional que, por suas características é a versão do Sobol' utilizada para controlar a própria AD Bidimensional. A Amostragem Descritiva tradicional permanece no gráfico como referência. Em cada gráfico, também foram adicionadas as linhas de tendências – e suas respectivas equações estimadas – para as técnicas de Sobol' com ciclo completo e randomização discreta (o Sobol' emulando a Amostragem Descritiva) e AD Bidimensional controlada por este Sobol'.

Para as condições contempladas pelos gráficos 8.2.15 a 8.2.20, fica claro que há vantagem em fazer a adaptação no Sobol' para que emule a Amostragem Descritiva. Em quase todas as situações de dimensionalidade, tamanho de amostra e probabilidade de exercício, esta adaptação obteve erro padrão menor ou igual ao obtido pelo Sobol' tradicional. Por sua vez, a AD Bidimensional combinada com o Sobol' adaptado conseguiu superar essa versão do Sobol' em quase todas as

⁴⁷ Foi usada a versão modificada de Sobol' chamada de Sobol' de ciclo completo e randomização discreta, que foi proposta e descrita no capítulo 6.

situações, tendo sido a técnica que apresentou os menores erros padrões como um todo.

Além disso, a observação das linhas de tendências e suas respectivas fórmulas revelam que, assim como a AD Bidimensional conseguiu prolongar o intervalo para o qual a AD Bipartida apresenta ganho em relação à Amostragem Descritiva tradicional, ela consegue diminuir a taxa de perda de eficiência do Sobol' em função do aumento da dimensionalidade. De fato, em todos os seis casos, o coeficiente angular da tendência da técnica combinada foi menor que o do Sobol' adaptado. No caso mais expressivo ($K = 35$ e $N = 1024$), a combinação resultou numa técnica que perdeu eficiência a uma taxa menor que um terço daquela conseguida pelo Sobol' emulando a Amostragem Descritiva. Já a menor diferença entre as taxas de perda de eficiência ocorreu para $K = 75$ e $N = 4096$ e, em geral, pode ser visto que a diferença entre as taxas de perda tende a cair – nominal e percentualmente - com o aumento do tamanho da amostra e diminuição da probabilidade de exercício. Essa característica sugere que, para problemas com dimensionalidades muito elevadas, a combinação de Sobol' com a AD Bidimensional pode apresentar vantagens, em relação ao Sobol', ainda mais acentuadas.

A vantagem da AD Bidimensional controlada pelo Sobol' sobre o Sobol' emulando a Amostragem Descritiva e a vantagem deste sobre o Sobol' tradicional pode ser confirmada, também, com a tabela 8.2.3 e gráfico 8.2.21 que, a exemplo do que foi realizado para as tabelas 8.2.1 e 8.2.2 e gráficos 8.2.13 e 8.2.14 expressam as médias dos ganhos para diferentes probabilidades de exercícios. (Diferentemente daqueles, estes consideram todas as estimativas de erros padrões, visto que, a

restrição relativa ao uso da propriedade A relaxada não é aplicável.⁴⁸) Fica claro que, além de serem melhores que o Sobol' tradicional, as duas técnicas propostas não perdem seu ganho comparativo com o aumento da probabilidade de exercício, como foi observado para o Sobol' tradicional.

A tabela 8.2.3 também revela um fato interessante. Se forem consideradas apenas as probabilidades de exercícios superiores a 50%, isto é, a probabilidade a partir da qual os ganhos apresentam estabilidade, a média para o Sobol' de ciclo completo é de 0,48. Como a média para a AD Bidimensional controlada por Sobol' de ciclo completo é, aproximadamente 0,44, a diferença é de 0,04. Este é o mesmo valor encontrado para a diferença entre a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida e AD Bipartida pura, o que fortalece a noção de que a contribuição no ganho proporcionado pela AD Bidimensional é da ordem de 0,04.

⁴⁸ Na verdade, o Sobol' só usufrui plenamente da propriedade A nos mesmos casos de dimensionalidade e tamanho de amostra em que a AD Bipartida consegue exercer esse controle. Porém a propriedade A não é a única fonte de controle multivariado do Sobol'.

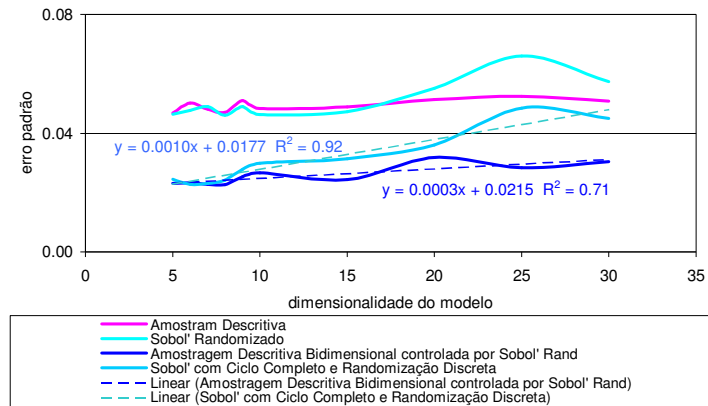


Gráfico 8.2.15 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 1024, K = 35, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

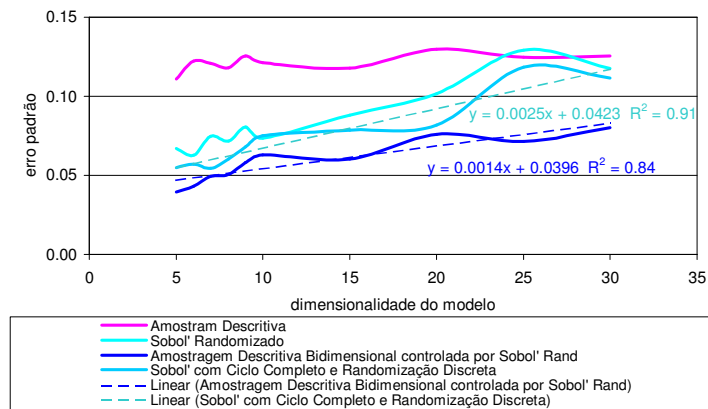


Gráfico 8.2.16 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 1024, K = 55, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

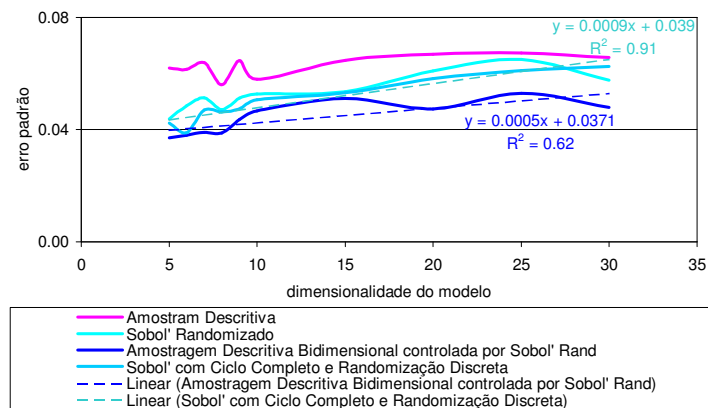


Gráfico 8.2.17 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 1024, K = 75, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

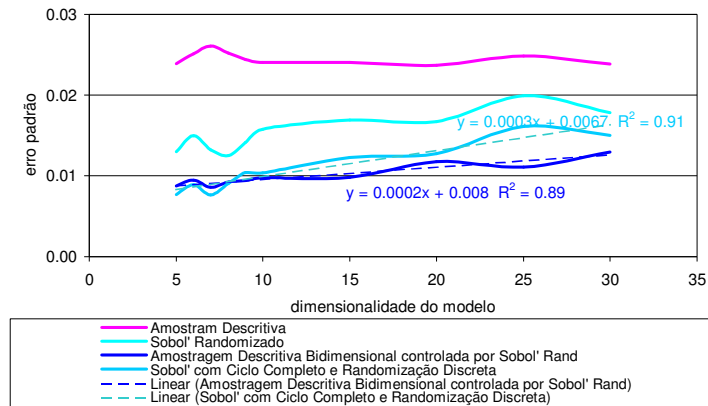


Gráfico 8.2.18 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 4096, K = 35, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

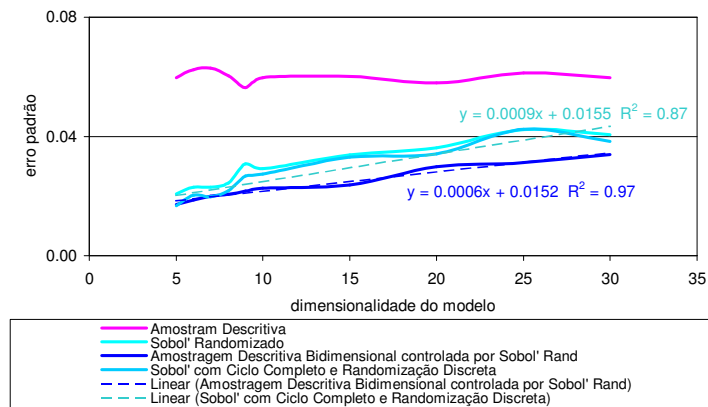


Gráfico 8.2.19 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 4096, K = 55, prêmio = 5,18 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,5199$

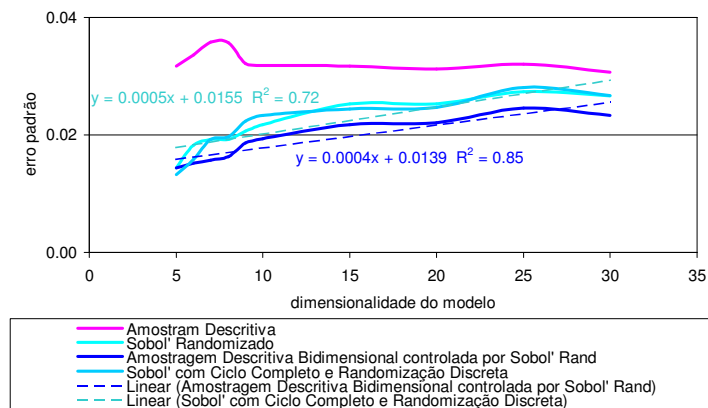


Gráfico 8.2.20 Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função da Dimensionalidade do Modelo: Técnicas Ótimas, N = 4096, K = 75, prêmio = 0,46 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,0667$

K	Pr{exercício}	Ganho Médio		
		Sobol' Randomizado	Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand
35	99.0%	0.69	0.47	0.45
45	85.4%	0.57	0.49	0.45
50	70.1%	0.53	0.48	0.43
55	52.0%	0.53	0.48	0.42
65	21.6%	0.58	0.55	0.49
75	6.7%	0.68	0.66	0.60
85	1.7%	0.80	0.79	0.73
95	0.4%	0.91	0.90	0.85
105	0.1%	1.00	0.97	0.92

Tabela 8.2.3 Ganho Médio de Sobol' Randomizado, Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta e Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Randomizado para todos os tamanhos de amostra e dimensionalidades simulados (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

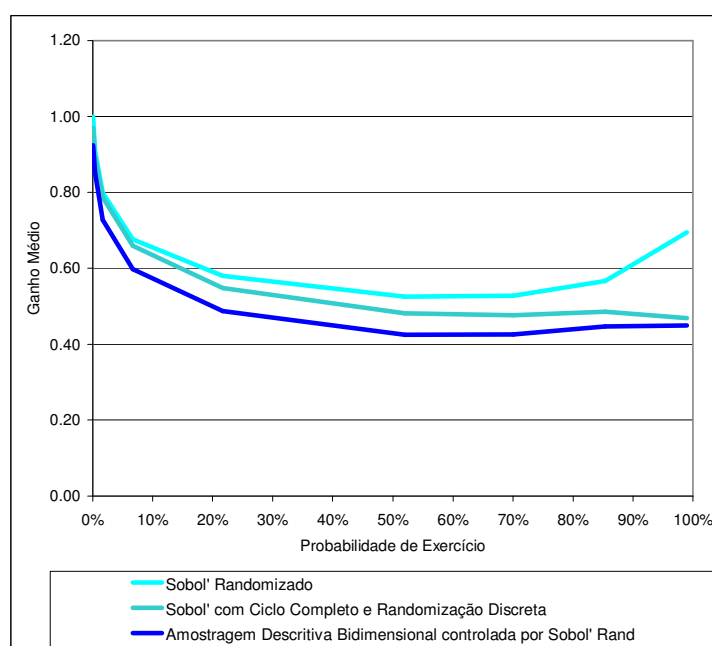


Gráfico 8.2.21 Ganho Médio em Função da Probabilidade de Sobol' Randomizado, Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta e Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Randomizado para todos os tamanhos de amostra e dimensionalidades simulados (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostragem Aleatória Simples	256	7,16	7,28	7,18	6,85	6,34	6,82	7,17	6,30	6,91	7,45
	1024	6,94	6,98	7,51	7,67	6,87	7,34	7,18	7,04	6,80	7,26
	4096	7,58	7,11	6,40	7,00	6,70	7,28	7,49	7,49	6,98	7,67
	16384	7,52	7,16	6,76	7,25	7,88	7,89	6,83	6,71	6,98	7,14
	65536	7,10	6,94	7,33	7,08	6,91	6,31	6,72	6,35	6,68	6,39
Amostragem Descritiva	256	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	1024	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	4096	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16384	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	65536	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Richtmyer Randomizado	256	1,65	1,49	1,54	1,65	1,46	1,60	2,11	2,15	2,17	2,06
	1024	1,29	1,30	1,17	1,37	1,23	1,25	1,28	1,21	1,35	1,47
	4096	0,86	0,99	0,88	1,16	1,09	1,02	0,99	0,93	0,93	1,11
	16384	0,55	0,51	0,53	1,11	1,16	1,06	0,86	0,70	0,73	0,71
	65536	0,39	0,38	0,40	0,63	0,72	0,73	0,73	0,61	0,54	0,52
Sobol' Randomizado	256	1,13	1,12	1,26	1,22	1,08	1,14	1,22	1,24	1,31	1,28
	1024	0,99	0,95	1,02	0,98	0,96	0,96	0,97	1,08	1,26	1,13
	4096	0,54	0,60	0,51	0,50	0,58	0,66	0,70	0,71	0,80	0,75
	16384	0,32	0,35	0,32	0,33	0,41	0,40	0,35	0,40	0,43	0,49
	65536	0,17	0,19	0,20	0,22	0,23	0,21	0,23	0,28	0,27	0,30
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0,83	0,92	0,82	0,89	0,82	0,90	1,09	1,00	1,07	1,07
	1024	1,22	1,14	1,11	1,07	1,02	1,09	1,04	1,08	1,08	1,01
	4096	1,13	1,26	1,27	1,29	1,31	1,22	1,07	1,25	1,11	1,20
	16384	0,93	1,01	1,13	1,02	1,29	1,34	1,24	1,01	1,10	1,11
	65536	0,61	0,89	0,90	0,82	1,02	1,05	1,25	1,21	1,06	1,07
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0,75	0,79	0,78	0,82	0,68	0,92	0,98	0,96	1,03	0,97
	1024	0,79	0,78	0,71	0,84	0,76	0,81	0,92	0,98	0,93	0,95
	4096	0,79	0,80	0,70	0,83	0,71	0,81	0,88	1,01	0,96	1,02
	16384	0,79	0,75	0,68	0,71	0,83	0,93	0,86	0,88	1,01	1,05
	65536	0,72	0,75	0,79	0,81	0,74	0,67	0,78	0,79	0,89	0,82
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0,67	0,71	0,77	0,76	0,70	0,74	0,81	0,86	0,85	0,98
	1024	0,73	0,71	0,70	0,73	0,78	0,82	0,76	0,78	0,81	0,95
	4096	0,72	0,68	0,67	0,72	0,72	0,73	0,80	0,79	0,79	0,92
	16384	0,70	0,68	0,71	0,73	0,83	0,84	0,71	0,76	0,81	0,86
	65536	0,75	0,73	0,74	0,74	0,70	0,67	0,84	0,71	0,71	0,74
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0,49	0,52	0,74	0,74	0,65	0,67	0,69	0,67	0,77	0,87
	1024	0,49	0,47	0,47	0,48	0,50	0,55	0,50	0,62	0,54	0,60
	4096	0,37	0,38	0,33	0,37	0,39	0,41	0,41	0,50	0,45	0,54
	16384	0,27	0,31	0,29	0,31	0,36	0,37	0,31	0,39	0,36	0,41
	65536	0,25	0,29	0,28	0,28	0,27	0,26	0,29	0,30	0,36	0,33
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0,66	0,69	0,66	0,72	0,62	0,77	0,78	0,98	1,08	0,96
	1024	0,52	0,46	0,48	0,51	0,54	0,62	0,64	0,71	0,92	0,89
	4096	0,32	0,35	0,29	0,36	0,43	0,43	0,51	0,54	0,65	0,63
	16384	0,22	0,21	0,20	0,24	0,31	0,30	0,28	0,28	0,34	0,32
	65536	0,12	0,15	0,16	0,16	0,20	0,20	0,23	0,25	0,28	0,27

Tabela 8.2.4 Ganho do erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=35$, prêmio=21,057 e $pr\{\text{exercício}\}=0,9896$

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostragem Aleatória Simples	256	2,09	2,17	2,00	2,07	1,81	1,93	2,01	1,81	1,95	2,01
	1024	2,07	2,04	2,12	2,12	1,95	2,07	2,08	1,96	2,04	2,10
	4096	2,13	1,96	1,85	2,11	2,05	2,05	2,09	2,08	1,91	2,16
	16384	2,24	2,06	1,99	2,03	2,21	2,23	1,84	1,88	2,03	1,92
	65536	2,16	2,09	2,24	2,06	1,97	1,94	1,85	1,78	1,90	1,81
Amostragem Descritiva	256	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	1024	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	4096	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16384	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	65536	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Rechtmyer Randomizado	256	1,02	0,88	0,86	0,97	0,91	0,90	1,05	1,02	1,04	1,06
	1024	0,99	1,00	0,84	0,97	0,90	0,91	0,83	0,77	0,86	0,84
	4096	0,56	0,81	0,77	1,11	1,04	0,95	0,81	0,75	0,71	0,75
	16384	0,42	0,42	0,44	1,18	1,09	1,06	0,81	0,65	0,65	0,57
	65536	0,31	0,33	0,35	0,61	0,71	0,76	0,73	0,63	0,52	0,51
Sobol' Randomizado	256	0,69	0,70	0,71	0,77	0,72	0,74	0,80	0,94	0,99	0,92
	1024	0,61	0,51	0,62	0,61	0,64	0,61	0,75	0,78	1,04	0,94
	4096	0,35	0,37	0,37	0,40	0,55	0,49	0,56	0,62	0,69	0,68
	16384	0,22	0,26	0,31	0,30	0,35	0,38	0,36	0,41	0,45	0,49
	65536	0,14	0,16	0,21	0,21	0,27	0,27	0,30	0,34	0,35	0,35
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0,86	0,97	0,78	0,92	0,78	0,91	1,04	0,98	1,05	1,06
	1024	1,21	1,13	1,06	1,01	1,00	0,97	1,01	1,00	1,07	1,01
	4096	1,07	1,29	1,24	1,32	1,42	1,18	1,02	1,24	1,06	1,13
	16384	0,86	0,95	1,10	1,00	1,20	1,26	1,17	0,95	1,14	1,05
	65536	0,67	0,99	0,93	0,80	1,03	1,09	1,20	1,17	1,07	1,03
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0,75	0,80	0,75	0,80	0,68	0,85	0,93	0,93	1,02	0,93
	1024	0,81	0,80	0,68	0,83	0,74	0,76	0,89	0,97	1,00	0,94
	4096	0,75	0,79	0,73	0,83	0,76	0,80	0,85	1,07	0,95	1,01
	16384	0,79	0,81	0,64	0,70	0,77	0,87	0,84	0,87	1,03	1,01
	65536	0,76	0,78	0,83	0,76	0,75	0,71	0,74	0,81	0,96	0,80
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0,61	0,66	0,74	0,75	0,67	0,71	0,76	0,84	0,84	0,94
	1024	0,70	0,66	0,66	0,70	0,73	0,76	0,76	0,73	0,84	0,96
	4096	0,72	0,70	0,66	0,74	0,79	0,76	0,80	0,80	0,77	0,90
	16384	0,65	0,66	0,71	0,68	0,76	0,79	0,70	0,73	0,82	0,85
	65536	0,72	0,74	0,70	0,67	0,70	0,69	0,85	0,73	0,68	0,78
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0,42	0,46	0,61	0,64	0,57	0,61	0,66	0,66	0,74	0,84
	1024	0,36	0,35	0,41	0,43	0,46	0,52	0,51	0,59	0,57	0,64
	4096	0,29	0,30	0,32	0,34	0,38	0,38	0,40	0,51	0,51	0,57
	16384	0,24	0,28	0,26	0,29	0,30	0,33	0,32	0,40	0,42	0,43
	65536	0,22	0,27	0,25	0,24	0,25	0,25	0,31	0,35	0,39	0,39
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0,64	0,67	0,62	0,71	0,64	0,73	0,72	0,91	1,01	0,89
	1024	0,50	0,47	0,45	0,51	0,54	0,62	0,67	0,63	0,95	0,89
	4096	0,28	0,33	0,31	0,36	0,47	0,46	0,55	0,59	0,69	0,64
	16384	0,20	0,23	0,26	0,28	0,33	0,34	0,33	0,36	0,39	0,37
	65536	0,12	0,15	0,19	0,19	0,26	0,29	0,28	0,31	0,35	0,35

Tabela 8.2.5 Ganho do erro padrão para estimativas do prêmio de opção européia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=55$, prêmio=5,18 e $pr\{exercício\}=0,5199$

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostragem Aleatória Simples	256	1,31	1,19	1,22	1,19	1,17	1,27	1,15	1,11	1,15	1,20
	1024	1,13	1,24	1,23	1,36	1,06	1,33	1,08	1,14	1,14	1,11
	4096	1,21	1,17	1,02	1,05	1,22	1,32	1,24	1,26	1,11	1,24
	16384	1,19	1,19	1,10	1,05	1,21	1,20	1,07	1,15	1,07	1,11
	65536	1,15	1,07	1,14	1,13	1,06	1,07	1,13	1,04	1,19	1,09
Amostragem Descritiva	256	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	1024	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	4096	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	16384	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	65536	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Rechtmyer Randomizado	256	0,97	0,94	1,00	0,92	0,89	0,92	1,05	1,04	0,88	1,14
	1024	0,91	1,08	0,95	1,14	0,93	0,96	0,92	0,88	0,82	0,92
	4096	0,65	0,87	0,82	0,99	1,10	0,98	0,98	0,92	0,87	0,84
	16384	0,51	0,51	0,53	1,27	1,34	1,15	1,02	0,89	0,83	0,81
	65536	0,46	0,40	0,48	0,73	0,85	0,76	0,92	0,85	0,75	0,79
Sobol' Randomizado	256	0,84	0,81	0,80	0,88	0,79	0,92	0,85	0,97	0,96	1,10
	1024	0,71	0,79	0,80	0,84	0,79	0,91	0,83	0,91	0,97	0,88
	4096	0,45	0,54	0,54	0,54	0,64	0,69	0,80	0,81	0,85	0,87
	16384	0,33	0,44	0,50	0,47	0,52	0,50	0,60	0,69	0,79	0,71
	65536	0,24	0,26	0,34	0,36	0,41	0,40	0,54	0,50	0,56	0,59
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0,88	0,96	0,97	0,93	0,92	0,94	1,03	0,92	0,98	1,00
	1024	1,05	1,16	0,99	1,13	1,01	1,15	1,05	1,04	1,05	1,08
	4096	1,15	1,12	1,10	1,04	1,24	1,16	1,00	1,18	1,11	1,18
	16384	0,88	0,95	1,17	1,03	1,13	1,06	1,20	1,00	1,10	1,09
	65536	0,75	0,86	0,91	0,93	0,93	1,05	1,12	1,20	1,06	0,97
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0,86	0,92	0,93	0,94	0,83	1,09	1,04	0,94	0,95	1,08
	1024	0,96	0,95	0,88	1,00	0,81	1,01	0,95	1,02	0,94	1,05
	4096	0,84	0,82	0,75	0,91	0,83	0,85	0,93	1,05	0,95	1,06
	16384	0,89	0,86	0,81	0,77	0,89	0,86	0,96	0,95	0,93	1,01
	65536	0,85	0,81	0,87	0,83	0,80	0,73	0,97	0,94	0,92	0,87
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0,90	0,92	0,88	0,90	0,81	0,92	0,76	0,90	0,78	1,08
	1024	0,85	0,85	0,93	1,08	0,91	1,02	0,91	0,87	0,92	0,89
	4096	0,94	0,90	0,84	0,85	0,84	0,85	0,88	0,95	0,91	0,89
	16384	0,84	0,85	0,87	0,88	0,93	0,91	0,81	0,78	0,94	0,88
	65536	1,05	0,91	0,88	0,93	0,84	0,81	1,02	0,87	0,89	0,74
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0,57	0,62	0,81	0,82	0,73	0,79	0,76	0,85	0,78	1,04
	1024	0,60	0,62	0,61	0,69	0,68	0,81	0,79	0,71	0,79	0,73
	4096	0,45	0,45	0,44	0,46	0,58	0,61	0,69	0,71	0,77	0,76
	16384	0,37	0,40	0,41	0,40	0,47	0,46	0,49	0,56	0,60	0,66
	65536	0,38	0,37	0,37	0,40	0,38	0,39	0,52	0,47	0,60	0,53
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0,78	0,82	0,78	0,87	0,74	0,90	0,87	0,95	1,00	1,01
	1024	0,68	0,63	0,73	0,83	0,73	0,87	0,82	0,87	0,91	0,95
	4096	0,42	0,47	0,54	0,55	0,69	0,73	0,77	0,79	0,87	0,87
	16384	0,31	0,36	0,45	0,48	0,53	0,53	0,56	0,60	0,71	0,72
	65536	0,24	0,26	0,31	0,40	0,39	0,40	0,56	0,53	0,61	0,57

Tabela 8.2.6 Ganho do erro padrão para estimativas do prêmio de opção européia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=75$, prêmio=0,46 e $pr\{\text{exercício}\}=0,0667$

As análises realizadas com uso dos gráficos de erros padrões em função da dimensionalidade foram restritas a tamanhos de amostras $N = 1024$ e $N = 4096$. Embora esses valores sejam comumente utilizados em simulação, também é necessário entender como o aumento do tamanho da amostra afeta as diversas técnicas amostrais, pois dependendo da precisão requerida, a escolha da técnica ideal pode ser modificada. Com base nos vários gráficos acima, pode ser concluído que o aumento do tamanho da amostra de 1024 para 4096 afeta as técnicas de forma diferente. Naturalmente, em todas elas é registrada redução do erro padrão das estimativas, contudo, as técnicas Quasi-Monte Carlo e a combinação de Amostragem Descritiva com Sobol' parecem melhorar comparadas às demais. Como mencionado acima, esse resultado é previsto na literatura e é explicado pela ordem de convergência.

Esse fenômeno pode ser facilmente observado nas tabelas 8.2.4 a 8.2.6, onde os ganhos ao longo das colunas permanecem relativamente estáveis para as técnicas puramente aleatórias, mas apresentam acentuada redução para as técnicas que envolvem Quasi-Monte Carlo. A exceção é a combinação de Amostragem Descritiva com Richtmyer, que comprovou ser ineficaz. A convergência também pode ser observada nos gráficos 8.2.22 a 8.2.24, que apresentam o caso da opção com preço de exercício $K = 35$ modelada com 15 dimensões. Nestes gráficos, as abscissas são os logaritmos dos tamanho de amostras (N) e as ordenadas são os logaritmos dos respectivos erros padrões. A inclinação da reta representa o exponencial da ordem de convergência da técnica amostral, tal como definida na equação 1.1, ou seja,

$$EP = CN^m, \quad 8.2.1$$

onde $-m$ pode ser chamado de taxa de convergência.

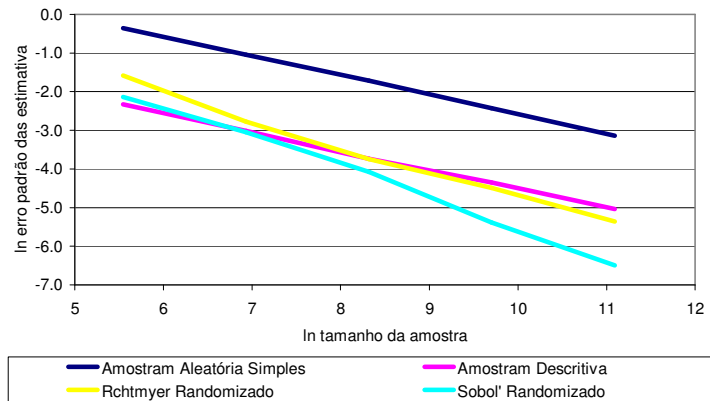


Gráfico 8.2.22 Log do Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função do Log do Tamanho: Técnicas Tradicionais, $d = 15$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

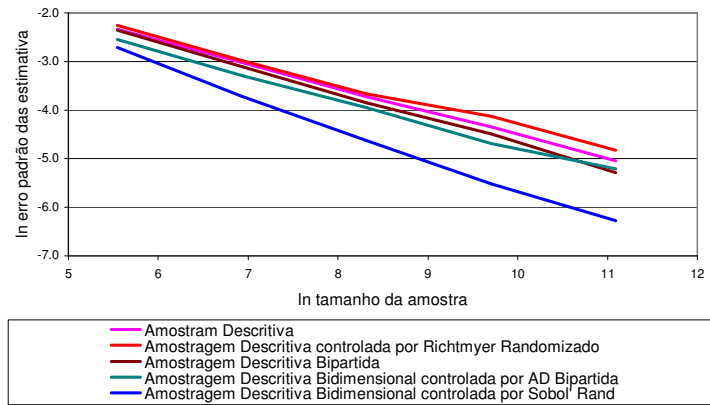


Gráfico 8.2.23 Log do Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função do Log do Tamanho: Propostas de Controle da Amostragem Descritiva, $d = 15$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

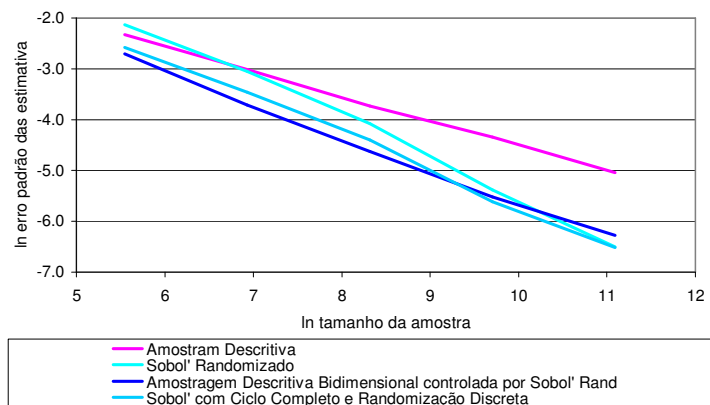


Gráfico 8.2.24 Log do Erro Padrão da Estimativa do Prêmio em função do Log do Tamanho: Técnicas Ótimas, $d = 15$, $K = 35$, prêmio = 21,06 e $pr\{\text{exercício}\} = 0,9896$

No primeiro gráfico (8.2.22), pode ser visto que as retas da Amostragem Aleatória Simples e da Amostragem Descritiva são aproximadamente paralelas, indicando que possuem ordens de convergências próximas e, como esperado, Sobol' apresentou a convergência mais acentuada. Na segunda figura, fica claro que as técnicas de controle que não utilizam Quasi-Monte Carlo também têm ordem de convergência semelhante a da Amostragem Descritiva tradicional, mas a AD Bidimensional controlada por Sobol' converge a uma taxa maior. Por fim, no último gráfico (8.2.24), é possível ver que o Sobol' tradicional apresenta convergência superior às das duas técnicas propostas. Porém, em sua forma tradicional, apresenta erros padrões mais elevados, quando os tamanhos de amostras são pequenos, só conseguindo alcançar as duas técnicas propostas quando os tamanhos de amostras são muito grandes.

A equação 8.2.1 pode ser reescrita como

$$\ln(EP) = m\ln(N) + \alpha\ln(C), \quad 8.2.2$$

ou

$$\ln(EP) = m\ln(N) + b. \quad 8.2.3$$

Usando a equação 8.2.3 e os erros padrões estimados experimentalmente, é possível estimar os coeficientes m e b para diferentes dimensionalidades e probabilidades de exercícios. Nas tabelas 8.2.7 a 8.2.9 são apresentadas estimativas para os coeficientes m e b para diferentes modelos com diferentes dimensionalidades das opções com preços de exercícios $K = 35, 55$ e 75 . Para cada preço de exercício e técnica amostral considerada, também foi registrada a média das estimativas de m e b , a fim de facilitar a comparação entre técnicas e entre probabilidades de exercícios.

Como prevê a teoria, a Amostragem Aleatória Simples apresentou convergência de $\frac{1}{2}$, assim como as demais técnicas de amostragem que não envolvem o uso de Quasi-Monte Carlo – isto é, a Amostragem Descritiva, a AD Bipartida e a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida. Esse valor é bastante insensível tanto a variações na dimensionalidade como na probabilidade de exercício, embora a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida apresente uma ligeira elevação na taxa de convergência para dimensionalidades mais elevadas. Por outro lado, a observação dos valores médios de m obtidos para as técnicas que envolvem Quasi-Monte Carlo, demonstra que as taxas convergências destas técnicas reduzem conforme a probabilidade de exercício diminui - a exceção da combinação da Amostragem Descritiva com Richtmyer que, como já fora visto, não apresenta resultados satisfatórios. Com relação à variação da dimensionalidade, as tabelas demonstram que a taxa de convergência de Sobol' e de Sobol' emulando a Amostragem Descritiva também diminuem, mas que quando combinado com a AD Bidimensional essa redução não é percebida – ao menos dentro do limite de 30 dimensões avaliado.

Segundo Takhtamyshev, Vandewoestyne e Cools (2007) a taxa de convergência ($-m$) é “o parâmetro de maior interesse dos matemáticos”, mas os usuários também devem se interessar pelo parâmetro b , pois este tem grande importância para amostras pequenas e médias. Dentre as técnicas tradicionais, a Amostragem Descritiva é a que obtêm os menores valores médios para este parâmetro nas três probabilidades de exercícios contempladas. Na comparação das médias obtidas por Sobol' tradicional com as médias obtidas pela versão de Sobol' que emula a Amostragem Descritiva, pode ser visto que o segundo obteve médias menores para as três probabilidades de exercícios. Essas observações evidenciam o

poder da Amostragem Descritiva. Uma possível explicação para esse desempenho comparativamente melhor da Amostragem Descritiva, em tamanhos de amostras pequenas, é a diferença na discrepância, que tende a ser maior nas amostras menores.

Para o caso da AD Bipartida e da AD Bidimensional controlada pela AD Bipartida, os valores apresentados para a média de b foram, em geral, menores que os da Amostragem Descritiva tradicional - apesar de o aumento da dimensionalidade e redução da probabilidade de exercício reverter essa tendência. Como essas duas propostas convergem à mesma taxa da Amostragem Descritiva, a explicação para seu melhor desempenho geral pode ser associado ao menor valor de b , o que é coerente com o observado no gráfico 8.2.23.

Contudo, a técnica de amostragem que obteve os melhores resultados gerais – a AD Bidimensional controlada por Sobol’ – não foi a que obteve os menores valores de b . De fato, seus valores para b ficaram entre os da Amostragem Descritiva e os das variações de Sobol’, o mesmo tendo ocorrido para os valores de m . Dessa forma, o desempenho superior da AD Bidimensional controlada por Sobol’ pode ser associado a uma combinação dos dois parâmetros, isto é, além de convergir rapidamente, os seus erros padrões partem de um patamar relativamente baixo já com amostras pequenas.

Por fim, é possível caracterizar o fenômeno da “maldição da dimensionalidade” – que afeta as técnicas de controle multivariado - com base nos coeficientes “ m ” e “ b ”. Para as técnicas de controle multivariado em que a convergência aparenta ser aproximadamente estável às variações de dimensionalidade – isto é, a AD Bipartida, a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida e a AD Bidimensional controlada por Sobol’ – o coeficiente “ b ”

apresenta aumento nítido com o aumento da dimensionalidade. Em particular, nos casos da AD Bipartida e da AD Bidimensional controlada pela AD Bipartida, pode ser observada uma relativa estabilidade de “b” para os casos em que todas as dimensões são controladas (região cinza), e uma forte elevação para os demais. Já para as duas implementações de Sobol’ – a tradicional e a proposta – a “maldição da dimensionalidade pode ser caracterizada pela menor convergência.

		Dimensionalidade do Modelo										
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	Média
Amostram Aleatória Simples	m =	-0.49	-0.50	-0.50	-0.49	-0.49	-0.50	-0.50	-0.49	-0.49	-0.51	-0.50
	b =	2.34	2.42	2.39	2.35	2.29	2.40	2.42	2.34	2.37	2.53	2.39
Amostram Descritiva	m =	-0.50	-0.49	-0.49	-0.49	-0.51	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49	-0.49
	b =	0.40	0.42	0.41	0.39	0.54	0.39	0.36	0.41	0.42	0.36	0.41
Rchtmyer Randomizado	m =	-0.76	-0.76	-0.75	-0.65	-0.61	-0.62	-0.67	-0.71	-0.73	-0.74	-0.70
	b =	2.45	2.43	2.28	1.80	1.53	1.52	1.97	2.27	2.46	2.49	2.12
Sobol' Randomizado	m =	-0.85	-0.82	-0.85	-0.82	-0.79	-0.80	-0.80	-0.78	-0.79	-0.76	-0.81
	b =	2.69	2.53	2.69	2.49	2.33	2.40	2.41	2.34	2.57	2.26	2.47
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	m =	-0.56	-0.51	-0.48	-0.51	-0.46	-0.45	-0.45	-0.47	-0.49	-0.48	-0.49
	b =	0.85	0.57	0.32	0.52	0.22	0.19	0.21	0.33	0.49	0.39	0.41
Amostragem Descritiva Bipartida	m =	-0.50	-0.50	-0.50	-0.51	-0.49	-0.53	-0.52	-0.53	-0.50	-0.50	-0.51
	b =	0.18	0.25	0.10	0.28	0.10	0.48	0.54	0.64	0.50	0.47	0.35
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	m =	-0.48	-0.49	-0.50	-0.50	-0.50	-0.50	-0.49	-0.52	-0.52	-0.53	-0.50
	b =	-0.05	0.05	0.12	0.11	0.22	0.21	0.10	0.41	0.41	0.64	0.22
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	m =	-0.63	-0.61	-0.67	-0.66	-0.66	-0.66	-0.65	-0.64	-0.63	-0.65	-0.65
	b =	0.53	0.41	0.94	0.92	0.93	0.92	0.80	0.92	0.84	1.09	0.83
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	m =	-0.80	-0.77	-0.77	-0.76	-0.71	-0.74	-0.72	-0.75	-0.76	-0.74	-0.75
	b =	1.76	1.61	1.50	1.58	1.29	1.56	1.51	1.86	2.09	1.89	1.67

Tabela 8.2.7 Coeficientes da reta de convergência ($\ln(EP) = m\ln(N) + b$) do erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem e dimensionalidades. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida.

$K=35$, prêmio=21.057 e $\text{pr}\{\text{exercício}\}=0.9896$.

		Dimensionalidade do Modelo										
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	Média
Amostram Aleatória Simples	m =	-0.49	-0.51	-0.50	-0.50	-0.49	-0.49	-0.51	-0.50	-0.50	-0.51	-0.50
	b =	1.97	2.12	2.06	2.05	1.98	2.03	2.15	2.05	2.07	2.18	2.06
Amostram Descritiva	m =	-0.50	-0.50	-0.51	-0.49	-0.51	-0.50	-0.49	-0.49	-0.50	-0.49	-0.50
	b =	1.29	1.35	1.45	1.29	1.46	1.37	1.30	1.36	1.36	1.30	1.35
Rchtmyer Randomizado	m =	-0.73	-0.71	-0.69	-0.55	-0.53	-0.51	-0.55	-0.58	-0.62	-0.62	-0.61
	b =	2.72	2.59	2.42	1.68	1.56	1.39	1.58	1.76	2.05	2.09	1.98
Sobol' Randomizado	m =	-0.80	-0.76	-0.74	-0.73	-0.69	-0.68	-0.68	-0.69	-0.71	-0.68	-0.72
	b =	2.75	2.47	2.43	2.36	2.25	2.10	2.24	2.41	2.67	2.41	2.41
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	m =	-0.56	-0.51	-0.48	-0.51	-0.46	-0.45	-0.46	-0.47	-0.49	-0.49	-0.49
	b =	1.72	1.49	1.23	1.46	1.08	1.06	1.13	1.23	1.37	1.37	1.31
Amostragem Descritiva Bipartida	m =	-0.50	-0.50	-0.50	-0.51	-0.49	-0.52	-0.53	-0.52	-0.50	-0.51	-0.51
	b =	1.04	1.14	1.03	1.20	1.01	1.28	1.44	1.52	1.41	1.38	1.25
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	m =	-0.48	-0.49	-0.51	-0.51	-0.50	-0.50	-0.48	-0.51	-0.53	-0.53	-0.50
	b =	0.76	0.83	1.10	1.11	1.07	1.07	0.96	1.25	1.39	1.48	1.10
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	m =	-0.62	-0.59	-0.67	-0.66	-0.66	-0.66	-0.63	-0.61	-0.61	-0.63	-0.63
	b =	1.06	0.99	1.70	1.69	1.76	1.78	1.61	1.64	1.63	1.85	1.57
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	m =	-0.80	-0.77	-0.72	-0.72	-0.67	-0.68	-0.68	-0.69	-0.71	-0.69	-0.71
	b =	2.58	2.48	2.08	2.23	1.97	2.06	2.13	2.33	2.68	2.40	2.30

Tabela 8.2.8 Coeficientes da reta de convergência ($\ln(EP) = m\ln(N) + b$) do erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem e dimensionalidades. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida.

$K=55$, prêmio=5.18 e $\text{pr}\{\text{exercício}\}=0.5199$.

		Dimensionalidade do Modelo										
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	Média
Amostram Aleatória Simples	m =	-0.51	-0.50	-0.51	-0.51	-0.50	-0.50	-0.51	-0.50	-0.52	-0.49	-0.51
	b =	1.00	0.88	0.93	0.95	0.91	0.95	0.95	0.92	1.03	0.81	0.93
Amostram Descritiva	m =	-0.50	-0.48	-0.49	-0.48	-0.50	-0.47	-0.51	-0.50	-0.52	-0.48	-0.49
	b =	0.69	0.57	0.65	0.58	0.73	0.47	0.80	0.72	0.91	0.57	0.67
Rchtmyer Randomizado	m =	-0.65	-0.66	-0.63	-0.51	-0.48	-0.49	-0.52	-0.53	-0.54	-0.54	-0.55
	b =	1.54	1.70	1.55	0.80	0.57	0.54	0.87	0.87	0.90	0.98	1.03
Sobol' Randomizado	m =	-0.73	-0.68	-0.65	-0.66	-0.62	-0.63	-0.60	-0.61	-0.61	-0.58	-0.64
	b =	1.88	1.63	1.40	1.47	1.29	1.40	1.20	1.39	1.45	1.22	1.43
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	m =	-0.53	-0.51	-0.48	-0.49	-0.49	-0.46	-0.49	-0.46	-0.50	-0.48	-0.49
	b =	0.91	0.82	0.64	0.65	0.69	0.44	0.71	0.49	0.84	0.65	0.68
Amostragem Descritiva Bipartida	m =	-0.50	-0.51	-0.50	-0.52	-0.50	-0.54	-0.52	-0.50	-0.52	-0.51	-0.51
	b =	0.63	0.64	0.61	0.77	0.55	0.94	0.86	0.74	0.89	0.85	0.75
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	m =	-0.48	-0.48	-0.49	-0.49	-0.49	-0.50	-0.47	-0.51	-0.50	-0.53	-0.49
	b =	0.42	0.46	0.56	0.59	0.54	0.59	0.38	0.68	0.62	0.91	0.58
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	m =	-0.59	-0.59	-0.63	-0.63	-0.62	-0.61	-0.60	-0.60	-0.57	-0.58	-0.60
	b =	0.70	0.71	1.14	1.15	1.12	1.12	1.10	1.14	1.02	1.11	1.03
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	m =	-0.73	-0.69	-0.66	-0.63	-0.62	-0.62	-0.60	-0.61	-0.61	-0.58	-0.63
	b =	1.77	1.55	1.43	1.32	1.19	1.30	1.20	1.34	1.43	1.21	1.37

Tabela 8.2.9 Coeficientes da reta de convergência ($\ln(EP) = m\ln(N) + b$) do erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem e dimensionalidades. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida.

$K=75$, prêmio=0.46 e $\text{pr}\{\text{exercício}\}=0.0667$.

De forma geral, as estimativas das probabilidades de exercício repetiram os resultados obtidos para as estimativas de prêmios, com poucas diferenças. Uma diferença da estimativa da probabilidade de exercício em relação à estimativa de prêmio é que os ganhos das técnicas de redução de variância em relação à Amostragem Aleatória Simples são maiores para probabilidades próximas a 50% e menores para probabilidades muito baixas ou muito altas (ver tabela 8.2.13 e gráfico 8.2.25). Além disso, de uma forma geral, os ganhos obtidos pelas diferentes técnicas de redução de variância em relação à Amostragem Aleatória Simples e de uma técnica em relação às demais foram menos acentuados do que os observados nas estimativas de prêmio. Por exemplo, na tabela 8.2.4, a Amostragem Aleatória Simples aparece com erros padrões da ordem de 7 vezes maiores que os obtidos pela Amostragem Descritiva. Por sua vez, os ganhos obtidos por Sobol' em relação à Amostragem Descritiva, chegam ser menor que 0,20, para amostras de tamanho 65.536. Como pode ser observado nas tabelas 8.2.10 a 8.2.12, os ganhos obtidos nas estimativas das probabilidades de exercícios são mais modestos e a distância entre as melhores técnicas e a Amostragem Aleatória Simples não é tão acentuada.

Essa menor diferença entre as técnicas também pode ser comprovada comparando a tabela 8.2.13 e gráfico 8.2.25 (relativos às estimativas de probabilidades de exercícios) com as tabelas 8.2.1, 8.2.2 e 8.2.3, e os gráficos 8.2.13, 8.2.14 e 8.2.21. Comparando os ganhos médios para cada modelo (K: preço de exercício) fica claro que os ganhos de redução de variância obtidos com o uso de técnicas amostrais diferentes, são mais modestos para problemas de estimação da probabilidade de exercício que os obtidos em problemas de apreçamento. Ainda assim, é possível afirmar que, exceto para os casos extremos de probabilidade de exercício (muito elevada ou baixa), há diferença entre as diversas técnicas.

		Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.99	1.02	1.12	1.05	0.99	1.03	1.12	1.11	1.08	1.00
	1024	0.97	0.88	1.03	1.04	1.04	0.92	0.99	1.02	1.13	1.13
	4096	0.95	1.18	1.06	1.11	1.16	1.12	1.05	1.20	1.03	1.21
	16384	1.10	1.14	0.98	1.01	0.98	1.12	0.92	1.01	1.00	1.22
	65536	1.00	1.04	1.03	1.13	1.08	1.08	1.04	0.99	0.91	1.02
Amostram Descritiva	256	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1024	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4096	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16384	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	65536	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Richtmyer Randomizado	256	0.92	0.94	1.03	0.89	1.04	0.96	0.99	1.16	1.11	0.98
	1024	0.84	0.89	0.97	0.93	1.00	0.92	0.94	1.03	1.03	0.95
	4096	0.75	1.01	0.89	1.04	1.11	1.20	0.92	0.94	0.90	0.95
	16384	0.56	0.78	0.71	1.27	1.25	1.22	1.07	0.90	0.87	1.03
	65536	0.53	0.59	0.60	0.75	1.01	1.04	0.82	0.88	0.77	0.93
Sobol' Randomizado	256	0.85	0.88	0.98	0.92	0.83	0.92	0.94	1.19	1.06	1.03
	1024	0.79	0.70	0.91	0.93	0.90	0.82	0.93	1.01	1.04	1.07
	4096	0.78	0.74	0.79	0.82	0.88	0.88	0.84	0.92	0.88	0.96
	16384	0.65	0.71	0.67	0.73	0.70	0.89	0.83	0.77	0.79	0.96
	65536	0.56	0.67	0.62	0.69	0.69	0.71	0.69	0.74	0.69	0.77
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.90	0.98	1.04	1.04	0.93	1.06	1.04	1.14	0.98	0.96
	1024	1.04	0.89	1.04	1.00	0.97	0.95	0.97	1.15	1.04	1.02
	4096	1.03	1.06	1.10	1.04	1.01	1.06	0.95	0.99	0.93	1.11
	16384	0.97	1.11	1.01	1.02	1.03	1.17	1.05	0.89	1.04	1.18
	65536	0.87	0.90	0.90	1.01	0.96	1.03	0.97	1.03	1.00	1.14
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.82	0.88	0.98	0.96	0.95	1.01	0.98	1.15	0.99	0.97
	1024	0.93	0.85	0.91	0.86	0.94	0.85	0.96	0.98	1.08	1.00
	4096	0.97	0.98	0.97	0.95	0.88	1.07	0.96	0.96	1.02	1.07
	16384	0.91	0.93	0.89	0.93	0.84	1.00	0.87	0.93	1.00	1.09
	65536	0.90	0.92	0.87	1.06	0.91	0.89	0.87	0.86	0.85	0.93
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.97	0.96	1.00	1.00	0.97	0.99	0.96	1.06	1.07	0.90
	1024	0.89	0.85	0.97	0.96	1.03	0.95	0.95	1.07	1.02	0.96
	4096	0.88	0.89	0.93	0.88	0.83	0.93	0.88	0.90	0.94	1.05
	16384	0.95	1.00	0.89	0.90	0.90	0.99	0.90	0.87	0.91	1.13
	65536	0.92	0.91	0.88	0.98	0.99	1.01	0.89	0.81	0.76	0.93
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.83	0.81	0.94	0.91	0.85	0.88	0.93	1.11	0.98	0.92
	1024	0.74	0.69	0.73	0.80	0.85	0.83	0.79	0.95	0.96	0.98
	4096	0.69	0.71	0.77	0.81	0.81	0.87	0.79	0.77	0.83	0.99
	16384	0.54	0.64	0.62	0.64	0.69	0.74	0.81	0.71	0.79	0.94
	65536	0.56	0.61	0.58	0.65	0.68	0.66	0.62	0.71	0.67	0.84
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.86	0.89	0.97	0.94	0.83	0.92	0.97	1.20	1.06	1.01
	1024	0.79	0.80	0.79	0.91	0.94	0.80	0.87	1.06	1.01	1.01
	4096	0.72	0.74	0.77	0.81	0.83	0.89	0.88	0.98	0.92	1.00
	16384	0.63	0.73	0.71	0.70	0.66	0.79	0.76	0.76	0.88	0.99
	65536	0.55	0.62	0.56	0.68	0.76	0.73	0.71	0.69	0.75	0.90

Tabela 8.2.10 Ganho do erro padrão para estimativas da probabilidade de exercício de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=35$, prêmio=21,057 e $pr\{\text{exercício}\}=0,9896$

		Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	1.60	1.61	1.44	1.56	1.74	1.94	1.64	1.43	1.78	1.67
	1024	1.43	1.61	1.82	1.70	1.46	1.84	1.81	1.67	1.68	1.82
	4096	1.82	1.58	1.55	1.91	1.49	1.60	1.80	1.71	1.73	1.81
	16384	1.84	1.93	1.74	1.71	1.73	1.85	1.67	1.75	1.81	1.76
	65536	1.65	1.82	1.83	1.63	1.77	1.61	1.58	1.59	1.76	1.64
Amostram Descritiva	256	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1024	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4096	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16384	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	65536	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Richtmyer Randomizado	256	0.80	0.93	0.76	0.85	0.99	1.08	0.98	0.93	1.15	0.93
	1024	0.62	0.74	0.80	0.95	0.91	0.93	0.98	0.97	1.04	1.06
	4096	0.46	0.69	0.68	1.36	1.14	0.98	1.07	1.12	0.94	1.04
	16384	0.38	0.63	0.59	1.45	1.34	1.37	1.07	1.01	0.98	1.03
	65536	0.31	0.46	0.52	0.71	1.08	0.94	0.86	0.91	0.96	1.05
Sobol' Randomizado	256	0.76	0.92	0.81	0.87	1.00	1.07	1.01	0.99	1.03	0.92
	1024	0.64	0.74	0.81	1.02	0.83	1.00	1.00	0.99	1.05	0.99
	4096	0.68	0.73	0.78	1.00	0.86	0.85	1.00	1.04	0.97	0.93
	16384	0.65	0.68	0.88	0.80	0.79	0.83	0.85	1.08	1.04	0.88
	65536	0.49	0.66	0.84	0.70	0.83	0.80	0.79	0.91	0.93	0.89
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.91	0.95	1.01	0.97	0.94	1.10	1.01	0.99	1.03	1.01
	1024	0.94	0.91	1.00	0.95	0.96	1.01	0.97	0.98	1.03	1.10
	4096	1.12	0.96	1.00	1.15	0.98	1.02	0.95	1.06	0.97	0.98
	16384	0.90	1.14	1.15	0.88	1.01	1.10	0.96	0.98	1.00	0.96
	65536	0.92	1.06	1.08	0.97	0.99	0.94	0.94	1.06	1.05	0.96
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.86	0.97	0.90	0.98	1.04	0.97	0.94	1.04	1.14	0.98
	1024	0.93	0.91	0.96	0.96	0.92	0.98	0.92	0.98	1.02	1.18
	4096	0.97	0.91	0.86	1.06	0.88	0.92	0.97	0.99	1.05	1.02
	16384	1.05	0.97	1.01	0.92	0.92	1.03	0.88	1.01	1.13	0.96
	65536	0.89	1.01	0.99	0.94	0.89	0.90	0.88	0.98	0.95	0.97
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.94	0.97	0.90	0.90	0.94	0.95	0.98	0.87	1.11	0.98
	1024	0.82	0.84	0.88	0.88	0.85	0.98	0.92	0.85	0.94	1.02
	4096	0.95	0.84	0.88	1.07	0.83	0.86	0.95	1.05	1.07	0.88
	16384	1.00	1.04	1.06	0.92	1.00	1.08	0.97	0.97	0.93	0.91
	65536	0.90	1.02	0.99	0.92	1.00	0.98	0.96	0.89	0.88	0.96
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.62	0.62	0.72	0.76	0.98	0.96	0.86	0.95	1.08	0.98
	1024	0.62	0.57	0.77	0.71	0.74	0.88	0.97	0.96	0.94	1.06
	4096	0.57	0.54	0.76	0.96	0.67	0.69	0.91	1.07	0.85	0.95
	16384	0.62	0.59	0.66	0.62	0.68	0.69	0.74	0.90	0.97	0.88
	65536	0.54	0.65	0.69	0.66	0.64	0.62	0.72	0.95	0.89	0.90
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.71	0.92	0.85	0.87	1.01	1.11	0.99	0.91	1.15	0.94
	1024	0.66	1.00	0.94	0.93	0.94	1.13	0.98	0.92	1.04	1.02
	4096	0.56	0.66	0.80	1.03	0.81	0.87	0.89	0.98	1.05	0.95
	16384	0.65	0.68	0.87	0.80	0.80	0.92	0.81	0.93	0.93	0.97
	65536	0.47	0.65	0.71	0.73	0.74	0.78	0.74	0.77	0.90	0.90

Tabela 8.2.11 Ganho do erro padrão para estimativas da probabilidade de exercício de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=55$, prêmio=5,18 e $pr\{\text{exercício}\}=0,5199$

		Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	1.40	1.20	1.22	1.29	1.18	1.21	1.30	1.16	1.18	1.24
	1024	1.26	1.34	1.36	1.37	1.06	1.29	1.18	1.25	1.27	1.26
	4096	1.25	1.23	1.22	1.26	1.21	1.24	1.21	1.25	1.31	1.12
	16384	1.31	1.21	1.32	1.16	1.23	1.42	1.32	1.13	1.13	1.21
	65536	1.27	1.23	1.36	1.40	1.06	1.09	1.19	1.08	1.15	0.96
Amostram Descritiva	256	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	1024	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	4096	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	16384	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	65536	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Richtmyer Randomizado	256	1.13	0.93	0.90	0.91	0.87	0.90	1.09	1.04	0.92	1.04
	1024	0.91	1.03	0.85	0.96	0.90	0.95	0.88	0.83	0.98	0.94
	4096	0.56	0.98	0.86	1.06	1.14	0.95	0.89	0.97	0.94	0.75
	16384	0.42	0.62	0.60	1.23	1.24	1.15	1.11	0.81	0.81	0.80
	65536	0.40	0.50	0.58	0.78	0.89	0.86	0.93	0.81	0.75	0.75
Sobol' Randomizado	256	0.84	0.89	0.92	0.96	0.91	0.92	1.00	0.95	0.97	0.98
	1024	0.83	0.80	0.77	0.87	0.81	0.91	0.93	0.93	1.02	0.97
	4096	0.63	0.70	0.75	0.70	0.81	0.86	0.79	0.91	1.05	0.78
	16384	0.59	0.61	0.82	0.67	0.70	0.81	0.78	0.75	0.79	0.85
	65536	0.51	0.60	0.73	0.66	0.62	0.65	0.74	0.70	0.69	0.69
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	1.01	1.00	0.88	0.92	0.88	1.02	1.10	1.03	1.01	1.03
	1024	1.15	1.13	1.09	1.07	0.89	1.17	0.99	0.97	0.99	0.93
	4096	0.97	1.11	1.13	1.08	1.23	1.19	0.97	1.30	1.11	1.06
	16384	0.87	1.03	1.18	0.97	1.05	1.19	1.27	0.99	1.02	1.13
	65536	0.83	0.99	1.04	1.03	0.91	1.01	1.07	1.02	1.04	1.02
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.91	0.95	0.90	0.92	0.80	0.94	1.04	0.94	0.93	1.03
	1024	0.99	1.01	0.87	1.07	0.84	0.89	0.95	0.93	1.01	1.00
	4096	0.87	0.96	0.90	0.98	0.83	0.91	0.91	1.15	1.11	0.90
	16384	0.81	0.83	0.90	0.85	0.92	0.89	1.08	0.91	0.97	1.00
	65536	0.84	0.94	1.05	0.98	0.86	0.76	0.90	0.93	0.83	0.96
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.86	0.87	0.87	0.87	0.78	0.85	0.83	0.89	0.86	1.13
	1024	0.89	0.86	0.91	0.98	0.88	0.98	0.89	0.84	0.91	1.00
	4096	0.84	0.90	0.89	0.89	0.88	0.83	0.90	1.09	0.93	0.88
	16384	0.77	0.81	0.99	0.85	0.98	1.04	0.97	0.81	1.00	1.05
	65536	0.96	0.95	0.98	0.94	0.80	0.81	1.02	0.87	0.81	0.77
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.77	0.69	0.76	0.76	0.79	0.83	1.02	0.84	0.92	1.05
	1024	0.66	0.65	0.70	0.70	0.74	0.78	0.79	0.74	0.84	0.81
	4096	0.56	0.58	0.68	0.70	0.68	0.72	0.78	0.88	0.92	0.82
	16384	0.50	0.52	0.61	0.59	0.67	0.73	0.82	0.71	0.76	0.72
	65536	0.55	0.55	0.58	0.57	0.56	0.54	0.71	0.67	0.69	0.74
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.80	0.89	0.89	0.93	0.85	0.87	1.03	0.98	0.98	1.03
	1024	0.82	0.89	0.77	0.80	0.74	0.96	0.87	0.86	1.06	0.94
	4096	0.63	0.64	0.72	0.69	0.82	0.72	0.83	0.97	0.94	0.86
	16384	0.56	0.59	0.81	0.72	0.72	0.79	0.77	0.74	0.75	0.74
	65536	0.49	0.59	0.68	0.65	0.59	0.64	0.70	0.73	0.69	0.75

Tabela 8.2.12 Ganho do erro padrão para estimativas da probabilidade de exercício de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem em relação à Amostragem Descritiva. As áreas cinza indicam casos em que todas as dimensões foram controladas pela AD Bipartida. $K=75$, prêmio=0,46 e $pr\{\text{exercício}\}=0,0667$

K	Pr{exercício}	Ganho Médio							
		Amostragem Aleatória Simples	Amostragem Descritiva Bipartida	Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	Sobol' Randomizado	Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	Richtmyer Randomizado	Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado
35	99.0%	1.05	0.92	0.94	0.78	0.77	0.73	0.91	1.00
45	85.4%	1.34	0.90	0.86	0.73	0.73	0.63	0.85	1.02
50	70.1%	1.57	0.95	0.93	0.77	0.78	0.66	0.86	1.01
55	52.0%	1.68	0.94	0.94	0.79	0.80	0.68	0.84	1.00
65	21.6%	1.47	0.91	0.91	0.74	0.76	0.64	0.85	1.02
75	6.7%	1.26	0.91	0.90	0.75	0.73	0.65	0.87	1.04
85	1.7%	1.08	0.92	0.96	0.75	0.75	0.71	0.90	1.00
95	0.4%	1.06	0.97	1.01	0.86	0.85	0.80	0.95	1.04
105	0.1%	1.02	0.98	1.01	0.95	0.93	0.91	0.98	1.00

Tabela 8.2.13 Ganhos Médios de diversas técnicas amostrais, calculados para os tamanhos de amostras e dimensionalidades que resultam em todas as dimensões poderem ser controladas pela AD Bipartida (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

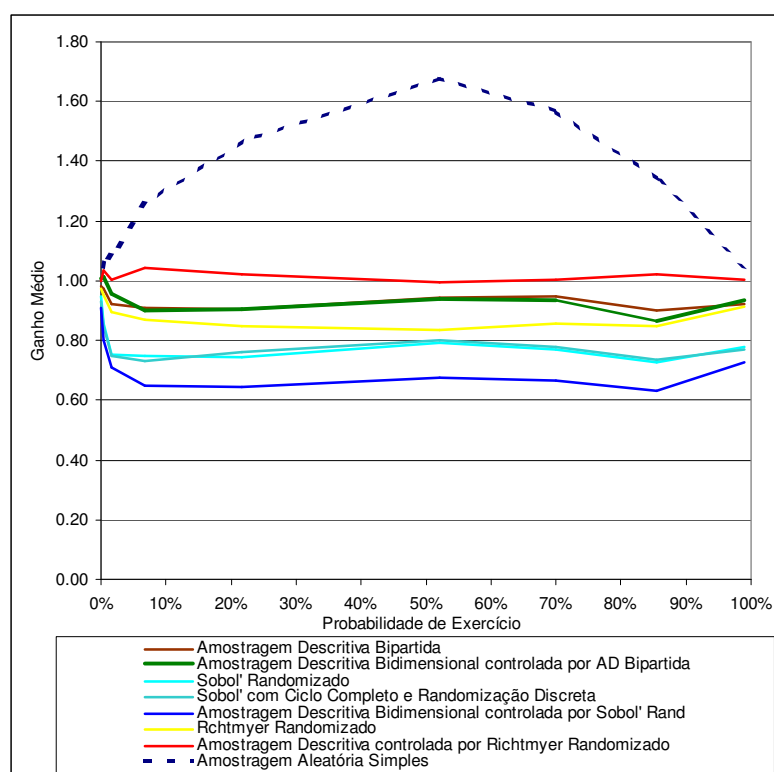


Gráfico 8.2.25 Ganhos Médios de diversas técnicas amostrais, calculados para os tamanhos de amostras e dimensionalidades que resultam em todas as dimensões poderem ser controladas pela AD Bipartida (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional)

8.3 Resumo dos Resultados do Experimento 3

Os resultados obtidos no experimento 3 acrescentaram pouco em relação aos do experimento 2, confirmando as principais conclusões apresentadas na seção anterior. Nas tabelas 8.3.1 a 8.3.6 estão apresentados os desvios padrões para as estimativas obtidas para as opções asiáticas com prazo – e dimensionalidade – de 16 e 32 e com preços de exercícios iguais a 50, 55 e 60. Na parte de cima de cada tabela, estão os resultados obtidos para as técnicas de amostragem tradicionais e, na parte de baixo, os das técnicas propostas. A fim de facilitar a análise da tabela, foram feitas algumas marcações ao lado dos valores dos desvios padrões. Para cada tamanho de amostra avaliado, a técnica que obteve o menor desvio padrão tem um sinal de asterisco “*” do lado direito do desvio padrão. Para avaliar até que ponto o uso da técnica de Sobol’ emulando a Amostragem Descritiva melhora as estimativas em relação ao Sobol’ tradicional, foi adicionado um sinal “+” do lado esquerdo dos desvios padrões em que o Sobol de ciclo completo e randomização discreta conseguiu superar o Sobol’ tradicional (nos casos de empate não foi adicionado o sinal). Também foi usado um sinal “+” do lado esquerdo dos desvios padrões para sinalizar os casos em que a combinação da AD Bidimensional com AD Bipartida supera a AD Bipartida pura. As ocorrências em que uma dessas duas técnicas não conseguiu superar a Amostragem Descritiva tradicional estão assinaladas com o uso do fundo cinza.

Assim como ocorreu no experimento 2, em que todas as dimensões tinham a mesma importância, no experimento 3, a AD Bidimensional controlada por Sobol’ conseguiu superar as demais para amostras menores que 65.536. De fato, em apenas uma situação essa técnica não obteve o menor desvio padrão para amostras de tamanho até 16.384, que ocorreu com a opção de 32 dias e $K = 55$ (tabela 8.3.4), mas mesmo nesse caso, o erro ficou abaixo do obtido pelo Sobol’ tradicional. De

forma geral, o Sobol' emulando a Amostragem Descritiva também conseguiu superar a forma tradicional. Para as probabilidades de exercícios mais elevadas e amostras até 16.384, pode ser visto nas tabelas 8.3.1 a 8.3.4, que a forma proposta supera a tradicional em todos os casos exceto um. Já nas tabelas referentes às opções com as menores probabilidades de exercícios (tabelas 8.3.5 e 8.3.6), não se observa uma supremacia entre o Sobol' tradicional e o Sobol' com ciclo completo ora um obtendo o melhor resultado, ora o outro.

A maior taxa de convergência da forma tradicional de Sobol' fica evidente para as amostras de tamanho 65.536. Para esse tamanho de amostra, a implementação tradicional do Sobol' conseguiu alcançar o menor desvio padrão observado em todos os casos, embora tenha empatado com o Sobol' de ciclo completo em três deles e obtido vantagens mínimas nos outros três. Ainda assim, esse resultado é melhor do que foi obtido pelo Sobol' tradicional no caso da européia com 15 e 30 dimensões, conforme pode ser visto nas tabelas 8.2.4 a 8.2.6.

No experimento anterior, foi observado que a combinação da AD Bidimensional com a AD Bipartida melhorou os resultados obtidos pela AD Bipartida isoladamente e que ambas as formas de controle apresentam melhoras em relação à Amostragem Descritiva tradicional. Em geral, essa relação se manteve no caso das opções asiáticas modeladas com incrementos. Os nove casos de exceção, em que a técnica tradicional superou uma das duas propostas, ficaram limitados a amostras de tamanho 256 ou de tamanho 1.024, mas, neste caso, concomitante com baixa probabilidade de exercício. Já as exceções em que a AD Bipartida pura superou a combinação de AD Bidimensional com AD Bipartida, ficaram concentradas em casos de dimensionalidade igual a 16 ou $N = 256$.

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.21	0.2020	5.22	0.0259	5.22	0.0487	5.22	0.0351
1024	5.21	0.1077	5.22	0.0145	5.22	0.0173	5.22	0.0138
4096	5.22	0.0523	5.22	0.0074	5.22	0.0071	5.22	0.0046
16384	5.22	0.0248	5.22	0.0035	5.22	0.0035	5.22	0.0017
65536	5.22	0.0131	5.22	0.0018	5.22	0.0012	5.22	0.0006*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.22	0.0287	5.22	0.0257	5.22	+0.0222	5.22	0.0207*	5.22	+0.0226
1024	5.22	0.0148	5.22	0.0121	5.22	+0.0117	5.22	0.0081*	5.22	+0.0088
4096	5.22	0.0084	5.22	0.0053	5.22	0.0058	5.22	0.0033*	5.22	+0.0040
16384	5.22	0.0041	5.22	0.0028	5.22	+0.0027	5.22	0.0014*	5.22	+0.0014*
65536	5.22	0.0019	5.22	0.0015	5.22	0.0015	5.22	0.0007	5.22	0.0006*

Tabela 8.3.1 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 50, probabilidade de exercício estimada = 94,49%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.50	0.2767	5.52	0.0573	5.52	0.0849	5.52	0.0536
1024	5.52	0.1347	5.53	0.0297	5.53	0.0301	5.53	0.0255
4096	5.52	0.0683	5.53	0.0149	5.53	0.0126	5.53	0.0092
16384	5.53	0.0334	5.53	0.0074	5.53	0.0064	5.53	0.0034
65536	5.53	0.0168	5.53	0.0042	5.53	0.0027	5.53	0.0014*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.52	0.0595	5.52	0.0549	5.53	0.0572	5.52	0.0436*	5.52	+0.0466
1024	5.53	0.0297	5.52	0.0277	5.53	+0.0245	5.53	0.0188*	5.53	+0.0228
4096	5.53	0.0155	5.53	0.0124	5.53	+0.0115	5.53	0.0075*	5.53	+0.0085
16384	5.53	0.0081	5.53	0.0062	5.53	+0.0059	5.53	0.0032*	5.53	+0.0032*
65536	5.53	0.0040	5.53	0.0033	5.53	+0.0028	5.53	0.0016	5.53	0.0014*

Tabela 8.3.2 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 50, probabilidade de exercício estimada = 87.89%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	1.42	0.1345	1.41	0.0616	1.42	0.0625	1.43	0.0520
1024	1.42	0.0661	1.43	0.0320	1.42	0.0280	1.42	0.0202
4096	1.42	0.0343	1.42	0.0169	1.42	0.0145	1.42	0.0076
16384	1.42	0.0155	1.42	0.0072	1.42	0.0067	1.43	0.0029
65536	1.43	0.0081	1.42	0.0040	1.42	0.0025	1.43	0.0011*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	1.42	0.0610	1.42	0.0544	1.42	+0.0481	1.42	0.0394*	1.42	+0.0489
1024	1.43	0.0320	1.43	0.0271	1.43	+0.0231	1.42	0.0140*	1.42	+0.0156
4096	1.43	0.0197	1.43	0.0123	1.43	0.0132	1.42	0.0062*	1.42	+0.0072
16384	1.43	0.0096	1.42	0.0058	1.42	0.0058	1.42	0.0025*	1.43	+0.0027
65536	1.42	0.0044	1.42	0.0032	1.43	+0.0031	1.43	0.0012	1.42	0.0011*

Tabela 8.3.3 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 55, probabilidade de exercício estimada = 50,80%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	2.00	0.1887	2.00	0.0834	2.00	0.0894	2.02	0.0764
1024	2.01	0.0968	2.01	0.0455	2.01	0.0382	2.02	0.0318
4096	2.01	0.0478	2.01	0.0234	2.01	0.0187	2.02	0.0128
16384	2.02	0.0233	2.01	0.0111	2.01	0.0091	2.02	0.0050
65536	2.02	0.0115	2.02	0.0064	2.02	0.0039	2.02	0.0020*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	2.01	0.0971	2.00	0.0848	2.02	0.0854	2.01	0.0684*	2.01	+0.0747
1024	2.02	0.0461	2.01	0.0453	2.01	+0.0376	2.01	0.0266*	2.01	0.0328
4096	2.02	0.0270	2.01	0.0213	2.01	+0.0189	2.02	0.0118*	2.01	+0.0119
16384	2.02	0.0138	2.01	0.0100	2.02	+0.0085	2.02	0.0048	2.02	+0.0046*
65536	2.02	0.0068	2.02	0.0051	2.01	+0.0042	2.02	0.0021	2.02	0.0021

Tabela 8.3.4 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 55, probabilidade de exercício estimada = 51,15%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.14	0.0392	0.14	0.0310	0.14	0.0337	0.14	0.0272
1024	0.14	0.0208	0.14	0.0152	0.14	0.0181	0.14	0.0131
4096	0.14	0.0096	0.14	0.0086	0.14	0.0084	0.14	0.0051
16384	0.14	0.0048	0.14	0.0039	0.14	0.0048	0.14	0.0020
65536	0.14	0.0023	0.14	0.0021	0.14	0.0015	0.14	0.0008*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.14	0.0294	0.14	0.0313	0.14	+0.0264	0.14	0.0252*	0.14	+0.0263
1024	0.14	0.0171	0.14	0.0152	0.14	0.0155	0.14	0.0103*	0.14	+0.0121
4096	0.14	0.0099	0.14	0.0067	0.14	0.0079	0.14	0.0044*	0.14	0.0052
16384	0.14	0.0051	0.14	0.0038	0.14	+0.0037	0.14	0.0018*	0.14	0.0020
65536	0.14	0.0022	0.14	0.0019	0.14	0.0019	0.14	0.0009	0.14	0.0009

Tabela 8.3.5 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 60, probabilidade de exercício estimada = 8,12%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.44	0.0916	0.44	0.0594	0.43	0.0597	0.44	0.0628
1024	0.44	0.0476	0.44	0.0323	0.44	0.0288	0.44	0.0285
4096	0.45	0.0233	0.44	0.0167	0.44	0.0152	0.44	0.0114
16384	0.45	0.0111	0.44	0.0085	0.44	0.0079	0.44	0.0044
65536	0.45	0.0056	0.44	0.0046	0.44	0.0032	0.44	0.0018*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.44	0.0690	0.44	0.0682	0.45	+0.0617	0.44	0.0502*	0.44	0.0629
1024	0.45	0.0365	0.44	0.0330	0.44	+0.0294	0.45	0.0221*	0.44	+0.0249
4096	0.45	0.0184	0.44	0.0160	0.44	+0.0134	0.45	0.0100*	0.44	+0.0110
16384	0.44	0.0101	0.44	0.0076	0.44	+0.0065	0.44	0.0043*	0.44	0.0045
65536	0.44	0.0048	0.44	0.0039	0.44	+0.0032	0.44	0.0020	0.44	0.0020

Tabela 8.3.6 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método incremental. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. c/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. c/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 60, probabilidade de exercício estimada = 15,95%

8.4 Resumo dos Resultados do Experimento 4

Na seção anterior, foi visto que o experimento com opção asiática e trajetórias construídas por incrementos acrescentou pouca informação aos resultados obtidos pelo experimento 2. Como será visto nesta seção, a acentuada concentração de variância em uma única dimensão do modelo, provocada pelo uso da ponte browniana, levou a resultados um pouco diferentes. O primeiro impacto pode ser percebido na Amostragem Descritiva. Na seção 8.1 foi visto que, a variância total do modelo de opção asiática não depende da forma como as trajetórias são construídas e que a diferença entre uma modelagem e outra seria apenas a maior ou menor concentração de importância em poucas variáveis. Com base neste resultado foi argumentado que a variância com o uso da Amostragem Aleatória Simples seria a mesma para as duas modelagens, mas que a Amostragem Descritiva poderia se beneficiar muito. Comparando as tabelas 8.4.1 a 8.4.6 com as suas equivalentes da seção 8.3, pode ser observado que, embora os resultados obtidos para a Amostragem Aleatória Simples não tenham sofrido mudanças, os desvios padrões obtidos com a Amostragem Descritiva diminuíram muito. Uma explicação é que a distribuição univariada ótima da Amostragem Descritiva consegue auferir benefícios da maior concentração em uma única variável. Esse fenômeno pode ser usado para explicar as mudanças mencionadas acima, isto é, alterações nos desempenhos relativos entre as diversas técnicas amostrais. Além do uso da ponte browniana ter modificado a relação entre os resultados obtidos pelas diversas técnicas, foi observado que também proporcionou uma melhora geral para todas as técnicas, a exceção da Amostragem Aleatória Simples. A fim de facilitar as análises das tabelas,

foram usadas as mesmas codificações - com os símbolos do asterisco “*” e sinal de soma “+” - que foram utilizadas nas tabelas 8.3.1 a 8.3.6, da seção 8.3.

As maiores alterações relativas ocorreram entre as técnicas de amostragem que envolvem o uso de Sobol’⁴⁹. Nos dois experimentos anteriores, a AD Bidimensional controlada por Sobol’ obteve os melhores resultados no geral, seguida do Sobol’ emulando a Amostragem Descritiva e, por fim, o Sobol’ tradicional, que só consegui superar a primeira técnica quando o tamanho da amostra foi de 65.536. Com a diminuição da dimensionalidade efetiva, o efeito de “prolongamento” da quantidade de dimensões controladas deixou de ser tão significativo e a AD Bidimensional controlada por Sobol’ só conseguiu superar as outras duas para amostras de tamanho 256, sendo superada até mesmo pelo Sobol’ tradicional a partir de tamanhos de amostras iguais a 16.384. Por outro lado, o maior peso em uma única dimensão, pode ter sido a causa da melhora do Sobol’ emulando a Amostragem Descritiva, que passou a exercer uma supremacia quase total.

Já as relações entre as três técnicas baseadas apenas na Amostragem Descritiva⁵⁰ não foram alteradas, mas ficaram mais bem determinadas com o uso da ponte browniana. Nos dois experimentos anteriores, a AD Bidimensional controlada por AD Bipartida obteve o melhor resultado geral dentre as três, a AD Bipartida pura ficou em segundo lugar e a Amostragem Descritiva tradicional em terceiro. Porém, o experimento 3 apresenta diversas situações de exceção, coisa que não ocorreu no do experimento 4. De um lado, a Amostragem Descritiva tradicional ficou mais distante das outras duas técnicas e, em nenhum caso, conseguiu superar uma das duas técnicas propostas para controle, como ocorreu em algumas situações nos experimentos 2 e 3. Do outro lado, a relação entre as técnicas AD Bipartida e

⁴⁹ Sobol’ tradicional, Sobol’ com ciclo completo e randomização discreta e AD Bidimensional controlada pelo Sobol’ com ciclo completo e randomização discreta.

⁵⁰ Amostragem Descritiva tradicional, AD Bipartida e AD Bidimensional controlada por AD Bipartida.

AD Bidimensional também ficou mais bem definida: em nenhum caso foi observado erro padrão menor para a primeira. Uma possível explicação para isso, é que, junto com a forte redução de variância, haveria também redução da variância das estimativas de desvios padrões. Na seção seguinte será explorada uma explicação alternativa, baseada nas características de cada técnica.

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.22	0.1982	5.22	0.0183	5.22	0.0367	5.22	0.0267
1024	5.22	0.1070	5.22	0.0097	5.22	0.0105	5.22	0.0109
4096	5.22	0.0498	5.22	0.0047	5.22	0.0033	5.22	0.0027
16384	5.22	0.0257	5.22	0.0024	5.22	0.0015	5.22	0.0007
65536	5.22	0.0123	5.22	0.0011	5.22	0.0005	5.22	0.0002*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.22	0.0218	5.22	0.0183	5.22	+0.0113	5.22	0.0103*	5.22	+0.0142
1024	5.22	0.0073	5.22	0.0087	5.22	+0.0055	5.22	0.0044	5.22	+0.0043*
4096	5.22	0.0058	5.22	0.0039	5.22	+0.0026	5.22	0.0017	5.22	+0.0015*
16384	5.22	0.0025	5.22	0.0022	5.22	+0.0012	5.22	0.0008	5.22	+0.0005*
65536	5.22	0.0009	5.22	0.0010	5.22	+0.0007	5.22	0.0004	5.22	0.0002*

Tabela 8.4.1 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 50, probabilidade de exercício estimada = 94,49%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.49	0.2794	5.52	0.0384	5.53	0.0509	5.53	0.0380
1024	5.52	0.1362	5.53	0.0209	5.53	0.0159	5.53	0.0153
4096	5.52	0.0718	5.53	0.0096	5.53	0.0052	5.53	0.0044
16384	5.53	0.0341	5.53	0.0050	5.53	0.0023	5.53	0.0012
65536	5.53	0.0165	5.53	0.0022	5.53	0.0009	5.53	0.0004

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	5.52	0.0443	5.53	0.0374	5.53	+0.0189	5.52	0.0167*	5.52	+0.0255
1024	5.53	0.0145	5.53	0.0159	5.53	+0.0095	5.53	0.0082	5.53	+0.0073*
4096	5.53	0.0138	5.53	0.0080	5.53	+0.0051	5.53	0.0032	5.53	+0.0026*
16384	5.53	0.0056	5.53	0.0042	5.53	+0.0024	5.53	0.0016	5.53	+0.0008*
65536	5.53	0.0016	5.53	0.0022	5.53	+0.0012	5.53	0.0008	5.53	+0.0003*

Tabela 8.4.2 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 50, probabilidade de exercício estimada = 87.89%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	1.42	0.1298	1.42	0.0423	1.43	0.0357	1.42	0.0267
1024	1.42	0.0703	1.42	0.0224	1.43	0.0105	1.42	0.0103
4096	1.43	0.0328	1.43	0.0108	1.43	0.0037	1.42	0.0033
16384	1.43	0.0165	1.42	0.0050	1.42	0.0017	1.42	0.0009
65536	1.42	0.0079	1.42	0.0025	1.43	0.0007	1.42	0.0003

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	1.42	0.0474	1.42	0.0316	1.42	+0.0176	1.42	0.0164*	1.42	+0.0221
1024	1.43	0.0221	1.42	0.0153	1.42	+0.0093	1.42	0.0065*	1.42	+0.0065*
4096	1.43	0.0174	1.42	0.0070	1.43	+0.0046	1.42	0.0029	1.42	+0.0024*
16384	1.43	0.0045	1.42	0.0037	1.42	+0.0021	1.42	0.0015	1.43	+0.0007*
65536	1.42	0.0024	1.42	0.0020	1.42	+0.0013	1.42	0.0007	1.42	+0.0002*

Tabela 8.4.3 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 55, probabilidade de exercício estimada = 50,80%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	1.99	0.1909	2.00	0.0581	2.01	0.0518	2.02	0.0410
1024	2.02	0.0972	2.02	0.0316	2.02	0.0162	2.01	0.0155
4096	2.01	0.0503	2.01	0.0157	2.02	0.0055	2.02	0.0048
16384	2.01	0.0240	2.01	0.0073	2.02	0.0025	2.02	0.0013
65536	2.02	0.0116	2.02	0.0035	2.02	0.0010	2.02	0.0004

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	2.01	0.0701	2.02	0.0477	2.01	+0.0275	2.01	0.0223*	2.01	+0.0345
1024	2.02	0.0320	2.01	0.0229	2.02	+0.0135	2.01	0.0095	2.01	+0.0094*
4096	2.02	0.0243	2.01	0.0102	2.02	+0.0069	2.02	0.0044	2.02	+0.0033*
16384	2.02	0.0067	2.02	0.0057	2.02	+0.0030	2.02	0.0021	2.02	+0.0009*
65536	2.02	0.0034	2.02	0.0026	2.02	+0.0017	2.02	0.0010	2.02	+0.0003*

Tabela 8.4.4 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 55, probabilidade de exercício estimada = 51,15%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.14	0.0386	0.14	0.0245	0.14	0.0209	0.14	0.0172
1024	0.14	0.0215	0.14	0.0131	0.14	0.0074	0.14	0.0072
4096	0.14	0.0096	0.14	0.0054	0.14	0.0026	0.14	0.0022
16384	0.14	0.0048	0.14	0.0030	0.14	0.0015	0.14	0.0006
65536	0.14	0.0025	0.14	0.0015	0.14	0.0006	0.14	0.0002*

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.14	0.0245	0.14	0.0227	0.14	+0.0133	0.14	0.0124*	0.14	+0.0158
1024	0.14	0.0094	0.14	0.0112	0.14	+0.0065	0.14	0.0052	0.14	+0.0047*
4096	0.14	0.0086	0.14	0.0054	0.14	+0.0032	0.14	0.0025	0.14	+0.0019*
16384	0.14	0.0030	0.14	0.0029	0.14	+0.0016	0.14	0.0011	0.14	+0.0005*
65536	0.14	0.0012	0.14	0.0014	0.14	+0.0008	0.14	0.0006	0.14	0.0002*

Tabela 8.4.5 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 16, preço de exercício = 60, probabilidade de exercício estimada = 8,12%

Amostragem Aleatória Simples			Amostragem Descritiva		Richtmyer Rand		Sobol' Rand	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.43	0.0867	0.44	0.0450	0.44	0.0380	0.45	0.0312
1024	0.45	0.0455	0.44	0.0252	0.44	0.0126	0.44	0.0124
4096	0.45	0.0216	0.44	0.0120	0.44	0.0045	0.44	0.0039
16384	0.44	0.0107	0.44	0.0056	0.44	0.0025	0.44	0.0012
65536	0.44	0.0055	0.44	0.0029	0.44	0.0010	0.44	0.0004

AD c/ Richtmyer			AD Bipartida		AD Bidimensional c/ Bipartida		AD Bidimensional com Sobol'		Sobol' Ciclo Completo e Random. Discreta	
N	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad	Est Preço	Desv Pad
256	0.44	0.0504	0.44	0.0434	0.44	+0.0262	0.44	0.0202*	0.44	+0.0279
1024	0.44	0.0202	0.44	0.0224	0.44	+0.0127	0.44	0.0091	0.44	+0.0087*
4096	0.45	0.0184	0.44	0.0104	0.44	+0.0063	0.44	0.0042	0.44	+0.0029*
16384	0.45	0.0062	0.45	0.0056	0.44	+0.0029	0.44	0.0019	0.44	+0.0009*
65536	0.44	0.0024	0.44	0.0026	0.44	+0.0016	0.44	0.0010	0.44	+0.0003*

Tabela 8.4.6 Estimativas de Preço e Desvios Padrões para Opção Asiática modelada com método da pt. Browniana. O “*” indica o melhor resultado, o “+” indica que a AD Bidim. C/ AD Bipart. supera a AD Bipart. ou que o Sobol’ de ciclo completo supera o Sobol’ tradicional e o cinza indica que a AD tradicional supera a Bipartida ou Bidim. C/ Bipartida. Prazo / dimensões = 32, preço de exercício = 60, probabilidade de exercício estimada = 15,95%

8.5 Análise Conjunta dos Resultados dos Experimentos

Nas seções anteriores foi comentado que o experimento 3 acrescentou pouco em relação aos resultados obtidos pelo experimento 2, mas que o experimento 4 mudou um pouco a relação entre as técnicas de amostragem no que diz respeito às precisões das estimativas obtidas. Nesta seção se buscará analisar esse fenômeno sob a ótica da dimensionalidade. Embora o efeito da dimensionalidade já tenha sido avaliado nas seções anteriores, especialmente na seção 8.2, o foco nesta seção é comparar como as estruturas dos diferentes modelos interagem com cada técnica e tentar relacionar as diferentes interações com os resultados observados.

Na tabela 8.5.1, são apresentados os ganhos médios em relação à Amostragem Descritiva obtidos pelas diversas técnicas amostrais⁵¹ para três modelos diferentes e as variações entre os ganhos médios obtidos em cada modelo. Os modelos foram selecionados dos experimentos 2, 3 e 4, de forma que a dimensionalidade e a probabilidade exercício ficassem o mais próximo possível. Para o modelo I, foi escolhida a opção europeia do experimento 2 com preço de exercício igual a 55 e dimensionalidade igual a 15. Para os modelos II e III, foram selecionados os problemas de apreçamento de opção asiática com 16 dias e preço de exercício igual a 55, dos experimentos 3 e 4. Os demais parâmetros dos três modelos podem ser encontrados no capítulo 7 e as probabilidades de exercícios de cada modelo encontram-se na própria tabela 8.5.1.

Pode ser visto que as variações entre os ganhos, quando se passa do modelo I para o modelo II, são todas muito modestas, enquanto que as variações de ganhos entre os modelos II e III e entre os modelos I e III são consideravelmente maiores. Essa diferença está relacionada ao fato dos resultados obtidos nos

⁵¹ As técnicas que envolvem Richtmyer não foram incluídas porque os resultados do controle deixaram a desejar.

experimentos 2 e 3 terem sido semelhantes, e os obtidos no experimento 4 terem sido um pouco diferentes. Como as variações nos ganhos entre os modelos I e II são todas muito modestas, as diferenças entre as variações acabam também sendo muito pequenas. Essa proximidade entre as variações de ganhos obtidas por cada técnica reflete não ter havido grandes alterações entre os resultados dos experimentos I e II. Por exemplo, a AD Bidimensional controlada por Sobol' continuou tendo o melhor resultado, apesar do Sobol' e Sobol' de ciclo completo terem melhorado mais.

Como comentado acima, as variações entre os ganhos nos modelos I e III ou entre os ganhos nos modelos II e III são, como um todo, maiores que as variações entre os modelos I e II. Porém, além disso, as diferenças entre as variações de ganhos de cada técnica também são maiores. Por exemplo, as duas formas de Sobol' têm variação de 0,04 quando os modelos I e II são comparados e, portanto, a diferença entre as variações é nula. Porém, quando são comparados os modelos II e III, as variações são 0,18 e 0,22 e a diferença é 0,04. Essa diferença na intensidade das variações reflete a mudança nos resultados do experimento 4 em relação aos experimentos 2 e 3. Por exemplo, o Sobol' de ciclo completo varia mais que o Sobol' tradicional, e este varia mais que o Sobol' combinado com a AD Bidimensional. Como efeito, a AD Bidimensional controlada por Sobol' deixa de ser a melhor técnica, posição que passa a ser ocupada pelo Sobol' de ciclo completo.

A explicação para as variações nos ganhos entre os modelos I e II serem tão menores do que as variações entre os modelos I e III e II e III, pode ser dada pelas variações nas dimensionalidades efetivas dos modelos, pois, como mostram as tabelas 8.2.4 a 8.2.6, os ganhos das técnicas de controle multivariado melhoram com a redução da dimensionalidade. No modelo I são necessárias quinze

dimensões para capturar 95% dos efeitos de primeira ordem⁵², conforme pode ser verificado na tabela 8.1.1. Usando o mesmo critério, são necessárias onze dimensões para o modelo II (ver tabela 8.1.3), isto é, apenas quatro a menos ou uma redução de aproximadamente 27%. Já no caso do modelo III, com apenas duas dimensões já é capturada 95% da variância resultante dos efeitos de primeira ordem. Isso representa uma redução de treze dimensões, quando comparado ao modelo I, e nove, quando comparado ao modelo II, ou 87% e 82%, respectivamente.

O argumento acima associa as maiores variações de ganhos às maiores variações de dimensionalidades, mas não explica porque essas variações são diferentes para cada técnica amostral. Para tentar entender, primeiro é preciso relacionar os elementos pertinentes às diversas técnicas e analisar como a interação do modelo III com esses elementos difere da dos demais modelos. O primeiro elemento é o conjunto de pontos ótimos da Amostragem Descritiva tradicional, que é compartilhado por todas as técnicas contempladas exceto a Amostragem Aleatória Simples e o Sobol' tradicional. O segundo e o terceiro elementos são o controle multivariado da AD Bipartida e do Sobol' e o quarto elemento é o bloco da AD Bidimensional.

No experimento 2, foi visto que, o primeiro elemento, isto é, o bloco univariado da Amostragem Descritiva, é insensível à variações de dimensionalidade dentro do intervalo [5, 30]. Porém, no limite, quando a dimensionalidade é um, a variância é zero e, portanto, a concentração de variância em uma única variável seria favorável às técnicas que utilizam este conjunto de pontos univariados.

Com relação aos controles multivariados exercidos pela AD Bipartida e pelo Sobol', é necessário avaliar os aspectos que os diferenciam. O controle da

⁵² Embora essa não seja a dimensionalidade efetiva, serve para comparação de um modelo em relação a outro.

AD Bipartida garante apenas a propriedade A relaxada para um conjunto de dimensões, que têm todas a mesma qualidade, e nenhum controle multivariado para as demais. Já os mecanismos de controle do Sobol' conseguem mais que a propriedade A para algumas dimensões⁵³. Por exemplo, a propriedade A garante apenas que haverá a mesma quantidade de pontos em cada sub-hipercubo, mas não controla como esses pontos estão distribuídos dentro de cada um. Além disso, mesmo quando não é aderente à propriedade A, as distribuições de Sobol' ainda pretendem ser mais uniformes que distribuições aleatórias. Ou seja, além do Sobol' controlar melhor as dimensões que a AD Bipartida controla, ele também controla algumas dimensões que a AD Bipartida não controla. O lado negativo é que, conforme a dimensionalidade aumenta muito, o controle multidimensional do Sobol' pode perder qualidade a ponto de se tornar pior que a distribuição puramente aleatória.

O controle multivariado exercido pelo bloco básico utilizado pela AD Bidimensional apresenta duas características distintas. Por construção, esse bloco apresenta elevada eficiência amostral para duas dimensões e, ainda que não seja o conjunto ótimo de pontos para o quadrado unitário, supera as demais técnicas para modelos bidimensionais. Essa afirmação é corroborada pela a tabela 8.5.2, que apresenta os desvios padrões obtidos na estimação do prêmio da opção do experimento 2 com preço de exercício $K = 35$, modelada com duas dimensões. Isto significa que a tabela 8.5.2 reflete situações em que as únicas duas dimensões do modelo têm importâncias iguais. Por outro lado, para dimensionalidades mais elevadas, os resultados empíricos observados no experimento 2, sugerem que o uso

⁵³ A garantia da propriedade A no Sobol está relacionada à tabela de números direcionais iniciais, conforme discutida no capítulo 4. Nesta tese foi utilizada a tabela contida em Jäckel, que garante a propriedade A até 32 dimensões. Naturalmente, o Sobol' só se beneficia da propriedade A, quando a amostra é grande o suficiente para que a AD Bipartida se beneficie da propriedade A relaxada.

dos blocos da AD Bidimensional suaviza a perda de eficiência de outras técnicas de controle.

Uma maneira de observar isoladamente o ganho proporcionado pelo uso do conjunto de pontos ótimos da Amostragem Descritiva é comparar a Amostragem Aleatória Simples com a Amostragem Descritiva. Na tabela 8.5.1, pode ser observado que a variação de ganho da primeira técnica em relação à segunda é grande quando se compara os modelos I e II, mas muito maior quando a comparação é entre um destes e o modelo III. Como argumentado acima, quando a dimensionalidade do modelo é um, as estimativas da Amostragem Descritiva não apresentam variância. Comparando as tabelas 8.1.1, 8.1.3 e 8.1.5, pode ser observado que o efeito de concentração da variância se dá de forma mais intensa em uma única variável, a ponto de, para o modelo III, pelo menos 68% da variância total se concentrar em uma única variável. Isso faz com que este modelo seja próximo de um modelo unidimensional, o que aumenta a eficiência do conjunto de pontos univariados da Amostragem Descritiva. Este fenômeno explica porque, quando o modelo III é comparado com os outros dois, o Sobol' emulando a Amostragem Descritiva melhora mais que o Sobol' tradicional.

Na seção anterior foi observado que o uso da ponte browniana resultou numa maior diferenciação da AD Bidimensional em relação à AD Bipartida e desta em relação à Amostragem Descritiva tradicional. É possível explicar essa observação, relacionando as características destas técnicas com as dos modelos utilizados nos experimentos. Pelo lado da diferenciação entre a AD Bipartida e a Amostragem Descritiva tradicional, a explicação está associada à maior parcela da variância do modelo sobre a qual se consegue usufruir da propriedade A. Por exemplo, para amostras de tamanho 256, a propriedade A é assegurada para oito dimensões. Das

tabelas 8.1.3 a 8.1.6, referentes às opções asiáticas de 16 e 32 dias modeladas com incrementos e com ponte browniana, pode se obter os percentuais das variâncias de primeira ordem associadas às oito dimensões mais importantes para cada modelo. Para a opção de 16 dias, as oito dimensões mais importantes capturam 62% da variância quando o modelo usa incrementos e 85% quando o modelo usa ponte browniana. Já para a opção de 32 dias, esses percentuais são de 40% e 84% para os métodos incremental e ponte browniana, respectivamente. Isso significa que, no experimento 3, quando o tamanho da amostra foi $N = 256$, a vantagem da AD Bipartida sobre a Amostragem Descritiva tradicional, só foi aproveitada para controlar 62% e 40% da variância⁵⁴. Enquanto isso, para o caso de modelagem com ponte browniana, esses percentuais sobem para aproximadamente 85% e 84%. De fato, o pior caso (no que tange a diferenciação da AD Bipartida em relação à Amostragem Descritiva tradicional) se deu justamente para a opção de 32 dias com trajetórias por incrementos, isto é, quando menos variância é capturada pelas dimensões com controle multidimensional.

Por outro lado, a melhor diferenciação entre a AD Bidimensional controlada pela AD Bipartida e a AD Bipartida pura pode ser resultado da concentração de 80% da variância em duas dimensões, que ocorre nos modelos que usam a ponte browniana. Essa concentração em duas variáveis é favorável ao bloco bidimensional. Em contraste, enquanto a propriedade A relaxada da AD Bipartida utiliza um *grid* bidimensional de quatro regiões para controlar esses 80% da variância, a AD Bidimensional utiliza um *grid* com N regiões. Conforme pode ser visto na tabela 8.5.2, a vantagem da AD Bidimensional sobre a AD Bipartida pode ser muito grande quando o problema tem apenas duas dimensões com importâncias

⁵⁴ Na verdade um pouco mais, se forem considerados os efeitos de ordem superior a um.

iguais – de fato, para duas dimensões de mesma importância, a AD Bidimensional supera todas as demais técnicas de amostragem.

Embora a tabela 8.5.2 sugira uma superioridade absoluta da AD Bidimensional, essa superioridade é restrita àquela situação (duas dimensões de igual importância) e não pode ser generalizada. Por exemplo, embora o uso da ponte browniana na modelagem de opções asiática resulte em elevada concentração da variância em duas variáveis, os resultados do experimento 4 e os ganhos médios registrados para o modelo III na tabela 8.5.1 mostram que, apesar da concentração de 80% da variância em duas dimensões, o bloco da AD Bidimensional controlada por Sobol' de ciclo completo, não consegue superar o Sobol' de ciclo completo puro. A explicação pode estar nas demais dimensões. Comparando construção da AD Bidimensional controlada pela AD Bipartida com a controlada por Sobol', pode ser visto que as duas primeiras dimensões são equivalentes. No entanto, comparando os ganhos médios registrados para o modelo III pelas duas técnicas na tabela 8.5.1, pode ser visto que a segunda é bem superior. Essa diferença resulta das demais dimensões.

Embora o bloco da AD Bidimensional seja muito eficiente para duas dimensões – conforme mostrado na tabela 8.5.2 – ele mostrou ser um pouco menos eficiente quando a dimensionalidade efetiva aumenta um pouco – como no caso das opções asiáticas modeladas com ponte browniana. Contudo, conforme a dimensionalidades continua a aumentar, o efeito de suavização da perda de qualidade faz com que volte a ser mais eficiente. Isso se reflete nos coeficientes angulares das retas de tendência da AD Bidimensional controlada por Sobol', que é menor que os das retas de tendência do Sobol' de ciclo completo (ver gráficos 8.2.15 a 8.2.20). Ao mesmo tempo, para essas dimensionalidades mais elevadas dos

modelos I e II, as inclinações do Sobol' tradicional e do Sobol' de ciclo completo, nos gráficos 8.2.15 a 8.2.20, parecem ser semelhantes. Com efeito, quando se compara os modelos I e II, a tabela 8.5.1, apresenta variações de ganhos aproximadamente iguais para as duas variantes de Sobol' que, por sua vez, são maiores que a variação apresentada para a AD Bidimensional controlada por Sobol'.

Após os três experimentos comparando as precisões obtidas pelas técnicas amostrais tradicionais e propostas, fica claro que, para tamanhos de amostras típicos (p. ex.: 1024 ou 4096), as técnicas de Sobol' emulando a Amostragem Descritiva e a AD Bidimensional controlada por Sobol' são as que obtêm os melhores resultados para a maioria das situações, embora não seja tão fácil prever qual das duas é a que obterá a menor variância. Entre as técnicas mais simples, que não envolvem o esforço computacional do Sobol', as duas propostas para controle da Amostragem Descritiva tradicional também resultam em ganhos em relação a Amostragem Descritiva e, para amostras pequenas, podem ser consideradas como uma alternativa ao Sobol' tradicional.

	Modelo I	Modelo II	Modelo III	Variação dos Ganhos entre os Modelos		
	européia por incrementos	asiática por incrementos	asiática por pte. brown.	Do Modelo I para Modelo II	Do Modelo II para Modelo III	Do Modelo I para Modelo III
Dimensionalidade	15	16	16			
Preço de Exercício	55	55	55			
Probabilidade de Exercício	51.99%	50.80%	50.80%			
Amostragem Aleatória Simples	1.97	2.09	3.15	-0.12	-1.06	-1.17
Amostragem Descritiva	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
Sobol' Rand	0.55	0.52	0.34	0.04	0.18	0.22
AD Bipartida	0.85	0.81	0.72	0.04	0.09	0.13
AD Bidimensional c/ Bipartida	0.77	0.77	0.44	0.00	0.33	0.34
AD Bidimensional com Sobol'	0.44	0.42	0.30	0.02	0.12	0.14
Sobol' Ciclo Completo	0.51	0.47	0.25	0.04	0.22	0.26

Tabela 8.5.1 Ganhos médios obtidos pelas diferentes técnicas amostrais em relação à Amostragem Descritiva (ganho expresso como erro padrão dividido pelo erro padrão obtido pela Amostragem Descritiva tradicional) em três modelos de simulação. Ganho médio calculado como média dos ganhos obtidos para amostras de tamanho 256, 1024, 4096, 16384 e 65536.

N	Amostragem Aleatória Simples	Amostragem Descritiva	Sobol'	AD Bipartida	AD Bidimensional	Sobol' Ciclo Completo
256	0.66474	0.07204	0.10725	0.06587	0.02105	0.05241
1024	0.33265	0.03955	0.04509	0.02896	0.00699	0.01746
4096	0.18101	0.02026	0.01149	0.01468	0.00268	0.00586
16384	0.08848	0.00910	0.00315	0.00834	0.00098	0.00167
65536	0.04647	0.00439	0.00080	0.00381	0.00030	0.00056

Tabela 8.5.2 Desvios padrões da estimativa de preço da opção definida no experimento 2 com $K = 35$, modelada com duas dimensões de mesma importância hierárquica.

8.A1 Apêndice: Erros Padrões obtidos nos apreçamentos do Experimento 2

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.6995	0.7061	0.6790	0.6669	0.6755	0.6980	0.6972	0.6509	0.6962	0.7355
	1024	0.3248	0.3492	0.3603	0.3602	0.3505	0.3548	0.3512	0.3607	0.3567	0.3682
	4096	0.1811	0.1784	0.1668	0.1763	0.1637	0.1751	0.1798	0.1774	0.1732	0.1828
	16384	0.0907	0.0892	0.0861	0.0915	0.0916	0.0908	0.0888	0.0882	0.0889	0.0901
	65536	0.0441	0.0438	0.0438	0.0438	0.0456	0.0443	0.0434	0.0435	0.0457	0.0435
Amostram Descritiva	256	0.0978	0.0969	0.0946	0.0974	0.1066	0.1023	0.0973	0.1033	0.1008	0.0987
	1024	0.0468	0.0501	0.0480	0.0470	0.0510	0.0483	0.0489	0.0512	0.0524	0.0507
	4096	0.0239	0.0251	0.0261	0.0252	0.0244	0.0240	0.0240	0.0237	0.0248	0.0238
	16384	0.0121	0.0124	0.0127	0.0126	0.0116	0.0115	0.0130	0.0132	0.0127	0.0126
	65536	0.0062	0.0063	0.0060	0.0062	0.0066	0.0070	0.0065	0.0069	0.0068	0.0068
Rchtmyer Randomizado	256	0.1615	0.1443	0.1457	0.1611	0.1560	0.1640	0.2054	0.2225	0.2187	0.2033
	1024	0.0606	0.0649	0.0562	0.0644	0.0627	0.0605	0.0624	0.0622	0.0705	0.0748
	4096	0.0205	0.0249	0.0229	0.0292	0.0267	0.0246	0.0237	0.0219	0.0230	0.0264
	16384	0.0067	0.0063	0.0067	0.0140	0.0135	0.0122	0.0112	0.0092	0.0093	0.0089
	65536	0.0024	0.0024	0.0024	0.0039	0.0048	0.0051	0.0047	0.0042	0.0037	0.0036
Sobol' Randomizado	256	0.1109	0.1086	0.1195	0.1188	0.1150	0.1170	0.1183	0.1279	0.1319	0.1264
	1024	0.0464	0.0477	0.0490	0.0460	0.0490	0.0462	0.0473	0.0551	0.0660	0.0573
	4096	0.0130	0.0150	0.0132	0.0125	0.0141	0.0158	0.0169	0.0167	0.0199	0.0178
	16384	0.0038	0.0043	0.0041	0.0042	0.0048	0.0046	0.0046	0.0052	0.0055	0.0061
	65536	0.0010	0.0012	0.0012	0.0013	0.0015	0.0014	0.0015	0.0019	0.0019	0.0020
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.0816	0.0896	0.0778	0.0862	0.0876	0.0922	0.1056	0.1034	0.1080	0.1056
	1024	0.0572	0.0572	0.0535	0.0504	0.0518	0.0528	0.0510	0.0552	0.0564	0.0512
	4096	0.0269	0.0316	0.0332	0.0326	0.0320	0.0294	0.0256	0.0297	0.0275	0.0286
	16384	0.0112	0.0125	0.0144	0.0129	0.0151	0.0154	0.0161	0.0132	0.0141	0.0141
	65536	0.0038	0.0056	0.0054	0.0051	0.0067	0.0074	0.0081	0.0083	0.0073	0.0073
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.0734	0.0765	0.0742	0.0800	0.0728	0.0943	0.0952	0.0996	0.1033	0.0962
	1024	0.0370	0.0391	0.0338	0.0393	0.0388	0.0391	0.0449	0.0504	0.0489	0.0480
	4096	0.0189	0.0201	0.0182	0.0210	0.0174	0.0195	0.0212	0.0239	0.0238	0.0243
	16384	0.0096	0.0093	0.0087	0.0090	0.0097	0.0107	0.0112	0.0115	0.0129	0.0132
	65536	0.0045	0.0048	0.0047	0.0050	0.0049	0.0047	0.0050	0.0054	0.0061	0.0056
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.0653	0.0688	0.0729	0.0736	0.0749	0.0755	0.0785	0.0891	0.0860	0.0963
	1024	0.0342	0.0355	0.0337	0.0343	0.0396	0.0398	0.0370	0.0398	0.0424	0.0482
	4096	0.0173	0.0170	0.0176	0.0182	0.0175	0.0175	0.0192	0.0187	0.0196	0.0219
	16384	0.0084	0.0085	0.0090	0.0092	0.0097	0.0096	0.0092	0.0100	0.0103	0.0108
	65536	0.0046	0.0046	0.0044	0.0046	0.0046	0.0047	0.0055	0.0048	0.0048	0.0050
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0482	0.0500	0.0704	0.0717	0.0692	0.0689	0.0668	0.0696	0.0777	0.0859
	1024	0.0230	0.0234	0.0228	0.0227	0.0254	0.0267	0.0243	0.0318	0.0283	0.0304
	4096	0.0088	0.0095	0.0086	0.0092	0.0094	0.0098	0.0098	0.0118	0.0111	0.0129
	16384	0.0033	0.0038	0.0037	0.0039	0.0042	0.0043	0.0040	0.0051	0.0046	0.0052
	65536	0.0016	0.0018	0.0017	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019	0.0021	0.0024	0.0023
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.0641	0.0673	0.0628	0.0705	0.0662	0.0785	0.0760	0.1008	0.1086	0.0946
	1024	0.0245	0.0228	0.0230	0.0242	0.0278	0.0299	0.0315	0.0361	0.0485	0.0449
	4096	0.0077	0.0089	0.0076	0.0090	0.0104	0.0104	0.0123	0.0128	0.0161	0.0150
	16384	0.0026	0.0026	0.0026	0.0030	0.0036	0.0035	0.0036	0.0037	0.0043	0.0041
	65536	0.0008	0.0009	0.0009	0.0010	0.0013	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0018

Tabela 8.A1.1 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=35$, prêmio=21.057135 e $pr\{\text{exercício}\}=0.98955386$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.6464	0.6504	0.6328	0.6297	0.6251	0.6446	0.6452	0.6052	0.6493	0.6847
	1024	0.3038	0.3289	0.3353	0.3332	0.3271	0.3347	0.3319	0.3379	0.3326	0.3428
	4096	0.1690	0.1650	0.1537	0.1643	0.1513	0.1617	0.1669	0.1599	0.1590	0.1687
	16384	0.0848	0.0813	0.0793	0.0845	0.0864	0.0848	0.0819	0.0812	0.0832	0.0829
	65536	0.0409	0.0407	0.0406	0.0408	0.0426	0.0414	0.0396	0.0401	0.0427	0.0406
Amostram Descritiva	256	0.1666	0.1617	0.1692	0.1713	0.1820	0.1785	0.1632	0.1808	0.1672	0.1764
	1024	0.0816	0.0907	0.0826	0.0860	0.0920	0.0876	0.0860	0.0918	0.0895	0.0888
	4096	0.0416	0.0408	0.0442	0.0426	0.0412	0.0427	0.0407	0.0413	0.0424	0.0407
	16384	0.0216	0.0221	0.0223	0.0218	0.0202	0.0200	0.0217	0.0221	0.0213	0.0217
	65536	0.0110	0.0105	0.0101	0.0107	0.0111	0.0117	0.0110	0.0120	0.0116	0.0119
Rchtmyer Randomizado	256	0.1934	0.1718	0.1793	0.1888	0.1908	0.1997	0.2427	0.2466	0.2397	0.2236
	1024	0.0866	0.0922	0.0786	0.0867	0.0877	0.0880	0.0816	0.0807	0.0860	0.0914
	4096	0.0280	0.0385	0.0354	0.0473	0.0419	0.0416	0.0357	0.0319	0.0333	0.0365
	16384	0.0097	0.0099	0.0103	0.0257	0.0224	0.0220	0.0187	0.0153	0.0150	0.0141
	65536	0.0036	0.0038	0.0036	0.0066	0.0080	0.0083	0.0078	0.0072	0.0064	0.0061
Sobol' Randomizado	256	0.1325	0.1343	0.1467	0.1440	0.1460	0.1491	0.1500	0.1900	0.1905	0.1770
	1024	0.0519	0.0574	0.0593	0.0557	0.0663	0.0610	0.0665	0.0789	0.0965	0.0891
	4096	0.0167	0.0187	0.0185	0.0177	0.0227	0.0228	0.0253	0.0243	0.0289	0.0281
	16384	0.0056	0.0062	0.0064	0.0065	0.0081	0.0073	0.0078	0.0089	0.0101	0.0104
	65536	0.0016	0.0021	0.0022	0.0023	0.0027	0.0027	0.0031	0.0037	0.0040	0.0040
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.1463	0.1510	0.1394	0.1636	0.1597	0.1627	0.1775	0.1802	0.1844	0.1871
	1024	0.0964	0.0979	0.0928	0.0877	0.0897	0.0914	0.0854	0.0930	0.0941	0.0876
	4096	0.0479	0.0550	0.0562	0.0548	0.0556	0.0504	0.0456	0.0506	0.0460	0.0493
	16384	0.0186	0.0209	0.0239	0.0216	0.0248	0.0260	0.0271	0.0214	0.0244	0.0238
	65536	0.0068	0.0102	0.0098	0.0093	0.0118	0.0122	0.0138	0.0136	0.0127	0.0126
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.1242	0.1336	0.1325	0.1379	0.1291	0.1589	0.1645	0.1801	0.1744	0.1653
	1024	0.0638	0.0684	0.0611	0.0701	0.0681	0.0675	0.0743	0.0870	0.0867	0.0796
	4096	0.0347	0.0341	0.0329	0.0360	0.0306	0.0333	0.0357	0.0400	0.0410	0.0414
	16384	0.0155	0.0158	0.0152	0.0162	0.0168	0.0183	0.0183	0.0196	0.0231	0.0222
	65536	0.0076	0.0080	0.0079	0.0090	0.0086	0.0082	0.0090	0.0095	0.0102	0.0094
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.1175	0.1221	0.1268	0.1273	0.1294	0.1289	0.1373	0.1535	0.1587	0.1683
	1024	0.0612	0.0637	0.0615	0.0619	0.0676	0.0672	0.0633	0.0684	0.0743	0.0845
	4096	0.0300	0.0292	0.0312	0.0315	0.0287	0.0288	0.0346	0.0323	0.0331	0.0381
	16384	0.0148	0.0144	0.0158	0.0155	0.0164	0.0162	0.0164	0.0166	0.0172	0.0177
	65536	0.0073	0.0073	0.0078	0.0078	0.0081	0.0083	0.0093	0.0087	0.0082	0.0091
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0808	0.0850	0.1143	0.1142	0.1192	0.1204	0.1179	0.1216	0.1361	0.1446
	1024	0.0358	0.0367	0.0377	0.0379	0.0420	0.0442	0.0432	0.0571	0.0505	0.0547
	4096	0.0138	0.0148	0.0148	0.0163	0.0172	0.0171	0.0171	0.0216	0.0198	0.0236
	16384	0.0055	0.0063	0.0060	0.0063	0.0069	0.0073	0.0076	0.0089	0.0087	0.0096
	65536	0.0027	0.0030	0.0027	0.0028	0.0030	0.0032	0.0037	0.0038	0.0043	0.0042
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.1030	0.1131	0.1086	0.1222	0.1157	0.1359	0.1294	0.1785	0.1854	0.1615
	1024	0.0383	0.0408	0.0424	0.0437	0.0507	0.0532	0.0569	0.0590	0.0806	0.0789
	4096	0.0126	0.0152	0.0144	0.0165	0.0191	0.0195	0.0225	0.0232	0.0297	0.0265
	16384	0.0047	0.0051	0.0052	0.0053	0.0067	0.0062	0.0076	0.0081	0.0088	0.0084
	65536	0.0013	0.0017	0.0018	0.0021	0.0028	0.0025	0.0030	0.0034	0.0038	0.0040

Tabela 8.A1.2 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=45$, prêmio=11.932567 e $pr\{\text{exercício}\}=0.85391049$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.5776	0.5851	0.5670	0.5767	0.5690	0.5795	0.5827	0.5452	0.5880	0.6024
	1024	0.2727	0.2987	0.3023	0.2969	0.2936	0.3013	0.2990	0.3041	0.3017	0.3099
	4096	0.1508	0.1458	0.1372	0.1486	0.1357	0.1441	0.1490	0.1420	0.1424	0.1525
	16384	0.0763	0.0722	0.0712	0.0746	0.0780	0.0760	0.0718	0.0724	0.0747	0.0741
	65536	0.0368	0.0364	0.0367	0.0368	0.0381	0.0374	0.0348	0.0355	0.0381	0.0363
Amostram Descritiva	256	0.2111	0.2037	0.2228	0.2227	0.2334	0.2338	0.2157	0.2337	0.2173	0.2287
	1024	0.1000	0.1154	0.1037	0.1062	0.1159	0.1105	0.1064	0.1172	0.1157	0.1139
	4096	0.0529	0.0534	0.0558	0.0538	0.0507	0.0553	0.0518	0.0511	0.0545	0.0520
	16384	0.0269	0.0269	0.0278	0.0275	0.0262	0.0257	0.0282	0.0284	0.0279	0.0284
	65536	0.0134	0.0133	0.0122	0.0135	0.0142	0.0147	0.0141	0.0153	0.0147	0.0153
Richtmyer Randomizado	256	0.2197	0.1908	0.2004	0.2133	0.2201	0.2251	0.2651	0.2603	0.2566	0.2497
	1024	0.1024	0.1114	0.0946	0.1030	0.1053	0.1038	0.0946	0.0925	0.0977	0.1002
	4096	0.0318	0.0464	0.0436	0.0605	0.0522	0.0518	0.0442	0.0384	0.0403	0.0417
	16384	0.0114	0.0117	0.0122	0.0324	0.0284	0.0277	0.0233	0.0190	0.0188	0.0169
	65536	0.0043	0.0043	0.0043	0.0084	0.0100	0.0108	0.0102	0.0092	0.0076	0.0074
Sobol' Randomizado	256	0.1502	0.1496	0.1666	0.1682	0.1713	0.1682	0.1776	0.2258	0.2290	0.2112
	1024	0.0595	0.0611	0.0677	0.0640	0.0789	0.0690	0.0795	0.0931	0.1176	0.1088
	4096	0.0190	0.0200	0.0221	0.0211	0.0275	0.0269	0.0313	0.0301	0.0366	0.0351
	16384	0.0058	0.0066	0.0083	0.0079	0.0096	0.0088	0.0102	0.0109	0.0122	0.0128
	65536	0.0018	0.0022	0.0026	0.0030	0.0036	0.0038	0.0042	0.0047	0.0051	0.0048
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.1842	0.1953	0.1719	0.2076	0.1959	0.2035	0.2304	0.2281	0.2403	0.2386
	1024	0.1214	0.1233	0.1170	0.1094	0.1160	0.1121	0.1057	0.1163	0.1199	0.1107
	4096	0.0582	0.0722	0.0709	0.0702	0.0717	0.0635	0.0565	0.0647	0.0577	0.0611
	16384	0.0221	0.0257	0.0298	0.0276	0.0316	0.0322	0.0337	0.0275	0.0317	0.0299
	65536	0.0085	0.0125	0.0120	0.0115	0.0151	0.0156	0.0172	0.0173	0.0160	0.0153
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.1520	0.1617	0.1646	0.1734	0.1644	0.1946	0.1992	0.2223	0.2268	0.2088
	1024	0.0814	0.0867	0.0752	0.0884	0.0845	0.0861	0.0927	0.1132	0.1144	0.1018
	4096	0.0428	0.0432	0.0424	0.0448	0.0389	0.0415	0.0457	0.0542	0.0517	0.0535
	16384	0.0200	0.0204	0.0186	0.0198	0.0213	0.0230	0.0235	0.0249	0.0290	0.0289
	65536	0.0093	0.0099	0.0101	0.0109	0.0109	0.0104	0.0108	0.0120	0.0136	0.0121
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.1347	0.1432	0.1580	0.1580	0.1610	0.1639	0.1669	0.1959	0.1993	0.2121
	1024	0.0749	0.0769	0.0740	0.0750	0.0832	0.0834	0.0779	0.0863	0.0929	0.1070
	4096	0.0378	0.0378	0.0384	0.0394	0.0379	0.0382	0.0428	0.0409	0.0425	0.0480
	16384	0.0176	0.0179	0.0195	0.0194	0.0201	0.0202	0.0202	0.0213	0.0219	0.0236
	65536	0.0092	0.0094	0.0091	0.0094	0.0097	0.0101	0.0115	0.0109	0.0103	0.0117
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0896	0.0952	0.1326	0.1373	0.1381	0.1420	0.1513	0.1544	0.1681	0.1876
	1024	0.0402	0.0413	0.0444	0.0449	0.0527	0.0556	0.0549	0.0706	0.0629	0.0712
	4096	0.0156	0.0163	0.0175	0.0187	0.0207	0.0210	0.0206	0.0263	0.0270	0.0302
	16384	0.0060	0.0073	0.0073	0.0077	0.0082	0.0090	0.0094	0.0109	0.0114	0.0116
	65536	0.0030	0.0035	0.0031	0.0033	0.0036	0.0038	0.0046	0.0047	0.0053	0.0057
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.1315	0.1371	0.1385	0.1555	0.1488	0.1634	0.1600	0.2209	0.2300	0.2030
	1024	0.0479	0.0496	0.0503	0.0544	0.0618	0.0664	0.0695	0.0724	0.1047	0.1028
	4096	0.0144	0.0180	0.0178	0.0204	0.0243	0.0247	0.0284	0.0291	0.0391	0.0337
	16384	0.0054	0.0058	0.0068	0.0074	0.0081	0.0086	0.0097	0.0105	0.0112	0.0098
	65536	0.0015	0.0022	0.0024	0.0025	0.0036	0.0035	0.0036	0.0043	0.0050	0.0054

Tabela 8.A1.3 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=50$, prêmio=8.1418673 e $pr\{exercício\}=0.70074725$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.4860	0.4939	0.4876	0.4918	0.4850	0.4914	0.4936	0.4682	0.4966	0.5039
	1024	0.2296	0.2493	0.2557	0.2504	0.2453	0.2515	0.2447	0.2546	0.2537	0.2639
	4096	0.1275	0.1221	0.1165	0.1273	0.1159	0.1225	0.1257	0.1204	0.1172	0.1293
	16384	0.0646	0.0599	0.0601	0.0622	0.0662	0.0642	0.0590	0.0616	0.0620	0.0614
	65536	0.0311	0.0300	0.0314	0.0316	0.0313	0.0317	0.0288	0.0298	0.0314	0.0304
Amostram Descritiva	256	0.2327	0.2275	0.2441	0.2376	0.2676	0.2546	0.2454	0.2585	0.2541	0.2504
	1024	0.1107	0.1223	0.1206	0.1181	0.1257	0.1213	0.1179	0.1297	0.1245	0.1256
	4096	0.0598	0.0624	0.0630	0.0604	0.0564	0.0597	0.0601	0.0579	0.0612	0.0597
	16384	0.0288	0.0290	0.0302	0.0307	0.0300	0.0288	0.0321	0.0328	0.0305	0.0320
	65536	0.0144	0.0143	0.0140	0.0153	0.0159	0.0164	0.0155	0.0168	0.0165	0.0168
Rchtmyer Randomizado	256	0.2378	0.1996	0.2103	0.2293	0.2446	0.2298	0.2571	0.2635	0.2632	0.2663
	1024	0.1096	0.1229	0.1014	0.1151	0.1130	0.1103	0.0982	0.1003	0.1074	0.1051
	4096	0.0337	0.0504	0.0485	0.0673	0.0588	0.0565	0.0488	0.0432	0.0435	0.0449
	16384	0.0122	0.0123	0.0132	0.0361	0.0327	0.0304	0.0260	0.0213	0.0199	0.0183
	65536	0.0044	0.0047	0.0049	0.0093	0.0114	0.0124	0.0113	0.0105	0.0085	0.0086
Sobol' Randomizado	256	0.1615	0.1600	0.1739	0.1822	0.1932	0.1888	0.1966	0.2417	0.2522	0.2315
	1024	0.0670	0.0627	0.0748	0.0716	0.0805	0.0735	0.0881	0.1016	0.1292	0.1176
	4096	0.0207	0.0229	0.0230	0.0243	0.0308	0.0291	0.0338	0.0362	0.0423	0.0406
	16384	0.0063	0.0076	0.0093	0.0093	0.0105	0.0109	0.0115	0.0136	0.0136	0.0156
	65536	0.0020	0.0024	0.0029	0.0033	0.0043	0.0044	0.0047	0.0056	0.0058	0.0058
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.2002	0.2207	0.1906	0.2188	0.2083	0.2305	0.2561	0.2529	0.2667	0.2652
	1024	0.1337	0.1380	0.1281	0.1191	0.1252	0.1175	0.1194	0.1290	0.1338	0.1263
	4096	0.0639	0.0803	0.0784	0.0798	0.0802	0.0705	0.0611	0.0719	0.0650	0.0675
	16384	0.0247	0.0276	0.0332	0.0308	0.0360	0.0361	0.0376	0.0312	0.0348	0.0334
	65536	0.0096	0.0141	0.0130	0.0123	0.0164	0.0178	0.0186	0.0197	0.0177	0.0173
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.1748	0.1812	0.1823	0.1891	0.1808	0.2177	0.2288	0.2405	0.2596	0.2336
	1024	0.0899	0.0982	0.0823	0.0983	0.0933	0.0927	0.1050	0.1258	0.1247	0.1183
	4096	0.0449	0.0494	0.0461	0.0501	0.0430	0.0476	0.0513	0.0621	0.0580	0.0601
	16384	0.0227	0.0235	0.0194	0.0214	0.0230	0.0249	0.0269	0.0284	0.0313	0.0321
	65536	0.0109	0.0112	0.0116	0.0117	0.0120	0.0116	0.0116	0.0135	0.0159	0.0134
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.1419	0.1491	0.1800	0.1793	0.1791	0.1808	0.1873	0.2168	0.2136	0.2365
	1024	0.0778	0.0809	0.0798	0.0828	0.0922	0.0923	0.0891	0.0944	0.1046	0.1202
	4096	0.0427	0.0434	0.0418	0.0445	0.0448	0.0454	0.0483	0.0464	0.0469	0.0537
	16384	0.0188	0.0190	0.0214	0.0209	0.0229	0.0228	0.0224	0.0241	0.0250	0.0272
	65536	0.0103	0.0106	0.0099	0.0102	0.0111	0.0113	0.0132	0.0122	0.0112	0.0130
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0975	0.1039	0.1478	0.1518	0.1537	0.1546	0.1618	0.1708	0.1882	0.2091
	1024	0.0394	0.0429	0.0495	0.0506	0.0581	0.0629	0.0603	0.0760	0.0715	0.0800
	4096	0.0172	0.0186	0.0199	0.0205	0.0216	0.0226	0.0238	0.0298	0.0312	0.0339
	16384	0.0070	0.0082	0.0079	0.0088	0.0089	0.0095	0.0104	0.0131	0.0128	0.0137
	65536	0.0032	0.0039	0.0036	0.0037	0.0039	0.0041	0.0049	0.0058	0.0065	0.0066
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.1497	0.1530	0.1513	0.1698	0.1719	0.1849	0.1772	0.2352	0.2558	0.2226
	1024	0.0550	0.0571	0.0543	0.0602	0.0681	0.0749	0.0787	0.0818	0.1183	0.1116
	4096	0.0167	0.0203	0.0197	0.0218	0.0267	0.0273	0.0331	0.0341	0.0424	0.0383
	16384	0.0058	0.0065	0.0079	0.0086	0.0099	0.0099	0.0105	0.0119	0.0119	0.0118
	65536	0.0018	0.0021	0.0027	0.0030	0.0042	0.0047	0.0043	0.0052	0.0058	0.0059

Tabela 8.A1.4 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=55$, prêmio=5.1773719 e $pr\{\text{exercício}\}=0.51993881$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.3147	0.2888	0.3042	0.3006	0.2895	0.2916	0.2966	0.2774	0.2974	0.2935
	1024	0.1367	0.1535	0.1519	0.1521	0.1376	0.1475	0.1417	0.1581	0.1518	0.1521
	4096	0.0774	0.0749	0.0741	0.0760	0.0733	0.0762	0.0749	0.0744	0.0708	0.0768
	16384	0.0402	0.0360	0.0357	0.0354	0.0384	0.0398	0.0351	0.0372	0.0349	0.0362
	65536	0.0184	0.0176	0.0188	0.0187	0.0176	0.0181	0.0167	0.0176	0.0187	0.0181
Amostram Descritiva	256	0.2034	0.2035	0.1986	0.2063	0.2233	0.2097	0.2067	0.2240	0.2283	0.2071
	1024	0.0925	0.0960	0.1034	0.0932	0.1067	0.0988	0.1069	0.1101	0.1082	0.1081
	4096	0.0503	0.0539	0.0563	0.0545	0.0497	0.0495	0.0510	0.0485	0.0515	0.0518
	16384	0.0259	0.0260	0.0258	0.0276	0.0256	0.0254	0.0279	0.0284	0.0266	0.0273
	65536	0.0127	0.0131	0.0126	0.0128	0.0143	0.0145	0.0124	0.0144	0.0139	0.0145
Rchtmyer Randomizado	256	0.2053	0.1760	0.1865	0.1805	0.2015	0.1805	0.2129	0.2188	0.2074	0.2200
	1024	0.0901	0.1057	0.0913	0.0997	0.0980	0.0882	0.0848	0.0917	0.0921	0.0878
	4096	0.0299	0.0446	0.0431	0.0558	0.0560	0.0458	0.0450	0.0419	0.0412	0.0383
	16384	0.0113	0.0110	0.0119	0.0322	0.0325	0.0268	0.0257	0.0212	0.0185	0.0184
	65536	0.0044	0.0045	0.0050	0.0085	0.0105	0.0105	0.0101	0.0102	0.0083	0.0092
Sobol' Randomizado	256	0.1461	0.1527	0.1462	0.1601	0.1703	0.1649	0.1857	0.2130	0.2245	0.2130
	1024	0.0636	0.0575	0.0712	0.0634	0.0731	0.0712	0.0804	0.0971	0.1088	0.0989
	4096	0.0210	0.0246	0.0247	0.0225	0.0298	0.0294	0.0330	0.0342	0.0411	0.0359
	16384	0.0067	0.0078	0.0089	0.0092	0.0106	0.0112	0.0122	0.0152	0.0148	0.0156
	65536	0.0021	0.0026	0.0033	0.0034	0.0036	0.0041	0.0046	0.0059	0.0057	0.0063
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.1744	0.1870	0.1757	0.1727	0.1784	0.1985	0.2256	0.2133	0.2341	0.2103
	1024	0.1089	0.1188	0.1081	0.1016	0.1089	0.1062	0.1077	0.1158	0.1141	0.1092
	4096	0.0559	0.0645	0.0654	0.0662	0.0650	0.0621	0.0519	0.0601	0.0587	0.0586
	16384	0.0221	0.0253	0.0297	0.0269	0.0305	0.0308	0.0333	0.0276	0.0286	0.0297
	65536	0.0087	0.0126	0.0113	0.0118	0.0132	0.0152	0.0150	0.0168	0.0145	0.0145
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.1631	0.1727	0.1677	0.1720	0.1631	0.1950	0.2027	0.2115	0.2261	0.2114
	1024	0.0821	0.0873	0.0835	0.0891	0.0823	0.0848	0.0973	0.1086	0.1051	0.1087
	4096	0.0393	0.0441	0.0388	0.0462	0.0387	0.0436	0.0447	0.0520	0.0499	0.0527
	16384	0.0199	0.0195	0.0183	0.0192	0.0210	0.0215	0.0247	0.0264	0.0250	0.0265
	65536	0.0098	0.0109	0.0110	0.0097	0.0102	0.0101	0.0111	0.0123	0.0127	0.0127
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.1489	0.1537	0.1704	0.1732	0.1586	0.1613	0.1640	0.1902	0.1815	0.2144
	1024	0.0739	0.0759	0.0770	0.0780	0.0862	0.0865	0.0851	0.0830	0.0910	0.1003
	4096	0.0406	0.0404	0.0411	0.0416	0.0398	0.0399	0.0416	0.0453	0.0457	0.0462
	16384	0.0192	0.0194	0.0205	0.0204	0.0224	0.0225	0.0200	0.0203	0.0225	0.0239
	65536	0.0110	0.0108	0.0096	0.0098	0.0105	0.0103	0.0119	0.0108	0.0103	0.0106
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0948	0.0998	0.1431	0.1464	0.1435	0.1428	0.1467	0.1666	0.1763	0.1900
	1024	0.0414	0.0427	0.0470	0.0481	0.0578	0.0618	0.0637	0.0704	0.0723	0.0658
	4096	0.0172	0.0186	0.0203	0.0211	0.0225	0.0229	0.0272	0.0303	0.0297	0.0353
	16384	0.0073	0.0082	0.0082	0.0088	0.0091	0.0090	0.0110	0.0137	0.0124	0.0147
	65536	0.0034	0.0040	0.0040	0.0041	0.0038	0.0041	0.0047	0.0057	0.0059	0.0063
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.1359	0.1516	0.1405	0.1575	0.1587	0.1578	0.1759	0.2083	0.2299	0.2043
	1024	0.0565	0.0597	0.0567	0.0566	0.0675	0.0730	0.0730	0.0821	0.1003	0.0958
	4096	0.0152	0.0197	0.0202	0.0229	0.0264	0.0275	0.0331	0.0341	0.0381	0.0385
	16384	0.0062	0.0069	0.0086	0.0090	0.0098	0.0110	0.0111	0.0131	0.0135	0.0133
	65536	0.0019	0.0025	0.0030	0.0034	0.0041	0.0044	0.0047	0.0051	0.0062	0.0065

Tabela 8.A1.5 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=65$, prêmio=1.7207017 e $pr\{exercício\}=0.21614752$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.1689	0.1503	0.1527	0.1499	0.1576	0.1573	0.1553	0.1473	0.1647	0.1489
	1024	0.0702	0.0763	0.0786	0.0762	0.0685	0.0769	0.0696	0.0761	0.0767	0.0728
	4096	0.0384	0.0392	0.0363	0.0376	0.0391	0.0421	0.0392	0.0394	0.0357	0.0381
	16384	0.0199	0.0194	0.0179	0.0174	0.0194	0.0200	0.0184	0.0194	0.0174	0.0184
	65536	0.0091	0.0095	0.0096	0.0091	0.0090	0.0095	0.0087	0.0088	0.0095	0.0097
Amostram Descritiva	256	0.1288	0.1264	0.1248	0.1257	0.1345	0.1235	0.1351	0.1326	0.1433	0.1242
	1024	0.0619	0.0615	0.0638	0.0560	0.0645	0.0579	0.0647	0.0669	0.0673	0.0657
	4096	0.0317	0.0336	0.0357	0.0357	0.0321	0.0318	0.0317	0.0312	0.0321	0.0307
	16384	0.0166	0.0162	0.0162	0.0166	0.0160	0.0167	0.0173	0.0169	0.0163	0.0165
	65536	0.0079	0.0089	0.0084	0.0081	0.0085	0.0088	0.0077	0.0085	0.0080	0.0089
Richtmyer Randomizado	256	0.1246	0.1184	0.1248	0.1158	0.1193	0.1134	0.1416	0.1380	0.1263	0.1416
	1024	0.0564	0.0663	0.0609	0.0640	0.0602	0.0558	0.0594	0.0590	0.0552	0.0607
	4096	0.0206	0.0292	0.0294	0.0352	0.0355	0.0313	0.0312	0.0287	0.0278	0.0258
	16384	0.0085	0.0083	0.0087	0.0210	0.0215	0.0193	0.0176	0.0150	0.0135	0.0133
	65536	0.0036	0.0035	0.0041	0.0059	0.0072	0.0067	0.0071	0.0072	0.0060	0.0070
Sobol' Randomizado	256	0.1079	0.1019	0.0995	0.1106	0.1067	0.1133	0.1152	0.1281	0.1373	0.1364
	1024	0.0439	0.0485	0.0513	0.0471	0.0512	0.0528	0.0535	0.0609	0.0650	0.0576
	4096	0.0144	0.0183	0.0192	0.0192	0.0207	0.0218	0.0253	0.0253	0.0274	0.0266
	16384	0.0055	0.0071	0.0081	0.0077	0.0084	0.0084	0.0103	0.0116	0.0129	0.0117
	65536	0.0019	0.0023	0.0028	0.0029	0.0035	0.0035	0.0042	0.0043	0.0045	0.0053
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.1132	0.1210	0.1211	0.1164	0.1232	0.1155	0.1398	0.1222	0.1400	0.1241
	1024	0.0649	0.0715	0.0634	0.0631	0.0654	0.0665	0.0682	0.0699	0.0705	0.0709
	4096	0.0364	0.0377	0.0394	0.0372	0.0399	0.0369	0.0318	0.0368	0.0356	0.0363
	16384	0.0147	0.0155	0.0189	0.0170	0.0180	0.0177	0.0207	0.0169	0.0179	0.0181
	65536	0.0059	0.0076	0.0077	0.0075	0.0079	0.0093	0.0087	0.0101	0.0085	0.0087
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.1112	0.1164	0.1161	0.1177	0.1122	0.1350	0.1410	0.1252	0.1369	0.1341
	1024	0.0593	0.0586	0.0562	0.0560	0.0524	0.0584	0.0611	0.0680	0.0633	0.0687
	4096	0.0268	0.0275	0.0269	0.0325	0.0267	0.0270	0.0294	0.0327	0.0304	0.0324
	16384	0.0148	0.0139	0.0132	0.0128	0.0143	0.0144	0.0165	0.0159	0.0152	0.0168
	65536	0.0067	0.0072	0.0073	0.0067	0.0068	0.0064	0.0075	0.0080	0.0074	0.0078
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.1153	0.1164	0.1104	0.1130	0.1095	0.1141	0.1025	0.1187	0.1118	0.1347
	1024	0.0528	0.0522	0.0593	0.0605	0.0587	0.0591	0.0589	0.0584	0.0620	0.0588
	4096	0.0299	0.0303	0.0301	0.0302	0.0270	0.0271	0.0278	0.0296	0.0291	0.0273
	16384	0.0140	0.0138	0.0140	0.0146	0.0149	0.0151	0.0140	0.0132	0.0152	0.0146
	65536	0.0083	0.0081	0.0074	0.0075	0.0071	0.0072	0.0079	0.0074	0.0071	0.0066
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0731	0.0778	0.1011	0.1034	0.0977	0.0978	0.1027	0.1131	0.1111	0.1291
	1024	0.0370	0.0380	0.0391	0.0387	0.0436	0.0466	0.0511	0.0473	0.0530	0.0479
	4096	0.0144	0.0152	0.0157	0.0163	0.0187	0.0193	0.0217	0.0221	0.0246	0.0233
	16384	0.0062	0.0065	0.0066	0.0066	0.0076	0.0077	0.0085	0.0094	0.0098	0.0109
	65536	0.0030	0.0032	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0040	0.0040	0.0048	0.0047
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.1000	0.1041	0.0972	0.1093	0.0989	0.1106	0.1169	0.1259	0.1435	0.1260
	1024	0.0424	0.0389	0.0469	0.0463	0.0474	0.0506	0.0531	0.0582	0.0610	0.0626
	4096	0.0132	0.0158	0.0192	0.0197	0.0223	0.0233	0.0244	0.0247	0.0281	0.0267
	16384	0.0052	0.0059	0.0073	0.0079	0.0085	0.0089	0.0097	0.0101	0.0115	0.0118
	65536	0.0019	0.0023	0.0026	0.0032	0.0033	0.0036	0.0043	0.0044	0.0049	0.0051

Tabela 8.A1.6 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=75$, prêmio=0.46157096 e $pr\{\text{exercício}\}=0.06670693$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.0775	0.0714	0.0732	0.0712	0.0719	0.0749	0.0773	0.0747	0.0772	0.0692
	1024	0.0354	0.0357	0.0344	0.0322	0.0318	0.0360	0.0316	0.0322	0.0366	0.0328
	4096	0.0171	0.0179	0.0164	0.0180	0.0191	0.0188	0.0184	0.0193	0.0173	0.0183
	16384	0.0089	0.0097	0.0087	0.0086	0.0086	0.0086	0.0084	0.0095	0.0082	0.0084
	65536	0.0042	0.0043	0.0045	0.0042	0.0044	0.0044	0.0042	0.0042	0.0044	0.0048
Amostram Descritiva	256	0.0654	0.0650	0.0645	0.0619	0.0677	0.0603	0.0721	0.0636	0.0674	0.0577
	1024	0.0334	0.0317	0.0312	0.0280	0.0339	0.0305	0.0332	0.0308	0.0355	0.0333
	4096	0.0154	0.0167	0.0192	0.0180	0.0173	0.0152	0.0163	0.0161	0.0169	0.0166
	16384	0.0086	0.0081	0.0085	0.0087	0.0082	0.0090	0.0089	0.0084	0.0083	0.0085
	65536	0.0043	0.0045	0.0044	0.0042	0.0044	0.0041	0.0041	0.0042	0.0041	0.0043
Rchtmyer Randomizado	256	0.0625	0.0599	0.0608	0.0622	0.0601	0.0581	0.0660	0.0689	0.0623	0.0716
	1024	0.0282	0.0327	0.0292	0.0331	0.0331	0.0306	0.0311	0.0319	0.0272	0.0310
	4096	0.0119	0.0146	0.0150	0.0179	0.0175	0.0167	0.0167	0.0153	0.0148	0.0143
	16384	0.0053	0.0053	0.0053	0.0110	0.0106	0.0097	0.0089	0.0077	0.0075	0.0074
	65536	0.0025	0.0023	0.0025	0.0033	0.0042	0.0037	0.0038	0.0041	0.0037	0.0040
Sobol' Randomizado	256	0.0625	0.0594	0.0607	0.0583	0.0600	0.0666	0.0666	0.0653	0.0672	0.0672
	1024	0.0269	0.0294	0.0296	0.0284	0.0281	0.0317	0.0307	0.0335	0.0342	0.0308
	4096	0.0103	0.0120	0.0115	0.0128	0.0135	0.0138	0.0151	0.0142	0.0153	0.0150
	16384	0.0042	0.0049	0.0056	0.0052	0.0056	0.0058	0.0063	0.0069	0.0073	0.0068
	65536	0.0016	0.0017	0.0019	0.0021	0.0026	0.0024	0.0029	0.0030	0.0030	0.0032
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.0557	0.0629	0.0653	0.0606	0.0670	0.0638	0.0668	0.0622	0.0732	0.0650
	1024	0.0307	0.0323	0.0341	0.0325	0.0347	0.0332	0.0343	0.0345	0.0356	0.0376
	4096	0.0177	0.0189	0.0191	0.0178	0.0187	0.0180	0.0170	0.0181	0.0176	0.0172
	16384	0.0076	0.0079	0.0095	0.0082	0.0090	0.0090	0.0101	0.0082	0.0088	0.0091
	65536	0.0033	0.0040	0.0043	0.0039	0.0040	0.0047	0.0046	0.0045	0.0041	0.0043
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.0610	0.0637	0.0578	0.0625	0.0561	0.0676	0.0767	0.0640	0.0695	0.0679
	1024	0.0326	0.0286	0.0294	0.0293	0.0294	0.0307	0.0326	0.0339	0.0329	0.0333
	4096	0.0149	0.0145	0.0149	0.0162	0.0156	0.0149	0.0154	0.0169	0.0159	0.0165
	16384	0.0084	0.0079	0.0081	0.0077	0.0082	0.0081	0.0086	0.0081	0.0084	0.0086
	65536	0.0040	0.0041	0.0039	0.0037	0.0037	0.0036	0.0040	0.0042	0.0040	0.0039
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.0658	0.0668	0.0649	0.0661	0.0619	0.0659	0.0584	0.0642	0.0620	0.0712
	1024	0.0312	0.0305	0.0331	0.0344	0.0325	0.0324	0.0321	0.0318	0.0344	0.0321
	4096	0.0155	0.0161	0.0161	0.0170	0.0152	0.0152	0.0150	0.0140	0.0152	0.0149
	16384	0.0079	0.0081	0.0080	0.0081	0.0079	0.0080	0.0077	0.0077	0.0077	0.0077
	65536	0.0045	0.0044	0.0043	0.0044	0.0040	0.0040	0.0042	0.0039	0.0041	0.0038
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0454	0.0477	0.0575	0.0579	0.0568	0.0578	0.0610	0.0568	0.0616	0.0649
	1024	0.0252	0.0246	0.0271	0.0278	0.0269	0.0274	0.0297	0.0295	0.0294	0.0287
	4096	0.0096	0.0094	0.0109	0.0111	0.0122	0.0123	0.0130	0.0131	0.0147	0.0140
	16384	0.0037	0.0041	0.0043	0.0046	0.0053	0.0054	0.0061	0.0058	0.0063	0.0066
	65536	0.0020	0.0020	0.0022	0.0022	0.0021	0.0022	0.0026	0.0025	0.0030	0.0029
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.0593	0.0619	0.0556	0.0571	0.0558	0.0640	0.0680	0.0645	0.0687	0.0619
	1024	0.0269	0.0240	0.0288	0.0265	0.0284	0.0282	0.0299	0.0318	0.0314	0.0334
	4096	0.0105	0.0114	0.0136	0.0118	0.0141	0.0139	0.0141	0.0142	0.0165	0.0148
	16384	0.0042	0.0043	0.0053	0.0055	0.0058	0.0056	0.0060	0.0066	0.0072	0.0073
	65536	0.0016	0.0019	0.0020	0.0020	0.0024	0.0024	0.0029	0.0030	0.0032	0.0031

Tabela 8.A1.7 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=85$, prêmio=0.10606414 e $pr\{\text{exercício}\}=0.016727067$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.0355	0.0287	0.0317	0.0317	0.0338	0.0321	0.0335	0.0342	0.0315	0.0304
	1024	0.0171	0.0161	0.0143	0.0149	0.0142	0.0171	0.0143	0.0139	0.0166	0.0156
	4096	0.0077	0.0081	0.0078	0.0082	0.0081	0.0081	0.0074	0.0089	0.0080	0.0081
	16384	0.0040	0.0041	0.0038	0.0040	0.0038	0.0039	0.0035	0.0041	0.0039	0.0040
	65536	0.0018	0.0020	0.0021	0.0020	0.0019	0.0019	0.0020	0.0018	0.0020	0.0021
Amostram Descritiva	256	0.0304	0.0305	0.0299	0.0276	0.0316	0.0281	0.0328	0.0271	0.0313	0.0259
	1024	0.0148	0.0145	0.0139	0.0129	0.0158	0.0151	0.0154	0.0139	0.0168	0.0149
	4096	0.0074	0.0078	0.0078	0.0077	0.0077	0.0069	0.0073	0.0078	0.0080	0.0081
	16384	0.0039	0.0036	0.0041	0.0043	0.0039	0.0042	0.0040	0.0041	0.0040	0.0039
	65536	0.0018	0.0019	0.0018	0.0018	0.0019	0.0019	0.0020	0.0020	0.0020	0.0019
Richtmyer Randomizado	256	0.0317	0.0290	0.0277	0.0310	0.0287	0.0286	0.0277	0.0321	0.0265	0.0313
	1024	0.0139	0.0155	0.0141	0.0151	0.0163	0.0153	0.0146	0.0150	0.0130	0.0152
	4096	0.0068	0.0071	0.0073	0.0080	0.0083	0.0079	0.0077	0.0074	0.0067	0.0068
	16384	0.0030	0.0030	0.0031	0.0048	0.0046	0.0041	0.0041	0.0039	0.0039	0.0038
	65536	0.0015	0.0014	0.0015	0.0017	0.0020	0.0019	0.0018	0.0019	0.0018	0.0020
Sobol' Randomizado	256	0.0303	0.0298	0.0303	0.0275	0.0315	0.0331	0.0350	0.0306	0.0305	0.0318
	1024	0.0147	0.0147	0.0150	0.0152	0.0137	0.0157	0.0137	0.0161	0.0161	0.0150
	4096	0.0062	0.0068	0.0065	0.0069	0.0066	0.0074	0.0073	0.0070	0.0076	0.0076
	16384	0.0027	0.0028	0.0031	0.0031	0.0031	0.0034	0.0035	0.0037	0.0037	0.0033
	65536	0.0012	0.0011	0.0012	0.0013	0.0015	0.0014	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.0237	0.0277	0.0278	0.0260	0.0318	0.0320	0.0276	0.0280	0.0332	0.0289
	1024	0.0139	0.0139	0.0168	0.0155	0.0151	0.0157	0.0168	0.0159	0.0165	0.0158
	4096	0.0081	0.0082	0.0085	0.0080	0.0086	0.0079	0.0078	0.0080	0.0078	0.0078
	16384	0.0037	0.0037	0.0042	0.0035	0.0041	0.0040	0.0042	0.0039	0.0037	0.0041
	65536	0.0016	0.0019	0.0021	0.0019	0.0019	0.0020	0.0021	0.0019	0.0019	0.0019
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.0313	0.0309	0.0268	0.0279	0.0243	0.0285	0.0373	0.0280	0.0313	0.0280
	1024	0.0147	0.0139	0.0136	0.0142	0.0141	0.0144	0.0163	0.0143	0.0148	0.0156
	4096	0.0074	0.0074	0.0081	0.0073	0.0076	0.0075	0.0076	0.0076	0.0077	0.0080
	16384	0.0042	0.0039	0.0043	0.0038	0.0039	0.0038	0.0042	0.0037	0.0040	0.0040
	65536	0.0019	0.0020	0.0018	0.0017	0.0018	0.0016	0.0019	0.0019	0.0018	0.0019
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.0317	0.0305	0.0336	0.0345	0.0311	0.0316	0.0304	0.0307	0.0286	0.0343
	1024	0.0138	0.0138	0.0153	0.0164	0.0156	0.0159	0.0158	0.0153	0.0169	0.0152
	4096	0.0075	0.0073	0.0073	0.0080	0.0073	0.0072	0.0078	0.0072	0.0078	0.0069
	16384	0.0038	0.0039	0.0037	0.0038	0.0037	0.0036	0.0038	0.0039	0.0038	0.0040
	65536	0.0019	0.0020	0.0019	0.0020	0.0020	0.0019	0.0019	0.0019	0.0020	0.0019
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0226	0.0221	0.0296	0.0316	0.0258	0.0260	0.0340	0.0257	0.0311	0.0315
	1024	0.0141	0.0136	0.0150	0.0152	0.0143	0.0151	0.0141	0.0148	0.0145	0.0145
	4096	0.0059	0.0057	0.0062	0.0064	0.0072	0.0073	0.0070	0.0070	0.0073	0.0071
	16384	0.0024	0.0025	0.0027	0.0029	0.0029	0.0031	0.0033	0.0034	0.0033	0.0033
	65536	0.0011	0.0011	0.0013	0.0013	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0016	0.0015
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.0276	0.0310	0.0260	0.0254	0.0306	0.0287	0.0359	0.0314	0.0298	0.0298
	1024	0.0149	0.0139	0.0138	0.0147	0.0141	0.0137	0.0138	0.0158	0.0140	0.0163
	4096	0.0061	0.0071	0.0070	0.0064	0.0075	0.0076	0.0072	0.0068	0.0079	0.0074
	16384	0.0027	0.0027	0.0032	0.0032	0.0033	0.0034	0.0033	0.0034	0.0037	0.0035
	65536	0.0010	0.0013	0.0011	0.0013	0.0014	0.0015	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016

Tabela 8.A1.8 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=95$, prêmio=0.021932391 e $pr\{\text{exercício}\}=0.0036513212$.

	N	Dimensionalidade do Modelo									
		5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Amostram Aleatória Simples	256	0.0173	0.0128	0.0146	0.0145	0.0164	0.0140	0.0141	0.0147	0.0132	0.0116
	1024	0.0074	0.0075	0.0066	0.0069	0.0066	0.0081	0.0058	0.0066	0.0069	0.0075
	4096	0.0033	0.0035	0.0033	0.0035	0.0034	0.0034	0.0031	0.0038	0.0035	0.0035
	16384	0.0017	0.0018	0.0017	0.0018	0.0017	0.0018	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018
	65536	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008	0.0009	0.0009
Amostram Descritiva	256	0.0145	0.0135	0.0123	0.0124	0.0147	0.0115	0.0120	0.0106	0.0144	0.0108
	1024	0.0061	0.0066	0.0061	0.0057	0.0070	0.0066	0.0068	0.0064	0.0078	0.0055
	4096	0.0035	0.0034	0.0032	0.0032	0.0033	0.0033	0.0031	0.0034	0.0034	0.0035
	16384	0.0015	0.0016	0.0017	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0018	0.0019	0.0018
	65536	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008
Richtmyer Randomizado	256	0.0169	0.0106	0.0121	0.0154	0.0118	0.0116	0.0094	0.0151	0.0099	0.0106
	1024	0.0068	0.0058	0.0065	0.0073	0.0065	0.0079	0.0062	0.0073	0.0057	0.0072
	4096	0.0034	0.0032	0.0032	0.0038	0.0035	0.0036	0.0032	0.0033	0.0029	0.0032
	16384	0.0015	0.0015	0.0017	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0016
	65536	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008
Sobol' Randomizado	256	0.0131	0.0133	0.0120	0.0106	0.0154	0.0153	0.0175	0.0140	0.0136	0.0145
	1024	0.0075	0.0074	0.0059	0.0076	0.0066	0.0079	0.0059	0.0070	0.0070	0.0074
	4096	0.0033	0.0032	0.0031	0.0033	0.0029	0.0035	0.0035	0.0032	0.0034	0.0037
	16384	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0017	0.0016	0.0018	0.0017
	65536	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
Amostragem Descritiva controlada por Richtmyer Randomizado	256	0.0087	0.0094	0.0088	0.0078	0.0149	0.0142	0.0103	0.0096	0.0159	0.0114
	1024	0.0061	0.0056	0.0078	0.0071	0.0062	0.0068	0.0075	0.0070	0.0078	0.0062
	4096	0.0034	0.0032	0.0033	0.0037	0.0036	0.0030	0.0035	0.0031	0.0032	0.0037
	16384	0.0018	0.0017	0.0018	0.0016	0.0017	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0019
	65536	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008
Amostragem Descritiva Bipartida	256	0.0170	0.0142	0.0112	0.0111	0.0095	0.0107	0.0177	0.0116	0.0144	0.0104
	1024	0.0074	0.0063	0.0060	0.0063	0.0063	0.0062	0.0065	0.0055	0.0064	0.0071
	4096	0.0031	0.0036	0.0036	0.0031	0.0032	0.0036	0.0035	0.0032	0.0036	0.0036
	16384	0.0018	0.0016	0.0018	0.0016	0.0018	0.0016	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017
	65536	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0009
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por AD Bipartida	256	0.0153	0.0140	0.0137	0.0140	0.0119	0.0129	0.0144	0.0117	0.0123	0.0152
	1024	0.0057	0.0060	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0069	0.0067	0.0076	0.0063
	4096	0.0030	0.0031	0.0033	0.0034	0.0032	0.0033	0.0036	0.0032	0.0041	0.0032
	16384	0.0017	0.0018	0.0017	0.0018	0.0016	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0018
	65536	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0009	0.0008	0.0009	0.0008	0.0009
Amostragem Descritiva Bidimensional controlada por Sobol' Rand	256	0.0080	0.0076	0.0120	0.0155	0.0096	0.0086	0.0159	0.0105	0.0133	0.0147
	1024	0.0065	0.0069	0.0074	0.0073	0.0067	0.0070	0.0067	0.0068	0.0073	0.0066
	4096	0.0027	0.0027	0.0030	0.0030	0.0033	0.0032	0.0030	0.0033	0.0034	0.0032
	16384	0.0013	0.0013	0.0014	0.0014	0.0015	0.0016	0.0016	0.0018	0.0015	0.0017
	65536	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	0.0006	0.0007	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008
Sobol' com Ciclo Completo e Randomização Discreta	256	0.0112	0.0130	0.0098	0.0104	0.0150	0.0128	0.0175	0.0137	0.0133	0.0149
	1024	0.0076	0.0063	0.0056	0.0074	0.0056	0.0067	0.0060	0.0067	0.0060	0.0081
	4096	0.0031	0.0034	0.0033	0.0031	0.0033	0.0035	0.0033	0.0030	0.0036	0.0034
	16384	0.0014	0.0015	0.0014	0.0014	0.0016	0.0016	0.0015	0.0017	0.0017	0.0016
	65536	0.0006	0.0007	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008

Tabela 8.A1.9 Erro padrão para estimativas do prêmio de opção europeia estimada com diferentes técnicas de amostragem. $K=105$, prêmio=0.0042342904 e $pr\{\text{exercício}\}=0.00072844627$.

9 Conclusão

O objetivo inicial desta tese foi o de propor formas de agregar controle multivariado à técnica da Amostragem Descritiva. De início, foi percebido que esse controle criaria a necessidade de identificação das variáveis mais importantes do modelo de simulação, assim como ocorre com as técnicas Quasi-Monte Carlo. Durante o processo da tese, percebeu-se também que o primeiro objetivo poderia ser ampliado de forma que passou a ser o de propor formas de combinar as melhores características da Amostragem Descritiva – o controle univariado ótimo e a eficiência computacional no cálculo da inversa da F.D.A. – com o controle multivariado das técnicas Quasi-Monte Carlo.

Para este objetivo ampliado, foram exploradas algumas formas de combinação que resultaram nas técnicas de amostragem propostas. Duas propostas podem ser consideradas formas de imitação: a AD Bipartida imitando a propriedade A do Sobol' e o Sobol' com ciclo completo e randomização discreta imitando a Amostragem Descritiva. A terceira técnica, a AD Bidimensional, foi inspirada na própria Amostragem Descritiva e resultou em um elemento construtivo análogo ao vetor descritivo. Essa técnica pode ser usada em combinação com as duas primeiras e foi verificado que essa combinação faz com que a AD Bipartida e o Sobol' fiquem menos sensíveis a aumentos da dimensionalidade, conferindo algo que pode ser chamado de “profundidade dimensional” às técnicas de controle multidimensional. Também foi proposta uma técnica na qual a série de Richtmyer seria usada para ordenar o vetor descritivo, contudo, apesar desta série ter conseguido bons resultados individualmente, a combinação dela com a Amostragem Descritiva não produziu melhoras em relação às duas técnicas.

Para atender a necessidade de identificação das variáveis mais importantes, foi pensado um método que, posteriormente foi verificado já estar contemplado na literatura. Embora esse método seja considerado limitado, ele conseguiu produzir resultados satisfatórios para fins de associação de variáveis de modelos com as dimensões das técnicas amostrais. Esse método também produziu resultados que foram utilizados na análise dos resultados dos experimentos com as técnicas amostrais. Em função da sua facilidade de uso, é uma técnica que merece ser mais explorada, a fim de se conhecer melhor suas limitações em problemas de finanças.

Com relação às principais contribuições efetivas dessa tese, podem ser relacionadas as três propostas de amostragem mencionadas acima. Conforme foi visto nos capítulos 6 e 8, existem diferentes graus de aplicabilidade associados a cada uma. A AD Bipartida e o Sobol' de ciclo completo com randomização discreta são técnicas prontas para uso. Nos dois casos, o esforço computacional extra em relação à técnica da qual derivam – a Amostragem Descritiva e o Sobol' – é pequeno e os resultados são, em geral, mais precisos. Portanto, é possível recomendar que o uso das duas técnicas propostas seja preferido ao uso das técnicas das quais derivam.

Os resultados obtidos na tese também permitem fazer algumas considerações sobre qual das duas técnicas é preferível, a AD Bipartida ou o Sobol' de ciclo completo. Como a AD Bipartida recai para uma Amostragem Descritiva tradicional, a “maldição da dimensionalidade” é limitada a precisão da Amostragem Descritiva tradicional, ao contrário do que ocorre com Sobol', que pode produzir resultados muito ruins. Se não houver um conhecimento prévio da estrutura de hierarquia, o uso de Sobol' pode associar dimensões muito ruins a variáveis muito importantes. Portanto, se a dimensionalidade efetiva for muito grande ou a estrutura

hierárquica for desconhecida, pode ser mais seguro usar a AD Bipartida que o Sobol' com ciclo completo. Além disso, é necessário levar em consideração a implementação e o tempo de processamento de cada técnica.

Já a AD Bidimensional provou ser uma idéia que tem potencial, visto que os resultados obtidos por ela foram bons. O seu maior potencial de uso parece ser na ampliação do controle multivariado, algo que pode ser útil em problemas de dimensionalidade muito elevada. Mas mesmo em dimensionalidades menores, foi visto que ela pode ser útil quando o tamanho da amostra é pequeno. No entanto, é uma técnica que ainda necessita de algum aperfeiçoamento para poder ser considerada pronta para uso. O maior problema dessa técnica reside na preparação da matriz U_2 , feita pelo ordenamento da soma das coordenadas dos pontos. Infelizmente, o ordenamento é uma operação computacionalmente pesada, o que acaba acarretando em um aumento do tempo que, talvez, fosse mais bem aproveitado pelo simples aumento da amostra. Assim, antes que a AD Bidimensional possa ser considerada pronta para uso prático, é necessário melhorar este processo, conforme sugerido no capítulo 6. Além disso, os dois critérios de ordenamento propostos – isto é, a soma e o produto das coordenadas – foram testados muito rapidamente. É possível que testes mais profundos mostrem que o produto devesse ter sido escolhido ou, ainda, que algum outro critério leve a resultados melhores.

Entre as contribuições secundárias dessa tese, pode ser relacionado o esforço para disponibilizar informação, suficiente e acessível, necessária para o entendimento e utilização de Sobol' ou ponte browniana. A literatura disponível na área discute pouco várias questões abordadas – como os ciclos de Sobol' - e também é omissa em vários detalhes que são necessários para o seu uso correto,

dificultando o entendimento inicial. A intenção na elaboração destas partes da tese foi oferecer um material que pudesse ser consultado como primeira leitura, mas também fosse suficiente para permitir a utilização das técnicas mencionadas.

Dessa tese também resulta material que, possivelmente, pode ser aproveitada para fins de publicação acadêmica. De imediato, a AD Bipartida, o Sobol' de ciclo completo e a AD Bidimensional obtiveram resultados que podem ser apresentados. A necessidade de obter formas melhores de ordenar a AD Bidimensional também pode ser fonte de trabalhos futuros e deve ser explorada brevemente.

Ainda com relação a AD Bidimensional, outra área que deve ser explorada é a possibilidade de utilizar apenas um "bloco" para as duas dimensões mais importantes e gerar as demais dimensões com Sobol' ou outra técnica. Durante a fase de inicial de testes das técnicas, essa idéia chegou a ser testada com um modelo de europeia, mas optou-se por não levá-la adiante nesta tese. A partir dos resultados obtidos pode-se retomar a essa idéia com o modelo da ponte browniana. Eventualmente, esse conceito pode levar a criação de AD d-dimensionais, para os casos em que existam d dimensões importantes. Por fim, devido aos bons resultados obtidos com o uso de lattices, registrados na literatura, e a sua semelhança com a AD Bidimensional, pode se explorar a idéia de usar lattices em substituição da AD Bidimensional.

Os resultados obtidos na tese também levantaram a questão da origem das reduções de variâncias, embora tenham sido arriscadas poucas respostas. Num primeiro nível, surge a pergunta de qual é a contribuição de cada aspecto das técnicas, por exemplo, qual a participação do controle multivariado e da distribuição uniforme ótima na redução da variância. Num segundo nível, deve ser entendido

como esses aspectos interagem com os diferentes modelos, com atenção para questões como dimensionalidade, dimensionalidade efetiva e probabilidade de exercício e se o modelo avalia média ou quantil. Embora essas questões possam parecer pouco aplicadas, esse entendimento talvez possa ser utilizado para o desenvolvimento de novas técnicas de amostragem, assim como a seleção prévia das técnicas existentes.

Anexos

Este anexo contém *scripts* de Matlab que podem ser usados para gerar matrizes U referentes às técnicas utilizadas nesta tese (com os vetores referentes a cada dimensão na vertical ou na horizontal). Para usá-los, é necessário transformar cada um deles em um arquivo tipo “M-file” do Matlab. Isso pode ser feito copiando cada um deles para o editor do Matlab e salvando com o nome adequado (informado no cabeçalho de cada *script*). Um arquivo *zipado* com arquivos semelhantes (mas com Sobol’ podendo ir até 20.201 dimensões) pode ser obtido com o autor por e-mail: sergio_gouvea@yahoo.com

This annex contains Matlab scripts that can be used to generate matrixes of uniform variates to be used as input in Monte Carlo simulation in replacement of usual random numbers. Each script should be copied and saved as a separate M-file and named with the name suggested in its header. A zip file with similar files (but with Sobol’ reaching up to 20.201 dimensions can be obtained with the author by e-mail: sergio_gouvea@yahoo.com)

Anexo 1: Script para gerar Amostragem Descritiva (*Descriptive Sampling*)

```

% M File: "DescriptiveSample.m"
% Autor: Sergio Gouvea      sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UF RJ - May 2008
% Generates a Matrix with the values of Descriptive Vectors (Horizontal or Vertical)
% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "DescriptiveSample.m"
% 2) Call: "DescriptiveSample (N, Dimensions, Vertical)",
%       where:
%       "N" = sample size;
%       "Dimensions" = # of dimensions (or variables) generated;
%       "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensions Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a vertical vector
%                   "0" generates a Dimensions-by-N Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a horizontal vector
%
function [MatrizDescritivo] = DescriptiveSample (N, Dimensoes, Vertical)
if Vertical == 1
    p = [1:N];
    vetorDescritivo = rot90((p-1+0.5)/N);
    for i = 1:Dimensoes
        MatrizDescritivo(:,i) = vetorDescritivo(randperm(N));
    end
else
    p = [1:N];
    vetorDescritivo = (p-1+0.5)/N;
    for i = 1:Dimensoes
        MatrizDescritivo(i,:) = vetorDescritivo(randperm(N));
    end
end
end

```

Anexo 2: Script para gerar Richtmyer randomizado (randomized Richtmyer)

```

% M File: "GeraRichtRand.m"
% Autor: Sergio Gouvea      sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UF RJ - May 2008
% Generates a Matrix whose vectors are values of Richtmyer series (Horizontal or Vertical) randomised with "random shift modulo 1"
% Richtmyer series generated using square roots of prime numbers
% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "GeraRichtRand.m"
% 2) Call: "GeraRichtRand(N, Dimensoes, Vertical)",
%     where:
%     "N" = sample size;
%     "Dimensoes" = # of dimensions (or variables) generated;
%     "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensoes Matrix, i.e. each dimension
%                 is represented by a vertical vector
%                 "0" generates a Dimensoes-by-N Matrix, i.e. each dimension
%                 is represented by a horizontal vector
%
% ATTENTION: Must have "primos_ruins5000_001.mat" (a MAT file containing array "primos_ruins",
% a collection of prime #s found to produce inferior results.
%
function [Richtmyer] = GeraRichtRand(N, Dimensoes, Vertical)

VetorRandomizador = rand(1,Dimensoes);
primos_ruins = [1;17;41;43;73;151;157;181;193;199;227;233;241;263;277;281;313;337;353;373;379;401;
431;433;443;449;457;461;479;503;509;541;557;563;569;577;587;593;599;601;613;617;619;631;641;
643;653;661;673;691;701;709;719;727;733;739;743;751;761;769;787;797;809;811;821;827;829;857;859;
877;881;883;887;907;911;919;929;937;941;953;967;971;983;991;1009;1013;1019;1021;1031;1033;1039;
1049;1051;1061;1063;1069;1091;1093;1097;1103;1109;1117;1123;1129;1151;1163;1171;1181;1193;1201;
1213;1217;1223;1229;1231;1237;1249;1259;1279;1283;1289;1297;1301;1303;1307;1319;1321;1327;1361;
1367;1373;1381;1399;1423;1427;1429;1433;1447;1453;1459;1481;1489;1493;1499;1511;1523;1531;1543;
1559;1567;1571;1579;1583;1597;1601;1609;1613;1619;1621];
%load primos_ruins5000_001;
d=Dimensoes;

primes = [2];
candidate = 3;
% Or use these 2 lines to skip first 1000 primes
%primes = [7927];
%candidate = 7933;

while length(primes) < d
    if isprime(candidate) & isempty(find(primos_ruins==candidate))
        primes = [primes candidate];
    end
    candidate = candidate + 1;
end

Jota_inicial = 10000; % initial "j" or "seed"
Jotas = [1+Jota_inicial:N+Jota_inicial]';

for dim = 1:d
    Richtmyer(:,dim) = mod( Jotas * sqrt(primes(dim)) + VetorRandomizador(dim) ,1);
end

if Vertical == 1
    %Richtmyer = Richtmyer;
else
    Richtmyer = Richtmyer';
end
end

```


Anexo 5: Script para gerar Amostragem Descritiva ordenada por Richtmyer randomizado (*Descriptive Sampling ordered by randomized Richtmyer*)

```
% M File: "GeraAD_RichtRand.m"
% Autor: Sergio Gouvea      sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UF RJ - May 2008
% Generates a Matrix whose vectors' values are the same of the Descriptive Vector, but ordered with
% Richtmyer series (Horizontal or Vertical) randomised with "random shift modulo 1"
% Richtmyer series generated using square roots of prime numbers
% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "GeraAD_RichtRand.m"
% 2) Call: "GeraAD_RichtRand(N, Dimensoes, Vertical)",
%     where:
%     "N" = sample size;
%     "Dimensoes" = # of dimensions (or variables) generated;
%     "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensoes Matrix, i.e. each dimension
%                 is represented by a vertical vector
%                 "0" generates a Dimensoes-by-N Matrix, i.e. each dimension
%                 is represented by a horizontal vector
%
% ATTENTION: Must have "primos_ruins5000_001.mat" (a MAT file containing array "primos_ruins",
% a collection of prime #s found to produce inferior results.
%
function [AD_RichtRand] = GeraAD_RichtRand (N, Dimensoes, Vertical)

VetorRandomizador = rand(1,Dimensoes);
primos_ruins = [1;17;41;43;73;151;157;181;193;199;227;233;241;263;277;281;313;337;353;373;379;401;
431;433;443;449;457;461;479;503;509;541;557;563;569;577;587;593;599;601;613;617;619;631;641;
643;653;661;673;691;701;709;719;727;733;739;743;751;761;769;787;797;809;811;821;827;829;857;859;
877;881;883;887;907;911;919;929;937;941;953;967;971;983;991;1009;1013;1019;1021;1031;1033;1039;
1049;1051;1061;1063;1069;1091;1093;1097;1103;1109;1117;1123;1129;1151;1163;1171;1181;1193;1201;
1213;1217;1223;1229;1231;1237;1249;1259;1279;1283;1289;1297;1301;1303;1307;1319;1321;1327;1361;
1367;1373;1381;1399;1423;1427;1429;1433;1447;1453;1459;1481;1489;1493;1499;1511;1523;1531;1543;
1559;1567;1571;1579;1583;1597;1601;1609;1613;1619;1621];
%load primos_ruins5000_001;
d=Dimensoes;

primes = [2];
candidate = 3;
% Or use these 2 lines to skip first 1000 primes
%primes = [7927];
%candidate = 7933;

while length(primes) < d
    if isprime(candidate) & isempty(find(primos_ruins==candidate))
        primes = [primes candidate];
    end
    candidate = candidate + 1;
end

Jota_inicial = 10000; % initial "j" or "seed"
Jotas = [1+Jota_inicial:N+Jota_inicial]';

for dim = 1:d
    Richtmyer(:,dim) = mod( Jotas * sqrt(primes(dim)) + VetorRandomizador(dim) ,1);
end

p = [1:N];
vetorDescritivo = ((p-0.5)/N)';

for i = 1:d %cria amostra Descritiva
    Aux = [Richtmyer(:,i) vetorDescritivo];
    Aux = sortrows(Aux);
    AD_RichtRand(:,i) = Aux(:,2);
end

if Vertical == 1
    %AD_RichtRand = AD_RichtRand;
else
    AD_RichtRand = AD_RichtRand';
end
```

Anexo 6: Script para gerar Amostragem Descritiva Bipartida (*Splited Descriptive Sampling*)

```

% M File: "DSSplit.m" (Bipartido)
% Autor: Sergio Gouvea sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UF RJ - May 2008
% Generates a Matrix with the values of Descriptive Vectors (Horizontal or Vertical) with the proposed "bipartida" control
% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "DSSplit.m"
% 2) Call: "DSSplit(N, Dimensoes, Vertical)",
% where:
% "N" = sample size;
% (ATTENTION: N must be  $N=2^n$ , where "n" is an integer and  $n > 2$ )
% "Dimensoes" = # of dimensions (or variables) generated;
% "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensions Matrix, i.e. each dimension
% is represented by a vertical vector
% "0" generates a Dimensions-by-N Matrix, i.e. each dimension
% is represented by a horizontal vector
%
function [MatrizDescritivo] = DSSplit(N, Dimensoes, Vertical)

if and( mod(log(N)/log(2),1)==0 , N > 2 )
    p_matrix(1,:) = [1:N/2];
    p_matrix(2,:) = [N/2+1:N];
    DescriptiveVectorBase = transpose( (p_matrix-0.5)/N );
    DescriptiveVectorBaseAux = transpose(DescriptiveVectorBase);
    for i = 1:Dimensoes
        DescriptiveVectorBaseAux(1,:) = DescriptiveVectorBase(randperm(N/2));
        DescriptiveVectorBaseAux(2,:) = DescriptiveVectorBase(randperm(N/2)+N/2);
        if 2^(i-1) < N
            number_of_blocks = 2^(i-1);
            block_size = (N/2)/number_of_blocks;
            flip_first_block = rand;
            if flip_first_block > 0.5
                for j = 1:number_of_blocks/2
                    pos_shift = (j-1)*2*block_size + 1;
                    DescriptiveVectorBaseAux(1:2 , pos_shift:pos_shift + block_size -1) = flipud(
DescriptiveVectorBaseAux(1:2 , pos_shift:pos_shift + block_size -1) );
                end
            else
                for j = 1:number_of_blocks/2
                    pos_shift = (j-1)*2*block_size + 1;
                    DescriptiveVectorBaseAux(1:2 , pos_shift + block_size:pos_shift + 2*block_size -1) = flipud(
DescriptiveVectorBaseAux(1:2 , pos_shift + block_size:pos_shift + 2*block_size -1) );
                end
            end
        else
            DescriptiveVectorBaseAux2 = [transpose(DescriptiveVectorBase(:,1)), transpose(DescriptiveVectorBase(:,2))];
            DescriptiveVectorBaseAux2 = DescriptiveVectorBaseAux2(randperm(N));
            DescriptiveVectorBaseAux(1,:) = DescriptiveVectorBaseAux2(1:N/2);
            DescriptiveVectorBaseAux(2,:) = DescriptiveVectorBaseAux2(N/2+1:N);
        end
    end
    DescriptiveVector = DescriptiveVectorBaseAux(1:N);
    if Vertical == 1
        MatrizDescritivo(:,i) = transpose(DescriptiveVector);
    else
        MatrizDescritivo(i,:) = DescriptiveVector;
    end
end
end
flip_first_dim = rand;
if flip_first_dim > 0.5
    if Vertical == 1
        MatrizDescritivo(:,1) = flipud(MatrizDescritivo(:,1));
    else
        MatrizDescritivo(1,:) = fliplr(MatrizDescritivo(1,:));
    end
end
end
else
    'Err: N can not be expressed as  $N=2^n$ , where "n" is an integer and  $n > 2$ '
end
end

```


Anexo 8: Script para gerar Amostragem Descritiva Bidimensional ordenada por Amostragem Descritiva Bipartida (*Bidimensional Descriptive Sampling ordered by Splited Descriptive Sampling*)

```

% M File: "DSBidim_comBipartida.m"
% Autor: Sergio Gouvea      sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UFRJ - May 2008
% Generates a Matrix whose vectors are the values of Bidimensional
% Discriptive Sample ordered with Splited DS, a.k.a. "Amostragem Descritiva Bipartida".

% ATTENTION: (must have "DSSplit.m" in the same folder).

% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "DSBidim_comBipartida.m"
% 2) Call: "DSBidim_comBipartida(N, Dimensoes, Vertical)",
%       where:
%       "N" = sample size;
%       "Dimensoes" = # of dimensions (or variables) generated;
%       "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensoes Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a vertical vector
%                   "0" generates a Dimensoes-by-N Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a horizontal vector

%Gera matriz de Descritivos-Bidimensional na Horizontal ou na Vertical ordenada por AD Bipartida

function [DescriptiveMatrix] = DSBidim_comBipartida(N, Dimensoes, Vertical)
DescriptiveMatrix = pair_of_dim(N, Vertical);
SplitDS_Matrix = DSSplit(N, ceil(Dimensoes/2), 1);
Scramble_Matrix = SplitDS_Matrix * N + 0.5;
scramble = Scramble_Matrix(:,1);
if Vertical == 1
    DescriptiveMatrix = DescriptiveMatrix(scramble,:);
else
    DescriptiveMatrix = DescriptiveMatrix(:, scramble);
end
for i = 3:2:Dimensoes
    DescriptiveMatrixAux = pair_of_dim(N, Vertical);
    scramble = Scramble_Matrix(:,ceil(i/2));
    if Vertical == 1
        DescriptiveMatrixAux = DescriptiveMatrixAux(scramble,:);
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix DescriptiveMatrixAux];
    else
        DescriptiveMatrixAux = DescriptiveMatrixAux(:, scramble);
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix; DescriptiveMatrixAux];
    end
end
if mod(Dimensoes,2) == 1
    DescriptiveVector = ([1:N]-0.5)/N;
    if Vertical == 1
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix(:, 1:Dimensoes-1) , DescriptiveVector(scramble)'];
    else
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix(1:Dimensoes-1, :) ; DescriptiveVector(scramble)];
    end
end

function [MatrizDescritivo] = pair_of_dim(N, Vertical)
if floor(sqrt(N))==sqrt(N) & N>=1
    grid_size = sqrt(N);
    y=zeros(0,0);
    for i=1:grid_size
        y=[y ones(grid_size,1)*i];
    end
    x = y';
    Y = x-1;
    X = y-1;
    for i=1:grid_size
        x(:,i) = randperm(grid_size)';
        y(i,:) = randperm(grid_size);
    end
    matrix_X = X/grid_size + (x-0.5)/grid_size^2;
    matrix_Y = Y/grid_size + (y-0.5)/grid_size^2;
    if Vertical == 1
        MatrizDescritivo = zeros(N, 2);
        for i = 1:N
            MatrizDescritivo(i,1) = matrix_X(i);
            MatrizDescritivo(i,2) = matrix_Y(i);
        end
        % ORDENACAO CONJUNTA
        Aux = [zeros(N,1) MatrizDescritivo];
        Aux(:,1) = Aux(:,2) + Aux(:,3);
        Aux = sortrows(Aux);
        MatrizDescritivo = Aux(:,2:3);

    else % output format is horizontal
        MatrizDescritivo = zeros(2, N);
        for i = 1:N
            MatrizDescritivo(1, i) = matrix_X(i);
            MatrizDescritivo(2, i) = matrix_Y(i);
        end

        Aux = [zeros(N,1) MatrizDescritivo];
        Aux(:,1) = Aux(:,2).*Aux(:,3);
        Aux = sortrows(Aux);
        MatrizDescritivo = Aux(:,2:3);
    end
end

```

```
end  
else  
    MatrizDescritivo = 'N" not a perfect square'  
end
```

Anexo 9: Script para gerar Amostragem Descritiva Bidimensional ordenada por Sobol' com randomização discreta (*Bidimensional Descriptive Sampling ordered by Sobol' with discrete randomization*)

```
% M File: "DSBidim_comSobolDiscreto.m"
% Autor: Sergio Gouvea      sergio_gouvea@yahoo.com
% Written for Doctoral Thesis presented at COPPEAD/UFRJ - May 2008
% Generates a Matrix whose vectors are the values of Bidimensional
% Discriptive Sample ordered with Discrete Sobol', i.e., the proposed
% Sobol' that emulates Descriptive Sampling

% ATTENTION: (must have "GeraSobolRand_discrete.m" in the same folder).

% INSTRUCTIONS:
% 1) Save this script as an M-FILE named "DSBidim_comSobolDiscreto.m"
% 2) Call: "DSBidim_comSobolDiscreto(N, Dimensoes, Vertical)",
%       where:
%       "N" = sample size;
%       "Dimensoes" = # of dimensions (or variables) generated;
%       "Vertical" = a boolean value, "1" generates an N-by-Dimensions Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a vertical vector
%                   "0" generates a Dimensions-by-N Matrix, i.e. each dimension
%                   is represented by a horizontal vector

%Gera matriz de Descritivos-Bidimensional na Horizontal ou na Vertical ordenada por Sobol Discreto

function [DescriptiveMatrix] = DSBidim_comSobolDiscreto(N, Dimensoes, Vertical)

DescriptiveMatrix = pair_of_dim(N, Vertical);
SplitDS_Matrix = GeraSobolRand_discrete(N, ceil(Dimensoes/2), 1);
Scramble_Matrix = SplitDS_Matrix * N + 0.5;
scramble = Scramble_Matrix(:,1);
if Vertical == 1
    DescriptiveMatrix = DescriptiveMatrix(scramble,:);
else
    DescriptiveMatrix = DescriptiveMatrix(:, scramble);
end
for i = 3:2:Dimensoes
    DescriptiveMatrixAux = pair_of_dim(N, Vertical);
    scramble = Scramble_Matrix(:,ceil(i/2));
    if Vertical == 1
        DescriptiveMatrixAux = DescriptiveMatrixAux(scramble,:);
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix DescriptiveMatrixAux];
    else
        DescriptiveMatrixAux = DescriptiveMatrixAux(:, scramble);
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix; DescriptiveMatrixAux];
    end
end
if mod(Dimensoes,2) == 1
    DescriptiveVector = ([1:N]-0.5)/N;
    if Vertical == 1
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix(:, 1:Dimensoes-1) , DescriptiveVector(scramble)'];
    else
        DescriptiveMatrix = [DescriptiveMatrix(1:Dimensoes-1, :) ; DescriptiveVector(scramble)];
    end
end

function [MatrizDescritivo] = pair_of_dim(N, Vertical)
if floor(sqrt(N))==sqrt(N) & N>=1
    grid_size = sqrt(N);
    y=zeros(0,0);
    for i=1:grid_size
        y=[y ones(grid_size,1)*i];
    end
    x = y';
    Y = x-1;
    X = y-1;
    for i=1:grid_size
        x(:,i) = randperm(grid_size)';
        y(i,:) = randperm(grid_size);
    end
    matrix_X = X/grid_size + (x-0.5)/grid_size^2;
    matrix_Y = Y/grid_size + (y-0.5)/grid_size^2;
    if Vertical == 1
        MatrizDescritivo = zeros(N, 2);
        for i = 1:N
            MatrizDescritivo(i,1) = matrix_X(i);
            MatrizDescritivo(i,2) = matrix_Y(i);
        end
    else
        % ORDENACAO CONJUNTA
        Aux = [zeros(N,1) MatrizDescritivo];
        Aux(:,1) = Aux(:,2) + Aux(:,3);
        Aux = sortrows(Aux);
        MatrizDescritivo = Aux(:,2:3);
    end
else
    MatrizDescritivo = zeros(2, N);
    for i = 1:N
        MatrizDescritivo(1, i) = matrix_X(i);
        MatrizDescritivo(2, i) = matrix_Y(i);
    end
end
```

```
Aux = [zeros(N,1) MatrizDescritivo];
Aux(:,1) = Aux(:,2).*Aux(:,3);
Aux = sortrows(Aux);
MatrizDescritivo = Aux(:,2:3);

    end

else
    MatrizDescritivo = "N" not a perfect square'
end
```

Referências

- Antonov, I. e Saleev, V. (1979). USSR Computational Mathematics and Mathematics Physics. Vol. 19, p. 252.
- Araújo, M. (2001). Simulação de Monte Carlo para Cálculo do Var: o Uso da Amostragem Descritiva. Dissertação de Mestrado, Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Archer, G., Saltelli, A. e Sobol', I. (1997). Sensitivity Measures, Anova-like Techniques and the use of Bootstrap. *Journal of Statistical Computation Simulation*. Vol. 58, pp. 59-120. Também disponível em: http://sensitivity-analysis.jrc.ec.europa.eu/tutorial/Archer_1997.pdf
- Banks, J. , Carson, J.S.II.e Nelson, B.L. (1996). Discrete-Event System Simulation. Prentice Hall, 2nd Edition.
- BLACK, F. e SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.
- Boyle, P.P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, **4**, 323-338.
- Bussab, W. e Morettin, P. (2003). *Estatística Básica*. Editora Saraiva, São Paulo. 5ª ed.
- Caflish, R., Morokoff, W. e Owen, A. (1997). Valuation of mortgage backed securities using brownian bridges to reduce effective dimensions. *Journal of Computational Finance*, 1, pp. 27-46.
- Cerny, A. (2003). *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets*. Princeton University Press.
- Charnes, J. M. (2000). Using Simulation for Option Pricing. *Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference*, editado por: J. A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, e P.
- Drew, S. e Homem-de-Melo, T. (2006). Quasi-Monte Carlo Strategies For Stochastic Optimization. Em: *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference*, editado por: L. F. Perrone, F. P. Wieland, J. Liu, B. G. Lawson, D.M. Nicol, and R. M. Fujimoto.
- Frye, J. (1998). Monte Carlo by Day: Intraday Value-at-Risk Using Monte Carlo Simulation. *Risk Magazine*. Novembro 1998. Disponível em: http://finmath.uchicago.edu/~frye/frye07/Monte_Carlo_by_Day.pdf
- Galanti, S. e Jung, A. (1997) Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices. *The Journal of Derivatives*, vol. 5, Fall 1997.

Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag, New York.

Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 5 ed.

Hull, J. C. (2007). *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Jäckel, P. (2002). *Monte Carlo methods in finance*. John Wiley & Sons, West Sussex.

James, F. (1980). Monte Carlo theory and practice. *Reports on Progress in Physics*, **43**, no. 9, 1145-1189.

James, F., Hoogland, J. e Kleiss, R. (1997). Multidimensional sampling for simulation and integration: measures, discrepancies, and quasi-random numbers. *Computer Physics Communications*, **99**, no. 2, 180-220.

Krykova, I. (2003). Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods. *Worcester Polytechnic Institute*. Tese de mestrado. Disponível em: <http://www.wpi.edu/Pubs/ETD/Available/etd-0113104-140925/>

L'Ecuyer, P. e Lemieux, C. (2002). Recent Advances in Randomized Quasi-Monte Carlo Methods. Em: *Modeling Uncertainty: An Examination of its Theory, Methods, and Applications*, editado por: M. Dror, P. L'Ecuyer, e F. Szidarovszki. Ed.: Kluwer Academic, 419 - 474, 2002. (Também disponível em: <http://www.math.ucalgary.ca/~lemieux/myftp/PAPERS/survey01.pdf>)

L'Ecuyer, P. (2003). Quasi-Monte Carlo Methods For Simulation. Em: *Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference*, editado por: S. Chick, P. J. Sánchez, D. Ferrin, and D. J. Morrice.

Lemgruber, E. (1995). *Avaliação de Contratos de Opções*. Bolsa de Mercadoria & Futuros, São Paulo. Ed. ampliada e revista.

Lemieux, C., M. Cieslak, and K. Luttmer. (2002). RandQMC user's guide: A package for randomized quasi-Monte Carlo methods in C. *Technical report 2002-712-15*, Department of Computer Science, University of Calgary.

Lemieux, C. (2004). Randomized Quasi-Monte Carlo: A Tool a for Improving the Efficiency of Simulations in Finance. In: *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*, ed. R. G. Ingalls, M. D. Rossetti, J. S. Smith, and B. A. Peters.

Liu, R e Owen, A. (2006). Estimating Mean Dimensionality of Analysis of Variance Decompositions. *Journal of the American Statistical Association*. Alexandria: Jun 2006. Vol. 101, Iss. 474; p. 712

Marins, J. (2006). Ensaio sobre a Aplicação de Técnicas de Redução de Variância

em Simulação Monte Carlo para a Avaliação de Opções e de Risco de Crédito. Tese de Doutorado, Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Marins, J., Santos, J. e Saliby, E. (2003). Avaliação de Técnicas de Redução de Variância na Estimação do Prêmio de Opções de Compra do Tipo Asiática. *Anais do XXXV - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.

Moreira, F. F. P. (2001). Estudo Comparativo dos Métodos de Quasi-Monte Carlo, Amostragem Descritiva, Hipercubo Latino e Monte Carlo Clássico na Análise de Risco. Dissertação de Mestrado, Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Niederreiter, H. (1992). *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia.

Owen, A. (2003). The dimension distribution, and quadrature test functions. *Statistica Sinica*, v. 13 n.1.

Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W. e Flannery, B. (1992) *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge. 2ª ed. Também disponível em: <http://www.fizyka.umk.pl/nrbook/bookcpdf.html>

Richtmyer, R.D. (1951). The Evaluation Of Definite Integrals, And A Quasi-Monte-Carlo Method Based On The Properties Of Algebraic Numbers. *Los Alamos Scientific Lab.: Technical Report*. Disponível em: http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=4405295 . Acesso em 29/07/2007.

Saliby, E. (1997). Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling. In: *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference*.

Saliby, E. (1989). *Repensando a Simulação: A Amostragem Descritiva*. Ed. Atlas.

Saliby, E. (1990). Descriptive Sampling: A Better Approach to Monte Carlo Simulation. *Journal of the Operational Research Society*, **41**, no 12, 1133-1142.

Saliby, E. e Gomes, G. C. (1994). Sobre o Uso Conjunto da Amostragem por Importância e da Amostragem Descritiva em Simulação por Monte Carlo. In: *Anais do VII Congresso Latino-Ibero Americano de Investigacion Operativa e Ingenieria de Sistemas (VII CLAIO)*.

Saliby, E., Gouvêa, S. e Marins, J. (2007). Amostragem descritiva no apreçamento de opções européias através de simulação Monte Carlo: o efeito da dimensionalidade e da probabilidade de exercício no ganho de precisão. *Pesquisa Operacional*, vol.27 no.1, pp. 1-13. Rio de Janeiro Jan./Apr. 2007.

Saliby, E. e Moreira, F. F. P. (2002). An Empirical Evaluation of Sampling Methods in Risk Analysis Simulation: Quasi-Monte Carlo, Descriptive Sampling and Latin Hypercube Sampling. *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*.

Saltelli, A., Tarantola, S. e Campolongo, F. (2000). Sensitivity Analysis as an Ingredient of Modeling. *Statistical Science*, Vol. 15, No. 4 (Nov., 2000), pp. 377-395.

Silveira, G. e Bessada, O. (2003). Análise de componentes principais de dados funcionais: Uma aplicação às Estruturas a Termo de Taxas de Juros. *Trabalhos para Discussão* nº 73. Banco Central do Brasil. Disponível em:
<http://www.bcb.gov.br/pec/wps/port/wps73.pdf>

Silva, M. E. (2002) Simulação de Quase Monte Carlo: quebrando a maldição da dimensionalidade, *Resenha BM&F*, nº 151.

Sloan, H. e Joe, S. (1994). *Lattice Methods for Multiple Integration*. Clarendon Press, Oxford.

Sobol', I.M. (1967). USSR Computational Mathematics and Mathematics Physics. Vol. 7, 86-112.

Takhtamyshev, G., Vandewoestyne, B. e Cools, R. (2007). Quasi-Random integration in high dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*, **73**, no. 5, 309-319.

WINIARSKI, M. www.f.kth.se/~f98-mwi/msctheses.pdf , Stockholm University, 1998.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)